

# ENSEÑAR CON MATHEMATICA

Santiago DÍAZ MADRIGAL<sup>(1)</sup>  
Antonio, FERNÁNDEZ CARRIÓN  
Alejandro J. RODRÍGUEZ LUIS  
Universidad de Sevilla

En este trabajo presentamos el desarrollo y conclusiones del curso «Enseñar con Mathematica». Esta experiencia didáctica ha sido financiada por el I.C.E. de la Universidad de Sevilla, dentro de la convocatoria para cursos de formación del profesorado universitario.

In this paper, we describe the development and conclusions of the course «Teaching with Mathematica». This experience has been sponsored by the Educational Science Institute of the University of Seville, within university teachers training courses.

## I. ANTECEDENTES

En 1986 Peter Lax, un antiguo presidente de la Sociedad Matemática Americana, haciéndose eco de los sentimientos de muchos profesores de Cálculo, indicó que la enseñanza del Cálculo estaba repleta de ideas y material anquilosados. Para responder a ésta y a otras llamadas a la reforma de la enseñanza del Cálculo, la Fundación Nacional Americana para la Ciencia (National Science Foundation), puso en marcha toda una serie de iniciativas para revitalizar la docencia de esta rama de la Matemática. En concreto dicha Fundación invitaba a presentar proyectos que tuvieran en cuenta el impacto de los or-

denadores en el cálculo simbólico en Matemáticas, así como mostrar la potencia del Cálculo en la resolución de problemas reales, acercando la enseñanza del Cálculo al modo real en que se utiliza.

El programa «Calculus and Mathematica» (Brown y otros, 1991) se enmarca dentro de estas iniciativas. El curso se desarrolla en su totalidad a través de la resolución de problemas de modo interactivo en un ordenador personal. Podemos considerar que toda lección tiene cuatro componentes:

1. Problemas básicos que presentan nuevas ideas.
2. Problemas tutorados que introducen técnicas y aplicaciones.

<sup>(1)</sup> Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S. Ingenieros Industriales. Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla.

3. Problemas para que el alumno aumente su destreza. Es una nueva forma de la familiar «hoja de problemas».
4. Problemas de autoevaluación para realizar exclusivamente con papel y lápiz.

Este curso de Cálculo está escrito usando el programa informático «Mathematica». En cualquier caso, para implementar el curso, es suficiente con que el alumno conozca algunos rudimentos de dicho programa. En contraposición con los cursos habituales basados en papeles, pizarras y exposiciones orales, podríamos denominar a este curso «electrónico» por el tiempo de uso del ordenador, por parte de los alumnos.

El curso «Calculus and Mathematica» ha sido probado en distintas universidades americanas (Illinois, Ohio State,...), y a la luz de la experiencia en clase han sido revisados problemas, comentarios y explicaciones del curso original. Por otra parte, es realmente fácil reestructurar o eliminar material del curso. Simplemente hay que añadir o borrar algún fichero.

## II. CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA: OBJETIVOS

Si bien los comentarios de la sección anterior sobre el Cálculo son francamente extrapolables a nuestra situación actual, hay factores propios que también influyen en promover cursos de esta naturaleza, como por ejemplo, el fracaso general en las asignaturas de Matemáticas.

La importancia que las enseñanzas de contenido matemático tienen en el currículum de las carreras científico-técnicas hace que los esfuerzos tanto, por actualizar los contenidos de las asignaturas

a las necesidades de los futuros profesionales como por mejorar los métodos pedagógicos empleados en su impartición sean necesarios para cumplir de manera más eficaz nuestra tarea docente.

Ante el fracaso en asignaturas como Cálculo (que aparece en los primeros cursos de casi todas las carreras mencionadas, a veces con el nombre de Análisis Matemático o con el de Cálculo Infinitesimal) nos planteamos una serie de reflexiones sobre cómo mejorar no sólo los resultados de las evaluaciones sino también los contenidos tratados en ellas durante el curso escolar. Sin menospreciar aspectos sobre el alumnado o el profesorado en cuestión, pensamos que desde la raíz del problema se encuentran en las propias asignaturas y, sobre todo, en el modo tradicional de impartirlas.

Es por ello que nuestro objetivo básico ha sido y es debatir posibles innovaciones pedagógicas sobre el Cálculo, el Álgebra Lineal, ..., con la esperanza de hallar o al menos probar nuevos enfoques docentes de estas asignaturas.

