

# Análisis numérico bidimensional de cascadas de turbomaquinas térmicas con flujos compresibles viscosos.

R. Chacartegui, E. Carvajal, A. Muñoz, T. Sánchez

*Escuela Superior de Ingenieros. Camino de los Descubrimientos, S/N  
41092 Sevilla(España). Tlfno:0034954484246; Fax:0034954487243  
E-mail: [ricardo@esi.us.es](mailto:ricardo@esi.us.es)*

## Resumen

Este artículo aborda la validación de una herramienta numérica, basada en técnicas de volúmenes finitos, para el estudio de flujos bidimensionales, compresibles, viscosos, previamente desarrollada, tras su adaptación a un mallador genérico comercial. Se describen las modificaciones añadidas al código original, de manera que se contemplen de manera adecuada las irregularidades del mallado, indicando la formulación empleada. Finalmente se presentan los resultados para dos configuraciones de cascadas de turbomáquinas axiales con perfiles NACA 65010 y C4 con diferentes incidencias.

## Abstract.

In this work the adaptation of a CFD code to highly unstructured meshes generated from a commercial code has been presented. The CFD code was previously developed within this group, and it solves the Navier-Stokes equations for viscous and compressible flows with finite volume techniques (SIMPLE and PISO). The main corrections are commented and the corrected code have been applied to the analysis of turbomachinery cascades.

**Keywords:** Finite volume methods, unstructured mesh, turbomachinery

## 1 Introducción.

El objeto de este trabajo ha sido adaptar un código CFD para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, desarrollado previamente dentro de este grupo, basado en técnicas de volúmenes finitos, a un mallador comercial con objeto de poder trabajar con geometrías complejas. Esto ha presentado una serie de modificaciones en la evaluación de los términos debido a las irregularidades del mallado de las cuales se presentan aquí las principales. El objetivo final era su aplicación al estudio de cascadas de álabes bidimensionales, en las cuales, y dado el esquema de resolución adoptado, la presencia de irregularidades en el mallado se ve acentuado debido al refinamiento en los contornos y las transiciones entre diferentes tamaños de volúmenes.

## 2. Definición del modelo.

El modelo empleado han sido las ecuaciones de Navier–Stokes para flujo bidimensional

- Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\omega + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (1)$$

· Ecuación de la Cantidad de Movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\omega + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma} \vec{\tau}' \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_m d\omega \quad (2)$$

· Ecuación de la Energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta\Omega} \rho e d\omega + \int_{\Delta\Sigma} \rho e \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Delta\Omega} -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\omega + \int_{\Delta\Sigma} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Delta\Omega} (\phi_r + \phi_v + \phi_q) d\omega \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en forma integral planteado (junto con las condiciones de contorno e iniciales correspondientes y la ecuación de estado del fluido), obtenemos los campos de velocidades, temperaturas, presiones y densidades en el dominio fluido, es decir, en todos los puntos existentes pertenecientes al volumen  $\Omega$ , para cualquier instante a partir del instante dado por las condiciones iniciales.

El dominio ha sido discretizado mediante cuadriláteros, empleando técnicas de volúmenes finitos para la aproximación de los valores en el interior de cada volumen y en las superficies de los contornos. Las aproximaciones de los diferentes términos de las integrales son idénticas a las empleadas en [1] por lo que no incidiremos en ello. Los métodos empleados para la resolución de estas ecuaciones son los métodos SIMPLE y PISO, clásicos en la formulación de volúmenes finitos [2-3].

### 3. Modificaciones al esquema original.

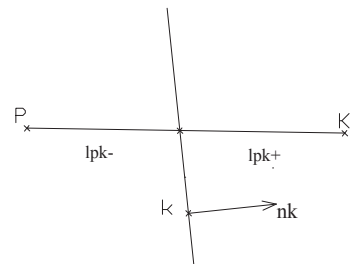
La principal diferencia frente a [1] radica en la adaptación a mallados altamente irregulares, obtenidos directamente de un programa para preprocesado y postprocesado comercial (GID), con la potencialidad que ello conlleva en cuanto a posibilidad de tratamiento de geometrías complejas y generación automática de mallados. Las principales modificaciones realizadas son:

a) evaluación de magnitudes en las caras para evaluar las integrales de superficie.

