

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Beneficios de sistemas de transporte integrado para
estudiantes universitarios: un enfoque desde la
perspectiva de la Teoría de Juegos

Autor: Pablo Manuel del Árbol Jiménez

Tutora: Dra. Encarnación Algaba Durán

Dep. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, septiembre de 2016



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Beneficios de sistemas de transporte integrado para estudiantes universitarios: un enfoque desde la perspectiva de la Teoría de Juegos

Autor:

Pablo Manuel del Árbol Jiménez

Tutora:

Dra. Encarnación Algaba Durán

Profesora Titular de Universidad

Dep. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, septiembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo supone el último paso para la meta que un día me fijé: llegar a ser Ingeniero. Y como ha sido un camino que no he recorrido solo, es justo dar mis agradecimientos a las personas que me han acompañado durante estos años.

En primer lugar, a mis compañeros y profesores, en especial a Encarnación Algaba Durán por su dedicación y atención durante la labor de este trabajo.

A Beatriz, seguramente la persona que más ha disfrutado mis éxitos y más ha sentido mis fracasos. Gracias por aportarme tanta serenidad y buenos consejos.

Y, por último, me gustaría agradecer a mis padres y a mi hermana el apoyo incondicional que me han dado día tras día y el esfuerzo que han realizado para que yo tenga la oportunidad de estar donde estoy hoy.

Pablo M. del Árbol Jiménez

Sevilla, septiembre de 2016

RESUMEN

Este Trabajo Fin de Grado se titula *Beneficios de sistemas de transporte integrado para estudiantes universitarios: un enfoque desde la perspectiva de la Teoría de Juegos* y ha sido realizado por Pablo Manuel del Árbol Jiménez, bajo la dirección de la Dra. Encarnación Algaba Durán.

Este trabajo se basa en una aplicación sobre repartos de costes en sistemas de transporte usando la Teoría de Juegos. La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas con numerosas aplicaciones desde su consolidación, en las últimas décadas, como una herramienta imprescindible en campos como la economía, la ingeniería, la biología, la informática o la política, entre otras. Esta memoria se centra, en particular, en el ámbito de la teoría de juegos cooperativos y aquella parte de su estudio que comprende el establecimiento de reglas que indiquen, para cada posible juego, cómo repartir entre los jugadores el beneficio o el coste que se ha generado cuando todos ellos han cooperado.

En el primer capítulo se recogen las nociones y elementos de la teoría de juegos cooperativos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Se estudiarán algunos de los conceptos de solución más relevantes, como el *core*, el *nucleolus*, el valor de Shapley o el valor de Tijs. Se expondrán algunos ejemplos que ayudarán a su comprensión.

El segundo capítulo analiza el empleo de los juegos cooperativos en los problemas de distribución de costes. El principal problema que se presenta en los juegos cooperativos es repartir los beneficios o los costes entre los jugadores. En este caso se tratarán los juegos de coste, que son los tipos de juegos que aparecerán en capítulos posteriores. Se expondrán algunas aplicaciones de los juegos cooperativos desarrolladas sobre problemas y datos reales a lo largo de los últimos años. De una manera más detallada se analizarán dos casos: el problema del aeropuerto, uno de los más conocidos y estudiados en las últimas décadas, y una generalización de éste, el problema de autopista. Del mismo modo, se expondrán ejemplos de la aplicación de algunos conceptos de solución para cada uno de los problemas.

En el Capítulo 3 se estudia el reparto de los costes derivados de una red de conexión con estructura de árbol. Se describirá el modelo del problema de conexión de árbol fijo y se planteará como un problema de costes. El objetivo debe ser encontrar unas propuestas de reparto eficientes. Este capítulo se centra en analizar el *core* de los juegos de costes asociados a problemas de esta naturaleza, con el objetivo de encontrar procedimientos de selección que permitan conseguir repartos en el *core* del juego. De igual manera, se introduce una familia de conceptos de solución, la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas, y se proporcionan unos algoritmos que permitan calcular los elementos de la familia previamente definida. El objetivo es obtener la propiedad esencial de esta familia de soluciones, que afirma que, para todo juego de árbol de tipo estándar, dicha familia coincide con el *core* del juego.

Como indica el título de la memoria, el interés de este trabajo reside en estudiar algunas de las posibles respuestas que la teoría de juegos puede ofrecer a la hora de diseñar un sistema integrado de transporte para estudiantes universitarios. Para ello, y como capítulo final, se analiza el proyecto *UNIVERCITY*. El objetivo consiste en diseñar un sistema de transporte integrado para estudiantes universitarios que implique importantes ventajas, como rutas optimizadas, un aumento de la financiación pública, una tarifa económica o una reducción de los problemas de tráfico, entre otras. En primer lugar se recurrirá a algunos de los conceptos de solución que proporciona la teoría de juegos para, posteriormente, introducir unas variantes que aseguren una tarifa justa y más económica. Se distribuirán tanto los costes variables del sistema, mediante un proceso de agregación, como los costes fijos, y se establecerá la financiación que debería recibir cada estudiante por parte de la Administración.

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Índice	ix
1. Teoría de Juegos Cooperativos	11
1.1 Introducción	11
1.2 Juegos cooperativos	12
1.3 Conceptos de solución de juegos cooperativos	18
1.3.1 El <i>core</i>	19
1.3.2 El <i>nucleolus</i>	23
1.3.3 El valor de Shapley	26
1.3.4 El valor de Tijs	29
2. Problemas de Distribución de Coste	33
2.1 Introducción	33
2.2 El problema del aeropuerto	35
2.3 El problema de autopista	38
2.4 Conclusiones	43
3. Distribución del Coste de una Red de Conexión: Juego de Árbol Fijo	45
3.1 Introducción	45
3.2 Descripción del modelo	45
3.3 El <i>core</i> de un juego de árbol fijo	48
3.3.1 Expresiones alternativas del <i>core</i>	49
3.3.2 Estudio geométrico	56
3.4 Soluciones igualitarias restringidas ponderadas	59
3.4.1 Familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas: definición	59
3.4.2 Interpretación dinámica	63
3.5 Conclusiones	69
4. Un sistema de Transporte Integrado para Estudiantes Universitarios: UNIVERCITY	71
4.1 Introducción	71
4.2 Un sistema de transporte integrado	73
4.3 Un enfoque desde la teoría de juegos cooperativos: juego de árbol de autobuses	76
4.4 Un enfoque del reparto de costes: regla de distribución igualitaria agregada	78
4.4.1 Distribución de los costes variables	78
4.4.2 Distribución de costes fijos	88
4.4.3 Regla de financiación igualitaria agregada	90
4.5 Conclusiones	94
Referencias	95

1. TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

1.1 Introducción

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas que estudia el análisis de problemas de decisión donde intervienen varios agentes, cuyas decisiones están destinadas a la consecución de un objetivo.

Aunque Zermelo (1913) y Borel (1921) ya anticiparon las bases de esta nueva disciplina, fue von Neumann (1928) quien, apoyándose en algunas ideas de Borel sobre la estructura formal de un juego de estrategia como el póquer, demostró el teorema *minimax*, que le proporcionó a la teoría de juegos el respaldo necesario para convertirse en una nueva rama de las matemáticas. El hallazgo de este problema convenció a von Neumann de que su aportación revolucionaría la teoría económica, por lo que escribió en 1944, junto con el economista Morgenstern, el libro *Theory of games and economic behavior*, considerado el punto de partida para la teoría de juegos. Sin embargo, la teoría de juegos como la concebían von Neumann y Morgenstern pasó prácticamente desapercibida.

Los primeros años de la década de los cincuenta del pasado siglo fueron fundamentales para el impulso de la teoría de juegos: Tucker formalizó el famoso *dilema del prisionero* y Nash, en su tesis doctoral bajo la dirección del mismo Tucker, propuso la solución de los juegos no cooperativos con el conocido *equilibrio de Nash*. Nash posibilitó el futuro desarrollo de la teoría de juegos, aunque pasaron muchos años antes de que llegara a convertirse en una herramienta imprescindible en el campo de la economía.

Ya en los años setenta, Selten y Harsanyi consiguieron impulsar, con su obra, el trabajo de los pioneros en la disciplina y colocaron la teoría de juegos en un primer plano en los debates sobre economía, política o sociología. En 1994, Nash, Selten y Harsanyi obtuvieron el Premio Nobel de Economía, hecho que reflejaba el impacto que había conseguido esta teoría.

Actualmente, además de seguir siendo fundamental en las ciencias ya expuestas, la teoría de juegos se usa en campos como la biología, la ingeniería, la filosofía, la psicología o las ciencias de la computación.

La teoría de juegos distingue entre dos modelos, los juegos no cooperativos y los juegos cooperativos.

En los juegos no cooperativos cada jugador busca su beneficio personal, persiguiendo este objetivo sin ninguna relación con los demás jugadores. En esta rama se estudian las posibles estrategias que puede emplear cada jugador.

En los juegos cooperativos los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos previos al juego, es decir, pueden cooperar formando coaliciones de jugadores con el objetivo de obtener beneficios mayores. Todos los jugadores que han cooperado en una coalición deben estar presentes en el reparto de beneficios. Es aquí donde radica el problema central, en proponer un reparto adecuado de dichos beneficios, por lo que hay que analizar la importancia que ha tenido cada jugador en la obtención de ese beneficio común.

En este capítulo se profundiza en el estudio de estos últimos, presentando sus principales características. También se recogen aquellos conceptos y resultados básicos de la teoría de juegos cooperativos que son empleados a lo largo de esta memoria, acompañados de ejemplos que facilitan su comprensión.

1.2 Juegos cooperativos

Los juegos cooperativos, tal y como se comenta en la sección anterior, se caracterizan por la posibilidad que tienen los jugadores de llegar a acuerdos entre ellos para obtener un beneficio común. Cuando varios jugadores deciden cooperar debe formarse una coalición entre ellos.

Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito de jugadores o entidades. Se llama **coalición** a cualquiera de los 2^n subconjuntos de N , y se denota por la letra S . A la coalición formada por todos los n jugadores se le llama *gran coalición*, y a la que no tiene ningún miembro, *coalición vacía*.

Una coalición puede estar formada por cualquier conjunto de jugadores de cualquier tamaño. La formación de coaliciones es la acción que determina la cooperación entre los jugadores, siendo la búsqueda de optimizar sus beneficios la característica fundamental de una coalición.

Cuando el concepto de beneficio conlleva la idea positiva de ganancias, entonces el objetivo es maximizar dicho beneficio. Sin embargo, si se trabaja con costes, la finalidad es minimizarlos. El pago de una coalición, es decir, los beneficios que dicha coalición obtendrá del juego, será función de la coalición y deberá ser repartido al finalizar el juego entre todos los jugadores que la forman. Cuando cualquier reparto del pago es posible, se habla de un juego con Utilidad Transferible (juego UT).

Definición 1.1. Un **juego cooperativo de utilidad transferible** en forma coalicional o en forma de función característica está formado por:

- Un conjunto finito de jugadores denotado por $N = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Una función característica $v: 2^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$, valor de la coalición, siendo nulo el pago asignado a la coalición formada por un conjunto vacío, $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, un juego UT es un par (N, v) donde N y v deben estar especificados.

Muchas situaciones reales se pueden modelar como un juego cooperativo de utilidad transferible. A continuación, se expone un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Supóngase el caso de tres municipios cercanos que necesitan una estación depuradora de aguas residuales. Cada ayuntamiento ha realizado un estudio de evaluación de costes, individuales y de manera conjunta con los demás municipios, para conocer las posibilidades de ahorro. Dicho estudio se representa en la siguiente tabla, donde 1, 2 y 3 representan a cada uno de los municipios.

COALICIÓN	COSTE
{1}	50
{2}	50
{3}	50
{1, 2}	100
{1, 3}	100
{2, 3}	100
{1, 2, 3}	120

Esta situación puede modelarse mediante un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v) , donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica v del juego viene expresada por

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0;$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 0; v(\{1, 2, 3\}) = 30.$$

Algunos detalles de este ejemplo se comentan a continuación. Se trata de un juego cooperativo porque los jugadores no compiten entre ellos, sino que cooperan para obtener un beneficio común. Por otro lado, la función característica v representa el beneficio positivo que obtienen los jugadores, en este caso, el ahorro que les supone compartir la estación depuradora en lugar de construir una propia. Sin embargo, la función característica v no define cómo han de repartirse los beneficios. Aquí parece lógico que la solución más razonable es repartir los beneficios a partes iguales entre los tres municipios, por lo que cada uno pagaría una cantidad de 40 unidades. Pero no siempre resulta tan sencillo, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Considérese el mismo caso del ejemplo anterior. Ahora, debido a las peculiaridades de cada municipio y a los distintos precios de los terrenos donde se podría situar la estación depuradora, la tabla de costes queda de la siguiente manera.

COALICIÓN	COSTE
{1}	50
{2}	55

{3}	70
{1, 2}	105
{1, 3}	108
{2, 3}	120
{1, 2, 3}	160

Esta situación puede modelarse nuevamente mediante un juego cooperativo UT, (N, v) , donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica v del juego viene expresada por

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0;$$

$$v(\{1, 2\}) = 0; v(\{1, 3\}) = 12; v(\{2, 3\}) = 5; v(\{1, 2, 3\}) = 15.$$

El caso ahora no resulta tan sencillo como antes. En el supuesto de que los tres municipios cooperen para construir una estación conjunta, es necesario hacer un reparto del beneficio. Si, como en el Ejemplo 1.1, se reparten los beneficios de manera equitativa, cada municipio obtendría un beneficio de 5 unidades. Pero puede que los municipios 1 y 3 no estén de acuerdo en este reparto cuando, si cooperan únicamente ellos dos, obtendrían 12 unidades de beneficio. En este caso, el municipio 2 tendría que construir una estación por separado, recibiendo un beneficio nulo. ¿Debe este municipio ceder en el reparto para que los otros quieran cooperar con él y obtener algo de beneficio? Como puede observarse, la función característica no fija el reparto de pagos entre los jugadores y, precisamente, este es el mayor problema al que se enfrentan este tipo de juegos.

Las propiedades de la función característica v son las que suelen darle nombre al juego. De este modo, se tiene una gran variedad de juegos cooperativos.

Definición 1.2. Se dice que un juego (N, v) es **monótono** si $\forall S, T \subseteq N$, con $S \subseteq T$, se verifica

$$v(S) \leq v(T). \quad (1)$$

Esto es, se habla de juego cooperativo monótono cuando, al incorporarse jugadores a la coalición, el pago de dicha coalición no disminuye; por lo tanto, no hay jugadores que hagan a la coalición obtener menos beneficio con su incorporación.

Definición 1.3. Se dice que un juego (N, v) es **superaditivo** si $\forall S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T). \quad (2)$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior a la suma de los beneficios originales de las coaliciones.

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto, se dice que el juego es subaditivo: un juego (N, v) es **subaditivo** si $\forall S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T). \quad (3)$$

Definición 1.4. Se dice que un juego (N, v) es **convexo** si $\forall S, T \subseteq N$ se verifica

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

O, de forma más intuitiva,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T). \quad (4)$$

Si la desigualdad (4) se da en sentido opuesto, se dice que el juego es **cóncavo**. Un juego es cóncavo si

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) - v(S \cap T). \quad (5)$$

Definición 1.5. Se dice que un juego (N, v) es **0-normalizado** si se verifica

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in N. \quad (6)$$

Nótese que en los juegos 0-normalizados los jugadores están obligados a cooperar, pues solos obtendrían un beneficio nulo.

Definición 1.6. Se dice que un juego (N, v) es **(0,1)-normalizado** si se verifica

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in N \quad \text{y} \quad v(N) = 1. \quad (7)$$

Llegados a este punto es necesario presentar dos familias de juegos muy importantes dentro de los juegos cooperativos UT: los juegos de unanimidad y los juegos de identidad.

Se denota como Γ^n al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible sobre N , es decir,

$$\Gamma^n = \{(N, v): v: 2^n \rightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0\}.$$

En este conjunto Γ^n se introducen las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} +: \Gamma^N \times \Gamma^N &\rightarrow \Gamma^N, (v, w) \mapsto v + w, \\ \cdot: \mathbb{R} \times \Gamma^N &\rightarrow \Gamma^N, (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v, \end{aligned}$$

definidas para cualquier $S \subseteq N$ por

$$\begin{aligned} (v + w)(S) &= v(S) + w(S), \\ (\alpha \cdot v)(S) &= \alpha v(S). \end{aligned}$$

La terna $(\Gamma^n, +, \cdot)$ constituye un espacio vectorial $(2^n - 1)$ -dimensional. Una base de este espacio vectorial está formada por el conjunto

$$\{u_T \in \Gamma^n: T \subseteq N, T \neq \emptyset\},$$

siendo, para cada $S \subseteq N$, $u_T(S)$ definido por

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos u_T se denominan **juegos de unanimidad**. Los juegos de unanimidad no constituyen la única base del espacio vectorial Γ^N , siendo otra base la formada por los llamados **juegos de identidad**, denotados para cada $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$ por δ_T y definidos para cada $S \subseteq N$ por

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En un juego de utilidad transferible está permitido cualquier reparto del beneficio total entre los jugadores que forman la coalición. Así, un aspecto importante a analizar es la toma de decisiones de un jugador a la hora de elegir si forma parte de una coalición junto a otros jugadores, además de conocer qué beneficio obtendría de dicha coalición. Este objetivo es bastante ambicioso y prácticamente inabarcable para cualquier juego que pretenda modelar un problema de la vida real, puesto que en la mayoría de problemas que se suelen modelar mediante la teoría de juegos intervienen muchos factores en la toma de decisiones. Estas decisiones dependen de variables como la habilidad de los jugadores, su capacidad de negociación o las presiones de tipo social o moral. Por ello es muy difícil modelar con exactitud la afinidad de cada jugador con el resto para encontrar el modelo completo de una negociación.

Todo jugador de un juego cooperativo tiene que recibir su parte del pago total $v(N)$. El pago a cada jugador se puede representar mediante una función que le asigne a cada jugador del conjunto un número real que represente el pago que obtendrá en el juego. Dicha función se denomina **vector de pagos** y se representa como $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde x_i representa el pago del jugador i .

Existe una serie de restricciones lógicas para el vector de pagos, como se describirá a continuación. Los jugadores, para aceptar la distribución de beneficios propuesto, deberían recibir un pago igual o superior al que recibirían si jugasen solos. Este es el llamado **principio de individualidad racional**:

$$x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Un grupo de jugadores que pudiera obtener un pago cooperando también exigiría un vector de pagos igual o superior al que recibiría formando la coalición. De esta manera se tiene la condición de **racionalidad de grupo**, también llamada condición de **optimalidad de Pareto**:

$$\sum_{i \in S} x_i = x(S) \geq v(S). \quad (9)$$

En el caso de que todos los jugadores lleguen a un acuerdo común, formando la *gran coalición*, el beneficio total se representa como $v(N)$. Si al finalizar el juego reciben el vector de pagos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se satisface el **principio de eficiencia** cuando

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \quad (10)$$

Este principio impone que, si se forma la gran coalición, el beneficio será repartido en su totalidad entre los miembros que la forman.

Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen con el principio de eficiencia son llamados **vectores de pagos eficientes** o **preimputaciones** para el juego (N, v) .

Se puede definir por tanto el conjunto de preimputaciones de un juego (N, v) como el conjunto de vectores de distribución de pagos

$$PI(N, v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\},$$

con $x(N) = \sum_{i \in N} x_i$.

Así, el conjunto de preimputaciones no es más que el conjunto de todos los vectores de pagos que cumplen el principio de eficiencia. Si también se impone que los vectores de pagos cumplan el principio de individualidad racional, se llega al conjunto de **imputaciones** de un juego (N, v) :

$$\begin{aligned} I(N, v) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Si se verifica que $I(N, v) \neq \emptyset$, se dice que el juego (N, v) es **esencial**.

1.3 Conceptos de solución de juegos cooperativos

Una vez introducidos los principales conceptos y propiedades de los juegos cooperativos, el problema que surge es el de proponer un vector de pagos que sea aceptado por todos los jugadores.

Una *solución* o *concepto de solución*, sobre una colección no vacía de juegos, es una aplicación ψ que asocia a cada juego cooperativo de dicha colección un subconjunto $\psi(v)$ del conjunto de preimputaciones.

Existen dos tipos de conceptos de solución de juegos cooperativos: los de *tipo conjunto*, que, exigiendo el cumplimiento de algunas propiedades, limitan el conjunto de posibles valores, y los de *tipo puntual*, que eligen un solo vector de pagos de entre todos los posibles.

A continuación se presentan algunos de los conceptos de solución más utilizados en los juegos cooperativos: el *core*, de tipo conjunto, y el *nucleolus*, el valor de Shapley y el valor de Tijs, de tipo puntual.

1.3.1 El *core*

Como se ha comentado, en un juego UT podrían ser aceptados todos los vectores de pago posibles. Sin embargo, se suelen imponer algunas restricciones razonables a las posibles soluciones. Si se exige que el vector de pagos cumpla el principio de eficiencia, el conjunto de posibles soluciones se reduce al conjunto de preimputaciones. Atendiendo a esta idea, se define una solución o concepto de solución sobre una colección no vacía de juegos como una aplicación que asocia a cada juego cooperativo (N, v) de dicha colección un subconjunto del conjunto de preimputaciones.

Uno de los más atractivos conceptos de solución en la teoría de juegos es el denominado *core* del juego. Como se ha mencionado, se desea extraer, del conjunto de preimputaciones, un subconjunto de vectores de pagos que los jugadores estén dispuestos a aceptar. Si además de exigir que cumplan el principio de eficiencia, se requiere que los vectores de pago que cumplan el principio de racionalidad individual, se extrae un subconjunto de vectores del conjunto de imputaciones I . Se puede extender el principio de racionalidad individual como un caso particular del principio de racionalidad de grupo, llegando entonces al concepto de *core* de un juego cooperativo.

Definición 1.7. El *core* de un juego (N, v) es el conjunto de vectores de pagos

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}. \quad (11)$$

El *core* es, por tanto, el conjunto de vectores de pagos que ofrece a cada posible coalición sobre N un beneficio al menos igual que el que dicha coalición puede conseguir por sí misma. Por ello, los elementos del *core* son aceptables para todas las coaliciones $S \subseteq N$.

Si los valores $v(S)$ de las coaliciones se interpretan en términos de costes, entonces se tiene un juego cooperativo de costes y, para estos juegos, las desigualdades en las definiciones del conjunto de imputaciones y del *core* son las contrarias a las consideradas en las definiciones dadas.

La idea del *core* fue introducida por Gillies (1953), alumno destacado de von Neumann. Aunque ya existían otros conceptos de solución, puede decirse que éste fue el primero satisfactorio, ya que implica un reparto razonable para todas las coaliciones. Sin embargo, presenta el inconveniente de que, en muchos casos, el *core* puede ser un conjunto vacío y, para esos casos, no se podría obtener un vector de pagos con el que todas las coaliciones se viesan beneficiadas.

Puesto que el *core* aporta una solución para un juego cooperativo pero existen juegos con *core* vacío, es un importante objetivo de la teoría de juegos cooperativos caracterizar los juegos con *core*

no vacío. A este respecto, Bondareva (1963) y Shapley (1967) dieron, independientemente, una caracterización de los juegos con *core* no vacío basada en los conceptos de *coaliciones equilibradas* y de *juego equilibrado*.

Definición 1.8. Dado un juego (N, v) , una colección $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de N , distintos y no vacíos, se dice que es **equilibrada sobre N** si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (denominados pesos) tales que, $\forall i \in N$,

$$\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j = 1. \quad (12)$$

Si, para cualquier colección equilibrada sobre N , se verifica que

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(N), \quad (13)$$

entonces se dice que el juego (N, v) es **equilibrado**.

Bondareva y Shapley demostraron que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos con *core* no vacío.

Cercano al concepto de juego equilibrado está la noción de juego totalmente equilibrado. Un juego (N, v) se dice **totalmente equilibrado** si los subjuegos inducidos (S, v_S) son equilibrados $\forall S, S \neq \emptyset, S \subseteq N$. Aquí se entiende por subjuego inducido (S, v_S) aquel cuya función característica viene determinada por

$$v_S(T) = v(T), \quad \forall T \subseteq S.$$

Ejemplo 1.3. Considerar el caso de tres cantantes que tienen dos ofertas para lanzar sus carreras musicales. Una empresa les ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionarlos como trío a razón de una cantidad de A euros (conjuntamente para los tres). Otra empresa ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionar como dúo a cualquier par de cantantes que acepte la cantidad de B euros (conjuntamente para el dúo que pueda formarse). Se cumple que $0 \leq B \leq A$. Ninguno de los cantantes recibe ofertas como solista.

