Algunos modelos de localización de un servicio bajo un escenario de demanda incierto

Eduardo Conde

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

20 de marzo de 2007

1. El modelo continuo de localización-asignación minmax regret
   - Existencia de óptimos
   - Modelos de Localización plana
2. El modelo de localización-asignación minmax regret sobre grafos
   - Optimalidad en Vértices
   - Problema con pesos genéricos
3. El modelo de localización centdian minmax regret sobre árboles
   - Centdian robusto con doble juego de pesos

¿Dónde ubicar un centro bajo demanda incierta?

Puede ser una ubicación aceptable . . .

...aunque puede ser cuestionable en otros casos

. . . aunque puede ser cuestionable en otros casos

Robustez

La ubicación del servicio debe ser suficientemente estable frente a cambios de demanda.

Hipótesis asumidas

Se desea ubicar un único servicio que atenderá a una selección de clientes de un mercado potencial formado por n clientes ubicados en las posiciones $a_1, \ldots, a_n$.

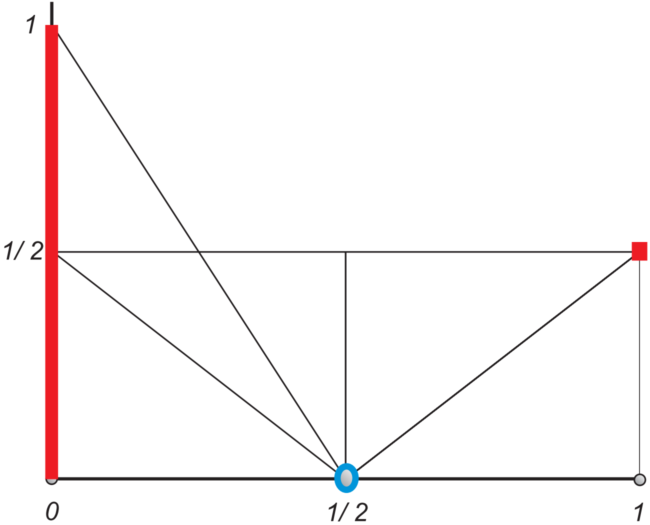
Los costes de transporte son proporcionales a la demanda que hay que atender (ω_i) y a la distancia que hay que recorrer ($d(x, a_i)$).

La demanda es incierta, no se hacen hipótesis distribucionales, sólo se asume conocido un rango de variación $[\omega_i^-, \omega_i^+]$ para la demanda de cada cliente a_i.

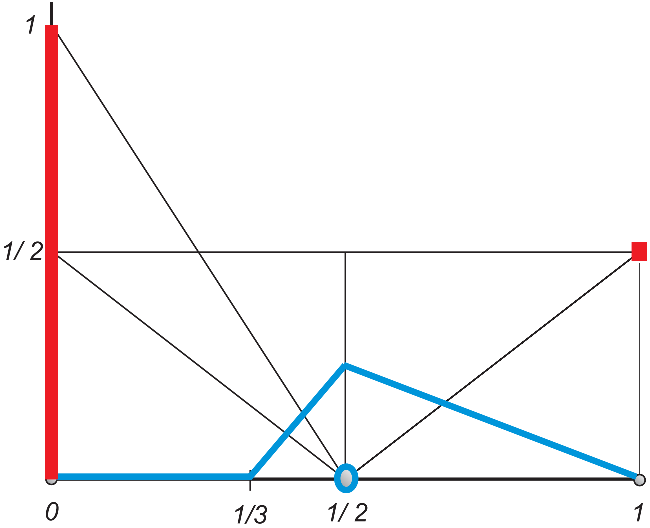
Trabajos recientes. . .

- R.E. Burkard and H. Dollani.
  A note on the robust 1-center problem on trees.
  Annals of Operations Research, 110:69–82, (2002).
- I. Averbakh and O. Berman.
  An improved algorithm for the minmax regret median problem on a tree.
  Networks, 41:97–103, (2003).
- I. Averbakh and S. Bereg.
  Facility location problems with uncertainty on the plane.
  Discrete Optimization, 2:3–34, (2005).

Si tenemos que elegir entre dos clientes. . .

