Universidad de Sevilla

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

SOBRE LA HOMOGENEIZACIÓN DE PROBLEMAS NO COERCIVOS Y PROBLEMAS EN DOMINIOS CON AGUJEROS

Memoria presentada por
Juan Casado Díaz
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas

Sevilla, octubre 1993

Vo Bo
de los directores
del trabajo

Fdo. José Domingo Martín Gómez
Profesor Titular de
la Universidad de Sevilla.

Fdo. François Murat
Directeur de Recherche
du C.N.R.S.
Universidad Paris VI

Fdo. Juan Casado Díaz

Agradecimientos.

El presente trabajo no habría sido posible sin la ayuda y apoyo que he recibido por numerosas personas durante los tres años de su duración.

Quiero de un modo especial expresar mi agradecimiento al Profesor José Domingo Martín Gómez quién me inició en el trabajo de investigador y de quién he recibido ayuda en todos los sentidos destacando mi estancia de casi tres años en la Universidad París VI que ha tenido lugar gracias a él.

Deseo asímismo mostrar mi más sincero agradecimiento al Profesor François Murat por su dirección científica y su apoyo permanente a lo largo de todo este trabajo así como todas las facilidades prestadas durante mi estancia en Francia.

Agradezco profundamente la inestimable ayuda recibida del Profesor Enrique Fernández Cara, especialmente por sus consejos y colaboración que tan importantes han sido en la elaboración de esta Tesis.

Remarco la amistad y confianza de los Profesores Tomás Chacón Rebollo y Francisco Ortegón Gallego quienes en todo momento han estado dispuestos a escucharme y atenderme cuantas veces les he necesitado.

No puedo olvidar al resto de compañeros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla que tanto apoyo me han prestado y a quienes tengo tanto que agradecer.

Por último quisiera recordar a mis compañeros de París, especialmente a José Manuel Rodriguez Seijo quién siempre ha estado a mi lado durante mi trabajo en París y a mis demás compañeros de D.E.A. Francisco Javier Barón López y Pedro González Rodelas.

A mis Padres
Juan y Antonia

Índice

Introducción 1

PRIMERA PARTE. Relajación de Funcionales no Coercivos y no Acotados 21

1. Relajación de un Funcional Cuadrático no Coercivo 22

1.1. El Problema d-dimensional 22
1.2. El Problema Unidimensional 35
1.3. Algunas Observaciones sobre la Hipótesis (H1) 51

SEGUNDA PARTE. Homogeneización en Dominios con Agujeros 55

2. Existencia y Unicidad de Solución para un Problema con Crecimiento Cuadrático 56

2.1. Existencia de Solución para un Problema Quasilineal con Crecimiento Cuadrático 57
2.2. Unicidad de Solución para un Problema Quasilineal con Crecimiento Cuadrático 63

3. Homogeneización de un Problema de Dirichlet Lineal en Dominios Perforados 69

4. El Problema Cuadrático 87

4.1. El Problema Cuadrático 87
4.2. Corrector 90
4.3. Interpretación del Resultado Obtenido 93

5. Problema con Crecimiento Cuadrático en Dominios Perforados 96

5.1. Primeras Estimaciones 97
5.2. Existencia de Soluciones Aproximadas con Buena Acotación 108
5.3. Comparación de dos Sucesiones de Soluciones 111
5.4. Construcción de Aproximantes 121
5.5. Estructura del Término Extraño 123
5.6. Unicidad de Solución del Problema Homogeneizado 128
5.7. Corrector 135

Apéndice. Algunas Observaciones acerca del Concepto de Capacidad 139

Bibliografía 146

Algunas Notaciones.

$\mathbb{R}^d$: Espacio euclídeo d-dimensional.

$diam(A)$: Diámetro del conjunto A.

$B(x,r)$: Bola eúclidea de centro x y radio r.

∇: Operador gradiente

Δ: Operador laplaciano.

div: Operador divergencia.

ℓ: Medida de Lebesgue.

$cap(A)$: Capacidad del conjunto A. (Ver apéndice)

T_n: Aplicación (de truncamiento) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$T_n(s) = \begin{cases} -n & \text{si } s \leq -n \\ s & \text{si } -n \leq s \leq n \\ n & \text{si } n \leq s. \end{cases}$$

$\langle , \rangle_{X',X}$: Producto de dualidad entre el espacio X y su dual X'.

$\langle , \rangle = \langle , \rangle_{X',X}$ cuando se sobreentiendan X y X'.

$u_n \to u$ en X: Significa que la sucesión u_n converge a u en les espacio X con su topología fuerte.

$u_n \rightharpoonup u$en X: Significa que la sucesión u_n converge a u en les espacio X con su topología débil.

$L^p(A, d\mu)$: Espacio de las clases de funciones de $A \subset \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ de potencia p integrable respecto a una medida μ. $(1 \leq p < +\infty)$

$L^\infty(A, d\mu)$: Espacio de las clases de funciones de $A \subset \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ acotadas esencialmente para una medida μ.

$L^p(A) = L^p(A, d\ell)$.

$L^\infty(A) = L^\infty(A, d\ell)$.

$L^p_{loc}(A)$: Espacio de las clases de funciones de $A \subset \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ de potencia p integrable (respecto a ℓ) en los subconjuntos compactos de $A \subset \mathbb{R}^d$.

$L^2(A)^d$: Espacio de las clases de funciones de $A \subset \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$ de cuadrado integrable.

Se considera Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: Espacio de las funciones de clase infinito con soporte compacto contenido en Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$: Espacio de las distribuciones en Ω, (dual de $\mathcal{D}(\Omega)$).

$C^0(\bar{\Omega})$: Espacio de las funciones continuas en $\bar{\Omega}$.

$C^0(\Omega)$: Espacio de las funciones continuas en Ω, (con la topología de la convergencia uniforme en compactos de Ω).

$C^0_0(\bar{\Omega})$: Cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $C^0(\bar{\Omega})$.

$C^m(\bar{\Omega})$: Espacio de las funciones m veces derivables en para algún entorno de $\bar{\Omega}$ $(1 \leq m \leq +\infty)$, (con la topología de la convergencia uniforme de las derivadas en $\bar{\Omega}$).

$C^m(\Omega)$: Espacio de las funciones m veces derivables en Ω $(1 \leq m \leq +\infty)$, (con la topología de la convergencia uniforme de las derivadas en compactos de Ω).

$C^m_0(\Omega)$: Cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $C^m(\bar{\Omega})$.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espacio de las funciones de $L^p(\Omega)$ cuyas primeras derivadas parciales en sentido de las distribuciones están también en $L^p(\Omega)$. $1 \leq p \leq +\infty)$

$W^{1,p}_{loc}(\Omega)$: Espacio de las funciones de $L^p_{loc}(\Omega)$ cuyas primeras derivadas parciales en el sentido de las distribuciones están también en $L^p_{loc}(\Omega)$. $1 \leq p \leq +\infty)$.

$W^{1,p}_0(\Omega)$: Cierre en $W^{1,p}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$.

p': exponente conjugado de p con $1 \leq p \leq +\infty$ y

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

donde para las divisiones por cero y más infinito se hacen las convenciones habituales.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega) = W_0^{-1,2}(\Omega)$.

$\mathcal{M}^0(\Omega)$: Conjunto de las medidas borelianas positivas en Ω que se anulan en conjuntos de capacidad nula. (Ver Apéndice).

$\mathcal{M}_b^0(\Omega)$: Conjunto de las medidas de $\mathcal{M}^0(\Omega)$ de variación acotada.

Introducción.

La presente Memoria consta de dos partes claramente diferenciadas en las que se estudian dos problemas en homogeneización.

En la primera parte, se estudia la relajación del funcional

$$F(u) = \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto y acotado y donde $A = A(x)$ una función medible definida en Ω con valores en las matrices simétricas semidefinidas positivas. Estudiamos la relajación de F (i.e. su regularizada semicontinua inferior) con respecto a las diferentes topologías L^p, lo cual es más conveniente que una topología de tipo Sobolev ya que no tenemos estimaciones sobre los gradientes (recuérdese que F no es estrictamente elíptica). El problema se encuentra estrechamente ligado a la existencia de mínimo para el funcional $F(u) + \lambda \parallel u \parallel_{L^p}$.

En la segunda parte se tratan los problemas de homogeneización en dominios con agujeros. Esto es, dominios de la forma $\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T^\epsilon$ donde Ω se un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y T^ϵ una sucesión de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ que van a representar a los agujeros. Las hipótesis que se imponen en este trabajo sobre los conjuntos cerrados T^ϵ corresponden a mejoras de las introducidas por D. Cioranescu y F. Murat en [C M], (ver también [K M]). El principal probema tratado aquí es la homogeneización del problema

$$(0.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u^\epsilon + H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) = f \ \text{ en } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \end{cases}$$

donde la función $H(x, s, \xi)$ tiene un crecimiento cuadrático en la variable ξ. La existencia de solución de esta ecuación fue establecida por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel (ver

[B F M]). De su trabajo, se deduce que la sucesión de soluciones u^ϵ de (0.1) admiten una subsucesión que converge hacia una función u en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil. Nuestro interés consiste en encontrar la ecuación que verifica la función u, ecuación que ya en el caso lineal (en el cual no aparece H) resulta no ser de nuevo

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega,$$

sino que aparece una cierta medida positiva μ de forma que la ecuación que resuelve la función u es

$$-\Delta u + \mu u = f \quad \text{en } \Omega.$$

En el caso aquí planteado se añade la dificultad de que la sucesión $H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)$ sólo converge en el sentido de las medidas $*$-débil, lo cual conduce a que el término extraño que aparece (que en el caso lineal es μu) tenga una estructura aún más compleja del tipo

$$-\Delta u + H(x, u, \nabla u) + G(x, u)\mu = f \quad \text{en } \Omega.$$

Los contenidos del trabajoson los siguientes.

Primera parte.

La primera parte se encuentra descrita en el Capítulo 1 de la presente Memoria. El problema que pretendemos resolver se plantea como sigue.

Dado un conjunto abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definimos el funcional

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle & \text{si } u \in W^{1,\infty}(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in X \setminus W^{1,\infty}(\Omega), \end{cases} \tag{0.2}$$

donde la función medible $A = A(x)$ toma valores en el espacio de las matrices simétricas semidefinidas positivas y donde el espacio X puede ser cualquiera de los espacios $L^p(\Omega)$ o $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ o $C^0(\bar\Omega)$ o $C^0(\Omega)$.

El problema que abordamos aquí es la representación integral de la regularizada semicontinua inferiormente del funcional F que denotamos por $\bar F$. Este problema se encuentra ligado con la existencia de solución (vía el Teorema de Weierstrass) del problema de minimización de un funcional energía:

$$\int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} g(u)$$

o, en conexión con la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, con la existencia de solución a la ecuación de Euler correspondiente.

Obsérvese también que el espacio H definido como el dominio del funcional $\bar{F}$:

$$H = \left\{ u \in X : \ \bar{F}(u) < +\infty \right\},$$

es el espacio asociado de forma natural al funcional $\bar{F}$, (de la misma forma que al funcional de Dirichlet $\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2$ se le asocia $H^1(\Omega)$). En el espacio H es donde los problemas de minimización o las ecuaciones en derivadas parciales correspondientes van a tener solución y de ahí que estemos también interesados en caracterizarlo y en buscar una representación integral de $\bar{F}$ válida en todo H y no solamente en un subespacio.

Desde el punto de vista de la homogeneización, la relajación de un funcional se puede ver como un caso particular de Γ-convergencia, (dado un funcional G, la sucesión constante de funcionales definida por $G_n = G$, Γ-converge hacia la regularizada semicontinua inferior de G), concepto introducido por E. De Giorgi y que se encuentra relacionado con el estudio del límite de los puntos en los que se alcanzan los mínimos de una sucesión de funcionales. (Ver [B], [BU1], [BU2], [C S], [DM4], [DG1], [DG2], [DG3]). En lo referente al caso de funcionales energía como el aquí estudiado (para una topología L^2), se encuentra muy ligado a la teoría de Formas de Dirichlet, (ver [FU], [MO]). De hecho, probaremos en el Corolario 1.1.1, que $\bar{F}$ es una forma de Dirichlet.

Respecto a los <u>resultados obtenidos</u> en la Memoria, éstos se encuentra divididos en tres secciones.

Sección 1.1. En esta Sección realizamos el estudio general del problema. El primer resultado de interés que conseguimos es el Teorema 1.1.1 que pasamos a comentar.

Se define el espacio $W_A(\Omega)$ como el dominio de F

$$W_A(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,\infty}(\Omega) : \sqrt{A} \nabla u \in L^2(\Omega)^d \right\}.$$

Se define el espacio V como la clausura en $X \times L^2(\Omega)^d$ de

$$\left\{(u, \sqrt{A}\,\nabla u) : \ u \in W_A(\Omega)\right\}.$$

El Teorema 1.1 proporciona la siguiente caracterización acerca del funcional $\bar{F}$ y del espacio H.

$$\begin{cases} H = \{u \in X : \ \exists\, v \in L^2(\Omega)^d \text{ con } (u,v) \in V\}, \\ \bar{F}(u) = \min\left\{\displaystyle\int_\Omega |\, v\,|^2 : \ (u,v) \in V\right\}, \quad \forall u \in H. \end{cases}$$

Esta caracterización constituye el punto de partida en la búsqueda de una representación integral para el funcional $\bar{F}$.

Un estudio más detallado acerca de la estructura del espacio V conduce al Teorema 1.1.2, que constituye la principal aportación de esa Memoria al problema planteado y que establece la existencia de una aplicación medible $P(x)$, definida en Ω, con valores en el espacio de matrices de dimensión $d \times d$, la cual no depende del espacio X, tal que para casi todo $x \in \Omega$, $P(x)$ es la matriz de una proyección y se verifica

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega |\, Pv\,|^2 \quad \forall\,(u,v) \in V. \tag{0.3}$$

Esto implica en particular que

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega \langle B\,\nabla u, \,\nabla u\rangle \quad \forall\, u \in W_A(\Omega)$$

donde B viene dada por

$$B = \sqrt{A} P \sqrt{A}. \tag{0.4}$$

Para obtener estos resultados imponemos la siguiente hipótesis (H1):

$$\text{(H1)} \qquad \begin{cases} \forall\, u \in L^\infty(\Omega) \text{ existe una sucesión } u_n \in W_A(\Omega) \\ \text{que converge a } u \text{ en casi todo.} \end{cases}$$

La hipótesis (H1) es una acotación superior para la matriz A. Esta hipótesis, se satisface claramente si $A \in L^1(\Omega)^{d\times d}$, y de hecho es también cierta en casos aún más generales.

Respecto a la representación (0.4) del funcional $\bar{F}$ sobre $W_A(\Omega)$ debemos citar el trabajo de L. Carbone y C. Sbordone ([C S]), quienes estudian la Γ−convergencia en el espacio X de una sucesión de funcionales

$$F^\epsilon(u) = \int_\Omega f^\epsilon(x, u, \nabla u)$$

donde las funciones $f^\epsilon(x, s, \xi)$ son funciones de Carathéodory convexas en la variable ξ y satisfaciendo la siguiente hipótesis de crecimiento

$$0 \leq f^\epsilon(x, s, \xi) \leq a^\epsilon(x) \mid \xi \mid^2,$$

con a^ϵ relativamente compacta en $L^1(\Omega)$ con su topología débil. Usando un resultado abstracto debido a G. Dal Maso ([DM1]), llegan a probar la existencia de una subsucesión de F^ϵ que Γ−converge hacia un funcional $\bar{F}$ que sobre $W^{1,\infty}(\Omega)$ admite la representación

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)$$

donde f tiene una estructura análoga a la de las funciones f^ϵ. (Obsérvese que la representación de la Γ−limite está dada solamente sobre $W^{1,\infty}(\Omega)$ y no sobre el espacio X.)

En el caso particular en el cual las funciones f^ϵ son de la forma

$$f^\epsilon(x, s, \xi) = \langle A(x)\xi,\ \xi\rangle,$$

con $A \in L^1(\Omega)^{d\times d}$, se deduce que el funcional F viene dado por una expresión del tipo

$$f(x, s, p) = \langle B(x)\xi,\ \xi\rangle,$$

(no se deduce sin embargo que la matriz B se pueda expresar bajo la forma (0.4)).

Queda abierto el problema de explicitar la matriz P y el espacio H así como saber si la condición (H1) es necesaria o si por el contrario el Teorema 1.1.2 es aún válido cuando no tengamos ninguna acotación superior para la matriz A, como ocurre en el caso unidimensional.

Sección 1.2. Se considera aquí el caso unidimensional donde $\Omega = (0,\ 1)$ y donde la matriz A es ahora una función denotada por a con valores en el intervalo $[0, +\infty]$. No imponemos la hipótesis (H1).

Entre los resultados previos para este problema cabe destacar la tesis de M. M. Hamza [H], quien considera el funcional

$$(0.5) \qquad \tilde{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{(0,\,1)} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 d\lambda & \text{si } u \in C^1((0,\,1)) \\ +\infty & \text{si } u \in L^2((0,\,1)) \setminus C^1((0,\,1)) \end{cases}$$

donde λ es una medida de Radon en $(0,\,1)$. M. M. Hamza demuestra que la forma cuadrática $\tilde{F}$ es cerrable en $L^2((0,\,1))$ (i.e. la envolvente semicontinua inferior de $\tilde{F}$ coincide con $\tilde{F}$ sobre $C^1((0,\,1))$) si y solamente si la medida λ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue ℓ y la función de densidad de λ con respecto a ℓ ($a \in L^1_{loc}((0,\,1))$) es tal que su inversa es localmente integrable en un subconjunto abierto G del intervalo $(0,1)$ y cero fuera de él. Este resultado ha sido extendido a una matriz diagonal de dimensión infinita por S. Albeverio y M. Röckner [A R].

En nuestro caso, definimos un conjunto abierto G mediante

$$G = \{x \in (0,\,1) :\ \exists\, \delta = \delta(x) > 0 \text{ tales que } a^{-1} \in L^1(x-\delta,\, x+\delta)\}.$$

Esto es, G es el mayor subconjunto abierto de $(0,1)$ en el cual a^{-1} es localmente integrable. La representación de $\bar{F}$ en el caso unidimensional fue obenida por P. Marcellini [M] para $u \in H^1((0,\,1))$, $a \in L^\infty((0,\,1))$ y $X = L^2((0,\,1))$, estableciendo la igualdad

$$\bar{F}(u) = \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2,\ \forall u \in H^1((0,\,1)).$$

El resultado principal de la Sección 1.2, Teorema 1.2.1 resuelve completamente el problema que nos habíamos planteado en este Capítulo en el caso unidimensional extendiendo el resultado de P. Marcellini a todo el espacio H y no solamente a $H^1_0((0,\,1))$, proporciona asímismo una caracterización simple del espacio H y elimina la hipótesis $a \in L^\infty((0,\,1))$ permitiendo ahora que la función a pueda tomar valores arbitrarios en el intervalo $[0,\,1]$. Concretamente, el resultado establece

$$(0.6) \qquad \begin{cases} H = \left\{ u \in X \cap W^{1,1}_{loc}(G) \text{ tales que } \displaystyle\int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 < +\infty \right\}, \\ \bar{F}(u) = \displaystyle\int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2,\ \forall u \in H. \end{cases}$$

A diferencia de la demostración de P. Marcellini que es constructiva, en nuestro caso usamos la caracterización de $\bar{F}$ y H dada por el Teorema 1.1.1 y mediante un argumento de dualidad un tanto laborioso, probamos que si $u \in X \cap W^{1,1}_{loc}((0,1))$ y $\sqrt{a}\frac{du}{dx} \in L^2(G)$, entonces $(u, \sqrt{a}\frac{du}{dx}) \in V$.

Sección 1.3. En esta Sección volvemos sobre la hipótesis (H1) demostrando en el Teorema 1.3.1 que se satisface siempre en el caso unidimensional bajo el supuesto de que la función a es finita en casi todo. En la demostración de este resultado se usa el Teorema de Stone-Weierstrass, el cual puede ser usado también en otros casos. (Obsérvese que $W_A(\Omega)$ es un álgebra que contiene las funciones constantes y que por tanto es denso en $C^0(\Omega)$ si y solamente si separa puntos.) La pregunta que surge es saber si este resultado resultaría también cierto en el caso d-dimensional con $d > 1$, en cuyo caso la hipótesis (H1) resultaría redundante. Con el Teorema 1.3.2 probamos que la respuesta es no, estableciendo que si $\Omega = (0,1)^d$, con $d > 1$, entonces existe una función $h \geq 0$ finita en casi todo tal que las únicas funciones $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ con $h\nabla u \in L^1(\Omega)^d$ son las funciones constantes. La diferencia entre el caso unidimensional y el d-dimensional se basa esencialmente en el hecho de que una curva en $\mathbb{R}^d$ para $d > 1$ tiene (al menos en general) medida cero. La idea del contraejemplo consiste en construir la función h de forma que sea no finita en cada punto de Ω con al menos una coordenada racional. Entonces, si una función u es tal que $h\nabla u \in L^1(\Omega)^d$, y x_1, x_2, son dos puntos arbitrarios de Ω, existirá una curva uniendo otros dos puntos tan cercanos como se quiera a x_1, x_2 sobre la cual $\nabla u = 0$ y por tanto $u(x_1) = u(x_2)$.

Para un trabajo posterior nos queda saber si se puede suprimir la hipótesis (H1) para probar el Teorema 1.1.2.

Segunda Parte.

La Segunda Parte se encuentra a su vez dividida en 4 capítulos cuyo objetivo es la homogeneización del problema (0.1). La organización de estos capítulos es la siguiente

Capítulo 2.

En este Capítulo se estudia la existencia y unicidad de solución del problema

$$(0.7) \qquad \begin{cases} -\Delta u + H(x,u,\nabla u) = 0 \ \text{ en } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^d$ y $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory.

Para establecer la existencia, suponemos

i) Para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, la función $H(x,.,\xi)$ es derivable y existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$(0.8) \qquad \frac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \lambda, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

ii) Existen funciones $\omega_0, \omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, crecientes tales que

$$(0.9) \qquad | H(x,s,\xi) | \leq \omega_0(| s |) + \omega(| s |) | \xi |^2 .$$

El resultado de existencia de solución para esta ecuación (Teorema 2.1.1.) es debido a L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel, (ver [B M P]), quienes demuestran además que la solución se encuentra acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ por constantes que dependen sólo de ω_0, ω_1, λ y la medida de Ω.

Respecto a la unicidad, el resultado (Teorema 2.2.1 y Corolario 2.2.1) se debe a G. Barles y F. Murat ([B M]), quienes prueban que si junto con la condición (0.8) se impone la siguiente hipótesis (0.10), (la cual implica (0.9)).

$$(0.10) \qquad \begin{cases} H(x,0,0) \in L^\infty(\Omega) \\ H(x,.,.) \text{ es derivable } e.c.t.\ \Omega, \\ \exists\, \alpha : [0,+\infty) \to [0,+\infty) \text{ creciente, tal que} \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \right| \leq \alpha(| s |)(1+ | \xi |^2), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \ e.c.t.\ \Omega \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s,\xi) \right| \leq \alpha(| s |)(1+ | \xi |), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \ e.c.t.\ \Omega, \end{cases}$$

se tiene un Principio del Máximo: Para todo par de funciones u, v tales que

$$\begin{cases} -\Delta u + H(x,u,\nabla u) \leq 0 \ \text{ en } \Omega, \ \ u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ -\Delta v + H(x,v,\nabla v) \geq 0 \ \text{ en } \Omega, \ \ v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u \leq v \ \text{ en } \partial\Omega, \ (\text{i.e.}(u-v)^+ \in H_0^1(\Omega)), \end{cases}$$

se tiene $u \leq v$ en Ω y por tanto que la solución del problema (0.1) es única.

El por qué dedicar un capítulo a probar con detalle dos Teoremas ya conocidos, se debe al hecho de que las ideas empleadas en la demostración de estos resultados nos serán también de gran ayuda al tratar el Problema de Homogeneización para la ecuación (0.1). Estas ideas consisten fundamentalmente en la utilización como funciones test de determinadas funciones no lineales de las incógnitas y en el caso de la unicidad también de una cambio de variables. Con estas ideas probaremos los Lemas 2.1.1 y 2.2.2 donde obtendremos estimaciones que además de ayudarnos en la demostración de los Teoremas mencionados nos serán de gran utilidad más adelante.

Capítulo 3.

En este Capítulo comenzamos el estudio de los Problemas de Homogeneización en dominios con una estructura compleja, en la cual pueden aparecen gran cantidad de agujeros y que en principio pueden no tener ni una forma ni una disposición determinada. Aquí tratamos el caso lineal ($H = 0$). El marco matemático es el siguiente.

Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\epsilon > 0$ una variable real que toma valores en el conjunto numerable formado por los términos de una sucesión que decrece a cero. Se considera una sucesión de conjuntos cerrados $T^\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ (que para cada ϵ, van a representar una familia de agujeros), y se define la sucesión de conjuntos abiertos $\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T^\epsilon$.

Dada $f \in H^{-1}(\Omega)$, se trata de estudiar el problema límite de la sucesión de problemas

$$(0.11) \qquad \begin{cases} -\Delta u^\epsilon = f & \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon). \end{cases}$$

Obsérvese que este problema tiene una única solución, la cual se encuentra acotada en $H_0^1(\Omega^\epsilon)$ independientemente de ϵ. Puesto que, sin más que prolongar por cero, (lo que haremos en todo el trabajo), las funciones de $H_0^1(\Omega^\epsilon)$ se pueden considerar como pertenecientes a $H_0^1(\Omega)$, por la compacidad de la bola unidad en $H_0^1(\Omega)$ débil se deduce la existencia de una función $u \in H_0^1(\Omega)$ hacia la cual converge en $H_0^1(\Omega)$ débil una subsucesión de u^ϵ. El problema consiste en encontrar la ecuación que verifica la función u. Este problema ha sido tratado ya por varios autores, así, referenciamos el trabajo de D. Cioranescu y F. Murat (ver [C M], también [K M]), trabajo que pasamos a comentar ya que el trabajo llevado a cabo en este Capítulo 3 ha consistido en realizar mejoras del citado trabajo ([C M]).

El trabajo de D. Cioranescu y F. Murat consiste en una adaptación propia del método de la energía introducido por L. Tartar, ([TA1], [TA2]). Se imponen las siguientes hipótesis sobre los agujeros T^ϵ:

Existen una sucesión de funciones w^ϵ y existe una distribución μ que verifican

(H1) $$w^\epsilon \in H^1(\Omega),$$

(H2) $$w^\epsilon = 0 \text{ en } T^\epsilon,$$

(H3) $$w^\epsilon \rightharpoonup 1 \text{ en } H^1(\Omega),$$

(H4) $$\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega),$$

(H5) $$\begin{cases} \text{Para toda sucesión } v^\epsilon \text{ y todo } v \text{ que verifican} \\ \begin{cases} v^\epsilon \rightharpoonup v & \text{en } H^1(\Omega), \\ v^\epsilon = 0 & \text{en } T^\epsilon, \end{cases} \\ \text{y para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ se tiene} \\ \int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla (\varphi v^\epsilon) \to <\mu, \varphi v> . \end{cases}$$

Fácilmente, se prueba que μ es una medida positiva consistente en el límite $*$-débil en el sentido de la medidas de $|\nabla w^\epsilon|^2$. En el trabajo de H. Kacimi y F.Murat ([K M]) se hace ya notar usando un resultado de J. Deny ([D]) que basta en realidad con considerar $\mu \in H^{-1}(\Omega)$. Como ejemplo típico en el cual se verifican estas hipótesis, se puede considerar como T^ϵ la unión de bolas cerradas de radio $\epsilon^{\frac{d}{d-2}}$ cuyos centros coinciden con los de cubos de lado 2ϵ que forman un cuadriculado de $\mathbb{R}^d$ (ver [C M] donde aparecen también otros ejemplos).

Los resultados más importantes conseguidos por D. Cioranescu y F. Murat se enuncian como sigue.

Se considera $f \in H^{-1}(\Omega)$ y u^ϵ la solución de (0.11), entonces la sucesión u^ϵ converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia la función u solución del problema

(0.12) $$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \quad \text{en } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Se tiene también el siguiente resultado de semicontinuidad para la energía.

Si una sucesión $v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$ converge hacia una función v en $H_0^1(\Omega)$ entonces

(0.13) $$\int_\Omega |\nabla v|^2 + \langle \mu, v^2 \rangle \le \liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 .$$

En el caso en que esta desigualdad es una igualdad y $v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, se tiene

$$v^\epsilon - w^\epsilon v \to 0 \ \text{ en } H_0^1(\Omega) \tag{0.14}$$

Este resultado se aplica en particular a la solución u^ϵ de (0.11), para la cual es fácil ver que se tiene la igualdad en (0.13).

El problema de la homogeización de (0.11), ha sido también tratado usando técnicas de Γ-convergencia. Así, H. Attouch y C. Picard (ver [A] y [A P]) estudian el caso periódico para casos similares a los ejemplos que se encuentran en [C M], mientras que en el caso general ha sido realizado por G. Dal Maso y U. Mosco ([DM3], [DM M1], [DM M2]) quienes consideran una sucesión de medidas $\mu^\epsilon \in \mathcal{M}^0$ (ver Apéndice), tales que valen infinito en T^ϵ y cero en Ω^ϵ, de forma que el problema (0.11) se puede escribir en una forma equivalente como

$$\begin{cases} -\Delta u^\epsilon + \mu^\epsilon u^\epsilon = f \text{ en } \Omega, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu^\epsilon), \end{cases}$$

problema que hemos escrito así para poder comparar con el resultado encontrado por D. Cioranescu y F. Murat mostrando que el término extraño que aparece en (0.12) resulta ahora más natural, pero que rigurosamente debe ser escrito (ya que no es cierto en el sentido de las distribuciones) en la forma

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u^\epsilon \nabla v + \int_\Omega u^\epsilon v d\mu^\epsilon = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu^\epsilon) \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu^\epsilon), \end{cases} \tag{0.15}$$

El problema (0.15) es equivalente a un problema de minimización, de forma que el problema de la homogeneización se puede reformular como el estudio de la Γ-convergencia de la sucesión de funcionales

$$J^\epsilon(u^\epsilon) = \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 + \int_\Omega |u^\epsilon|^2 \, d\mu^\epsilon$$

sobre $H_0^1(\Omega)$. G. Dal Maso y U. Mosco prueban con esta técnica, la existencia de una subsucesión de ϵ y de una medida $\mu \in \mathcal{M}^0$ tal que para toda distribución $f \in H^{-1}(\Omega)$, las soluciones de (0.15) convergen hacia la función u solución del problema

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv d\mu = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu^\epsilon) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu), \end{cases} \tag{0.16}$$

Aquí los conjuntos T^ϵ son completamente arbitrarios y a diferencia con el resultado que aparece en [C M] (o el que obtenemos en esta Memoria), la medida μ puede ser infinita en algún subconjunto de Ω lo que obliga a la solución u de (0.16) a anularse en él. El método de la Γ-convergencia necesita que el problema pueda plantearse como un problema de minimización por lo que hace falta que el operador sea simétrico. Además, aquí no se obtiene un resultado de corrector (i.e. una aproximación de ∇u^ϵ en $L^2(\Omega)^d$ fuerte). Recientemente G. Dal Maso y A. Garroni ([DM G]) han conseguido realizar la homogeneización para el problema (0.11) reformulandolo también bajo la forma (0.15) pero aplicando ahora una adaptación original del método de la energía de L. Tartar. De esta forma los mencionados autores han resuelto completamente el problema, no establecen ninguna hipótesis sobre los agujeros, el operador no necesita ser simétrico, el método proporciona un resultado de corrector. (Un primer paso en esta dirección, pero incompleto había sido llevado ya a cabo por S. Finzi Vita y N. A. Tchou, [V T]).

En el caso de ecuaciones de evolución lineales, referenciamos p. ej. [C D M Z], donde bajo las hipótesis establecidas en [C M] se realiza la homogeneización para la ecuación de ondas.

Respecto a los resultados establecidos en esta Memoria, las hipótesis establecidas sobre los agujeros (que serán las que se mantendrán para el estudio del caso no lineal) van a consistir en ciertas mejoras de las introducidas por D. Cioranescu y F. Murat y van a significar como en su caso que los agujeros son suficientemente pequeños de forma que desaparecen en el límite. Concretamente supondremos que existe una sucesión z^ϵ que converge a 1 en $H^1(\Omega)$ débil y tal que $z^\epsilon = 0$ en T^ϵ, (hipótesis (H1), (H2), (H3) de [C M]). Con estas hipótesis probamos el Teorema 3.1 que es nuestra aportación a la homogeneización de (0.11) y que establece la existencia de una sucesión w^ϵ y una medida μ verificando condiciones similares, más generales, a las impuestas por D. Cioranescu y F. Murat, (i.e. en nuestro caso la existencia de w^ϵ y μ no se impone a priori sino que es el resultado del Teorema 3.1). Concretamente, se siguen verificando las hipótesis (H1), (H2), (H3) junto con las propiedades añadidas (comparar con (H4) y (H5))

(P4) $\qquad 0 \leq w^\epsilon \leq 1,$

(P5) $\qquad \mu \in \mathcal{M}_b^0(\Omega),$

$$
\text{(P6)} \qquad \begin{cases} \text{Para toda } v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \text{ y todo } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tales que} \\ v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ en } H_0^1(\Omega), \\ \text{se verifica} \\ v \in L^2(\Omega, d\mu) \text{ y } \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla v^\epsilon \to \int_\Omega v d\mu. \end{cases}
$$

$$
\text{(P7)} \qquad \begin{cases} \text{Para toda } v^\epsilon \in H^1(\Omega), \ v^\epsilon = 0 \text{ en } T^\epsilon, \\ v^\epsilon \rightharpoonup 0, \ H^1(\Omega) \text{ débil}, \\ \text{se verifica} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla v^\epsilon \to 0. \end{cases}
$$

Obsérvese que a diferencia con los resultados mencionados de G. Dal Maso, A. Garroni y U. Mosco, aquí la medida μ es una medida de variación acotada condición que es la que nos dice que en el límite ya no hay agujeros como si puede ocurrir en el caso más general estudiado por ellos.

Con esta sucesión w^ϵ y esta medida μ rehacemos ahora el trabajo llevado a cabo en [C M], (ahora μ está sólo en $\mathcal{M}_b^0(\Omega)$), concretamente realizamos la homogeneización de (0.11). Probamos que se sigue verificando (0.13) y como resultado importante a destacar, probamos que para conseguir el resultado de corrector (0.14), basta en realidad con suponer que $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ver Teorema 3.4 y Corolarios 3.1, 3.2.

En los **Capítulos 4 y 5** realizamos el estudio del problema no lineal (0.1). Respecto a los trabajos existentes con relación a la homogeneización en dominios con agujeros para problemas no lineales, los resultados se refieren a una ecuación del tipo

$$
\text{(0.17)} \qquad \begin{cases} -\,div\ A(x, \nabla u^\epsilon) = f \quad \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon = 0 \quad \text{en } \partial\Omega^\epsilon, \end{cases}
$$

donde la matriz $A(x,.)$ satisface las condiciones habituales de monotonía y crecimiento de orden p. Así para el caso del p-laplaciano en dominios con agujeros distribuidos de forma periódica, similares a los que aparecen en los ejemplos en [C M], el problema ha sido estudiado por H. Attouch, N. Labani y C. Picard ([A P], [L P]). G. Dal Maso y A. Defranceschi ([DM D]), estudian también el problema (0.17), mediante técnicas de Γ-convergencia, en el caso en que A es la subdiferencial de un funcional convexo $\int_\Omega \psi(x, \nabla u)$ donde $\psi(x,.)$ es par y positivamente homogénea de grado p y donde ahora no se hace ninguna hipótesis acerca de los agujeros. Este resultado ha sido generalizado por G. Dal Maso y F. Murat en [DM MU], aquí $A(x,.)$ es homogénea de grado $p-1$ pero no necesariamente la subdiferencial de un funcional convexo, el método empleado sigue las ideas que aparecen en [G DM] y proporciona también un resultado de corrector.

El problema (0.17) ha sido también tratado por el autor [C] utilizando las mismas ideas que las usadas en esta Memoria y bajo hipótesis similares a las utilizadas aquí referentes a que los agujeros desaparecen en el paso al límite. El método es original y permite realizar la homogeneización de (0.17) sin suponer el caracter homogéneo para la función $A(x,.)$, (ver también el trabajo de I. V. Skrypnik [SK]). Para este problema las estimaciones son mucho más fáciles de conseguir que en el caso de la homogeneización de (0.1) que presentamos en esta Memoria y muestran por tanto con más claridad en que consiste el método empleado. El caso general en el que no se impone ninguna hipótesis sobre los agujeros (tal y como aparece en [DM MU]) esperamos poder realizarlo entre el autor y A. Garroni siguiendo también las ideas aparecidas en [DM G].

En lo referente a la homogeneización para el problema (0.1), no existen resultados. Si nos planteamos, no la homogeneización en dominios con agujeros, sino el caso de un problema con coeficientes oscilantes

$$(0.18) \qquad \begin{cases} -\,div\,(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) + H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) = f \text{ en } \Omega, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

con $\alpha I \leq A^\epsilon \leq \beta I$, el problema ha sido resuelto por A. Bensoussan, L. Boccardo y F. Murat ([B B M]). Aquí es el operador quién varía mientras que el dominio permanece fijo. Como veremos en el Capítulo 4, el problema con coeficientes oscilantes y el problema con agujeros expuesto aquí son en realidad muy distintos.

En la homogeneización de (0.1), usando los resultados establecidos en el Capítulo 2, se demuestra que existe una subsucesión de u^ϵ que converge hacia una función u en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil con lo que el problema consiste en encontrar la ecuación que verifica la función u, así como la búsqueda de resultados de corrector. Los agujeros se consideran verificando las propiedades establecidas en el Capítulo 3.

Capítulo 4.

Comenzamos estudiando como caso particular el problema no lineal cuadrático

$$(0.19) \qquad \begin{cases} -\Delta u^\epsilon = f + \gamma \mid \nabla u^\epsilon \mid^2 \quad \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \end{cases}$$

donde $f \in L^\infty(\Omega^\epsilon)$.

Gracias al cambio de variable $v^\epsilon = e^{\gamma u^\epsilon} - 1$, la ecuación (0.19) se convierte en una ecuación semilineal con lo que el problema puede ser tratado con la teoría del Capítulo 3, obteniéndose la siguiente ecuación para la función u límite de la sucesión u^ϵ

$$(0.20) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u + \dfrac{e^{\gamma u} - 1}{\gamma e^{\gamma u}} \mu u = f + \gamma \mid \nabla u \mid^2 \quad \text{en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Ecuación en la que cabe destacar que el término nuevo que aparece tiene una estructura mucho más compleja que el término μu que aparece en el caso lineal. Obsérvese sin embargo que la no linealidad en el gradiente no ha variado y que la medida μ continúa siendo la misma que en el caso lineal.

El método que nos lleva a la ecuación (0.20) nos permite también encontrar el siguiente resultado de corrector

$$u^\epsilon - \frac{1}{\gamma} log(1 + w^\epsilon(e^{\gamma u} - 1)) \to 0 \text{ en } H^1(\Omega).$$

Contrariamente a lo que se habría podido pensar por el estudio del caso lineal (0.11) donde $w^\epsilon u$ es un corrector de la solución. Aquí, en el caso no lineal (0.19) (y más generalmente (0.1)) $w^\epsilon u$ no es un corrector.