El valor de las magnitudes en las caras las hallamos como combinación de los valores en los centros de los volúmenes. Emplearemos una interpolación de primer orden

$$\phi_k = \begin{cases} \phi_P & \text{si } v_n > 0 \quad (\text{flujo saliente}) \\ \phi_K & \text{si } v_n < 0 \quad (\text{flujo entrante}) \end{cases} \quad \text{Interpolación UDS}$$

$$\phi_k = \left( \frac{lpk^+}{lpk^+ + lpk^-} \right) \phi_P + \left( \frac{lpk^-}{lpk^+ + lpk^-} \right) \phi_K \quad \text{Interpolación CDS}$$



(UDS) y otra de segundo orden (CDS). La interpolación de primer orden (UDS) reúne unas características de mayor estabilidad en el proceso de resolución y la de segundo orden una mayor mejora de la precisión de la solución frente a un refinamiento del mallado. Emplearemos combinaciones de ambas para intentar aprovechar las características de ambos esquemas.

$$F = F_{UDS}^{n+1} + (F_{CDS}^n - F_{UDS}^n) \quad (4)$$

b) evaluación gradientes.

Para la evaluación de los gradientes en el interior de un volumen se ha empleado el teorema de Gauss

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} d\omega &\approx \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \Big|_P \Delta\Omega_P \\ \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} d\omega &= \int_{\Delta\Sigma} \phi n_i d\sigma = \sum_k \phi_k n_{i_k} \Delta\Sigma_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \Big|_P \Delta\Omega_P \approx \sum_k \phi_k n_{i_k} \Delta\Sigma_k \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \Big|_P \approx \frac{1}{\Delta\Omega_P} \sum_k \phi_k n_{i_k} \Delta\Sigma_k$$

Sin embargo esta evaluación sin ninguna corrección adicional daba lugar a soluciones oscilantes, asociado a una doble interpolación de segundo orden en las caras, como la presentada en la Figura 1 y que ya advierte [3], se muestra como una solución oscilante es vista como suave al evaluar los valores en las caras y por tanto el método no hace por corregirla.

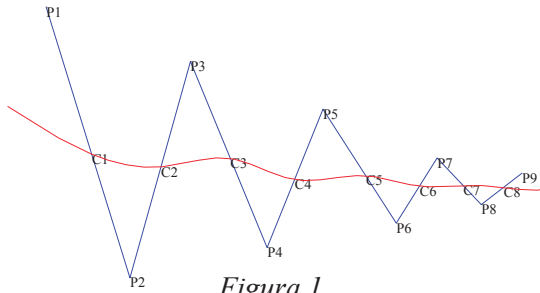


Figura 1

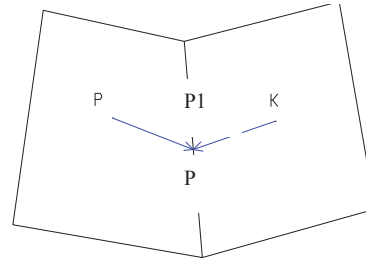


Figura 2

Para evitarlo introducimos una corrección del valor del gradiente en función del valor del mismo hallado anteriormente y de la posición de los centros del volumen y del volumen adyacente. Esto se repite de manera iterativa en la evaluación de cada gradiente hasta llegar a una convergencia.

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_P \approx \frac{\phi_K - \phi_P}{lp\vec{k} \cdot \vec{n}_k} + \left( \frac{\partial\phi^*}{\partial n} - \frac{\phi_K^* - \phi_P^*}{lp\vec{k} \cdot \vec{n}_k} \right) \quad (6)$$

c) corrección por centros de caras

se introdujeron estas correcciones (Figura 2) dado que el centro de cara en muchos casos se encuentra bastante alejado de la línea que une centros de volúmenes adyacentes, con el consiguiente error al evaluar el valor en el centro de la cara como representativo del valor entre ambos volúmenes. Esta corrección es similar a la realizada para la evaluación del gradiente. La formulación más sencilla es:

$$\phi_{P_1} = \phi_P + (\nabla \phi)_P (r_{P_1} - r_P) \quad (7)$$

donde se evalúa el gradiente interpolado en la cara, el cual multiplica a la diferencia entre el punto de corte de la línea con la cara y el centro geométrico de la misma.