Se puede modelar esta situación como un juego cooperativo donde los jugadores son cada uno de los cantantes, $N = \{1, 2, 3\}$. La representación del juego en forma coalicional es

$$v(\emptyset) = 0; v(\{1\}) = 0; v(\{2\}) = 0; v(\{3\}) = 0;$$

$$v(\{1,2\}) = B; v(\{1,3\}) = B; v(\{2,3\}) = B; v(\{1,2,3\}) = A.$$

Pertenecerán al *core* los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

- Principio de eficiencia: $x_1 + x_2 + x_3 = A.$
- Individualidad racional: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$
- Racionalidad de grupo: $x_1 + x_2 \geq B, x_1 + x_3 \geq B, x_2 + x_3 \geq B.$

Los elementos del *core* son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de dos jugadores. Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = A$ (principio de eficiencia), se tiene que

$$x_1 + x_2 \geq B \Leftrightarrow A - x_3 \geq B \Leftrightarrow x_3 \leq A - B.$$

$$x_1 + x_3 \geq B \Leftrightarrow A - x_2 \geq B \Leftrightarrow x_2 \leq A - B.$$

$$x_2 + x_3 \geq B \Leftrightarrow A - x_1 \geq B \Leftrightarrow x_1 \leq A - B.$$

Por tanto,

$$C(N, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = A, 0 \leq x_i \leq A - B, \forall i = 1, 2, 3\}$$

$$= (x_1, x_2, A - x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x_1 \leq A - B, 0 \leq x_2 \leq A - B, B \leq x_1 + x_2 \leq A\}.$$

A la vista de estas expresiones que definen el *core* del juego se observan que aparecen tres posibilidades:

- a) Si $(A - B) + (A - B) = B$, es decir, $2A = 3B$, entonces el *core* es unitario, obteniéndose que $C(N, v) = \{(A - B, A - B, 2B - A)\}$. El *core* incluye un solo punto, que será la solución del problema.

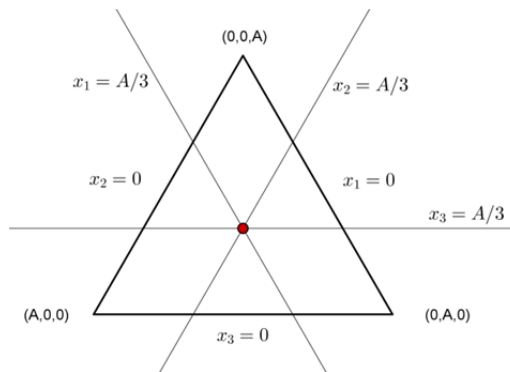


Figura 1.1. Core unitario

- b) Si $(A - B) + (A - B) < B$, es decir, $2A < 3B$, entonces el *core* es vacío. El *core* no incluye ningún punto: no hay ningún posible reparto de beneficios que satisfaga a todos los jugadores.

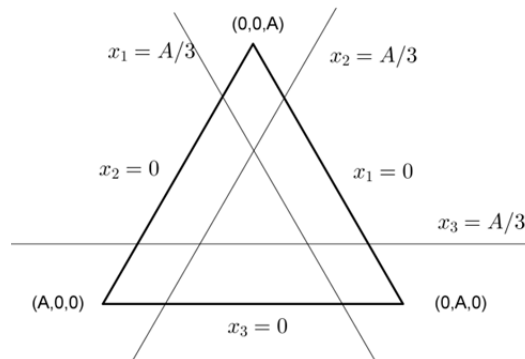


Figura 1.2. Core vacío

- c) Si $(A - B) + (A - B) > B$, es decir, $2A > 3B$, entonces el *core* es no vacío y no unitario. El *core* corresponde a los puntos que caen dentro de la región rayada.

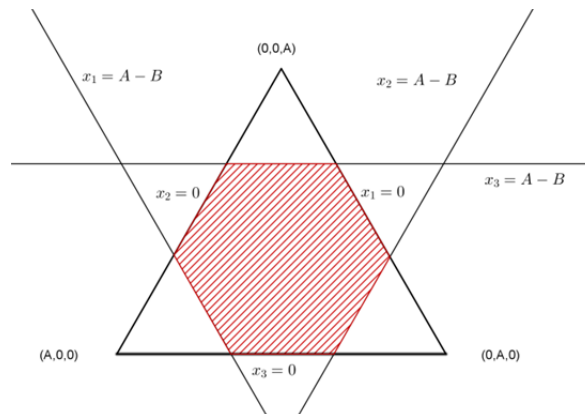


Figura 1.3. Core no vacío y no unitario

Como se muestra en el ejemplo, el *core* limita el conjunto de vectores de pagos que se puede elegir como solución al problema, pero no da, de forma general, una solución única. Es decir, además del caso en el que el *core* de un juego contiene exactamente un elemento, el *core* puede ser vacío (como en el segundo caso del ejemplo anterior), o puede contener muchos elementos (como en el tercer caso). Para abordar este problema se han definido varias reglas de reparto que eligen un único vector de pagos, tales como el *nucleolus*, el valor de Shapley o el valor de Tijs.

1.3.2 El *nucleolus*

El *nucleolus* fue introducido por Schmeidler (1969) y es una regla que propone una solución que, siempre que el conjunto de imputaciones sea no vacío, supera la dificultad anterior, pues es no vacío y único. Además, pertenece al *core* si éste es no vacío.

Sea un juego (N, v) . El *exceso* de una coalición S con respecto a una imputación $x \in I(N, v)$ es la diferencia entre el valor de dicha coalición y el pago que recibirán los miembros de S . Es decir,

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i. \quad (14)$$

Se trata de una medida del grado de insatisfacción de los miembros de la coalición S con la imputación x . Cuanto mayor es $e(S, x)$, mayor es la insatisfacción.

Una vez establecido el criterio de valoración de una propuesta de reparto, se debe seleccionar aquel vector de pagos que resulte “mejor” valorado, de entre todos aquellos que son considerados “admisibles” (que verifican ciertas propiedades deseables). El *nucleolus* exige que la propuesta de reparto a considerar sea una imputación. Teniendo en cuenta que siempre que $x \in PI(v)$ el exceso global (la suma de los correspondientes excesos asociados a todas las coaliciones) es el mismo, se tiene que, si se quiere minimizar el exceso asociado a “todas” las coaliciones, entonces se deberá optar por un mecanismo de selección que reparta equitativamente el exceso global entre todas las coaliciones. Una forma de repartir equitativamente es la que propone el *nucleolus*: seleccionar como propuesta final de reparto aquella imputación que minimiza el descontento de las coaliciones más insatisfechas.

Formalmente, considérese un vector de pagos cualquiera $x \in \mathbb{R}^n$, y sea $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n-1}$, el denominado *vector de excesos*, aquel vector cuyas componentes representan los excesos de las coaliciones con respecto a x , $e(S, x)$, $\forall S, S \neq \emptyset, S \subseteq N$, en orden no decreciente. A partir de $\theta(x)$, el *nucleolus* se define como sigue:

Definición 1.9. El *nucleolus* de un juego (N, v) es la imputación $\eta(N, v)$ que verifica

$$\theta(\eta(N, v)) \leq_L \theta(x), \quad \forall x \in I(N, v), \quad (15)$$

donde \leq_L es el orden lexicográfico en \mathbb{R}^{2^n-1} .

Por tanto, se puede decir que el *nucleolus* contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones y para los cuales se minimiza el mayor de los grados de insatisfacción.

Teorema 1.1. Sea (N, v) un juego esencial. Entonces se verifica que el *nucleolus* existe y es único.

Proposición 1.1. Una condición suficiente para que el *nucleolus* exista y sea único es que

$$\sum_{i=1}^n v(\{i\}) \leq v(N).$$

A continuación se dan dos definiciones necesarias para, posteriormente, dar un resultado en el que se presentarán algunas propiedades importantes del *nucleolus* que permitirán calcularlo en un ejemplo ilustrativo.

Definición 1.10. Se dice que dos jugadores $i, j \in N$ son **simétricos** si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición. Es decir, si se cumple

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \quad \forall S \subseteq N, \text{ con } i, j \notin S. \quad (16)$$

Definición 1.11. Se dice que el jugador i es un **jugador pasivo** en el juego si no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores. Es decir, si se cumple que

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \quad \forall S, \text{ con } i \in S. \quad (17)$$

Proposición 1.2. Se considera el juego (N, v) . El *nucleolus* $\eta(N, v)$ verifica las siguientes propiedades:

1. Si el *core* del juego es no vacío, entonces $\eta(N, v) \in C(N, v)$.
2. Si el *core* del juego es unitario, entonces $C(N, v) = \{\eta(N, v)\}$.
3. Si i, j son simétricos en (N, v) , entonces $\eta_i(N, v) = \eta_j(N, v)$.
4. Si i es pasivo en (N, v) , entonces $\eta_i(N, v) = v(\{i\})$.

Ejemplo 1.4. Se calcula a continuación el *nucleolus* del juego correspondiente al Ejemplo 1.3.

Se cumple la condición suficiente dada en la Proposición 1.1 para la existencia y unicidad del *nucleolus*, puesto que

$$\sum_{i=1}^3 v(\{i\}) \leq v(N), \text{ ya que } A \geq 0.$$

Sea $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ el *nucleolus*. Cualquier par de jugadores es simétrico; ningún jugador es nulo. Aplicando la propiedad 3 de la Proposición 1.2 se tiene $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = a$.

Como el *nucleolus* es una imputación, debe cumplir el principio de eficiencia, por lo que debe ser

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = v(\{1, 2, 3\}), \text{ es decir, } 3a = A \Rightarrow a = \frac{A}{3}.$$

Por tanto, el *nucleolus* del juego es

$$\eta = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right).$$

Cuando se ha estudiado el *core* de este juego se ha visto cómo puede ser vacío o no vacío, unitario o no unitario, dependiendo de las relaciones entre los parámetros A y B . Obsérvese que el *nucleolus* de este juego siempre existe y es único, independientemente de que el *core* sea o no vacío y sea o no unitario. En particular se ha visto que si $2A = 3B$, el *core* es unitario, siendo

$$C(N, v) = (A - B, A - B, 2B - A) = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right),$$

y coincide con el *nucleolus*, como no podía ser de otra forma atendiendo a la propiedad 2 de la Proposición 1.2.

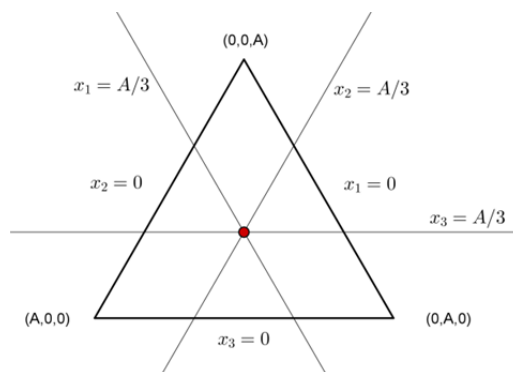


Figura 1.4. *Core* y *nucleolus* del Ejemplo 1.3

1.3.3 El valor de Shapley

En este apartado se estudia el concepto de solución más utilizado en los juegos cooperativos de utilidad transferible: el valor de Shapley. Shapley analizó los juegos cooperativos intentando contestar a la siguiente cuestión: dada la función característica de un juego, ¿cuál es el pago esperado para un jugador determinado? En este concepto de solución se trata de buscar una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos. Shapley (1953) partió de cuatro axiomas que, a su juicio, debería cumplir el reparto de pagos óptimo, y demostró que sólo una asignación cumplía todos los axiomas. A esta única asignación se la denomina *valor de Shapley*.

Es importante destacar que el valor de Shapley es un concepto de solución independiente del *core*; al no exigirle que cumpla el principio de racionalidad de grupo no siempre es una solución que pertenezca al *core*. Eso sí, en el caso de los juegos convexos el valor de Shapley sí pertenece al *core* del juego.

Para introducir el valor de Shapley se presentarán antes los axiomas previamente comentados.

Axioma 1.1. Una solución $\psi: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **eficiente** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(v) = v(N). \quad (18)$$

Esto es, la solución debe distribuir el pago total del juego.

Axioma 1.2. Una solución $\psi: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **simétrica** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^n$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, simétricos en (N, v) , se tiene que

$$\psi_i(v) = \psi_j(v).$$

Esto es, para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes el pago debe ser igual.

Axioma 1.3. Una solución $\psi: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de **jugador pasivo** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^n$ y para todo jugador pasivo en (N, v) , $i \in N$, se tiene que

$$\psi_i(v) = v(\{i\}).$$

Esto es, si un jugador no aporta beneficio adicional al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional.

Axioma 1.4. Una solución $\psi: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **aditiva** si para todo par de juegos $(N, v) \in \Gamma^n$ y $(N, w) \in \Gamma^n$, se tiene que

$$\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w).$$

Existe una única solución que verifica los anteriores axiomas: **el valor de Shapley**.

Teorema 1.2. La única solución ψ definida en Γ^n que satisface las propiedades de eficiencia, simetría, jugador pasivo y aditividad es el valor de Shapley. Dado un juego (N, v) , esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \gamma(S) [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad (19)$$

donde $\gamma(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, con s y n representando el número de jugadores en las coaliciones S y N , respectivamente.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición. En efecto, el factor $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse precisamente a $S \setminus \{i\}$ y no a otra coalición. Shapley justificó este valor bajo la suposición de que un jugador se uniría a una coalición de tamaño s , siendo los distintos tamaños equiprobables y, una vez fijado un tamaño, se uniría a una coalición determinada de ese tamaño también de manera equiprobable. El factor $\gamma(S)$ es el que implementa esa suposición en la expresión del valor de Shapley.

Otra manera de interpretar el valor de Shapley es la siguiente. Se supone que los jugadores forman la gran coalición incorporándose de uno en uno, en un orden aleatorio. De esta forma cada jugador consigue la cantidad con la que él contribuye a la coalición ya formada cuando se incorpora. El valor de Shapley distribuye a cada jugador la cantidad esperada que él obtiene por este procedimiento, suponiendo que la gran coalición de n jugadores puede formarse, de manera equiprobable, en todos los órdenes posibles.

Ejemplo 1.5. A continuación se calcula el valor de Shapley del juego correspondiente al Ejemplo 1.3. Hay que recordar que $N = \{1, 2, 3\}$ y que el juego v venía dado por

$$v(\emptyset) = 0; v(\{1\}) = 0; v(\{2\}) = 0; v(\{3\}) = 0;$$

$$v(\{1,2\}) = B; v(\{1,3\}) = B; v(\{2,3\}) = B; v(\{1,2,3\}) = A.$$

El conjunto 2^n es

$$2^n = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Las coaliciones a las que puede pertenecer cada jugador son

$$S(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\},$$

$$S(2) = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},$$

$$S(3) = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Los coeficientes $\gamma(S)$ valdrán

$$\gamma(1) = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} = \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$\gamma(2) = \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} = \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6},$$

$$\gamma(3) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} = \frac{2!0!}{3!} = \frac{1}{3}.$$

El pago esperado para cada jugador será, respectivamente,

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= \gamma(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + \gamma(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \gamma(2)[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\ &\quad + \gamma(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}[A - B] \\ &= \frac{1}{3}A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(v) &= \gamma(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + \gamma(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \gamma(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\ &\quad + \gamma(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}[A - B] \\ &= \frac{1}{3}A, \end{aligned}$$

$$\phi_3(v) = \gamma(1)[v(\{3\}) - v(\emptyset)] + \gamma(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \gamma(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})]$$

$$\begin{aligned}
+\gamma(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] &= \frac{1}{3}0 + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}[A - B] \\
&= \frac{1}{3}A.
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de Shapley es

$$\phi(v) = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right).$$

Como se observa, el valor de Shapley cumple la propiedad de eficiencia

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N) = A.$$

1.3.4 El valor de Tijs

Otra de las soluciones puntuales más importantes en teoría de juegos cooperativos es el valor de Tijs o τ -valor. Esta solución fue introducida por Tijs en 1981 y se caracteriza por ser una solución de compromiso. La idea es encontrar un acuerdo entre las máximas y las mínimas aspiraciones de las ganancias que cada jugador espera obtener en el juego. Este valor se basa en el vector superior y el vector inferior de un juego.

Sea un juego (N, v) , se denomina *vector superior* del juego al vector $M^v \in \mathbb{R}^n$, cuyas componentes son

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \quad \text{para todo } i \in N. \quad (20)$$

Este vector se compone de las contribuciones marginales de cada jugador a la gran coalición y representa lo máximo a que cada jugador puede aspirar en el juego. Por tanto, si se forma la coalición S y todos los jugadores de dicha coalición obtienen el máximo pago, entonces el beneficio que le queda al jugador $i \in S$ con $S \subseteq N$ sería el resto

$$R^v(S, i) = v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j^v(S), \quad (21)$$

Entonces, la menor cantidad esperada por un jugador que participa en el juego o mínimo derecho es el mayor de los restos que puede conseguir. Así pues, se define el *vector inferior* del juego como el vector $m^v \in \mathbb{R}^n$, cuyas componentes son

$$m_i^v = \max_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \{R^v(S, i)\}, \quad \text{para todo } i \in N.$$

Para que el valor de Tijs pueda ser calculado se necesita que el juego sea cuasiequilibrado.

Definición 1.12. Un juego (N, v) es **cuasiequilibrado** si verifica

- a) $m^v \leq M^v$ y
- b) $m^v(N) \leq v(N) \leq M^v(N)$.

Definición 1.13. Sea un juego (N, v) . El **valor de Tijs** es el vector $\tau(v) \in \mathbb{R}^n$, tal que, construido en la forma

$$\tau(v) = \alpha m^v + (1 - \alpha) M^v, \tag{22}$$

y con $\alpha \in [0, 1]$, verifica

$$\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N). \tag{23}$$

Es decir, para un juego cuasiequilibrado el valor de Tijs es la única preimputación (el único vector de pagos que cumple el principio de eficiencia) perteneciente al intervalo $[m(v), M(v)]$.

Ejemplo 1.6. Supóngase el caso de tres agricultores que poseen una finca de terreno cada uno, las cuales se denotan por finca 1, 2 y 3. Una empresa pretende contratar terrenos para su explotación agrícola en la localización de las fincas de estos agricultores. Por motivos de infraestructura, a dicha empresa no le interesa hacer acuerdos con cada agricultor por separado, pero realiza ofertas para contratar dos o tres de estas fincas. Debido a la disposición de las fincas, la empresa ofrece 2 millones a los pares de fincas formados por 1 y 2 o por 1 y 3, y 3 millones al par formado por las fincas 2 y 3. Para las tres fincas en conjunto, la oferta alcanza los 5 millones.

Esta situación puede modelarse mediante un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v) , donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica v del juego viene expresada, en millones, por

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0; \quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0; \\ v(\{1, 2\}) &= v(\{1, 3\}) = 2; \quad v(\{2, 3\}) = 3; \quad v(\{1, 2, 3\}) = 5. \end{aligned}$$

Para obtener el valor de Tijds, se calcula en primer lugar el vector superior, M_i^v , y el vector inferior, m_i^v .

$$\begin{aligned} M^v &= (2, 3, 3). \\ m_1^v &= \max\{0, -1, -1, -1\} = 0, \quad m_2^v = m_3^v = \max\{0, 0, 0, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Se cumple que el juego es cuasiequilibrado, ya que verifica

- a) $m^v \leq M^v$ y
- b) $\sum_{i=1}^n m_i^v \leq v(N) \leq \sum_{i=1}^n M_i^v$.

El valor de Tijds es el vector $\tau(v) = \alpha m^v + (1 - \alpha)M^v$ que verifica, para $\alpha \in [0, 1]$, $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$. Por tanto, se tiene

$$\tau(v) = (1 - \alpha)(2, 3, 3).$$

Aplicando el principio de eficiencia,

$$\sum_{i \in N} \tau_i(v) = 8 - 8\alpha = 5,$$

y de aquí,

$$\alpha = \frac{3}{8}.$$

Así, el valor de Tijds viene dado por

$$\tau(v) = \frac{5}{8}(2, 3, 3).$$

Para finalizar el capítulo, se expone un ejemplo aplicando TUGlab (Mirás y Sánchez, 2008), una *toolbox* de MATLAB, para calcular y representar algunos de los conceptos de solución existentes.

Ejemplo 1.7. Supóngase que, en el caso del Ejemplo 1.3, la cantidad que ofrece la empresa que desea promocionar a los cantantes como trío es de 90 unidades, mientras que la oferta de la otra empresa por formar un dúo con cualquier par de cantantes es de 40 unidades. Se calcula y representa, mediante la herramienta TUGlab, el *core*, el *nucleolus*, el valor de Shapley y el valor de Tijs. La situación se puede modelar mediante un juego cooperativo UT, (N, v) , donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica v del juego viene expresada por

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0; \quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0; \\ v(\{1, 2\}) &= 40; \quad v(\{1, 3\}) = 40; \quad v(\{2, 3\}) = 40; \quad v(\{1, 2, 3\}) = 90. \end{aligned}$$

Se quiere dibujar, en una misma gráfica, el resultado de los conceptos de solución aplicados a este juego. Tras escribir la función característica, calcular los distintos conceptos de solución y representarlos sobre el conjunto de imputaciones, se obtiene la siguiente gráfica.

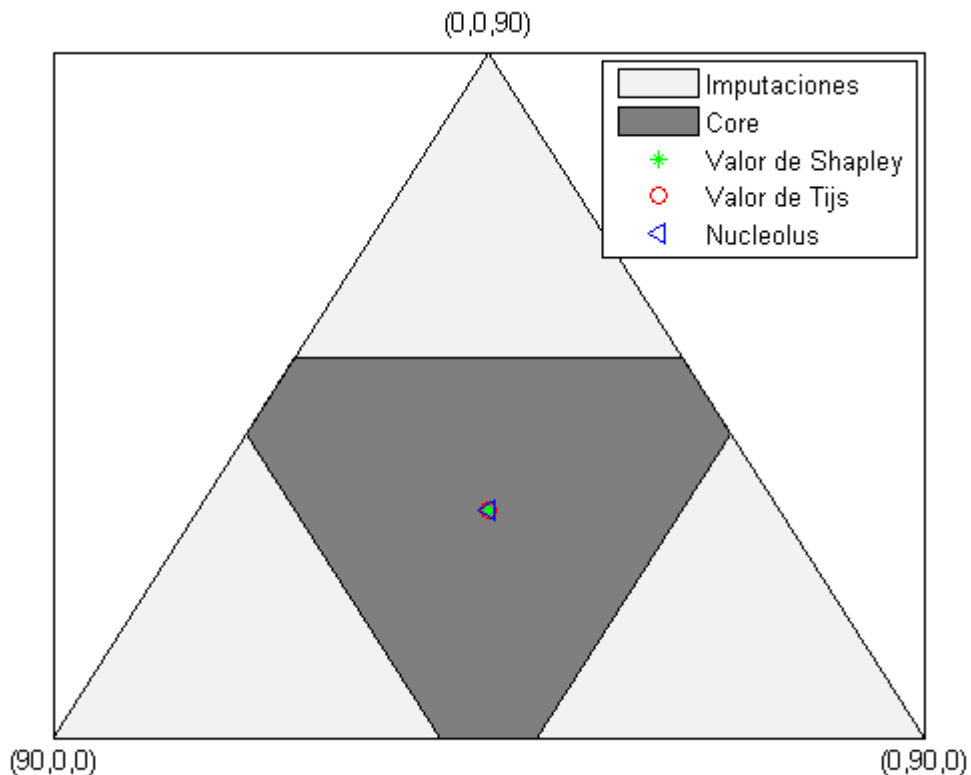


Figura 1.5. Gráfica realizada con TUGlab

2. PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE COSTE

2.1 Introducción

Este capítulo se va a centrar en algunas aplicaciones de los juegos cooperativos a los problemas de distribución de costes, en los cuales hay un grupo de agentes dispuestos a desarrollar un proyecto conjunto. La cuestión principal en un problema de distribución de costes es asignar el coste derivado del desarrollo común del proyecto a los agentes, incorporando todas las características especificadas por cada uno de ellos. Nótese que, aunque no hay diferencias sustanciales entre los problemas de distribución de costes y los de distribución de beneficios, existen diferencias en la literatura y la interpretación de dichos problemas. Este capítulo está escrito desde una perspectiva de costes, ya que se acerca más a la naturaleza del trabajo que se analizará en el Capítulo 4.

Las aplicaciones de los juegos cooperativos en los problemas de distribución de costes son muchas y de muchos tipos, desde la gestión de recursos naturales hasta el estudio de proyectos de ingeniería. Esta memoria se centra en la aplicación de los juegos cooperativos a problemas relacionados con la logística y, de forma más particular, con el transporte.

De forma resumida se descubrirán algunas de estas aplicaciones, desarrolladas en las últimas décadas sobre problemas y datos reales, para posteriormente entrar de forma más detallada en el estudio de dos casos particulares: el conocido *problema del aeropuerto* y el *problema de autopista*.