Esto, debe contrastarse con el caso donde el problema con agujeros (0.1) es reemplazado por el problema con coeficientes oscilantes (0.18), donde A. Bensoussan, L. Boccardo y F. Murat, prueban que el corrector continúa siendo el mismo que en el caso lineal, lo que nos muestra que los problemas (0.1) y (0.18) son en realidad bastante diferentes. Para (0.18) se prueba que la sucesión $\mid \nabla u^\epsilon \mid^2$ converge en $L^1(\Omega)$ débil, lo cual no ocurre en el caso del problema con agujeros que estamos considerando.

Capítulo 5.

En este Capítulo, tratamos de generalizar los resultados obtenidos para el problema (0.19) al caso más general (0.1). El resultado fundamental que se establece en esta Memoria es el siguiente.

Se considera una sucesión Ω^ϵ de conjuntos abiertos contenidos en un conjunto abierto y acotado fijo Ω verificando las propiedades antes mencionadas (H1), (H2), (H3), (P4),..,(P7).

Se considera $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que para casi todo $x \in \Omega$ la función $H(x,.,.)$ es derivable y se verifica

i) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que se tiene

$$\frac{\partial H(x,s,\xi)}{\partial s} > \lambda \ e.c.t.\ \Omega.\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

ii) Existe una función creciente $\Gamma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, tal que para casi todo $x \in \Omega$, se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,0,0), \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,0,0) \in L^\infty(\Omega) \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s_1,\xi_1) - \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s_2,\xi_2) \right| \\ \leq \Gamma(|\, s_1 \,| + |\, s_2 \,|)\big((1+ |\, \xi_1 \,|^2 + |\, \xi_2 \,|^2) \,|\, s_1 - s_2 \,| \\ + (1+ |\, \xi_1 \,| + |\, \xi_2 \,|) \,|\, \xi_1 - \xi_2 \,|\big) \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s_1,\xi_1) - \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s_2,\xi_2) \right| \\ \leq \Gamma(|\, s_1 \,| + |\, s_2 \,|)\big((1+ |\, \xi_1 \,| + |\, \xi_2 \,|) \,|\, s_1 - s_2 \,| + |\, \xi_1 - \xi_2 \,|\big). \end{cases}$$

(Esta hipótesis es más fuerte que (0.10) y por tanto que (0.9)).

Entonces existe una subsucesión ϵ' de ϵ y existe una función $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

a) Para casi todo $x \in \Omega$ la función $G(x,.)$ es una función continua, (de hecho localmente Holdëriana), creciente y verifica $G(x,0) = 0$.

b) Para todo $s \in \mathbb{R}$ la función $G(.,s) \in L^\infty(\Omega, d\mu)$.

Para toda función $f \in L^\infty(\Omega)$, la solución $u^{\epsilon'}$ del problema (0.1) (correspondiente a ϵ') converge en $H_0^1(\Omega)$ débil, en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte con $1 \leq p < 2$ y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil hacia la función u, única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + H(x,u,\nabla u) = f \ \text{ en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

En realidad, en nuestro trabajo mostraremos que la función f puede ser sustituida por una sucesión $f^\epsilon \in H^{-1}(\Omega^\epsilon) + L^1(\Omega^\epsilon)$ que converja a $f \in H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ en el siguiente sentido, (ahora no está garantizada la existencia de solución para el problema (0.1), pero la supondremos, ya que estamos interesados sólo en el paso al límite).

$$\begin{cases} \forall\, v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon),\ v^\epsilon \rightharpoonup v\ H^1(\Omega),\ v^\epsilon \text{ acotada en } L^\infty(\Omega), \\ \text{se tiene } \langle f^\epsilon, v^\epsilon \rangle \to \langle f, v \rangle, \end{cases}$$

(no es la convergencia fuerte, pero está cerca). En particular, se puede tomar en lugar de $f \in L^\infty(\Omega)$ un término $f(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)$ con $f(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) \leq C(1+ \mid \nabla u^\epsilon \mid^\alpha)$ con $0 \leq \alpha < 2$.

El otro resultado importante, con relación al corrector es el siguiente:

Sea ϵ', la sucesión definida en el Teorema anterior que para simplificar la notación vamos a denotar por ϵ y sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto fijado. Para cada $s \in \mathbb{R}$, se fija una función $u_s \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_s = s$ en K y $\mid u_s \mid \leq s$ en casi todo Ω.

Para $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación $P_n^\epsilon : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ por $P_n^\epsilon(x, s) = \nabla u_{s,n}^\epsilon(x)$, con $u_{s,n}^\epsilon$ solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u_{s,n}^\epsilon + n u_{s,n}^\epsilon + H(x, u_{s,n}^\epsilon, \nabla u_{s,n}^\epsilon) = n u_s \quad \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u_{s,n}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon). \end{cases} \tag{0.21}$$

Entonces, si u^ϵ es la solución del problema (0.1), existen unas constantes C y l que dependen de forma creciente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ tales que:

Para toda función $\psi = \sum_{i=1}^m, c_i \chi_{R_i}$ donde $c_i \in \mathbb{R}$ y $\mid c_i \mid \leq \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$, $1 \leq i \leq m$ y los conjuntos $R_i \subset \Omega$, $1 \leq i \leq m$ forman un recubrimiento de K por conjuntos cerrados tales que para todo $1 \leq i, j \leq m$ con $i \neq j$ se tiene $\mu(R_i \cap R_j) = 0$. Se verifica

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \to \infty} \limsup_{\epsilon \to 0} \int_K \mid \nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x, \psi) \mid^2 \\ &\leq C \mu(K)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_K \mid u - \psi \mid d\mu \right)^{\frac{1}{l}} \end{aligned} \tag{0.22}$$

En realidad, nuestro interés sería poder reemplazar la función ψ por u con lo que tendríamos que $\nabla u + P_n^\epsilon(x, u)$ es una buena aproximación en $L^2(K)^d$ de ∇u^ϵ, esto no es posible ya que no sabemos que la función P_n^ϵ sea de Carathéodory. Sin embargo, para funciones escalonadas se tiene la igualdad $P_n^\epsilon(x,\psi) = \sum_{i=1}^m P_n^\epsilon(x,c_i)\chi_{R_i}$ con lo que todos los términos en (0.22) están bien definidos.

La exposición de estos resultados está organizada como sigue.

En la **Sección 5.1**, consideramos una sucesión u^ϵ solución de (0.1) que converge $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil hacia una función u. Aunque, como los resultados del Capítulo 4 indican, la sucesión $w^\epsilon u$ no es un buen corrector para u^ϵ, veremos, comparando estas dos sucesiones, que la sucesión u^ϵ conserva algunas de las propiedades de la sucesión w^ϵ, (esta es la idea principal del método: comparar con el corrector del caso lineal para ver que propiedades de éste siguen aún verificándose). Así, probamos que u^ϵ converge a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte para $1 \leq p < 2$ y que bajo el supuesto de que la sucesión $|\nabla(u^\epsilon - u)|^2$ converge en el sentido $*$-débil de las medidas, (lo cual es siempre cierto, al menos para una subsucesión), su límite es una medida absolutamente continua con respecto a la medida μ. Esto último nos llevará aplicando el Teorema de Radon-Nikodym a que la función u verifica la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u + E\mu + H(x,u,\nabla u) = f \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

donde $E \in L^\infty(\Omega, d\mu)$. Esto constituye el Teorema 5.1.2.

En la **Sección 5.2**, probamos, bajo las mismas condiciones de la Sección 5.1, la existencia de una sucesión $\bar{u}^\epsilon$ tal que se verifica $\bar{u}^\epsilon u \geq 0$, $|u^\epsilon| \leq |u|$ en casi todo Ω y que $\bar{u}^\epsilon - u^\epsilon$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte, lo que nos va a a permitir establecer que todas las constantes que aparecen en las distintas estimaciones obtenidas en la Sección 5.1 se pueden suponer dependientes solamente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$.

En la **Sección 5.3** consideramos otra sucesión v^ϵ que verifica una ecuación análoga a la de la sucesión u^ϵ con un segundo miembro g y tal que converge hacia una función v en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil. Siguiendo las ideas que aparecen en [B M] y comparando con la sucesión $w^\epsilon(u - v)$ de una forma similar a como se hizo en la Sección 5.1 donde comparábamos u^ϵ con $w^\epsilon u$, llegamos al Lema 5.3.1 que establece la existencia de unas constantes M y l que dependen de forma creciente de $J = max\{\| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \| v \|_{L^\infty(\Omega)}\}$, tales que para toda función $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se tiene

$$\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - v^\epsilon - u + v) |^2$$
$$\leq M \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi d\mu \right)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_\Omega | u - v | d\mu \right)^{\frac{1}{l}} + o(1),$$

donde $o(1)$ es una cantidad que converge a cero con ϵ. Este Lema es esencial, pues de él se va a deducir el resultado de corrector y además nos va a implicar que si la función v verifica una ecuación análoga a la de la función u

$$\begin{cases} -\Delta v + E'\mu + H(x, v, \nabla v) = g \\ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

entonces existen unas constantes N y c positivas que dependen de forma creciente de J, tales que para todo conjunto de Borel $A \subset \Omega$ se tiene

$$\int_A | E - E' | d\mu \leq N\mu(A)^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_\Omega | u - v | d\mu \right)^{\frac{1}{c}},$$

resultado que implica que la función E sólo depende de los valores puntuales de la función u y por tanto que se debe tener la representación $E = G(x, u)$.

En la **Sección 5.4** establecemos (Teorema 5.4.1) que toda función de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es límite de una sucesión de funciones que verifican problemas análogos a (0.1). Este resultado es también básico ya que nos permitirá definir el corrector y definir los valores de la función $G(x, .)$ en todo punto, (en principio, con el Lema 5.3.1, sólo podríamos definir $G(x, s)$ para $s \in \mathbb{R}$ tal que existe una función u límite de problemas del tipo (0.1), verificando $s = u(x)$.)

En la **Sección 5.5** usamos los resultados anteriores, (esencialmente el Lema 5.3.1, el Teorema 5.4.1 y la definición de la función E dada en el Teorema 5.1.2) para probar la expresión de la ecuación límite (Teorema 5.5.1). Aquí definimos la sucesión ϵ' y la función $G(x, s)$.

En la **Sección 5.6** probamos la unicidad del problema límite así como que la función $G(x, .)$ es creciente y verifica $G(x, 0) = 0$, (lo cual nos dice en particular que $G(x, s)s \geq 0$).

Por último, en la **Sección 5.7** se utilizamos el Lema 5.3.1 y el Teorema 5.4.1, para establecer el resultado de corrector anteriormente expuesto.

Entre los **problemas abiertos** destacamos.

- Saber si en el Teorema 5.5.1 es necesario extraer la subsucesión ϵ' (ya extraímos una en el Teorema 3.1) para realizar la homogeneización de (0.1) o si por el contrario la función G es la misma para toda la sucesión.

- Estudiar la dependencia de la función G respecto a la función H y a la sucesión de dominios Ω^ϵ. Obsérvese que en (0.20) la función G es

$$G(x,s) = \frac{e^{\gamma u} - 1}{\gamma e^{\gamma u}},$$

que depende sólo de H pero no de la sucesión Ω^ϵ, ya que es siempre la misma independientemente de μ. Esto parece dificil que ocurra en el caso en G dependa también de la variable x ya que en principio no sera continua con respecto a esta variable, con lo cual no podemos esperar que sea medible para cualquier medida μ.

- Estudiar si existen una sucesión de funciones de Caratheodory $P^\epsilon : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ de forma que el resultado de corrector presentado en (0.22) pueda en realidad escribirse bajo la forma

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \int_K |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P^\epsilon(x,u)|^2 = 0, \ \forall \text{ compacto } K \subset \Omega.$$

- Realizar la homogeneización de (0.1) sin necesidad de establecer ninguna hipótesis acerca de los agujeros, siguiendo las ideas presentadas en [DM MU] y [DM G].

Primera Parte.

Relajación de Funcionales no Coercivos y no Acotados.

Capítulo 1.

Relajación de un Funcional Cuadrático no Coercivo.

En este Capítulo se va a estudiar la relajación del funcional $F(u) = \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle$ en una topología de tipo $L^p(\Omega)$ donde A es una aplicación valuada en las matrices simétricas semidefinidas positivas, no necesariamente coerciva. El problema se encuentra estrechamente relacionado con la minimización de un funcional del tipo $F(u) + \int_\Omega g(u)$, donde g es tal que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $g(u) \geq \alpha \mid u \mid^p$.

1.1. El Problema d-dimensional.

Sea una conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, A una función medible definida en Ω, con valores en el espacio de las matrices simétricas semidefinidas positivas. El objetivo de esta Sección consiste en encontrar una representación integral de la regularizada semicontinua inferior $\bar{F}$ del funcional F definido por

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle & \text{si } u \in W^{1,\infty}(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \in X \setminus W^{1,\infty}(\Omega) \end{cases}$$

donde X representa cualquiera de los espacios $L^p(\Omega)$ o $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ o $C^0(\bar{\Omega})$ o $C^0(\Omega)$.

Nótese que es equivalente considerar la topología fuerte o la topología débil en el espacio X. En realidad F es un funcional convexo y por tanto el epígrafo $epi(\bar{F})$ de $\bar{F}$ es el menor subconjunto convexo y cerrado de $X \times \mathbb{R}$ que contiene a $epi(F)$, recordando que los conjuntos convexos y cerrados son los mismos para la topología fuerte y para la topología débil se tiene la equivalencia.

Definicion 1.1.1. *Sea $W_A(\Omega)$ el espacio definido por*

$$W_A(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,\infty}(\Omega) : \sqrt{A}\,\nabla u \in L^2(\Omega)^d \right\}.$$

Sea H el conjunto definido por

$$H = \left\{ u \in X : \bar{F}(u) < +\infty \right\} = dom(\bar{F}).$$

Estamos también interesados en la caracterización de H ya que va a ser el espacio donde $\bar{F}$ se encuentra definida de forma natural.

Sea V el espacio definido como el cierre en $X \times L^2(\Omega)^d$ del espacio vectorial

$$\left\{ (u, \sqrt{A}\,\nabla u) : u \in W_A(\Omega) \right\},$$

(considerar la topología fuerte o la topología débil en X conduce al mismo resultado por los mismos argumentos que antes).

Sean π_1 y π_2 las proyecciones de $X \times L^2(\Omega)^d$ sobre X y $L^2(\Omega)^d$ respectivamente.

Para todo $u \in \pi_1(V)$ consideramos V_u como el espacio definido por

$$V_u = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d : (u, v) \in V \right\}.$$

Puesto que

$$V_0 = \pi_2((\{0\} \times L^2(\Omega)^d) \cap V)$$

y π_2 es un isomorfismo de $\{0\} \times L^2(\Omega)^d$ sobre $L^2(\Omega)^d$, se deduce que V_0 es un subespacio vectorial, cerrado de $L^2(\Omega)^d$.

Observación 1.1.1. Si $(u, v) \in V$ entonces V_u es el espacio afín $v + V_0$.

El siguiente Teorema conduce a una primera caracterización de H y $\bar{F}$.

Teorema 1.1.1. *Se tiene*

$$H = \pi_1(V) = \{u \in X : \exists\, v \in L^2(\Omega)^d \text{ con } (u,v) \in V\}.$$

Dados $u \in H$ y $\bar{w} \in V_u$, se tiene

$$\bar{F}(u) = min\left\{\int_\Omega |\, w\,|^2 :\ w \in V_u\right\} = min\left\{\int_\Omega |\, \bar{w} + v\,|^2 :\ v \in V_0\right\}. \tag{1.1.1}$$

Demostración. Sea $u \in \pi_1(V)$. Gracias a la definición de V, para todo $w \in V_u$ existe una sucesión $u_n \in W_A(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } X$$
$$\sqrt{A}\,\nabla u_n \to w \text{ en } L^2(\Omega)^d.$$

Por tanto

$$\bar{F}(u) \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\, \sqrt{A}\,\nabla u_n\,|^2 = \int_\Omega |\, w\,|^2 < +\infty$$

lo que prueba que

$$\pi_1(V) \subset H \tag{1.1.2}$$

y que

$$\bar{F}(u) \le \inf\left\{\int_\Omega |\, w\,|^2 :\ (u,w) \in V\right\},\ \forall u \in \pi_1(V). \tag{1.1.3}$$

Inversamente, si $u \in H$ entonces $\bar{F}(u) < +\infty$ y por tanto

$$\bar{F}(u) = \inf\left\{\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\, \sqrt{A}\,\nabla u_n\,|^2 :\ \{u_n\} \subset W_A(\Omega),\ u_n \to u \text{ en } X\right\};$$

de hecho, podemos tomar una sucesión $u_n \in W_A(\Omega)$ tal que

$$\bar{F}(u) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\, \sqrt{A}\,\nabla u_n\,|^2 . \tag{1.1.4}$$

Ahora, la sucesión $\sqrt{A}\,\nabla u_n$ está acotada en $L^2(\Omega)^d$ y por tanto, por el Teorema de Compacidad débil existe $\tilde{w} \in L^2(\Omega)^d$ tal que (extrayendo una subsucesión si es necesario) $\sqrt{A}\,\nabla u_n$ converge a $\tilde{w}$ en $L^2(\Omega)^d$ débil. Esto implica que

$$(u_n, \sqrt{A}\,\nabla u_n) \to (u, \bar{w})\ \ X(\text{fuerte}) \times L^2(\Omega)^d(\text{débil}),$$

i.e. $(u, \tilde{w}) \in V$, lo que prueba la inclusión

$$H \subset \pi_1(V). \tag{1.1.5}$$

De (1.1.2) y (1.1.5) se deduce ahora la primera afirmación del Teorema 1.1.1, i.e.

$$H = \pi_1(V)$$

Usando el hecho de que el funcional $\| w \|^2_{L^2(\Omega)^d}$ es semicontinuo inferiormente en $L^2(\Omega)^d$ débil, se deduce también que

$$\int_\Omega | \tilde{w} |^2 \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega | \sqrt{A} \nabla u_n |^2 = \bar{F}(u),$$

lo que junto con (1.1.3) prueba que

$$\int_\Omega | \tilde{w} |^2 = \min \left\{ \int_\Omega | w |^2 : \ w \in V_u \right\} = \bar{F}(u), \ \forall u \in H,$$

Lo que acaba la demostración del Teorema 1.1.1. ∎

Observación 1.1.2. El mínimo en (1.1.1) se alcanza en un único elemento w_u, ya que $\| w \|^2_{L^2(\Omega)}$ es un funcional estrictamente convexo.

Observación 1.1.3. Hemos probado también que para toda sucesión u_n que satisface (1.1.4) se verifica

$$\| \sqrt{A} \nabla u_n \|_{L^2(\Omega)^d} \to \| w_u \|_{L^2(\Omega)^d};$$

i.e. la convergencia fuerte de $\sqrt{A} \nabla u_n$ hacia w_u en $L^2(\Omega)^d$ fuerte.

Proposicion 1.1.1. *Sea $u \in H$, se considera w_u como el único elemento de V_u tal que $\bar{F}(u) = \int_\Omega | w_u |^2$. Entonces para todo $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$\begin{cases} S(u) \in H \\ \bar{F}(S(u)) = \displaystyle\int_\Omega S'(u)^2 \, | w_u |^2 . \end{cases} \tag{1.1.6}$$

Demostración. Comenzamos notando que el mínimo en (1.1.1) se alcanza en w_u si y sólo si w_u verifica

$$\int_\Omega w_u v = 0, \ \forall v \in V_0. \tag{1.1.7}$$

Fácilmente, se ve que $S(u) \in H$ y que se tiene $S'(u)V_u \subset V_{S(u)}$, lo que en particular implica que $S'(u)w_u \in V_{S(u)}$. Ahora, puesto que la diferencia entre dos elementos de $V_{S(u)}$ pertenece a V_0, se tiene que para todo elemento $v \in V_0$ se verifica

$$S'(u)v = S'(u)(w_u + v) - S'(u)w_u \in V_0.$$

Para probar la representación de $\bar{F}(S(u))$ que se da en (1.1.6) debemos probar (de la misma forma que para w_u) que se tiene

$$\int_\Omega S'(u)w_u v = 0, \ \forall v \in V_0,$$

lo cual es evidente usando que para $v \in V_0$, $S'(u)v \in V_0$ y (1.1.7). ∎

En relación con las formas de Dirichlet se tiene el siguiente resultado. (Vease [FU], [MO]).

Corolario 1.1.1. El funcional $\bar{F}$ es una forma cerrada en X que se anula para las funciones constantes. La Proposición 1.1.1 prueba que de hecho, (para $X = L^2(\Omega)$) $\bar{F}$ es una forma de Dirichlet en Ω.

Corolario 1.1.2. *Para todo $u \in H$, $v \in V_0$ y $R \in L^\infty(\mathbb{R})$ se tiene que $R(u)v \in V_0$.*

Demostración. Sean $u \in H$, $v \in V_0$ y $R \in L^\infty(\mathbb{R})$. Hemos visto en la demostración de la Proposición 1.1.1 que para todo $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, se tiene $S'(u)v \in V_0$. Tomando $S(s) = \int_0^s R(t)dt$ se deduce el Corolario 1.1.2. ∎

El objetivo ahora, va a consistir en realizar un estudio más profundo del espacio V_0 que conducirá a una representación más explícita del funcional $\bar{F}$ que la dada por (1.1.1).

Lema 1.1.1. *Para todo $v \in V_0$ existe una sucesión $u_n \in W_A(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} u_n \to 0 \ en\ L^\infty(\Omega) \\ \sqrt{A}\,\nabla u_n \to v \ en\ L^2(\Omega)^d. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

Demostración. Sea $v \in V_0$, por la definición de V existe una sucesión $z_n \in W_A(\Omega)$ que verifica

$$\begin{cases} z_n \to 0 \text{ en } X \\ \sqrt{A}\,\nabla z_n \to v \text{ en } L^2(\Omega)^d. \end{cases}$$

Sea $k > 0$, puesto que $\langle A \nabla z_n, \nabla z_n \rangle$ es una familia de funciones equiintegrable, existe una constante $\delta_k > 0$ tal que

$$\int_S \langle A \nabla z_n, \nabla z_n \rangle < \frac{1}{k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo conjunto medible $S \subset \Omega$ con $\ell(S) < \delta_k$.

Por otra parte, puesto que la convergencia fuerte en X implica la convergencia en medida existe una subsucesión z_{n_k} de z_n tal que $\ell(S_k) < \delta_k$, donde

$$S_k = \{x \in \Omega : \mid z_{n_k} \mid > 1/k\},$$

podemos también suponer que z_{n_k} satisface la desigualdad

$$\| \sqrt{A} \nabla z_{n_k} - v \|_{L^2(\Omega)^d} < \frac{1}{k}.$$

Definiendo u_k como

$$u_k(x) = T_{\frac{1}{k}}(z_{n_k})(x),$$

la desigualdad $\mid u_k(x) \mid < 1/k$ nos da la convergencia a cero en $L^\infty(\Omega)$ fuerte. Se tiene además

$$\sqrt{A} \nabla u_k = \chi_{\Omega \setminus S_k} \sqrt{A} \nabla z_{n_k} = \sqrt{A} \nabla z_{n_k} - \chi_{S_k} \sqrt{A} \nabla z_{n_k}.$$

Ahora, de que $\ell(S_k) < \delta_k$ se deduce

$$\int_{S_k} \langle A \nabla z_{n_k}, \nabla z_{n_k} \rangle < \frac{1}{k}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \| \sqrt{A} \nabla u_k - v \|_{L^2(\Omega)^d} \leq & \| \sqrt{A} \nabla z_{n_k} - v \|_{L^2(\Omega)^d} \\ & + \| \chi_{S_k} \sqrt{A} \nabla z_{n_k} \|_{L^2(\Omega)^d} < \frac{2}{k}, \end{aligned}$$

lo que prueba el Lema 1.1.1. ∎

Observación 1.1.4. El Lema 1.1.1 prueba que el espacio V_0 no depende de X.

Para continuar con el estudio de V_0 vamos a necesitar establecer la siguiente hypótesis, que basicamente consiste en una acotación superior para la matriz A, la cual se verifica evidentemente si $A \in L^1(\Omega)^{d \times d}$

$$
(\mathrm{H1}) \qquad \begin{cases} \text{Para toda función } u \in L^\infty(\Omega) \text{ existe una sucesión } u_n \in W_A(\Omega) \\ \text{que converge en casi todo hacia } u \end{cases}
$$

Observación 1.1.5. Veremos en la Sección 1.1.3 que en dimension 1, la hipótesis (H1) se verifica siempre bajo el supuesto de que la matriz A es finita en casi todo, (cosa que estamos suponiendo a lo largo de toda esta Sección). Veremos también que este no es el caso para dimensiones superiores a 1. En realidad, en dimension 1 haremos el estudio de $\bar{F}$ suponiendo que la matriz A (que ahora será una función real) puede tomar el valor infinito y no necesitaremos ninguna acotación para la matriz A.

Lema 1.1.2. *Supongamos que se verifica (H1) y sea $v \in V_0$. Entonces, para toda función r medible, definida en Ω y con valores en $\mathbb{R}$ tal que $rv \in L^2(\Omega)^d$, se verifica que $rv \in V_0$.*

Demostración. Si $r \in W_A(\Omega)$, entonces el Corolario 1.1.1 nos dice que $rv \in V_0$ tomando $u = r$ y S la función identidad en $\mathbb{R}$.

Si ahora $r \in L^\infty(\Omega)$, entonces usando $(H1)$, existe una sucesión $\bar{r}_n \in W_A(\Omega)$ que converge a r en casi todo. Tomando $m = \| r \|_{L^\infty(\Omega)}$ y $r_n = T_m(\bar{r}_n)$ se deduce de lo ya probado que $r_n v \in V_0$ y que (gracias al Teorema de Convergencia Dominada) converge hacia rv en $L^2(\Omega)^d$ fuerte. Puesto que V_0 es un subespacio cerrado en $L^2(\Omega)^d$, se deduce que $rv \in V_0$.

En el caso en que r es sólo medible y $rv \in L^2(\Omega^d)$, se concluye igual que antes tomando $r_n \in L^\infty(\Omega)$ tales que para casi todo $x \in \Omega$ se tenga

$$
r_n(x) \to r(x), \quad | r_n(x) | \leq | r(x) |
$$

y usando el Teorema de Convergencia Dominada como antes. ∎

Observación 1.1.6. De la demostración del Lema 1.1.2, se puede pensar en reemplazar la hipótesis (H1) por la hipótesis, en aparencia más general, de la densidad en medida del conjunto de funciones de la forma $R(u)$, donde $u \in H$ y $R \in L^\infty(\Omega)$. Esta hipótesis es sin embargo equivalente a la hipótesis (H1) ya que para toda función $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y para toda función $u \in W_A(\Omega)$ se tiene que $S(u) \in W_A(\Omega)$ y de aquí es fácil construir para toda función $u \in H$ y para toda función $R \in L^\infty(\Omega)$ una sucesión de funciones de $W_A(\Omega)$ que convergen a $R(u)$ en medida.

Lemma 1.1.3. *Supongamos que se verifica la hipótesis (H1). Si $v \in V_0$, entonces la función $\tilde{v}(x) = N(v(x))$ pertenece también a V_0.*

Donde $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es la función definida por

$$N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \dfrac{\lambda}{|\lambda|} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Demostración. Basta aplicar el Lema 1.1.2 con

$$r = \frac{1}{|v|}\chi_{v\neq 0}. \quad \blacksquare$$

Definición 1.1.2. *Sea $\{w_n\}$ un conjunto numerable y denso en V_0 con la topología de $L^2(\Omega)^d$. Para casi todo $x \in \Omega$ se considera*

$$T(x) = span(\{w_n(x)\}),$$

(i.e. $T(x)$ es el subsepacio vectorial de $\mathbb{R}^d$ generado por el conjunto $\{w_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$). Se definen también las matrices $Q(x)$ como la proyección de $\mathbb{R}^d$ sobre $T(x)$ y $P(x) = I - Q(x)$ como la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^d$ sobre $T(x)^\perp$.

Observación 1.1.7. El espacio $T(x)$ se encuentra definido para todo punto $x \in \Omega$ que sea un punto de Lebesgue para todas las funciones w_n, $n \in \mathbb{N}$, y por tanto se encuentra definido en casi todo Ω. Lo mismo será cierto para las matrices $P(x)$ y $Q(x)$. En realidad lo que querríamos, sería definir $T(x)$ como el subespacio vectorial de R^d generado por las funciones $w(x)$ cuando $w \in V_0$. Desafortunadamente esta definición no es correcta ya que debemos excluir los puntos x tales que existe una función $w \in V_0$ para la cual x no sea un punto de Lebesgue lo que significa excluir una unión no numerable de conjuntos de medida nula que en principio no tiene por qué tener medida nula (ni tan siquiera por qué ser medible). Esta es la razón de la introducción del conjunto numerable $\{w_n\}$.

Probaremos que la multiaplicación $T(x)$ no depende del conjunto numerable $\{w_n\}$ (Lema 1.1.4) y que las matrices $P(x)$ y $Q(x)$ pertenecen a $L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ (ver comentario después del Lema 1.1.6). Obsérvese también que $T(x)$, $P(x)$ y $Q(x)$ no dependen de X, ya que V_0 no depende de X.

La multiaplicación $T(x)$ y la matriz P nos van a carecterizar el espacio V_0 y el funcional $\bar{F}$ (ver Teorema 1.1.2).

Lema 1.1.4. *La aplicación T no depende del conjunto numerable $\{w_n\}$ salvo en un conjunto de medida nula.*

Demostración. Sea $\{w'_n\}$ otro conjunto numerable y denso en V_0 y sea la aplicación T' definida como

$$T'(x) = span(\{w'_n(x)\}).$$

Para toda función w'_k existe una subsucesión $\{w_{k_n}\}$ del conjunto numerable $\{w_n\}$ que converge puntualmente a w'_k excepto en un conjunto Z'_k de medida nula, lo que implica que si $x \notin Z'_k$, $w'_k(x) \in T(x)$, ya que $T(x)$ es un espacio de dimensión finita y por tanto cerrado y por tanto que se tiene $T'(x) \subset T(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus Z'$, donde $Z' = \cup_{k=1}^{\infty} Z'_k$ es un conjunto de medida nula. De la misma forma existirá un conjunto Z de medida nula tal que $T(x) \subset T'(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus Z$. Esto es, se tiene la igualdad $T(x) = T'(x)$ para todo punto x que no pertenezca al conjunto de medida nula $Z \cup Z'$. ∎

Lema 1.1.5. *Supongamos que se verifica la hipótesis (H1). Entonces existen funciones $s_1, \cdots, s_d \in V_0$ y una función medible $q : \Omega \to \{0, \cdots, d\}$, tal que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene*

i) $s_k(x) = 0$ *para todo* $k > q(x)$

ii) $\{s_1(x), \cdots, s_q(x)\}$ *es una base ortonormal de* $T(x)$

Demostración. Sea $\{w_n\}$ el conjunto que define la multiaplicación T. Se define

$$y_1 = N(w_1)$$

y para todo $n > 1$ se toma

$$y_n = N\left(w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle w_n, y_i \rangle y_i\right)$$

donde N se encuentra definida por (1.1.10).

Entonces, para casi todo $x \in \Omega$

$$span(\{y_n(x)\}) = span(\{w_n(x)\})$$

y $\{y_n(x): \ y_n(x) \neq 0\}$ es una base ortonormal de $T(x)$.

En la definición de y_n, cada término de la forma $\langle w_n, y_i \rangle y_i$ pertenece a $L^2(\Omega)^d$ ya que $| \langle w_n, y_i \rangle y_i | \leq | w_n |$ en casi todo, con lo que usando los Lemas 1.1.2 y 1.1.3 se puede probar por inducción que $y_n \in V_0$.

Vamos ahora a reordenar los conjuntos $y_i(x)$ en casi todo $x \in \Omega$ de forma que los primeros elementos sean no nulos. Con esta idea, definimos K_n^i, con $i \in \{1, \cdots, d\}$, $n \in \mathbb{N}$ como el conjunto de puntos $x \in \Omega$ para los cuales $y_n(x)$ es exactamente el i-ésimo elemento no nulo de la sucesión $\{y_n(x)\}$.

Las funciones K_n^i son medibles. Para verlo, sea S_j el conjunto medible $S_j = \{x \in \Omega : y_j(x) \neq 0\}$. Entonces la función l_n definida por

$$l_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{S_j}(x)$$

es medible y nos da el número de enteros $j \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $y_j(x)$ es no nulo. Nótese que

$$l_n(x) \in \{0, \cdots, d\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para casi todo $x \in \Omega$.

Para $i \in \{1, \cdots, d\}$ sea C_n^i el conjunto medible definido por

$$C_n^i = \{x \in \Omega : \ l_n(x) = i\}.$$

El conjunto $C_n^i \cap S_n$ es medible y coincide con K_n^i. Nótese que

$$K_n^i \cap K_m^i = \emptyset \ \text{ para } n \neq m.$$

Para $1 \leq i \leq d$ se considera la función s_i definida por

$$s_i = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \chi_{K_n^i}.$$

Las funciones $s_1, \cdots, s_d$ satisfacen claramente los requerimentos (i) y (ii) del Lema 1.1.5. Falta probar que para todo i con $1 \leq i \leq d$, $s_i \in V_0$. Para $m \in \mathbb{N}$, se define

$$s_i^m(x) = \sum_{n=1}^{m} y_n(x)\chi_{K_n^i}(x),$$

el Lema 1.1.2 implica que $s_i^m \in V_0$ y se tiene

$$\| s_i - s_i^m \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\Omega \sum_{n=m+1}^{\infty} \chi_{K_n^i}(x) = \ell\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} K_n^i\right) \to 0$$

cuando m tiende a infinito, por ser Ω acotado. Esto significa que s_i es límite en $L^2(\Omega)$ de funciones de V_0 y por tanto se encuentra en V_0. ∎

Lema 1.1.6. *Supongamos que se verifica (H1). Entonces, para toda función $v \in L^2(\Omega)^d$, la función Qv pertenece a V_0.*

Esto prueba en particular que Q y por tanto P son son funciones medibles ya que se tiene que $Qe \in V_0$ para todo vector $e \in \mathbb{R}^d$. De hecho P y Q pertenecen a $L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ ya que

$$| P(x) | = \sup\left\{P(x)v : \ v \in \mathbb{R}^d, \ | v | \leq 1\right\} \leq 1, \ \text{e.c.t.} x \in \Omega.$$

Demostración. Se tiene

$$Qv = \sum_{i=1}^{d} \langle v, \ s_i \rangle s_i.$$

Puesto que $\langle v, \ s_i\rangle s_i \in L^2(\Omega)^d$, el Lemma 1.2 implica que $\langle v, \ s_i\rangle s_i$ y por tanto Qv pertenecen a V_0. ∎

Estamos ahora en condiciones de dar una caracterización del espacio V_0 y una representación de $\bar{F}$.

Teorema 1.1.2. *Supongamos que se verifica (H1). El espacio V_0 está caracterizado por*

(1.1.11) $$V_0 = \left\{v \in L^2(\Omega)^d : \ v(x) \in T(x) \ e.c.t. \ x \in \Omega\right\}.$$

Si $u \in H$ entonces

(1.1.12) $$\bar{F}(u) = \int_\Omega | Pv |^2 \ \ \forall v \ \text{tal que} \ (u,v) \in V.$$

Observación 1.1.8. Si v_1, v_2 son tales que $(u,v_1),(u,v_2)\in V$, entonces

$$Pv_1 = Pv_2.$$

En realidad, se verifica que $v_1 - v_2 \in V_0$ y por tanto $Q(v_1-v_2) = v_1 - v_2$, con lo que se tiene

$$Pv_1 = (I-Q)v_1 = (I-Q)v_2 = Pv_2.$$

Observación 1.1.9. En el caso en que $u \in W_A(\Omega)$ podemos tomar $v = \sqrt{A}\,\nabla u$ en (1.1.12) con lo que usando la simetría de la matriz P y $\sqrt{A}$, así como la igualdad $P^2 = P$, se tiene

$$| P\sqrt{A}\,\nabla u |^2 = \langle \sqrt{A}P\sqrt{A}\,\nabla u, \nabla u\rangle, \ \forall u \in W_A(\Omega).$$

Se tiene por tanto la siguiente representación integral de $\bar{F}(u)$

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega \langle B\,\nabla u, \nabla u\rangle \quad \text{con } B = \sqrt{A}P\sqrt{A}. \tag{1.1.13}$$

Demostración. Se define el conjunto S como

$$S = \{v \in L^2(\Omega)^d : \ v(x) \in T(x) \text{ e.c.t. } x \in \Omega\}$$

el cual pretendemos probar que coincide con el espacio V_0.

Del Lema 1.1.6, se deduce que

$$S = QS \subset V_0.$$

Reciprocamente, si $v \in V_0$, entonces existe una subsucesión w_{k_n} del conjunto numerable $\{w_n\}$ considerado en la Definición 1.1.2 que converge a v en $L^2(\Omega)^d$ fuerte y en casi todo. Como el espacio $T(x)$ es cerrado, se deduce que $v(x) \in T(x)$, lo que prueba la primera parte del Teorema.

Sean ahora $u \in H$ y $v \in L^2(\Omega)^d$ tales que $(u,v) \in V$. De (1.1.1) se tiene

$$\bar{F}(u) = \min\left\{\int_\Omega | v + w |^2 : \ w \in V_0\right\}.$$

Pero, para todo elemento $w \in V_0$ se verifica

$$| v - Qv | \leq | v + w | \ \ \textit{e.c.t. } x \in \Omega$$

gracias a la definición de Q. Como $-Qv \in V_0$, se tiene

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega | v - Qv |^2 = \int_\Omega | Pv |^2,$$

lo que termina la demostración del Teorema 1.1.2 ∎

Terminamos la Sección con el Teorema 1.1.3, el cual es bien conocido en la Teoría de formas de Dirichlet y que da una caracterización acerca de cuando se verifica la igualdad $V_0 = \{0\}$. (i.e. cuando P es la matriz identidad y por tanto cuando el funcional $\bar{F}$ coincide con F en $W_A(\Omega)$.)

Teorema 1.1.3. *Se considera el operador lineal no acotado*

$$\Phi : W_A(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^d$$

definido como

$$\Phi u = \sqrt{A}\,\nabla u.$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $V_0 = \{0\}$.

b) Φ *es un operador cerrable.*

c) El dominio del operador traspuesto de Φ, $D(\Phi^*)$ *es denso en* $L^2(\Omega)^d$.

Demostración. (Ver [G] p.p. 54-57, [K] p.p. 164-171) Como consecuencia del Lema 1.1.1, V_0 es independiente del espacio X, y por tanto, lo podemos definir como el conjunto de funciones $v \in L^2(\Omega)^d$ tales que existe una sucesión de funciones $u_n \in W_A(\Omega)$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \to 0, \text{ en } L^2(\Omega), \\ \sqrt{A}\,\nabla u_n \to v \text{ en } L^2(\Omega)^d. \end{array} \right. \tag{1.1.14}$$

Por tanto, si $V_0 = \{0\}$, se deduce que para toda función $v \in L^2(\Omega)^d$ tal que existe una sucesión $u_n \in W_A(\Omega)$ verificando (1.1.14) se tiene que $v = 0$, lo que es equivalente a que el operador Φ es cerrable. i.e. se tiene que la igualdad a) es equivalente a b).