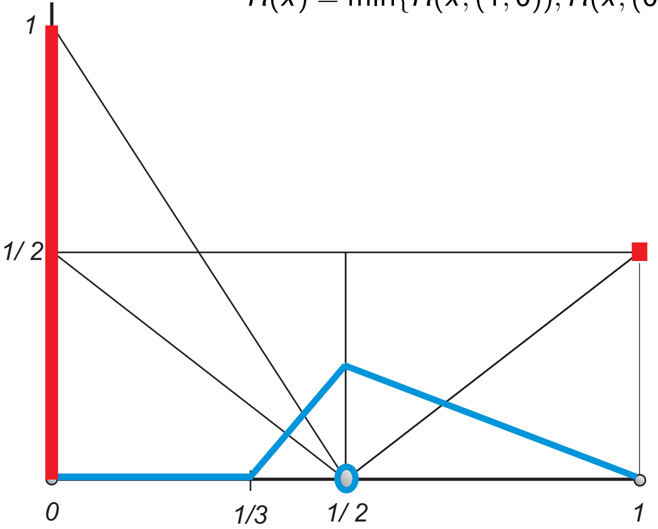


Si tenemos que elegir entre dos clientes. . .



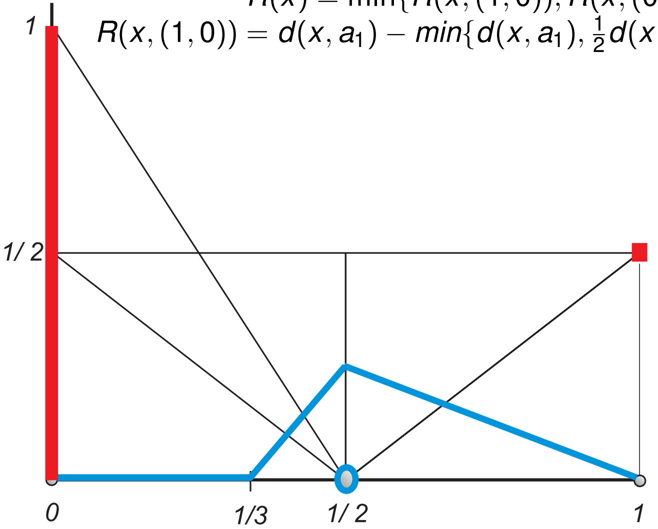
Si tenemos que elegir entre dos clientes. . .

$$R(x) = \min\{R(x,(1,0)), R(x,(0,1))\}$$



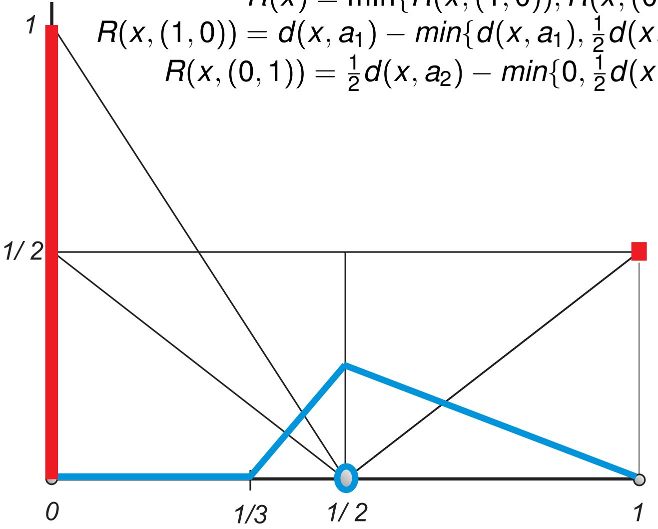
Si tenemos que elegir entre dos clientes. . .

$$R(x) = \min\{R(x,(1,0)), R(x,(0,1))\}$$
$$R(x,(1,0)) = d(x,a_1) - min\{d(x,a_1), \tfrac{1}{2}d(x,a_2)\}$$