Engevall *et al.* (1998) estudiaron un problema de distribución de costes que surge en la planificación de la distribución de una compañía petrolífera en Suecia. En dicho problema el coste total de la distribución en un recorrido específico tenía que ser dividido entre los clientes a los que se servía. Ellos formularon el problema como el juego del agente viajero (*travelling salesman game*) y propusieron una nueva regla de reparto a la que llamaron *nucleolus* de la demanda. Compararon su regla con la tarifa aplicada por la compañía y con otras reglas ya existentes basadas en la teoría de juegos tales como el valor de Shapley, el *nucleolus* o el valor de Tijs, usando datos reales. Finalmente, llegaron a la conclusión de que el *nucleolus* de la demanda era el único que proporcionaba las tarifas más próximas a las aplicadas por la compañía en ese momento. Con el fin de acercarse más al problema real de esta compañía petrolífera, Engevall *et al.* (1998) formularon el problema de distribución de costes como un juego de planificación de rutas con vehículos, permitiendo el uso de vehículos con diferentes capacidades. En ese artículo estudiaron principalmente el *core* y el *nucleolus* usando datos reales de la compañía, aunque también trabajaron con el valor de Shapley y dos reglas de demanda proporcional.

En 2008, Özener y Ergun analizaron el problema de distribución que surgía en redes logísticas donde varias empresas colaboraban para obtener mejores tarifas al subcontratar un servicio de transportes común. Su principal preocupación era desarrollar reglas de reparto de costes de tal forma que se pudieran satisfacer algunas características deseables. Estudiaron el *core*, el *nucleolus* y el

valor de Shapley, así como otras reglas de reparto para contextos más específicos. Özener y Ergun (2008) aplicaron sus resultados a un conjunto de datos proporcionado por un consorcio de abastecimiento estratégico para una multimillonaria empresa estadounidense (cuyo nombre se mantuvo de manera confidencial).

Hoang (2010) analizó la imparcialidad de los precios de los billetes en el transporte público. Estudió el caso de la red ferroviaria holandesa y formuló el problema del precio de los billetes como un problema de distribución de costes donde un jugador es el conjunto de pasajeros con el mismo par origen-destino. Hoang (2010) propuso usar una nueva solución de reparto de costes y proporcionó un algoritmo para encontrarla. Comparó sus resultados con la tarifa del momento (basada en las distancias) aplicada por el principal operador ferroviario holandés.

La teoría de juegos cooperativos también ha sido aplicada con éxito a la red de aerolíneas. Uno de los objetivos de Changjoo (2004) es distribuir los costes de las redes *hub-spoke* entre los usuarios (pasajeros) utilizando los juegos cooperativos. Él definió dos modelos: uno en el que las coaliciones tienen que usar la ruta dada por la red óptima global, y otro en el cual las coaliciones pueden usar rutas alternativas. Changjoo (2004) propuso usar las reglas de distribución proporcional de costes y aplicó sus modelos a un conjunto de datos de las aerolíneas de pasajeros que trabajaron en los años 70 en Estados Unidos.

Por su parte, Matsubayashi *et al.* aplicaron en 2005 la teoría de juegos cooperativos al transporte de paquetes de datos en una red de telecomunicaciones. En su artículo exploraron el problema de distribución de costes asociado a los sistemas de redes *hub-spoke* constituidos por varios agentes. Su principal aportación fue incorporar el tráfico al modelo para estudiar el caso de *core* no vacío y proponer una regla de asignación que fuera proporcional al flujo que un agente genera, además de buscar condiciones bajo las cuales esta regla proporcional se encuentra en el *core*. También estudiaron posibles extensiones de las condiciones para el *core* no vacío en redes de mayor tamaño. El artículo contiene una aplicación con datos reales de una *hub-spoke* de telecomunicaciones que conectaba Corea del Sur (Seúl), Japón (Tokio) y Estados Unidos (Washington).

Otra cuestión importante dentro del transporte es el diseño de un sistema de pago justo para sufragar el coste de las infraestructuras. Por ejemplo, la teoría de juegos cooperativos fue aplicada con éxito por Villarreal-Cavazos y García-Díaz (1985) y por Makrigeorgis (1991) para el problema de la política de precios relativos a las carreteras en Estados Unidos. Estos dos artículos trabajaron con el también llamado método generalizado, que es el *nucleolus* de un problema de distribución de costes cuyos agentes son las clases de vehículos (ligeros, motocicletas, camiones...). En Kuipers, Mosquera y Zarzuelo (2013) se puede encontrar una aplicación de los juegos cooperativos al diseño de peajes en autopistas de España. En dicho artículo, un jugador es un par dado por una entrada y una salida de la autopista, y los peajes basados en el valor de Shapley y el *nucleolus* se comparan con los peajes utilizados en la actualidad.

2.2 El problema del aeropuerto

El problema del aeropuerto plantea cómo distribuir el coste de la pista de un aeropuerto entre los aviones que hacen uso de ella, los cuales tienen tamaños variados y necesitan pistas de diferentes longitudes. El problema fue estudiado por Littlechild y Owen (1973). En esta sección se presenta el problema del aeropuerto y, con la ayuda de un ejemplo, se aplicarán dos conceptos de solución como son el valor de Shapley y el *nucleolus*.

Considérese un conjunto finito M que representa el conjunto de los diferentes tipos de aviones. Cada tipo de avión $\ell \in M$ necesita una pista para realizar sus operaciones de aterrizaje y despegue valorada en d_ℓ unidades, $d_\ell > 0$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $d_1 < d_2 < \dots < d_m$. Además, cada tipo de avión $\ell \in M$ declara que va a realizar N_ℓ operaciones.

La cuestión que se planteó resolver era cómo repartir el coste de construcción de la pista entre las distintas operaciones. Un primer intento para abordar este problema fue propuesto por Baker (1965) y Thompson (1971). En ambos trabajos se propone la siguiente regla de reparto:

Dividir el coste de construcción de la pista de aterrizaje correspondiente a los aviones de tipo más pequeño entre todas las operaciones.

Dividir el incremento del coste de construcción de la pista de aterrizaje que supone habilitarla para aviones que son del segundo tipo más pequeño entre todas las operaciones que requieren al menos una pista de aterrizaje con esa longitud.

Proceder de este modo hasta llegar al incremento del coste que supone la ampliación de la pista para que los aviones de mayor tamaño puedan realizar una operación si se había construido adecuada a las necesidades de los aviones del segundo tipo más grande. En este caso, dividir el incremento del coste entre el número de operaciones que realizan los aviones de mayor tamaño.

Una forma alternativa de abordar el problema es utilizar herramientas de teoría de juegos. A continuación se expone el modelo de juego de coste UT propuesto por Littlechild y Owen (1973).

El juego de coste UT asociado a un problema del aeropuerto está dado por (N, c) , donde

$$N = \bigcup_{\ell \in M} N_\ell,$$

y la función característica está dada por

$$c(S) = d_{i_S}, \text{ con } i_S = \max\{\ell \in M \mid N_\ell \cap S \neq \emptyset\}.$$

El valor que la función característica asigna a una colección de movimientos es el coste de construcción de una única pista con la mínima longitud necesaria para que puedan realizarse todos

esos movimientos. A continuación se presenta un ejemplo.

Ejemplo 2.1. Considérense tres tipos de aviones con costes $d_1 = 10, d_2 = 16, d_3 = 20$ y supóngase que el conjunto de operaciones de cada tipo de avión es $N_1 = \{1\}, N_2 = \{2, 3\}$ y $N_3 = \{4\}$. El juego del aeropuerto asociado está dado por (N, c) , con $(N) = \{1, 2, 3, 4\}$ y la función característica

$$\begin{aligned} c(\emptyset) &= 0, \\ c(1) &= 10, \\ c(2) &= c(3) = c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = c(1, 2, 3) = 16, \\ c(4) &= c(1, 4) = c(2, 4) = c(3, 4) = c(1, 2, 4) = c(1, 3, 4) = c(2, 3, 4) = c(N) = 20. \end{aligned}$$

El juego que se asocia a un problema del aeropuerto presenta propiedades de interés como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.1. El juego UT asociado a un juego del aeropuerto es *subaditivo, monótono y cóncavo*.

Por tanto, el valor de Shapley del juego de coste UT asociado a un problema del aeropuerto está en el *core* y, adicionalmente, se calcula de un modo muy sencillo. La expresión fue obtenida por Littlechild y Owen (1973) y se presenta a continuación.

Teorema 2.1. Dado un problema del aeropuerto $(M, \{N_\ell\}_{\ell \in M}, d)$ y su juego de coste UT asociado (N, c) , el valor de Shapley asigna a cada $j \in N$ el valor

$$\Phi_j(N, c) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{d_k - d_{k-1}}{r_k}, \quad (24)$$

si $j \in N_\ell$ con $\ell \in M$, siendo $d_0 = 0$ y $r_k = \sum_{\ell=k}^m |N_\ell|$, para cada $k \in M$.

Obsérvese que, dado un tipo de avión $\ell \in M$, se verifica que las operaciones correspondientes pagan lo mismo, es decir,

$$\Phi_i(N, c) = \Phi_j(N, c) = \varphi_\ell, \quad (25)$$

para cualquier $i, j \in N_\ell$. Además, el valor se puede calcular como

$$\varphi_\ell = \varphi_{\ell-1} + \frac{d_\ell - d_{\ell-1}}{r_\ell}, \quad (26)$$

si $\ell \geq 1$, siendo $\varphi_0 = 0$ y $d_0 = 0$.

Pues bien, el valor de Shapley del juego asociado al problema del aeropuerto coincide con la regla de reparto del coste de construcción propuesta por Baker (1965) y Thompson (1971).

En el Ejemplo 2.1 se obtiene la siguiente distribución de costes de acuerdo al valor de Shapley,

$$\Phi_1(N, c) = 2.5; \Phi_2(N, c) = \Phi_3(N, c) = 2.5 + 6/3 = 4.5; \Phi_4(N, c) = 4.5 + 4 = 8.5.$$

En el caso del juego del aeropuerto el *nucleolus* puede calcularse de modo recursivo de acuerdo a la fórmula obtenida por Littlechild y Owen (1976).

Teorema 2.2. Dado un problema del aeropuerto $(M, \{N_\ell\}_{\ell \in M}, d)$ y su juego de coste UT asociado (N, c) , el *nucleolus* asigna a cada agente i el valor

$$\eta_i = \gamma_k, \text{ para cualquier } i \in \bigcup_{\ell_{k-1} < \ell \leq \ell_k} N_\ell, \text{ con } k = 1, \dots, k',$$

donde γ_k está definido por

$$\gamma_k = \min \left\{ \min_{\ell_{k-1}+1 \leq \ell \leq m-1} \left\{ \frac{d_\ell - d_{\ell_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_\ell - s_{\ell_{k-1}} + 1} \right\}, \frac{d_m - d_{\ell_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_m - s_{\ell_{k-1}}} \right\}, \quad (27)$$

siendo ℓ_k el mayor índice donde se alcanza el mínimo de la ecuación (27), $d_0 = \gamma_0 = \ell_0 = s_0 = 0$, $s_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} |N_j|$ y $\ell_{k'} = m$.

Ejemplo 2.2. Considérese el caso del Ejemplo 2.1. A continuación se calcula cómo se distribuye el coste de acuerdo con el *nucleolus*. Aplicando el procedimiento descrito en el Teorema 2.2 y tomando $d_0 = \gamma_0 = \ell_0 = s_0 = 0$, entonces,

$$\gamma_1 = \min \left\{ \min \left\{ \frac{10}{2}, \frac{16}{4}, \frac{16}{4} \right\}, \frac{20}{4} \right\} = 4.$$

Por tanto, $\ell_1 = 2, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 4$. Además, $\gamma_2 = \frac{20-16+4}{4-3} = 8, \ell_2 = 4$. De este modo, el *nucleolus* viene dado por

$$\eta(N, c) = (4, 4, 4, 8).$$

Obsérvese que no es necesario describir la función característica para obtener el reparto del coste que proponen el valor de Shapley y el *nucleolus*; pueden obtenerse directamente a partir de los parámetros del problema inicial. De hecho, el reparto que propone el valor de Shapley coincide con el reparto que proponen Baker (1965) y Thompson (1971). El reparto que propone el *nucleolus*, como se ha comentado, maximiza el exceso.

El ejemplo anterior muestra que el reparto que propone el valor de Shapley y el reparto que propone el *nucleolus* son diferentes. El estudio de las propiedades que verifica una regla de reparto de costes es un tema de interés, ya que permite realizar comparaciones entre reglas de reparto. En el trabajo de Thomson (2007) aparece una revisión amplia de reglas de reparto de coste y de las propiedades utilizadas para su caracterización en el contexto de los problemas del aeropuerto.

2.3 El problema de autopista

Una generalización de los problemas del aeropuerto son los problemas de autopista definidos en Kuipers, Mosquera y Zarzuelo (2013). A continuación, se describen las principales características de estos problemas y cómo se podrían abordar.

En una autopista existen varios puntos de entrada y salida. Los distintos viajes que se pueden realizar dentro de la autopista están delimitados por un punto de entrada y un punto de salida. Además, estos puntos de entrada, considerados ordenadamente, dividen a la autopista en un conjunto de tramos indivisibles. Con el fin de sufragar los distintos costes derivados de la construcción de la autopista (entre otros costes), la concesionaria de la autopista cobra una tasa o peaje por cada viaje que se realiza dentro de la autopista. Uno de los muchos problemas a estudiar es cómo asignar esta tasa. En Kuipers *et al.* (2013) se intenta dar respuesta a este problema utilizando herramientas de teoría de juegos cooperativos.

Para simplificar el problema se supone que la autopista es lineal, es decir, existen dos puntos extremos unidos por la autopista pero no existen ramificaciones. Se asume también que la dirección en la que se realizan los viajes no es relevante.

Como ejemplo de una autopista en estas condiciones se elige la Autopista del Sur (AP-4), que comienza en Sevilla a la altura de Dos Hermanas y termina en Puerto Real (Cádiz), y, por simplicidad, se toman los puntos de entrada y salida que se marcan en la siguiente figura.



Figura 2.1. Autopista del Sur

Un problema de autopista se puede representar por una 4-tupla (N, M, C, T) donde N es el conjunto de los distintos viajes que se realizan por la autopista, $M = \{t_1, \dots, t_m\}$ es el conjunto completamente ordenado de tramos de los que consta la autopista ($t_1 \leq \dots \leq t_m$), $C : M \rightarrow R_{++}$ es la función de coste que representa el coste de sufragar cada tramo y $T : N \rightarrow 2^m$ es una función que a cada viaje le asigna los tramos de autopista que realiza, de tal forma que cada viaje utiliza un conjunto de tramos de autopista consecutivos y cada tramo de autopista es usado por al menos 2 viajes.

El problema que surge es cómo se debería asignar los peajes a cada viaje. En una primera aproximación a este problema se podrían utilizar dos posibles repartos:

1. Un *reparto igualitario*: el coste de cada tramo se reparte igualitariamente entre el número de viajes que lo usan, al igual que Baker (1965) y Thompson (1971) proponen para problemas del aeropuerto.
2. Un *reparto proporcional*: cada viaje tiene que pagar una parte del coste total que es proporcional al coste que tendría que pagar si ese fuese el único viaje de la autopista.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, la teoría de juegos proporciona herramientas para resolver este problema de reparto de costes. Asociado a cada problema de autopista (N, M, C, T) se define el juego de autopista (N, c) como el juego de coste UT con

$$c(S) = \sum_{t \in T(S)} C(t) \quad \text{para cada } S \subseteq N,$$

donde $T(S) = \{t \in M \mid t \in T(i) \text{ para algún } i \in S\}$ es el conjunto de tramos que utilizan los viajes de la coalición S . Así, $c(S)$ representa el coste que la coalición de viajes S tiene que pagar si la autopista está formada sólo por los tramos de $T(S)$ y esos viajes son los únicos que se realizan sobre esa parte de la autopista.

La siguiente proposición muestra algunas de las propiedades de esta clase de juegos.

Proposición 2.2. Sea (N, M, C, T) un problema de autopista. El juego de autopista asociado (N, c) es subaditivo, monótono y cóncavo.

El siguiente resultado indica que, para el caso de los juegos de autopista, tanto el valor de Shapley como el valor de Tijs tienen interpretaciones intuitivas y sus expresiones son sencillas, evitando así su complejidad computacional. Estas reglas de reparto coinciden con las reglas de reparto definidas directamente sobre el problema de autopista.

Teorema 2.3. Dado un problema de autopista (N, M, C, T) y su juego de autopista asociado (N, c) .

- (i) El reparto igualitario de (N, M, C, T) coincide con el valor de Shapley de (N, c) .
- (ii) El reparto proporcional de (N, M, C, T) coincide con el valor de Tijs de (N, c) .

A continuación se describe el *nucleolus*. Aunque su cálculo no siempre es sencillo, existen clases de juegos para las que se puede encontrar un procedimiento simple que proporcione su valor. Este es el caso de la clase de juegos de autopista. A continuación se presenta un algoritmo para el cálculo del *nucleolus*. Para simplificar la exposición del algoritmo, se supone que existe un viaje desde un extremo al otro de la autopista, es decir, existe $i \in N$ tal que $T(i) = M$. Se dice que una coalición $S \subset N$ es **relevante** si existen $a_s, b_s \in M$ tales que

$$S = \{i \in N \mid a_s \leq t \leq b_s \text{ para cada } t \in T(i)\}.$$

Algoritmo para el cálculo del *nucleolus*.

Sea (N, M, C, T) un problema de autopista tal que $|N| \geq 3$ y verificando todas las suposiciones hechas. Sea (N, c) el juego de autopista asociado. El algoritmo que se propone es el siguiente:

Paso 0. Establecer $(N^0, M^0, C^0, T^0) = (N, M, C, T)$ y $\ell = 0$.

Paso 1. Buscar el conjunto de coaliciones relevantes \mathcal{RC}^ℓ

Paso 2. Calcular:

$$\gamma^\ell(S) = \frac{\sum_{a_s \leq t \leq b_s} C^\ell(t)}{|S| + 1} \quad \text{para toda } S \in \mathcal{RC}^\ell, \quad (28)$$

$$\delta^\ell = \frac{\sum_{t \in M^t} C^\ell(t)}{|N^\ell|}, \quad (29)$$

$$\lambda^\ell = \min \left\{ \delta^\ell, \min_{S \in \mathcal{RC}^\ell} \gamma^\ell(S) \right\}. \quad (30)$$

Paso 3. Si $\lambda^\ell = \delta^\ell$, entonces el *nucleolus* es $\eta_i = \lambda$ para todo $i \in N^\ell$. El algoritmo se acaba.

Si $\lambda^\ell \neq \delta^\ell$, entonces $\eta_i = \lambda$ para $i \in Z^\ell = \cup_{S \in \mathcal{RC}^\ell \mid \gamma^\ell(S) = \lambda^\ell} S$.

Definir el problema de autopista reducido $(N^{\ell+1}, M^{\ell+1}, C^{\ell+1}, T^{\ell+1})$.

Establecer $\ell = \ell + 1$ e ir al Paso 1.

A continuación se expone un ejemplo que muestra el cálculo del *nucleolus* siguiendo los pasos del algoritmo anterior.

Ejemplo 2.3. Sea (N, M, T, C) el problema de autopista representado en la Figura 2.2, con $N = \{13, 24, 35, 15\}$, $M = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $C : M \rightarrow R_{++}$ tal que $C(t_1) = 6$, $C(t_2) = 10$ y $C(t_3) = C(t_4) = 8$, y $T : N \rightarrow 2^M$ tal que $T(13) = \{t_1, t_2\}$, $T(24) = \{t_2, t_3\}$, $T(35) = \{t_3, t_4\}$ y $T(15) = M$.

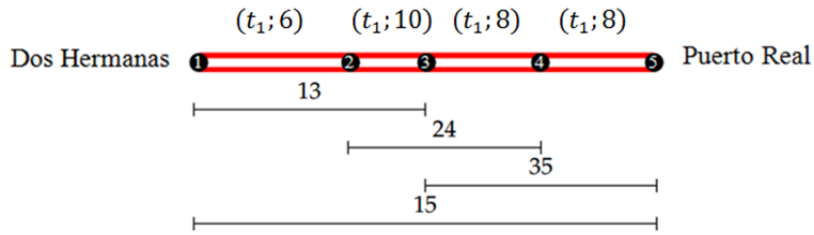


Figura 2.2. Autopista del Ejemplo 2.3

Con estos datos, el coste del juego UT asociado a este problema es:

S	\emptyset	$\{13\}$	$\{24\}$	$\{35\}$	$\{15\}$	$\{13, 24\}$	$\{13, 35\}$	$\{13, 15\}$	$\{24, 35\}$
$c(S)$	0	16	18	16	32	24	32	32	26
S	$\{24, 15\}$	$\{35, 15\}$	$\{13, 24, 35\}$	$\{13, 24, 15\}$	$\{13, 35, 15\}$	$\{24, 35, 15\}$	N		
$c(S)$	32	32	32	32	32	32	32		

En primer lugar, hay que identificar las *coaliciones relevantes*:

$$\mathcal{RC}(N, c) = \{\{13\}, \{24\}, \{35\}, \{13, 24\}, \{24, 35\}\}.$$

Seguidamente se debe calcular $\gamma(S) = \frac{\sum_{a_s \leq t \leq b_s} C(t)}{|S|+1}$, para todas las coaliciones relevantes \mathcal{RC} , y $\delta^\ell = \frac{\sum_{t \in M^\ell} C(t)}{|N|}$.

$$\gamma(\{13\}) = \frac{16}{2} = 8,$$

$$\gamma(\{24\}) = \frac{18}{2} = 9,$$

$$\gamma(\{35\}) = \frac{16}{2} = 8,$$

$$\gamma(\{13, 24\}) = \frac{24}{3} = 8,$$

$$\gamma(\{24, 35\}) = \frac{26}{3}.$$

Luego

$$\gamma(S) = \min\left\{8, 9, 8, 8, \frac{26}{3}\right\} = 8.$$

Por otro lado, $\delta = \frac{32}{4} = 8$. Por tanto,

$$\lambda = \min\left\{\delta, \min_{S \in \mathcal{RC}^\ell} \gamma(S)\right\} = 8.$$

Se llega al tercer paso y se comprueba que $\lambda = \delta$. Entonces, el *nucleolus* es $\eta_i = \lambda = 8$ para todo $i \in N$ y el algoritmo se acaba.

Nótese que si en el ejemplo anterior $\lambda \neq \delta$ se debería plantear y resolver el problema de autopista reducido. Para ver en detalle cómo se obtiene el problema de autopista reducido véase Kuipers *et al.* (2013). A grandes rasgos, los viajes de Z^ℓ pagan un peaje igual a λ y abandonan la autopista. En el problema reducido, los tramos que no están en $T(Z^\ell)$ no se ven afectados. Sin embargo, la suma de los costes de los tramos de $T(Z^\ell)$ se reduce a $\lambda = C(Z^\ell) - |Z^\ell|\lambda$. Este coste tiene que ser redistribuido entre los viajes restantes que utilizan alguno de los tramos de $T(Z^\ell)$. Esto conduce a una redefinición de los tramos dentro de $T(Z^\ell)$ (quizás los nuevos tramos sean completamente diferentes a los tramos originales). En términos de teoría de juegos, el juego asociado a este problema de autopista reducido se corresponde con el juego reducido del juego de autopista original (Davis y Maschler, 1965).

Obsérvese que, si se aplica este algoritmo a un problema de aeropuerto, se obtiene el procedimiento iterativo descrito en el Teorema 2.2.

2.4 Conclusiones

El problema que supone el reparto del beneficio o del coste, según proceda, entre los jugadores resulta ser el aspecto más importante de los juegos cooperativos de utilidad transferible. El caso que se trata en este trabajo es un problema de costes. En este capítulo se han presentado casos concretos en los que la teoría de juegos ha sido utilizada para resolver los problemas de reparto de costes. Esta parte de la teoría de juegos es probablemente la que cuenta con más aplicaciones en problemas de la vida real. Este capítulo se ha centrado en problemas relacionados con la logística y el transporte, pero las aplicaciones son muy variadas.

Los problemas del aeropuerto y de autopista proporcionan unas herramientas de gran utilidad y aplicabilidad en problemas reales. En el caso del problema del aeropuerto, quizás el problema de distribución de costes más estudiado durante las últimas décadas, se ha calculado el *nucleolus* y el valor de Shapley. En el problema de autopista se ha calculado el *nucleolus* mediante la implementación de un algoritmo. Cabe destacar que los conceptos de solución estudiados para estos problemas se pueden calcular sin hacer uso de la función característica.

3. DISTRIBUCIÓN DEL COSTE DE UNA RED DE CONEXIÓN: JUEGO DE ÁRBOL FIJO

3.1 Introducción

Un problema que surge en diversos escenarios es el de distribuir el coste fijo, ya sea de mantenimiento, de modernización, etc., de una red (ya construida) de conexión a un cierto punto de suministro entre sus usuarios. En este capítulo se aborda este problema a partir de su planteamiento como un juego de coste. En particular se centrará en aquellos problemas que surgen asociados a redes de conexión con una estructura muy peculiar: la de árbol.

Problemas de este tipo, así como el problema más general en el que la red de conexión debe ser previamente construida, han sido tratados extensamente. El caso particular en que el árbol que define la red de conexión es una cadena se conoce con el nombre de problema del aeropuerto, el cual ha sido estudiado en esta memoria en la Sección 2.2.