Ahora, para probar que b) is equivalente a c) hacemos notar que la hipótesis $(H1)$ implica que $W_A(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ lo que permite definir Φ^* y gracias a que $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Omega)^d$ son ambos espacios reflexivos, se tiene que Φ es cerrable si y sólo si $D(\Phi^*)$ es denso en $L^2(\Omega)^d$. ∎

1.2. El Problema unidimensional.

En el caso unidimensional vamos a caracterizar completamente el espacio H y la matriz P. Suponemos en esta Sección que Ω es el intervalo $(0, 1)$ y que a es una función medible, definida en $(0, 1)$ con valores en el intervalo $[0, +\infty]$. Nótese que esta hipótesis es más general que la establecida en la Sección 1.1, la cual implicaría que la función a es finita en casi todo $(0, 1)$ mientras que aquí admitimos el caso en que $a(x) = +\infty$ en un subconjunto de $(0, 1)$ con medida de Lebesgue estrictamente positiva. Como es habitual, se establecen los convenios (para expresiones valuadas en $[0, +\infty]$)

$$0(+\infty) = 0, \quad \frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = +\infty.$$

En esta Sección no suponemos que se satisface la hipótesis (H1). Probaremos de hecho en la Sección 1.3 que la hipótesis (H1) se satisface siempre bajo el supuesto de que la función a es finita en casi todo $(0, 1)$.

Definición 1.2.1. *Sea G el conjunto definido por*

$$G = \{x \in (0, 1) : \; \exists\, \delta(x) > 0 \text{ tal que } 1/a \in L^1(x - \delta(x), x + \delta(x))\}.$$

Sea S el conjunto medible definido por

$$S = \{x \in (0, 1) : \; a(x) < +\infty\}.$$

Observación 1.2.1. Nótese que G es un conjunto abierto y que $1/a \in L^1_{loc}(G)$, de hecho G se puede definir como el mayor conjunto abierto sobre el cual la función $1/a$ es localmente integrable.

Teorema 1.2.1. *El espacio H está caracterizado por*

$$H = \left\{ u \in X \cap W^{1,1}_{loc}(G) : \; \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 < +\infty \right\}$$

y para toda función $u \in H$, $\bar{F}(u)$ se puede calcular como

$$\bar{F}(u) = \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2, \tag{1.2.1}$$

Demostración. Supongamos que $\ell(S) > 0$. Si no, la función $a(x) = +\infty$ en casi todo $(0, 1)$ y el Teorema 1.2.1 es trivial: $\bar{F}(u) = +\infty$ para toda función $u \in X$ no constante y $\bar{F}(u) = 0$ si u es constante.

Se considera el espacio $\mathcal{H}$ definido como

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in X \cap W^{1,1}_{loc}(G) : \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 < +\infty \right\}$$

así como el funcional $\mathcal{F}$ definido sobre X por

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 & \text{si } u \in \mathcal{H} \\ +\infty & \text{si } u \in X \setminus \mathcal{H}. \end{cases}$$

Vamos a probar que el funcional $\mathcal{F}$ es semicontinuo inferiormente. Una vez lo hayamos hecho, la desigualdad

$$\mathcal{F}(u) \leq F(u), \ \forall u \in X,$$

implicará la desigualdad

$$\mathcal{F}(u) \leq \bar{F}(u), \ \forall u \in X$$

y por tanto

$$H \subset \mathcal{H} \tag{1.2.2}$$

y

$$\int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 \leq \bar{F}(u), \ \forall u \in H. \tag{1.2.3}$$

Para probar que $\mathcal{F}$ es semicontinua inferiormente, consideremos una sucesión u_n convergiendo hacia u en X fuerte. Si $\mathcal{F}(u_n)$ converge a infinito entonces claramente se tiene

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_n \mathcal{F}(u_n).$$

Si no, entonces existe una subsucesión u_{n_k} de u_n tal que

$$\lim_k \mathcal{F}(u_{n_k}) = \liminf_n \mathcal{F}(u_n) < +\infty,$$

y por tanto, para k suficientemente grande, se tiene que $u_{n_k} \in \mathcal{H}$ y puesto que

$$\lim_{k} \int_G a \left| \frac{du_{n_k}}{dx} \right|^2 < +\infty$$

podemos suponer (extrayendo otra subsucesión si es necesario) que existe $v \in L^2(G)$ tal que

$$\sqrt{a}\, \frac{du_{n_k}}{dx} \rightharpoonup v, \ L^2(G) \text{ débil.}$$

Gracias a la definición de G, se verifica que $1/\sqrt{a} \in L^2_{loc}(G)$ y por tanto, dada $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, se tiene que

$$\frac{\varphi}{\sqrt{a}} \in L^2(G),$$

por lo que se tiene

$$\int_G \frac{du_{n_k}}{dx}\, \varphi = \int_G \sqrt{a}\, \frac{du_{n_k}}{dx}\, \frac{\varphi}{\sqrt{a}} \to \int_G v \frac{\varphi}{\sqrt{a}}.$$

Por otra parte, puesto que u_{n_k} converge a u en X y por tanto en el sentido de las distribuciones en $(0,\, 1)$, y en particular en G, se tendrá también que

$$\int_G \frac{du_{n_k}}{dx}\, \varphi \to \langle \frac{du}{dx},\, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(G),\mathcal{D}(G)},$$

lo que implica que

$$\frac{du}{dx} = \frac{v}{\sqrt{a}} \in L^1_{loc}(G).$$

Como $v \in L^2(G)$ y $1/\sqrt{a} \in L^2_{loc}(G)$, esto implica que $u \in W^{1,1}_{loc}(G)$ y gracias a que se tiene $\int_G a \mid \frac{du}{dx} \mid^2 < +\infty$; se deduce que la función $u \in \mathcal{H}$.

Ahora, puesto que la norma $\| \, . \, \|_{L^2(G)}$ es semicontinua inferiormente en $L^2(G)$ débil se tiene

$$\mathcal{F}(u) = \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 = \int_G \mid v \mid^2$$
$$\leq \lim_{k} \int_G a \left| \frac{du_{n_k}}{dx} \right|^2 = \liminf_{n} \mathcal{F}(u_n),$$

lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es semicontinua inferiormente.

Para completar la demostración del Teorema, basta probar que para todo $u \in \mathcal{H}$, el par

$$(u,\, \sqrt{a}\, \frac{du}{dx} \chi_G)$$

pertenece a V. Se deducirá entonces por el Teorema 1.1.1 (que es fácil ver que también es válido cuando la función a toma el valor infinito) que la función $u \in H$ y que

$$\begin{aligned} \bar{F}(u) &= \min\left\{\int_0^1 \mid v\mid^2 :\ (u, v) \in V\right\} \\ &\leq \int_G a\left|\frac{du}{dx}\right|^2 = \mathcal{F}(u) < +\infty,\ \forall u \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Por tanto $\mathcal{H} \subset H$ lo que combinado con (1.2.2) dará la igualdad $\mathcal{H} = H$. Finalmente, las desigualdades (1.2.3) y (1.2.4) dan ahora (1.2.1).

Nos queda por tanto probar que

$$u \in \mathcal{H} \Rightarrow (u, \sqrt{a}\frac{du}{dx}\chi_G) \in V.$$

Por la Definición 1.1.1, V es la clausura en $E = X \times L^2(0, 1)$ del conjunto

$$\Gamma = \left\{(u,\ \sqrt{a}\ \frac{du}{dx}) :\ u \in W_a(0, 1)\right\}$$

y por tanto

$$V =^{\perp} (\Gamma^{\perp}),$$

donde

$$\Gamma^{\perp} = \{\kappa \in E' :\ \langle \kappa, \gamma\rangle_{E',E} = 0,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

y

$$^{\perp}(\Gamma^{\perp}) = \left\{\delta \in E :\ \langle \kappa, \delta\rangle_{E',E} = 0,\ \forall \kappa \in \Gamma^{\perp}\right\}.$$

El estudio de $\Gamma^{\perp}$ es bastante largo, por lo que lo dividiremos en varios pasos, cada uno de los cuales constituirá un pequeño lema.

Paso 1. Nótese que

$$(\mu,\ w) \in \Gamma^{\perp} \iff \left\{\begin{array}{l} \mu \in X',\ w \in L^2(0, 1)\ \text{ con} \\ \displaystyle\int_{[0,1]} u d\mu + \int_0^1 w\sqrt{a}\frac{du}{dx} = 0,\ \ \forall u \in W_a(0, 1). \end{array}\right. \tag{1.2.5}$$

Donde hemos escrito $\langle \mu,\ u\rangle_{X',X} = \int_{[0,1]} u d\mu$, lo cual está justificado por el hecho de que X' se encuentra siempre contenido en el espacio de medidas de Radon en el intervalo $[0, 1]$.

Paso 2. La función $\sqrt{a}w\chi_S$ pertenece a $L^\infty(0,\,1)$ y para toda función $r \in L^1(0,\,1)$ se tiene

$$\int_{[0,1]} \left(\int_0^x r\chi_S \right) d\mu + \int_S \sqrt{a}wr = 0. \tag{1.2.6}$$

Demostración.- Se consideran los conjuntos

$$S^n = \{x \in (0,\,1) : \; a(x) < n\}.$$

Dada $\hat{r} \in L^\infty(0,\,1)$, se toma la sucesión u_n definida por

$$u_n(x) = \int_0^x sgn(w) \mid \hat{r} \mid \chi_{S^n}$$

donde $sgn(w)$ es la función que da el signo de w. La función $u_n \in W_a(0,\,1)$ con lo que de (1.2.5) se tiene:

$$\int_{[0,1]} \left(\int_0^x sgn(w) \mid \hat{r} \mid \chi_{S^n} \right) d\mu + \int_{S^n} \sqrt{a} \mid w\hat{r} \mid = 0.$$

Por tanto

$$\int_{S^n} \sqrt{a} \mid w\hat{r} \mid \leq \parallel \mu \parallel \int_0^1 \mid \hat{r} \mid,$$

donde $\parallel \mu \parallel = \int_{[0,1]} d \mid \mu \mid$ denota la variación total de la medida μ.

Gracias al Teorema de Convergencia Monótona, se deduce que la función $\sqrt{a}w\hat{r}$ es integrable en S y satisface

$$\left| \int_S \sqrt{a}w\hat{r} \right| \leq \parallel \mu \parallel \int_0^1 \mid \hat{r} \mid.$$

Esta desigualdad implica que el funcional

$$\hat{r} \to \int_S \sqrt{a}w\hat{r}$$

se puede extender por densidad a un funcional linear y continuo sobre $L^1(0,\,1)$ y por tanto que $\sqrt{a}w\chi_S \in L^\infty(0,\,1)$.

Se considera ahora $\hat{r} \in L^\infty(0,\,1)$ y

$$u_n = \int_0^x \hat{r}\chi_{S^n}.$$

De (1.2.5) se deduce

$$\int_{[0,1]} \left(\int_0^x \hat{r} \chi_{S^n} \right) d\mu + \int_{S^n} \sqrt{a} w \hat{r} = 0. \tag{1.2.7}$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada al segundo sumando de (1.2.7) se tiene

$$\int_{S^n} \sqrt{a} w \hat{r} \to \int_S \sqrt{a} w \hat{r},$$

mientras que para el primer sumando se tiene

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \hat{r} \chi_{S^n} - \int_0^x \hat{r} \chi_S \right| \leq \| \hat{r} \|_{L^\infty(0,1)} \ell(S \setminus S^n),$$

lo que implica que la sucesión u_n converge hacia la función $u = \int_0^x \hat{r} \chi_S$ en $C^0([0, 1])$. Esto nos permite pasar al límite en (1.2.7) obteniendo (1.2.6) para $\hat{r} \in L^\infty(0, 1)$.

Si ahora $r \in L^1(0, 1)$, entonces, tomando $\hat{r} = T_n(r)$ en (1.2.6) y usando

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x r \chi_S - \int_0^x T_n(r) \chi_S \right| \leq \int_0^1 | r - T_n(r) | \to 0$$

se deduce que (1.2.6) es también cierto para $r \in L^1(0, 1)$.

Paso 3. Sea ω la distribución definida en (0, 1) por

$$\langle \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} = \int_S \sqrt{a} w \varphi - \int_{[0,1]} \left(\int_0^x \varphi \chi_{S^c} \right) d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, 1), \tag{1.2.8}$$

donde estamos denotando por S^c al conjunto complementario de S, i.e.

$$S^c = \{x \in (0, 1) : \ a(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\omega \in BV(0, 1)$ (espacio de las funciones de variación acotada en (0, 1)) y se verifica

$$\frac{d\omega}{dx} = \mu \ \text{ y } \ \omega \chi_S = \sqrt{a} w \chi_S. \tag{1.2.9}$$

<u>Demostración.</u>- La distribución ω se encuentra bien definida por (1.2.8). En realidad, puesto que el funcional $\varphi \to \langle \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)}$ es continuo para la topología de $L^1(0, 1)$, se deduce que $\omega \in L^\infty(0, 1)$ y usando en (1.2.8) como función test $\varphi = \phi \psi_n$ donde $\phi \in \mathcal{D}(0, 1)$ y donde $\psi_n \in \mathcal{D}(0, 1)$ aproxima a χ_S in $L^1(0, 1)$, se obtiene

$$\omega \chi_S = \sqrt{a} w \chi_S.$$

Si calculamos ahora la derivada de ω en el sentido de las distribuciones, entonces para $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$, usando (1.2.8) y (1.2.6) se tiene

$$\begin{aligned}\langle \frac{d\omega}{dx}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(0,1),\mathcal{D}(0,1)} &= -\langle \omega, \frac{d\varphi}{dx}\rangle_{\mathcal{D}'(0,1),\mathcal{D}(0,1)}\\ &= -\int_S \sqrt{a}w\frac{d\varphi}{dx} + \int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{d\varphi}{dx}\chi_{S^c}\right)d\mu\\ &= \int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{d\varphi}{dx}\chi_S\right)d\mu + \int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{d\varphi}{dx}\chi_{S^c}\right)d\mu\\ &= \int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{d\varphi}{dx}\right)d\mu = \int_{[0,1]}\varphi d\mu,\end{aligned}$$

lo que significa que $\omega \in BV(0, 1)$, y que $\frac{d\omega}{dx} = \mu$.

A fin de evitar los problemas que puede plantear el hecho de que ω se encuentre definido solamente en casi todo $(0, 1)$, vamos a precisar los valores de $\omega(x)$ tomando para todo $x \in [0, 1]$

$$\omega(x) = \omega_0 + \mu((0, x]),$$

($\omega_0 = \omega(0)$ constante), lo que nos define ω como una función continua a la derecha.

Paso 4. Se tiene

(1.2.10) $$\int_G \frac{|\omega|^2}{a} < +\infty.$$

<u>Demostración.</u>- Obeservemos que a es estrictamente positiva y finita en casi todo en $G \cap S$ y que por tanto, usando (2.9), se tiene

$$\frac{\omega}{\sqrt{a}}\chi_S = w\chi_S \text{ en } G,$$

lo que implica que el primer miembro se encuentra en $L^2(G)$, ya que w lo está. Como por otra parte, la función $1/a$ se anula fuera de S, se tiene (1.2.10).

En lo que sigue, vamos a describir el comportamiento de la función ω fuera de G, para lo que se considera

(1.2.11) $$G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i).$$

la descomposición de G como unión de sus componentes conexas.

Paso 5. Sea $x_0 \in [0, 1) \setminus G$. Entonces se verifica que o bien $\omega(x_0) = 0$ o bien $x_0 = \alpha_i$ para algún i; en este último caso, existe $\delta > 0$, que depende de α_i tal que $1/a \in L^1(\alpha_i, \alpha_i + \delta)$.

Si $x_0 \in (0, 1] \setminus G$ entonces, o bien $\omega(x_0-) = 0$ (el límite izquierdo) o bien $x_0 = \beta_i$ para i; en este último caso existe $\delta > 0$, que depende de i tal que $1/a \in L^1(\beta_i - \delta, \beta_i)$.

Demostración.- Supongamos que $\omega(x_0) \neq 0$. Entonces, puesto que ω es continua a la derecha, existen $\gamma > 0$ y $\delta > 0$ (que dependen de x_0) tales que

$$| \omega(x) | > \gamma, \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). \tag{1.2.12}$$

De (1.2.9) y (1.2.12) se tiene

$$\gamma \chi_S \leq \sqrt{a} \mid w \mid \chi_S \text{ en } (x_0, \, x_0 + \delta)$$

y por tanto $\frac{\gamma}{\sqrt{a}} \leq | w |$ sobre $S \cap (x_0, \, x_0 + \delta)$. Como $\frac{1}{\sqrt{a}} = 0$ sobre S^c se tiene que $\frac{\gamma}{\sqrt{a}} \leq | w |$ sobre $S^c \cap (x_0, \, x_0 + \delta)$. Esto implica que

$$\gamma^2 \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{1}{a} < +\infty,$$

y por tanto que $(x_0, \, x_0 + \delta) \subset G$. Como $x_0 \notin G$, entonces $x_0 = \alpha_i$ para algún i y se tiene que $1/a \in L^1(\alpha_i, \, \alpha_i + \delta)$. La demostración para el límite izquierdo es análoga.

El paso 5 tiene el siguiente Corolario.

Paso 6. Para todo $\alpha_i \neq 0$ se tiene

$$\omega(\alpha_i) = 0 \quad \text{o} \quad \omega(\alpha_i-) = 0.$$

Para todo $\beta_i \neq 1$ se tiene

$$\omega(\beta_i) = 0 \quad \text{o} \quad \omega(\beta_i-) = 0.$$

Observación 1.2.2. Si X no es ni $C^0((0, 1))$ ni $C^0([0, 1])$, entonces ω es una función continua, (de hecho, está en un espacio de Sobolev $W^{1,p'}(0, 1)$ o $W^{1,p'}_{loc}(0, 1)$) y podemos por tanto escribir

$$\omega(\alpha_i-) = \omega(\alpha_i) = \omega(\beta_i) = \omega(\beta_i-) = 0.$$

Demostración.- Vamos a probar sólo la primera afirmación ya que la segunda es análoga. Si $\omega(\alpha_i) \neq 0$ y $\omega(\alpha_i-) \neq 0$ entonces, por el Paso 5, existen β_j y $\delta > 0$ tales que $\beta_j = \alpha_i$ y

$$a^{-1} \in L^1((\beta_j - \delta,\, \beta_j) \cup (\alpha_i,\, \alpha_i + \delta)).$$

Pero esto implica que $(\alpha_j,\, \beta_i) \subset G$ lo que es una contradición con el hecho de que $(\alpha_j,\, \beta_j)$ y $(\alpha_i,\, \beta_i)$ son componentes conexas de G.

Paso 7. Se tiene la siguiente fórmula de integración por partes (recuérdese que $\mu = \frac{d\omega}{dx}$).

Dado $[\alpha,\, \beta] \subset [0,\, 1]$ y $u \in W^{1,1}(\alpha,\, \beta)$ se tiene

$$\int_\alpha^\beta \omega \frac{du}{dx} = \omega(\beta)u(\beta) - \omega(\alpha-)u(\alpha) - \int_{[\alpha,\beta]} u d\mu \tag{1.2.13}$$

donde para $\alpha = 0$ se define $\omega(0-) = \omega_0 - \mu(\{0\})$.

Para la demostración, ver [FO] Teorema 3.30.

El comportamiento de ω en $x = 0$ y $x = 1$ viene dado por

Paso 8. Se tiene

$$\omega(0-) = \omega_0 - \mu(\{0\}) = 0, \quad \omega(1) = 0. \tag{1.2.14}$$

Demostración.- Tomando $u = 1$ en (2.5) y teniendo en cuenta la definición de ω, se tiene

$$0 = \mu([0,\, 1]) = \omega(1) - \omega_0 + \mu(\{0\}) = \omega(1) - \omega(0-). \tag{1.2.15}$$

Tomando por otra parte $r = 1$ en (1.2.6) y usando (1.2.9), se tiene

$$\int_{[0,1]} \left(\int_0^x \chi_S \right) d\mu + \int_S \omega = 0. \tag{1.2.16}$$

Usando ahora (1.2.13) en $[0,\, 1]$ para la función u definida por

$$u = 1 + \int_0^x \chi_S,$$

se tiene

$$\int_{[0,1]} \left(1+\int_0^x \chi_S\right) d\mu + \int_S \omega = \omega(1)\left(1+\int_0^1 \chi_S\right) - \omega(0-),$$

con lo que gracias a (1.2.15), se deduce

$$\int_{[0,1]} \left(\int_0^x \chi_S\right) d\mu + \int_S \omega = \omega(1)\int_0^1 \chi_S = \omega(1)\ell(S).$$

Como estamos suponiendo que $\ell(S) > 0$ y se verifica (1.2.16), se obtiene que $\omega(1) = 0$ con lo que ahora (1.2.15) nos da también que $\omega(0-) = 0$.

Paso 9. Para todo $i \geq 1$ se tiene

$$|\,\omega(\alpha_i)\,|,\ |\,\omega(\alpha_i-)\,| \leq |\,\mu\,|(\{\alpha_i\})$$

$$|\,\omega(\beta_i)\,|,\ |\,\omega(\beta_i-)\,| \leq |\,\mu\,|(\{\beta_i\}).$$

Demostración.- Lo vamos a probar solamente para α_i, ya que para β_i es análogo. Usando

$$|\,\mu\,|(\{\alpha_i\}) = |\,\omega(\alpha_i) - \omega(\alpha_i-)\,|$$

es fácil deducir el resultado gracias a los Pasos 6 y 8 .

Paso 10. Sea $(\alpha_i,\, \beta_i)$ una componente conexa de G y sea una función u tal que

$$u \in W^{1,1}_{loc}(\alpha_i,\, \beta_i) \cap X, \quad \text{y} \quad \omega\frac{du}{dx} \in L^1(\alpha_i,\, \beta_i).$$

Entonces $u \in L^1([\alpha_i,\, \beta_i], d\mu)$ y

$$\int_{[\alpha_i,\beta_i]} u\,d\mu + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \omega\frac{du}{dx} = u(\beta_i)\omega(\beta_i) - u(\alpha_i)\omega(\alpha_i-), \tag{1.2.17}$$

donde si X no es ni $C^0([0,\, 1])$ ni $C^0((0,\, 1))$ el miembro derecho se define como cero, (recuérdese que en este caso la Observación 1.2.2 y el Paso 8 implican que $\omega(\beta_i) = \omega(\alpha_i-) = 0$.)

Demostración.- Supongamos primero que

$$\frac{du}{dx} \geq 0 \ \text{ en } (\alpha_i,\, \beta_i).$$

Sea $c_i = (\alpha_i + \beta_i)/2$. Aplicando (1.2.13) en $[\alpha_i,\, \beta_i]$ a la función u_n dada por

$$u_n(x) = u(c_i) + \int_{c_i}^x \frac{du}{dx}\chi_{(\alpha_i+\frac{1}{n},\beta_i-\frac{1}{n})}, \quad \text{con } \frac{2}{n} < \beta_i - \alpha_i,$$

se obtiene

$$\int_{[\alpha_i,\beta_i]} u_n d\mu + \int_{\alpha_i+\frac{1}{n}}^{\beta_i-\frac{1}{n}} \omega \frac{du}{dx} = u_n(\beta_i)\omega(\beta_i) - u_n(\alpha_i)\omega(\alpha_i-). \tag{1.2.18}$$

El Teorema de Convergencia Dominada implica

$$\int_{\alpha_i+\frac{1}{n}}^{\beta_i-\frac{1}{n}} \omega \frac{du}{dx} \to \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \omega \frac{du}{dx}.$$

Si $X = C^0([0,\, 1])$, la sucesión u_n converge hacia u en $C^0[\alpha_i, \beta_i]$, lo que permite pasar al límite en $\int_{[\alpha_i,\beta_i]} u_n d\mu$ y el miembro derecho de (1.2.18).

En el caso $L^p((0,\, 1))$ el miembro derecho es cero y respecto a la primera integral, nótese que para casi todo $x \in (0,\, 1)$, la sucesión $u_n(x)$ converge hacia $u(x)$, con $| u_n(x) | \leq | u(x) |$, con lo que el Teorema de Convergencia Dominada implica por tanto que u_n converge hacia u en $L^p(\alpha_i, \beta_i)$, con lo que usando que $\mu \in L^{p'}((0,\, 1))$, se deduce que

$$\int_{[\alpha_i,\beta_i]} u_n d\mu \to \int_{[\alpha_i,\beta_i]} u d\mu$$

Los casos $C^0((0,\, 1))$ y $L^p_{loc}((0,\, 1))$ son similares.

En el caso en que la derivada de u nos satisfaga la hipótesis (1.2.18), es fácil concluir usando las funciones

$$u_1 = u(c_i) + \int_{c_i}^{x} \left(\frac{du}{dx}\right)^+, \quad u_2 = \int_{c_i}^{x} \left(\frac{du}{dx}\right)^-.$$

Paso 11. Se tiene

$$| \mu | \left([0,\, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i,\, \beta_i] \right) = 0. \tag{1.2.19}$$

Demostración.- La demostración es bastante fácil para el caso $X = L^p((0,\, 1))$ o $L^p_{loc}((0,\, 1))$ con $1 \leq p < \infty$, pues en este caso $\omega \in W^{1,p'}((0,\, 1))$ y es idénticamente nula fuera de G, lo que implica que μ, que es la derivada de ω, es cero en casi todo $(0,\, 1) \setminus G$.

En los casos $C^0([0,\, 1])$ y $C^0((0,\, 1))$ la demostración es más complicada. Sabemos que para todo intervalo $[\alpha,\, \beta] \subset [0,\, 1]$, la variación total de μ en $(\alpha,\, \beta]$ se puede calcular como

$$| \mu | ((\alpha,\, \beta]) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{q} | \omega(t_j) - \omega(t_{j-1}) |: \ \alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{q-1} \leq t_q = \beta \right\}.$$

Sea por tanto T una partición dada del intervalo $[0,\ 1]$.

$$T = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{q-1} \leq t_q = 1\}$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid \mu \mid ([\alpha_i,\ \beta_i]) < 2 \mid \mu \mid ([0,\ 1]) < \infty,$$

entonces dado $\epsilon > 0$, podemos elegir n suficiente grande para que se tenga

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mid \mu \mid ([\alpha_i,\ \beta_i]) < \epsilon \tag{1.2.20}$$

y tal que para todo $t_j \in T$ para el cual exista $i \geq 1$ con $t_j \in [\alpha_i,\ \beta_i]$ se verifique que $i \leq n$.

Consideramos ahora una nueva partición T' de $[0,\ 1]$, definida como

$$T' = T \cup \{\alpha_i,\ \beta_i :\ i \leq n\},$$

que cambiando de notación, podemos escribir como

$$T' = \left\{0 = t'_0 \leq t'_1 \leq \cdots \leq t'_{m-1} \leq t'_m = 1\right\},\quad m \geq q$$

y que verifica

$$\sum_{j=1}^{q} \mid \omega(t_j) - \omega(t_{j-1}) \mid \leq \sum_{j=1}^{m} \mid \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \mid .$$

Las siguientes propiedades de la partición T' serán usadas más tarde.

(P1) Si $t'_j \in T'$ y $t'_j \notin \bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,\ \beta_i)$ entonces $t'_j \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\ \beta_i)$.

Para probarlo, notemos que gracias a la construcción de T', si $t'_j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\ \beta_i)$ entonces $t'_j \in T$ y existe i con $t'_i \in (\alpha_i,\ \beta_i)$, lo que implica que $i \leq n$.

(P2) Si $t'_j \in T'$ y $t'_j \notin \bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,\ \beta_i]$ entonces $t'_{j-1} \notin \bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\ \beta_i)$.

Esto se verifica claramente, ya que $t'_{j-1} \in [\alpha_i,\ \beta_i)$ y $\beta_i \in T'$ implican que

$$\alpha_i \leq t'_{j-1} < t'_j \leq \beta_i$$

y por tanto que $t'_j \in (\alpha_i,\ \beta_i]$.

(P3) Sean $t'_l,\ t'_s \in T'$ tales que $t'_l \neq t'_s$ y $t'_l, t'_s \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\ \beta_i)$, entonces no existe i tal que $t'_{l-1},\ t'_{s-1} \in [\alpha_i,\ \beta_i)$.

Para probarlo, supongamos que $t'_l < t'_s$, entonces se tiene

$$t'_{l-1} < t'_l \leq t'_{s-1} < t'_s;$$

y por tanto si $t'_{l-1},\, t'_{s-1} \in [\alpha_i,\, \beta_i)$ se deduce que $t'_l \in (\alpha_i,\, \beta_i)$.

Usando (P1), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, | = (s1) + (s2) + (s3) + (s4),$$

donde

$$\begin{aligned}
(s1) &= \sum_{t'_j \in \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i]} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, |,\\
(s2) &= \sum_{t'_j \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \{\beta_i\}} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, |,\\
(s3) &= \sum_{t'_j \in \bigcup \{\alpha_i\} \setminus \bigcup \{\beta_i\}} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, |,\\
(s4) &= \sum_{t'_j \notin \bigcup [\alpha_i,\, \beta_i]} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, |,
\end{aligned}$$

y donde debemos estimar cada término.

Para $(s1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
(s1) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{t'_j \in (\alpha_i, \beta_i]} | \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, |\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} | \, \mu \, | ((\alpha_i, \beta_i]) = | \, \mu \, | \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i], \right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que para $1 \leq i \leq n$

$$\{t'_j \, : \; t'_j \in (\alpha_i,\, \beta_i]\} \cup \{\alpha_i\} \subset T'$$

es una partición de $[\alpha_i,\, \beta_i]$.

Para $(s2)$, sea t'_j tal que existe $\beta_l \geq n+1$, con $\beta_l = t'_j$. Pueden ocurrir los siguientes casos.

Si $t'_{j-1} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i)$ entonces gracias al Paso 5, se deduce que $\omega(t'_{j-1}) = 0$ y por tanto, usando el Paso 9, se deduce

$$| \, \omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1}) \, | = | \, \omega(\beta_l) \, | \leq | \, \mu \, | (\{\beta_l\}) \leq | \, \mu \, | ((\alpha_l, \beta_l]).$$

Si existe $i = i_l$ tal que $t'_{j-1} \in [\alpha_{i_l}, \beta_{i_l})$, entonces, usando el Paso 9, se deduce

$$\begin{aligned}
|\omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1})| &\leq |\omega(\beta_l) - \omega(\alpha_l)| + |\omega(\alpha_l)| \\
&\quad + |\omega(\beta_{i_l})| + |\omega(\beta_{i_l}) - \omega(t'_{j-1})| + |\omega(t'_{j-1}) - \omega(\alpha_{i_l})| \\
&\leq |\mu|((\alpha_l, \beta_l]) + |\mu|(\{\alpha_l\}) + |\mu|(\{\beta_{i_l}\}) + |\mu|((\alpha_{i_l}, \beta_{i_l}]) \\
&\leq |\mu|([\alpha_l, \beta_l]) + 2|\mu|([\alpha_{i_l}, \beta_{i_l}]).
\end{aligned}$$

Gracias a las propiedades (P2) y (P3) $i_l \geq n+1$ y $i_l \neq i_s$ si $\beta_l \neq \beta_s$. Luego de (2.20), se deduce

$$(s2) \leq 3\epsilon.$$

Para $(s3)$, si $t'_j = \alpha_l$ con $\alpha_l \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\beta_i\}$, entonces de la misma forma que antes, se tiene que $|\omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1})| \leq |\mu|(\{\alpha_l\})$, si $t'_{j-1} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i)$ ó $|\omega(t'_j) - \omega(t'_{j-1})| \leq |\mu|(\{\alpha_l\}) + 2|\mu|([\alpha_{i_l}, \beta_{i_l}]$, si $t'_{j-1} \in [\alpha_{i_l}, \beta_{i_l})$ y usando las propiedades (P2) y (P3) de la misma forma que antes, se deduce ($\alpha_l \neq 0$ ya que estamos suponiendo que existe t'_{j-1})

$$(s3) \leq \sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_i \notin \bigcup\{\beta_j\} \bigcup \{0\}}} |\mu|(\{\alpha_i\}) + 2\epsilon.$$

Para $(s4)$, gracias a los Pasos 5 y 8, se tiene $\omega(t'_j) = 0$ cuando $t'_j \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]$, con lo que razonando con t'_{j-1} como en las estimaciones de $(s2)$ y $(s3)$ se deduce

$$(s4) \leq 2\epsilon.$$

Tenemos por tanto

$$\sum_{j=1}^{q} |\omega(t_j) - \omega(t_{j-1})| \leq |\mu| \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i] \setminus \{0\} \right) + 7\epsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ y para toda partición T, se tiene

$$|\mu|([0, 1]) \leq |\mu| \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i] \right).$$

La desigualdad contraria se verifica siempre, con lo que en realidad es una igualdad.

Paso 12. Finalmente veamos

$$u \in \mathcal{H} \Rightarrow (u, \sqrt{a}\frac{du}{dx}\chi_G) \in V.$$

Demostración.- Usando (1.2.10) y que $u \in \mathcal{H}$, se tiene, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\int_G \left| \omega \frac{du}{dx} \right| = \int_G \left| \frac{\omega}{\sqrt{a}} \sqrt{a} \frac{du}{dx} \right| \leq \int_G \frac{|\omega|^2}{a} \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 < +\infty$$

y por tanto podemos aplicar el Paso 6.

Si X no es ni $C^0([0,\, 1])$ ni $C^0((0,\, 1))$, entonces

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]} u d\mu + \int_G \omega \frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{[\alpha_i, \beta_i]} u d\mu + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \omega \frac{du}{dx} \right) = 0,$$

donde hemos usado que en este caso los puntos tienen $\mu-$medida nula y que $u \in L^1(d\mu)$ ya que $u \in X$ y $\mu \in X'$.

Para X igual a $C^0([0,\, 1])$ o a $C^0((0,\, 1))$ la demostración es algo más compleja. Se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]} u d\mu + \int_G \omega \frac{du}{dx} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{[\alpha_i, \beta_i]} u d\mu + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \omega \frac{du}{dx} \right) - \sum_{\alpha_i \in \bigcup \{\beta_j\}} u(\alpha_i) \mu(\{\alpha_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (u(\beta_i)\omega(\beta_i) - u(\alpha_i)\omega(\alpha_i -)) - \sum_{\alpha_i \in \bigcup \{\beta_j\}} u(\alpha_i)(\omega(\alpha_i) - \omega(\alpha_i -)). \\
&= \sum_{\beta_i \in \bigcup \{\alpha_j\}} u(\beta_i)\omega(\beta_i) + \sum_{\beta_i \notin \bigcup \{\alpha_j\}} u(\beta_i)\omega(\beta_i) \\
&- \sum_{\alpha_i \in \bigcup \{\beta_j\}} u(\alpha_i)\omega(\alpha_i) - \sum_{\alpha_i \notin \bigcup \{\beta_j\}} u(\alpha_i)\omega(\alpha_i -)
\end{aligned}$$

En el miembro derecho, el primer y el tercer término son los mismos con distinto signo, mientras que el segundo y el cuarto son nulos gracias a los Pasos 5 y 9. Por tanto, de la misma forma que para el caso L^p, se tiene

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]} u d\mu + \int_G \omega \frac{du}{dx} = 0.$$

Usando los Pasos 3 y 11, así como el hecho de que $\frac{du}{dx} = 0$ en casi todo $x \in S$, se deduce

$$\int_{[0,1]} u d\mu + \int_0^1 \sqrt{a} w \frac{du}{dx} \chi_G = 0$$

y por tanto

$$(u, \sqrt{a}\frac{du}{dx}\chi_G) \in V,$$

que termina la demostración del Paso 12 y del Teorema. ∎

Observación 1.2.3. Si hubiéramos intentado aplicar los resultados de la Sección 1.1, nos habríamos encontrado con el problema de que la hipótesis (H1) no se verifica. Una alternativa consiste en probar (lo cual ya es largo si se intenta hacer directamente) que se verifica

(H'1) Para todo $u \in L^\infty(S)$ existe una sucesión $u_n \in W_a(0, 1)$ la cual converge hacia la función u en casi todo S.

Entonces, puesto que las funciones de V_0 son nulas fuera de S, toda la Teoría de la Sección 1.1 se puede aplicar.

Usando el Teorema 1.1.3 (donde ahora Φ debe ser considerado como un operador en $L^2(S)$), V_0 se reduce al $\{0\}$ si y sólo si la función a es de la forma

$$a = a\chi_U + \infty\chi_E$$

donde U es un conjunto abierto sobre el cual a^{-1} es localmente integrable y E un conjunto medible arbitrario. Aplicando este resultado al cálculo de $\bar{F}$, se deduce que la matriz $P(x)$ de la Sección 1.1 (que ahora consiste en una función real que toma sólo los valores 1 ó 0 viene dada por

$$P(x) = \chi_{G\cup S^c}.$$

De aquí se deduce por tanto

$$H \subset \mathcal{H}$$

y

$$\bar{F}(u) = \int_G a\left|\frac{du}{dx}\right|^2, \; \forall u \in H.$$

No se puede sin embargo deducir la contención recíproca $\mathcal{H} \subset H$, lo que nos ha hecho preferir la demostración expuesta.

1.3. Algunas Observaciones sobre la Hipótesis (H1).

Suponiendo en el caso unidimensional que la función a es finita en casi todo, entonces la hipótesis (H1) es siempre cierta. De hecho, se tiene

Teorema 1.3.1. *Si la función a es finita en casi todo $(0, 1)$, entonces el espacio $W_a(0, 1)$ es denso en $C^0([0, 1])$.*

Demostración. El espacio $W_a(0, 1)$ es un álgebra que contiene las funciones constantes y por tanto, aplicando el Teorema de Stone-Weierstrass se deduce que la proposición es cierta si y sólo si $W_a(0, 1)$ separa puntos, i.e., si y sólo si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [0, 1]$, con $x_1 \neq x_2$, existe una función $u \in W_a(0, 1)$ tal que $u(x_1) \neq u(x_2)$. Para ello, basta considerar la función

$$u(x) = \int_0^x \min\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right\},$$

la cual pertenece a $W_a(0, 1)$ y es estrictamente creciente. ∎

Visto este resultado, podríamos pensar que lo mismo debe ser cierto para dimensiones mayores. Esto es sin embargo falso como se deduce facilmente del siguiente resultado que implica que en algunos casos $W_A(\Omega)$ puede quedar reducido a las funciones constantes.

Teorema 1.3.2. *Sea $\Omega = (0, 1)^d$, $d > 1$. Entonces existe una función $h : \Omega \to \mathbb{R}$ finita en casi todo $(0, 1)$, tal que las únicas funciones $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ que verifican $h\nabla u \in L^1(\Omega)$ son las funciones constantes.*

Demostración. Sea $\{r_n\}$ el conjunto de todos los números racionales del intervalo $(0, 1)$ escrito en forma de sucesión.

Se considera la función $\tilde{h} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{h}(x) = \max\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(d+2)}} \frac{1}{\mid x - r_n \mid^{d+1}}, 1\right\}.$$

La función $\tilde{h}$ es finita en casi todo $(0, 1)$. Para probar esta afirmación, sea

$$Z = \{x \in (0, 1) : \ \tilde{h}(x) < +\infty\}$$

y para $\epsilon > 0$, sea

$$U_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n}).$$

Si $x \notin U_\epsilon$, entonces

$$\tilde{h}(x) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(d+2)}} \frac{1}{\mid x - r_n \mid^{d+1}} \leq 1 + \frac{1}{\epsilon^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{\epsilon^{d+1}}.$$

y por tanto $(0, 1) \setminus U_\epsilon \subset Z$, con lo que se tiene

$$\ell(Z) \geq 1 - \ell(U_\epsilon) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^n} \geq 1 - 2\epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, se deduce que $\ell(Z) = 1$, i.e., $\tilde{h}$ es finita en casi todo $(0, 1)$.