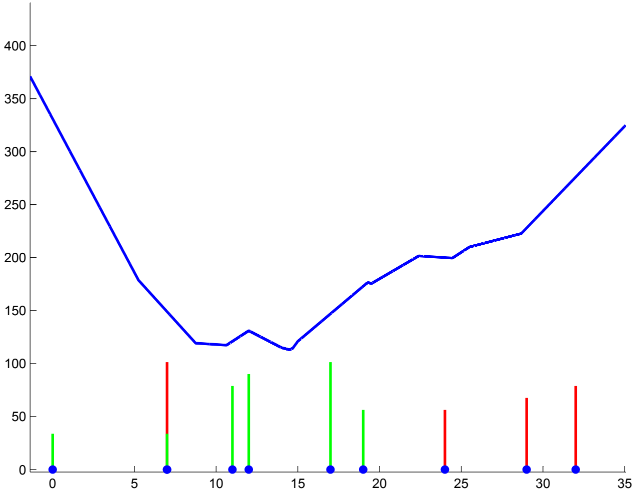


Si tenemos que elegir entre dos clientes. . .

$$R(x) = \text{mín}\{R(x,(1,0)), R(x,(0,1))\}$$
$$R(x,(1,0)) = d(x,a_1) - min\{d(x,a_1), \tfrac{1}{2}d(x,a_2)\}$$
$$R(x,(0,1)) = \tfrac{1}{2}d(x,a_2) - min\{0, \tfrac{1}{2}d(x,a_2)\}$$



En general



En general

- Si es conocido el escenario de demanda ω que ocurrirá y la ubicación x del nuevo servicio, la selección óptima de clientes consiste en los p de menor coste en la ordenación

$$\omega_{(1)}d(x, a_{(1)}) \leq \omega_{(2)}d(x, a_{(2)}) \leq \ldots \leq \omega_{(n)}d(x, a_{(n)}).$$

- El exceso de coste de servicio que debemos asumir respecto a la elección óptima es

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i d(x, a_i) z_i - \sum_{i=1}^{p} \omega_{(i)} d(x, a_{(i)}),$$

donde

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ pertenece a la cartera de clientes,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Coste frente a la selección óptima *a posteriori*

- Para evaluar una ubicación x y una selección de clientes z usamos la función
$$R(x,z) = \max_{\omega\in\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i d(x,a_i) z_i - \sum_{i=1}^{p} \omega_{(i)} d(x,a_{(i)}) \right\}.$$
- $R(x,z)$ representa el máximo sobrecoste que debemos asumir en la solución (x,z).
- Planteamos el problema de optimización
$$\begin{array}{ll} \min & R(x,z) \\ sa: & \\ & x \in X, \\ & z \in Z, \end{array}$$
donde
$Z = \{(z_1,\ldots,z_n) : z_1 + \ldots + z_n = p,\ z_i \in \{0,1\},\ i \in I\}$.

$R(x, z)$ no es inf-compacta

- Fijada el ubicación x y el vector de asignación z, la función

$$R(x, z) = \max_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i d(x, a_i) z_i - \sum_{i=1}^{p} \omega_{(i)} d(x, a_{(i)}) \right\}.$$

  es el máximo de una función convexa en ω sobre el conjunto poliédrico

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega.$$

- Por tanto $R(x, z)$, para cada z, es una función continua en x lo que implica que $R(x)$ es siempre una función continua.

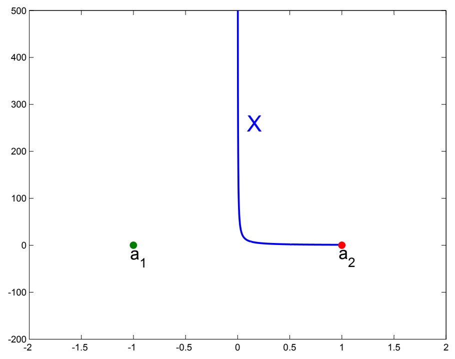
$R(x)$ no es inf-compacta: Ejemplo

Parámetros

Tomemos $n = 2$, $p = 1$,
$a_1 = (-1, 0)$,
$a_2 = (1, 0)$,
$d(x, a_i) = \|x - a_i\|_2$,
$[\omega_1^-, \omega_1^+] = [0, 1]$,
$[\omega_2^-, \omega_2^+] = [1, 2]$,
y el conjunto factible

$$X = \left\{ \left(\alpha, \frac{1}{\alpha} \right) : \alpha \in (0, 1] \right\}$$

Conjunto factible



Garantizando la existencia de solución óptima

HIPÓTESIS 2.1

$$0 \leq \min\left\{\omega_j^- : j \notin P\right\} < \max\left\{\omega_i^+ : i \in P\right\} \quad \forall P \subset I,\ |P| = p.$$

PROPOSICIÓN 2.1

Bajo la hipótesis 2.1 la función objetivo $R(x)$ es inf-compacta.