Una vez que el problema descrito se plantea como un juego de coste, el objetivo final es seleccionar propuestas de reparto eficientes, es decir, que repartan el coste total de la red entre sus usuarios. Este capítulo se centrará en el análisis del *core* de aquellos juegos de coste que surgen asociados a problemas de esta naturaleza. Por tanto, la pregunta sería si existe algún procedimiento general de selección que permita obtener repartos en el *core* del juego. Se puede afirmar que el juego de coste asociado a un problema de estas características es cóncavo (Granot *et al.*, 1996) y, por consiguiente, el *core* del juego coincide con el conjunto de valores de Shapley (duales) ponderados (Monderer, Sarnet y Shapley, 1992).

De forma similar, se introduce una familia de conceptos de solución, la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas, basada en la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray (1989), y se demuestra su coincidencia con el *core* del juego. Así mismo, se propone un esquema dinámico de reparto de costes inspirado en la historia sobre el pintado de carreteras de Maschler, Potters y Reijnierse (1995), para la obtención de cada uno de los elementos de la familia. Dicho esquema no sólo ayuda a comprender el proceso de selección que lleva a cada elemento del *core* del juego, sino que también permite deducir algunas de las propiedades más relevantes de esta familia de soluciones.

3.2 Descripción del modelo

A lo largo de este capítulo se trabajará con un problema de distribución de coste de una red de conexión con estructura de árbol, y se hará como se detalla en Koster *et al.* (1998). Dicho problema

se denomina problema de conexión de árbol fijo (*fixed tree connection problem*), viene dado por una tripleta $\mathcal{G} = (G, c, N)$, donde $G = (V, E)$ es un árbol con un único vértice raíz, esto es, un digrafo conexo sin ciclos, siendo E el conjunto de arcos y V el conjunto de vértices del árbol. G describe la estructura física de la red. El vértice raíz del árbol, que se denotará por r , representa en este caso el punto de suministro de la red. La función $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, es la función de coste del modelo, que asigna a cada arco $e \in E$ del árbol su coste (de mantenimiento, de reparación...), $c(e)$. El conjunto $N = \{1, \dots, n\}$, finito, es el conjunto de usuarios de la red, cada uno de los cuales se encuentra localizado en un cierto vértice del árbol G y cuyo objetivo es ser conectado al punto de suministro, r . Con el fin de no complicar el modelo, se supondrá que cada uno de los vértices de la red, a excepción del vértice raíz, está ocupado por un usuario, de manera que, en lo que sigue, vértices y usuarios serán identificados, esto es, $V = N \cup \{r\}$. Los resultados obtenidos en este capítulo pueden ser generalizados al caso en que los vértices del árbol estén ocupados por un conjunto de usuarios, siendo el único problema añadido la complejidad de notación y lo farragoso del modelo.

Antes de definir el juego de coste generado por un problema de conexión de árbol fijo, **problema FTC** en adelante, se introduce parte de la notación y de los conceptos que van a ser empleados a lo largo de todo el capítulo. Para cada vértice $i \in N$, el único camino en el árbol G de r a i se denotará por P_i . Si P_i está compuesto por los vértices $j_0 = r, j_1, \dots, j_{q-1}, j_q = i$, entonces se denominará al vértice j_{q-1} como el *predecesor* $\pi(i)$ del vértice i . El arco $(\pi(i), i)$ se denotará por e_i . La *relación de precedencia* (V, \preceq) sobre el conjunto de vértices se define como $i \preceq j$ si y sólo si $i \in P_j$. Análogamente, se define la relación de precedencia (E, \preceq) sobre el conjunto de arcos. Una rama del árbol $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices $R \subseteq V$ cerrado bajo la relación de precedencia definida previamente, es decir, si $i \in R$ y $j \preceq i$, entonces $j \in R$. El conjunto de *sucesores* de un vértice i se define como el conjunto $F(i) = \{j \in N : j \succ i\}$. Por último, un vértice i se denomina *hoja* si $F(i) = \{i\}$.

Un problema FTC genera un juego de coste de forma natural, sin más que identificar al conjunto de usuarios con el conjunto de jugadores. El coste de una coalición vendrá dado por el mínimo coste necesario para conectar al punto de suministro a todos sus miembros.

Definición 3.1. Para todo problema FTC, $\mathcal{G} = (G, c, N)$, se define el **juego de coste generado por \mathcal{G}** como el juego $(N, c_{\mathcal{G}})$, cuya función característica viene dada por

$$c_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{i \in R_S} c(e_i), \quad \forall S, S \neq \emptyset, S \subseteq N, \quad (31)$$

donde $R_S = \{i \in N : \nexists j \in S \text{ con } i \preceq j\}$ es la mínima rama que contiene a todos los miembros de S , y $c_{\mathcal{G}}(\emptyset) = 0$.

En lo que sigue se consideran aquellos problemas FTC, $\mathcal{G} = (G, c, N)$ que verifican las siguientes condiciones:

1. $c(e) \geq 0$, para todo arco $e \in E$.
2. Del vértice raíz parte un único arco.

Obsérvese que en la definición de un problema FTC se ha asumido además,

3. No hay ningún usuario localizado en el punto de suministro, esto es, el vértice raíz está libre.
4. Exactamente un usuario vive en cada vértice $v \in V \setminus \{r\}$.

Definición 3.2. Se define un problema *estándar* de conexión de árbol fijo (*standard fixed tree connection problem*), **problema SFTC**, como un problema FTC verificando las condiciones 1 y 2.

La definición anterior únicamente difiere del modelo propuesto por Granot *et al.* (1996) (*standard tree enterprise*) en la condición 4. En ese modelo se permite que un vértice esté ocupado por más de un usuario; no obstante, como ya se ha mencionado, el asumir dicha hipótesis no resulta restrictivo, en el sentido de que los resultados obtenidos pueden ser generalizados al modelo más general de Granot *et al.* (1996)

Obsérvese que las condiciones 2 y 3 no son restrictivas. En efecto, con respecto a la condición 3, si el vértice raíz está ocupado, entonces se puede añadir un arco con coste cero desde un nuevo vértice raíz libre hasta el vértice raíz del árbol original sin que ello modifique en forma alguna la función de coste del juego (Granot *et al.*, 1996). En cuanto a la condición 2, si varios arcos e_{i_1}, \dots, e_{i_p} parten del vértice raíz, entonces considérense los p subárboles G_{i_1}, \dots, G_{i_p} generados por $F(i_1) \cup \{r\}, \dots, F(i_p) \cup \{r\}$, respectivamente. Notar que cada subárbol define un problema SFTC, sean $(N_1, c_G^1), \dots, (N_p, c_G^p)$ los juegos de coste generados por cada uno de ellos.

Se verifica que el juego de coste asociado a $\mathcal{G}, (N, c_G)$, puede ser descompuesto (Shapley, 1971) en $p \geq 2$ componentes, siendo cada una de ellas un juego de coste asociado a un problema SFTC. Es decir, existe una partición $\{N_1, \dots, N_p\}$ del conjunto de jugadores N en p subconjuntos no vacíos tal que

$$c_G(S) = c_G(S \cap N_1) + \dots + c_G(S \cap N_p), \quad \forall S \subseteq N. \quad (32)$$

Las restricciones del juego original a cada elemento de la partición $(N_1, c_G^1), \dots, (N_p, c_G^p)$, donde $c_G^k = c_G(N_k)$, $\forall k = 1, \dots, p$, se denominan *componentes* y se corresponden con los juegos de coste asociados a los distintos subárboles G_{i_1}, \dots, G_{i_p} . En estas condiciones, todos los conceptos de solución tratados en este capítulo se pueden obtener como el producto cartesiano de las correspondientes soluciones en cada una de sus componentes.

A continuación, se obtiene la expresión de un juego de coste (N, c_G) asociado a un problema SFTC con respecto a la base del espacio de juegos G^n , compuesta por los *juegos duales de unanimidad* (Kalai y Samet, 1988).

Definición 3.3. Se define el **juego dual de unanimidad** con respecto a la coalición no vacía $S \subseteq N$ (*representation game for the coalition S*) como el juego (N, u_S^*) dado por

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \cap T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica que (N, u_S^*) es un juego cóncavo para toda coalición no vacía S . Además el conjunto $\{(N, u_S^*)\}_{S \subseteq N}$, compuesto por los juegos duales de unanimidad, es una base del espacio de juegos G^n .

Proposición 3.1. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Entonces el juego de coste asociado, $(N, c_{\mathcal{G}})$, puede ser representado como

$$c_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{i \in N} c(e_i) u_{F(i)}^*, \quad (33)$$

donde e_i se refiere al arco $(\pi(i), i)$ y $F(i)$ es el conjunto de sucesores de i .

3.3 El *core* de un juego de árbol fijo

Planteado el modelo como un juego de coste, el objetivo que se persigue consiste en seleccionar conceptos de solución eficientes. De entre todos los conceptos de solución clásicos, se analiza el *core* de un juego de coste. El juego de coste generado por un problema SFTC es cóncavo y, por tanto, la estructura y propiedades de su *core* son bien conocidas. En esta sección se obtienen caracterizaciones alternativas y se lleva a cabo un estudio geométrico del *core* de este tipo de juegos, detallado en Koster *et al.* (1998).

En este contexto, dado el juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, cada vez que se alude a un *vector de reparto de costes*, $x \in \mathbb{R}^n$, se está refiriendo a una preimputación del juego. Por tanto, x_i representa el coste que el usuario $i, i = 1, \dots, n$, debe asumir de acuerdo con x . Entonces el *core* del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, que se denota por $core(c_{\mathcal{G}})$ (en lugar de $\mathcal{C}(c_{\mathcal{G}})$ para evitar confusiones con $c_{\mathcal{G}}$), viene dado por

$$core(c_{\mathcal{G}}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \leq c_{\mathcal{G}}(S), \quad \forall S \subseteq N \text{ y } \sum_{i \in N} x_i = c_{\mathcal{G}}(N) \right\}.$$

Observación: Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema FTC verificando todas aquellas propiedades que caracterizan a un problema FTC estándar, a excepción de la propiedad 2. Se verifica (ver Shapley (1971) y Granot y Huberman (1981)) que el *core* del juego original $(N, c_{\mathcal{G}})$ se obtiene como el producto cartesiano del *core* de cada una de sus componentes.

3.3.1 Expresiones alternativas del *core*

A continuación se deducen caracterizaciones alternativas del *core* de un juego de coste asociado a un problema SFTC. Dichas caracterizaciones serán empleadas reiteradamente en los razonamientos seguidos en las demostraciones de los principales resultados que se presentan en este capítulo.

Lema 3.1. Para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = (G, c, N)$, se verifica

$$\text{core}(c_{\mathcal{G}}) = \{x \in PI(c_{\mathcal{G}}) : x \geq 0 \text{ y } x(R) \leq c(R), \quad \forall R \text{ rama de } G\},$$

donde $x(R) := \sum_{i \in R \setminus \{r\}} x_i$ y $c(R) := \sum_{i \in R \setminus \{r\}} c(e_i)$, es el coste asociado a la rama R de G .

Demostración: Trivialmente, si $x \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces

$$x_i \geq c_{\mathcal{G}}(N) - c_{\mathcal{G}}(N \setminus \{i\}) \geq 0, \quad \forall i \in N,$$

y $x(R) \leq c(R)$, para toda rama R de G .

Recíprocamente, si $x \in PI(c_{\mathcal{G}})$ es un vector de reparto de costes no negativo verificando la desigualdad $x(R) \leq c(R)$, para toda rama R , entonces $x \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$. En efecto, sea $S \subseteq N$ una coalición cualquiera no vacía, entonces $S \subseteq R_S$ y, por consiguiente, se verifica

$$c_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{i \in R_S} c(e_i) \geq \sum_{i \in R_S} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i.$$

■

Se introduce ahora una notación relevante para lo que viene: dado un arco $e = (i, j) \in E$ del árbol G , se denota por $B_e = (V_e, E_e)$ al subárbol de G generado por el conjunto de vértices $F(j) \cup \{i\}$. Por tanto, se denomina B_e a la rama de G enraizada en e .

De acuerdo con la notación introducida, el lema anterior se puede establecer en *términos de ramas* como sigue.

Lema 3.2. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Entonces un vector de reparto de costes x pertenece al *core* del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$ si y sólo si $x \geq 0$ y se verifica

$$\sum_{j \in V_e} x_j - x_i \geq \sum_{e' \in B_e} c(e'), \quad \forall e = (i, j) \in E, \quad (34)$$

donde $B_e = (V_e, E_e)$ es la rama de G enraizada en e .

Demostración: teniendo en cuenta el resultado establecido en el Lema 3.1., es suficiente demostrar que la condición anterior es equivalente a la condición $x(R) \leq c(R)$, $\forall R$, rama de G .

Obviamente, para todo vector de reparto de costes x y para toda rama R , se verifica

$$x(R) \leq c(R) \Leftrightarrow x(R^c) \geq \sum_{i \in R^c} c(e_i),$$

donde $R^c = V \setminus R$.

Así, la equivalencia entre ambas condiciones se deduce de las siguientes relaciones de complementariedad:

- (i) El complementario de la rama R viene dado por la unión finita

$$R^c = \bigcup_{e \in \ell(R)} V_e \setminus \{i\},$$

donde $\ell(R) \in E$ es el conjunto finito de arcos que parten de R y $B_e = (V_e, E_e)$ es la rama de G enraizada en $e = (i, j)$, para todo arco $e \in \ell(R)$.

- (ii) Para todo arco $e = (i, j) \in E$, B_e^c es una rama de G .

Obsérvese que, siguiendo la notación introducida en Granot *et al.* (1996), si $e(i, j)$ entonces B_e se corresponde con la rama en i en la dirección de j .

■

El lema siguiente muestra como todo elemento del *core* del juego se obtiene repartiendo de forma arbitraria, obviamente sin violar la condición de no negatividad, el coste de cada arco entre sus usuarios.

Lema 3.3. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Entonces el vector $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al *core* del juego de coste asociado $(N, c_{\mathcal{G}})$ si y sólo si existen y^1, \dots, y^n , elementos del simplex unidad en $\mathbb{R}^{F(j)}$, $j = 1, \dots, n$, respectivamente, tales que

$$x_i = \sum_{j \in P_i} y_i^j c(e_j), \quad \forall i \in N, \quad (35)$$

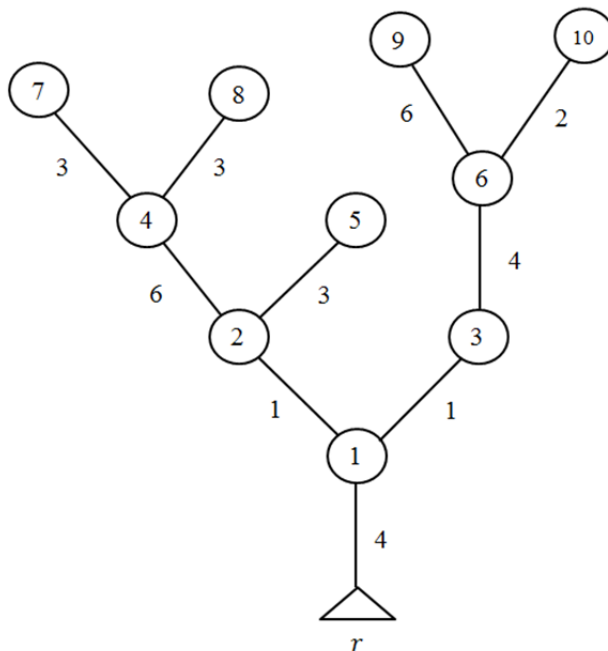
donde P_i es el camino que une el vértice raíz con el vértice i . Para todo $j \in N$, $\mathbb{R}^{F(j)}$ es la proyección de \mathbb{R}^n sobre $F(j)$ y el simplex unidad en $\mathbb{R}^{F(j)}$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{F(j)} : x \geq 0, \sum_{i \in F(j)} x_i = 1\}$.

Los resultados que se obtienen a continuación están encaminados a probar que todo elemento del *core* de un juego de coste asociado a un problema SFTC se puede obtener descomponiendo el problema original de conexión a un punto de suministro en varios subproblemas de conexión a diversos puntos de suministro intermedios, cada uno de los cuales es en sí mismo un problema SFTC. Esto será crucial a la hora de establecer las propiedades esenciales de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas que será estudiada en la Sección 3.4. Formalmente, considérese la siguiente definición.

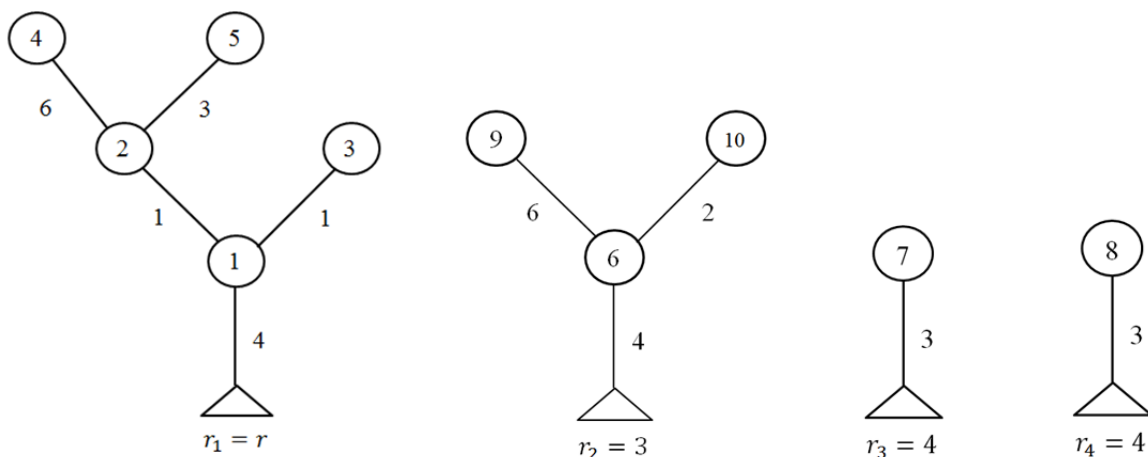
Definición 3.4. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC y sea $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} = \{G^1, \dots, G^p\}$ una colección de subgrafos de G . Entonces, se dice que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ es una **partición de \mathcal{G} en subproblemas** si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- a) Para todo $k = 1, \dots, p$, existe un vértice $r_k \in V$ tal que $G^k = (S_k \cup \{r_k\}, E_k)$ es el subárbol de G con raíz r_k generado por $(S_k \cup \{r_k\}) \subseteq V$.
- b) El conjunto $\{S_1, \dots, S_p\}$ es una partición ordenada (el orden es relevante) del subconjunto de vértices $V \setminus \{r\}$.
- c) Se tiene $r_1 = r$ y para todo $k = 2, \dots, p$ existe $\ell < k$ tal que $r_k \in S_{\ell}$.
- d) Para todo $k = 1, \dots, p$, $\mathcal{G}^k = (G^k, c^k, S_k)$, donde c^k es la restricción de c a E_k , es un problema SFTC.

Ejemplo 3.1. Considérese el problema SFTC, $\mathcal{G} = (G, c, N)$, representado en la siguiente figura. Los jugadores (vértices) están representados por círculos, el vértice raíz por un triángulo y el coste de cada arco viene dado por el número que aparece a su lado.



La colección $S_{\mathcal{G}} = \{G^1, G^2, G^3, G^4\}$, representada a continuación, es una partición de \mathcal{G} en subproblemas SFTC.



Proposición 3.2. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC y sea $S_G = \{G^1, \dots, G^p\}$ una partición cualquiera de \mathcal{G} en subproblemas SFTC, entonces

$$\prod_{k=1}^p \text{core}(c_{G^k}) \subseteq \text{core}(c_G), \quad (36)$$

donde (c_{G^k}, S_k) es el juego de coste asociado al problema SFTC restringido $G^k = (G^k, c^k, S_k)$, $k = 1, \dots, p$.

Demostración: Sea $\prod_{k=1}^p y^k \in \prod_{k=1}^p \text{core}(c_{G^k})$. Entonces $x \geq 0$ y es un vector eficiente, ya que

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{k=1}^p \sum_{i \in S_k} y_i^k = \sum_{k=1}^p \sum_{i \in S_k} c^k(e_i) = \sum_{i \in N} c(e_i).$$

Sea R una rama de G cualquiera, considérense los subconjuntos $R^k = R \cap S_k$, $k = 1, \dots, p$, entonces $R^k \cup \{r_k\}$ es una rama de $G^k = (S_k \cup \{r_k\}, E_k)$ para todo $k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $R^k \neq \emptyset$. Entonces,

$$x(R) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ R^k \neq \emptyset}} \sum_{i \in R^k} y_i^k \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ R^k \neq \emptyset}} \sum_{i \in R^k} c^k(e_i) = \sum_{i \in R} c(e_i).$$

Luego $x(R) \leq c(R)$ para toda rama R de G . Entonces, de acuerdo con el Lema 3.1, se tiene el resultado.

Recíprocamente, asociado a todo elemento x del *core* del juego existe una única partición de \mathcal{G} en subproblemas SFTC más fina, que se denota por $S_G(x)$, verificando que la restricción de x a cada uno de los subproblemas SFTC definidos por $S_G(x)$ pertenece al *core* del correspondiente subjuego de coste. ■

Definición 3.5. Dado un problema SFTC $\mathcal{G} = (G, c, N)$, sea una rama de G , y sea x un vector de reparto de costes, se dice que R es una rama **autónoma** en x si y sólo si $x(R) = c(R)$.

Lema 3.4. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Si $x \in \text{core}(c_G)$, entonces existe una única rama

autónoma en x *minimal* (con respecto al orden dado por la inclusión).

Demostración: Sea $x \in \text{core}(c_G)$. Como V es una rama autónoma en x , entonces es suficiente probar que la intersección de dos ramas autónomas en x sigue siendo una rama autónoma en x . Así, la (única) rama autónoma mínima en x vendrá dada por la intersección de todas aquellas ramas de G que son autónomas en x .

Sean R_1, R_2 dos ramas autónomas en x cualesquiera, entonces $R_1 \cap R_2$ es obviamente una rama. Además,

$$\begin{aligned} x(R_1 \cap R_2) &\leq c(R_1 \cap R_2) = c_G(R_1 \cap R_2) \leq c_G(R_1) + c_G(R_2) - c_G(R_1 \cup R_2) \\ &= x(R_1) + x(R_2) - c_G(R_1 \cup R_2) \leq x(R_1) + x(R_2) - x(R_1 \cup R_2) \\ &= x(R_1 \cap R_2), \end{aligned}$$

donde todas las desigualdades, a excepción de la segunda de ellas, que se deduce de la concavidad del juego (N, c_G) son desigualdades correspondientes al *core* del juego. En particular, de la cadena de desigualdades se deduce que $c(R_1 \cap R_2) = x(R_1 \cap R_2)$, esto es, $R_1 \cap R_2$ es una rama autónoma en x . ■

Proposición 3.3. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Para todo $x \in \text{core}(c_G)$, existe una única partición de \mathcal{G} en subproblemas SFTC más fina tal que $x \in \prod_{k=1}^p \text{core}(c_{G^k})$.

Demostración: Sea $x \in \text{core}(c_G)$ cualquiera y sea R_1 la rama autónoma mínima en x_1 que existe y es única como se ha comprobado en el Lema 3.4. Considérese el subárbol $G^1 = (S_1 \cup \{r_1\}, E_1)$ generado por $R_1 (S_1 = R_1 \setminus \{r\})$ y $r_1 = r$. Obviamente, $x^1 = (x_i)_{i \in S_1}$ pertenece al *core* del subjuego (S_1, c_{G^1}) .

Sea $\ell(R_1) \in E$ el conjunto de arcos que parten de R_1 . Selecciónese un arco $e_0 = (i_0, j_0)$ en $\ell(R_1)$ cualquiera. Considérese la rama $B_{e_0} = (V_{e_0}, E_{e_0})$ de G enraizada en e_0 . Se probará, a continuación, que $x^{e_0} = (x_j)_{j \in V_{e_0} \setminus \{i_0\}}$ pertenece al *core* del subproblema SFTC definido por B_{e_0} .

En efecto, $x^{e_0} \geq 0$. Se prueba además que es eficiente: del Lema 3.2 se deduce

$$\sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i'\}} x_j \geq \sum_{e \in E_{e'}} c(e), \quad \forall e' = (i', j') \in \ell(R_1). \quad (37)$$

Por otro lado, por ser R_1 autónomo en $x \in PI(c_G)$, se tiene que

$$\sum_{e' \in \ell(R_1)} \sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i'\}} x_j = x(N) - x(R_1) = c(N) - c(R_1) = \sum_{e' \in \ell(R_1)} \sum_{e \in E_{e'}} c(e). \quad (38)$$

De las expresiones (37) y (38) se deduce:

$$\sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i'\}} x^{e'} = \sum_{e \in E_{e'}} c(e), \quad \forall e' = (i', j') \in \ell(R_1).$$

En particular, x^{e_0} es un vector de reparto de costes para el subproblema SFTC definido por B_{e_0} .