Se define ahora la función $h : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \prod_{i=1}^{d} \tilde{h}(x_i),$$

donde estamos denotando $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Puesto que $\tilde{h}$ es finita en casi todo, se deduce que también lo es la función h.

Queda probar que la función h verifica las propiedades requeridas. Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tal que

$$h \mid \nabla u \mid = f \in L^1(\Omega). \tag{1.3.1}$$

Consideramos para u su representante de Lebesgue y recordamos (ver Apéndice) que el conjunto de puntos de Ω que no son puntos de Lebesgue es un conjunto de medida de Hausdorff $d-1$ dimensional nula.

Sea ahora

$$u_t = \rho_t * u,$$

donde para $t > 0$ ρ_t es una función regularizante definida por

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t^d} \rho\left(\frac{\mid x \mid}{t}\right) \quad \text{con} \quad \rho \geq 0, \ \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \ sop(\rho) \subset (0, 1).$$

Sabemos (ver p. ej. [FO] pag. 230-237) que $u_t \in C^\infty(\Omega)$ y que para t convergiendo a cero, $u_t(x)$ converge a $u(x)$ en el conjunto de Lebesgue de u.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^d$ con una componente racional, lo que significa que existe i con $1 \leq i \leq n$ y existe un número racional r_j tal que $x_i = r_j$. Entonces

$$\begin{aligned} | \nabla u_t(x) | &= \left| \int_{B(x,t)} \rho_t(x-y) \nabla u(y) dy \right| \\ &\leq \frac{C}{t^d} \int_{B(x,t)} | \nabla u(y) | \, dy, \end{aligned}$$

C constante, pero de (1.3.1), se deduce (ya que $h, \tilde{h} \geq 1$)

$$| \nabla u(y) | = \frac{f(y)}{h(y)} \leq \frac{f(y)}{\tilde{h}(y_i)} \leq 2^{j(d+2)} \, | y_i - r_j |^{d+1} f(y),$$

con lo que usando que $| y_i - r_j | = | y_i - x_i |$ se obtiene

$$| \nabla u_t(x) | \leq C 2^{j(d+2)} t \int_{B(x,t)} f(y) dy \leq C_j t, \tag{1.3.2}$$

con

$$C_j = 2^{j(d+2)} C \int_\Omega f(y) dy.$$

Escribiendo $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d \geq 2$ como

$$x = (x_1, x') = (x_1, x_2, x''),$$

se tiene

$$\begin{aligned} | u_t(r_j, x') - u_t(r_1, x') | \leq & | u_t(r_j, x') - u_t(r_j, r_1, x'') | \\ & + | u_t(r_j, r_1, x'') - u_t(r_1, r_1, x'') | \\ & + | u_t(r_1, r_1, x'') - u_t(r_1, x') |, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} | u_t(r_j, x') - u_t(r_1, x') | \leq & \left| \int_{r_1}^{x_2} | \nabla u_t(r_j, s, x'') | \, ds \right| \\ & + \left| \int_{r_1}^{r_j} | \nabla u_t(s, r_1, x'') | \, ds \right| \\ & + \left| \int_{x_2}^{r_1} | \nabla u(r_1, s, x'') | \, ds \right|. \end{aligned}$$

Usando ahora (1.3.2) se tiene

$$| u_t(r_j, x') - u_t(r_1, x') | \leq (C_j + 2C_1) t,$$

y puesto que $u_t(x)$ converge hacia $u(x)$ en el conjunto de Lebesgue de u, se tiene

$$(1.3.3) \qquad \mid u(r_j, x') - u(r_1, x') \mid = 0 \quad \text{e.c.t. } x' \in \Omega' = (0,\, 1)^{d-1}.$$

Ahora, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, la función $\gamma : (0,\, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(x_1) = \int_{\Omega'} u(x_1, x')\varphi(x')dx'$$

está en $W^{1,1}_{loc}(0, 1)$, ya que usando el Teorema de Fubini, es fácil ver que su derivada en el sentido de las distribuciones es

$$x_1 \mapsto \int_{\Omega'} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x')\varphi(x')dx'.$$

Esto implica que la función γ es continua y puesto que gracias a (1.3.3), sabemos que tiene el mismo valor para todo número racional debe ser constante, lo que significa que la distribución de $\mathcal{D}'((0,1)^{d-1})$

$$\varphi \in \mathcal{D}((0,1)^{d-1}) \mapsto \int_{\Omega'} u(x_1, x')\varphi(x')dx$$

es independiente de x_1 y por tanto que para cada $x_1, \bar{x}_1 \in (0,\, 1)$

$$u(x_1, x') = u(\bar{x}_1, x') \quad \text{e.c.t. } x' \in \Omega'.$$

La misma demostración que acabamos de aplicar para la primera componente de x es válida para cualquier otra lo que significa que la función u es constante. ∎

Segunda Parte.

Homegeneización en Dominios con Agujeros

Capítulo 2.

Existencia y Unicidad de solución Para un Problema con Crecimiento Cuadrático.

El objetivo de este Capítulo es el estudio de la existencia y unicidad de solución del problema de Dirichlet correspondiente a una ecuación con una no linealidad de orden cuadrático en el gradiente. El resultado de existencia se debe a L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel, ([B M P]) mientras que el de unicidad es debido a G. Barles y F. Murat, ([B M]). Nuestro interés consiste en realidad en la homogeneización de este problema en dominios con agujeros suficientemente pequeños tales que desaparecen en el límite, objetivo que llevamos a cabo en el Capítulo 4 para un caso particular y más propiamente en el Capítulo 5 donde afrontamos el caso general. Aquí además de los resultados de existencia y unicidad establecemos ciertas estimaciones (fundamentalmente el Lema 2.1.1 y el Lema 2.2.2) que nos serán útiles más adelante y que siguen las ideas de los dos trabajos anteriormente expuestos ([B M P] y [B M]).

2.1. Existencia de Solución para un Problema Quasilineal con Crecimiento Cuadrático.

El problema tratado en esta sección consiste en probar la existencia de solución para el problema quasilineal.

$$(2.1.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + H(x,u,\nabla u) = 0 \ \text{ en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ y la aplicación $H:(x,s,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to H(x,s,\xi) \in \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory (continua con respecto a las variables s,ξ y medible respecto a la variable x) tal que

i) Para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, la función $H(x,.,\xi)$ es derivable y existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$(2.1.2) \qquad \frac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \lambda.$$

ii) Existen funciones $\omega_0, \omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, crecientes tales que para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $S \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(2.1.3) \qquad | H(x,s,\xi) | \leq \omega_0(| s |) + \omega(| s |) \, | \xi |^2 .$$

Observación 2.1.1. Se puede suponer que lo que verifican las funciones ω_0 y ω es que están acotadas en los subconjuntos acotados de $[0,+\infty)$. Definiendo entonces

$$\begin{cases} \omega_0'(s) = \sup\limits_{0 \leq t \leq s} \omega_0(t) \\ \omega'(s) = \sup\limits_{0 \leq t \leq s} \omega(t) \end{cases}$$

se tiene ii).

El siguiente Lema será de gran ayuda en la demostración del Teorema principal de esta Sección, (Teorema 2.1.1), así como en Secciones posteriores de este trabajo.

Lema 2.1.1 *Sea H en las condiciones anteriores, y $R > 0$ una constante, sea $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ y sea $f \in H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$, tales que se verifica*

$$(2.1.4) \qquad -\Delta u + H(x,u,\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega.$$

Se toma $\gamma = \omega(R)$ *y se considera una función* $h \in C^1(\mathbb{R})$ *que verifique*

$$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h'(s) - 2\gamma \mid h(s) \mid \geq 1, \ \forall s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

(por ejemplo $h(s) = se^{\alpha s^2}$ *con* α *suficientemente grande). La función* h *la tomamos de forma que dependa sólo de* γ*, o lo que es lo mismo que sólo dependa de* R*.*

Entonces para toda función $r \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *y para toda función* $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*,* $\varphi \geq 0$ *existe una constante* C *que sólo depende de* R *tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mid \nabla (u-r) \mid^2 \varphi \leq \langle f, h(u-r)\varphi \rangle &- \int_\Omega \varphi \nabla r \nabla h(u-r) \\ &- \int_\Omega h(u-r) \nabla u \nabla \varphi + C \int_\Omega \mid h(u-r) \mid \varphi \\ &+ 2\gamma \int_\Omega \mid \nabla r \mid^2 \mid h(u-r) \mid \varphi, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mid \nabla (u-r)^+ \mid^2 \varphi \leq \langle f, h(u-r)^+\varphi \rangle &- \int_\Omega \varphi \nabla r \nabla h(u-r)^+ \\ &- \int_\Omega h(u-r)^+ \nabla u \nabla \varphi + C \int_\Omega h(u-r)^+ \varphi \\ &+ 2\gamma \int_\Omega \mid \nabla r \mid^2 h(u-r)^+ \varphi. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Demostración. Tomando $h(u-r)\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ como función test en (2.1.4), se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi \nabla u \nabla h(u-r) + \int_\Omega h(u-r) \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega H(x,u,\nabla u) h(u-r)\varphi \\ &= \langle f, h(u-r)\varphi \rangle, \end{aligned}$$

de donde teniendo en cuenta la igualdad $\nabla h(u-r) = h'(u-r) \nabla (u-r)$ se deduce

$$\begin{aligned} \int_\Omega h'(u-r) \mid \nabla (u-r) \mid^2 \varphi = \langle f, h(u-r)\varphi \rangle &- \int_\Omega \varphi \nabla r \nabla h(u-r) \\ &- \int_\Omega h(u-r) \nabla u \nabla \varphi \\ &- \int_\Omega H(x,u,\nabla u) h(u-r)\varphi, \end{aligned}$$

lo que implica usando (2.1.3) y tomando $C = \omega_0(R)$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega h'(u-r) \mid \nabla (u-r) \mid^2 \varphi \leq \langle f, h(u-r)\varphi\rangle - \int_\Omega \varphi \nabla r \nabla h(u-r) \\
- \int_\Omega h(u-r) \nabla u \nabla \varphi \\
+ C \int_\Omega \mid h(u-r) \mid \varphi \\
+ \gamma \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \mid h(u-r) \mid \varphi.
\end{aligned} \tag{2.1.8}
$$

Usando la desigualdad

$$\mid \nabla u \mid^2 \leq 2 \mid \nabla (u-r) \mid^2 + 2 \mid \nabla r \mid^2$$

en (2.1.8) y llevando el término

$$2\gamma \int_\Omega \mid \nabla (u-r) \mid^2 \mid h(u-r) \mid \varphi$$

al primer miembro de (2.1.8) y usando (2.1.5), se deduce (2.1.6). La demostración de (2.1.7) es la misma considerando como función test $h(u-r)^+$. ∎

La existencia de solución al problema (2.1.1) viene dada por el siguiente Teorema.

Teorema 2.1.1. *Bajo las hipótesis anteriores, existe una solución u de (2.1.1) tal que $\| u \|_{H_0^1(\Omega)}$ y $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ están acotadas por constantes que dependen sólo de λ, ω_0, ω y la medida de Ω. De hecho tomando $C_0 = \omega_0(0)$ se tiene*

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_0}{\lambda}, \tag{2.1.9}$$

mientras que la cota en $H_0^1(\Omega)$ es más compleja y no la damos explícitamente.

Demostración.

Paso 1. Problema aproximado.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se nota

$$G_n(x,s,\xi) = T_n(H(x,s,\xi) - \lambda s).$$

Obsérvese que G_n está acotada y por (2.1.2) verifica

$$\frac{\partial G_n}{\partial s}(x,s,\xi) \geq 0. \tag{2.1.10}$$

Se consideran los problemas aproximados de (2.1.1)

$$(2.1.11) \qquad \begin{cases} -\Delta u_n + \lambda u_n + G_n(x, u_n, \nabla u_n) = 0 \text{ en } \Omega \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Obsérvese que la ecuación (2.1.11) es del mismo tipo que la ecuación (2.1.1) con la función H sustituida por $\hat{H}_n(x,s,\xi) = \lambda s + G_n(x,s,\xi)$, función que verifica de forma analoga a H las desigualdades

$$(2.1.12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{H}_n}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \lambda \\ | \hat{H}_n(x,s,\xi) | \leq \hat{\omega}_0(| s |) + \omega(| s |) | \xi |^2, \end{cases}$$

con $\hat{\omega}_0(s) = 2\lambda s + \omega_0(s)$.

Utilizando el Teorema del Punto Fijo de Schauder es fácil ver que para cada n (2.1.11) tiene una solución u_n, la cual está en $L^\infty(\Omega)$ y verifica

$$\| u_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{n}{\lambda}.$$

Paso 2. Estimación uniforme en $L^\infty(\Omega)$.

Vamos a probar que de hecho se tiene la desigualdad

$$(2.1.13) \qquad \| u_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_0}{\lambda}.$$

De forma análoga al Lema 2.1.1 se considera $\gamma = \omega(0)$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$ verificando

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(s) - \gamma | h(s) | \geq 0. \end{cases}$$

Dado $k > 0$, se toma $h((u_n - k)^+)$ como función test en (2.1.11) con lo que se obtiene

$$\int_\Omega h'((u_n - k)^+) \nabla u_n \nabla (u_n - k)^+ + \lambda \int_\Omega u_n h((u_n - k)^+) \\ + \int_\Omega G_n(x, u_n, \nabla u_n) h((u_n - k)^+) = 0.$$

Teniendo ahora en cuenta la igualdad

$$\begin{aligned} \nabla u_n \nabla (u_n - k)^+ &= \nabla (u_n - k) \nabla (u_n - k)^+ \\ &= | \nabla (u_n - k)^+ |^2, \end{aligned}$$

se puede escribir

$$
(2.1.14)\qquad
\begin{aligned}
&\int_\Omega h'((u_n-k)^+) \mid \nabla (u_n-k)^+ \mid^2 + \lambda \int_\Omega u_n h((u_n-k)^+)\\
&+\int_\Omega (G_n(x,u_n,\nabla u_n) - G_n(x,0,\nabla u_n))h((u_n-k)^+)\\
&= -\int_\Omega G_n(x,0,\nabla u_n)h((u_n-k)^+).
\end{aligned}
$$

Si $h((u_n-k)^+)$ no es cero, entonces $u_n > k > 0$ y se tiene gracias a (2.1.10)

$$
G_n(x,u_n,\nabla u_n) - G_n(x,0,\nabla u_n) = \int_0^{u_n} \frac{\partial G_n}{\partial s}(x,s,\xi) \geq 0.
$$

Por otra parte, se tiene la desigualdad

$$
\begin{aligned}
\mid G_n(x,0,\nabla u_n) \mid &= \mid T_n(H(x,0,\nabla u_n)) \mid\\
&\leq \mid H(x,0,\nabla u_n) \mid \leq C_0 + \gamma \mid \nabla u_n \mid^2,
\end{aligned}
$$

con lo que de (2.1.14) se deduce

$$
(2.1.15)\qquad
\begin{aligned}
&\int_\Omega h'((u_n-k)^+) \mid \nabla (u_n-k)^+ \mid^2 + \lambda \int_\Omega u_n h((u_n-k)^+)\\
&\leq C_0 \int_\Omega h((u_n-k)^+) + \gamma \int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 h((u_n-k)^+).
\end{aligned}
$$

Usando en (2.1.15) la igualdad

$$
\begin{aligned}
\mid \nabla u_n \mid^2 h((u_n-k)^+) &= \mid \nabla (u_n-k) \mid^2 h((u_n-k)^+)\\
&= \mid \nabla (u_n-k)^+ \mid^2 h((u_n-k)^+),
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
(2.1.16)\qquad
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[h'((u_n-k)^+) - \gamma h((u_n-k)^+)\right] \mid \nabla (u_n-k)^+ \mid^2 + \lambda \int_\Omega u_n h((u_n-k)^+)\\
&\leq C_0 \int_\Omega h((u_n-k)^+).
\end{aligned}
$$

La primera integral del miembro izquierdo de (2.1.16) es no negativa gracias a la definición de la función h, con lo que se deduce

$$
\lambda \int_\Omega u_n h((u_n-k)^+) \leq C_0 \int_\Omega h((u_n-k)^+),
$$

lo que implica

$$
\int_\Omega \left(u_n - \frac{C_0}{\lambda}\right) h((u_n-k)^+) \leq 0.
$$

Tomando $k = C_0/\lambda$ y usando que

$$(u_n - k)h((u_n - k)^+) = (u_n - k)^+ h((u_n - k)^+) \geq 0$$

se deduce que $(u_n - k)^+ = 0$, es decir $u_n \leq k$.

La desigualdad

$$u_n \geq -\frac{C_0}{\lambda}$$

se puede probar de forma análoga, o bien teniendo en cuenta que la función $v_n = -u_n$ verifica la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta v_n + \lambda v_n + \tilde{G}_n(x, v_n, \nabla v_n) = 0 \text{ en } \Omega \\ v_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

con $\tilde{G}_n(x, s, \xi) = -G_n(x, -s, -\xi)$, función que verifica las mismas propiedades que G_n, con lo que se deduce que

$$v_n \leq \frac{C_0}{\lambda} \iff u_n \geq -\frac{C_0}{\lambda}.$$

Paso 3. Estimación uniforme en $H_0^1(\Omega)$.

Gracias a las desigualdades que componen (2.1.12) se puede aplicar el Lema 2.1.1 a la ecuación (2.1.11). Obsérvese que al tener la cota uniforme de $\| u_n \|_{L^\infty(\Omega)}$, las constantes C y γ, así como la función h se pueden tomar independientemente de n.

Tomando $u = u_n$, $r = 0$ y $\varphi = 1$ en el Lema 2.1.1, la desigualdad (2.1.6) se escribe como

$$\int_\Omega | \nabla u_n |^2 \leq C \int_\Omega | h(u_n) |,$$

donde al estar la función $h(u_n)$ acotada independientemente de n, se deduce la acotación uniforme de u_n en $H_0^1(\Omega)$.

Paso 4. Definición de u.

Como consecuencia de las estimaciones anteriores, se deduce que existe una subsucesión de u_n, que vamos a seguir denotando u_n para no complicar la notación, y que existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tales que u_n converge a u en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil y por tanto en $L^p(\Omega)$ fuerte para todo p con $1 \leq p < +\infty$. Usando, bien la semicontinuidad inferior de la norma en $L^\infty(\Omega)$ con la topología $*$-débil, bien la convergencia puntual de u_n se tiene que

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_0}{\lambda}.$$

Paso 5. Convergencia en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

Se considera de nuevo la estimación (2.1.6) para $u = u_n$, $r = u$ y $\varphi = 1$, lo que da

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 \le -\int_\Omega \nabla u \nabla h(u_n - u) + C\int_\Omega |h(u_n - u)| + 2\gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 |h(u_n - u)|,$$

donde si n tiende a infinito, el segundo miembro converge a cero, (usando la convergencia en $H_0^1(\Omega)$ débil de u_n en la primera integral y el Teorema de la Convergencia Dominada en las dos integrales restantes), lo que prueba la convergencia de u_n hacia u en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

Paso 6. La función u es solución de (2.1.1).

Basta tomar límite en la ecuación (2.1.11), donde usando la convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y la acotación uniforme en $L^\infty(\Omega)$ de u_n se deduce que

$$\lambda u_n + G_n(x, u_n, \nabla u_n) \to H(x, u, \nabla u) \quad \text{en } L^1(\Omega) \text{ fuerte}$$

y por tanto la función u es solución de la ecuación (2.1.1). ∎

2.2. Unicidad de Solución para un Problema Quasilineal con Crecimiento Cuadrático.

El resultado principal de esta Sección se debe a G. Barles y F. Murat ([B M]), quienes prueban la unicidad de solución para la ecuación (2.1.1) bajo la imposición de ciertas hipótesis suplementarias sobre la función H.

Análogamente a la Sección 2.1, estamos interesados también en conseguir estimaciones de tipo general que nos serán de utilidad en Capítulos posteriores.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^d$, $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que para casi todo $x \in \Omega$, $H(x,.,.)$ es derivable y existe una función creciente $\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que

$$\text{(2.2.1)} \qquad \begin{cases} H(x,0,0) \in L^\infty(\Omega) \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \right| \le \alpha(|s|)(1 + |\xi|^2), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ \left| \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s,\xi) \right| \le \alpha(|s|)(1 + |\xi|), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Observación 2.2.1. Las desigualdades (2.2.1) implican la existencia de funciones crecientes $\omega_0, \omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tales que la función H verifica la desigualdad (2.1.3).

Supongamos también que se verifica (2.1.2). Entonces se tiene

Lema 2.2.1. (G. Barles, F. Murat) (Ver [B M]). *Sea un conjunto acotado $Z \subset L^\infty(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega) \cap Z$ y $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ verifican*

$$-\Delta u + H(x, u, \nabla u) = f \quad en\ \Omega, \tag{2.2.2}$$

entonces existen constantes $A, K > 0$, dependientes sólo de Z tales que introduciendo un cambio de variables a través de las funciones ψ y ϑ definidas por

$$\psi(s) = -\frac{1}{A} log(e^{-KAs} + \frac{1}{k}). \tag{2.2.3}$$

$$\vartheta(s) = \psi^{-1}(s) = -\frac{1}{KA} log(e^{-As} - \frac{1}{K}), \tag{2.2.4}$$

entonces la función $\hat{u} = \vartheta(u)$ verifica

$$-\Delta \hat{u} + B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) = \hat{f} = \frac{f}{\psi'(\hat{u})} \quad en\ \Omega. \tag{2.2.5}$$

Aquí, la función $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to R$ es una función de Carathéodory tal que para casi todo $x \in \Omega$ la función $B(x, ., .)$ es derivable y existe una función creciente $\beta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que, análogamente a (2.2.1) se tiene

$$\begin{cases} B(x, 0, 0) \in L^\infty(\Omega) \\ \left| \frac{\partial B}{\partial s}(x, s, \xi) \right| \le \beta(|\, s\,|)(1 + |\, \xi\,|^2),\ \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ \left| \frac{\partial B}{\partial \xi}(x, s, \xi) \right| \le \beta(|\, s\,|)(1 + |\, \xi\,|),\ \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

y además existen constantes $n, \rho > 0$, y $\theta \in (0, 1)$, que sólo dependen de Z, (y de H), tales que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene

$$\frac{\partial B}{\partial s}(x, s, \xi) - \frac{1}{2\theta n} \left| \frac{\partial B}{\partial \xi}(x, s, \xi) \right| \ge \rho. \tag{2.2.7}$$

Observación 2.2.2. Análogamente a la Observación 2.2.1, las desigualdades (2.2.6) implican la existencia de funciones crecientes $\hat{\omega}_0, \hat{\omega} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tales que la función B verifica desigualdades análogas a (2.2.3).

Las siguientes estimaciones van a llevar junto con el Lema 2.2.1 al resultado de unicidad para la ecuación (2.1.1).

Se considera una función de Carathéodory B verificando las propiedades (2.2.6) y (2.2.7). Dadas $\hat{u}, \hat{v} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\hat{f}, \hat{g} \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ verificando en el sentido de las distribuciones

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} + B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) = \hat{f}, \\ -\Delta \hat{v} + B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v}) = \hat{g}, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

se tiene el siguiente resultado

Lema 2.2.2. *Sea $S(s) = | s |^{n-1} s$ y sea $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.*

i) Si se define la función $\hat{w} = \hat{u} - \hat{v}$ se tiene

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{\theta}{2}) \int_\Omega S'(\hat{w}) \mid \nabla \hat{w} \mid^2 \varphi \\ &+ \int_\Omega \left[(B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) - B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v})) S(\hat{w}) + \frac{\theta}{2} S'(\hat{w}) \mid \nabla \hat{w} \mid^2 \right] \varphi \\ &= \langle \hat{f} - \hat{g}, S(\hat{w}) \varphi \rangle - \int_\Omega S(\hat{w}) \nabla (\hat{u} - \hat{v}) \nabla \varphi, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

donde los integrandos del miembro izquierdo son positivos.

ii) Sea $\hat{r} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\hat{w} = \hat{u} - \hat{v} - \hat{r}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{\theta}{2}) \int_\Omega S'(\hat{w}) \mid \nabla \hat{w} \mid^2 \varphi + \rho \int_\Omega \mid \hat{w} \mid^{n+1} \varphi \leq \langle \hat{f} - \hat{g}, S(\hat{w}) \varphi \rangle \\ &- \int_\Omega \varphi \nabla S(\hat{w}) \nabla \hat{r} - \int_\Omega S(\hat{w}) \nabla (\hat{u} - \hat{v}) \nabla \varphi \\ &+ M \int_\Omega [(1 + \mid \nabla \hat{u} \mid^2 + \mid \nabla \hat{v} \mid^2) \mid \hat{r} \mid \\ &+ (1 + \mid \nabla \hat{u} \mid + \mid \nabla \hat{v} \mid) \mid \nabla \hat{r} \mid] \mid \hat{w} \mid^n \varphi. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

iii) Tomando como en i) $\hat{w} = \hat{u} - \hat{v}$, se tiene

$$(1 - \frac{\theta}{2}) \int_\Omega S'(\hat{w}^+) \mid \nabla \hat{w}^+ \mid^2 + \rho \int_\Omega \mid \hat{w}^+ \mid^{n+1} \leq \langle \hat{f} - \hat{g}, S(\hat{w}^+) \rangle. \tag{2.2.11}$$

Demostración. Tomamos $\hat{w}\hat{u} - \hat{v} - \hat{r}$. Restando las dos ecuaciones que componen (2.2.8) y tomando $S(\hat{w})\varphi$ como función test en la ecuación resultante, se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi \nabla (\hat{u} - \hat{v}) \nabla S(\hat{w}) + \int_\Omega S(\hat{w}) \nabla (\hat{u} - \hat{v}) \nabla \varphi \\ &+ \int_\Omega (B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) - B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v})) S(\hat{w}) \varphi = \langle \hat{f} - \hat{g}, S(\hat{w}) \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Usando la igualdad $\nabla S(\hat{w}) = S'(\hat{w}) \nabla \hat{w}$, se deduce

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega S'(\hat{w}) \mid \nabla \hat{w} \mid^2 \varphi + \int_\Omega \big[B(x,\hat{u},\nabla \hat{u}) - B(x,\hat{v},\nabla \hat{v})\big] S(\hat{w})\varphi \\
&= \langle \hat{f} - \hat{g}, S(\hat{w})\varphi\rangle - \int_\Omega \varphi \nabla S(\hat{w}) \nabla \hat{r} - \int_\Omega S(\hat{w}) \nabla (\hat{u} - \hat{v}) \nabla \varphi.
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

Si definimos las funciones medibles $b_s, b_\xi : [0,1] \times \Omega$ por

$$
\begin{cases}
b_s(t,x) = \dfrac{\partial B}{\partial s}(x, t\hat{u}(x) + (1-t)\hat{v}(x), t \nabla \hat{u}(x) + (1-t) \nabla \hat{v}(x)), \\
b_\xi(t,x) = \dfrac{\partial B}{\partial \xi}(x, t\hat{u}(x) + (1-t)\hat{v}(x), t \nabla \hat{u}(x) + (1-t) \nabla \hat{v}(x)),
\end{cases}
\tag{2.2.13}
$$

que verifican, gracias a (2.2.6), las desigualdades

$$
\begin{cases}
\mid b_s(t,x) \mid \leq M(1+ \mid \nabla \hat{u} \mid^2 + \mid \nabla \hat{v} \mid^2) \\
\mid b_\xi(t,x) \mid \leq M(1+ \mid \nabla \hat{u} \mid + \mid \nabla \hat{v} \mid),
\end{cases}
\tag{2.2.14}
$$

con $M = \beta(\| \hat{u} \|_{L^\infty(\Omega)} + \| \hat{v} \|_{L^\infty(\Omega)})$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
&[B(x,\hat{u},\nabla \hat{u}) - B(x,\hat{v},\nabla \hat{v})]\, S(\hat{w}) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} [B(x, t\hat{u} + (1-t)\hat{v}, t \nabla \hat{u} + (1-t) \nabla \hat{v})]\, dt\ S(\hat{w}) \\
&= \int_0^1 b_s(t,x)(\hat{u} - \hat{v}) + b_\xi(t,x) \nabla (\hat{u} - \hat{v}) dt\ S(\hat{w}) \\
&= \int_0^1 [b_s(t,x)\hat{w}S(\hat{w}) + b_\xi(t,x) S(\hat{w}) \nabla \hat{w}]\, dt \\
&+ \int_0^1 [b_s(t,x)\hat{r} + b_\xi(t,x) \nabla \hat{r}]\, dt\ S(\hat{w}).
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

Se verifican las desigualdades

$$
\mid b_\xi(t,x) S(\hat{w}) \nabla \hat{w} \mid \leq \frac{1}{2\theta} \frac{S(\hat{w})^2}{S'(\hat{w})} \mid b_\xi(t,x) \mid^2 + \frac{\theta}{2} S'(\hat{w}) \mid \nabla \hat{w} \mid^2,
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 [b_s(t,x)\hat{r} + b_\xi(t,x) \nabla \hat{r}]\, dt\ S(\hat{w}) \\
&\geq -M\big[(1+ \mid \nabla \hat{u} \mid^2 + \mid \nabla \hat{v} \mid^2) \mid \hat{r} \mid \\
&+ (1+ \mid \nabla \hat{u} \mid + \mid \nabla \hat{v} \mid) \mid \nabla \hat{r} \mid\big] \mid S(\hat{w}) \mid,
\end{aligned}
$$

que se deduce de (2.2.14). Por tanto se puede escribir

$$
\begin{aligned}
&[B(x,\hat{u},\nabla\hat{u})-B(x,\hat{v},\nabla\hat{v})]\,S(\hat{w})\\
&\geq -\frac{\theta}{2}S'(\hat{w})\mid\nabla\hat{w}\mid^2\\
&+\int_0^1\left[b_s(t,x)\hat{w}S(\hat{w})-\frac{1}{2\theta}\frac{S(\hat{w})^2}{S'(\hat{w})}\mid b_\xi(t,x)\mid^2\right]dt\\
&-M\big[(1+\mid\nabla\hat{u}\mid^2+\mid\nabla\hat{v}\mid^2)\mid\hat{r}\mid\\
&+(1+\mid\nabla\hat{u}\mid+\mid\nabla\hat{v}\mid)\mid\nabla\hat{r}\mid\big]\mid S(\hat{w})\mid.
\end{aligned}\tag{2.2.16}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
&b_s(t,x)\hat{w}S(\hat{w})-\frac{1}{2\theta}\frac{S(\hat{w})^2}{S'(\hat{w})}\mid b_\xi(t,x)\mid^2\\
&=\mid\hat{w}\mid^{n+1}\left(b_s(t,x)-\frac{1}{2\theta n}\mid b_\xi(t,x)\mid^2\right)\\
&\geq\rho\mid\hat{w}\mid^{n+1},
\end{aligned}
$$

y por tanto, de la desigualdad (2.2.15) se deduce

$$
\begin{aligned}
&[B(x,\hat{u},\nabla\hat{u})-B(x,\hat{v},\nabla\hat{v})]\,S(\hat{w})\\
&\geq -\frac{\theta}{2}S'(\hat{w})\mid\nabla\hat{w}\mid^2+\rho\mid\hat{w}\mid^{n+1}\\
&-M\big[(1+\mid\nabla\hat{u}\mid^2+\mid\nabla\hat{v}\mid^2)\mid\hat{r}\mid\\
&+(1+\mid\nabla\hat{u}\mid+\mid\nabla\hat{v}\mid)\mid\nabla\hat{r}\mid\big]\mid\hat{w}\mid^n.
\end{aligned}\tag{2.2.17}
$$

Tomando en (2.2.12), $\hat{r}=0$ y teniendo en cuenta (2.2.17) se deduce (2.2.9). De (2.2.12) y (2.2.17) se deduce también (2.2.10).

Para obtener (2.2.11) se toma como función test $S(\hat{w}^+)$ y se razona de forma análoga a como se ha hecho para deducir (2.2.10). Aquí $\hat{r}=0$ y $\varphi=1$. ∎

Sea H verificando las Hipótesis (2.2.1) y (2.1.2). Se considera la ecuación

$$-\Delta u+H(x,u,\nabla u)=0 \quad \text{en } \Omega. \tag{2.2.18}$$

Definición 2.2.1. *Una función $u\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ se dice una subsolución de la ecuación (2.2.18) si verifica*

$$-\Delta u+H(x,u,\nabla u)\leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

La función $u \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ se dice supersolución de la ecuación (2.2.18) si verfica

$$-\Delta u + H(x,u,\nabla u) \geq 0 \quad en\ \Omega.$$

Teorema 2.2.1. (Barles-Murat) *Sean $u, v \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ una subsolución y una supersolución respectivamente de la ecuación (2.2.18). Si $u \leq v$ en $\partial\Omega$, (i.e. si $(u-v)^+ \in H_0^1(\Omega)$) entonces se verifica $u \leq v$ en Ω.*

Demostración. Por el Lema 2.2.1, las funciones $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ verifican (ya que $\psi' > 0$)

$$\begin{cases} -\Delta\hat{u} + B(x,\hat{u},\nabla\hat{u}) = \hat{f} \leq 0 \\ -\Delta\hat{v} + B(x,\hat{v},\nabla\hat{v}) = \hat{g} \geq 0. \end{cases}$$

El Lema 2.2.2 iii) da entonces

$$(1-\frac{\theta}{2})\int_\Omega \mid \nabla\hat{w}^+ \mid^2 S'(\hat{w}^+) + \rho\int_\Omega \mid \hat{w}^+ \mid^{n+1} \leq 0,$$

y por tanto se deduce que $\hat{w}^+ = 0$ en Ω, o lo que es lo mismo $\hat{u} \leq \hat{v}$ en Ω. Como ψ es creciente esto implica $u \leq v$ en Ω. ∎

Corolario 2.2.1. *Suponiendo que la función H verifica las Hipótesis (2.2.1) y (2.1.2). La ecuación (2.1.1) admite una única solución.*

Demostración. Gracias a la Observación 2.2.1, podemos aplicar el Teorema 2.1.1 para deducir la existencia de solución. El Teorema 2.2.1 da ahora la unicidad. ∎

Observación 2.2.3. La unicidad se tiene cuando buscamos soluciones de la ecuación (2.1.1) en $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Si se buscan soluciones que sólo esten en $H_0^1(\Omega)$ la unicidad puede fallar (ver [B M]).

Capítulo 3.

Homogeneización de un Problema de Dirichlet Lineal en Dominios Perforados.

En este Capítulo comenzamos con la homogeneización de problemas en dominios perforados, esto es dominios en cuya estructura aparecen agujeros. Las hipótesis que vamos a establecer sobre los agujeros van a significar que estos son suficientemente pequeños de forma que desaparecen en el límite.

El marco matemático en el cual vamos a trabajar para la homogeneización de problemas con agujeros va a ser similar (un poco más general) al tratado en [C M], (ver también [K M]) y que consiste en una adaptación del método de la energía introducido por L. Tartar ([TA1], [TA2]). Si bien D. Cioranescu y F. Murat justifican estas hipótesis mediante ejemplos, en nuestro caso la existencia de dominios verificándolas será consecuencia del Teorema 3.1. En este Capítulo, establecemos también resultados que usaremos más adelante, en el caso no lineal y que aquí nos permitirán rehacer el citado trabajo mejorando algunos resultados y en particular realizar la homogeneización para la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet en los dominios que estamos considerando.

La homogenización del problema de Dirichlet en dominios con agujeros para el caso lineal ha sido estudiado por varios autores, además de los trabajos ya mencionados ([C M] y [K M]) el problema ha sido estudiado usando técnicas de Γ-convergencia por H. Attouch y C. Picard (ver [A] y [A P]), quienes estudian el problema para dominios periódicos con pequeños agujeros mientras que en el caso general referenciamos los trabajos de G. Dal Maso y U. Mosco ([DM2], [DM3], [DM M1], [DM M2]) quienes realizan la homogeneización sin ningún tipo de restricción respecto a los agujeros, (éstos ya no tienen por qué desaparecer al final). El uso de técnicas de Γ-convergencia implica que el operador considerado debe ser simétrico y no proporciona un resultado de corrector. El problema general ha sido resuelto recientemente por G. Dal Maso y A. Garroni ([DM G]) adaptando el ya mencionado método del la energía de L. Tartar, ellos consiguen realizar la homogeneización sin suponer el operador simétrico y sin establecer ninguna hipótesis acerca de los agujeros así como establecer un resultado de corrector.

En nuestro caso, imponemos las siguientes hipótesis

Notación 3.1. Vamos a considerar $\epsilon > 0$ un parámetro real destinado a converger a cero. De hecho, ϵ sólo tomará valores en un conjunto numerable constituido por los términos de una sucesión que tiende a cero. Obsérvese que al tomar ϵ sólo una cantidad numerable de valores, una familia de conjuntos o de funciones parametrizadas con el índice ϵ será de hecho una sucesión.

Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y $T^\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión de conjuntos cerrados que van a representar los agujeros. Se define $\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T^\epsilon$.

Suponemos que existen una sucesión de funciones w^ϵ y existe una medida μ que verifican

(P1) $\qquad w^\epsilon \in H^1(\Omega),$

(P2) $\qquad w^\epsilon = 0 \text{ en } T^\epsilon,$

(P3) $\qquad 0 \leq w^\epsilon \leq 1,$

(P4) $\qquad w^\epsilon \rightharpoonup 1 \text{ en } H^1(\Omega),$

(P5) $\qquad \mu \in \mathcal{M}_b^0(\Omega),$

(P6)
$$\begin{cases} \text{Para toda } v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \text{ y todo } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tales que} \\ v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ en } H_0^1(\Omega), \\ \text{se verifica} \\ v \in L^1(\Omega, d\mu) \text{ y } \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla v^\epsilon \to \int_\Omega v d\mu. \end{cases}$$

$$
\text{(P7)} \qquad \begin{cases} \text{Para toda } v^\epsilon \in H^1(\Omega), \ v^\epsilon = 0 \text{ en } T^\epsilon \\ v^\epsilon \rightharpoonup 0, \ H^1(\Omega) \text{ débil}, \\ \text{se verifica} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla v^\epsilon \to 0. \end{cases}
$$

Observación 3.1. Estas propiedades son similares a las hipótesis establecidas sobre los agujeros T^ϵ en [C M], ver también [K M].

Se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Teorema 3.1. *Si existen $z^\epsilon, z \in H^1(\Omega)$ y existe una constante $\rho > 0$ tales que z^ϵ converge a z en $H^1(\Omega)$ débil, $z^\epsilon = 0$ en T^ϵ y $z \geq \rho$. Entonces existe una subsucesión ϵ_n de ϵ, existen funciones w^{ϵ_n} y existe μ verificando (P1),...,(P7).*

Si $\hat{\mu}$, $\hat{w}^{\epsilon_n}$, (la misma subsucesión ϵ_n) verifican también (P1),...,(P7) entonces

$$
\begin{cases} \hat{\mu} = \mu \\ \hat{w}^{\epsilon_n} - w^{\epsilon_n} \to 0, \quad H^1(\Omega) \textit{ fuerte.} \end{cases}
$$

En la demostración usaremos el siguiente Lema.