Un proyecto de esta naturaleza ha estado movido tanto por consideraciones matemáticas, como por las posibilidades tecnológicas actuales. Puede ser útil, por ejemplo, plantearse cambios en el orden de presentación de los temas o en el énfasis de los contenidos en alguno de ellos, así como prestar más atención a las aplicaciones.

Es en este punto donde nos planteamos nuevas posibilidades que, por ejemplo, en la enseñanza del Cálculo puedan proporcionar la disponibilidad tanto de hardware como de software desarrollado para tal fin.

El aprendizaje de las Matemáticas es un proceso constructivo: se da en el contexto del aula, el alumno trata de orde-

nar y dar sentido a la información que se le suministra evaluando, conectando y organizándola en relación con su experiencia y conocimientos previos. En este contexto, el ordenador (un dispositivo que habla Matemáticas) posibilita hacer cosas durante la clase que sin él no podrían llevarse a cabo.

En cualquier caso, nuestra opinión es que la tecnología debe ser un medio que libere a los estudiantes de manipulaciones algebraicas, reduciendo el trabajo pesado de operaciones, apoyando el aprendizaje de las ideas fundamentales y permitiendo la exploración de los conceptos. Es decir, la tecnología no puede ser el centro de la enseñanza sino que debería estar sujeta a una perspectiva teórica del aprendizaje. Aspectos importantes de este curso usando informática quizás deban ser:

1. Que esté basado en problemas que conduzcan a una abstracción reflexiva;
2. Que contenga, sin limitarse a ellas, cuestiones que se basen en relaciones con otros temas matemáticos o de otra índole;
3. Que permita a los alumnos, mediante un proceso de realimentación, juzgar la eficacia de sus métodos de pensamiento.

Buscar en el mercado algún producto que se ajuste a estas normas puede ser difícil, pero pensamos que, con todos sus inconvenientes (escrito en inglés, nivel matemático más cercano al COU que a la Universidad,...), «Calculus and Mathematica» puede ser una buena experiencia a analizar. De hecho los objetivos que autoprocama el curso son:

1. Aprendizaje activo a través de la experimentación.
2. Énfasis conceptual en el proceso de resolver problemas.

3. Énfasis geométrico en la adquisición de conceptos.
4. Madurez matemática. El curso permite visualizar y manejar temas realmente ajenos a los programas tradicionales.

### III. ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE EL PROGRAMA MATHEMATICA

Mathematica (Gray y otros, 1991; Wolfram 1988; Wolfram 1991) es un sistema general para realizar cálculos matemáticos. Se puede usar en diferentes contextos, algunos de los cuales describiremos seguidamente. Una primera forma de usarlo es como una calculadora. Si tecleamos en el ordenador un cálculo, Mathematica inmediatamente intenta hacerlo. Sin embargo, va mucho más allá de las prestaciones de una calculadora electrónica tradicional. A parte de realizar operaciones numéricas, puede hacer operaciones simbólicas y algebraicas, y puede también generar gráficos.

Cuando lo usamos como una calculadora, estamos utilizando capacidades que ya tiene incorporadas. Pero Mathematica también es un lenguaje de programación, lo cual permite diseñar nuevas prestaciones. La posibilidad de trabajar con fórmulas simbólicas constituye uno de los hechos más potentes de Mathematica; es la clave que permite abordar la docencia de asignaturas como Cálculo. Algunos ejemplos concretos de lo que estamos diciendo son los siguientes: Mathematica puede desarrollar, factorizar y simplificar polinomios y expresiones racionales, puede resolver ecuaciones polinómicas o sistemas de tales ecuaciones, puede evaluar derivadas e integrales simbólicamente, calcular series de potencias, etc.

También podemos usar dicho programa como un lenguaje para representar conocimientos matemáticos; tomar relaciones como por ejemplo de libros, e introducirlos, casi directamente, en Mathematica. Básicamente, el método consiste en dar una secuencia de reglas de transformación que especifican cómo Mathematica codificará expresiones de diferentes formas. En general, puede decirse que Mathematica es un intérprete.