Por otro lado, para toda rama R^0 de B_{e_0} , $R^0 \cup R^1$ es una rama de G , entonces

$$\begin{aligned} x(R_1) + \sum_{j \in R^0 \setminus \{i_0\}} x_j &= x(R^0 \cup R^1) \leq c(R^0 \cup R^1) \\ &= c(R_1) + \sum_{j \in R^0 \setminus \{i_0\}} c(e_j) = x(R_1) + \sum_{j \in T^0 \setminus \{i_0\}} c(e_j). \end{aligned}$$

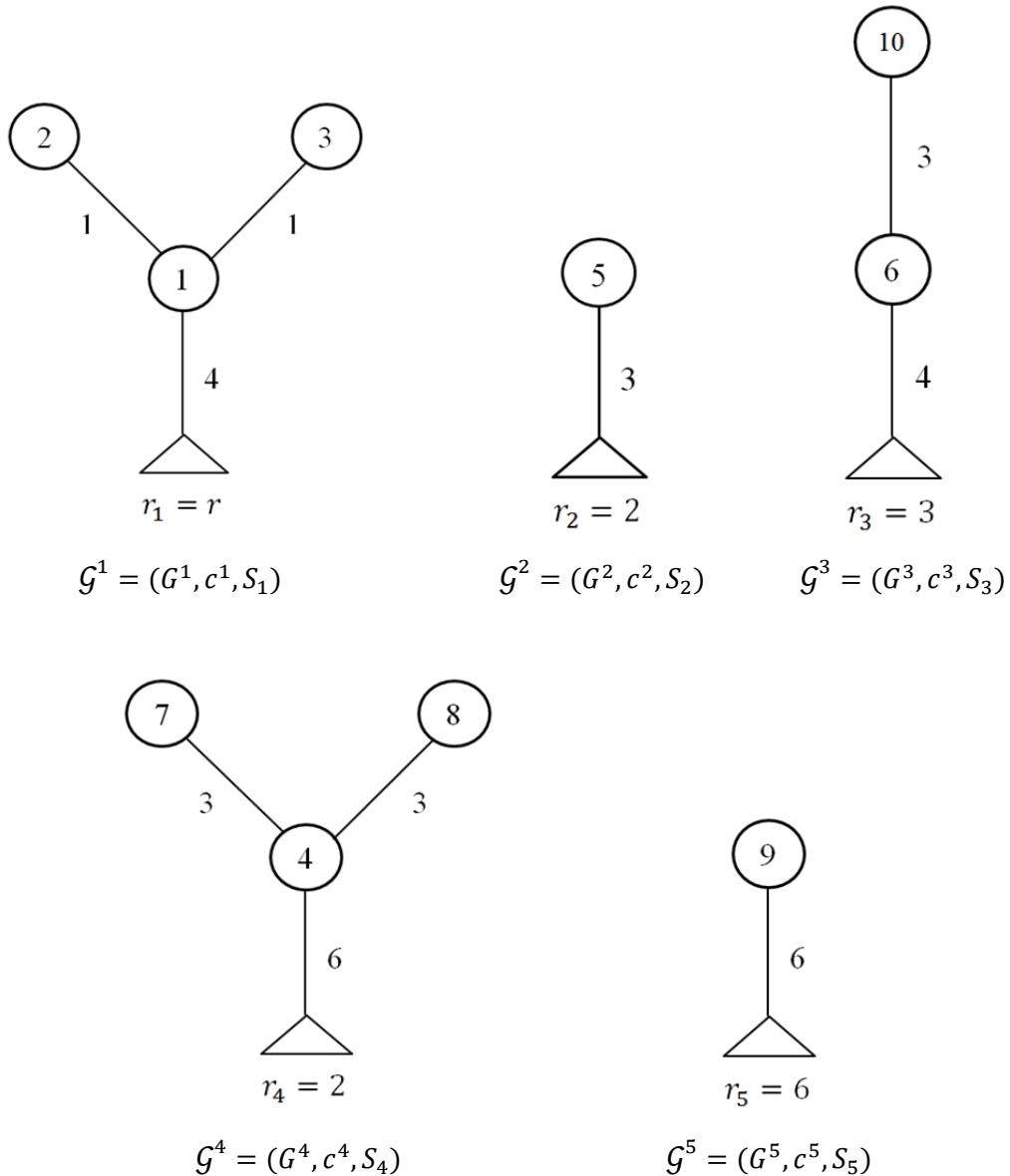
Luego, efectivamente, aplicando el lema 3.1 se tiene que x^{e_0} pertenece al *core* del juego restringido, $(N, c_{G^{e_0}})$.

Sea R_2 la rama mínima de B_{e_0} autónoma en x^{e_0} , defínase $G^2 = (S_2 \cup \{r_2\}, E_2)$ como el subárbol generado por R_2 ($S_2 = R_2 \setminus \{i_0\}$ y $r_2 = i_0$). Una vez definido G^2 , selecciónese un arco e_1 en $\ell(R_2 \in E_{e_0})$ cualquiera y aplíquese el razonamiento anterior a x^{e_1} con respecto a la rama de G^2 enraizada en e_1 .

Este razonamiento se aplica hasta que la rama autónoma correspondiente R^* , sea tal que $\ell(R^*) = \emptyset$. En este punto, hay que ir deshaciendo el camino seleccionando aquellos arcos que no han sido seleccionados previamente. De esta forma, cuando ya no quedan arcos por seleccionar, la colección de subproblemas de G , $S_G = \{G^1, \dots, G^p\}$, así construida verifica las condiciones establecidas en la proposición. ■

Dado $x \in core(c_G)$, la partición verificando las condiciones establecidas en la Proposición 3.3 se denomina partición de G en subproblemas inducida por x , y se denota por $S_G(x)$.

Ejemplo 3.2. Considérese el problema SFTC definido en el Ejemplo 3.1. La siguiente figura representa la partición \mathcal{G} en subproblemas SFTC inducida por el elemento del *core* del juego dado por $x = (2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3)$.



3.3.2 Estudio geométrico

Se finaliza esta sección con el estudio geométrico del *core* de un juego de árbol fijo de tipo estándar, definido en Koster *et al.* (1998). Se comprueba que el *core* de un juego de coste asociado a un problema SFTC tiene dimensión completa y se describen sus caras. La primera de las

afirmaciones se deduce de la concavidad y la no descomponibilidad del juego (ver Shapley (1971)). En cuanto a la descripción facial del poliedro *core*, la siguiente proposición establece que se distinguen dos tipos de caras: las que se denominan caras de tipo (I) se encuentran asociadas a particiones en subproblemas no triviales; el resto de caras, que se denominan de tipo (II), se encuentran asociadas a grupos de jugadores que hacen uso del sistema sin cargo alguno (no pagan nada). Para demostrar este último resultado se debe tener en cuenta que si (N, v) es un juego cóncavo, entonces para toda partición ordenada de N , $\sigma = \{S_1, \dots, S_p\}$, el conjunto

$$F_\sigma = \left\{ x \in C(v) : x \left(\bigcup_{\ell=1}^k S_\ell \right) = v \left(\bigcup_{\ell=1}^k S_\ell \right), \quad \text{para toda } 1 \leq k \leq p \right\},$$

es una cara no vacía del *core* $C(v)$ de dimensión, a lo sumo, $n - k$.

En lo que sigue se dirá que $i \in N$ es un vértice hoja si $F(i) = \{i\}$, o si $c(e_i) > 0$ y $c(e_j) = 0$, $\forall j \in F(i) \setminus \{i\}$.

Proposición 3.4. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Si $x \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces x pertenece a una cara del poliedro $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$ si y sólo si x verifica alguna de las siguientes condiciones:

- (i) Existe una rama de G no trivial, autónoma en x .
- (ii) $x(R) < c(R)$ para toda rama R de G no trivial y existe una coalición no vacía $S \subseteq N \setminus \{i \in N : i \text{ vértice de hoja}\}$ tal que $x(S) = 0$.

Demostración: Se prueba que si x pertenece a una cara del poliedro $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces x debe satisfacer alguna de las condiciones (i) o (ii). Para ello, se demostrará que si no verifica ninguna de ellas, entonces x pertenece al interior de $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$.

Sea $L \subset N$ una coalición no vacía, a continuación se comprobará que $x(L) < c(L)$. Considérese la rama de G , $R_L \cup \{r\}$, siendo $R_L = \{i \in N : \exists j \in L \text{ tal que } i \preceq j\}$. Se distinguen dos casos:

1. Si $R_L \subset N$, entonces

$$x(R) \leq x(R_L) < c(R_L) = c_{\mathcal{G}}(L).$$

La primera desigualdad se deduce de la no negatividad de x (ver Lema 3.1); mientras que la segunda de ellas se deduce de la negación de la condición (i).

2. Si $R_L = N$, entonces L contiene a todos los vértices hoja del árbol G y, por consiguiente, el subconjunto de vértices $N \setminus L \neq \emptyset$ está contenido en $N \setminus \{i \in N : i \text{ es vértice hoja}\}$.

Por tanto, el vector x no verifica la condición (ii), entonces como x no satisface la condición (i) debe verificarse $x(S) > 0$ para toda coalición no vacía $S \subseteq N \setminus \{i \in N : i \text{ es vértice hoja}\}$. En particular, $x(R_L \setminus L) > 0$, entonces $x(R) < x(R_L) = c_{\mathcal{G}}(L)$.

Así, $x(L) < c_G(L)$ para toda coalición no vacía $L \subset N$, esto es, x pertenece al interior del poliedro $core(c_G)$.

■

Ejemplo 3.3. Sea \mathcal{G}^1 el subárbol definido en el Ejemplo 3.2. Entonces el $core$ del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}^1})$ tiene las siguientes caras,

$$F_1 = \{(\alpha, 5 - \alpha, 1) : \alpha \in [0, 4]\} \text{ y } F_2 = \{(\alpha, 1, 5 - \alpha) : \alpha \in [0, 4]\},$$

que son caras de tipo (I) asociadas a las particiones en subárboles no triviales $S_1 = \{G_1^1, G_1^2\}$ y $S_2 = \{G_2^1, G_2^2\}$, respectivamente, donde

$$\begin{aligned} G_1^1 &= (\{1, 2\} \cup \{r\}, \{e_1, e_2\}), & G_2^1 &= (\{1, 3\} \cup \{r\}, \{e_1, e_3\}), \\ G_1^2 &= (\{3\} \cup \{r_2\}, \{e_3\}), \text{ con } r_2 = 1, & G_2^2 &= (\{2\} \cup \{r_2\}, \{e_2\}), \text{ con } r_2 = 1, \end{aligned}$$

y $F_3 = \{(0, 1 + \alpha, 5 - \alpha) : \alpha \in [0, 4]\}$ es una cara de tipo (ii).

En la siguiente figura se representa el conjunto $core(c_G)$, contenido en el conjunto de imputaciones del juego.

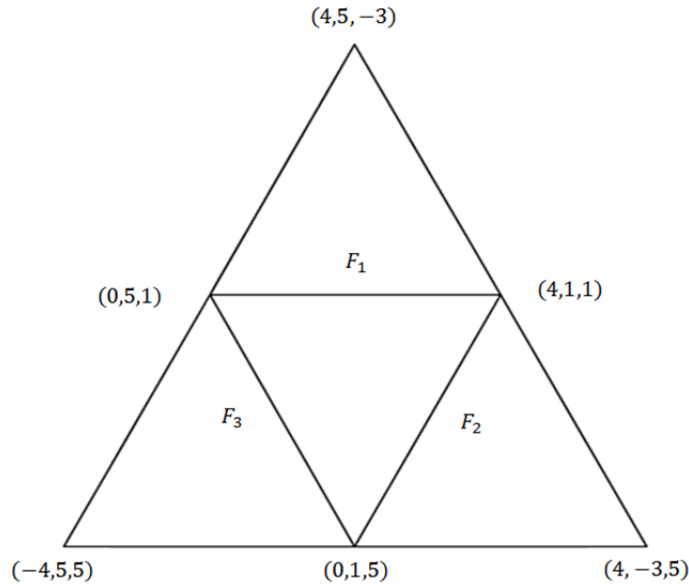


Figura 3.1 Ejemplo 3.3

3.4 Soluciones igualitarias restringidas ponderadas

La solución igualitaria restringida (*constrained egalitarian solution*), propuesta por Dutta y Ray (1989), es un concepto de solución puntual para juegos UT que concilia de forma consistente dos posturas contrapuestas: el compromiso para la igualdad y la promoción de intereses individuales. Este concepto de solución surge en un marco en el que, por un lado, los individuos creen en la igualdad como un valor social, mientras que, por otro lado, las preferencias personales de cada individuo le dictan una conducta egoísta. En este contexto se supone que todos los individuos son esencialmente iguales en el sentido de que todas las posibles diferencias entre ellos vienen dadas únicamente por los parámetros del modelo, es decir, quedan reflejadas en la función característica del juego. Sin embargo, en numerosas ocasiones esta hipótesis no es realista (para una discusión más detallada, con ejemplos, véase Shapley (1981) y Kalai y Samet (1988)).

En esta sección se estudia el comportamiento de la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray (1989) y la propuesta de una generalización *ad hoc* capaz de recoger la posible asimetría entre los jugadores, de Koster *et al.* (1998). Para ello, se supone que todas aquellas consideraciones que no han sido reflejadas en el modelo pueden ser descritas a partir de un cierto vector de pesos dado exógenamente. Cada vector de pesos define una solución igualitaria restringida ponderada sin más que asignar un peso a cada jugador. Los pesos asignados a los jugadores se pueden interpretar como medidas a priori del impacto de cada usuario en el sistema. En tal caso, la solución de Dutta y Ray (1989) se corresponde con el vector de pesos dado por $(1, \dots, 1)$.

Una vez definida la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas en el contexto de la clase de juegos asociados a problemas SFTC, se adoptará un enfoque dinámico que proporcione un algoritmo polinomial para calcular cada uno de los elementos de la familia previamente definida. Este algoritmo es constructivo, en el sentido de que describe el proceso por el cual cada uno de estos elementos es seleccionado como propuesta final de reparto de costes. Posteriormente, gracias a la reinterpretación de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas desde un punto de vista dinámico, se obtendrá la propiedad esencial de la familia de soluciones considerada: para todo juego de árbol fijo de tipo estándar dicha familia coincide con el *core* del juego. Por último, se obtendrá una caracterización axiomática del conjunto de soluciones igualitarias restringidas ponderadas como procedimientos de asignación de costes.

3.4.1 Familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas: definición

Dutta y Ray (1989) prueban la existencia y unicidad de la solución igualitaria restringida sobre la clase de juegos convexos (cóncavos) y proponen un algoritmo para su obtención. Dicho algoritmo se basa en la búsqueda de la máxima, con respecto al orden dado por la inclusión, coalición con mayor (menor) valor (coste) medio de un cierto juego en cada una de sus etapas. La generalización que se propone parte, precisamente, del citado algoritmo. Haciendo uso del hecho de que todo juego de coste asociado a un problema SFTC es cóncavo, lo que se propone es modificar el algoritmo de Dutta y Ray (1989) considerando la asimetría entre los jugadores. Dicha modificación consiste en trabajar con costes medios por unidad de medida.

Intuitivamente, supóngase que cada individuo de la sociedad N cree que las proporciones, de

acuerdo con las que el coste total debe ser compartido, vienen dadas por el vector de pesos $\omega \in \mathbb{R}_+^n$. Entonces, la solución ω -igualitaria restringida trata de conciliar dicha creencia con el hecho de que la sociedad no está dispuesta a aceptar ningún reparto del coste total que pueda no pertenecer al *core*. Así, si la propuesta de reparto $(\frac{\omega_i}{\omega_N} c(N))_{i \in N}$, con $\omega_N = \sum_{i \in N} \omega_i$, pertenece al *core* del juego, entonces coincide con la solución ω -igualitaria restringida. En otro caso, la sociedad es disgregada en *subsociedades* de tal manera que el coste marginal de cada una de las *subsociedades* es compartido entre sus miembros de acuerdo con las proporciones dictadas por el vector de pesos ω . Concretamente, la solución ω -igualitaria restringida busca una partición de la sociedad en *subsociedades*, de manera que el vector de repartos así definido pertenezca al *core* del juego.

Nota: Aadland y Kolpin (1998) introducen un concepto de solución puntual para juegos de coste de árbol fijo en el caso particular en que el árbol que define el juego es una cadena: la *regla media restringida de reparto de costes* (*restricted average cost share rule*), que resulta ser la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray (1989) sobre la clase de juegos del aeropuerto.

Antes de definir la familia de soluciones igualitarias restringidas, de Koster *et al.* (1998), son necesarias algunas definiciones.

Definición 3.6. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema FTC y sea $\omega \in \mathbb{R}^n$, se dice que ω es un **vector de pesos admisible para \mathcal{G}** si y sólo si $\omega \geq 0$ y para todo $i \in N$ tal que $c(e_i) > 0$, existe un sucesor $j \in F(i)$ del jugador i tal que $\omega_j > 0$. El conjunto de todos los vectores de pesos admisibles para \mathcal{G} se denotará por $\mathcal{W}(\mathcal{G})$.

El concepto de admisibilidad formaliza la idea de que para todo arco del árbol debe existir, al menos, un usuario de dicho arco que se responsabilice de su coste.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema FTC. Dado un vector de pesos admisible para \mathcal{G} , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, se define el **coste medio ponderado** (con respecto a ω) bajo \mathcal{G} de una coalición $S \subseteq N$ no vacía como

$$\alpha_\omega(S) = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in S} c(e_i)}{\omega_S}, & \text{si } \omega_S > 0, \\ \infty, & \text{si } \omega_S = 0, \end{cases}$$

donde $\omega_S = \sum_{i \in S} \omega_i$.

Definición 3.8. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema FTC y sea $R \subseteq V$ una rama de $G = (V, E)$. Entonces, se define la **contracción de \mathcal{G} por R** como el problema FTC $\mathcal{G}_R = (G_R, c_R, N_R)$, donde un árbol contraído $G_R = (V_R, E_R)$ viene dado por

$$\begin{aligned} V_R &= (V \setminus R) \cup \{r_T\}, \\ E_R &= (E \setminus E(R)) \cup E_r(R), \end{aligned}$$

donde $E(R) = \{e_i : i \in R\} \cup \ell(R)$ y $E_r(R) = \{e_j^R = (r_T, j) : j \in N \setminus R \text{ y } \pi(j) \in R\}$. La función de coste c_R asociada al árbol G_R viene dada por

$$\begin{aligned} c_R(e) &= c(e), \quad \forall e \in E \setminus E(R), \\ c_R(e_j^R) &= c(e_j), \quad \forall e_j^R \in E_r(R), \end{aligned}$$

y el conjunto de usuarios es $N_R = N \setminus R$.

La operación de contracción de un árbol consiste en eliminar una rama de árbol y en conectar todas las componentes conexas que han quedado a un nuevo vértice raíz, manteniendo siempre el coste original de los arcos del árbol no eliminados.

Obsérvese que si \mathcal{G} es un problema SFTC, entonces el problema contraído \mathcal{G}_R verifica todas las condiciones que definen un problema FTC de tipo estándar salvo, posiblemente, la condición 2 (“del vértice raíz parte un único arco”). No obstante, el juego de coste asociado a \mathcal{G}_R sigue siendo cóncavo, propiedad necesaria para que el algoritmo que se propone esté bien definido.

Definición 3.9. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema FTC verificando todas las condiciones que caracterizan a un problema de tipo estándar con la posible excepción de la condición 2. Dado un vector de pesos admisible con respecto a \mathcal{G} , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, se define la **solución ω -igualitaria restringida del problema \mathcal{G}** , que se denotará por $\xi^{\mathcal{G}}(\omega)$, como el vector de reparto de costes obtenido a través del siguiente algoritmo:

Algoritmo 1

Paso 0. Inicialización.

$$k := 1 \text{ y } \mathcal{G}^1 := \mathcal{G}.$$

Paso 1.

Sea $\mu_k = \min \{\alpha_\omega(R \setminus \{r_k\}) : R \text{ es una rama de } G^k\}$ el mínimo coste medio ponderado (con respecto a ω) bajo \mathcal{G}^k .

Sea $R_k(\omega) \subseteq N^k \cup \{r_k\}$ la única (con respecto al orden dado por la inclusión) rama máxima de G^k de coste medio ponderado mínimo, μ_k .

Definase $\xi_i^{\mathcal{G}}(\omega) := \omega_i \mu_k, \forall i \in R_k(\omega) \setminus \{r_k\}$.

Paso 2. Criterio de parada.

Si $\bigcup_{\ell=1}^k R_\ell(\omega) = N \cup \{r\}$, entonces parar. Se tiene que $\xi^{\mathcal{G}}(\omega) := (\xi_i^{\mathcal{G}}(\omega))_{i \in N}$ es la solución ω -igualitaria restringida ponderada del problema \mathcal{G} .

En otro caso, defínase $\mathcal{G}^{k+1} := (G^{k+1}, c^{k+1}, N^{k+1})$ como la contracción de \mathcal{G}^k por $R_k(\omega)$, tómesese $k := k + 1$ y repítase el paso anterior.

Obviamente, el algoritmo termina, a lo sumo, en $n = N$ iteraciones. Teniendo en cuenta las características del problema que se está tratando, se verifica que la solución así obtenida coincide con la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray (1989), cuando se toma $\omega = 1$. Además, si $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\omega) = \{R_1^\omega, \dots, R_p^\omega\}$ es la partición del conjunto de jugadores N inducida por el algoritmo, esto es, $R_\ell^\omega = R_\ell(\omega) \setminus \{r\}$, $\forall \ell = 1, \dots, p$, entonces el reparto de costes obtenido verifica las siguientes condiciones:

$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\omega) = \omega_i \alpha_\omega(R_\ell^\omega), \quad \forall i \in R_\ell^\omega, \quad \forall \ell = 1, \dots, p, \quad (39)$$

$$\sum_{\ell=1}^k \sum_{i \in R_\ell^\omega} \xi_i^{\mathcal{G}}(\omega) = \sum_{i \in R_k^\omega} c(e_i), \quad (40)$$

donde $R^\omega(k)$ es la rama de G definido como $\bigcup_{\ell=1}^k R_\ell^\omega \cup \{r\}$ y

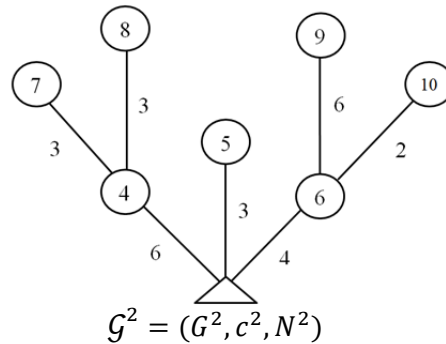
$$\frac{\xi_i^{\mathcal{G}}(\omega)}{\omega_i} < \frac{\xi_j^{\mathcal{G}}(\omega)}{\omega_j}, \quad \forall i \in R_\ell^\omega, \quad j \in R_s^\omega \text{ y } \ell < s. \quad (41)$$

Ejemplo 3.4 Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ el problema SFTC definido en el Ejemplo 3.2. Entonces, la solución igualitaria restringida para este problema es $\xi^{\mathcal{G}}(1) = (2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3)$.

Para $k = 1$, se tiene que $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}$, $\mu_1 = 2$, $R_1^1 = \{1, 2, 3\}$ y $\xi_i^{\mathcal{G}}(1) = 2, \forall i \in R_1^1$.

Para $k = 2$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 3, \\ R_2^1 &= \{5, 6, 10\}, \\ \xi_i^{\mathcal{G}}(1) &= 3, \quad \forall i \in R_2^1. \end{aligned}$$

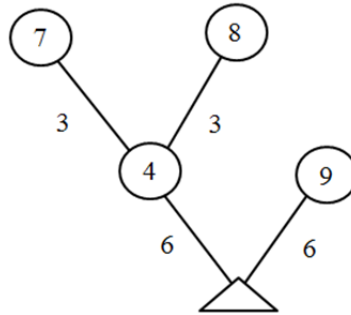


Para $k = 3$:

$$\mu_3 = 4,$$

$$R_3^1 = \{4, 7, 8\},$$

$$\xi_i^{\mathcal{G}}(1) = 4, \forall i \in R_3^1.$$



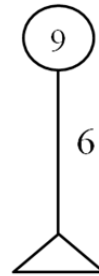
$$\mathcal{G}^3 = (G^3, c^3, N^3)$$

Para $k = 4$:

$$\mu_4 = 6,$$

$$R_4^1 = \{9\},$$

$$\xi_i^{\mathcal{G}}(1) = 6, \forall i \in R_4^1.$$



$$\mathcal{G}^4 = (G^4, c^4, N^4)$$

Obsérvese que la partición $\mathcal{R}(1)$ puede ser refinada obteniendo una partición de \mathcal{G} en subproblemas de tal manera que la restricción de $\xi^{\mathcal{G}}(1)$ a cada subárbol de la nueva partición coincide con la solución igualitaria restringida del subproblema SFTC correspondiente. En este caso, la partición en subproblemas que se obtiene es la partición inducida por $\xi^{\mathcal{G}}(1)$ descrita en el Ejemplo 4.2. Esta propiedad es verificada por toda la familia de soluciones. Para todo problema SFTC, \mathcal{G} , y para todo vector de pesos admisible, $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, la partición inducida por el algoritmo, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\omega)$, puede ser refinada obteniéndose una partición del problema original, tal que la restricción de la solución ω -igualitaria restringida a cada uno de los subproblemas se corresponde con la correspondiente solución del subproblema considerado.