Lema 3.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ una sucesión doble en X y l un elemento de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) Existe el límite doble de la sucesión h y coincide con l.

ii) Para toda sucesión (n_k, m_k) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con n_k, m_k crecientes a infinito se tiene

$$
\exists \lim_{k \to \infty} h(n_k, m_k) = l.
$$

Demostración. Claramente i) implica ii). La demostración del recíproco es estándar, se supone que i) no es cierto y entonces se deduce que existe un conjunto abierto $G \in \tau$ con $l \in G$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen n_k, $m_k > k$ tales que $h(n_k, m_k) \notin G$, donde n_k, m_k se pueden suponer sucesiones crecientes. Esto lleva a una cotradicción con ii). ∎

Demostración del Teorema. Suponemos que $z = 1$, para lo cual basta con sustituir z^ϵ por $\tilde{z}_\epsilon = T_\rho(z^\epsilon)/\rho$.

Vamos a dividir la demostración en varias partes.

Paso 1.- Definición de ϵ_n, w^{ϵ_n} y μ.

Sean

$$\mathcal{A} = \{v^\epsilon \in H^1(\Omega) : \; v^\epsilon = 0 \text{ en } T^\epsilon, \; v^\epsilon \rightharpoonup 1 \text{ en } H^1(\Omega)\}$$

$$\alpha = \inf \left\{ \liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 : \; \{v^\epsilon\} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se considera $\{v_n^\epsilon\} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v_n^\epsilon|^2 < \alpha + \frac{1}{n};$$

y donde podemos suponer que v_n^ϵ verifica además que $0 \leq v_n^\epsilon \leq 1$, ya que si no es así, tomando

$$K(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ s & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ 1 & \text{si } s \geq 1, \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} \{K(v_n^\epsilon)\} \in \mathcal{A} \\ 0 \leq K(v_n^\epsilon) \leq 1 \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla K(v_n^\epsilon)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v_n^\epsilon|^2 . \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Rellich a la sucesión v_n^ϵ (n fijo) y el Teorema de Convergencia Dominada se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$ la sucesión v_n^ϵ converge a 1 en $L^2(\Omega)$ fuerte cuando ϵ tiende a cero. Existe por tanto una subsucesión ϵ_n de ϵ que decrece a cero, tal que definiendo $w^{\epsilon_n} = v_n^{\epsilon_n}$ se tiene

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_n}|^2 < \alpha + \frac{2}{n}, \\ \displaystyle\int_\Omega |w^{\epsilon_n} - 1|^2 < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

de lo que se deduce en particular que la sucesión w^{ϵ_n} converge a 1 en $H^1(\Omega)$ débil. Extrayendo otra subsucesión si es necesario se puede también suponer que existe una medida de Radon positiva μ tal que $|\nabla w^{\epsilon_n}|^2 \chi_\Omega \rightharpoonup \mu$ en el sentido $*$-débil de las medidas. La sucesión w^{ϵ_n} verifica claramente las propiedades (P1),...,(P4).

Paso 2.- La sucesión w^{ϵ_n} verifica (P7). Esto es, para toda sucesión v^{ϵ_n} en $H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} v^{\epsilon_n} \rightharpoonup 0 \text{ en } H^1(\Omega), \\ v^{\epsilon_n} = 0 \text{ en } T^{\epsilon_n}, \end{cases} \tag{3.1}$$

se tiene

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} \to 0. \tag{3.2}$$

<u>Demostración</u>.- Sea $v^{\epsilon_n} \in H^1(\Omega)$ verificando (3.1). Si v^{ϵ_n} converge a cero en $H^1(\Omega)$ fuerte entonces (3.2) es evidente por (P4). Luego si (3.2) no es cierto, entonces existe una subsucesión $v^{\epsilon_{n'}}$ de v^{ϵ_n} tal que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v^{\epsilon_{n'}}|^2 \to a > 0. \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_{n'}} \nabla v^{\epsilon_{n'}} \to b \neq 0. \end{cases}$$

Entonces, para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla (w^{\epsilon_{n'}} + \lambda v^{\epsilon_{n'}})|^2$$
$$= \int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_{n'}}|^2 + \lambda^2 \int_\Omega |\nabla v^{\epsilon_{n'}}|^2 + 2\lambda \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_{n'}} \nabla v^{\epsilon_{n'}} \to \alpha + \lambda^2 a + 2\lambda b.$$

Tomando $\lambda = -b/a$ se tiene por tanto

$$\int_\Omega |\nabla (w^{\epsilon_{n'}} + \lambda v^{\epsilon_{n'}})|^2 \to \alpha - \frac{b^2}{a} < \alpha.$$

Pero, la sucesión $r^{\epsilon_{n'}} = w^{\epsilon_{n'}} + \lambda v^{\epsilon_{n'}}$ converge a 1 en $H^1(\Omega)$ débil, por lo que si se define

$$r^\epsilon = \begin{cases} z^\epsilon \text{ si } \epsilon \notin \{\epsilon_{n'}\} \\ r^{\epsilon_{n'}} \text{ si } \epsilon = \epsilon_{n'}, \end{cases}$$

entonces la sucesión r^ϵ está en $\mathcal{A}$ y verifica

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla r^\epsilon|^2 \leq \lim_{\epsilon_{n'} \to 0} \int_\Omega |\nabla r^{\epsilon_{n'}}|^2 < \alpha,$$

en contradicción con la definición de α.

Paso 3.- Dada una sucesión $\varphi_m \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_m \to 0 \text{ en } H^1(\Omega), \\ \varphi_m \text{ acotada en } L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\epsilon_n \to 0 \\ m \to \infty}} \int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_n}|^2 \varphi_m = 0.$$

Demostración.- Usando el Lema 3.1, basta ver que para todo par de sucesiones de números naturales n_k, m_k crecientes a infinito se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_{n_k}}|^2 \varphi_{m_k} = 0. \tag{3.3}$$

Para probar esto, observemos que la sucesión $v^{\epsilon_{n_k}} = w^{\epsilon_{n_k}}\varphi_{m_k}$ está en $H^1(\Omega)$, vale cero en T^ϵ, converge a cero en $L^2(\Omega)$ fuerte y tiene por gradiente

$$\nabla v^{\epsilon_{n_k}} = \varphi_{m_k}\nabla w^{\epsilon_{n_k}} + w^{\epsilon_{n_k}}\nabla\varphi_{m_k},$$

el cual está acotado en $L^2(\Omega)$ independientemente de k, (aparecen productos de funciones que están acotadas en $L^\infty(\Omega)$ por funciones que están acotadas en $L^2(\Omega)$) de lo que se deduce que $v^{\epsilon_{n_k}}$ converge a cero en $H^1(\Omega)$ débil y por tanto, aplicando el Paso 2 tendremos

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_{n_k}}\nabla v^{\epsilon_{n_k}} \to 0,$$

esto es

$$\int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_{n_k}}|^2 \varphi_{m_k} + \int_\Omega w^{\epsilon_{n_k}}\nabla w^{\epsilon_{n_k}}\nabla\varphi_{m_k} \to 0. \tag{3.4}$$

Ahora, la segunda integral de (3.4) converge a cero ya que $w^{\epsilon_{n_k}}\nabla\varphi_{m_k}$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ fuerte y $\nabla w^{\epsilon_{n_k}}$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ débil. Por tanto, de (3.4) se deduce (3.3).

Paso 4.- Se verifica (P5).

Demostración.- Queremos probar que para todo conjunto Borel $A \subset \Omega$ de capacidad nula se verifica que $\mu(A) = 0$. En realidad, puesto que

$$\mu(A) = sup\{\mu(K):\ K \subset A,\ K \text{ compacto }\},$$

basta probar que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ con $cap(K) = 0$ se tiene $\mu(K) = 0$. Dado ahora un conjunto compacto $K \subset \Omega$ de capacidad nula, existe una sucesión $\varphi_m \in C_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_m \ge \chi_K \\ 0 \le \varphi_m \le 1 \\ \varphi_m \to 0,\ H^1(\Omega) \text{ fuerte.} \end{cases}$$

Usando el Paso 3 tendremos

$$\lim_{\substack{\epsilon_n \to 0 \\ m \to \infty}} \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi_m = 0,$$

que gracias a que $\mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2$ converge en el sentido de $*$-débil de las medidas hacia μ implica

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{\epsilon_n \to 0} \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi_m = \lim_{m \to \infty} \int_\Omega \varphi_m d\mu = 0.$$

Como

$$\mu(K) \leq \int_\Omega \varphi_m d\mu, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

se deduce que $\mu(K) = 0$.

Paso 5.- Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonces $\varphi \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ y se verifica

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi = \int_\Omega \varphi \, d\mu. \tag{3.5}$$

Demostración.- Existen funciones φ_m tales que

$$\begin{cases} \varphi_m \in C_0^1(\Omega), \\ \varphi_m \text{ acotadas en } L^\infty(\Omega), \\ \varphi_m \to \varphi, \ \mu - \text{e.c.t. en } \Omega, \end{cases}$$

con lo que por el Teorema de Convergencia Dominada $\varphi \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ y φ_m converge a φ en $L^1(\Omega, d\mu)$ fuerte. Se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi - \int_\Omega \varphi d\mu \right| &\leq \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \mid \varphi_m - \varphi \mid \\ &+ \left| \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi_m - \int_\Omega \varphi_m d\mu \right| + \int_\Omega \mid \varphi_m - \varphi \mid d\mu \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \varphi - \int_\Omega \varphi d\mu \right| &\leq \limsup_{\epsilon_n \to 0} \int_\Omega \mid \nabla w^{\epsilon_n} \mid^2 \mid \varphi_m - \varphi \mid \\ &+ \int_\Omega \mid \varphi_m - \varphi \mid d\mu. \end{aligned}$$

Tomando ahora límite cuando m tiende a infinito y teniendo en cuenta el Paso 3 se deduce (3.5).

Paso 6.- Sean v^{ϵ_n} y v tales que

$$\begin{cases} v^{\epsilon_n} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon_n}), \\ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ v^{\epsilon_n} \rightharpoonup v, \; H^1(\Omega) \text{ débil.} \end{cases}$$

Entonces

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} \to \int_\Omega v d\mu. \tag{3.6}$$

Demostración.- Se tiene

$$v^{\epsilon_n} - w^{\epsilon_n} v \rightharpoonup 0, \quad H_0^1(\Omega) \text{ débil}$$

$$v^{\epsilon_n} - w^{\epsilon_n} v \in H_0^1(\Omega^{\epsilon_n}),$$

luego por el Paso 2 se tiene

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla (v^{\epsilon_n} - w^{\epsilon_n} v) \to 0.$$

Esto es

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_n}|^2 v - \int_\Omega w^{\epsilon_n} \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v \to 0. \tag{3.7}$$

El Paso 5 da

$$\int_\Omega |\nabla w^{\epsilon_n}|^2 v \to \int_\Omega v \, d\mu.$$

Respecto a la tercera integral de (3.7), la propiedad (P3) junto con el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue establecen que $w^{\epsilon_n} \nabla v$ converge en $L^2(\Omega)$ fuerte, como ∇w^{ϵ_n} converge en $L^2(\Omega)$ débil. Se tiene

$$\int_\Omega w^{\epsilon_n} \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v \to 0$$

y por tanto, de (3.7) se deduce (3.6).

Para completar la demostración de la propiedad (P7) basta eliminar la hipótesis $v \in L^\infty(\Omega)$ en el Paso 6. Para ello necesitamos

Paso 7.- Sean $v_m^{\epsilon_n} \in H^1(\Omega)$ con $v_m^{\epsilon_n} = 0$ en T^{ϵ_n} y $v_m^{\epsilon_n}$ convergiendo a cero $H^1(\Omega)$ débil cuando ϵ_n converge a cero y m converge a infinito, (los dos parámetros a la vez). Entonces

$$\lim_{\substack{\epsilon_n \to 0 \\ m \to \infty}} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v_m^{\epsilon_n} \right| = 0. \tag{3.8}$$

Demostración.- Basta usar el Lema 3.1 y el Paso 2.

Paso 8.- La sucesión w_n^ϵ verifica la propiedad (P6). Esto es, si $v^{\epsilon_n} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon_n})$, $v \in H_0^1(\Omega)$ son tales que v^{ϵ_n} converge a v en $H^1(\Omega)$ débil. Entonces $v \in L^1(\Omega, d\mu)$ y se verifica

$$\int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} \to \int_\Omega v d\mu. \tag{3.9}$$

Demostración.- Supongamos que $v^{\epsilon_n} \geq 0$. Tomando $v_m^{\epsilon_n} = T_m(v^{\epsilon_n}) - v^{\epsilon_n}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega T_m(v) d\mu \right| &\leq \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v_m^{\epsilon_n} \right| \\ &+ \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla T_m(v^{\epsilon_n}) - \int_\Omega T_m(v) d\mu \right|, \end{aligned}$$

donde por el paso 6, el segundo término del miembro derecho converge a cero con ϵ_n. Luego, se tiene

$$\limsup_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega T_m(v) d\mu \right| \leq \limsup_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v_m^{\epsilon_n} \right|.$$

Si ahora m tiende a infinito, el Paso 7 establece que el miembro derecho tiende a cero, con lo que se tiene

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega T_m(v) d\mu \right| = 0. \tag{3.10}$$

Esto significa en particular que $\int_\Omega T_m(v)\, d\mu$ está acotada independientemente de m con lo que aplicando el Teorema de Convergencia Monótona se deduce que $v \in L^1(\Omega, d\mu)$ y que $T_m(v)$ converge a v en $L^1(\Omega, d\mu)$ fuerte.

Ahora

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega v d\mu \right| &\leq \int_\Omega \mid v - T_m(v) \mid d\mu \\ + \limsup_{\epsilon_n \to 0} \left| \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla v^{\epsilon_n} - \int_\Omega T_m(v) d\mu \right|&, \end{aligned}$$

de donde tomando límite en m se deduce (3.9) a partir de (3.10) y de la convergencia fuerte de $T_m(v)$ hacia v en $L^1(\Omega, d\mu)$.

Si no se verifica $v^{\epsilon_n} \geq 0$ basta considerar la descomposición $v^{\epsilon_n} = (v^{\epsilon_n})^+ + (v^{\epsilon_n})^-$ y aplicar lo ya probado.

Paso 9.- Unicidad.

Sean $\hat{\mu}$, $\hat{w}^{\epsilon_n}$ verificando también las propiedades (P1),...,(P7). Gracias a la propiedad (P7), se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(w^{\epsilon_n} - \hat{w}^{\epsilon_n})|^2 &= \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n}\, \nabla(w^{\epsilon_n} - \hat{w^{\epsilon_n}}) \\ &\quad - \int_\Omega \nabla \hat{w}^{\epsilon_n}\, \nabla(w^{\epsilon_n} - \hat{w^{\epsilon_n}}) \\ &\quad \to 0,\end{aligned}$$

lo que da la convergencia de $w^{\epsilon_n} - \hat{w}^{\epsilon_n}$ en $H^1(\Omega)$ fuerte. Ahora, para toda función $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ se tiene haciendo uso de la parte probada y de la propiedad (P6)

$$\begin{aligned}\int \varphi d\mu &= \lim_{\epsilon_n \to 0} \int_\Omega \nabla w^{\epsilon_n} \nabla(w^{\epsilon_n}\varphi) \\ &= \lim_{\epsilon_n \to 0} \int_\Omega \nabla \hat{w}^{\epsilon_n} \nabla(w^{\epsilon_n}\varphi) \\ &= \int \varphi d\hat{\mu},\end{aligned}$$

de donde se deduce la igualdad $\mu = \hat{\mu}$ en Ω. ∎

Nos situamos ahora en las condiciones del comienzo del Capítulo. Esto es, consideramos un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y una sucesión de conjuntos cerrados T^ϵ tales que existen una sucesión de funciones w^ϵ y una medida μ verificando las propiedades (P1),...,(P7). Vamos a dar varios Lemas que resultarán muy útiles a la hora de calcular ciertos límites y que serán utilizados con frecuencia en los Capítulos posteriores.

Tanto en los resultados de este Capítulo, como en los de los siguientes se va a hacer uso de las notaciones de Landau.

Notación 3.2. Por o(1) se entenderá una cantidad que tiende a cero con ϵ.

Lema 3.2. *Sea S un conjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$ y sea $h : S \to \mathbb{R}$ la restricción a S de una función de clase C^1 definida sobre un conjunto abierto que contiene a S y tal que sus derivadas parciales están acotadas en S. Sean z^ϵ, $z \in H^1(\Omega)^l$ con z^ϵ convergiendo a z en $H^1(\Omega)^l$ fuerte y tales que para todo ϵ, $(w^\epsilon, z^\epsilon) \in S$ en casi todo Ω y $h(w^\epsilon, z^\epsilon) \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$. Entonces*

$$\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \frac{\partial h}{\partial w}(w^\epsilon, z^\epsilon) \to \int_\Omega h(1, z) d\mu.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{cases} \nabla h(w^\epsilon, z^\epsilon) = \dfrac{\partial h}{\partial w}(w^\epsilon, z^\epsilon) \nabla w^\epsilon + \dfrac{\partial h}{\partial z}(w^\epsilon, z^\epsilon) \nabla z^\epsilon \\ h(w^\epsilon, z^\epsilon) \rightharpoonup h(1, z) \text{ en } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Aplicando (P6) se tiene

$$\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \frac{\partial h}{\partial w}(w^\epsilon, z^\epsilon) + \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial z}(w^\epsilon, z^\epsilon) \nabla w^\epsilon \nabla z^\epsilon \to \int_\Omega h(1, z) d\mu$$

donde la segunda integral del miembro izquierdo converge a cero ya que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial z}(w^\epsilon, z^\epsilon) \nabla z^\epsilon \to \dfrac{\partial h}{\partial z}(1, z) \nabla z \text{ en } L^2(\Omega), \\ \nabla w^\epsilon \to 0 \text{ en } L^2(\Omega). \blacksquare \end{cases}$$

Lema 3.3. *Sean $\varphi^\epsilon, \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, φ^ϵ convergiendo a φ en $H_0^1(\Omega)$ fuerte y φ^ϵ acotada en $L^\infty(\Omega)$. Entonces, se verifica*

$$\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi^\epsilon \to \int_\Omega \varphi d\mu.$$

Observación 3.2. Tomando $\varphi^\epsilon = \varphi$. Este lema nos dice en particular que $|\nabla w^\epsilon|^2$ converge a μ en el sentido $*$-débil de las medidas.

Demostración. Basta Tomar en el Lema 3.2 $z^\epsilon = \varphi^\epsilon$ y $h(w, z) = wz$. $\blacksquare$

Lema 3.4. *Sea $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y sea una sucesión $\varphi^\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, φ^ϵ acotada en $L^\infty(\Omega)$. Entonces se verifica*

$$\int_\Omega |\nabla (w^\epsilon u - u)|^2 \varphi^\epsilon = \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 u^2 \varphi^\epsilon + o(1). \tag{3.11}$$

Demostración. Basta efectuar el cálculo

$$\int_\Omega |\nabla (w^\epsilon u - u)|^2 \varphi^\epsilon = \int_\Omega |(w^\epsilon - 1) \nabla u + u \nabla w^\epsilon|^2 \varphi^\epsilon$$

$$= \int_\Omega |w^\epsilon - 1|^2 |\nabla u|^2 \varphi^\epsilon + \int_\Omega u^2 |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi^\epsilon + 2 \int_\Omega (w^\epsilon - 1) u \varphi^\epsilon \nabla u \nabla w^\epsilon$$

$$= \int_\Omega u^2 |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi^\epsilon + o(1),$$

donde hemos usado las propiedades (P3), (P4) así como el Teorema de Convergencia Dominada. ∎

Lema 3.5. *Sean $z,\varphi \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ y sean $v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, v^ϵ convergiendo a v en $H_0^1(\Omega)$ débil. Entonces*

$$\int_\Omega \varphi \nabla (w^\epsilon z) \nabla v^\epsilon \to \int_\Omega \varphi \nabla z \nabla v + \int_\Omega \varphi v z d\mu.$$

Demostración. Vamos a comenzar probando que si $z \in W^{1,\infty}(\Omega)$, v^ϵ, v en las condiciones del Lema, entonces

$$\int_\Omega \nabla (w^\epsilon z) \nabla v^\epsilon \to \int_\Omega \nabla z \nabla v + \int_\Omega v z d\mu.$$

Para ello, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla (w^\epsilon z) \nabla v^\epsilon &= \int_\Omega z \nabla w^\epsilon \nabla v^\epsilon + \int_\Omega w^\epsilon \nabla z \nabla v^\epsilon \\ &= \int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla (v^\epsilon z) - \int_\Omega v^\epsilon \nabla w^\epsilon \nabla z \\ &+ \int_\Omega w^\epsilon \nabla z \nabla v^\epsilon \\ &\to \int_\Omega v z d\mu + \int_\Omega \nabla z \nabla v,\end{aligned}$$

donde para pasar al límite en la primera integral hemos usado la propiedad (P6), en la segunda que $v^\epsilon \nabla z$ converge en $L^2(\Omega)$ fuerte, ∇w^ϵ en $L^2(\Omega)$ débil y la tercera es análoga a la segunda.

Si ahora z está sólo en $H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ basta tomar $z_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$, z_n convergiendo a z en $H^1(\Omega)$ fuerte y z_n acotada uniformemente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \nabla (w^\epsilon z) \nabla v^\epsilon - \int_\Omega \nabla z \nabla v - \int_\Omega v z d\mu\right| \\ &\leq \left|\int_\Omega \nabla (w^\epsilon z_n) \nabla v^\epsilon - \int_\Omega \nabla z_n \nabla v - \int_\Omega v z_n d\mu\right| \\ &+ \left|\int_\Omega \nabla (w^\epsilon (z - z_n)) \nabla v^\epsilon\right| + \left|\int_\Omega v(z_n - z) d\mu\right|.\end{aligned}$$

Se usa ahora que $z_n v$ converge a zv en $L^1(\Omega, d\mu)$ fuerte y que

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \left|\int_\Omega \nabla (w^\epsilon (z - z_n)) \nabla v^\epsilon\right| = 0. \tag{3.12}$$

Para probar (63.12), se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \nabla (w^\epsilon(z - z_n)) \nabla v^\epsilon \right|^2 \\
&\leq \int_\Omega | \nabla (w^\epsilon(z - z_n)) |^2 \int_\Omega | \nabla v^\epsilon |^2 \\
&\leq C \int_\Omega | \nabla (w^\epsilon(z - z_n)) |^2 \\
&\leq 2C \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 | z - z_n |^2 + 2C \int_\Omega | w^\epsilon |^2 | \nabla (z - z_n) |^2,
\end{aligned}
$$

donde C denota una constante positiva.

Usando el Teorema de Convergencia Dominada y la convergencia de z_n a z en $H^1(\Omega)$ fuerte, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega | w^\epsilon |^2 | \nabla (z - z_n) |^2 = 0.$$

Para probar ahora que también se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 | z - z_n |^2 = 0,$$

se usa el Paso 2 de la demostración del Teorema 3.1, paso que se demuestra a partir de la propiedad (P7).

En el caso general, en el cual también aparece la función φ, se tiene usando la parte ya probada que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi \nabla (w^\epsilon z) \nabla v^\epsilon = \int_\Omega \nabla (w^\epsilon \varphi z) \nabla v^\epsilon - \int_\Omega w^\epsilon z \nabla \varphi \nabla v^\epsilon \\
&\to \int_\Omega \nabla (\varphi z) \nabla v + \int_\Omega \varphi z v d\mu - \int_\Omega z \nabla \varphi \nabla v \\
&= \int_\Omega \varphi \nabla z \nabla v + \int_\Omega \varphi z v d\mu,
\end{aligned}
$$

lo que acaba la demostración. ∎

Lema 3.6. *Sean $\psi^\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, ψ^ϵ acotadas en $L^\infty(\Omega)$, ψ^ϵ convergiendo a cero en $H^1(\Omega)$ débil. Sea también una función $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Entonces*

$$\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \psi^\epsilon \varphi \leq \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1). \tag{3.13}$$

Demostración. Gracias a la propiedad (P7) de w^ϵ se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \psi^\epsilon \varphi &= \int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla (w^\epsilon \psi^\epsilon \varphi) \\ &- \int_\Omega w^\epsilon \varphi \nabla w^\epsilon \nabla \psi^\epsilon - \int_\Omega w^\epsilon \psi^\epsilon \nabla w^\epsilon \nabla \varphi \\ &= - \int_\Omega w^\epsilon \varphi \nabla w^\epsilon \nabla \psi^\epsilon + o(1) \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \psi^\epsilon|^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1),\end{aligned}$$

que es el resultado buscado. ∎

En general w^ϵ no converge a 1 en $H^1(\Omega)$ fuerte, ya que esto implicaría que μ es cero mientras que en [C M] aparecen ejemplos en los cuales μ no es cero. Se tiene sin embargo

Teorema 3.2. *La sucesión w^ϵ converge a 1 en $W^{1,1}(\Omega)$ fuerte, (y por tanto en $W^{1,p}(\Omega)$ fuerte para $1 \leq p < 2$.)*

Demostración. Sabemos que w^ϵ converge a 1 en $L^2(\Omega)$ fuerte y por tanto, por el Teorema de Egorov, existe una subsucesión $w^{\epsilon'}$ que converge casi uniformente. Esto es, para todo $\delta > 0$ existe un conjunto A_δ contenido en Ω con $\ell(\Omega \setminus A_\delta) < \delta$, tal que $w^{\epsilon'}$ converge uniformemente a 1 en A_δ.

Para toda función $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ y para todo ρ con $0 < \rho < 1$ se considera la sucesión

$$v^\epsilon = (\rho + T_\rho(w^\epsilon - 1))\varphi,$$

la cual está en $H_0^1(\Omega^\epsilon)$ y converge a $\rho\varphi$ en $H^1(\Omega)$ débil. Por la propiedad (P6) se tendrá

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla w^{\epsilon'} \nabla v^{\epsilon'} &= \int_\Omega \chi_{|w^{\epsilon'}-1|<\rho} |\nabla w^{\epsilon'}|^2 \varphi \\ &+ \int_\Omega (\rho + T_\rho(w^\epsilon - 1)) \nabla w^{\epsilon'} \nabla \varphi \to \rho \int_\Omega \varphi d\mu.\end{aligned}$$

Pero

$$\int_\Omega (\rho + T_\rho(w^\epsilon - 1)) \nabla w^{\epsilon'} \nabla \varphi \to 0,$$

(convergencia débil por convergencia fuerte). Además por la convergencia uniforme de $w^{\epsilon'}$ a 1 en A_δ se deduce que para ϵ' suficientemente pequeño

$$A_\delta \subset \{x : |w^{\epsilon'}(x) - 1| < \rho\}$$

y por tanto se tiene

$$\limsup_{\epsilon'\to 0}\int_{A_\delta} |\nabla w^{\epsilon'}|^2 \varphi \le \rho \int_\Omega \varphi d\mu.$$

Si ahora hacemos que ρ tienda a cero se deduce

$$\int_{A_\delta} |\nabla w^{\epsilon'}|^2 \varphi \to 0.$$

Esto significa que $\chi_{A_\delta} \nabla w^{\epsilon'}$ converge a cero en $L^2_{loc}(\Omega)$ fuerte y por tanto que $\nabla w^{\epsilon'}$ converge en medida en A_δ. Como esto es para todo $\delta > 0$, se deduce que ∇w^{ϵ} converge en medida a cero en Ω. Ahora la convergencia en medida y la convergencia en $L^1(\Omega)$ débil implican la convergencia en $L^1(\Omega)$ fuerte. ▮

Observación 3.3. En la demostración anterior se puede de hecho tomar q con $1 \le q < 2$ y A_δ con $cap_q(A_\delta) < \delta$.

Observación 3.4. Otra consecuencia del Teorema 3.2 es que si $|\nabla w^\epsilon|^2$ converge en $L^1(\Omega)$ débil entonces converge en $L^1(\Omega)$ fuerte y por tanto $\mu \equiv 0$.

La propiedad (P6) establece en particular que si una función $v \in H^1(\Omega)$ es límite en $H^1(\Omega)$ débil de una sucesión que se anula en T^ϵ, entonces $v \in L^1(\Omega, d\mu)$. El siguiente Teorema mejora este resultado estableciendo que de hecho $v \in L^2(\Omega, d\mu)$.

Teorema 3.3. *Sean $v^\epsilon \in H^1_0(\Omega^\epsilon)$, $v \in H^1_0(\Omega)$ con v^ϵ convergiendo a v en $H^1_0(\Omega)$ débil. Entonces $v \in L^2(\Omega, d\mu)$ y*

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 \ge \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega v^2 d\mu. \tag{3.14}$$

Demostración. Sea $\varphi \in H^1_0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(v^\epsilon - w^\epsilon\varphi)|^2 &= \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 + \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi^2 \\ &+ \int_\Omega |w^\epsilon|^2 |\nabla\varphi|^2 - 2\int_\Omega \varphi \nabla v^\epsilon \nabla w^\epsilon \\ &- 2\int_\Omega w^\epsilon \nabla v^\epsilon \nabla\varphi + 2\int_\Omega w^\epsilon\varphi \nabla w^\epsilon \nabla\varphi.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando los Lemas 3.3 y 3.5 se tendrá

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(v^\epsilon - w^\epsilon\varphi)|^2 &= \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 + \int_\Omega \varphi^2 d\mu \\ &+ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - 2\int_\Omega v\varphi d\mu \\ &- 2\int_\Omega \nabla v \nabla\varphi + o(1).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Si en particular se toma $\varphi = T_n(v)$, la ecuación (3.16) conduce a

$$
\begin{aligned}
(3.17) \qquad & 0 \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 + \int_\Omega T_n(v)^2 d\mu + \int_\Omega |\nabla T_n(v)|^2 \\
& - 2 \int_\Omega v T_n(v) d\mu - 2 \int_\Omega \nabla v \nabla T_n(v).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_\Omega T_n(v)^2 d\mu - 2 \int_\Omega v T_n(v) d\mu \leq - \int_\Omega v T_n(v) d\mu,$$

se deduce de (3.17) que $\int_\Omega v T_n(v) d\mu$ está acotada independientemente de n, y puesto que $T_n(v)$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$, el Teorema de la Convergencia Monótona implica que $v \in L^2(\Omega, d\mu)$.

Ahora se puede aplicar el Teorema de Convergencia Dominada así como el hecho de que $T_n(v)$ converge a v en $H^1(\Omega)$ fuerte para pasar al límite en las integrales respecto de μ en (3.17) con lo que se obtiene (3.14). ∎

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado de corrector, i.e. una aproximación de ∇u^ϵ en $L^2(\Omega)$ fuerte.

Teorema 3.4. *Sean $v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ con v^ϵ convergiendo a v en $H_0^1(\Omega)$ débil, tales que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v^\epsilon|^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega v^2 d\mu.$$

Entonces para toda sucesión φ_n tal que

$$\begin{cases} \varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ \varphi_n \to v \quad \text{en } H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu), \end{cases}$$

se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - w^\epsilon \varphi_n)|^2 = 0.$$

Demostración. Se considera la ecuación (3.16) con $\varphi = \varphi_n$. Tomando límite en ϵ y luego en n se deduce el resultado. ∎

Corolario 3.1. *En las condiciones del Teorema 3.4. Si $\varphi_n = T_n(v)$ se tiene*

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - w^\epsilon T_n(v))|^2 = 0.$$

Corolario 3.2. *En las condiciones del Teorema 3.4. Si* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *se tiene*

$$v^\epsilon - w^\epsilon v \to 0 \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Inmediato a partir del Corolario 3.1. ∎

Corolario 3.3. *En las condiciones del Teorema 3.4. Para todo* p *con* $1 \leq p < 2$, v^ϵ *converge a* v *en* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *fuerte.*

Demostración. Se deduce del Corolario 3.1 y de que

$$\nabla (w^\epsilon T_n(v)) = T_n(v) \nabla w^\epsilon + w^\epsilon \nabla T_n(v),$$

donde sabemos que ∇w^ϵ converge en $L^1(\Omega)$ fuerte. ∎

Como aplicación de los resultados vistos en este capítulo, vamos a estudiar la Homogeneización de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet en dominios con agujeros. Ver p. ej. [A P], [C M], [DM M1], [DM M2] y [DM G].

Teorema 3.5. *Sean* f^ϵ, $f \in H^{-1}(\Omega)$, f^ϵ *convergiendo a* f *en* $H^{-1}(\Omega)$ *fuerte. Sea* u^ϵ *la solución del problema*

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{cases} -\Delta u^\epsilon = f^\epsilon & \text{en } \Omega^\epsilon \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon). \end{cases}$$

Entonces

$$u^\epsilon \rightharpoonup u, \ H_0^1(\Omega) \text{ débil}$$

con u *solución del problema*

$$\text{(3.19)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \text{ en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu). \end{cases}$$

Además se tiene

$$\text{(3.20)} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 d\mu$$

y por tanto se pueden aplicar el Teorema 3.4 y los Corolarios 3.1, 3.2, 3.3.

Demostración. La demostración está tomada de [C M]. De (3.18) se deduce que la sucesión u^ϵ está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y por tanto, que existe una subsucesión $u^{\epsilon'}$ de u^ϵ y existe una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $u^{\epsilon'}$ converge a u en $H_0^1(\Omega)$ débil.

Dada $\varphi \in H_0^1(\Omega^{\epsilon'}) \cap L^\infty(\Omega)$ se considera $w^{\epsilon'}\varphi \in H_0^1(\Omega^{\epsilon'})$ como función test en (3.18), con lo que se tiene

$$\int_\Omega \nabla u^{\epsilon'} \nabla (w^{\epsilon'}\varphi) = \langle f^{\epsilon'}, w^{\epsilon'}\varphi \rangle.$$

El Lema 3.5 y la convergencia fuerte de $f^{\epsilon'}$ en $H^{-1}(\Omega)$ dan ahora

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi d\mu = \langle f, \varphi \rangle. \tag{3.21}$$

Por densidad, (3.21) es cierta para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu)$ y por tanto u es solución de (3.19). Del hecho de que (3.19) tiene solución única, se deduce que en realidad toda la sucesión u^ϵ converge a u.

Para la estimación de la energía basta usar u^ϵ como función test en (3.18), lo que da

$$\int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 = \langle f^\epsilon, u^\epsilon \rangle.$$

Tomando ahora límite en ϵ se llega a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 = \langle f, u \rangle. \tag{3.22}$$

Si en (3.19) se toma u como función test se tiene también

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 d\mu = \langle f, u \rangle$$

que junto con (3.22) da (3.20). ∎

Capítulo 4.

El Problema Cuadrático.

En este Capítulo vamos a comenzar con los problemas de Homogeneización en dominios con agujeros para ecuaciones del tipo de las estudiadas en el Capítulo 2. Concretamente, aquí estudiamos el caso en que la aplicación H es de la forma $H(x, s\xi) = \lambda s - \gamma \mid \xi \mid^2$, con $\lambda > 0$ y $\gamma \neq 0$. En el Capítulo 5, estudiaremos el caso general buscando extender los resultados aquí obtenidos.

4.1. Homogeneización.

Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, T^ϵ una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}^d$ y $\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T^\epsilon$ tales que existen una sucesión de funciones w^ϵ y una medida positiva μ verificando la propiedades (P1),...,(P7) del Capítulo 4.

Sean C_0 y λ constantes estrictamente positivas y γ una constante arbitraria distinta de cero. Se considera el problema

$$\text{(4.1.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u^\epsilon + \lambda u^\epsilon = f + \gamma \mid \nabla u^\epsilon \mid^2 & \text{en } \Omega^\epsilon \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon). \end{cases}$$

donde $f \in L^\infty(\Omega)$, $\| f \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0$.

Aplicando el Corolario 2.2.1, existe una única solución u^ϵ de (4.1.1), la cual está acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. De hecho

$$\| u^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega^\epsilon)} \leq \frac{C_0}{\lambda}.$$

Extrayendo una subsucesión si es necesario, se puede suponer que u^ϵ converge a u en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*-$débil. Se hace el cambio de variable

$$v^\epsilon = e^{\gamma u^\epsilon} - 1, \tag{4.1.2}$$

entonces $v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$ y

$$u^\epsilon = \frac{1}{\gamma} log(1 + v^\epsilon). \tag{4.1.3}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla v^\epsilon &= \gamma e^{\gamma u^\epsilon} \nabla u^\epsilon, \\
\Delta v^\epsilon &= \gamma e^{\gamma u^\epsilon} \Delta u^\epsilon + \gamma^2 e^{\gamma u^\epsilon} \mid \nabla u^\epsilon \mid^2 \\
&= \gamma e^{\gamma u^\epsilon} (\Delta u^\epsilon + \gamma \mid \nabla u^\epsilon \mid^2) \\
&= \gamma e^{\gamma u^\epsilon} (\lambda u^\epsilon - f),
\end{aligned}$$

utilizando (4.1.1).

De (4.1.1) se deduce por tanto la siguiente ecuación para v^ϵ

$$\begin{cases} -\Delta v^\epsilon = -\lambda(1 + v^\epsilon) log(1 + v^\epsilon) + \gamma(1 + v^\epsilon) f & \text{en } \Omega^\epsilon, \\ v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon). \end{cases} \tag{4.1.4}$$

La función que aparece en el segundo miembro de (4.1.4)

$$-\lambda(1 + v^\epsilon) log(1 + v^\epsilon) + \gamma(1 + v^\epsilon) f$$

está acotada en $L^\infty(\Omega)$ y converge en casi todo. Por tanto, el Teorema de Convergencia Dominada establece que converge en $L^2(\Omega)$ fuerte hacia

$$-\lambda(1 + v) log(1 + v) + \gamma(1 + v) f,$$

donde

$$v = e^{\gamma u} - 1. \tag{4.1.5}$$

Aplicando el Teorema 3.5, se deduce que la función v verifica la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta v + \mu v = -\lambda(1 + v) log(1 + v) + \gamma(1 + v) f & \text{en } \Omega \\ v \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Por un cálculo similar al realizado antes se tiene

$$\Delta v = \gamma e^{\gamma u}(\Delta u + \gamma \mid \nabla u \mid^2).$$

De (4.1.5) y (4.1.6) se deduce

$$\begin{aligned}\mu(e^{\gamma u} - 1) &= \mu v \\ &= \Delta v - \lambda(1+v)log(1+v) + \gamma(1+v)f \\ &= \gamma e^{\gamma u}(\Delta u + \gamma \mid \nabla u \mid^2) - \lambda\gamma e^{\gamma u} u + \gamma e^{\gamma u} f,\end{aligned}$$

con lo que tenemos la ecuación para u, (ecuación límite de (4.1.1))

$$(4.1.7) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u + \dfrac{e^{\gamma u} - 1}{\gamma e^{\gamma u}}\mu = f + \gamma \mid \nabla u \mid^2 \text{ en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Observación 4.1.1. Si $\gamma = 0$, tenemos aplicando el Teorema 3.5 a la ecuación (4.1.1)

$$-\Delta u + \lambda u + \mu u = f \text{ en } \Omega.$$

Se tiene de hecho

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{e^{\gamma u} - 1}{\gamma e^{\gamma u}} = u,$$

y por tanto (4.1.7) es coherente con el resultado que se deduce en el Teorema 3.5.