Por último queremos destacar que permite hacer gráficos en dos y tres dimensiones, tanto a partir de funciones como de una lista de datos. Los gráficos tridimensionales son bastante reales; pueden incluir, por ejemplo, sombra, color y efectos luminosos. También podemos suministrar una representación simbólica de objetos, por ejemplo polígonos, en el dibujo, y Mathematica producirá una representación gráfica de ellos.

#### IV. PROGRAMACIÓN DEL CURSO

El curso iba dirigido a un máximo de doce profesores universitarios de Matemáticas, preferentemente del área de Matemática Aplicada, aunque finalmente hubo profesores de otras áreas. Se realizó en un aula del Centro de Cálculo de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales, durante las mañanas de los días (laborables) del veinte al veintinueve de Septiembre. Los participantes dispusieron de los correspondientes ordenadores personales.

Los contenidos del curso, que exponemos a continuación, están divididos en tres bloques. Los dos primeros están destinados al uso y conocimiento del programa Mathematica, y están basados en el manual de Blachman (1992). El tercero está dedicado al uso de

Mathematica para enseñar Cálculo, concreto, lecciones extraídas del curso «Calculus and Mathematica».

#### Capítulo I. Introducción a Mathematica

1. Empezar con Mathematica.
2. Posibilidades numéricas.
3. Posibilidades simbólicas algebraicas.
4. Gráficos en dos y tres dimensiones.
5. Más comentarios sobre Mathematica.

#### Capítulo II. Programación.

1. Manipulación de listas.
2. Asignaciones y reglas.
3. Tipos de datos.
4. Creación de funciones.
5. Variables locales y programación procedimental.
6. Concordancia con patrones.
7. Funciones anónimas.
8. Trampas, fallos y depuración.
9. Entrada y salida. Paquetes.

#### Capítulo III. Un curso de Cálculo con Mathematica.

1. Introducción.
2. Lecciones de Cálculo Diferencial.
3. Lecciones de Cálculo Integral.
4. Lecciones sobre Series y Aproximación.

El estudio detallado del programa Mathematica (dos tercios del curso) justifica para la correcta comprensión del curso «Calculus and Mathematica» así como que dicho programa es la llave para el diseño y realización de nuevas experiencias docentes por parte de los profesores asistentes al curso. Esto último se traduce técnicamente en la pr

gramación de paquetes informáticos (packages) que reflejen más acertadamente las inclinaciones y gustos de cada profesor. En este sentido, el curso «Calculus and Mathematica» es sólo un botón de muestra.

## V. DESARROLLO DEL CURSO

El curso constó de partes teóricas y prácticas. Para los dos primeros capítulos, las primeras clases estuvieron dedicadas al conocimiento y manejo del Mathematica y cubrían la mitad de la mañana. Para ello, los alumnos contaron con unos guiones del material que los profesores impartieron, con objeto de permitir realizar consultas de una forma cómoda y fácil a la hora de abordar las prácticas en el ordenador. Desde un principio se planteó la clase enfocada a un foro en donde debatir las posibilidades del programa en su vertiente docente, especialmente al entrar en temas de programación. La otra mitad de la mañana estuvo dedicada a clases prácticas. Para ello se confeccionaron hojas de problemas a la usanza tradicional, que incluían pequeños ejercicios susceptibles de manejarse en clases reales como por ejemplo, implementar el método de Newton para el cálculo de raíces de funciones, desarrollos en series de potencias, problemas de integración simbólica, etc. Para la realización de las prácticas se formaron varios grupos y los profesores intervenían solamente para ofrecer indicaciones sobre algún problema.

Para el tercer bloque, dedicado al «Calculus and Mathematica», se intentó reproducir lo más fielmente posible una clase real tal como suponemos se desarrolla en las universidades estadounidenses

anteriormente citadas, y donde los profesores participantes en el curso asistían como «sufridos» alumnos. Evidentemente, existía la posibilidad de interrumpir la clase y plantear, ya como Profesor de Universidad, cuestiones o desacuerdos de cualquier tipo. Debido a la formación con la que contaban estos «alumnos» es probable que algunos problemas sobre su implantación no surgieran en el debate, pero las conclusiones recogidas del curso pueden ser bastante realistas.

Este tercer bloque, comenzó con una descripción de las clases del «Calculus and Mathematica», esencialmente basadas en la resolución activa de problemas. Para ejemplificar dichas clases se escogieron lecciones de tres grandes áreas del Cálculo presentes en los programas habituales. Del Cálculo Diferencial, la definición de derivada; del Cálculo Integral, el teorema Fundamental del Cálculo y sobre Series, desarrollos en series de potencias con aplicaciones a la aproximación de integrales definidas.