### 3 Validación de la adaptación a mallas irregulares

De las múltiples validaciones del funcionamiento del método tras las modificaciones se presenta a modo de ejemplo el caso de una tobera convergente-divergente con un mallado regular y con uno irregular (Figura 3 )

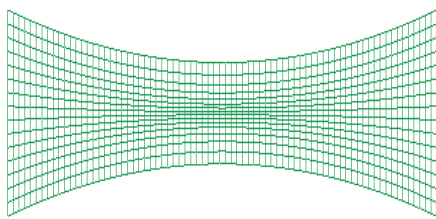
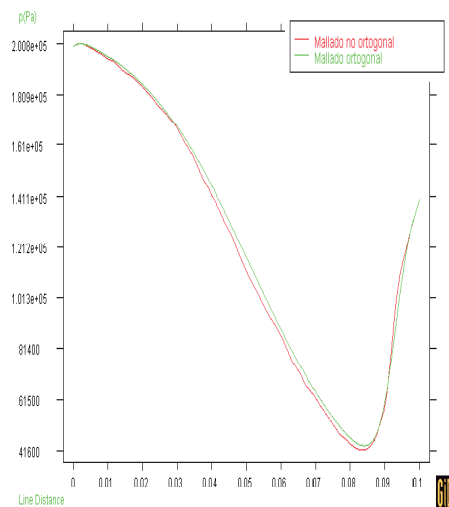
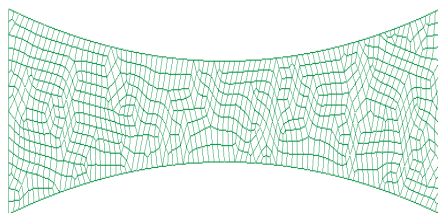


Figura 3



Se puede observar la coincidencia en los resultados en un caso y en otro.

Finalmente en las Figuras 4 a 11 se presentan los resultados, a modo de ejemplo de los múltiples obtenidos, para dos configuraciones de cascadas de álabes una formada por perfiles NACA 65010 y otra con perfiles C4, con un ángulo de calado de 33,6 °y un número de Mach a la entrada de 0,6, para tres incidencias diferentes, así como las gráficas del coeficiente de presiones correspondientes. Los resultados son coincidentes con los presentados en [4-5]