Lo demostrado en esta Sección se puede resumir en

Teorema 4.1.1. *Supuesta la existencia de una sucesión w^ϵ y una medida μ verificando las propiedades (P1),...,(P7) del Capítulo 3, la sucesión u^ϵ definida por (4.1.1) converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia u, solución de (4.1.7).*

Observación 4.1.2. Usando el Lema 2.2.2, se puede probar, análogamente al Corolario 2.2.1, que (4.1.7) tiene solución única y de ahí que en realidad no haya que tomar ninguna subsucesión.

4.2. Corrector.

Notación 4.2.1. En esta Sección (así como en otras posteriores que indicaremos), se designarán por R^ϵ, r^ϵ, S^ϵ y L^ϵ funciones o distribuciones genéricas, las cuales pueden cambiar de una línea a otra y que convergen a cero en las topologías siguientes

$$\begin{aligned}
r^\epsilon &\to 0 && \text{en } H^1(\Omega),\\
R^\epsilon &\to 0 && \text{en } L^2(\Omega)^N,\\
S^\epsilon &\to 0 && \text{en } L^1(\Omega),\\
L^\epsilon &\to 0, && \text{en } W^{-1,\infty}(\Omega).
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema (3.5) y el Corolario (3.2) al problema 4.1.4, se obtiene, ($v \in L^\infty(\Omega)$)

$$v^\epsilon = vw^\epsilon + r^\epsilon, \tag{4.2.1}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\nabla v^\epsilon &= v\nabla w^\epsilon + w^\epsilon \nabla v + R^\epsilon\\
&= \nabla v + v\nabla w^\epsilon + (w^\epsilon - 1)\nabla v + R^\epsilon\\
&= \nabla v + v\nabla w^\epsilon + R^\epsilon.
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.1.3) se deduce

$$\nabla u^\epsilon = \frac{1}{\gamma}\frac{\nabla v^\epsilon}{1+v^\epsilon} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1+v^\epsilon}(\nabla v + v\nabla w^\epsilon + R^\epsilon). \tag{4.2.2}$$

Como $u^\epsilon \geq -C_0\lambda^{-1}$ en casi todo Ω, se tiene

$$1 + v^\epsilon = e^{\gamma \tilde{u}^\epsilon} \geq e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}} \quad e.c.t.\ \Omega,$$

que por (4.2.1) se puede escribir como

$$1 + vw^\epsilon + r^\epsilon \geq e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}} \quad e.c.t.\ \Omega, \tag{4.2.3}$$

que junto con (4.2.2) lleva a la expresión

$$\nabla u^\epsilon = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{(1+v)}\nabla v + \frac{1}{\gamma}\frac{v}{(1+vw^\epsilon + r^\epsilon)}\nabla w^\epsilon + R^\epsilon. \tag{4.2.4}$$

Escribiendo (4.2.4) en función de u, tenemos el siguiente resultado de corrector

$$\nabla u^\epsilon = \nabla u + \frac{1}{\gamma}\frac{e^{\gamma u} - 1}{1 + w^\epsilon(e^{\gamma u} - 1) + r^\epsilon}\nabla w^\epsilon + R^\epsilon. \tag{4.2.5}$$

De hecho vamos a probar

Teorema 4.2.1 *La solución u^ϵ de (4.1.1) verifica*

$$u^\epsilon = \frac{1}{\gamma} log(1 + w^\epsilon(e^{\gamma u} - 1)) + r^\epsilon \tag{4.2.6}$$

$$\nabla u^\epsilon = \nabla u + \frac{1}{\gamma}\frac{e^{\gamma u} - 1}{1 + w^\epsilon(e^{\gamma u} - 1)} \nabla w^\epsilon + R^\epsilon. \tag{4.2.7}$$

Observación 4.2.1. Tomando límite en (4.2.3), se deduce que $1+v \geq e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}}$, en casi todo Ω, lo que implica

$$1 + (e^{\gamma u} - 1)w^\epsilon = 1 + vw^\epsilon \geq e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}} \; e.c.t. \; \Omega,$$

con lo que los denominadores en (4.2.7) están bien definidos.

La igualdad (4.2.7) es más interesante que (4.2.5) al no aparecer r^ϵ.

Demostracion del Teorema 4.2.1. Para probar (4.2.7) basta ver que

$$Q^\epsilon = \left(\frac{1}{(1 + vw^\epsilon + r^\epsilon)} - \frac{1}{(1 + vw^\epsilon)} \right) v \nabla w^\epsilon$$

converge a cero en $L^2(\Omega)^N$ fuerte. Se tiene

$$\int_\Omega | Q^\epsilon |^2 = \int_\Omega \left(\frac{1}{(1 + vw^\epsilon + r^\epsilon)^2} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1 + vw^\epsilon)^2} - \frac{2}{(1 + vw^\epsilon + r^\epsilon)(1 + vw^\epsilon)} \right) v^2 | \nabla w^\epsilon |^2 .$$

Para pasar al límite, hacemos uso del Lema 3.2. Se toma

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w, z_1, z_2) = \left(\frac{1}{(1 + z_1 w + z_2)^2} + \frac{1}{(1 + z_1 w)^2} - \frac{2}{(1 + z_1 w + z_2)(1 + z_1 w)} \right) z_1^2,$$

esto es

$$h(w, z_1, z_2) = z_1 \left[\frac{2}{z_2} log \left(1 + \frac{z_2}{1 + z_1 w} \right) - \frac{1}{1 + z_1 w + z_2} - \frac{1}{1 + z_1 w} \right] + \Psi(z_1, z_2),$$

con $\Psi \in C^1$ a determinar de forma que se tenga $h(w^\epsilon, v, r^\epsilon) = 0$ en T^ϵ. (Aquí $z^\epsilon = (v, r^\epsilon)$). Pero ahora $r^\epsilon = 0$ en T^ϵ y se tiene por tanto

$$h(w^\epsilon, v, r^\epsilon) = h(w^\epsilon, v, 0) = \Psi(v, 0) = 0,$$

con lo que tomando $\Psi = 0$ y

$$S = \left\{ (w, z_1, z_2) : \ e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}} - 1 \leq z_1 w + z_2, \ z_1 \leq e^{\frac{\gamma C_0}{\lambda}} - 1; \ 0 \leq w \leq 1 \right\}$$

estamos en las hipótesis del Lema 3.2, (para la derivabilidad basta obsevar que la función de dos variables

$$\frac{1}{t} log \left(1 + \frac{t}{s} \right)$$

es derivable para s distino de cero). El Lema 3.2 da por tanto

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega | Q^\epsilon |^2 = \int_\Omega h(1, v, 0) d\mu = 0,$$

que es el resultado buscado. ∎

Observación 4.2.2. Se puede utilizar la expresión (4.2.7) para pasar al límite en (4.1.1). Para ello, sea $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Tomando $w^\epsilon \varphi \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$ como función test en (4.1.1), se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u^\epsilon \nabla (w^\epsilon \varphi) + \lambda \int_\Omega u^\epsilon w^\epsilon \varphi \\ &= \int_\Omega f \varphi w^\epsilon + \gamma \int_\Omega | \nabla u^\epsilon |^2 w^\epsilon \varphi. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Aplicando el Lema 3.5 y la convergencia de u^ϵ en $H_0^1(\Omega)$ débil, se deduce

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u \varphi d\mu + \lambda \int_\Omega u \varphi \\ &= \int_\Omega f \varphi + \lim_{\epsilon \to 0} \gamma \int_\Omega | \nabla u^\epsilon |^2 w^\epsilon \varphi. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Utilizando (4.2.7) tenemos ($v = e^{\gamma u} - 1$)

$$\begin{aligned} &\gamma \int_\Omega | \nabla u^\epsilon |^2 w^\epsilon \varphi \\ &= \gamma \int_\Omega | \nabla u |^2 w^\epsilon \varphi + \int_\Omega \frac{2 v w^\epsilon \varphi}{(1 + v w^\epsilon)} \nabla u \nabla w^\epsilon \\ &+ \frac{1}{\gamma} \int_\Omega \frac{v^2 w^\epsilon}{(1 + v w^\epsilon)^2} | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi + o(1) \\ &= \gamma \int_\Omega | \nabla u |^2 \varphi + \frac{1}{\gamma} \int_\Omega \frac{v^2 w^\epsilon}{(1 + v w^\epsilon)^2} | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi + o(1). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Para calcular el límite de

$$\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}\frac{v^2w^\epsilon}{(1+vw^\epsilon)^2} \mid \nabla w^\epsilon \mid^2 \varphi,$$

hacemos uso otra vez del Lema 3.2. Tomamos

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w,z_1,z_2)=\frac{1}{\gamma}\frac{wz_1^2}{(1+wz_1)^2}z_2$$

y para tener $h(w^\epsilon,v,\varphi)=0$ en T^ϵ, (aquí $z^\epsilon=(v,\varphi)$), se toma $h(0,z_1,z_2)=0$. Se tiene

$$h(w,z_1,z_2)=\frac{z_1^2z_2}{\gamma}\int_0^w\frac{s}{(1+sz_1)^2}ds=\frac{1}{\gamma}\left(log(1+wz_1)-\frac{wz_1}{1+wz_1}\right)z_2.$$

Eligiendo

$$S=\left\{(w,z_1,z_2):\ e^{-\frac{\gamma C_0}{\lambda}}-1\leq wz_1,\ z_1\leq e^{\frac{\gamma C_0}{\lambda}}-1;\ 0\leq w\leq 1;\ \mid z_2\mid\leq\parallel\varphi\parallel_{L^\infty(\Omega)}\right\}$$

se puede aplicar el Lema 3.2 y se deduce

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}\frac{v^2w^\epsilon}{(1+vw^\epsilon)^2}\mid\nabla w^\epsilon\mid^2\varphi &= \int_{\Omega}h(1,v,\varphi)d\mu\\ &=\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}\left(log(1+v)-\frac{v}{1+v}\right)\varphi d\mu\\ &=\int_{\Omega}u\varphi d\mu-\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}\frac{e^{\gamma u}-1}{e^{\gamma u}}\varphi d\mu.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\gamma\int_{\Omega}\mid\nabla u^\epsilon\mid^2 w^\epsilon\varphi=\gamma\int_{\Omega}\mid\nabla u\mid^2\varphi+\int_{\Omega}u\varphi d\mu-\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}\frac{e^{\gamma u}-1}{e^{\gamma u}}\varphi d\mu.$$

Utilizando esta expresión en (4.2.10) reencontramos la ecuación (4.1.7) para u.

4.3. Interpretación del Resultado Obtenido.

Vamos a ver ahora que es lo que hace al término nuevo que ha aparecido en la ecuación (4.1.7) diferente de lo esperado. Comenzamos recordando un resultado debido a A. Bensoussan, L. Boccardo y F. Murat [B B M].

Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ y una sucesión de funciones de Carathéodory $H^\epsilon:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ tales que

$$\mid H^\epsilon(x,s,\xi)\mid\leq C(1+\mid\xi\mid^2),$$

con C una constante positiva; (por ejemplo $H^\epsilon(x,s,\xi) = C_0 + \gamma \mid \xi \mid^2$).

Se considera el problema

$$\begin{cases} - \, div \; (A^\epsilon \nabla u^\epsilon) + \lambda u^\epsilon = H^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) & \text{en } \Omega, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

donde $A^\epsilon = A^\epsilon(x)$ es una sucesión de matrices tales que $A^\epsilon \geq \alpha I$, $(A^\epsilon)^{-1} \geq \gamma I$, $(\alpha, \gamma > 0)$, las cuales H-convergen hacia A^0 y dónde λ es una constante positiva. Aquí el abierto es fijo y es el operador $-div \; (A^\epsilon \nabla u^\epsilon)$ quien varía. Para esta ecuación, se demuestra que existe una solución acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ independientemente de ϵ. (Es el Teorema 2.1.1 con un operador más general $-div \; (A \nabla u)$). Se puede por tanto suponer (extrayendo una subsucesión si es necesario) que la sucesión u^ϵ converge a u en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*-$débil.

Si ahora $\bar{u}^\epsilon$ es la solución del problema

$$\begin{cases} - \, div \; (A^\epsilon \nabla \bar{u}^\epsilon) + \lambda \bar{u}^\epsilon = - \, div \; (A^0 \nabla u) + \lambda u & \text{en } \Omega \\ \bar{u}^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

entonces se prueba que $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

En la demostración de este resultado se utiliza el hecho de que $\mid \nabla u^\epsilon \mid^2$ es equiintegrable, sin embargo para el problema de pequeños agujeros que estamos tratando aquí no se tiene la equiintegrabilidad y el resultado es diferente. Para convencernos vamos a ver que es lo que encontraríamos si se tuviera un resultado análogo.

Sea u^ϵ la solucion del problema (4.1.1) y $\bar{u}^\epsilon$ la solución de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}^\epsilon + \lambda \bar{u}^\epsilon = -\Delta u + \lambda u + \mu u & \text{en } \Omega^\epsilon \\ \bar{u}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon), \end{cases}$$

donde estamos suponiendo que $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ a fin de que μu pertenezca a $H^{-1}(\Omega)$.

Supongamos por el momento que se tiene

$$u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon \to 0, \;\; H_0^1(\Omega) \text{ fuerte.} \tag{4.3.1}$$

Aplicando el Teorema 3.5 a $\bar{u}^\epsilon$, y suponiendo que tenemos (4.3.1), se obtiene el resultado de corrector para u^ϵ

$$\begin{cases} u^\epsilon = \bar{u}^\epsilon + (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) = u w^\epsilon + r^\epsilon + (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) \\ \qquad = u w^\epsilon + r^\epsilon \\ \nabla u^\epsilon = w^\epsilon \nabla u + u \nabla w^\epsilon + R^\epsilon \\ \qquad = \nabla u + u \nabla w^\epsilon + R^\epsilon \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, utilizando $w^\epsilon\varphi$ como función test en (4.1.1) se llega de nuevo a la ecuación (4.2.10) pero ahora es (4.3.2) lo que se va a aplicar para calcular el límite de $\gamma \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 w^\epsilon\varphi$. Se tiene en este caso

$$\begin{aligned}\gamma \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 w^\epsilon\varphi &= \gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 w^\epsilon\varphi + 2\gamma \int_\Omega u\varphi \nabla u \nabla w^\epsilon \\ &+ \gamma \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 u^2 w^\epsilon\varphi + o(1) \\ &= \gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 \varphi + \gamma \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 u^2 w^\epsilon \varphi + o(1)\end{aligned}$$

Para calcular el límite de $\gamma \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 u^2 w^\epsilon\varphi$ se utiliza de nuevo el Lema 3.2. Se busca

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w, z_1, z_2) = \gamma z_1^2 w z_2$$

y a fin de tener $h(w^\epsilon, u, \varphi) \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$, (aquí $z^\epsilon = (u, \varphi)$), se toma $h(0, z_1, z_2) = 0$. Entonces

$$h(w, z_1, z_2) = \gamma z_1^2 z_2 \int_0^w s ds = \frac{\gamma z_1^2 w^2 z_2}{2}$$

que verifica todas las hipótesis del Lema 3.2. Por tanto

$$\gamma \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 u^2 w^\epsilon \varphi \to \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2 \varphi d\mu.$$

Se obtiene por tanto la ecuación límite para u

$$\text{(4.3.3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u + \left(u - \dfrac{\gamma u^2}{2}\right)\mu = f + \gamma |\nabla u|^2 & \text{en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

la cual es diferente de (4.1.7), lo que implica que (4.3.1) es falso y que no se tiene el resultado de corrector enunciado en (4.3.2).

Sin embargo, si se desarrolla el término nuevo que ha aparecido en (4.1.7) en potencias de γ, encontramos

$$\frac{e^{\gamma u} - 1}{e^{\gamma u}} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\gamma^i u^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Esto es, el término encontrado en (7.3.3) es el desarrollo del encontrado en (4.1.7) hasta el primer orden en γ. El resultado enunciado en (4.3.2) es falso y es necesario añadir términos suplementarios para conseguir el verdadero corrector, ver (4.2.6), (4.2.7)

Capítulo 5.

Problema con Crecimiento Cuadrático en Dominios Perforados

En este Capítulo generalizamos el estudio llevado a cabo en el Capítulo 4 para una ecuación general del tipo de las estudiadas en los Capítulos 2 y 3.

Se considera un conjunto abierto y acotado de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, T^ϵ una sucesión de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^d$ y $\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T^\epsilon$ tales que existen funciones w^ϵ y existe una medida μ verificando las propiedades (P1),...,(P7) del Capítulo 3.

Sea H una función de Carathéodory definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que para casi todo $x \in \Omega$ la función $H(x,.,.)$ es derivable y existe una función creciente $\Gamma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que se tiene

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,0,0), \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,0,0) \in L^\infty(\Omega), \\ \left|\dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s_1,\xi_1) - \dfrac{\partial H}{\partial s}(x,s_2,\xi_2)\right| \\ \leq \Gamma(\mid s_1 \mid + \mid s_2 \mid)\big[(1+ \mid \xi_1 \mid^2 + \mid \xi_2 \mid^2) \mid s_1 - s_2 \mid \\ + (1+ \mid \xi_1 \mid + \mid \xi_2 \mid) \mid \xi_1 - \xi_2 \mid\big], \\ \left|\dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s_1,\xi_1) - \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x,s_2,\xi_2)\right| \\ \leq \Gamma(\mid s_1 \mid + \mid s_2 \mid)\big[(1+ \mid \xi_1 \mid + \mid \xi_2 \mid) \mid s_1 - s_2 \mid + \mid \xi_1 - \xi_2 \mid)\big]. \end{cases}$$

Supongamos además que se verifica: (hipótesis (2.1.2) del Capítulo 2)

Para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, la función $H(x,s,\xi)$ es derivable y existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \lambda. \tag{5.2}$$

Observación 5.1. Las hipótesis que componen (5.1) implican en particular (2.2.1) y por tanto (2.1.3).

El objetivo de este Capítulo es estudiar la Homogeneización del problema

$$\begin{cases} -\Delta u^\epsilon + H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) = f \quad \text{en } \Omega^\epsilon \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \end{cases} \tag{5.3}$$

con $f \in L^\infty(\Omega)$.

5.1. Primeras Estimaciones.

Por el Corolario 2.2.1 se sabe que existe una única solución de (5.3), la cual está acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Esto implica que se puede extraer una subsucesión que converge a una función $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil. El problema que tratamos de resolver es encontrar la estructura de la ecuación límite para u.

Más generalmente, vamos a suponer que los segundos miembros de la ecuación (5.3) son distribuciones f^ϵ con $f^\epsilon \in H^{-1}(\Omega^\epsilon) + L^1(\Omega^\epsilon)$ verificando

$$\begin{cases} \text{Si } v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \\ v^\epsilon \rightharpoonup 0, \ H_0^1(\Omega) \text{ débil}, \\ v^\epsilon \text{ acotada en } L^\infty(\Omega). \\ \quad \text{Entonces} \\ \langle f^\epsilon, v^\epsilon \rangle \to 0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Observación 5.1.1. La hipótesis establecida sobre f^ϵ es análoga a la propiedad (P7) de la sucesión w^ϵ, i.e. imponemos que f^ϵ tenga un comportamiento similar al de $-\Delta w^\epsilon$.

Se consideran f^ϵ, u^ϵ y u verificando

$$(5.1.2)\qquad \begin{cases} f^\epsilon \in H^{-1}(\Omega^\epsilon) + L^1(\Omega^\epsilon), \\ f^\epsilon \text{ verifica (5.1.1)}, \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \\ u^\epsilon \text{ acotada en } L^\infty(\Omega), \\ u^\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{en } H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

y

$$(5.1.3)\qquad -\Delta u^\epsilon + H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) = f^\epsilon \quad \text{en } \Omega^\epsilon.$$

Notación 5.1.1. Para $f^\epsilon, u^\epsilon, u$ verificando (5.1.2) y (5.1.3), a fin de resaltar la dependencia de las constantes así como simplificar la notación, vamos a denotar por Λ, una constante genérica, que puede cambiar de una línea a otra y que va a depender únicamente de $\sup\{\| u^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)}\}$ haciéndolo de forma creciente.

A semejanza del Teorema 3.2 y del Corolario 3.3 se tiene.

Teorema 5.1.1. *Para todo p con $1 \leq p < 2$, la sucesión u^ϵ converge a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte.*

Demostración. La demostración sigue las ideas del Teorema 3.2. Se considera la sucesión $z^\epsilon = u^\epsilon - w^\epsilon u$, entonces por el Teorema de Egorov existe una subsucesión $z^{\epsilon'}$ que converge a cero casi uniformemente. Esto es, para todo $\delta > 0$ existe un conjunto A_δ con $\ell(\Omega \setminus A_\delta) < \delta$ tal que $z^{\epsilon'}$ converge uniformemente a cero en A_δ.

Dado $\rho > 0$ se toma la función $T_\rho(z^{\epsilon'}) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ como función test en (5.1.3). Se tiene

$$\int_\Omega \nabla u^{\epsilon'} \nabla T_\rho(z^{\epsilon'}) + \int_\Omega H(x, u^{\epsilon'}, \nabla u^{\epsilon'}) T_\rho(z^{\epsilon'}) = \langle f^{\epsilon'}, T_\rho(z^{\epsilon'}) \rangle.$$

Usando (5.1.1) y el hecho de que $H(x, u^{\epsilon'}, \nabla u^{\epsilon'})$ está acotado uniformemente en $L^1(\Omega)$, se deduce que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega | \nabla z^{\epsilon'} |^2 \chi_{|z^{\epsilon'}| < \rho} \leq o(1) + C\rho - \int_\Omega \nabla (w^{\epsilon'} u) \nabla T_\rho(z^{\epsilon'}).$$

Por el Lema 3.5 se tiene

$$\int_\Omega \nabla (w^{\epsilon'} u) \nabla T_\rho(z^{\epsilon'}) \to 0,$$

y usando ahora que para ϵ' suficientemente pequeño se verifica

$$A_\delta \subset \{x \in \Omega : | z^{\epsilon'}(x) | < \rho\},$$

se deduce que

$$\limsup_{\epsilon' \to 0} \int_{A_\delta} | \nabla z^{\epsilon'} |^2 \leq C\rho.$$

Como ρ es arbitrario se tendrá

$$\lim_{\epsilon' \to 0} \int_{A_\delta} | \nabla z^{\epsilon'} |^2 = 0.$$

De la misma forma que en la demostración del Teorema 3.2 esto significa que para todo p con $1 \leq p < 2$, z^ϵ converge a cero en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte. Como por el Teorema 3.2 $w^\epsilon u$ converge a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte, entonces se deduce que u^ϵ converge a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte. ▮

Lema 5.1.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ y u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Sea $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ y sea una sucesión de funciones $\psi^\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\psi^\epsilon \geq 0$, ψ^ϵ acotadas en $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entonces, con el acuerdo de notación 5.1.1, existe una sucesión de funciones r^ϵ tales que*

$$\text{(5.1.4)} \qquad \begin{cases} r^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ r^\epsilon \geq 0 \\ r^\epsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{en } H_0^1(\Omega) \text{ débil.} \\ \| r^\epsilon \|_{L^\infty}(\Omega) \leq \Lambda. \end{cases}$$

y tales que se verifica la desigualdad

$$\text{(5.1.5)} \qquad \begin{aligned} \int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \psi^\epsilon \varphi \leq \Lambda \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \psi^\epsilon \varphi \\ + \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 r^\epsilon \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1). \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando la estimación (2.1.6) a la ecuación (5.1.3) con $u = u^\epsilon$, $f = f^\epsilon$, $r = w^\epsilon u$, $\varphi = \varphi^\epsilon = \psi^\epsilon \varphi$ y notando $z^\epsilon = u^\epsilon - w^\epsilon u$, se tiene, (gracias a que γ y C se pueden tomar dependientes de forma creciente de $\sup\{\| u^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)}\}$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla z^\epsilon|^2 \varphi^\epsilon \leq \langle f^\epsilon, h(z^\epsilon)\varphi^\epsilon\rangle - \int_\Omega \varphi^\epsilon \nabla (w^\epsilon u) \nabla h(z^\epsilon)\\ - \int_\Omega h(z^\epsilon) \nabla u^\epsilon \nabla \varphi^\epsilon + \Lambda \int_\Omega | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon\\ + \Lambda \int_\Omega |\nabla (w^\epsilon u)|^2 | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon.\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Se tienen las siguientes estimaciones del miembro derecho de (5.1.6).

El primer término, usando la hipótesis (5.1.1) es

$$\langle f^\epsilon, h(z^\epsilon)\varphi^\epsilon\rangle = o(1).$$

Para el segundo término, aplicando la propiedad (P6) de w^ϵ y notando por $l^\epsilon = uh(z^\epsilon)$, se tiene, usando que $h(z^\epsilon)$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil, que

$$\begin{aligned}&- \int_\Omega \varphi^\epsilon \nabla (w^\epsilon u) \nabla h(z^\epsilon)\\ &= - \int_\Omega \varphi^\epsilon (w^\epsilon \nabla u + u \nabla w^\epsilon) \nabla h(z^\epsilon)\\ &= o(1) - \int_\Omega \nabla w^\epsilon \nabla (\varphi^\epsilon l^\epsilon)\\ &+ \int_\Omega l^\epsilon \nabla w^\epsilon \nabla \varphi^\epsilon + \int_\Omega \varphi^\epsilon h(z^\epsilon) \nabla w^\epsilon \nabla u\\ &= \int_\Omega l^\epsilon \varphi \nabla w^\epsilon \nabla \psi^\epsilon + o(1)\\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \psi^\epsilon|^2 | l^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).\end{aligned}$$

Tomando $p^\epsilon = -h(z^\epsilon)$ en el tercer término, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega p^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla \varphi^\epsilon &= \int_\Omega p^\epsilon \nabla (u^\epsilon - u) \nabla \varphi^\epsilon + \int_\Omega p^\epsilon \nabla u \nabla \varphi^\epsilon\\ &= \int_\Omega p^\epsilon \varphi \nabla (u^\epsilon - u) \nabla \psi^\epsilon + o(1)\\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla (u^\epsilon - u)|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \psi^\epsilon|^2 | p^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).\end{aligned}$$

Para el cuarto término se tiene

$$\Lambda \int_\Omega | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon = o(1).$$

Para el quinto término, usando la desigualdad

$$| \nabla (w^\epsilon u) |^2 \leq 2 | \nabla w^\epsilon |^2 u^2 + 2 | w^\epsilon |^2 | \nabla u |^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned}\Lambda \int_\Omega | \nabla (w^\epsilon u) |^2 | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon &\leq \Lambda \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 u^2 | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon \\ &+ \Lambda \int_\Omega | w^\epsilon |^2 | \nabla u |^2 | h(z^\epsilon) | \varphi^\epsilon \\ &= \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 q^\epsilon \varphi^\epsilon + o(1),\end{aligned}$$

con $q^\epsilon = \Lambda u^2 \mid h(z^\epsilon) \mid$.

Tomando $r^\epsilon = \max\{| l^\epsilon |^2, | p^\epsilon |^2, q^\epsilon\}$ y teniendo en cuenta las estimaciones obtenidas para el miembro derecho de (5.1.6), se deduce

$$\begin{aligned}&\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - w^\epsilon u) |^2 \varphi^\epsilon \leq \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 r^\epsilon \varphi^\epsilon \\ &+ \left(\left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\cdot \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 r^\epsilon \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1).\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Por tanto, aplicando el Lema 3.4, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \varphi^\epsilon \leq 2 \int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - w^\epsilon u) |^2 \varphi^\epsilon \\ &+ 2 \int_\Omega | \nabla (w^\epsilon u - u) |^2 \varphi^\epsilon \\ &\leq 2 \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 (u^2 + r^\epsilon) \varphi^\epsilon \\ &+ 2 \left(\left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\cdot \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 r^\epsilon \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1).\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Tomando en la desigualdad (5.1.8), $\psi^\epsilon = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \varphi \leq 2 \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 (u^2 + r^\epsilon) \varphi + o(1) \\ &\leq \Lambda \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi + o(1),\end{aligned}$$

que llevado a la ecuación (5.1.8) da la desigualdad (5.1.5). ∎

Corolario 5.1.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Sean $\psi^\epsilon, \psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\psi^\epsilon \geq 0$, ψ^ϵ acotadas en $L^\infty(\Omega)$, ψ^ϵ convergiendo a ψ en $H_0^1(\Omega)$ fuerte. Entonces*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \psi^\epsilon \leq \Lambda \int_\Omega \psi d\mu. \tag{5.1.9}$$

Demostración. Basta tomar límite en la desigualdad (5.1.5) con $\varphi = 1$ y tener en cuenta que gracias a la convergencia fuerte en $L^1(\Omega)$ de $| \nabla \psi^\epsilon |^2$ el segundo término del miembro derecho de (5.1.5) converge a cero. ∎

Observación 5.1.2. Si se toma una subsucesión de forma que $| \nabla (u^\epsilon - u) |^2$ converja en el sentido $*$-débil de las medidas hacia una medida κ, entonces el Corolario 5.1.1, establece que κ es absolutamente continua con respecto a μ.

Corolario 5.1.2. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Sean $\psi^\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\psi^\epsilon \geq 0$, ψ^ϵ acotadas en $L^\infty(\Omega)$, ψ^ϵ convergiendo a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil. Sea también $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Entonces*

$$\int_\Omega | \nabla (u^\epsilon - u) |^2 \psi^\epsilon \varphi \leq \Lambda \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1), \tag{5.1.10}$$

$$\int_\Omega | \nabla u^\epsilon |^2 \psi^\epsilon \varphi \leq \Lambda \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega | \nabla \psi^\epsilon |^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1). \tag{5.1.11}$$

Demostración. Inmediato a partir del Lema 3.6 y del Lema 5.1.1. ∎

Las estimaciones obtenidas permiten dar ya un primer resultado acerca de la estructura de la ecuación límite para el problema (5.3).

Lema 5.1.2. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Para toda $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se tiene*

$$\int_\Omega | H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) - H(x, u, \nabla u)) | \varphi \leq \Lambda \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi + o(1).$$

Demostración. Gracias a (2.2.1) se tiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mid H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)-H(x,u,\nabla u)\mid \varphi\\ &\leq \Lambda\int_\Omega (1+\mid \nabla u^\epsilon\mid^2+\mid\nabla u\mid^2)\mid u^\epsilon-u\mid\varphi\\ &+\Lambda\int_\Omega (1+\mid\nabla u^\epsilon\mid+\mid\nabla u\mid)\mid\nabla(u^\epsilon-u)\mid\varphi.\end{aligned}$$

Usando ahora las desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l}\mid\nabla u^\epsilon\mid\leq\mid\nabla(u^\epsilon-u)\mid+\mid\nabla u\mid\\ \mid\nabla u^\epsilon\mid^2\leq 2\mid\nabla(u^\epsilon-u)\mid^2+2\mid\nabla u\mid^2,\end{array}\right. \tag{5.1.3}$$

acotando $\mid u^\epsilon-u\mid$ por su norma en $L^\infty(\Omega)$ y aplicando el Teorema 5.1.1, se deduce

$$\int_\Omega\mid H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)-H(x,u,\nabla u)\mid\varphi\leq\Lambda\int_\Omega\mid\nabla(u^\epsilon-u)\mid^2\varphi+o(1).$$

El Lema 5.1.1 da ahora el resultado. ∎

Corolario 5.1.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.1) y (5.1.3). Supongamos que la sucesión $H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)w^\epsilon$ converge a una medida ν en el sentido $*$-débil de las medidas, (lo cual siempre es posible extrayendo una subsucesión). Entonces existe una función $S\in L^\infty(\Omega,d\mu)$ tal que*

$$\left\{\begin{array}{l}\| S\|_{L^\infty(\Omega,d\mu)}\leq\Lambda,\\ \nu=S\mu+H(x,u,\nabla u).\end{array}\right. \tag{5.1.13}$$

Demostración. Sea $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Se tiene

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)w^\epsilon-H(x,u,\nabla u))\varphi\right|\\ &\leq\int_\Omega\mid H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)-H(x,u,\nabla u)\mid w^\epsilon\mid\varphi\mid\\ &+\int_\Omega\mid H(x,u,\nabla u)w^\epsilon-H(x,u,\nabla u)\mid\mid\varphi\mid\\ &\leq\int_\Omega\mid H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon)-H(x,u,\nabla u)\mid\mid\varphi\mid+o(1),\end{aligned}$$

de donde tomando límite y teniendo en cuenta el Lema 5.1.2, se deduce

$$\left|\int_\Omega\varphi d\sigma\right|\leq\Lambda\int_\Omega\mid\varphi\mid d\mu,$$

con $\sigma = \nu - H(x, u, \nabla u)$. Esta desigualdad implica que para todo conjunto abierto $G \subset \Omega$ la variación total de ν en G, la cual se puede calcular como

$$(5.1.14) \qquad \| \nu \| (G) = \sup \left\{ \left| \int_\Omega \varphi d\nu \right| : \varphi \in C_0^0(G), \| \varphi \|_{L^\infty(G)} \leq 1 \right\},$$

satisface

$$\| \nu \| (G) \leq \Lambda \mu(G).$$

De esta desigualdad, se deduce que para todo conjunto Borel $A \subset \Omega$ se tiene

$$(5.1.15) \qquad \| \nu \| (A) \leq \Lambda \mu(A);$$

desigualdad que establece que ν es absolutamente continua con respencto a μ y por tanto que se puede aplicar el Teorema de Radon-Nikodym, el cual nos da la existencia de una función $S \in L^1(\Omega, d\mu)$ tal que $\sigma = S\mu$. De hecho la desigualdad (5.1.15) dice que $S \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ y que su norma es menor o igual que Λ. ∎

Teorema 5.1.2. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Supongamos que existe $f \in H^{-1}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ de forma que f^ϵ converge a f en el siguiente sentido.*

$$(5.1.16) \qquad \begin{cases} \textit{Para toda } v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \\ \textit{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ v^\epsilon \rightharpoonup v \ H_0^1(\Omega) \textit{ débil}, \\ v^\epsilon \textit{ acotada en } L^\infty(\Omega), \\ \textit{se verifica} \\ \langle f^\epsilon, v^\epsilon \rangle \to \langle f, v \rangle. \end{cases}$$

Entonces existe una función $E \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ con $\| E \|_{L^\infty(\Omega, d\mu)} \leq \Lambda$ tal que u es solución del problema

$$(5.1.17) \qquad \begin{cases} -\Delta u + E\mu + H(x, u, \nabla u) = f \textit{ en } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Demostración. Al igual que en el caso lineal la demostración consiste en tomar para $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, la sucesión $w^\epsilon \varphi \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$ como función test en (5.1.3).

Utilizando entonces el Lema 3.5 y el Corolario 5.1.3 se deduce (5.1.16) con $E = S + u$, S definida en el Corolario 5.1.3. ∎

Como aplicación del Lema 5.1.1 y sus Corolarios vamos a dar algunas estimaciones relativas a la variación de la función E que da el Teorema 5.1.2 con respecto a la sucesión u^ϵ.

Lema 5.1.3. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3) y sean $\bar{u}^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\bar{u}^\epsilon$ acotadas en $L^\infty(\Omega)$, tales que $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte. Entonces*

$$H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) - H(x, \bar{u}^\epsilon, \nabla \bar{u}^\epsilon) \to 0 \quad \textit{en } L^1(\Omega) \textit{ fuerte.}$$

Demostración. De (2.2.1), se deduce que existe una constante C tal que

$$\begin{aligned}
&| H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) - H(x, \bar{u}^\epsilon, \nabla \bar{u}^\epsilon) | \\
&\leq C(1 + | \nabla u^\epsilon |^2 + | \nabla \bar{u}^\epsilon |^2) | u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon | \\
&+ C(1 + | \nabla u^\epsilon | + | \nabla \bar{u}^\epsilon |) | \nabla (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) | \\
&\leq C(1 + 3 | \nabla u^\epsilon |^2 + 2 | \nabla (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) |^2) | u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon | \\
&+ C(1 + | \nabla u^\epsilon | + | \nabla \bar{u}^\epsilon |) | \nabla (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) | .
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 5.1.1, el único término que no resulta claro que converja a cero en $L^1(\Omega)$ fuerte es $| \nabla u^\epsilon |^2 | u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon |$ para el cual se usa el Corolario 5.1.2 con $\psi^\epsilon = | u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon |$, $\varphi = 1$. ∎

Corolario 5.1.4. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3), sean $\bar{u}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$, $\bar{u}^\epsilon$ acotadas en $L^\infty(\Omega)$ tales que $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte. Entonces, existen $\bar{f}^\epsilon \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ verificando la propiedad (5.1.1), tales que se tiene*

$$-\Delta \bar{u}^\epsilon + H(x, \bar{u}^\epsilon, \nabla \bar{u}^\epsilon) = \bar{f}^\epsilon \quad \textit{en } \Omega^\epsilon. \tag{5.1.18}$$

Si $H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) w^\epsilon$ converge a una medida ν en el sentido $*$-débil de las medidas, entonces $H(x, \bar{u}^\epsilon, \nabla \bar{u}^\epsilon) w^\epsilon$ converge también a ν en el sentido $*$-débil de las medidas.

Demostración. Para la primera parte basta tomar

$$\bar{f}^\epsilon = f^\epsilon - \Delta(\bar{u}^\epsilon - u^\epsilon) + H(x, \bar{u}^\epsilon, \nabla \bar{u}^\epsilon) - H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon),$$

donde aplicando el Lema 5.1.4, se tiene

$$\begin{cases} -\Delta(\bar{u}^\epsilon - u^\epsilon) \to 0 \ \text{ en } H^{-1}(\Omega) \text{ fuerte} \\ H(x,\bar{u}^\epsilon,\nabla \bar{u}^\epsilon) - H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) \to 0 \ \text{ en } L^1(\Omega) \text{ fuerte.} \end{cases}$$

La segunda parte es también consecuencia inmediata del Lema 5.1.4. ∎

Un resultado más preciso es el siguiente.