3.4.2 Interpretación dinámica

El algoritmo formulado previamente es de complejidad exponencial: cada iteración conlleva la búsqueda (exponencial) de la máxima rama con coste medio ponderado mínimo. A continuación se define un algoritmo alternativo, propuesto por Koster *et al.* (1998), de complejidad polinomial $\mathcal{O}(n^2)$, donde $n = |N|$ es el número de usuarios del sistema. Este algoritmo surge como resultado de dar una reinterpretación *dinámica* del modelo inspirada en la “historia sobre el pintado de carreteras”

de Maschler *et al.* (1995).

Considérense los vértices del árbol como pueblos en los que residen los diferentes jugadores y los arcos como carreteras de conexión con la capital de la región (raíz del árbol). El coste de un tramo de carretera se expresa en función del tiempo que un trabajador emplea en pintar las líneas de dicho tramo. Así, la solución igualitaria restringida viene dada por el tiempo que cada uno de los jugadores emplea en pintar la carretera teniendo en cuenta que:

- (i) todos los jugadores siguen pintando mientras la carretera que une su pueblo con la capital no haya sido pintada en su totalidad,
- (ii) cada jugador sólo pinta aquellos tramos de carretera que conectan su pueblo con la capital,
- (iii) todos empiezan a pintar a la vez y
- (iv) todos pintan a la misma velocidad.

Maschler *et al.* (1995) consideran una condición adicional, *obligación social*, necesaria para la obtención del *nucleolus* del juego. Para todo vector de pesos admisible, ω , la solución ω -igualitaria restringida se obtiene considerando que los jugadores pintan a distintas velocidades, ω_i representa la velocidad a la que pinta el jugador i , $i \in N$. En este caso, el coste que cada jugador debe asumir se obtiene no como el tiempo que ha estado pintando, sino como el tramo del camino que ha pintado uniendo su pueblo con la capital.

Cada iteración del algoritmo describe el estado en que quedan las carreteras y prescribe cómo repartir los costes entre los trabajadores después de una jornada de trabajo. Las jornadas de trabajo vienen dadas por el mínimo tiempo necesario para acabar de pintar, al menos, una de las carreteras que todavía no han sido completamente pintadas. El coste que cada trabajador asume es proporcional a su peso, que dada su interpretación en este contexto, se denomina *tasa de contribución*.

A continuación se describe el algoritmo y se demuestra su validez para la obtención de todo elemento de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas.

La notación empleada en el algoritmo es la siguiente:

- $\omega_S = \sum_{i \in S} \omega_i$, $\forall S \subseteq N$, $\forall \omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$.
- $x(e, k) \in [0, c(e)]$ es la fracción del coste del arco $e \in E$ que ha sido pagada (tramo de carretera que ha sido pintado) antes de la etapa k .
- $E_k \subseteq E$ es el subconjunto de arcos que se acaban de pagar (pintar) en la etapa k .
- $E(k) = \bigcup_{j < k} E_j$ es el subconjunto de arcos que se han pagado (pintado) antes de la etapa k .
- Para todo $i \in N$, $e(i, k)$ es el arco a cuyo coste está contribuyendo (que se está pintando) el jugador i en la etapa k .
- Para todo arco $e \in E$, $S(e, k) = \{i \in N : e(i, k) = e\}$ es el subconjunto de jugadores que contribuyen a sufragar su coste (que está trabajando en él) en la etapa k .
- Para todo $i \in N$, la etapa en la que el jugador i deja de pagar (pintar) se denotará $K(i)$.

Definición 3.10. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Dado un vector de tasas de contribución, $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, se define el **reparto casa-raíz asociado a ω** , que se denota por $x^{\mathcal{G}}(\omega)$, como el vector de reparto de costes obtenido al final del Algoritmo 2 descrito a continuación.

Algoritmo 2

Paso 0. Inicialización.

$$\begin{aligned} k &:= 1, \\ x(e, i) &:= 0, \quad \forall e \in E, \\ E(i) &:= \emptyset, \\ e(i, 1) &:= e_i, \quad \forall i \in N, \\ S(e_i, 1) &:= \{i\}, \quad \forall i \in N. \end{aligned}$$

Paso 1. Pintar y pagar.

El tiempo que se emplearía en terminar de pintar el arco $e \in E \setminus E(k)$, que todavía no ha sido pintado, en función de la tasa de contribución de todos aquellos jugadores que en la etapa actual están trabajando en él, viene dado por

$$t(e, k) = \frac{c(e) - x(e, k)}{\omega_{S(e, k)}}.$$

El tiempo mínimo necesario para acabar de pintar alguno de los arcos no finalizados en etapas anteriores es

$$t(k) = \min\{t(e, k) : e \in E \setminus E(k)\}.$$

Así, en la etapa actual se trabajará durante $t(k)$ unidades de tiempo. Entonces, la fracción de cada arco $e \in E \setminus E(k)$ que se pinta viene dada por $\omega_{S(e, k)}t(k)$, mientras que la parte del coste de dicho arco que ha sido pagada hasta el momento es

$$x(e, k + 1) = x(e, k) + \omega_{S(e, k)}t(k), \quad \forall e \in E \setminus E(k).$$

Una vez pintado el tramo correspondiente de cada arco $e \in E \setminus E(k)$, aquellos usuarios cuyo camino de conexión al punto de suministro no había sido pintado en etapas anteriores deben pagar por el trabajo realizado en la etapa actual en función de su tasa de contribución. El

subconjunto de arcos finalizados en la etapa actual es

$$E_k = \{e \in E \setminus E(k) : t(e, k) = t(k)\},$$

y el subconjunto de arcos finalizados hasta el momento es $E(k + 1) = E(k) \cup E_k$.

Paso 2. Criterio de parada.

Si el árbol se ha pintado por completo, esto es, $E(k + 1) = E$, entonces parar. El coste que cada usuario debe asumir viene dado por

$$x_i^G(\omega) = \sum_{k=1}^{K(i)} \omega_i t(k), \quad \forall i \in N,$$

donde $K(i)$ es el momento en el que el jugador $i, i = 1, \dots, n$, ha dejado de pintar. Si todavía quedan arcos por pintar, entonces para todo arco $e \in E_k$ se distinguen dos casos:

1. Si $e' \in E(k + 1)$ para todo arco $e' \preceq e$, entonces todos los jugadores que estaban trabajando en el arco e dejan de pagar en ese momento. Luego, defínase $K(i) = k$, para todo $i \in S(e, k)$.
2. Si existe un arco $e' \preceq e$ que todavía no ha sido pintado por completo, entonces todos los jugadores en $S(e, k)$ empiezan a trabajar en el arco $e' \notin E(k + 1)$, todavía no finalizado de su camino hasta el punto de suministro, más cercano al arco e en que se encontraban trabajando. Actualícese $S(e, k + 1)$ de acuerdo con este razonamiento. Defínase $k := k + 1$ y repítase el paso anterior.

Obviamente el algoritmo está bien definido, esto es, para a lo sumo $K \leq n$ iteraciones y el vector obtenido, $x^G(\omega)$, es un vector de reparto de costes (eficiente). Sea $x^G(\omega)$ el reparto raíz-casa asociado a $\omega \in \mathcal{W}(G)$ obtenido, entonces se verifica:

(C1) Si $e_i \preceq e_j$, entonces $K(i) \leq K(j)$. Los usuarios más cercanos al punto de suministro acaban de pagar antes.

(C2) Para todo $i, j \in N$, $K(i) \leq K(j)$ si y sólo si $\frac{x_i^G(\omega)}{x_j^G(\omega)} \leq \frac{\omega_i}{\omega_j}$.

(C3) Sea $A_k^\omega = \{i \in N : K(i) = k\}$. Entonces, $A^\omega(k) = \bigcup_{j \leq k} A_j^\omega \cup \{r\}$ es una rama de G , para todo $k = 1, \dots, K$.

$$(C4) x_i^{\mathcal{G}}(\omega) = \omega_i \frac{c(A_k^\omega)}{\omega A_k^\omega} \text{ para todo } i \in A_k^\omega, \text{ donde } c(A_k^\omega) = \sum_{i \in A_k^\omega} c(e_i).$$

Ejemplo 3.5 Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ el problema SFTC considerado en el Ejemplo 3.2. Entonces, el reparto de costes casa-raíz asociado a $\omega = 1$ se obtiene de la siguiente manera:

En la etapa $k = 1$:

$$x(e_i, 1) = 0, S(e_i, 1) = \{i\} \text{ y } t(e_i, 1) = c(e_i), \quad \forall i \in N.$$

Entonces, $t(1) = 1, E_1 = \{e_2, e_3\}$ y $E(2) = E_1$.

En la etapa $k = 2$:

i	$x(e_i, 2)$	$S(e_i, 2)$	$t(e_i, 2)$
1	1	{1, 2, 3}	1
2	1		
3	1		
4	1	{4}	5
5	1	{5}	2
6	1	{6}	3
7	1	{7}	2
8	1	{8}	2
9	1	{9}	5
10	1	{10}	1

Entonces, $t(2) = 1, E_2 = \{e_1, e_{10}\}$ y $E(3) = \{e_1, e_2, e_3, e_{10}\}$. Por consiguiente, $K(1) = K(2) = K(3) = 2$.

En la etapa $k = 3$:

i	$x(e_i, 2)$	$S(e_i, 2)$	$t(e_i, 2)$
1	4		
2	1		
3	1		
4	2	{4}	4
5	2	{5}	1
6	2	{6, 10}	1
7	2	{7}	1
8	2	{8}	1
9	2	{9}	4
10	2		

Entonces, $t(3) = 1$, $E_3 = \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$ y $E(3) = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$. Luego $K(5) = K(6) = K(10) = 3$.

En la etapa $k = 4$:

i	$x(e_i, 2)$	$S(e_i, 2)$	$t(e_i, 2)$
1	4		
2	1		
3	1		
4	3	{4, 7, 8}	1
5	3		
6	4		
7	3		

8	3		
9	3	{9}	3
10	2		

Entonces, $t(4) = 1, E_4 = \{e_4\}$ y $E(5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$. Luego $K(4) = 4$.

En la etapa $k = 5$, $t(5) = 2, E_5 = \{e_9\}$ y $E(6) = E$. Por lo tanto, se tiene que $K(9) = 5$ y $x^{\mathcal{G}}(1) = \{2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3\}$.

Proposición 3.5. Sea $\mathcal{G} = (G, c, N)$ un problema SFTC. Entonces, para todo vector de tasas de contribución, $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, el reparto de costes casa-raíz asociado a ω , $x^{\mathcal{G}}(\omega)$, coincide con la solución restringida de \mathcal{G} .

Finalmente, obsérvese que, de la interpretación dinámica de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas dada por el Algoritmo 2, se deduce que dicha familia es *descomponible*. Es decir, dado un problema FTC, $\mathcal{G} = (G, c, N)$, verificando todas las condiciones que caracterizan a un problema SFTC a excepción de la condición 2, se verifica que, para todo vector de pesos admisible para \mathcal{G} , $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, la solución ω -igualitaria restringida de \mathcal{G} se obtiene como el producto cartesiano de las correspondientes soluciones de cada una de sus componentes.

3.5 Conclusiones

En este capítulo se ha definido el juego de árbol fijo y se ha planteado el modelo como un juego de coste para, posteriormente, seleccionar conceptos de solución eficientes. La causa de analizar este tipo de juego, y no otro, reside en la utilidad que se le dará a la hora de plantear, en el Capítulo 4, un sistema de transporte que se puede modelar como un juego de árbol donde los vértices son las ciudades.

Un concepto de solución como el *core* ha sido analizado minuciosamente para juegos de esta naturaleza. También se ha tratado de profundizar en el proceso que lleva a los jugadores de una red de conexión a decantarse por uno u otro reparto en el *core* del juego, a través de la definición de familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas. Cabe destacar el hecho de que en la solución igualitaria restringida se enfrentan dos posturas: por un lado, los principios de igualdad como valor social que poseen los individuos y, por otro, las conductas egoístas causadas por sus preferencias personales. Este conflicto ético también será tratado en el próximo capítulo, donde todos

los usuarios del sistema de transporte deben ser tratados por igual, pero la inclusión en el sistema de otros usuarios puede suponerles un aumento en la tarifa del sistema.

4. UN SISTEMA DE TRANSPORTE INTEGRADO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: UNIVERCITY

4.1 Introducción

Este capítulo se centra en analizar el artículo “*An Integrated Transport System for Alacant’s Students. UNIVERCITY*”, de Sánchez-Soriano *et al.* (2002). El artículo estudia el problema de transporte público para estudiantes universitarios; en este caso, de la provincia de Alicante. El alto precio a pagar y la ineficiencia a la hora de cubrir las necesidades de los estudiantes hace indispensable una remodelación del sistema de transporte.

A continuación se realizará un estudio que permita diseñar un sistema de transporte integrado para universitarios desde la perspectiva de la teoría de juegos. Para ello, en primer lugar, se introduce el tema central de Sánchez-Soriano *et al.* (2002) tal y como es expuesto por sus autores:

Los campus universitarios de Alicante se encuentran localizados de una forma bastante dispersa. Además, la estructura social en España se centra en la familia como unidad y la mayoría de los estudiantes universitarios viven con sus padres mientras realizan sus estudios.

El transporte público de esta provincia no cubre las necesidades de los estudiantes y es caro. Por lo tanto, existe una verdadera necesidad social de un sistema de transporte capaz de conectar de manera eficiente los pueblos y ciudades de Alicante con los diferentes campus universitarios. Pero, al mismo tiempo, teniendo en cuenta que el sistema universitario en España está controlado principalmente por el Estado, dicho sistema también debe ser económico.

El gobierno de la Comunidad Valenciana es consciente de este problema y se ha establecido un mecanismo de subvenciones para reducir los gastos y para alentar a empresas privadas a ofrecer un servicio de transporte que la sociedad demanda. Este sistema de becas de transporte está diseñado de tal manera que el sindicato de estudiantes, los ayuntamientos y empresas privadas pueden solicitar un apoyo financiero.

En la actualidad, todas estas entidades no colaboran entre sí, pero sería ventajoso cambiar esta situación y promover un clima de cooperación. Uno de los parámetros más importantes a tener en cuenta en el sistema de apoyo financiero es el número de estudiantes que solicitan becas en cada ciudad. Por eso, si los ayuntamientos de Alicante solicitan apoyo financiero, todos ellos en conjunto

recibirían un importe total de apoyo financiero mayor de lo que ahora están recibiendo.

Por ejemplo, durante el último período académico algunas ciudades no recibieron ningún apoyo financiero porque ninguna institución (ayuntamientos, sindicatos de estudiantes o empresas privadas) lo aplicó. En más de la mitad de las ciudades sólo las empresas privadas se valieron de tales subvenciones. Dado que, en este caso, las normas para las subvenciones especifican que el número máximo de alumnos a tener en cuenta será un porcentaje del censo estudiantil, se perdió el apoyo financiero para el porcentaje restante.

Sobre esta base, el análisis de este problema se ha llevado a cabo con el fin de hacer una propuesta a la Diputación de Alicante, donde están representados todos los ayuntamientos. Este será el órgano intermediario entre los estudiantes (a través de sus correspondientes ayuntamientos) y el gobierno de la Comunidad Valenciana para la organización de un sistema de transporte integrado para universitarios en toda la provincia. Nosotros proponemos que la gestión del sistema de transporte debe ser asumida por la Diputación de Alicante. Habría muchas ventajas en la centralización de la gestión de una red de transporte en una sola institución pública. De hecho, un sistema de transporte conjunto gestionado por la Diputación permitiría:

- (1) el diseño de una red óptima (las mejores rutas);
- (2) un aumento del apoyo financiero recibido de la Generalidad Valenciana;
- (3) una tarifa para el servicio de autobús más económica, ya que la posición de negociación de los estudiantes (representados por la Diputación) se fortalecería;
- (4) una reducción de los problemas de tráfico, puesto que los estudiantes no tendrían que conducir sus coches particulares.

Además, si el nuevo sistema de transporte resulta ser eficiente y barato, la Diputación de Alicante recibirá ventajas políticas por su implicación. Igualmente, un buen servicio para los estudiantes podría tener efectos positivos al reducir los gastos familiares. Las nuevas tendencias en planificación urbana consideran que este tipo de sistema de transporte permitiría a las universidades integrarse en las ciudades. Este es el llamado "**UniverCity**". Por lo tanto, la cooperación es claramente ventajosa y, además, hay un agente (la Diputación) que será capaz de centralizar la gestión de todo el sistema de transporte.

Con el fin de diseñar este sistema de transporte para los estudiantes universitarios que viven y estudian en la provincia de Alicante, consideramos tres etapas diferentes: en primer lugar, la obtención y análisis de datos; en segundo lugar, el diseño de rutas y horarios óptimos, y, en tercer lugar, una vez que el sistema de transporte óptimo ha sido diseñado, la evaluación de todos los costes derivados de la utilización de dicho sistema. Por último, estos costes se deben distribuir entre los usuarios del sistema, los estudiantes. Esta última etapa es precisamente el principal objetivo de este artículo.

El problema al que se enfrentaron Sánchez-Soriano *et al.* (2002) de establecer las tarifas por el uso del sistema de transporte es un problema de reparto de costes. Para ello, en primer lugar, dividen

el sistema completo de transporte en varios subsistemas independientes. Posteriormente, intentan aplicar algunas reglas de reparto de costes partiendo de la teoría de juegos clásica, estudiadas en los anteriores capítulos de esta memoria, llegando a proponer una regla propia de distribución de costes.

En la Sección 2 de este capítulo se define el sistema de transporte integrado y se introduce un caso práctico con el que se irán ilustrando las secciones posteriores.

La Sección 3 se centra en el problema de distribución de costes en el contexto de la teoría de juegos cooperativos. La aplicación de la teoría de juegos en problemas reales de distribución de costes es muy común hoy en día, como se mostró en el Capítulo 2 de esta memoria. En este caso particular se elegirán a los ayuntamientos como jugadores del juego y se definirá el juego de coste correspondiente, al que se denominará *juego de árbol de autobuses*. Se va a proponer un reparto de los costes totales del subsistema de transporte de acuerdo a reglas tales como el *Egalitarian Nonseparable Cost (ENSC) method* o el *Alternate Cost Avoided (ACA) method*. Obviamente, una vez que se han distribuido los costes entre todas las ciudades, el coste asignado para cada ciudad se distribuye en partes iguales entre sus estudiantes.

Este enfoque, sin embargo, no permite tener en cuenta todas las características especiales de este problema; es necesario un enfoque alternativo. Para ello, en la Sección 4 se estudia la regla de reparto de costes propuesta por Sánchez-Soriano *et al.* (2002), que abarca los principios de justicia que cada institución pública debe respetar. Se hará distinción primero entre los costes fijos y los variables, para después proponer un método particular de reparto entre los usuarios del sistema. Se denomina a este método específico como la *solución igualitaria agregada*. En particular, los diferentes jugadores implicados en el proceso de toma de decisiones (los estudiantes como usuarios y la Diputación como el agente que debe fijar los honorarios) tienen intereses diferentes. Un estudio a fondo de este hecho llevó a los autores a considerar un sistema monetario compensatorio en el que proponen un apoyo financiero por parte de la Diputación. En la Sección 5 se evalúan las conclusiones.

4.2 Un sistema de transporte integrado

Tal y como se explica en la introducción del artículo, es necesario establecer tres análisis diferentes, uno por cada etapa del diseño del sistema. Una vez se ha diseñado el sistema de transporte óptimo, se debe evaluar cómo distribuir los costes de contratar y utilizar ese sistema y, por último, repartir dichos costes entre sus usuarios.

Se pueden distinguir dos tipos de costes: los costes fijos y los costes variables.

Los **costes fijos** están relacionados con los gastos pagados por autobús, sin importar la distancia que recorran. En muchos casos, el precio de compra por unidad depende de la cantidad, x , de autobuses contratados. Por norma general, este precio por unidad se reduce según aumenta el número de autobuses que se compran, aunque contratar $x + 1$ autobuses suele ser más caro que contratar x . Esto es, si $f(x)$ representa el precio unitario por autobús, cuando $x \in \mathbb{Z}_+$ autobuses son comprados, entonces

$$f(x) \geq f(x + 1) \quad \text{y} \quad xf(x) < (x + 1)f(x + 1).$$

Los **costes variables** se refieren al precio pagado por kilómetro recorrido por un autobús. Estos costes incluyen, entre otras cosas, el coste de mantenimiento de los autobuses. Además, si $c(k)$ representa el coste variable de contratar un autobús que recorra una distancia total de k kilómetros (incluyendo el viaje de vuelta), entonces el coste total, H , de contratar $x = (x_1, \dots, x_t)$ autobuses que van a cubrir unas distancias de $k = (k_1, \dots, k_t)$ kilómetros, respectivamente, viene dado por

$$H(x, k) = \left(\sum_{j=1}^t x_j \right) f \left(\sum_{j=1}^t x_j \right) + \sum_{j=1}^t x_j c(k_j). \quad (42)$$

En esta situación, el número de autobuses que se contratan excederá probablemente el número que se obtendría para el precio más bajo (más alto). Esto hará imposible la aplicación de nuevas reducciones (o incrementos), ya que la disminución (aumento) obligaría a reescalar lo ya obtenido. Por tanto, se va a trabajar en el caso particular en que el coste fijo es constante ($f \equiv F$) y el coste variable es lineal $c(k) = K \cdot k$. Se deduce entonces que

$$H(x, k) = \left(\sum_{j=1}^t x_j \right) F + \left(\sum_{j=1}^t x_j k_j \right) K, \quad (43)$$

donde F es el coste fijo de contratar un autobús y K es el coste variable pagado por kilómetro cubierto.

A pesar de que el sistema de transporte en su conjunto es demasiado grande, en la práctica se compone de varios subsistemas de transporte independientes. Se tendrán en cuenta los diferentes subsistemas para cada destino, es decir, para cada campus universitario. Por otra parte, para cada subsistema, se va a distinguir las rutas por sus zonas de influencia. Se situarán dos rutas juntas si, y sólo si, convergen en la etapa final de su viaje. Por lo tanto, el problema original se simplificará para distribuir los costes de cada subsistema independiente, a lo que se denominará *árboles de rutas con secciones comunes*.

Obsérvese que se puede limitar al uso de árboles sin pérdida de generalidad, ya que los grafos con ciclos no pueden ser rutas óptimas en esta situación. De hecho, si hubiera un ciclo se quitaría un enlace, obteniendo un nuevo subgrafo de menor longitud.

Ejemplo 4.1. Considérense las rutas que conectan la zona de *Marina Baixa* con la Universidad Miguel Hernández (en el campus de *Sant Joan*) y la Universidad de Alicante. Los autobuses que cubren dichas rutas serán considerados como el subsistema de transporte “zona *Marina Baixa*-Alicante”. Gráficamente, el árbol con secciones comunes que representa este subsistema se muestra

en la siguiente figura.

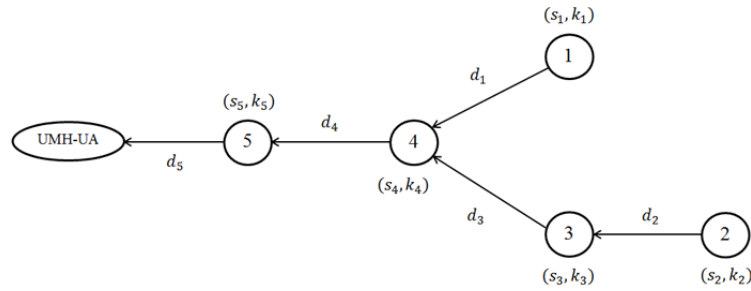


Figura 4.1. Subsistema *Marina Baixa*

Los vértices representan las siguientes ciudades,

Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3	Vértice 4	Vértice 5
L'Alfàs del Pi	Calpe	Altea	Benidorm	La Vila Joiosa

donde s_j es el número de estudiantes de la ciudad j , $j = 1, \dots, 5$, d_j es la distancia en kilómetros desde la ciudad j a la siguiente ciudad de la ruta, y k_j es la distancia desde la ciudad j al campus universitario: $k_1 = d_1 + d_4 + d_5$ y $k_i = \sum_{\ell}^5 d_{\ell}$, $i = 2, \dots, 5$.