PROPOSICIÓN 2.2

Bajo la hipótesis 2.1 el problema de optimización está bien definido.

Relación con otros problemas

PROPOSICIÓN 2.3

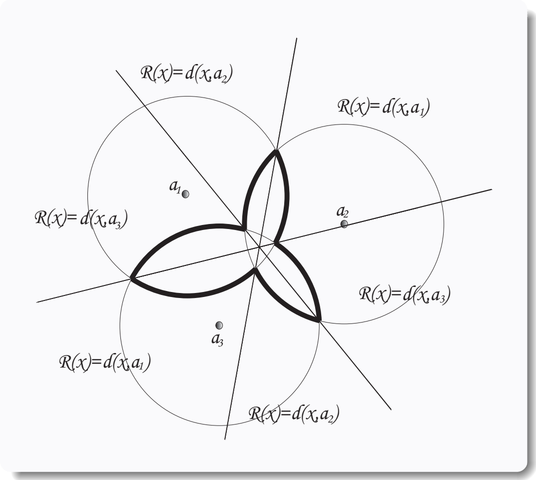
Sea $\omega_i^- = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y asumamos que los índices de los puntos de demanda están asignados de forma que se verifique la siguiente ordenación entre los costes de transporte

$$\omega_1^+ d(x, a_1) \leq \omega_2^+ d(x, a_2) \leq \ldots \leq \omega_n^+ d(x, a_n),$$

entonces,

$$R(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \omega_i^+ d(x, a_i) & si\ \ p \leq n/2 \\ \sum_{i=2p-n+1}^{p} \omega_i^+ d(x, a_i) & si\ \ p > n/2 \end{cases}$$

En el plano, obtenemos problemas no convexos

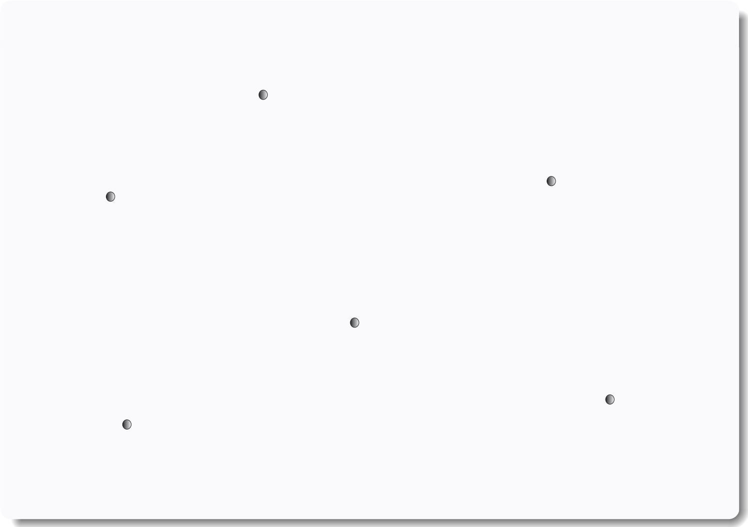


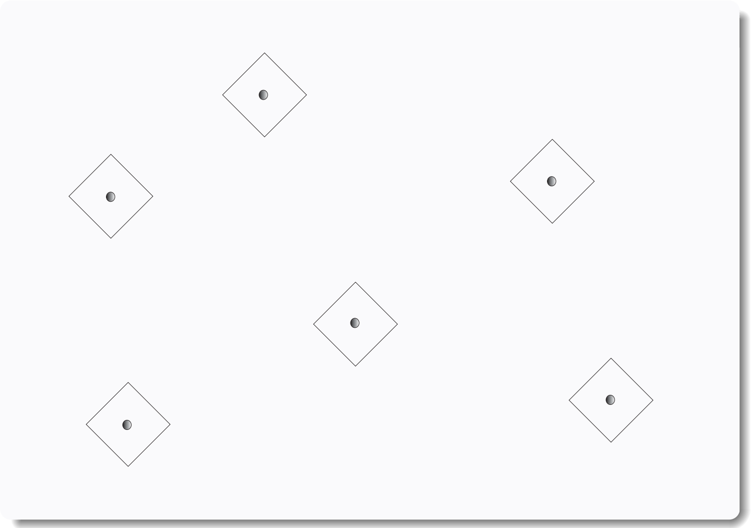
El modelo con $p \leq n/2$, $\omega_i^- = 0$ y distancias poliédricas