Lema 5.1.4. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3) y sean g^ϵ, v^ϵ, v verificando relaciones análogas respectivamente. Entonces, si se define $\tau^\epsilon = u^\epsilon - v^\epsilon - (u-v)$, se deduce que existe una constante M que depende de forma creciente de*

$$L = \sup\{\| u^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)}, \| v^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)}\},$$

tal que para toda $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega | H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) - H(x,v^\epsilon,\nabla v^\epsilon) - H(x,u,\nabla u) + H(x,v,\nabla v) | \varphi \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi + \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \tau^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right) + o(1). \end{aligned}$$

Demostración. Para $x \in \Omega$, se definen las funciones medibles $h_s^\epsilon, h_\xi^\epsilon, h_s, h_\xi$ en $[0,1]$ por

$$\begin{cases} h_s^\epsilon(t) = \dfrac{\partial H}{\partial s}(x, tu^\epsilon + (1-t)v^\epsilon, t\nabla u^\epsilon + (1-t)\nabla v^\epsilon), \\ h_s(t) = \dfrac{\partial H}{\partial s}(x, tu + (1-t)v, t\nabla u + (1-t)\nabla v), \\ h_\xi^\epsilon(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x, tu^\epsilon + (1-t)v^\epsilon, t\nabla u^\epsilon + (1-t)\nabla v^\epsilon), \\ h_\xi(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(x, tu + (1-t)v, t\nabla u + (1-t)\nabla v). \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} &| H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) - H(x,v^\epsilon,\nabla v^\epsilon) - H(x,u,\nabla u) + H(x,v,\nabla v) | \\ &= \left| \int_0^1 \left(h_s^\epsilon(t)(u^\epsilon - v^\epsilon) + h_\xi^\epsilon(t)\nabla(u^\epsilon - v^\epsilon) - h_s(t)(u-v) - h_\xi(t)\nabla(u-v)\right)\right| \\ &\leq \int_0^1 | h_s^\epsilon(t) || \tau^\epsilon | + \int_0^1 | h_s^\epsilon(t) - h_s(t) || u-v | \\ &+ \int_0^1 | h_\xi^\epsilon(t) || \nabla \tau^\epsilon | + \int_0^1 | h_\xi^\epsilon(t) - h_\xi(t) || \nabla(u-v) | . \end{aligned}$$

Aplicando (5.1) y (2.2.1), existe una constante C_1 que depende de forma creciente de L tal que en casi todo Ω se tiene

$$\begin{cases} \mid h_s^\epsilon(t) \mid \leq C_1 \left(1+ \mid \nabla u^\epsilon \mid^2 + \mid \nabla v^\epsilon \mid^2\right), \\ \mid h_\xi^\epsilon(t) \mid \leq C_1 \left(1+ \mid \nabla u^\epsilon \mid + \mid \nabla v^\epsilon \mid\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mid h_s^\epsilon(t) - h_s(t) \mid \leq C_1 \big(1+ \mid \nabla u^\epsilon \mid^2 + \mid \nabla v^\epsilon \mid^2 \\ \qquad\qquad + \mid \nabla u \mid^2 + \mid \nabla v \mid^2\big)(\mid u^\epsilon - u \mid + \mid v^\epsilon - v \mid) \\ \qquad\qquad + C_1 (1+ \mid \nabla u \mid + \mid \nabla v \mid + \mid \nabla u^\epsilon \mid + \mid \nabla v^\epsilon \mid) \\ \qquad\qquad \cdot (\mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid + \mid \nabla (v^\epsilon - v) \mid), \\ \mid h_\xi^\epsilon(t) - h_\xi(t) \mid \leq C_1 (1+ \mid \nabla u^\epsilon \mid + \mid \nabla v^\epsilon \mid + \mid \nabla u \mid + \mid \nabla v \mid) \\ \qquad\qquad \cdot (\mid u^\epsilon - u \mid + \mid v^\epsilon - v \mid) \\ \qquad\qquad + C_1 (\mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid + \mid \nabla (v^\epsilon - v) \mid). \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 5.1.1 y desigualdades del tipo de (5.1.12), existe por tanto una constante C_2 que depende de forma creciente de L tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mid H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) - H(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) \\ &\quad - H(x, u, \nabla u) + H(x, v, \nabla v) \mid \varphi \\ &\leq C_2 \int_\Omega (\mid \nabla u^\epsilon \mid^2 + \mid \nabla v^\epsilon \mid^2) \mid \tau^\epsilon \mid^2 \varphi \\ &+ C_2 \int_\Omega \left(\mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid^2 + \mid \nabla (v^\epsilon - v) \mid^2\right) \\ &\cdot \left(1+ \mid u^\epsilon - u \mid + \mid v^\epsilon - v \mid\right) \mid u - v \mid \varphi \\ &+ C_2 \int_\Omega (\mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid + \mid \nabla (v^\epsilon - v) \mid) \mid \nabla \tau^\epsilon \mid \varphi + o(1). \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Vamos a estimar cada una de las tres integrales del miembro derecho de (5.1.19). En la primera integral, el Corolario 5.1.2 y la acotación en $L^\infty(\Omega)$ de τ^ϵ dan

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\mid \nabla u^\epsilon \mid^2 + \mid \nabla v^\epsilon \mid^2) \mid \tau^\epsilon \mid^2 \varphi \\ &\leq M_1 \left(\int_\Omega \mid \nabla w^\epsilon \mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \mid \nabla \tau^\epsilon \mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1), \end{aligned}$$

donde M_1 depende de forma creciente de L.

En la segunda integral, se acota $1+\mid u^\epsilon - u \mid + \mid v^\epsilon - v \mid$ por su norma en $L^\infty(\Omega)$ y se aplica el Lema 5.1.1, entonces existe una constante M_2 que depende sólo de L tal que

$$\int_\Omega (\mid \nabla(u^\epsilon - u)\mid^2 + \mid \nabla(v^\epsilon - v)\mid^2)(1+\mid u^\epsilon - u\mid + \mid v^\epsilon - v\mid)\mid u-v\mid \varphi$$
$$\leq M_2 \int_\Omega \mid \nabla w^\epsilon \mid^2 \mid u-v \mid \varphi + o(1).$$

En la tercera integral se tiene

$$\int_\Omega (\mid \nabla(u^\epsilon - u)\mid + \mid \nabla(v^\epsilon - v)\mid)\mid \nabla \tau^\epsilon \mid \varphi$$
$$\leq \left(\left(\int_\Omega \mid \nabla(u^\epsilon - u)\mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega \mid \nabla(v^\epsilon - v)\mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\int_\Omega \mid \nabla \tau^\epsilon \mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}},$$

y por tanto, otra vez el Lema 5.1.1 da una constante M_3 que depende sólo de L tal que

$$\int_\Omega (\mid \nabla(u^\epsilon - u)\mid + \mid \nabla(v^\epsilon - v)\mid)\mid \nabla \tau^\epsilon \mid \varphi$$
$$\leq M_3 \left(\int_\Omega \mid \nabla w^\epsilon \mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \mid \nabla \tau^\epsilon \mid^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).$$

Las estimaciones del segundo miembro de (5.1.19) dan ahora el resultado. ∎

5.2. Existencia de Soluciones aproximadas con Buena Acotación.

En esta Sección, vamos a probar en el Teorema 5.2.1 que las funciones u^ϵ soluciones de (5.3) pueden ser sustituidas al realizar la Homogeneización por otra sucesión $\tilde{u}^\epsilon$ tales que para casi todo $x \in \Omega$ se verifica $\mid \tilde{u}^\epsilon(x) \mid \leq \mid u(x) \mid$.

Lema 5.2.1. *Sean $z \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $a \in \mathbb{R}$, se considera la sucesión de funciones $z^\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ definida por*

$$z^\epsilon = \frac{1}{a} log(1 + w^\epsilon(e^{az} - 1)).$$

Entonces

$$(5.2.1) \qquad \begin{cases} z^\epsilon = 0 \quad en\ T^\epsilon, \\ sgn(z^\epsilon) = sgn(z), \\ \mid z^\epsilon(x) \mid \leq \mid z(x) \mid, \quad e.c.t.x \in \Omega \\ z^\epsilon \rightharpoonup z \quad en\ H^1(\Omega)\ débil. \end{cases}$$

Además, para toda sucesión $v^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$, v^ϵ acotada en $L^\infty(\Omega)$, v^ϵ convergente a cero en $H^1(\Omega)$ débil, se tiene

$$\int_\Omega \nabla z^\epsilon \nabla v^\epsilon - a \int_\Omega |\nabla z^\epsilon|^2 v^\epsilon \to 0. \tag{5.2.2}$$

Demostración. Las propiedades que componen (5.2.1) son inmediatas. Para probar (5.2.2), tomando $y = e^{az} - 1$, se tiene

$$\nabla z^\epsilon = \nabla z + \frac{1}{a}\frac{y}{1+w^\epsilon y}\nabla w^\epsilon + R^\epsilon, \tag{5.2.3}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |\nabla z^\epsilon|^2 &= |\nabla z|^2 + \frac{2}{a}\frac{y}{1+w^\epsilon y}\nabla z \nabla w^\epsilon \\ &+ \frac{1}{a^2}\frac{y^2}{(1+w^\epsilon y)^2} |\nabla w^\epsilon|^2 + S^\epsilon \\ &= |\nabla z|^2 + \frac{1}{a^2}\frac{y^2}{(1+w^\epsilon y)^2} |\nabla w^\epsilon|^2 + S^\epsilon. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Por otra parte, aplicando el operador divergencia en (5.2.3), se deduce

$$\begin{aligned} -\Delta z^\epsilon &= -\Delta z - \frac{1}{a}\frac{(1+w^\epsilon y)\nabla y - y^2 \nabla w^\epsilon - y w^\epsilon \nabla y}{(1+w^\epsilon y)^2}\nabla w^\epsilon \\ &- \frac{1}{a}\frac{y}{1+w^\epsilon y}\Delta w^\epsilon + L^\epsilon \\ &= -\Delta z + \frac{1}{a}\frac{y^2}{(1+w^\epsilon y)^2} |\nabla w^\epsilon|^2 - \frac{1}{a}\frac{y}{1+w^\epsilon y}\Delta w^\epsilon + L^\epsilon. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

De (5.2.4) y (5.2.5) se deduce (5.2.2) aplicando el Lema 3.5. ∎

Teorema 5.2.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Entonces existen $\tilde{u}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$ tales que*

$$\begin{cases} sgn(\tilde{u}^\epsilon) = sgn(u) \\ |\tilde{u}^\epsilon| \leq |u| \\ \tilde{u}^\epsilon - u^\epsilon \to 0, \quad en\ H_0^1(\Omega)\ fuerte. \end{cases}$$

Demostración. Se aplica la estimación (2.1.7) a la ecuación (5.1.3) con $\varphi = 1$ y $r = \overline{u}^\epsilon = \frac{1}{2\gamma} log(1 + w^\epsilon(e^{2\gamma u} - 1))$, (donde γ se define a partir del Lema 2.1.1 y de que u^ϵ

está acotado en $L^\infty(\Omega)$). Usando la propiedad (5.1.2) de f^ϵ y el Lema 5.2.1, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla (u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+|^2 &\le \langle f^\epsilon, h(u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+\rangle - \int_\Omega \nabla \overline{u}^\epsilon \nabla h(u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+ \\ &+ C\int_\Omega h(u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+ + 2\gamma \int_\Omega |\nabla \overline{u}^\epsilon|^2 h(u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+ + o(1) \\ &= o(1).\end{aligned}$$

Hemos probado por tanto que $(u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte, razonando de forma análoga se podría probar que $(\underline{u}^\epsilon - u^\epsilon)^+$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte con

$$\underline{u}^\epsilon = \frac{-1}{2\gamma} log(1 + w^\epsilon(e^{-2\gamma u} - 1).$$

Otra forma de probar esta última afirmación es observando que $v^\epsilon = -u^\epsilon$ verifica la ecuación

$$-\Delta v^\epsilon + \hat{H}(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) = -f^\epsilon \quad \text{en } \Omega$$

con $\hat{H}(x,s,\xi) = -H(x,-s,-\xi)$, la cual verifica (5.1) con la misma función Γ, así como (5.2). De lo probado anteriormente se deduce que

$$\overline{v}^\epsilon = \frac{1}{2\gamma} log(1 + w^\epsilon(e^{2\gamma(-u)} - 1)) = -\underline{u}^\epsilon$$

verifica que $(v^\epsilon - \overline{v}^\epsilon)^+ = (\underline{u}^\epsilon - u^\epsilon)^+$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

Por otra parte, se verifica que $\underline{u}^\epsilon \le \overline{u}^\epsilon$ para lo cual basta probar que

$$\frac{1}{1 + w^\epsilon(e^{-2\gamma u} - 1)} \le 1 + w^\epsilon(e^{2\gamma u} - 1),$$

o lo que es lo mismo, que se verifica

$$\begin{aligned}&(1 - w^\epsilon + w^\epsilon e^{-2\gamma u})(1 - w^\epsilon + w^\epsilon e^{2\gamma u}) \\ &= (1 - w^\epsilon)^2 + (1 - w^\epsilon)w^\epsilon(e^{2\gamma u} + e^{-2\gamma u}) + |w^\epsilon|^2 \ge 1,\end{aligned}$$

lo que es cierto ya que $e^{2\gamma u} + e^{-2\gamma u} \ge 2$.

Definiendo ahora

$$\tilde{u}^\epsilon = \begin{cases} \overline{u}^\epsilon & \text{si } \overline{u}^\epsilon \le u^\epsilon \\ u^\epsilon & \text{si } \underline{u}^\epsilon \le u^\epsilon \le \overline{u}^\epsilon \\ \underline{u}^\epsilon & \text{si } u^\epsilon \le \underline{u}^\epsilon, \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\tilde{u}^\epsilon = u^\epsilon - (u^\epsilon - \overline{u}^\epsilon)^+ + (\underline{u}^\epsilon - u^\epsilon)^+$$

se obtiene el resultado. ∎

Observación 5.2.1 La importancia del Teorema 5.2.1 se sigue del Corolario 5.1.4 que nos permite reemplazar u^ϵ por $\tilde{u}^\epsilon$ en el problema de Homogeneización. De que se verifica la ecuación (5.1.18), se deduce que el Teorema 5.1.1. y sus Corolarios 5.1.1 y 5.1.2 son ciertos con la ventaja de que la constante genérica Λ sólo depende ahora de $sup\{\| \tilde{u}^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)}\} = \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$. Esto es, en los resultados obtenidos hasta ahora (y en los que conseguiremos más adelante) podemos suponer que las constantes que aparecen sólo dependen $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ y no de toda la sucesión u^ϵ. Así por ejemplo, en el Teorema 5.1.2 la norma en $L^\infty(\Omega)$ de E sólo depende de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$.

5.3. Comparación de dos Sucesiones de Soluciones.

Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2), (5.1.3) y sean g^ϵ, v^ϵ, v verificando relaciones análogas respectivamente.

Se define $J = \sup\{\| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \| v \|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Notación 5.3.1. Se designará por M una constante genérica que sólo depende de J y que puede cambiar de línea a línea.

Lema 5.3.1. *Sea $\tau^\epsilon = u^\epsilon - v^\epsilon - (u - v)$. Entonces, existe una constante $l \geq 1$ que depende de forma creciente de J tal que para toda función $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ se tiene*

(5.3.1)
$$\begin{aligned}&\int_\Omega | \nabla \tau^\epsilon |^2 \varphi \\ &\leq M \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi\right)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 | u - v | \varphi\right)^{\frac{1}{l}} + o(1).\end{aligned}$$

Demostración. Sea $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Paso 1. Aplicando el Teorema 5.2.1 y el Corolario 5.1.4, podemos suponer que se verifica

(5.3.2)
$$\begin{cases} \| u^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| u \|_{L^\infty(\Omega)} \\ \| v^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| v \|_{L^\infty(\Omega)} \end{cases}$$

y por tanto que las constantes que aparecen en el Lema 5.1.1 y en los Corolarios 5.1.1, 5.1.2, (aplicados tanto a u^ϵ como a v^ϵ), dependen sólo de J.

Paso 2. Por el Lema 2.2.1, existen funciones inversas ψ, ϑ dadas por (2.2.3), (2.2.4) tales que si se definen

$$(5.3.3) \qquad \begin{cases} \hat{u}^\epsilon = \vartheta(u^\epsilon) & \hat{v}^\epsilon = \vartheta(v^\epsilon) \\ \hat{u} = \vartheta(u) & \hat{v} = \vartheta(v) \\ \hat{f}^\epsilon = \dfrac{f^\epsilon}{\psi'(u^\epsilon)} & \hat{g}^\epsilon = \dfrac{g^\epsilon}{\psi'(v^\epsilon)}, \end{cases}$$

entonces se verifica

$$(5.3.4) \qquad \begin{cases} -\Delta\hat{u}^\epsilon + B(x, \hat{u}^\epsilon, \nabla \hat{u}^\epsilon) = \hat{f}^\epsilon & \text{en } \Omega^\epsilon, \\ -\Delta\hat{v}^\epsilon + B(x, \hat{v}^\epsilon, \nabla \hat{v}^\epsilon) = \hat{g}^\epsilon & \text{en } \Omega^\epsilon, \end{cases}$$

donde B satisface (2.2.6) y (2.2.7).

Paso 3. Con los acuerdos de notación 4.2.1. y 5.3.1, se tiene

$$(5.3.5) \qquad \{ | \hat{u} - \hat{v} | \leq M \mid u - v \mid .$$

$$(5.3.6) \qquad \begin{cases} | \nabla \hat{u}^\epsilon | \leq M \mid \nabla u^\epsilon |, \\ | \nabla \hat{v}^\epsilon | \leq M \mid \nabla v^\epsilon |, \end{cases}$$

$$(5.3.7) \qquad \begin{cases} | \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) | \leq M \mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid + R^\epsilon \\ | \nabla (\hat{v}^\epsilon - \hat{v}) | \leq M \mid \nabla (v^\epsilon - v) \mid + R^\epsilon \end{cases}$$

$$(5.3.8) \qquad \{ | \nabla \tau^\epsilon |^2 \leq M(| \nabla \hat{\tau}^\epsilon |^2 + | \nabla (v^\epsilon - v) |^2 | \hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon |^2) + S^\epsilon,$$

donde análogamente a τ^ϵ, se define $\hat{\tau}^\epsilon = \hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon - (\hat{u} - \hat{v})$.

Demostración.- La desigualdad (5.3.5) se deduce de que ϑ es localmente lipschitziana.

Por otra parte, la igualdad $\nabla \hat{u}^\epsilon = \vartheta'(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon$ implica $| \nabla \hat{u}^\epsilon | \leq M \mid \nabla u^\epsilon \mid$ y análogamente, se prueba la desigualdad $| \nabla \hat{v}^\epsilon | \leq M \mid \nabla v^\epsilon \mid$.

Respecto a (5.3.7) vamos a probar por ejemplo $| \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) | \leq M \mid \nabla (u^\epsilon - u) \mid + R^\epsilon$ ya que la otra desigualdad es análoga. Se tiene

$$\begin{aligned} \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) &= \vartheta'(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon - \vartheta'(u) \nabla u \\ &= \vartheta'(u^\epsilon) \nabla (u^\epsilon - u) + (\vartheta'(u^\epsilon) - \vartheta'(u)) \nabla u \\ &= \vartheta'(u^\epsilon) \nabla (u^\epsilon - u) + R^\epsilon, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$| \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) | \leq M | \nabla (u^\epsilon - u) | + R^\epsilon.$$

Por último, en lo referente a (5.3.8), se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \tau^\epsilon &= \psi'(\hat{u}^\epsilon) \nabla \hat{u}^\epsilon - \psi'(\hat{u}) \nabla \hat{u} - \psi'(\hat{v}^\epsilon) \nabla \hat{v}^\epsilon + \psi'(\hat{v}) \nabla \hat{v} \\ &= \psi'(\hat{u}^\epsilon) \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) + (\psi'(\hat{u}^\epsilon) - \psi'(\hat{u})) \nabla \hat{u} \\ &- \psi'(\hat{v}^\epsilon) \nabla (\hat{v}^\epsilon - \hat{v}) - (\psi'(\hat{v}^\epsilon) - \psi'(\hat{v})) \nabla \hat{v} \\ &= \psi'(\hat{u}^\epsilon) \nabla \hat{\tau}^\epsilon + (\psi'(\hat{u}^\epsilon) - \psi'(\hat{v}^\epsilon)) \nabla (\hat{v}^\epsilon - \hat{v}) + R^\epsilon,\end{aligned}$$

igualdad de la que es fácil deducir (5.3.8).

Paso 4. Se define $\hat{\eta}^\epsilon = \hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon - w^\epsilon(\hat{u} - \hat{v})$. Para toda función $\phi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, se cumple

$$\int_\Omega | \nabla \hat{\eta}^\epsilon |^2 \phi \leq M \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \phi + o(1). \tag{5.3.9}$$

<u>Demostración.</u>- Se tiene

$$\begin{aligned}| \nabla \hat{\eta}^\epsilon |^2 &\leq 4 | \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{u}) |^2 + 4 | \nabla (\hat{v}^\epsilon - \hat{v}) |^2 \\ &+ 4 | \nabla (w^\epsilon \hat{u} - \hat{u}) |^2 + 4 | \nabla (w^\epsilon \hat{v} - \hat{v}) |^2 .\end{aligned}$$

Basta usar ahora el Lema 3.4, el Paso 3 y el Lema 5.1.1 con $\psi^\epsilon = 1$.

Paso 5. Se tiene

$$\int_\Omega | \nabla \hat{\eta}^\epsilon |^2 | \hat{\eta}^\epsilon |^{n-1} \varphi \leq M \int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 | u - v | \varphi + o(1), \tag{5.3.10}$$

donde la constante n está definida en el Lema 2.2.1 y se puede tomar dependiendo de forma creciente de J.

<u>Demostración.</u>- El Lema 2.2.2 ii), aplicado a las ecuaciones que componen (5.3.4) con $\hat{r} = w^\epsilon(\hat{u} - \hat{v})$ da

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \int_\Omega S'(\hat{\eta}^\epsilon) | \nabla \hat{\eta}^\epsilon |^2 \varphi \leq \langle f^\epsilon, \frac{S(\hat{\eta}^\epsilon)}{\psi'(u^\epsilon)} \varphi \rangle - \langle g^\epsilon, \frac{S(\hat{\eta}^\epsilon)}{\psi'(v^\epsilon)} \varphi \rangle \\ &- \int_\Omega \varphi \nabla S(\hat{\eta}^\epsilon) \nabla (w^\epsilon(\hat{u} - \hat{v})) - \int_\Omega S(\hat{\eta}^\epsilon) \nabla (\hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon) \nabla \varphi \\ &+ M \int_\Omega [(1 + | \nabla \hat{u}^\epsilon |^2 + | \nabla \hat{v}^\epsilon |^2) | w^\epsilon(\hat{u} - \hat{v}) | \\ &+ (1 + | \nabla \hat{u}^\epsilon | + | \nabla \hat{v}^\epsilon |) | \nabla (w^\epsilon(\hat{u} - \hat{v})) |] | \hat{\eta}^\epsilon |^n \varphi.\end{aligned}$$

Aplicando a esta desigualdad la propiedad (5.1.1) de f^ϵ y g^ϵ, el Lema 3.5 y el Paso 3 se deduce

$$\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{n-1} \varphi \leq M \int_\Omega [(|\nabla u^\epsilon|^2 + |\nabla v^\epsilon|^2) |u-v| + |\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|) |\nabla (w^\epsilon(\hat{u}-\hat{v}))|] |\hat{\eta}^\epsilon|^n \varphi + o(1). \tag{5.3.11}$$

Ahora, el Corolario 5.1.2 y el Paso 4 dan, usando la acotación en $L^\infty(\Omega)$ de $\hat{\eta}^\epsilon$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon|^2 + |\nabla v^\epsilon|^2) |u-v| |\hat{\eta}^\epsilon|^n \varphi \\
&\leq M \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot \left(\int_\Omega |\hat{\eta}^\epsilon|^{2(n-1)} |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1) \\
&\leq M \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi + o(1).
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Por otra parte, acotando otra vez $\hat{\eta}^\epsilon$ por su norma en $L^\infty(\Omega)$ y aplicando el Lema 5.1.1 y el Paso 3, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|) |\nabla (w^\epsilon(\hat{u}-\hat{v}))| |\hat{\eta}^\epsilon|^n \varphi \\
&\leq M \int_\Omega (|\nabla (u^\epsilon - u)| + |\nabla (v^\epsilon - v)|) |\nabla w^\epsilon| |\hat{u}-\hat{v}| \varphi + o(1) \\
&\leq M \left[\left(\int_\Omega |\nabla (u^\epsilon - u)|^2 |\hat{u}-\hat{v}| \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + \left(\int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 |\hat{u}-\hat{v}| \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\cdot \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |\hat{u}-\hat{v}| \varphi \right)^{\frac{1}{2}} + o(1) \\
&\leq M \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |\hat{u}-\hat{v}| \varphi + o(1).
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Las desigualdades (5.3.11), (5.3.12) y (5.3.13) dan ahora (5.3.10).

Paso 6. Para todo $i \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{i-1} \varphi \\
&\leq M \left[\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right. \\
&\left. + \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{2i} \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right] + o(1).
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Demostración.- Se considera $R(s) = | s |^{i-1} s$. Restando las dos ecuaciones que componen (5.3.4) y tomando la función $R(\hat\eta^\epsilon)\varphi$ como función test en la ecuación resultante, se obtiene

$$\int_\Omega \varphi \nabla (\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon) \nabla R(\hat\eta^\epsilon) + \int_\Omega R(\hat\eta^\epsilon) \nabla (\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon) \nabla \varphi$$
$$+ \int_\Omega (B(x, \hat u^\epsilon, \nabla \hat u^\epsilon) - B(x, \hat v^\epsilon, \nabla \hat v^\epsilon)) R(\hat\eta^\epsilon)\varphi = \langle f^\epsilon, \frac{R(\hat\eta^\epsilon)}{\psi'(u^\epsilon)}\varphi\rangle - \langle g^\epsilon, \frac{R(\hat\eta^\epsilon)}{\psi'(v^\epsilon)}\varphi\rangle.$$

Ahora, gracias a la convergencia fuerte a cero de $R(\hat\eta^\epsilon) \nabla \varphi$ en $L^2(\Omega)$ que se deduce del Teorema de Convergencia Dominada, se tiene

$$\int_\Omega R(\hat\eta^\epsilon) \nabla (\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon) \nabla \varphi = o(1).$$

Por otra parte, la propiedad (5.1.1) de $\hat f^\epsilon$ y $\hat g^\epsilon$ nos da también

$$\langle f^\epsilon, \frac{R(\hat\eta^\epsilon)}{\psi'(u^\epsilon)}\varphi\rangle - \langle g^\epsilon, \frac{R(\hat\eta^\epsilon)}{\psi'(v^\epsilon)}\varphi\rangle = o(1),$$

con estas dos últimas estimaciones y (2.2.6), la igualdad anterior se transforma en

$$\int_\Omega R'(\hat\eta^\epsilon) | \nabla \hat\eta^\epsilon |^2 \varphi + \int_\Omega \varphi \nabla (w^\epsilon(\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon)) \nabla R(\hat\eta^\epsilon)$$
$$\leq M \int_\Omega \Big[(1 + | \nabla \hat u^\epsilon |^2 + | \nabla \hat v^\epsilon |^2) | \hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon |$$
$$+ (1 + | \nabla \hat u^\epsilon | + | \nabla \hat v^\epsilon |) | \nabla (\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon) |\Big] | R(\hat\eta^\epsilon) | \varphi + o(1),$$

desigualdad que usando el Lema 3.5 y el Paso 3, lleva a

$$\begin{aligned} & i \int_\Omega | \nabla \hat\eta^\epsilon |^2 | \hat\eta^\epsilon |^{i-1} \varphi \\ & \leq M \int_\Omega \Big[(| \nabla u^\epsilon |^2 + | \nabla v^\epsilon |^2) | \hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon | \\ & + (| \nabla u^\epsilon | + | \nabla v^\epsilon |) | \nabla (\hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon) |\Big] | \hat\eta^\epsilon |^i \varphi + o(1). \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Utilizando el Corolario 5.1.2 y el Paso 3 en el primer sumando del segundo miembro se tiene

$$\int_\Omega (| \nabla u^\epsilon |^2 + | \nabla v^\epsilon |^2) | \hat u^\epsilon - \hat v^\epsilon | | \hat\eta^\epsilon |^i \varphi$$
$$\leq M \int_\Omega (| \nabla u^\epsilon |^2 + | \nabla v^\epsilon |^2) | \hat\eta^\epsilon |^i | \hat\eta^\epsilon | \varphi$$
$$+ M \int_\Omega (| \nabla u^\epsilon |^2 + | \nabla v^\epsilon |^2) | \hat\eta^\epsilon |^i | u - v | \varphi$$
$$\leq M \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 \varphi\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega | \nabla \hat\eta^\epsilon |^2 | \hat\eta^\epsilon |^{2i} \varphi\right)^{\frac12}$$
$$+ M \left(\int_\Omega | \nabla w^\epsilon |^2 | u - v | \varphi\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega | \nabla \hat\eta^\epsilon |^2 | \hat\eta^\epsilon |^{2(i-1)} | u - v | \varphi\right)^{\frac12} + o(1).$$

Utilizando ahora el Paso 4 y la acotación en $L^\infty(\Omega)$ de $|\eta^\epsilon|^{2(i-1)}$, se deduce

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon|^2 + |\nabla v^\epsilon|^2)\,|\hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon|\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi \\ &\leq M\left[\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v|\varphi \right.\\ &\left.+\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2|\hat{\eta}^\epsilon|^{2i}\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right]+o(1).\end{aligned}$$

Para el segundo término del segundo miembro de (5.3.15), se usa

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|)\,|\nabla(\hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon)|\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi \\ &\leq \int_\Omega (|\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|)(|\nabla \hat{\eta}^\epsilon| + |\nabla(w^\epsilon(\hat{u}-\hat{v}))|)\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi,\end{aligned}\tag{5.3.16}$$

donde encontramos otros dos términos a acotar. En el primero, usando el Lema 5.1.1 con $\psi^\epsilon = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|)\,|\nabla \hat{\eta}^\epsilon|\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi \\ &= \int_\Omega (|\nabla(u^\epsilon - u)| + |\nabla(v^\epsilon - v)|)\,|\nabla \hat{\eta}^\epsilon|\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi + o(1) \\ &\leq M\left[\left(\int_\Omega |\nabla(u^\epsilon-u)|^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla(v^\epsilon-v)|^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\cdot\left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2|\hat{\eta}^\epsilon|^{2i}\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1) \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2|\hat{\eta}^\epsilon|^{2i}\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).\end{aligned}$$

Para el segundo término del segundo miembro de (5.3.16) se razona de forma análoga a como se hizo para deducir (5.3.13) con lo que se llega a

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|\nabla u^\epsilon| + |\nabla v^\epsilon|)\,|\nabla(w^\epsilon(\hat{u}-\hat{v}))|\,|\hat{\eta}^\epsilon|^i\varphi \\ &\leq M\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2|u-v|\varphi + o(1).\end{aligned}$$

Las acotaciones obtenidas para el segundo miembro de (5.3.15) dan ahora (5.3.14).

Paso 7. Existe una constante k que depende de forma creciente de J tal que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2\varphi \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2\varphi\right)^{1-\frac{1}{k}}\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2|u-v|\varphi\right)^{\frac{1}{k}} + o(1).\end{aligned}\tag{5.3.17}$$

Demostración.- La ecuación (5.3.14) escrita para i=1 lleva a

$$\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 \varphi$$

(5.3.18)
$$\leq M\Bigg[\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi$$
$$+\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg] + o(1).$$

Usando otra vez (5.3.14), ahora con $i = 3$, y usando la desigualdad algebraica

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \; x, y \geq 0,$$

se deduce

$$\left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq M\Bigg[\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^6 \varphi\right)^{\frac{1}{4}}\Bigg].$$

Introduciendo en (5.3.18) esta desigualdad, junto con

$$\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi$$
$$\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi\right)^{\frac{1}{2}},$$

se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 \varphi$$
$$\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg[\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^6 \varphi\right)^{\frac{1}{4}}\Bigg].$$

Continuando con este proceso se puede probar por inducción que para todo $j \geq 1$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 \varphi$$

(5.3.19)
$$\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{1-\frac{1}{2^j-1}} \Bigg[\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi\right)^{\frac{1}{2^j-1}}$$
$$+\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2^j}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{2(2^j-1)} \varphi\right)^{\frac{1}{2^j}}\Bigg].$$

Se considera ahora el primer entero j tal que $2(2^j - 1)$ sea mayor que $n-1$ (el cual sólo depende de n y por tanto de J). Entonces, de que la norma en $L^\infty(\Omega)$ de $\hat{\eta}^\epsilon$ está acotada se deduce

$$\int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{2(2^j-1)} \varphi \leq M \int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\hat{\eta}^\epsilon|^{n-1} \varphi. \tag{5.3.20}$$

El Paso 5 y las desigualdades (5.3.19), y (5.3.20) dan ahora (5.3.17).

Paso 8. Se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \hat{\tau}^\epsilon|^2 \varphi \\ &\leq M \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi \right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right)^{\frac{1}{k}} + o(1), \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

con k definida en el Paso 7.

<u>Demostración.</u>- El resultado se sigue fácilmente de la desigualdad

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \hat{\tau}^\epsilon|^2 \varphi \\ &\leq 2 \int_\Omega |\nabla \hat{\eta}^\epsilon|^2 |\varphi + 2 \int_\Omega |\nabla ((w^\epsilon - 1)(\hat{u} - \hat{v}))|^2 \varphi + o(1). \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Usando el Lema 3.4 y el Paso 3, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla ((w^\epsilon - 1)(\hat{u} - \hat{v}))|^2 \varphi \leq \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |\hat{u} - \hat{v}|^2 \varphi + o(1) \\ &\leq M \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u - v| \varphi + o(1) \\ &\leq M \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi \right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right)^{\frac{1}{k}} + o(1), \end{aligned}$$

que junto con (5.3.17) y (5.3.22) da (5.3.21).

Paso 9. Existe una constante l que depende de forma creciente de J tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \tau^\epsilon|^2 \varphi \\ &\leq C \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi \right)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 |u-v| \varphi \right)^{\frac{1}{l}} + o(1), \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Demostración.- Por el Paso 3, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla r^\epsilon|^2 \varphi \\
&\le M\left(\int_\Omega |\nabla \hat{r}^\epsilon|^2 \varphi + \int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 | \hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon |^2 \varphi\right) + o(1) \\
&\le M\left(\int_\Omega |\nabla \hat{r}^\epsilon|^2 \varphi + \int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 | \hat{r}^\epsilon | \varphi\right. \\
&\left. + \int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 | \hat{u} - \hat{v} | \varphi\right) + o(1).
\end{aligned} \tag{5.3.24}
$$

Ahora, por el Corolario 5.1.2, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 | \hat{r}^\epsilon | \varphi \\
&\le M\left(\int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \hat{r}^\epsilon|^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).
\end{aligned} \tag{5.3.25}
$$

El Lema 5.1.1 y el Paso 3 dan

$$
\int_\Omega |\nabla (v^\epsilon - v)|^2 | \hat{u} - \hat{v} | \varphi \le M \int_\Omega |\nabla w^\epsilon|^2 | u - v | \varphi + o(1). \tag{5.3.26}
$$

De (5.3.24), (5.3.25) y (5.3.26) se deduce ahora el enunciado del Paso 9 y por tanto el Lema 5.3.1 utilizando el Paso 8. ∎

La primera consecuencia de interés del Lema 5.3.1, relacionada con los resultados de Corrector, es la siguiente

Corolario 5.3.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ, u verificando (5.1.2), (5.1.3) y sean g^ϵ, v^ϵ, v verificando relaciones análogas respectivamente. Con el acuerdo de notación 5.3.1, existe una costante $l \ge 1$ que depende de forma creciente de J tal que*

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla (u^\epsilon - v^\epsilon - (u - v))|^2 \\
&\le M\left(\int_\Omega | u - v | \, d\mu\right)^{\frac{1}{l}}.
\end{aligned} \tag{5.3.27}
$$

Demostración. Inmediato tomando $\varphi = 1$ en el Lema 5.3.1 y usando el Lema 3.3.

∎

Corolario 5.3.2 *Si en el Corolario 5.3.1 se toma $u = v$ entonces se tiene que $u^\epsilon - v^\epsilon$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.*

Observación 5.3.1 Como aplicación, obsérvese que el Teorema 4.2.1, resultado de Corrector para el problema 4.1.1 se puede deducir de forma inmediata a partir del Lema 5.2.1 y del Corolario 5.3.1.

Supongamos ahora que en las condiciones del Lema 5.3.1, el par de sucesiones $H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)\imath$ y $H(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon)w^\epsilon$ convergen en el sentido $*$-débil de las medidas y supongamos también que existen f, g tales que f^ϵ, g^ϵ convergen a f, g en el sentido de (5.1.16). Por el Teorema 5.1.2, existen unas funciones $E, E' \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ tales que u, v verifican

$$\begin{cases} -\Delta u + E\mu + H(x, u, \nabla u) = f & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v + E'\mu + H(x, v, \nabla v) = g & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Se tiene

Lema 5.3.2. *Existe una constante c que depende de forma creciente de J tal que para todo conjunto Borel $A \subset \Omega$ se tiene*

$$\int_A | E - E' | \, d\mu \leq M \mid \mu(A) \mid^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_A | u - v | \, d\mu \right)^{\frac{1}{c}}. \tag{5.3.28}$$

Demostración. Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Por la definición de E y E' se tiene

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega E\varphi d\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega (H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)w^\epsilon - H(x, u, \nabla u))\varphi - \int_\Omega u\varphi d\mu \\ \displaystyle\int_\Omega E'\varphi d\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega (H(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon)w^\epsilon - H(x, v, \nabla v))\varphi - \int_\Omega v\varphi d\mu, \end{cases}$$

de donde se obtiene fácilmente la desigualdad

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega (E - E')\varphi d\mu \right| \\ &\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \int_\Omega | H(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) - H(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) \\ &- H(x, u, \nabla u) + H(x, v, \nabla v) || \varphi | \, d\mu \\ &+ \int_\Omega | u - v || \varphi | \, d\mu. \end{aligned}$$

Aplicando ahora los Lemas 5.1.4 y 5.3.1 y razonando como en anteriores ocasiones se deduce

$$\left| \int_\Omega (E - E')\varphi d\mu \right| \leq M \left(\int_\Omega | \varphi | \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_\Omega | u - v || \varphi | \, \mu \right)^{\frac{1}{c}}, \tag{5.3.29}$$

Ahora bien, para todo conjunto abierto $G \subset \Omega$ se tiene

$$\int_G | E - E' | \, d\mu = \| (E - E')\mu \| (A)$$
$$= \sup \left\{ \left| \int_\Omega (E - E')\varphi d\mu \right| : \ \varphi \in C_0^0(\Omega), \ \| \varphi \|_{L^\infty(G)} \leq 1 \right\},$$

que junto con (5.3.29) da

$$\int_G | E - E' | \, d\mu \leq M \mid \mu(G) \mid^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_G | u - v | \, d\mu \right)^{\frac{1}{c}}.$$

Usando ahora que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$

$$\int_K | E - E' | \, d\mu = \inf \left\{ \int_G | E - E' | \, d\mu : \ K \subset G \subset \Omega, \ G \text{ abierto} \right\}$$

y que para todo conjunto Borel A contenido en Ω se tiene

$$\int_A | E - E' | \, d\mu = \sup \left\{ \int_K | E - E' | \, d\mu : \ K \subset A, \ K \text{ compacto} \right\}$$

se obtiene el resultado. ∎

5.4. Construcción de Aproximantes.

En esta Sección vamos a probar que toda función de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ puede obtenerse como límite de las soluciones de una sucesión de problemas del tipo de (5.3). Concretamente, se tiene

Teorema 5.4.1. *Sea $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera u_n^ϵ la solución del problema*

$$\text{(5.4.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_n^\epsilon + n u_n^\epsilon + H(x, u_n^\epsilon, \nabla u_n^\epsilon) = nu \ \text{en } \Omega^\epsilon \\ u_n^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon). \end{cases}$$

Entonces existe una subsucesión ϵ' de ϵ y existe una sucesión de funciones $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tales que

i) Para todo n, $u_n^{\epsilon'}$ converge a u_n en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil.

ii) Existe una constante A que depende de forma creciente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ tal que

$$\| u_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leq A.$$

iii) La sucesión u_n converge a u en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

iv) La sucesión $\sqrt{n}(u_n - u)$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ fuerte.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 2.2.1, existe una única solución de este problema, la cual está acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ independientemente de ϵ, de hecho (Teorema 2.2.1), si $C_0 = \omega_0(0)$ entonces

$$\| u_n^\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_0 + n \| u \|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda + n} \leq A, \tag{5.4.2}$$

donde A es una constante que sólo depende de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$. Podemos por tanto suponer que para todo $n \in N$ existe una subsucesión ϵ' de ϵ tal que $u_n^{\epsilon'}$ converge a una función $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ débil. Mediante un proceso diagonal, podemos de hecho suponer que la sucesión ϵ' es la misma para todo n.