Se han de distribuir los costes totales del subsistema de transporte *Marina Baixa* entre los estudiantes universitarios que viven en esa área y toman un autobús de estas rutas para llegar a *Sant Joan*. Dicho de otra forma, se han de repartir los costes totales $H(x^*, k)$, donde $x^* = (x_1^*, \dots, x_5^*)$ es la flota de autobuses óptima. En este caso, x_i representa el número de autobuses que parten de la ciudad i , con $i = 1, \dots, 5$, y x^* es la flota más económica, que será determinada por:

$$H(x^*, k) = \min H(x, k) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & bx_1 \geq s_1, \\ & bx_2 \geq s_2, \\ & b(x_2 + x_3) \geq s_2 + s_3 \\ & b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq s_1 + s_2 + s_3 + s_4, \\ & b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \geq s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

donde $b \in \mathbb{Z}_+$ es la capacidad de los autobuses.

El problema de distribución de costes con el que se trata se denomina **situación de árbol de autobuses**, y puede ser descrito formalmente como la 5-tupla $\mathcal{B} := (G, s, d, b, H)$, donde $G = (V, E)$ es un árbol dirigido, siendo V el conjunto de vértices del árbol (las ciudades y la terminal del campus), y E representa el conjunto de arcos; los elementos de $s \in \mathbb{Z}_+^{\bar{V}}$ (donde $\bar{V} = V \setminus \{\text{terminal del campus}\}$) son los estudiantes que usan el subsistema de transporte en cada ciudad; $d \in \mathbb{R}_+^E$ es el vector de distancias; $b \in \mathbb{Z}_+$ es la capacidad de los autobuses (por simplificación, se supone que todos los autobuses tienen la misma capacidad) y H es la función de coste. Aquí, $H(x, k)$ describe el coste de contratar y hacer uso de una flota de $x_i, i \in \bar{V}$, autobuses que cubren la distancia total de k_i kilómetros, $i \in \bar{V}$, respectivamente.

Ahora sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses. Sea x^* la flota más barata de autobuses que cubren las rutas de \mathcal{B} . Entonces, se llega al problema de distribuir los costes totales $H(x^*, k)$ dentro de dos contextos. La primera aproximación se analizará en la siguiente sección, mientras que se abordará la segunda en la Sección 4.4.

4.3 Un enfoque desde la teoría de juegos cooperativos: juego de árbol de autobuses

En un primer intento por conseguir una distribución del coste de cada subsistema, se va a recurrir a la teoría de juegos cooperativos. Este enfoque tendrá sentido si los agentes que intervienen en la situación son capaces y están dispuestos a hacer acuerdos vinculantes sobre el reparto de los costes. Es discutible si los estudiantes están cualificados o no para realizar dichos acuerdos vinculantes. Sin embargo, es probable que los representantes de los ayuntamientos sí tengan la autoridad y el conocimiento necesarios para hacerlos. Por lo tanto, se consideran como jugadores de este juego a las distintas ciudades. Luego, se define el correspondiente juego de coste, el cual es el enfoque habitual en este escenario.

El juego de coste, al que se denomina **juego de árbol de autobuses**, viene dado formalmente por el par $(\bar{V}, c_{\mathcal{B}})$, donde $c_{\mathcal{B}}(S)$ se define como la mínima cantidad necesaria para contratar y utilizar los autobuses para llevar a todos los estudiantes que vivan en cualquier ciudad de la coalición S hasta el campus, para toda coalición no vacía $S \subseteq \bar{V}$ y con $c_{\mathcal{B}}(\emptyset) = 0$.

De este modo, dada una situación de árbol de autobuses $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$, el juego $(\bar{V}, c_{\mathcal{B}})$ hace referencia a la situación hipotética en la que a cada coalición $S \subseteq \bar{V}$ se le asocia el coste de ser servida en primer lugar. Por tanto, el coste de cada coalición no vacía $S \subseteq \bar{V}$ se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$c_{\mathcal{B}}(S) = \min_{x_s \in \mathbb{Z}_+^S} \{H(x_s, k_s) \mid bx_s^t R^s \geq s_s^t R^s\}, \quad (45)$$

donde $s_S = (s_i)_{i \in S}$, $x_S = (x_i)_{i \in S}$, $k_S = (k_i)_{i \in S}$, y R^S es la siguiente matriz cuadrada de tamaño S :

$$R_{ij}^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ o } j \in P(i), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \forall i, j \in S,$$

donde $P(i) \subseteq \bar{V}$ denota el conjunto de ciudades en el único camino en el árbol G que conecta la ciudad i con la raíz del árbol, el campus.

Obsérvese que en el ejemplo de *Marina Baixa*, si b es la capacidad de los autobuses, entonces la flota óptima x^* determinada previamente coincide con el óptimo obtenido resolviendo el problema de optimización anteriormente detallado para $S = \bar{V}$. Además, el óptimo obtenido como solución de este problema de optimización es el mismo para cada función de coste “razonable”, es decir, para cualquier función de coste que sea no decreciente en cada variable. De este modo, la solución óptima puede ser definida de forma recursiva. En primer lugar, se tienen que asignar los autobuses que salen de las ciudades ubicadas en cada hoja del árbol; hay que asignar a cada una de estas ciudades el número mínimo de autobuses necesarios para transportar a sus alumnos. Después, de forma recursiva, se completan las siguientes ciudades teniendo en cuenta los asientos que quedan libres en los autobuses procedentes de las ciudades anteriores.

Ejemplo 4.1 (continuación). Respecto al Ejemplo 4.1 se supone que la capacidad de cada autobús es de 55 asientos y el número de estudiantes de cada ciudad es $s_1 = 42$, $s_2 = 81$, $s_3 = 87$, $s_4 = 437$ y $s_5 = 200$.

Entonces, la flota óptima de autobuses es $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = 7$ y $x_5^* = 4$.

Por tanto, si se considera un coste fijo de $F = 5.000$ uds/bus y un coste variable de $K = 143$ uds/km, entonces

$$c_B(\bar{V}) = 16 \cdot 5.000 + 1 \cdot 143k_1 + 2 \cdot 143k_2 + 2 \cdot 143k_3 + 7 \cdot 143k_4 + 4 \cdot 143k_5.$$

$$c_B(\{1, 4, 5\}) = 13 \cdot 5.000 + 1 \cdot 143k_1 + 8 \cdot 143k_4 + 4 \cdot 143k_5.$$

Llegados a este punto se pueden proponer diferentes mecanismos para repartir los costes totales de cada subsistema de transporte. Para ello, es suficiente considerar el mecanismo de distribución de coste introducido por el juego de coste, junto con algún valor de los juegos UT, como concepto de solución para esta clase de juegos. Este es el enfoque propuesto por Shubik (1962) y continuado por Legros (1982) y Sudhölter (1998).

Una vez se han distribuido los costes entre las distintas ciudades, la parte correspondiente a cada ciudad debe ser repartida en partes iguales entre sus estudiantes. Sin embargo, resulta necesario asumir la imposibilidad de recoger toda la información necesaria para definir explícitamente la función característica del juego de coste. Por lo tanto, sólo se podrían considerar unas reglas de reparto que no requieran el conocimiento explícito de los costes de todas las coaliciones.

En particular, Sánchez-Soriano *et al.* (2002) proponen repartir el coste total del subsistema de transporte de acuerdo a reglas tales como el *Egalitarian Nonseparable Cost (ENSC) method* o el *Alternate Cost Avoided (ACA) method*, que son dos métodos de distribución de costes. Se puede encontrar una mayor información sobre estas reglas en Driessen (1988) y Young (1994)

Aunque se pueden relacionar los métodos ACA y ENSC con el valor de Tijs y con el *nucleolus* del correspondiente juego de ahorro, es fácil encontrar ejemplos que prueban que dichos juegos no satisfacen todas las condiciones. En ese caso, no resulta fácil analizar las propiedades de los métodos propuestos. Por otra parte, esta aproximación no permite tener en cuenta todas las características específicas de este problema. Por ejemplo, los jugadores se han involucrado en un ambiente estratégico que no les es adecuado en la situación en la que se encuentran. Hay que recordar que el organismo responsable de establecer las tarifas para el uso del sistema de transporte es la Diputación. Por todo esto, se hace frente al problema mediante un enfoque alternativo del reparto de costes.

4.4 Un enfoque del reparto de costes: regla de distribución igualitaria agregada

En la literatura sobre reparto de costes, más importante que las soluciones en sí mismas son los principios de justicia allí representados. Este hecho conduce a definir una regla particular de distribución de costes que abarque los principios de igualdad que toda institución pública debe respetar. La Diputación debe evitar cualquier disputa que pueda surgir entre los estudiantes (y entre las ciudades) como consecuencia de la regla de asignación propuesta. Es decir, una norma de este tipo debe respetar el principio básico que dice que "todos los estudiantes son iguales, y los iguales deben ser tratados por igual". La pregunta clave de este principio básico sería cuándo dos estudiantes pueden ser considerados como iguales. Por ejemplo, si sólo existieran costes fijos, entonces todos los estudiantes utilizarían el sistema pagando la misma cantidad. En tal caso, todos los estudiantes serían iguales. Puesto que todos deben ser tratados por igual, los costes totales $F \cdot \sum_{i \in \bar{V}} x_i^*$ deben repartirse de igual manera entre los estudiantes. Para extender este razonamiento a una situación general de árbol de autobuses, primero se distinguen dos tipos de costes, fijos y variables, y luego se propone un método para distribuirlos entre los usuarios. A este método se le denomina **solución igualitaria agregada**.

4.4.1 Distribución de los costes variables

En primer lugar serán distribuidos los costes variables. Si se quiere aplicar a este problema los principios de justicia que se han descrito anteriormente, se deben buscar aquellos subproblemas parciales en el que todos los estudiantes sean considerados como iguales. Por lo tanto, se va a repartir el total de los costes variables del sistema de transporte por medio de un proceso de *agregación*.

Para empezar, se distribuye el coste variable de cada arco (carretera que une dos ciudades adyacentes en el árbol) entre sus usuarios. El reparto del coste variable de cada estudiante se obtendrá como la suma de todos sus repartos parciales.

Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses. Para cada arco $e = (i, j) \in E$, sea N_e el conjunto de estudiantes cuyo autobús pasa por el arco e , esto es, el conjunto de todos los estudiantes que viven en alguna ciudad localizada en la rama $B_e = \{\ell \in \bar{V} \mid e \text{ está en el camino } P(\ell)\}$ del árbol donde está el arco $e = (i, j) \in E$. Puesto que cada estudiante de N_e requiere el mismo servicio en el tramo del arco e , y todos deben ser tratados por igual, el coste variable, vc_e , relacionado con este arco,

$$vc_e = \left(\sum_{j \in B_e} x_j^* \right) d_e K,$$

debería ser repartido de manera igualitaria entre los estudiantes de N_e .

Dicho esto, se define la distribución igualitaria agregada del coste variable como sigue.

Definición 4.1. Sea $j \in \bar{V}$ una ciudad del árbol. Entonces, de acuerdo a la distribución igualitaria, la asignación del coste de cada estudiante i que vive en la ciudad j viene dada por

$$z_i^j = \sum_{e \in P_j} \frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*) d_e K}{n_e},$$

donde $n_e = |N_e|$ es el número de estudiantes que utilizan el arco e y P_j se define como el conjunto de arcos que están en el único camino en el árbol G que conecta la ciudad j con la raíz del árbol, el campus.

El conjunto del reparto de costes de todos los estudiantes que viven en j será

$$z^j = s_j \left(\sum_{e \in P_j} \frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*) d_e K}{n_e} \right) \quad \forall j \in \bar{V}.$$

Ejemplo 4.1 (continuación). Considérese el ejemplo del subsistema *Marina Baixa* con unas distancias $d = (6, 9, 10, 9, 33)$ y $k = (48, 61, 52, 42, 33)$. Luego, teniendo en cuenta que el coste variable es de $K = 143$ uds/km y la flota óptima es $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = 7$ y $x_5^* = 4$, se tiene que:

Arco	Estudiantes	Coste total	Reparto parcial	Ciudad	Reparto por estudiante
L'Alfàs-Benidorm	42	858	20,43	L'Alfàs	133,44
Calpe-Altea	81	2.574	31,78	Calpe	178,84
Altea-Benidorm	168	5.720	34,05	Altea	147,06
Benidorm-La Vila	647	15.444	23,87	Benidorm	113,01
La Vila- Campus	847	75.504	89,14	La Vila	89,14

Observación: La situación que se acaba de estudiar generaliza una clase de problemas de distribución de costes que ha sido estudiado ampliamente: el problema de repartir el coste de una red de árboles. Este problema se ha estudiado en el Capítulo 3 en el contexto de juego estándar de árbol fijo. El caso particular en que el árbol que define la red de conexión es una cadena se conoce como el problema del aeropuerto, el cual ha sido estudiado también en el Capítulo 2. La generalización viene dada por el hecho de que en un juego estándar de árbol fijo se supone que el coste de mantenimiento de cada enlace es el mismo, independientemente del número de usuarios que lo utilice.

El método de distribución de costes propuesto por Sánchez-Soriano *et al.* (2002) se deduce a partir de un principio de justicia. Sin embargo, hay algunas dudas que quedan por resolver antes de asumir la idoneidad de la solución igualitaria agregada. Las propiedades más interesantes dentro de la literatura de reparto de costes conciernen a la dinámica de un mecanismo de reparto de costes. ¿Cómo debería ajustarse el mecanismo de reparto de costes a la asignación de los costes individuales si se modifican los parámetros del problema?

Es trivial comprobar que la regla igualitaria agregada verifica la unicidad en las propiedades de los costes. Aun así, en este escenario la regla de distribución debería proporcionar un incentivo para que los agentes cooperen (propiedades de unicidad de población). A continuación, se expone un ejemplo ilustrativo que muestra algunos inconvenientes del mecanismo de asignación propuesto.

Ejemplo 4.2. Considérese la siguiente situación, con autobuses de 55 asientos de capacidad. Se supone que el año pasado ningún estudiante vivía en la ciudad 2, por lo que los estudiantes que viven en las ciudades 1 y 3 sólo necesitan un autobús para llegar al campus.

Este año, cinco nuevos estudiantes viven en la ciudad 2. Si se unen al sistema de transporte, se duplica el coste variable del arco e . El coste variable parcial de los estudiantes que viven en las ciudades 1 y 3 también aumenta de manera considerable. Por tanto, estos cinco nuevos estudiantes son "malos socios" para los alumnos de las ciudades 1 y 3.

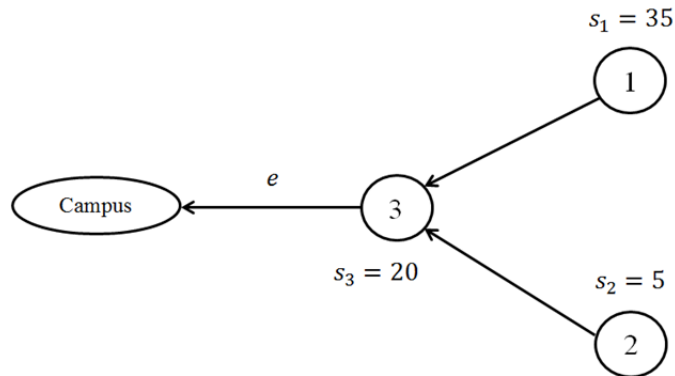


Figura 4.2. Ejemplo 4.2

Sin embargo, y ya que es un sistema de transporte público, se debe dar servicio a los cinco estudiantes de la ciudad 2. Las preguntas que surgen son: ¿quién debería pagar el aumento de los costes? ¿Quién debería cubrir el déficit causado?

El Ejemplo 4.2 muestra una situación en la que un grupo de estudiantes están subvencionando a otros estudiantes. Esta situación no parece justa. Los estudiantes que tienen que pagar un subsidio adicional a otros estudiantes podrían sentir que están siendo tratados injustamente. Sin embargo, como se ha señalado antes, la Diputación debe prestar servicio a todos los estudiantes. Con todo esto, parece razonable que dicha institución pública pague este subsidio adicional. Es decir, se propone crear un sistema monetario compensatorio.

4.4.1.1 Sistema monetario compensatorio

Si se define un juego cooperativo asociado al problema de distribución de costes que se está analizando (un juego de árbol de coste variable), y la distribución igualitaria agregada resulta estar en el *core* del juego, entonces ningún grupo de estudiantes estaría subvencionando a otros estudiantes. Como ya se sabe de la Sección 3.3, el *core* de un juego de costes (N, c) es el conjunto

$$C(c) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid z(S) \leq c(S) \quad \forall S \subseteq N, \quad z(N) = c(N)\},$$

donde $z(S) = \sum_{i \in S} z_i$.

Si $z \in C(N, c)$, entonces ninguna coalición S tiene una razón para retirarse si z es el vector propuesto de reparto de costes. Esto es, un reparto según el *core* ofrece incentivos para una cooperación voluntaria. Sin embargo, la condición del *core* puede reescribirse como $z(S) \geq c(N) - c(N \setminus S)$, $S \subseteq N$. Si esta condición no se satisface para alguna coalición S , se podría decir que la coalición $N \setminus S$ está subvencionando a S . Por lo tanto, incluso si no hay necesidad de dar a los jugadores un incentivo para cooperar, todavía hay una razón para un *core* dentro de un marco de igualdad.

El problema llega cuando el *core* del correspondiente juego de costes es vacío. Entonces, para prevenir situaciones injustas, resulta necesaria alguna financiación externa. En este punto se introduce una extensión del *core* para calcular el mínimo apoyo financiero necesario para evitar dichas situaciones como las del ejemplo: el *core* de tasa aditiva ε .

El *core* de tasa aditiva ε de un juego de coste (N, c) es el conjunto

$$C_\varepsilon^+(c) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid z(S) \leq c(S) + \varepsilon|S| \quad \forall S \subset N, z(N) = c(N)\}.$$

Una vez obtenida la distribución igualitaria agregada arco a arco, se calculará el apoyo financiero también arco a arco. Para ello se definirán este tipo de juegos, los cuales se denominarán *juegos de arco*.

Definición 4.2. Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses. Entonces, para cada arco $e = (i, j) \in E$, el **juego de arco** (N_e, c_e) se define de la siguiente manera:

- (i) El coste de cualquier coalición no vacía $S \subset N_e$ viene dado por el coste variable del mínimo número de autobuses necesarios para llevar a todos los estudiantes de la coalición S desde la ciudad j hasta la ciudad i , es decir, $c_e(S) = \lceil s/b \rceil d_e K$, donde s es el número de estudiantes de la coalición S y $\lceil s/b \rceil$ representa la parte entera superior de s/b .
- (ii) El coste de la gran coalición N_e será determinado exógenamente. Vendrá dado por el coste variable relativo al arco e (que se obtiene de la flota óptima, calculada al resolver el problema de la Sección 4.3 para $S = \overline{V}$). Esto es,

$$c_e(N_e) = \left(\sum_{j \in B_e} x_j^* \right) d_e K.$$

Ejemplo 4.3. Considérese la siguiente situación con autobuses de 55 asientos de capacidad.

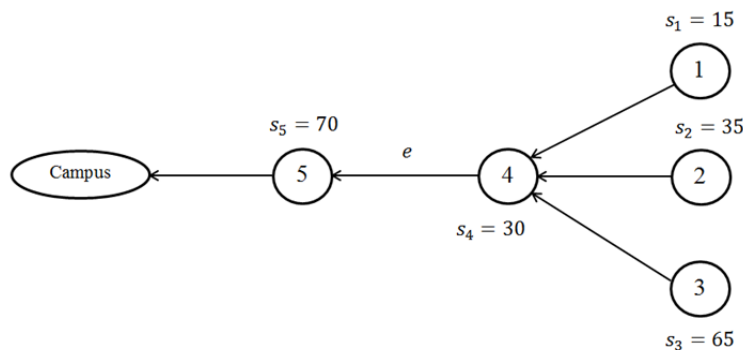


Figura 4.3. Ejemplo 4.3

En este caso sólo se necesitan $\lceil 145/55 \rceil = 3$ autobuses para transportar a todos los estudiantes de N_e desde la ciudad 4 hasta la 5. Sin embargo, hay $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 1 + 1 + 2 + 0$ autobuses que pasan por el arco e . Por tanto, el coste $c_e(N_e)$ debe ser igual a $4d_eK$, en lugar de $\lceil 145/55 \rceil d_eK$, para cubrir los costes reales. Esto ocurre porque hay un excedente (*surplus bus*), $SB(e) = \sum_{j \in B_e} x_j^* - \lceil n_e/b \rceil$, de un autobús cubriendo el arco e .

Obsérvese que este excedente de autobuses cubriendo un arco será positivo cuando, de acuerdo a la flota óptima x^* , hubiera más autobuses cubriendo el arco $e = (i, j)$ que la cantidad estrictamente necesaria para transportar a todos los estudiantes desde i hasta j . La posible diferencia surge de la prohibición de realizar transbordos en los nodos, ya que en la definición del problema de optimización se ha asumido de forma implícita que todos los autobuses llegan a la universidad.

Teorema 4.1. Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses y sea $e \in E$. Entonces, la *distribución igualitaria agregada parcial*¹ está en el *core* de tasa aditiva ε del correspondiente juego de arco (N_e, c_e) si, y sólo si, $\varepsilon \geq \varepsilon_a$, con

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{si } n_e \leq b \text{ y } SB(e) = 0, \\ \frac{SB(e)(n_e - 1) - 1}{n_e(n_e - 1)} d_e K & \text{si } n_e \leq b \text{ y } SB(e) \geq 1, \\ \frac{SB(e)}{n_e} d_e K & \text{si } n_e > b \text{ y } r_e = 0, \\ \left(\frac{SB(e)}{n_e} + \frac{(b - r_e)}{bn_e} \right) d_e K & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde r_e es el resto del cociente n_e/b ($n_e = mb + r_e, m, r_e \in \mathbb{Z}_+$ y $0 \leq r_e < b$) y $SB(e) = \sum_{j \in B_e} x_j^* - \lceil n_e/b \rceil$ es el excedente de autobuses que cubren el arco e .

Se entiende la distribución igualitaria agregada parcial como el reparto de costes relativo al arco e . En lo que sigue, se denominará simplemente *distribución igualitaria*.

Demostración: Sea (N_e, c_e) un juego de arco. Entonces, teniendo en cuenta que $c_e(N_e) = (\sum_{j \in B_e} x_j^*) d_e K$, se llega a

$$z_i = \frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*) d_e K}{n_e}, \quad \forall i \in N_e.$$

¹ Se entiende la distribución igualitaria agregada parcial como el reparto de costes relativo al arco e . En lo que sigue, se denominará simplemente *distribución igualitaria*.

Por otra parte, el coste de la coalición $S \subseteq N_e$ viene dado como $c_e(S) = \lceil s/b \rceil d_e K$, donde s es el número de estudiantes de S . El coste individual para todo estudiante $i \in N_e$ es $c_e(\{i\}) = d_e K$. Por tanto, la distribución igualitaria está en el *core* de tasa aditiva ε si, y sólo si,

$$\frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*) d_e K}{n_e} \cdot s \leq \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil d_e K + \varepsilon \cdot s \quad \forall S \subset N_e.$$

Esto es, para todo $s \in \{1, \dots, n_e - 1\}$ se tiene que

$$\varepsilon \geq \frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*/n_e) s - \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil d_e K}{s} = \frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*) s - \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil d_e K}{s n_e}.$$

De la misma forma, teniendo en cuenta que $\sum_{j \in B_e} x_j^* = SB(e) + \lceil n_e/b \rceil$, se obtiene

$$\varepsilon \geq \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \frac{\left\lceil \frac{n_e}{b} \right\rceil s - \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil n_e}{s n_e} d_e K. \quad (46)$$

Se denomina ε_a al mínimo ε que satisface (46) para todo $S \subseteq N_e$. De hecho, puesto que el primer término de la derecha no depende de S , basta con dar una cota superior, $\tilde{\varepsilon}$, para el segundo término, es decir,

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{\left\lceil \frac{n_e}{b} \right\rceil s - \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil n_e}{s n_e} d_e K = g(s) \quad \forall s \in \{1, \dots, n_e - 1\}. \quad (47)$$

Se dan tres posibles casos:

(A) Si $n_e \leq b$, entonces (47) puede reescribirse como

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{s - n_e}{s n_e} d_e K = g(s).$$

Dado que $g(\cdot)$ es una función creciente, entonces

$$\tilde{\varepsilon} \geq g(n_e - 1) = -\frac{1}{(n_e - 1)n_e} d_e K.$$

Por tanto, una cota superior para la suma original debe satisfacer:

$$\varepsilon \geq \frac{SB(e)}{n_e} d_e K - \frac{1}{(n_e - 1)n_e} d_e K = \frac{SB(e)(n_e - 1) - 1}{(n_e - 1)n_e} d_e K.$$

Ahora, si $SB(e) = 0$, entonces $g(s) < 0$ y la expresión (46) se cumple para todo $\varepsilon \geq 0 = \varepsilon_a$. En otro caso,

$$\varepsilon_a = \frac{(SB(e)(n_e - 1) - 1)d_e K}{(n_e - 1)n_e}.$$

(B) Si $n_e > b$ y n_e es un múltiplo de b ($m > 1$ y $r_e = 0$), entonces la expresión (47) puede reescribirse como

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{ms - \left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor mb}{sn_e} d_e K.$$

Sean α y δ dos enteros no negativos tales que $s = \alpha b + \delta$ y $\delta < b$. Dos posibles casos son:

(B.1) Si $\alpha > 0$ y $\delta = 0$, entonces $g(s) = 0$;

(B.2) Si $\alpha \geq 0$ y $\delta > 0$, entonces $g(s) < 0$, y se deduce de $\delta < b$.