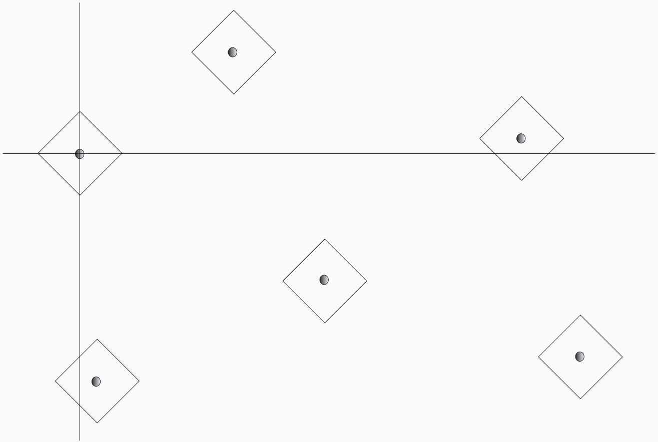
El modelo de localización en el plano, con distancias poliédricas corresponde con un problema de minimización cóncava a trozos ya que se puede escribir $R(x)$ como el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales, es decir,

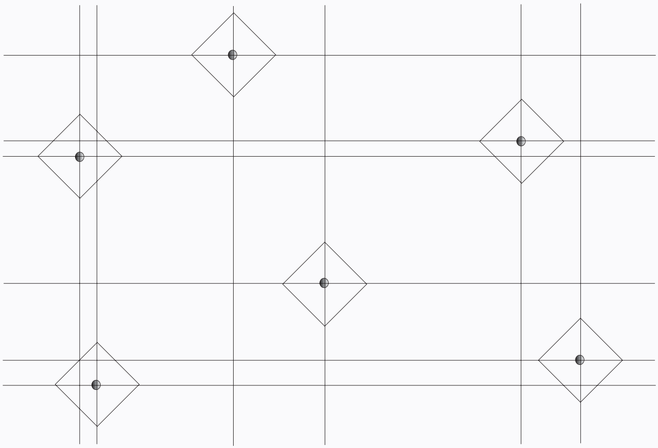
$$R(x) = \min \left\{ \sum_{j \in J} \omega_j^+ d(x, a_j) : \ |J| = p \right\},$$

donde $d(x, a_j)$ es una función lineal en cada dominio (por definición).









El modelo con $p > n/2$, $\omega_i^- = 0$ y distancias poliédricas

Diferencia de convexas en cada dominio de linealidad

Obsérvese que en este caso,

$$R(x) = \min_{J:|J|=p} \left\{ \sum_{j \in J} \omega_j^+ d(x, a_j) \right\} - \min_{J:|J|=2p-n} \left\{ \sum_{j \in J} \omega_j^+ d(x, a_j) \right\}.$$

Tomando

$$f_1(x) = -\min\left\{\sum_{j\in J}\omega_j^+ d(x,a_j) : |J| = 2p - n\right\}.$$

y $f_2(x) = f_1(x) - R(x)$, f_1 y f_2 son funciones convexas, dado ξ un subgradiente de $f_1(x)$ en x^0, tenemos

$$R(x) \geq f_1(x^0) + \xi'(x - x^0) - f_2(x), \quad \forall x.$$

Inicialmente se elige la partición que consiste en los dominios de linealidad, dado M un conjunto de partición y $x^0 \in M$ se verifica

$$R(x) \geq \min_{x\in V(M)}\{f_1(x^0) + \xi'(x - x^0) - f_2(x)\}.$$

Evaluación de $R(x)$

PROPOSICIÓN 2.4

Dada la localización x y un vector de distancias $(d(x, a_i))_{i \in I}$, la asignación óptima de los p puntos de demanda que serán atendidos por el nuevo servicio ubicado en x de acuerdo a la minimización de la función $R(x, z)$ puede ser obtenida en tiempo de complejidad $O(\min\{p, n - p\}n)$.

E. Conde.
An improved algorithm for selecting p items with uncertain returns according to the minmax-regret criterion.
Mathematical Programming, 100(2):345–353, (2004).