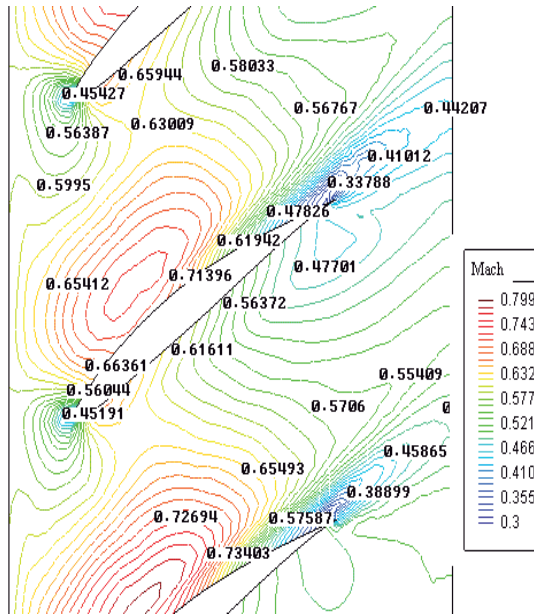


Figura 4 Cascada NACA 65010  
Mach 06 incidencia +2°

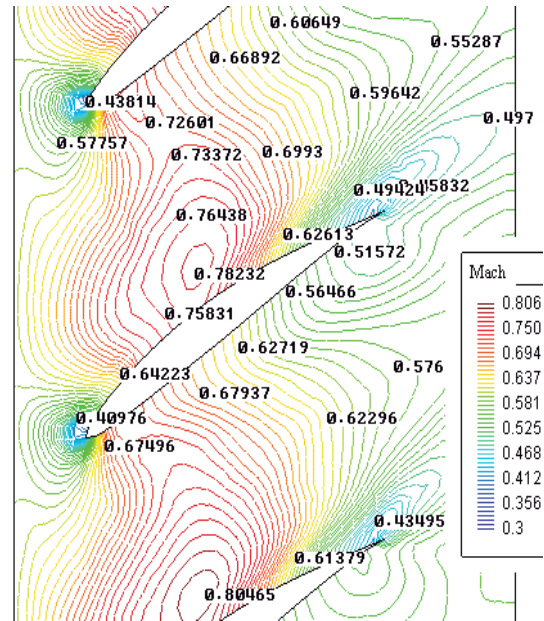


Figura 5 Cascada NACA 65010  
Mach 06 incidencia -2°

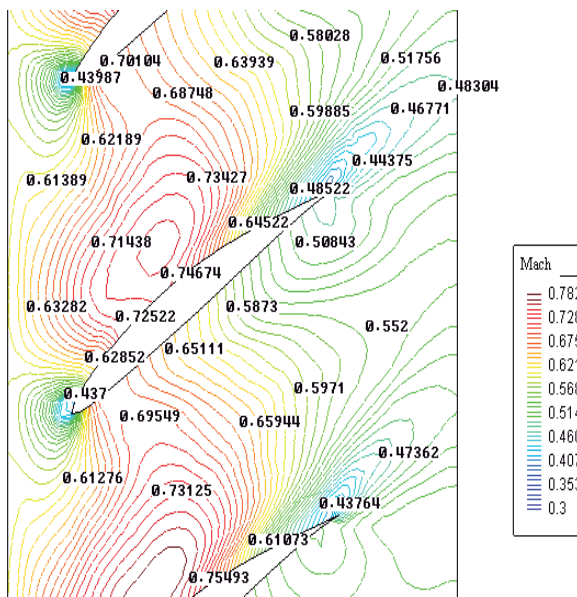


Figura 6 Cascada NACA 65010  
Mach 06 incidencia 0°

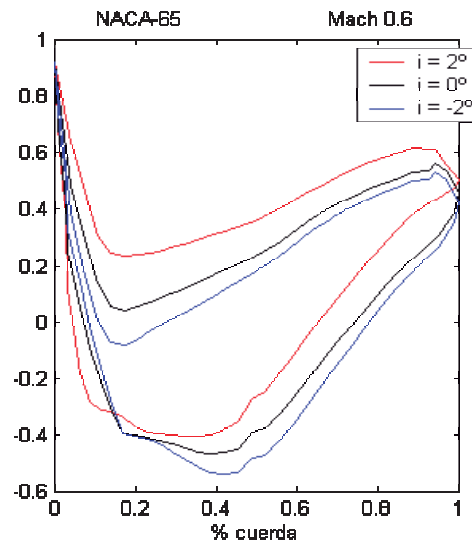


Figura 7 Gráfica  $C_p$   
Cascada NACA 65010 Mach 06

Se aprecia la aceleración y deceleración del flujo en la cara de succión así como la modificación del flujo en función del ángulo de incidencia.

El rango mostrado presenta una clara compresibilidad del fluido no siendo válida la aplicación de otros esquemas de resolución más sencillos que linealizaran las ecuaciones.