Por tanto, la inecuación (47) se mantiene para todo $\tilde{\varepsilon} \geq 0$ y, en consecuencia, $\varepsilon_a = \frac{SB(e)}{n_e} d_e K$.

(C) En otro caso, $n_e = mb + r_e$ con $1 \leq r_e \leq b - 1$ y $m \geq 1$, la expresión (47) puede reescribirse como

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{(m + 1)s - \left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor (mb + r_e)}{sn_e} d_e K \quad \forall s \in \{2, \dots, n_e - 1\}.$$

Sean α y δ dos enteros no negativos tales que $s = \alpha b + \delta$ y $\delta < b$. Dos posibles casos son:

(C.1) Si $\alpha > 0$ y $\delta = 0$, entonces

$$\varepsilon \geq \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \tilde{\varepsilon} \geq \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \frac{b - r_e}{bn_e} d_e K = \varepsilon_a \quad \text{para todo } s \text{ con } s = \alpha b. \quad (48)$$

(C.2) Si $\alpha \geq 0$ y $\delta > 0$, entonces

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{\delta(m+1) + \alpha(b - r_e) - n_e}{(\alpha b + \delta)n_e} d_e K = G_a(\alpha, \delta).$$

$G_a(\alpha, \cdot) := g_a^\alpha(\cdot)$ es una función creciente para cada $\alpha \geq 0$. Por lo tanto, se mantiene que

$$G_a(\alpha, \delta) \leq G_a(\alpha, b) \quad \text{para todo } \alpha \geq 0 \text{ y } \delta \in \{1, \dots, b - 1\}.$$

Se puede comprobar fácilmente que $G_a(\alpha, b) = \left(\frac{b - r_e}{bn_e}\right) d_e K$, para todo $\alpha \geq 0$. Esto es,

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \frac{b - r_e}{bn_e} d_e K \geq \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + G_a(\alpha, \delta) \\ &= \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \frac{\left\lfloor \frac{n_e}{b} \right\rfloor s - \left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor n_e}{sn_e} d_e K, \end{aligned} \quad (49)$$

para todo $\delta \in \{1, \dots, b - 1\}$ y para todo $\alpha \in \{0, \dots, b - 1\}$.

Luego, tomando (48) y (49) y reestructurando, se deduce que

$$\varepsilon_a = \frac{SB(e)}{n_e} d_e K + \frac{b - r_e}{bn_e} d_e K = \left(\frac{SB(e)}{n_e} + \frac{b - r_e}{bn_e} \right) d_e K.$$

■

El teorema anterior muestra que el apoyo financiero que cada estudiante recibe depende del número de asientos vacíos por autobús que cubre el arco, además del número de autobuses de repuesto (de acuerdo con la flota óptima). Si se vuelve a los Ejemplos 4.2 y 4.3 y se calcula el apoyo financiero por arco, se tiene lo siguiente:

- Con respecto al Ejemplo 4.2, el arco (2,3) no está financiado, mientras que el apoyo financiero del arco $e = (3, \text{campus})$ es igual al precio de los 55 – 5 asientos extra del autobús que sale de la ciudad 2.
- En el Ejemplo 4.3, el apoyo del arco e es igual al coste del autobús extra más el de los 20 asientos que quedarían vacíos incluso si solamente se utilizaran tres autobuses.

Ejemplo 4.1 (continuación). Considérese el caso del primer ejemplo. La financiación de la Diputación vendría dada por:

Arco	L'Alfàs del Pi-Benidorm	Calpe-Altea	Altea-Benidorm	Benidorm-La Vila Joiosa	La Vila Joiosa-Campus
Financ./estudiante	0	8,38	8,05	0,47	3,34
Financ./arco	0	678,6	1.352	304,2	2.831,4

Obsérvese que el apoyo financiero total (5.166,2 uds.) representa el 5,16% del coste variable total del subsistema (100.100 uds.). Esta cantidad será cubierta por la Diputación de Alicante. Entonces, la distribución del *coste variable financiado* que cada estudiante debería pagar es, en cada ciudad,

L'Alfàs del Pi	Calpe	Altea	Benidorm	La Vila Joiosa
129,63	158,6	135,2	109,2	85,8

La siguiente proposición muestra la cantidad que cada estudiante debería pagar por kilómetro y por cada arco del árbol una vez han sido financiados por la Diputación.

Proposición 4.1. Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses y sea $e \in E$. Entonces, la tarifa por kilómetro que cada estudiante debería pagar una vez restado el apoyo financiero viene dado por

$$\beta_e = \begin{cases} \frac{1}{n_e} K & \text{si } n_e \leq b \text{ y } SB(e) = 0, \\ \frac{1}{n_e - 1} K & \text{si } n_e \leq b \text{ y } SB(e) \geq 1, \\ \frac{1}{b} K & \text{si } n_e > b. \end{cases}$$

Demostración: el coste variable por kilómetro que debe pagar cada estudiante tras la financiación es

$$\frac{\left(\frac{(\sum_{j \in B_e} x_j^*)}{n_e} \right) d_e K - \varepsilon_a}{d_e}.$$

Entonces, teniendo en cuenta esta cantidad, se obtiene fácilmente lo indicado en la Proposición 4.1. ■

4.4.2 Distribución de costes fijos

Al comienzo de esta sección se ha argumentado que, si sólo hubiera costes fijos, los costes totales $F \cdot \sum_{i \in \bar{V}} x_i^*$ deberían ser repartidos de forma equitativa entre los estudiantes. Por tanto, como el coste variable ya ha sido repartido, se debería hallar ahora una distribución igualitaria de los costes fijos.

Sin embargo, en este caso vuelve a surgir el mismo problema: podría darse el caso de que algunos estudiantes estuvieran subvencionando a otros. De este modo, para evitar tal situación de injusticia, se considerará un *juego de coste fijo asociado*, (N, c_f) , que se define de la siguiente manera.

Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses y sea $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de todos los estudiantes que viven en las ciudades localizadas en el árbol. Entonces, los costes fijos totales $c_f(N) := (\sum_{j \in \bar{V}} x_j^*) \cdot F$ tienen que ser distribuidos entre los estudiantes de N .

Sin embargo, cada coalición de estudiantes S , con $|S| = s$ sólo necesita $\lceil s/b \rceil$ autobuses (nótese que, al no tratar con costes variables, no se considera la distancia cubierta). Es decir, la cantidad máxima que los estudiantes de S estarían dispuestos a pagar viene dada por

$$c_f(S) := \left\lceil \frac{s}{b} \right\rceil \cdot F.$$

Obsérvese que el juego de coste fijo asociado es igual al juego de arcos (N_e, c_e) con $N_e = N$ y $d_e = F$. Además, se pueden aplicar todos los resultados anteriores.

De acuerdo al Teorema 4.1, la cantidad por estudiante de financiación recibida desde la Diputación tiene que ser:

$$\varepsilon_f = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq b \text{ y } SB = 0, \\ \frac{SB(n-1) - 1}{n(n-1)} F & \text{si } n \leq b \text{ y } SB \geq 1, \\ \frac{SB}{n} F & \text{si } n > b \text{ y } n \text{ es múltiplo de } b, \\ \left(\frac{SB}{n} + \frac{(b-r)}{bn} \right) F & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde r es el resto del cociente n/b y $SB = (\sum_{j \in \bar{V}} x_j^*) - [n/b]$ es el excedente de autobuses cubriendo las rutas, el cual puede interpretarse como sigue.

Si el coste variable que debe ser pagado por kilómetro cubierto fuera cero, la estructura del árbol no influiría en la determinación de la flota óptima. Concretamente, los costes sólo dependerían del número de autobuses contratados. Por tanto, la estrategia óptima sería contratar n/b autobuses. Entonces, el excedente de autobuses cubriendo las rutas puede considerarse como el excedente de autobuses que tienen que ser contratados para reducir los costes variables (además de para reducir el tiempo de viaje de los estudiantes).

Es decir, el reparto del coste fijo financiado vendría dado por

$$\beta = \begin{cases} \frac{F}{n} & \text{si } n \leq b \text{ y } SB = 0, \\ \frac{F}{n-1} & \text{si } n \leq b \text{ y } SB \geq 1, \\ \frac{F}{b} & \text{si } n > b. \end{cases}$$

Ejemplo 4.1 (continuación). Considérese un coste fijo de 5.000 uds. por autobús, entonces cada estudiante paga $5.000/55 = 90,91$ uds., mientras que el apoyo financiero dado por la Diputación tiene que ser $33 \cdot (5.000/55)$ (los 33 asientos que quedan libres en una flota de 16 autobuses usados por 847 estudiantes. Luego el apoyo financiero total (3.000 uds.) representa el 3,75% de los coste fijos totales del sistema de transporte ($16 \cdot 5.000 = 80.000$ uds.).

4.4.3 Regla de financiación igualitaria agregada

Hasta ahora se ha determinado la financiación total que la Diputación de Alicante debería aceptar para convertir la distribución igualitaria agregada en una regla estable, tanto la que tiene que financiar por los costes variables en cada arco como la correspondiente a los costes fijos.

Formalmente, sea $j \in \bar{V}$ una ciudad del árbol, entonces el reparto de los costes financiados de cada estudiante i que viva en la ciudad j vendrá dado por

$$y_i^j = \beta + \sum_{e \in P_j} \beta_e \delta_e,$$

mientras que el total financiado de todos los estudiantes que viven en j será

$$y^j = s_j \left(\beta + \sum_{e \in P_j} \beta_e \delta_e \right) \quad \forall j \in \bar{V}. \quad (50)$$

Finalmente, el apoyo financiero (*financial support*) total requerido será

$$FS(\mathcal{B}) = n\varepsilon_f + \sum_{e \in E} n_e \varepsilon_a(e),$$

donde $\varepsilon_a(e)$ es el apoyo por estudiante que pasa por el arco e (véase el Teorema 4.1).

Los resultados parciales que se han obtenido anteriormente se resumen en el siguiente teorema. En primer lugar, se define un *juego de árbol de autobuses completamente financiado*. Posteriormente, se prueba que la tarifa propuesta por ciudad, (50), resulta ser una distribución del *core* del juego financiado.

Definición 4.3. Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses y sea $(\bar{V}, c_{\mathcal{B}})$ el correspondiente juego de árbol de autobuses. Entonces, se define el **juego de árbol de autobuses financiado**, $(\bar{V}, c_{\mathcal{B}}^f)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{B}}^f(S) &:= c_{\mathcal{B}}(S) \quad \text{para todo } S \subset \bar{V}, \\ c_{\mathcal{B}}^f(\bar{V}) &:= c_{\mathcal{B}}(\bar{V}) - FS(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Nótese que los estudiantes reciben el apoyo financiero de la Diputación si, y sólo si, todos ellos cooperan.

Teorema 4.2. Sea $\mathcal{B} = (G, s, d, b, H)$ una situación de árbol de autobuses. Entonces, la distribución $y = (y^j)_{j \in \bar{V}}$ dada anteriormente pertenece al *core* del juego de árbol de autobuses financiado (\bar{V}, c_B^f) .

Demostración: dado que el apoyo financiero total $FS(\mathcal{B})$ se obtiene como la suma del apoyo a todos los estudiantes, se tiene que y es eficiente. Se comprueba a continuación. Por una parte,

$$y(\bar{V}) := \sum_{j \in \bar{V}} y_j = \sum_{j \in \bar{V}} s_j \left(\beta + \sum_{e \in P_j} \beta_e d_e \right) = n\beta + \sum_{j \in \bar{V}} s_j \left(\sum_{e \in P_j} \beta_e d_e \right).$$

Entonces, puesto que un arco e está en el camino de j , P_j , si, y sólo si, j está en la rama B_e , se tiene que

$$y(\bar{V}) = n\beta + \sum_{e \in E} \left(\sum_{j \in B_e} s_j \right) \beta_e d_e = n\beta + \sum_{e \in E} n_e \beta_e d_e. \quad (51)$$

Por otra parte,

$$c_B^f(\bar{V}) := c_B^c(\bar{V}) - FS(\mathcal{B}) = F \cdot \sum_{j \in \bar{V}} x_j^* + K \cdot \sum_{j \in \bar{V}} x_j^* k_j - \left(n \cdot \varepsilon_f + \sum_{e \in E} n_e \varepsilon_a(e) \right).$$

Teniendo en cuenta que $SB(e) = \sum_{j \in \bar{V}} x_j^* - \lceil n/b \rceil$ y $k_j = \sum_{e \in P_j} d_e$, se tiene que

$$c_B^f(\bar{V}) = \left(\lceil \frac{n}{b} \rceil + SB \right) F - n\varepsilon_f + \sum_{e \in E} \left(d_e K \sum_{j \in B_e} x_j^* - n_e \varepsilon_a(e) \right),$$

y, como $SB(e) = \sum_{j \in B_e} x_j^* - \lceil n_e/b \rceil$, se puede reescribir la ecuación:

$$c_B^f(\bar{V}) = \left(\left[\frac{n}{b} \right] + SB \right) F - n\varepsilon_f + \sum_{e \in E} \left(d_e K \left(\left[\frac{n_e}{b} \right] + SB(e) \right) - n_e \varepsilon_a(e) \right). \quad (52)$$

Por tanto, y teniendo en cuenta, de las ecuaciones (51) y (52), que

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad n\beta &= \left(\left[\frac{n}{b} \right] + SB \right) F - n\varepsilon_f, \\ \text{(II)} \quad n_e \beta_e d_e &= d_e K \left(\left[\frac{n_e}{b} \right] + SB(e) \right) - n_e \varepsilon_a(e) \text{ para todo } e \in E, \end{aligned}$$

se llega a

$$y(\bar{V}) = c_B^f(\bar{V}).$$

Queda por demostrar que y es estable. Sea $S \subset N$ una coalición no vacía de jugadores. Se denota por $E(S) = \{e \in E \mid S \cap B_e \neq \emptyset\}$ al conjunto de todos los arcos que tienen que cubrir los estudiantes de S para llegar al campus. Entonces,

$$y(S) := \sum_{j \in S} y_j = \sum_{j \in S} s_j \beta + \sum_{j \in S} s_j \left(\sum_{e \in P_j} \beta_e d_e \right) = \beta \sum_{j \in S} s_j + \sum_{e \in E(S)} \beta_e d_e \left(\sum_{j \in B_e \cap S} s_j \right).$$

El coste de la coalición S viene dado por

$$\begin{aligned} c_B^f(S) &:= c_B(S) = F \sum_{j \in S} x^*(S) + K \sum_{j \in S} x^*(S) k_j \\ &= F \sum_{j \in S} x^*(S) + K \sum_{j \in S} x^*(S) \left(\sum_{e \in P_j} d_e \right) \\ &= F \sum_{j \in S} x^*(S) + K \sum_{e \in E(S)} d_e \left(\sum_{j \in B_e \cap S} x^*(S) \right), \end{aligned}$$

donde $x^*(S)$ es la distribución óptima de autobuses que determina el coste $c_B(S)$. Por tanto, la inecuación $y(S) \leq c_B^f(S)$ se obtiene a partir de las siguientes inecuaciones:

- (I) $\beta \sum_{j \in S} s_j \leq F \sum_{j \in S} x^*(S)$,
 (II) $\beta_e d_e (\sum_{j \in B_e \cap S} s_j) \leq d_e K (\sum_{j \in B_e \cap S} x^*(S))$ para todo $e \in E(S)$.

■

Ejemplo 4.1 (continuación). De acuerdo a lo visto anteriormente, la tarifa subvencionada que cada estudiante debería pagar es

L'Alfàs del Pi	Calpe	Altea	Benidorm	La Vila Joiosa
220,54	249,51	226,11	200,11	176,71

y la tarifa de cada estudiante sin la subvención es

L'Alfàs del Pi	Calpe	Altea	Benidorm	La Vila Joiosa
227,89	273,29	241,52	207,46	183,59

Estas tarifas fueron calculadas (en pesetas) por Sánchez-Soriano *et al.* (2002) de acuerdo a los precios que obtuvieron al contratar (de manera privada) un solo autobús. Obviamente, si el proyecto UNIVERCITY presentado a la Diputación hubiera sido implementado, los costes se reducirían ampliamente. Incluso en esta última situación en la que los estudiantes no reciben subvención, la tarifa que cada uno de estos pagaba en 1999 por un servicio similar (véase la tabla inferior) es mayor que la tarifa obtenida por la solución igualitaria agregada, excepto para los estudiantes de Benidorm. Esto se debe únicamente a que esta ciudad es más poblada y aporta un número mayor de estudiantes universitarios. Estos estudiantes contrataron ocho autobuses (en vez de uno) y pudieron obtener unas tarifas menores gracias al descuento por el alto número de autobuses contratados.

L'Alfàs del Pi	Calpe	Altea	Benidorm	La Vila Joiosa
240	295	245	195	187,5

4.5 Conclusiones

El sistema de transporte para estudiantes universitarios introducido por Sánchez-Soriano *et al.* (2002) consiste en un sistema conjunto entre los ayuntamientos de la provincia de Alicante, gestionados por la Diputación, que trata de conectar, de forma eficiente, pueblos y ciudades de Alicante con los diferentes campus universitarios.

Cabe señalar que el modelo que expusieron los autores en su artículo, UNIVERCITY, es una primera aproximación al problema real. El desarrollo del proyecto permitiría la recopilación de todos los datos necesarios y el estudio de las posibles generalizaciones del modelo descrito en el artículo.

Una posible extensión del modelo podría ser, por ejemplo, aquella que afectara a los horarios. En el trabajo se ha considerado que cada estudiante realiza un viaje de ida y vuelta, excepto los días festivos; pero se podría tener en cuenta al menos dos turnos (uno de mañana y otro de tarde). ¿Cómo influye esta circunstancia en la distribución de los costes? En este caso, se debería estudiar una nueva situación en la que cada árbol apareciera dos veces, pero con información diferente (árboles de mañana y de tarde), u otra en la que se utilizaran diferentes árboles.

Otra extensión podría ser dada al considerar unos subsistemas de transporte más complejos. Por ejemplo, subsistemas con dos campus en el que uno de ellos sería la raíz del árbol mientras que el otro sería la terminal de algunas rutas y, a su vez, una parada intermedia de algunas otras rutas.

El proyecto UNIVERCITY fue presentado a la Diputación de Alicante, pero, desafortunadamente, nunca llegó a implantarse. Una razón pudo ser que cada grupo de ciudades próximas ya organizaba el transporte universitario de sus estudiantes desde hacía tiempo. Por ello, era muy difícil que se creara un sistema único que exige una gestión minuciosa por parte del coordinador, cuando el sistema que existía funcionaba bien, al menos para la Universidad de Alicante, aunque no tan bien para la recién fundada (por aquel entonces) Universidad Miguel Hernández.

REFERENCIAS

- AADLAND, D., KOLPIN, V. (1998). Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis. *Mathematical Social Sciences* 35, 203—218.
- BAKER, M. (1965). *Runway cost impact study*. Artículo presentado a la Asociación de aerolíneas locales de transporte, Jackson, Missouri.
- BONDAREVA, O. (1963). Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games, *Problemy Kibernetiki* 10, 119—139.
- BOREL, É. (1921). La théorie du jeu et les equations intégrales à noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris* 173, 1304—1308.
- CERDÁ, E., PÉREZ, J., JIMENO, J.L. (2004). *Teoría de Juegos*. Pearson Educación.
- CHANGJOO, K. (2004). *Infrastructure design and cost allocation in hub and spoke and point-to-point network*. Tesis doctoral, Ohio State University.
- DAVIS, M., MASCHLER, M. (1965). The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 223—259.
- DRIESSEN, T. S. H. (1988). *Cooperative games, solutions and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- DRIESSEN, T., TIJS, S.H. (1985). The cost gap method and other cost allocation methods for multipurpose water projects. *Water Resources Research* 21, 1469—1475.
- DRIESSEN, T., TIJS, S.H. (1986). Extensions of solution concepts by means of multiplicative ε -tax games. *Mathematical Social Sciences* 12, 9—20.
- DUTTA, B., RAY, D. (1989). A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica* 57, 615—635.
- ENGEVALL, S., GOTHE-LUNDGREN, M., VARBRAND, P. (1998). The traveling salesman

- game: an application of cost allocation in a gas and oil company. *Annals of Operations Research* 82, 203—218.
- GILLIES, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Tesis doctoral, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- GRANOT, D., HUBERMAN, G. (1981). Minimum cost spanning tree games. *Mathematical Programming*, 21, 1—18.
- GRANOT, D., MASCHLER, M., OWEN, G., ZHU, W.R. (1996). The kernel/nucleolus of a standard tree game. *International Journal of Game Theory*, 25, 219—244.
- HOANG, N.D. (2010). *Algorithmic cost allocation games: theory and applications*. Tesis doctoral, Technische Universität Berlin.
- KALAI, E., SAMET, D. (1988). Weighted Shapley values. En *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*, editado por A.E. Roth, Cambridge University Press, 83—99.
- KUIPERS, J., MOSQUERA, M.A., ZARZUELO, J.M. (2013). Sharing costs in highways: A game theoretic approach. *European Journal of Operational Research*, 228, 158—168.
- LEGROS, P. (1982). The nucleolus and the cost allocation problem. *Report III*, Northwestern University, Evanston, IL.
- LITTLECHILD S.C., OWEN, G. (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, 20, 370—372.
- LITTLECHILD S.C., OWEN, G. (1976). A further note on the nucleolus of the airport game. *International Journal of Game Theory* 5, 91—95.
- MAKRIGEORGIS, C.N. (1991). *Development of an optimal durability-based highway cost allocation model*. Tesis doctoral, Texas A&M University.
- MASCHLER, M., POTTERS, J., REIJNIERSE, H. (1995). Monotonicity properties of the nucleolus of standard tree games. *Report 9556*, Department of Mathematics, University of Nijmegen.
- MATSUBAYASHI, N., UMEZAWA, M., MASUDA, Y., NISHINO, H. (2005). A cost allocation problem arising in hub-spoke network systems. *European Journal of Operational Research* 160, 821—838.

- MIRÁS, M.A., SÁNCHEZ, E. (2008). *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando Matlab: TUGlab*. Servizo de publicacións da Universidade de Vigo.
- MOLINA, E. (1998). *Imputaciones de costes y beneficios: Aportaciones desde la teoría de juegos cooperativos*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- MONDERER, D., SAMET, D., SHAPLEY, L.S. (1992). Weighted values and the core. *International Journal of Game Theory*, 21, 27—39.
- NEUMANN, J. VON (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295—320.
- NEUMANN, J. VON, MORGENSTERN, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- ÖZENER, O.O., ERGUN, O. (2008). Allocating costs in a collaborative transportation procurement network. *Transportation Science* 42, 146—165.
- SÁNCHEZ-SORIANO, J., LLORCA, N., MECA, A., MOLINA, E., PULIDO, M. (2002). An integrated transport system for Alacant's students. UNIVERCITY. *Annals of Operations Research* 109, 41—60.
- SCHMEIDLER, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1163—1170.
- SHAPLEY, L. S. (1953). A value for n-person games. En *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 307—317.
- SHAPLEY, L. S. (1967). On balanced sets and cores. *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453—460.
- SHAPLEY, L.S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1, 11—26.
- SHAPLEY, L.S. (1981). Discussant's comment. En *Joint Cost Allocation*, editado por J. Moriarity, University of Oklahoma Press, Tulsa.
- SHUBIK, M. (1962). Incentives, decentralized control, the assignment of joint cost and internal pricing. *Management Science* 8, 325—343.

- SUDHÖLTER, P. (1998). Axiomatizations of game theoretical solutions for one-output cost sharing problems. *Games and Economic Behavior* 24, 42—171.
- THOMPSON, G. (1971). *Airport costs and pricing*. Tesis doctoral, University of Birmingham.
- THOMSON W. (2007). *Cost allocation and airport problems*. Working paper 538, University of Rochester.
- TIJS, S. H. (1981). Bounds for the core and the τ -value. En *Game Theory and Mathematical Economics*, O. Moeschlin, D. Pallaschke (eds.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 123—132.
- TIJS, S.H., DRIESSEN, T. (1986). Game theory and cost allocation problems. *Management Science* 32, 1015—1028.
- TIJS, S.H., OTTEN, G.J. (1993). Compromise values in cooperative game theory, TOP 1, 1—51.
- VILLARREAL-CAVAZOS, A., GARCÍA-DÍAZ, A. (1985). Development and application of new highway cost allocation procedures, *Transportation Research Record* 1009, 34—45.
- YOUNG, H.P. (1994). Cost Allocation. En *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 2, R.J. Aumann & S.Hart (ed.), 1193—1235.
- ZERMELO, E. (1913). *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*. *Fifth International Congress of Mathematicians*, 2, Cambridge University Press, 501—504.