Formulación del problema

Localización sobre ejes

$$\min_{x \in \cup_{e \in E} \mathbf{e}} \min_{z \in Z} \max_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i d(x, a_i) z_i - \sum_{i=1}^{p} \omega_{(i)} d(x, a_{(i)}) \right\}$$

TEOREMA 3.2

Formulación del problema

Localización sobre ejes

$$\min_{x \in \cup_{e \in E} \mathbf{e}} \min_{z \in Z} \max_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i d(x, a_i) z_i - \sum_{i=1}^{p} \omega_{(i)} d(x, a_{(i)}) \right\}$$

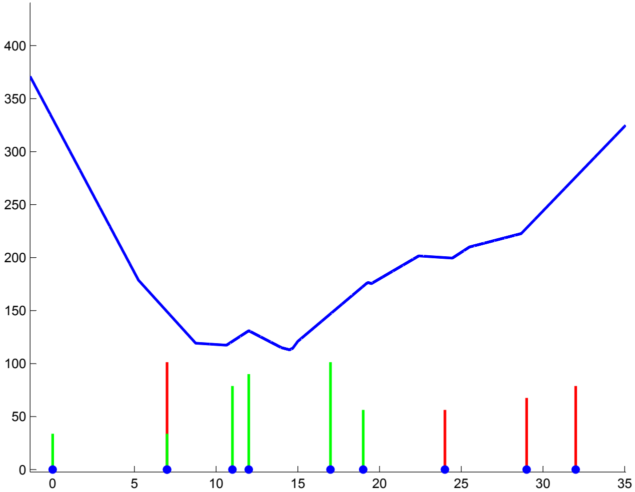
Teorema 3.2

Si $\omega_i^- = 0$ para cada $i \in I$ y $p \leq n/2$ entonces, existe un óptimo en uno de los vértices (complejidad $O(pn^2)$).

Optimalidad en puntos del interior de los ejes ($p > n/2$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	0	7	7	11	12	17	19	24	29	32
ω_i^+	3	9	3	7	8	9	5	5	6	7

Optimalidad en puntos del interior de los ejes



Reescribiendo $R(x)$...

$$R(x) = \min_{u_0 \in \Re} \left[\begin{array}{lll} f(u_0) = & \min & \sum_{i \in I} [a_i(u_0)\xi_i + b_i(u_0)] \\ & \text{sa}: & \sum_{i \in I} \xi_i = p, \\ & & \xi_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl} a_i(u_0) & = & \max\{u_0 - s_i^-, 0\} - \max\{s_i^+ - u_0, 0\}, \\ b_i(u_0) & = & \max\{s_i^+ - u_0, 0\}, \end{array}$$

donde $s_i^- = -\omega_i^+ d(x, a_i)$, $s_i^+ = -\omega_i^- d(x, a_i)$.

$$R(x) = \min\{f(s_1^-), f(s_1^+), f(s_2^-), f(s_2^+), \ldots, f(s_n^-), f(s_n^+)\}.$$

Determinando un conjunto FDS

$$S_J = \{(s_1, \ldots, s_{2n}) : s_{J(1)} \leq s_{J(2)} \leq \ldots \leq s_{J(2n)}\}.$$

$$(s_1^-, s_1^+, \ldots, s_n^-, s_n^+) \in S_J \mapsto f(s_i^-) \quad \text{es cóncava}$$

Si $d(x(t), a_i)$, con $x(t) = a_r + t(a_s - a_r)$, es lineal en $[\alpha, \beta]$ y

$$(-\omega_1^+ d(x(t), a_1), -\omega_1^- d(x(t), a_1), \ldots, -\omega_n^- d(x(t), a_n)) \in S_J \, \forall t \in [\alpha, \beta]$$

entonces...

$R(x(t))$ es cóncava en $t \in [\alpha, \beta]$.