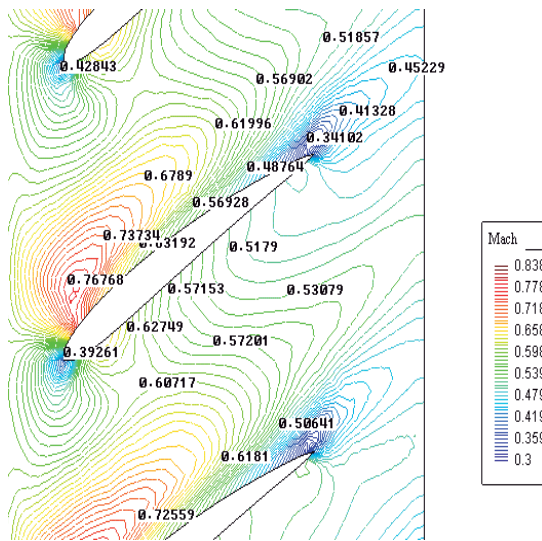


Figura 8  
 Cascada C4 Mach 06 incidencia  $0^\circ$

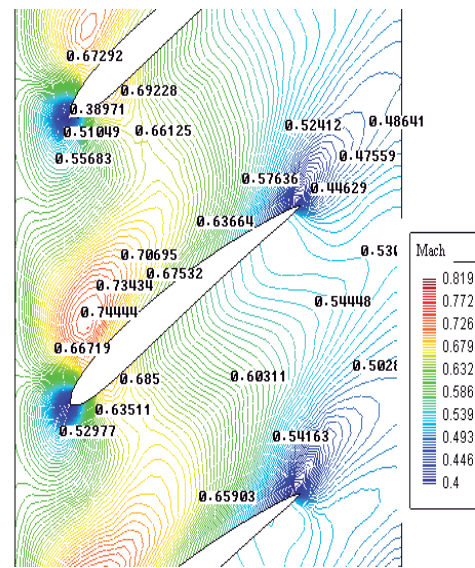


Figura 9  
 Cascada C4 Mach 06 incidencia  $-2^\circ$

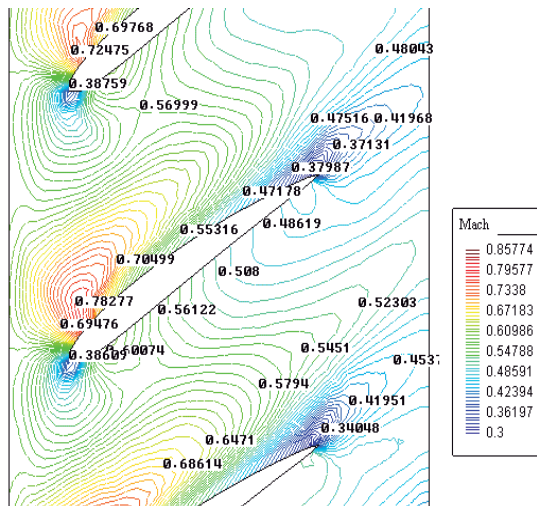


Figura 10  
 Cascada C4 Mach 06 incidencia  $2^\circ$

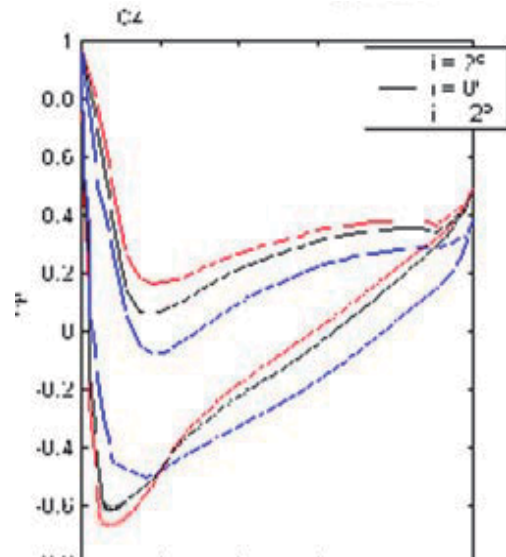


Figura 11  
 Gráfica  $C_p$  Cascada C4 Mach 06

## Bibliografía

1. "Desarrollo de una herramienta numérica basada en técnicas de volúmenes finitos para el estudio de flujos en un amplio rango de números de Mach" P.Gil et al. XIV Cong. Ingeniería Mecánica 2000 pag. 1341-1346
2. J.H. Ferziger, M.Peric "Comp. Methods for Fluid Dynamics".Ed.Springer (1999).
3. S. Patankar,"Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" Mc Graw Hill 1980
4. N.A. Cumpsty, "Compressor aerodynamics" Longman scientific& technical, 1989
5. Gostelow, J.P. *Cascade Aerodynamics*, Pergamon Press, 1<sup>st</sup> Ed, New York, 1984.