Con esta elección, también se pretendía cubrir los tres principales aspectos con los que se enfrenta un profesor de Matemática, a saber: explicar y justificar definiciones, enunciar y demostrar teoremas, manejar y obtener soltura con técnicas analíticas.

Atendiendo a las normas de la convocatoria, dejamos el último día para una evaluación, que encaminamos desde un principio hacia una autoevaluación y realización de algún proyecto docente que usara el programa Mathematica. Se expusieron cuatro trabajos sobre distintos temas de Cálculo. En concreto, versaron sobre una exposición usando gráficos de la construcción de la integral de Riemann; una formulación empírica del

teorema de Bernoulli sobre variables aleatorias independientes; una introducción, tipo pregunta-respuesta, a elementos básicos de geometría; una presentación vía ejemplos gráficos de extremos relativos de dos variables.

## V. CONCLUSIONES

El trabajo que desarrollamos para la realización del curso, a la par que el debate entre todos los asistentes a él, son para nosotros la fuente de donde extraer conclusiones. En ese sentido, esta sección responde a una opinión y experiencia personal.

Las limitaciones para implementar realmente un curso de estas o similares características son evidentes. En concreto, es necesario un aula de informática con suficientes puestos de trabajo así como personal preparado (más profesores). En un contexto altamente masificado, como son los cursos de primero, el desembolso económico necesario para disponer de estos recursos parece realmente enorme, sobre todo teniendo en cuenta los medios con que se parte. Por otra parte, también parece razonable exigir que el alumnado al que vaya dirigido el curso tenga algún tipo de experiencia informática. Esto conduce a pensar que el lugar apropiado (hoy por hoy) para un tal curso fueran asignaturas de contenido matemático del segundo ciclo, donde el alumnado es más reducido y cuenta con una mayor preparación. En cualquier caso, creemos que la utilización de medios informáticos debe hacerse de modo paulatino y partiendo de cursos superiores a inferiores. Además, por su carácter experimental, habrían de contar con un seguimiento diario.

Otra dificultad, detectada por los asistentes al curso, es introducir el ordenador en contextos donde dudosamente mejoran el rendimiento docente con respecto a las clases magistrales habituales, como por ejemplo, el enunciado y demostración de teoremas. Usar gráficos para aclarar definiciones, hacer desarrollos simbólicos o programar algoritmos de cualquier tipo son campos abonados para el uso del ordenador, pero quizás otros no. No obstante, estos últimos aspectos cubren en la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Técnicas, un tanto por cierto muy elevado de todo el material.

Finalmente, hay un temor a que el uso masivo del ordenador simplifique aspectos formativos de los programas de asignaturas como Cálculo, y ello redunde en una «bajada» del nivel tanto docente como en extensión. En nuestra opinión, la simplificación de material (por quedar obsoleto) puede ser reemplazado por material nuevo que en el caso de las Escuelas Técnicas puede ser dirigido a abordar problemas simples pero reales de la Técnica, que indudablemente requerirán de programas y cálculos complejos.

En nuestra opinión, una opción real es la implementación a partir de tercer curso de asignaturas (muy abocadas a técnicas de computación matemática) que conlleven un cincuenta por ciento de las necesarias clases magistrales y otro cincuenta por ciento de trabajo en un aula informática.

En último lugar, nos gustaría constatar la unanimidad, entre los participantes al curso, sobre el efecto positivo que tiene en la calidad de enseñanza el conocimiento por parte de los profesores universitarios de Matemáticas de software informático.

## REFERENCIAS

- N. BLACHMAN (1992). *Mathematica: A practical approach*, Variable Symbols, Inc., Berkeley CA.
- D. P. BROWN, H. PORTA, J. J. UHL (1991). *Calculus and Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Redwood City CA.
- T. GRAY, J. GLYNN (1991). *Exploring Mathematics with Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Redwood City CA.
- S. WOLFRAM (1988). *Mathematica: A system for doing Mathematics by computer*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Redwood City CA.
- S. WOLFRAM (1991). *Mathematica: A system for doing Mathematics by computer (Second and Revised Edition)*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Redwood City CA.