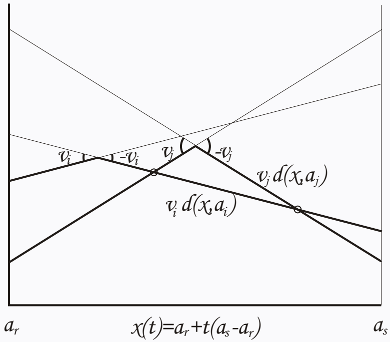
Puntos de intersección

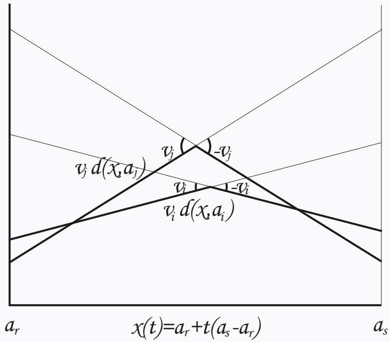
DEFINICIÓN

Diremos que $t^0 \in [0,1]$ *es un punto de intersección del eje* $\mathbf{e} = (a_r, a_s)$ *si existen dos funciones diferentes* $s_i^{\pm}(x)$ *y* $s_j^{\pm}(x)$ *(el índice* $\pm$ *significa que el signo* $+$ *o el signo* $-$ *debe ser seleccionado) del conjunto*

$$\{s_i^-(x(t)) = -\omega_i^+ d(x(t), a_i), s_i^+(x(t)) = -\omega_i^- d(x(t), a_i) : \ i \in I\},$$

donde $x(t) = a_r + t(a_s - a_r)$ *tal que* $s_i^{\pm}(x(t^0)) = s_j^{\pm}(x(t^0))$ *y existe un valor* $\epsilon > 0$ *para el que* $s_i^{\pm}(x(t)) \neq s_j^{\pm}(x(t)), \forall t \in (t^0 - \epsilon, t^0 + \epsilon) \setminus \{t^0\}$*. El conjunto de todos los puntos de intersección* $\mathbf{e}$ *se denotará por* $I_P(\mathbf{e})$*.*


v_i
$-v_i$
v_j
$-v_j$
$v_j\, d(x, a_j)$
$v_i\, d(x, a_i)$
a_r
$x(t)=a_r+t(a_s-a_r)$
a_s


v_j
$-v_j$
$v_j\, d(x, a_j)$
v_i
$-v_i$
$v_i\, d(x, a_i)$
a_r
$x(t)=a_r+t(a_s-a_r)$
a_s

Resultados finales

TEOREMA 3.3

El conjunto finito $B_P(\mathbf{e}) \cup I_P(\mathbf{e})$ *contiene un mínimo de* $R(x)$ *sobre el eje* $\mathbf{e}$.

TEOREMA 3.4

El problema de localización-asignación minmax regret sobre un grafo general puede ser resuelto exactamente con una complejidad de orden $O(\min\{p, n-p\}n^3 m)$.

Eficiencia frente a equidad

Un criterio relacionado con esta propiedad es el Centdian introducido por Halpern en 1976.

$$F(x,s) = Z_m(x,s) + Z_c(x,s),$$
$$Z_m(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^s d(x,a_i),$$
$$Z_c(x,s) = \max_{i=1\ldots n} \{u_i^s d(x,a_i)\}.$$

El modelo

$$R(x) = \max_{s \in S}[R(x,s) = F(x,s) - \min_{y \in T} F(y,s)]$$

$$F(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^s d(x,a_i) + \max_{i=1\ldots n}\{u_i^s d(x,a_i)\}.$$

Averbakh y Berman, 1997

Si $\omega_i^- = \omega_i^+ = 0$ el problema se resuelve en $O(n^2)$.

Averbakh y Berman, 2003

Si $u_i^- = u_i^+ = 0$ el problema se resuelve en $O(n \log^2 n)$.

Complejidad del problema general

TEOREMA 4.1

El problema centdian minmax regret en árboles puede ser resuelto en $O(n^3 \log n)$.

Conclusiones

1. En este trabajo se han analizado nuevos modelos de localización de servicios en presencia de demanda incierta bajo un criterio de optimización robusta.
2. Se han analizado modelos de localización continua y sobre grafos.
3. Se han propuesto seis nuevos algoritmos de optimización no convexa.
4. Se ha analizado la complejidad teórica de cada uno de los algoritmos exactos que se han propuesto. Sus complejidades oscilan entre $O(n \log^2 n)$ y $O(\min\{p, n-p\}n^3 m)$.
5. Esta linea de investigación tiene una continuación natural en el análisis del problema con multiservidores y asumiendo incertidumbre en otros parámetros como en las longitudes de los ejes del grafo.

fin