De (5.4.2) se deduce que $\| u_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leq A$, lo que constituye el apartado ii) del enunciado.

Ahora, por el Teorema 5.1.2, existe una sucesión de funciones $E_n \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ cuya norma en $L^\infty(\Omega, d\mu)$ está acotada por una constante que depende de forma creciente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$, tales que u_n verifica la ecuación.

$$-\Delta u_n + E_n \mu + n u_n + H(x, u_n, \nabla u_n) = nu \quad \text{en } \Omega. \tag{5.4.3}$$

Aplicando el Lema 2.1.1 a la ecuación (5.4.1) con $u = u_n$, $r = u$, $f = nu$ y $\varphi = 1$, (las constantes γ y C se pueden tomar independientemente de n gracias a que la sucesión u_n está acotada en $L^\infty(\Omega)$). Se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega | \nabla (u_n - u) |^2 \leq n \int_\Omega (u - u_n) h(u_n - u) - \int_\Omega E_n h(u_n - u) d\mu \\ - \int_\Omega \nabla u \nabla h(u_n - u) + C \int_\Omega | h(u_n - u) | \\ + 2\gamma \int_\Omega | \nabla u |^2 | h(u_n - u) | .\end{aligned}$$

Por (2.1.5), $h' > 1$ y por tanto

$$\int_\Omega (u_n - u) h(u_n - u) \geq \int_\Omega | u_n - u |^2,$$

con lo que se puede escribir

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega | \nabla (u_n - u) |^2 + n \int_\Omega | u_n - u |^2 \\
(5.4.4) \qquad &\leq - \int_\Omega E_n h(u_n - u) d\mu - \int_\Omega \nabla u \nabla h(u_n - u) \\
&+ C \int_\Omega | h(u_n - u) | + 2\gamma \int_\Omega | \nabla u |^2 | h(u_n - u) | .
\end{aligned}
$$

En el segundo miembro de (5.4.4) se verifica que

$$
- \int_\Omega E_n h(u_n - u) d\mu + C \int_\Omega | h(u_n - u) | + 2\gamma \int_\Omega | \nabla u |^2 | h(u_n - u) |
$$

está acotado independientemente de n gracias a la acotación en $L^\infty(\Omega)$ de la sucesión u_n. Para el término restante del segundo miembro de (5.4.4), se tiene

$$
\left| \int_\Omega \nabla u \nabla h(u_n - u) \right| \leq \| h'(u_n - u) \|_{L^\infty(\Omega)} \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \| u_n - u \|_{H_0^1(\Omega)} .
$$

Luego de (5.4.4) se deduce la existencia de dos constantes a, b positivas tales que

$$
\| u_n - u \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a + b \| u_n - u \|_{H_0^1(\Omega)},
$$

lo que establece que $u_n - u$ está acotado en $H_0^1(\Omega)$. Teniendo ahora en cuenta (5.4.4), se deduce que $n \| u_n - u \|_{L^2(\Omega)}$ está acotado independientemente de n y por tanto que $u_n - u$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ fuerte, lo que añadido a la acotación en $H_0^1(\Omega)$ establece que $u_n - u$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil. Con esta nueva información, se deduce que el segundo miembro de (5.4.4) converge a cero, (para pasar al límite en $\int_\Omega E_n h(u_n - u) d\mu$ se hace uso del Teorema A.6 en el Apéndice, junto con el Teorema de la Convergencia Dominada). De aquí se deduce iii) e iv). ∎

5.5. Estructura del Término Extraño.

En esta Sección vamos a dar un resultado más concreto acerca de la estructura del problema límite de (5.3) probando la existencia de una función de Carathéodory $G(x, s)$ definida en $\Omega \times \mathbb{R}$ tal que la función E que da el Teorema 5.1.2 se escribe como $G(x, u)$.

Sean Ω_m una sucesión de conjuntos abiertos contenidos en Ω tales que para todo m, $\bar{\Omega}_m \subset \Omega$ y $\bigcup_{m=1}^\infty \Omega_m = \Omega$. Se considera también el conjunto de números racionales escrito en forma de sucesión $\{r_k\}$. Para todo par $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se toma una función $u_{k,m} \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u_{k,m} = r_k$ en Ω_m, $| u_{k,m}(x) | \leq | r_k |$ en casi todo $x \in \Omega$. Por el Teorema 5.4.1, existe una subsucesión ϵ' de ϵ (que por un proceso diagonal se puede tomar independientemente de m y k) tal que la sucesión $u^{\epsilon'}_{k,m,n}$ solución del problema

$$
(5.5.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u^{\epsilon'}_{k,m,n} + n u^{\epsilon'}_{k,m,n} + H(x, u^{\epsilon'}_{k,m,n}, \nabla u^{\epsilon'}_{k,m,n}) = n u_{k,m} \text{ en } \Omega^{\epsilon'} \\ u^{\epsilon'}_{k,m,n} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon'}) \cap L^\infty(\Omega^{\epsilon'}), \end{cases}
$$

converge, cuando ϵ' tiende a cero, hacia una función $u_{k,m,n} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, la cual es solución de la ecuación

$$
-\Delta u_{k,m,n} + n u_{k,m,n} + E_{k,m,n}\mu + H(x, u_{k,m,n}, \nabla u_{k,m,n}) = n u_{k,m} \quad \text{en } \Omega,
$$

donde $E_{k,m,n}$ es una sucesión en $L^\infty(\Omega, d\mu)$ que está acotada por una constante que depende de forma creciente de $\| u_{k,m} \|_{L^\infty(\Omega)} = | r_k |$ y donde $u_{k,m,n}$ converge a $u_{k,m}$ en $H_0^1(\Omega)$ fuerte cuando n tiende a infinito.

Por el Lema 5.3.2 existen unas constantes M y c que dependen de forma creciente de $| r_k |$ tales que para todo n_1, n_2 se verifica

$$
(5.5.2) \qquad \int_\Omega | E_{k,m,n_1} - E_{k,m,n_2} | \, d\mu \leq M \left(\int_\Omega | u_{k,m,n_1} - u_{k,m,n_2} | \, d\mu \right)^{\frac{1}{c}}.
$$

Por el Teorema A.5, en el Apéndice y el Teorema de Convergencia Dominada, la sucesión $u_{k,m,n}$ converge a $u_{k,m}$ en $L^1(\Omega, d\mu)$ fuerte cuando n tiende a infinito y por tanto la sucesión $\{E_{k,m,n}\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega, d\mu)$ que convergerá a una función $E_{k,m}$ en $L^1(\Omega, d\mu)$. De la acotación en $L^\infty(\Omega, d\mu)$ de $E_{k,m,n}$ se deduce que en realidad $E_{k,m} \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ y su norma está acotada por una constante que depende de forma creciente de $| r_k |$.

Si se consideran ahora dos funciones $u_{k_1,m_1,n}$ y $u_{k_2,m_2,n}$, el Lema 5.3.2 nos da también la existencia de constantes M y c (no necesariamente las mismas que en (5.5.2)) que dependen de forma creciente de $\max\{| r_{k_1} |, | r_{k_2} |\}$, tales que para todo conjunto Borel $A \subset \Omega$ se tiene

$$
\int_A | E_{k_1,m_1,n} - E_{k_2,m_2,n} | \, d\mu \leq M \, | \mu(A) |^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_A | u_{k_1,m_1,n} - u_{k_2,m_2,n} | \, d\mu \right)^{\frac{1}{c}},
$$

de donde tomando límite en n se deduce

$$\int_A | E_{k_1,m_1} - E_{k_2,m_2} | \, d\mu \leq M \mid \mu(A) \mid^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_A | u_{k_1,m_1} - u_{k_2,m_2} | \, d\mu \right)^{\frac{1}{c}} . \tag{5.5.3}$$

Se toman para $u_{k,m}$ y $E_{k,m}$ sus representantes de Lebesgue para μ y se define Θ como el conjunto de puntos de Ω que son puntos de Lebesgue para la medida μ para todas las funciones $u_{k,m}$ y $E_{k,m}$. (Θ es igual a Ω salvo un conjunto de μ-medida nula).

Sea $x \in \Theta$. Entonces dados $(k_1, m_1), (k_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se deduce a partir de (5.5.3)

$$\begin{aligned}
&| E_{k_1,m_1}(x) - E_{k_2,m_2}(x) | \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \left| \int_{B(x,r)} (E_{k_1,m_1}(y) - E_{k_2,m_2}(y)) \, d\mu(y) \right| \\
&\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |E_{k_1,m_1}(y) - E_{k_2,m_2}(y)| \, d\mu(y) \\
&\leq \limsup_{\epsilon \to 0} M \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u_{k_1,m_1}(y) - u_{k_2,m_2}(y)| \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{c}} .
\end{aligned}$$

Ahora, la desigualdad

$$\begin{aligned}
|u_{k_1,m_1}(y) - u_{k_2,m_2}(y)| &\leq |u_{k_1,m_1}(y) - u_{k_1,m_1}(x)| \\
&\quad + |u_{k_1,m_1}(x) - u_{k_2,m_2}(x)| + |u_{k_2,m_2}(y) - u_{k_2,m_2}(x)|,
\end{aligned}$$

lleva (gracias a que $x \in \Theta$) a

$$| E_{k_1,m_1}(x) - E_{k_2,m_2}(x) | \leq M \mid u_{k_1,m_1}(x) - u_{k_2,m_2}(x) \mid^{\frac{1}{c}} . \tag{5.5.4}$$

Definición 5.5.1. *Vamos a definir una función $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue. Dado $x \in \Theta \cap \Omega_m$, se define para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$G(x, s) = \lim_{i \to \infty} E_{k_i,m}(x), \tag{5.5.5}$$

donde r_{k_i} es una sucesión de números racionales que converge a s. El límite en (5.5.5) existe gracias a (5.5.4) que implica que $E_{k_i,m}(x)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Puesto que este límite existe siempre, no puede depender de la sucesión particular que se tome. (En particular $G(x, r_k) = E_{k,m}(x)$).

Como $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ *tendremos la función* $G(x,s)$ *definida en todo el conjunto* $\Theta = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\Theta \cap \Omega_m)$ *siempre que para todo* $x \in \Omega_{m_1} \cap \Omega_{m_2}$ *y para toda sucesión de racionales* r_{k_i} *convergiendo a* s *se tenga*

$$\lim_{i \to \infty} E_{k_i,m_1}(x) = \lim_{i \to \infty} E_{k_i,m_2}(x),$$

lo cual se deduce fácilmente a partir de (5.5.4), pues

$$| E_{k_i,m_1}(x) - E_{k_i,m_2}(x) | \leq M \mid r_{k_i} - r_{k_i} |^{\frac{1}{c}} = 0.$$

En realidad, dado $s \in \mathbb{R}$ *sólo nos interesan los valores de la función* $G(.,s)$ *en casi todo para la medida* μ *por lo que nos basta con que esté definida en* Θ.

La función G verifica las siguientes propiedades

Proposición 5.5.1. *La función* $G(x,s)$ *es una función de Carathéodory. De hecho, se tiene*

i) Para todo $s \in \mathbb{R}$ *la función* $G(.,s) \in L^{\infty}(\Omega, d\mu)$ *y existe una función creciente* $p : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *tal que*

$$(5.5.6) \qquad \| G(.,s) \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq p(| s |).$$

ii) Existen funciones crecientes $M, c : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *tales que* μ *en casi todo* $x \in \Omega$ *se verifica que para todo* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$(5.5.7) \qquad | G(x,s_1) - G(x,s_2) | \leq M(s) \mid s_1 - s_2 |^{\frac{1}{c(s)}},$$

con $s = | s_1 | + | s_2 |$, *(i.e.* $G(x,.)$ *es localmente Hölderiana y por tanto continua.)*

Demostración. De que en Ω_m, $G(x, r_k) = E_{k,m}(x)$ en casi todo para μ, se deduce que $G(., r_k) \in L^{\infty}(\Omega, d\mu)$. Puesto que además la norma de $G(.,r_k)$ está acotada por una constante que depende de forma creciente de $| r_k |$, (no depende de Ω_m) y para todo $s \in \mathbb{R}$, la función $G(.,s)$ es límite μ en casi todo de $G(.,r_{k_i})$ donde r_{k_i} es una sucesión de racionales que converge a s, se deduce que $G(.,s) \in L^1(\Omega, d\mu)$. Esto da i).

El apartado ii) se deduce fácilmente a partir de (5.5.4). ∎

Estamos ahora en disposición de establecer el Teorema fundamental de este Capítulo que nos va a dar la forma de la ecuación límite de (5.3). Se tiene

Teorema 5.5.1. *Existe una subsucesión ϵ' de ϵ tal que para toda sucesión de distribuciones $f^{\epsilon'} \in H^{-1}(\Omega^{\epsilon'})+L^1(\Omega^{\epsilon'})$ que converge a una distribución $f \in H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega)$ en el sentido de (5.1.16) y para la cual existe una subsucesión $u^{\epsilon'} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon'}) \cap L^\infty(\Omega^{\epsilon'})$ que converge a una función $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil y que verifica la ecuación*

$$-\Delta u^{\epsilon'} + H(x, u^{\epsilon'}, \nabla u^{\epsilon'}) = f^{\epsilon'} \text{ en } \Omega^{\epsilon'},$$

se verifica

$$-\Delta u + G(x,u)\mu + H(x,u,\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración. Tomamos la sucesión ϵ' que aparece al comienzo de esta Sección, la cual verifica que las soluciones de los problemas (5.5.1) son convergentes cuando ϵ' tiende a cero.

Por el Teorema 5.1.2 existe una función $E \in L^\infty(\Omega, d\mu)$ tal que la función u es solución de la ecuación

$$-\Delta u + E\mu + H(x,u,\nabla u) = f \text{ en } \Omega,$$

por lo que lo único que hay que probar es que se tiene la igualdad $E(x) = G(x, u(x))$ salvo en un conjunto de μ medida nula. Para ello, sea $x \in \Theta$ tal que x es un punto de Lebesgue respecto a la medida μ para la funciones E y u, (obsérvese que el conjunto de puntos que no verifican esta propiedad tiene μ medida nula). Dado Ω_m tal que $x \in \Omega_m$, gracias al Lema 5.3.2 existen, para todo par $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, unas constantes M, c que dependen de forma creciente de $\max\{| r_k |, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}\}$ tales que para todo $r > 0$ con $B(x,r) \subset \Omega_m$ se verifica

$$\int_{B(x,r)} | E - E_{k,m,n} | \, d\mu \leq M\mu(B(x,r))^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_\Omega | u - u_{k,m,n} | \right)^{\frac{1}{c}},$$

de donde tomando límite en n y recordando la definición de $G(y, r_k)$ se llega a

$$\int_{B(x,r)} | E - G(y,r_k) | \, d\mu \leq M\mu(B(x,r))^{1-\frac{1}{c}} \left(\int_\Omega | u - r_k | \right)^{\frac{1}{c}}.$$

De aquí razonando de la misma forma que para deducir (5.5.4), se llega a la desigualdad

$$| E(x) - G(x,r_k) | \leq M \, | u(x) - r_k |^{\frac{1}{c}} . \tag{5.5.8}$$

Se considera ahora una sucesión de racionales r_{k_i} convergiendo a $u(x)$. Puesto que la sucesión r_{k_i} está acotada, las constantes M y c que aparecen en (5.5.8) se pueden tomar independientes de k_i, con lo que es fácil concluir a partir de (5.5.8) y de la definición de $G(x, u(x))$ la igualdad $E(x) = G(x, u(x))$. ∎

5.6. Unicidad de Solución del Problema Homogeneizado.

En esta Sección vamos a probar que el problema límite de (5.3) tiene solución única. En relación con este resultado probaremos que la función $G(x, .)$ definida en la Sección anterior es creciente y tiene el mismo signo que s.

Lema 5.6.1. *Sean $f^\epsilon, u^\epsilon, u$ verificando (5.1.2), (5.1.3) y sea $f \in H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ tal que f^ϵ converge a f en el sentido de (5.1.16). Sean también $g^\epsilon, v^\epsilon, v$ y g verificando relaciones análogas respectivamente. Se consideran ψ, ϑ las funciones inversas definidas por el Lema 2.2.1, tales que las funciones $\hat{u}^\epsilon = \vartheta(u^\epsilon)$, $\hat{v}^\epsilon = \vartheta(v^\epsilon)$ verifican las ecuaciones*

$$(5.6.1) \qquad \begin{cases} -\Delta \hat{u}^\epsilon + B(x, \hat{u}^\epsilon, \nabla \hat{u}^\epsilon) = \dfrac{f}{\psi'(\hat{u}^\epsilon)} & en\ \Omega^\epsilon, \\ -\Delta \hat{v}^\epsilon + B(x, \hat{v}^\epsilon, \nabla \hat{v}^\epsilon) = \dfrac{g}{\psi'(\hat{u}^\epsilon)} & en\ \Omega^\epsilon, \end{cases}$$

y donde la función B satisface las propiedades (2.2.6), (2.2.7). Entonces las funciones $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ verifican

$$(5.6.2) \qquad \begin{cases} -\Delta \hat{u} + \dfrac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})}\mu + B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) = \dfrac{f}{\psi'(\hat{u})} & en\ \Omega, \\ -\Delta \hat{v} + \dfrac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\mu + B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v}) = \dfrac{g}{\psi'(\hat{u})} & en\ \Omega, \end{cases}$$

donde se tiene

$$(5.6.3) \qquad \left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})} \right) (\hat{u} - \hat{v}) \geq 0, \ \ \mu\ e.c.t.\ x \in \Omega.$$

Demostración. El Teorema 5.5.1 y el Lema 2.2.1 implican (5.6.1)

Aplicando el Lema 2.2.2 i) a las ecuaciones que componen (5.6.1) y tomando $\hat{\omega}^\epsilon = \hat{u}^\epsilon - \hat{v}^\epsilon$ se deduce que para toda función $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
&(1-\frac{\theta}{2}) \int_\Omega S'(\hat{\omega}^\epsilon) \mid \nabla \hat{\omega}^\epsilon \mid^2 \varphi \\
&+ \int_\Omega \left[(B(x, \hat{u}^\epsilon, \nabla \hat{u}^\epsilon) - B(x, \hat{v}^\epsilon, \nabla \hat{v}^\epsilon)) S(\hat{\omega}^\epsilon) + \frac{\theta}{2} S'(\hat{\omega}^\epsilon) \mid \nabla \hat{\omega}^\epsilon \mid^2 \right] \varphi \\
&= \langle \hat{f}, \frac{S(\hat{\omega}^\epsilon)}{\psi'(\hat{u}^\epsilon)} \varphi \rangle - \langle \hat{g} \frac{S(\hat{\omega}^\epsilon)}{\psi'(\hat{v}^\epsilon)} \varphi \rangle - \int_\Omega S(\hat{\omega}^\epsilon) \nabla \hat{\omega}^\epsilon \nabla \varphi,
\end{aligned}$$

donde en las dos integrales del miembro izquierdo, los dos integrandos son positivos, lo que junto con la convergencia puntual permite aplicar el Lema de Fatou. Tomando $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ y $\hat{\omega} = \hat{u} - \hat{v}$, se tiene por tanto

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S'(\hat{\omega}) \mid \nabla \hat{\omega} \mid^2 \varphi \\
&+ \int_\Omega [B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) - B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v})] S(\hat{\omega}) \varphi \\
&\leq \langle \hat{f}, \frac{S(\hat{\omega})}{\psi'(\hat{u})} \varphi \rangle - \langle \hat{g} \frac{S(\hat{\omega})}{\psi'(\hat{v})} \varphi \rangle - \int_\Omega S(\hat{\omega}) \nabla \hat{\omega} \nabla \varphi.
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

Restando las dos ecuaciones que figuran en (5.6.2) y tomando como función test la función $S(\hat{\omega})\varphi$ en la acuación resultante, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S'(\hat{\omega}) \mid \nabla \hat{\omega} \mid^2 \varphi + \int_\Omega S(\hat{\omega}) \nabla \hat{\omega} \nabla \varphi \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})} \right) S(\hat{\omega}) \varphi d\mu \\
&+ \int_\Omega [B(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) - B(x, \hat{v}, \nabla \hat{v})] S(\hat{\omega}) \varphi \\
&= \langle \hat{f}, \frac{S(\hat{\omega})}{\psi'(\hat{u})} \varphi \rangle - \langle \hat{g} \frac{S(\hat{\omega})}{\psi'(\hat{v})} \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Comparando esta ecuación con (5.6.4) se deduce

$$\int_\Omega \left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})} \right) S(\hat{\omega}) \varphi d\mu \geq 0,$$

lo que gracias a la arbitrariedad de φ implica

$$\left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})} \right) S(\hat{\omega}) \geq 0, \ \mu \text{ e.c.t. } x \in \Omega,$$

y usando la definición de $S(\hat{\omega})$

$$\left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})} \right) (\hat{u} - \hat{v}) \geq 0, \ \mu \text{ e.c.t. } x \in \Omega,$$

que es lo que queríamos probar. ∎

Corolario 5.6.1. *Sean $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $f, g \in H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ tales que se verifican las ecuaciones*

$$\begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + H(x,u,\nabla u) = f & en\ \Omega, \\ -\Delta v + G(x,v)\mu + H(x,v,\nabla v) = g & en\ \Omega. \end{cases}$$

Entonces las funciones inversas ψ, ϑ del Lema 2.2.1 se pueden tomar de forma que las funciones $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ verifican las ecuaciones

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} + \dfrac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})}\mu + B(x,\hat{u},\nabla \hat{u}) = \dfrac{f}{\psi'(\hat{u})} & en\ \Omega, \\ -\Delta \hat{v} + \dfrac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\mu + B(x,\hat{v},\nabla \hat{v}) = \dfrac{f}{\psi'(\hat{v})} & en\ \Omega, \end{cases}$$

con B satisfaciendo las propiedades (2.2.6) y (2.2.7) y con

$$\left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\right)(\hat{u} - \hat{v}) \geq 0, \ \mu \text{ e.c.t. } x \in \Omega.$$

Demostración. Por el Teorema 5.4.1, existe una subsucesión ϵ'' de ϵ', (ϵ' definida en el Teorema 5.5.1), tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, las soluciones $u_n^{\epsilon''}$, $v_n^{\epsilon''}$ de las ecuaciones

$$\begin{cases} -\Delta u_n^{\epsilon''} + n u_n^{\epsilon''} + H(x, u_n^{\epsilon''}, \nabla u_n^{\epsilon''}) = nu & \text{en } \Omega^{\epsilon''}, \\ -\Delta v_n^{\epsilon''} + n v_n^{\epsilon''} + H(x, v_n^{\epsilon''}, \nabla v_n^{\epsilon''}) = nv & \text{en } \Omega^{\epsilon''}, \\ u_n^{\epsilon''}, v_n^{\epsilon''} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon''}) \cap L^\infty(\Omega^{\epsilon''}), \end{cases}$$

convergen, cuando ϵ'' tiende a cero, hacia unas funciones $u_n, v_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ débil, las cuales a su vez convergen cuando n tiende a infinito hacia las funciones u, v en $H_0^1(\Omega)$ fuerte y donde las normas de $u_n^{\epsilon''}, v_n^{\epsilon''}, u_n, v_n$ en $L^\infty(\Omega)$ están acotadas. Esto último permite, aplicando el Lema 2.2.1, encontrar ψ y ϑ de forma que las funciones $\hat{u}_n = \vartheta(u_n)$, $\hat{v}_n = \vartheta(v_n)$, $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ satisfagan

$$\text{(5.6.5)} \quad \begin{cases} -\Delta \hat{u}_n + \dfrac{G(x,u_n)}{\psi'(\hat{u}_n)}\mu + B(x,\hat{u}_n,\nabla \hat{u}_n) = \dfrac{nu}{\psi'(\hat{u}_n)} & \text{en } \Omega, \\ -\Delta \hat{v}_n + \dfrac{G(x,v_n)}{\psi'(\hat{v}_n)}\mu + B(x,\hat{v}_n,\nabla \hat{v}_n) = \dfrac{nv}{\psi'(\hat{v}_n)} & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y donde por el Lema 5.6.1 se verifica

$$\text{(5.6.6)} \quad \left(\frac{G(x,u_n)}{\psi'(\hat{u}_n)} - \frac{G(x,v_n)}{\psi'(\hat{v}_n)}\right)(\hat{u}_n - \hat{v}_n) \geq 0 \ \mu \text{ e.c.t. } x \in \Omega.$$

Ahora, por el Teorema A5, en el Apéndice, podemos suponer que u_n, v_n convergen μ en casi todo hacia u, v respectivamente. Tomando límite en (5.6.5) y (5.6.6) se tiene la conclusión del Corolario. ∎

Analogamente al Teorema 2.2.1, se tiene ahora

Teorema 5.6.1. *Sea $\bar{H}$ una función de Carathéodory definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ con valores en $\mathbb{R}$ (no necesariamente $\bar{H} = H$) tal que para casi todo $x \in \Omega$ la función $\bar{H}(x,.,.)$ es derivable y existe una función creciente $\zeta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que se tiene*

$$(5.6.7) \qquad \begin{cases} \bar{H}(x,0,0) \in L^\infty(\Omega) \\ \left| \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial s}(x,s,\xi) \right| \leq \zeta(|\, s\,|)(1+ |\, \xi\,|^2), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ \left| \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \xi}(x,s,\xi) \right| \leq \zeta(|\, s\,|)(1+ |\, \xi\,|), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

y tal que en casi todo $x \in \Omega$ se verifica

$$(5.6.8) \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}(x,s,\xi) \geq \sigma > 0 \ \ forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Entonces si $u, v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, verifican

$$(5.6.9) \qquad \begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + \bar{H}(x,u,\nabla u) \leq 0 \ \ en\ \Omega, \\ -\Delta v + G(x,v)\mu + \bar{H}(x,v,\nabla v) \geq 0 \ \ en\ \Omega \end{cases}$$

y la desigualdad

$$u \leq v \ \ en\ \partial\Omega \iff (u-v)^+ \in H_0^1(\Omega),$$

se deduce que $u \leq v$ en Ω.

Demostración. Se definen $p, q \in H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$ tales que se tiene

$$(5.6.10) \qquad \begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + \bar{H}(x,u,\nabla u) = p \ \text{ en } \Omega, \\ -\Delta v + G(x,v)\mu + \bar{H}(x,v,\nabla v) = q \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando el Lema 2.2.1 a estas dos ecuaciones se deduce que existen funciones inversas ψ, ϑ (esto es existen constantes K y A suficientemente grandes que son las que definen ψ), tales que $\hat{u} = \vartheta(u)$, $\hat{v} = \vartheta(v)$ verifican las ecuaciones

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} + \dfrac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})}\mu + \bar{B}(x,\hat{u},\nabla \hat{u}) = \dfrac{p}{\psi'(\hat{u})}, \ \text{ en } \Omega, \\ -\Delta \hat{v} + \dfrac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\mu + \bar{B}(x,\hat{v},\nabla \hat{v}) = \dfrac{q}{\psi'(\hat{v})}, \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

y donde $\bar{B}$ verifica relaciones similares a (2.2.6), (2.2.7).

Por otra parte, definiendo $f(x,s,\xi) = H(x,s,\xi) - \bar{H}(x,s,\xi)$, las ecuaciones que componen (5.6.10) se escriben

$$\begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + H(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u) + p \ \text{ en } \Omega, \\ -\Delta v + G(x,v)\mu + H(x,v,\nabla v) = f(x,v,\nabla v) + q \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $f(x,u,\nabla u)+p, f(x,v,\nabla v)+q \in H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega)$ y por tanto, aplicando el Corolario 5.6.1, las constantes A y K que definen ψ se pueden tomar también suficientemente grandes de forma que se tenga

$$\left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\right)(\hat{u}-\hat{v}) \geq 0, \ \mu \text{ e.c.t. } x \in \Omega. \tag{5.6.11}$$

Definiendo ahora $\hat{w} = \hat{u} - \hat{v}$ y aplicando el Lema 2.2.2 iii), se tiene

$$\begin{aligned} &(1-\frac{\theta}{2})\int_\Omega S'(\hat{w}^+) \mid \nabla \hat{w}^+ \mid^2 + \rho \int_\Omega \mid \hat{w}^+ \mid^{n+1} \\ &\leq \langle \frac{p}{\psi'(\hat{u})} - \frac{q}{\psi'(\hat{v})}, S(\hat{w}^+)\rangle - \int_\Omega \left(\frac{G(x,u)}{\psi'(\hat{u})} - \frac{G(x,v)}{\psi'(\hat{v})}\right) S(\hat{w}^+) \leq 0. \end{aligned}$$

Esto es, se tiene que $\omega^+ = 0$, lo que significa que $\hat{u} \leq \hat{v}$ en Ω que al ser ψ creciente implica que $u \leq v$ en Ω. ∎

Como consecuencia de este Teorema vamos a deducir ahora

Teorema 5.6.2. *La sucesión ϵ' y la función $G(x,s)$ definidas en la Sección 5.5 satisfacen la siguiente propiedad:*

Dada una función de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que

i) Para casi todo $x \in \Omega$ la función $f(x,.,.)$ es derivable y existe una función creciente $\zeta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene

$$\begin{cases} f(x,0,0) \in L^\infty(\Omega) \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial s}(x,s,\xi)\right| \leq \zeta(\mid s \mid)(1+ \mid \xi \mid^2), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x,s,\xi)\right| \leq \zeta(\mid s \mid)(1+ \mid \xi \mid), \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{5.6.12}$$

ii) Existe $\sigma > 0$ tal que para casi todo $x \in \Omega$

$$\lambda - \frac{\partial f}{\partial s}(x,s,\xi) > \sigma, \ \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

(λ definido en (5.2)).

iii) Existen funciones crecientes $\Upsilon_0, \Upsilon_1 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ y existe $\alpha \in [0,2)$ tales que para casi todo $x \in \Omega$ y para todos $s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^d$ se verifica

$$|f(x,s,\xi)| \leq \Upsilon_0(|s|) + \Upsilon_1(|s|)\,|\xi|^\alpha . \tag{5.6.13}$$

Entonces la solución $u^{\epsilon'}$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u^{\epsilon'} + H(x,u^{\epsilon'},\nabla u^{\epsilon'}) = f(x,u^{\epsilon'},\nabla u^{\epsilon'}) \text{ en } \Omega^{\epsilon'}, \\ u^{\epsilon'} \in H_0^1(\Omega^{\epsilon'}) \cap L^\infty(\Omega^{\epsilon'}), \end{cases} \tag{5.6.14}$$

converge en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil hacia la función u, única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + G(x,u)\mu + H(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u), \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{5.6.15}$$

Observación 5.6.1. En particular se puede tomar $f(x,s,\xi) = f(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Por el Corolario 2.2.1, existe una única solución de (5.6.14), la cual está acotada en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y por tanto existe una subsucesión $u^{\epsilon''}$ de $u^{\epsilon'}$, que converge en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil hacia una función $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Por el Teorema 5.1.1, la sucesión $u^{\epsilon''}$ converge también a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$ fuerte con $1 \leq p < 2$. Esto, junto con la propiedad (5.6.13) de la función f implican, gracias al Teorema de Convergencia Dominada, que la sucesión $f(x,u^{\epsilon''},\nabla u^{\epsilon''})$ converge hacia la función $f(x,u,\nabla u)$ en $L^1(\Omega)$ fuerte y por tanto en el sentido de (5.1.16), lo que por el Teorema 5.5.1 nos dice que la función u es solución de la ecuación (5.6.15). Ahora el Teorema 5.6.1 establece que la función u está univocamente determinada y por tanto que toda la sucesión $u^{\epsilon'}$ converge a u. ∎

Observación 5.6.2. Como aplicación de este Teorema, se deduce que si en el Teorema 5.4.1 se toma en la ecuación (5.4.1) ϵ' en lugar de ϵ, entonces las soluciones u_n^ϵ de (5.4.1) convergen a u_n en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil sin necesidad de extraer ninguna subsucesión.

Otra consecuencia del Lema 5.6.1 acerca del comportamiento de la función $G(x,.)$ es el siguiente.

Teorema 5.6.3. *Salvo en un conjunto de μ medida nula, la función G definida en la Sección 5.5 verifica*

$$\begin{cases} G(x,0)=0, \\ (G(x,s_1)-G(x,s_2))(s_1-s_2)\geq 0, \ \forall s_1,s_2\in \mathbb{R} \end{cases}$$

Demostración. Empezamos probando que $G(x,0)=0$ salvo en un conjunto de μ medida nula. Para ello, observamos que la sucesión $z^\epsilon=0$ verifica el problema

$$\begin{cases} -\Delta z^\epsilon + H(x,z^\epsilon,\nabla z^\epsilon)=H(x,0,0) \ \text{ en } \Omega^\epsilon, \\ z^\epsilon\in H_0^1(\Omega^\epsilon)\cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \end{cases} \tag{5.6.16}$$

y evidentemente z^ϵ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil. Por el Teorema 5.5.1, la función $z=0$ debe verificar la ecuación

$$-\Delta z + G(x,z)\mu + H(x,z,\nabla z)=H(x,0,0) \ \text{ en } \Omega$$

y por tanto $G(x,0)=0$ salvo en un conjunto de μ medida nula.

Aplicando el Lema 5.6.1 a dos sucesiones $u^{\epsilon'}_{k_1,m,n}$, $u^{\epsilon'}_{k_2,m,n}$, (ver Sección 5.5), tomando $v=\psi'\circ\vartheta$ y recordando que ϑ es creciente, es fácil deducir que μ en casi todo $x\in\Omega$ se tiene

$$\left(\frac{G(x,s_1)}{v(s_1)}-\frac{G(x,s_2)}{v(s_2)}\right)(s_1-s_2)\geq 0, \ \forall s_1,s_2\in\mathbb{R}. \tag{5.6.17}$$

De que la función v es estrictamente positiva y de la igualdad $G(x,0)=0$ salvo en un conjunto de μ medida nula se deduce, gracias a (5.6.17), que μ en casi todo $x\in\Omega$ y para todo $s\in\mathbb{R}$ se verifica $G(x,s)s\geq 0$.

Sean ahora $s_1<s_2<0$, entonces de (5.6.17) tenemos

$$\frac{G(x,s_1)}{v(s_1)}\leq\frac{G(x,s_2)}{v(s_2)}. \tag{5.6.18}$$

A partir de que la función v es estrictamente positiva, decreciente y verifica $G(x,s_1)\leq 0$, se deduce también

$$\frac{G(x,s_1)}{v(s_2)}\leq\frac{G(x,s_1)}{v(s_1)},$$

que junto con (5.6.18) lleva a la desigualdad $G(x,s_1)\leq G(x,s_2)$ salvo en un conjunto de μ medida nula.

Puesto que también hemos probado que $G(x,s)$ tiene el mismo signo que s, para completar la demostración basta con probar que si $0 < s_1 < s_2$ entonces $G(x,s_1) \leq G(x,s_2)$ μ en casi todo $x \in \Omega$. Para ello, se considera la función $\tilde{H}(x,s,\xi) = -H(x,-s,-\xi)$. Entonces, de que $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^\infty(\Omega)$ verifican la ecuación

$$-\Delta u^\epsilon + H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) = f \quad \text{en } \Omega,$$

si y solamente si $v^\epsilon = -u^\epsilon$ verifica

$$-\Delta v^\epsilon + \tilde{H}(x,v^\epsilon,\nabla v^\epsilon) = -f \quad \text{en } \Omega,$$

se deduce que de la misma forma que a la función H se le asocia la función G, a la función $\tilde{H}$ se le asocia la función $\tilde{G}$ con $\tilde{G}(x,s) = -G(x,-s)$. Por lo ya probado, si $0 < s_1 < s_2$ entonces $-s_1 < -s_2 < 0$ y por tanto $\tilde{G}(x,-s_2) \leq \tilde{G}(x,-s_1)$, i.e. $G(x,s_1) \leq G(x,s_2)$. ∎

Observación 5.6.3. Obsérvese que el hecho de que la sucesión $z^\epsilon = 0$ verifique la ecuación (5.6.16), significa, gracias al Corolario 5.3.2, que dada una sucesión $f^\epsilon \in H^{-1}(\Omega^\epsilon) + L^1(\Omega^\epsilon)$ verificando (5.1.1) y tal que existen $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon)$, solución de

$$-\Delta u^\epsilon + H(x,u^\epsilon,\nabla u^\epsilon) = f^\epsilon \quad \text{en } \Omega^\epsilon,$$

con u^ϵ convergiendo a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil, entonces u^ϵ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ fuerte.

5.7. Corrector.

Consideramos ϵ' la sucesión construida en la Sección 5.5, que para simplificar la notación vamos a denotar por ϵ.

En esta Sección vamos a utilizar el Lema 5.3.1 y el Teorema 5.4.1 para construir una aproximación de ∇u^ϵ en $L^2(\Omega)^d$ fuerte. El resultado se enuncia como sigue.

Definición 5.7.1. *Se considera un conjunto compacto $K \subset \Omega$ fijo. Para cada $s \in \mathbb{R}$, se fija una función $u_s \in H_0^1(\Omega)$ verificando $u_s = s$ en K y $|\, u_s \,| \leq s$ en casi todo Ω.*

Para $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se considera la aplicación $P_n^\epsilon : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ definida por $P_n^\epsilon(x,s) = \nabla u_{s,n}^\epsilon(x)$, donde $u_{s,n}^\epsilon$ es la solución del problema

$$(5.7.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u_{s,n}^\epsilon + n u_{s,n}^\epsilon + H(x, u_{s,n}^\epsilon, \nabla u_{s,n}^\epsilon) = n u_s \ \ \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u_{s,n}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon) \cap L^\infty(\Omega^\epsilon). \end{cases}$$

Teorema 5.7.1. *Sean f^ϵ, u^ϵ y u verificando (5.1.2) y (5.1.3). Entonces, existen unas constantes C y l que dependen de forma creciente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ tales que:*

Para toda función ψ de la forma $\psi = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{R_i}$ donde para todo i con $1 \leq i \leq m$ $c_i \in \mathbb{R}$ y $| c_i | \leq \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ y donde los conjuntos $R_i \subset \Omega$, $1 \leq i \leq m$ forman un recubrimiento de K por conjuntos cerrados tales que para todo $1 \leq i,j \leq m$ con $i \neq j$ se tiene $\mu(R_i \cap R_j) = 0$. Se verifica

$$(5.7.2) \qquad \begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon \to 0} \int_K | \nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,\psi) |^2 \\ &\leq C \mu(K)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_K | u - \psi | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}} \end{aligned} .$$

Observación 5.7.1. En la definición de P_n se puede tomar en realidad $u_s = s$. De hecho en el Teorema 5.4.1 (que utilizaremos más adelante), se puede tomar la función $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, en cuyo caso lo que se deduce es que las funciones u_n convergen a u en $H^1_{loc}(\Omega)$, lo cual es suficiente para demostrar el Teorema 5.7.1.

Observación 5.7.2. Como ejemplo de recubrimiento se puede considerar un enlosado por cubos cuyas caras tienen medida μ nula, lo cual siempre es posible ya que al ser μ de variación acotada, el conjunto de hiperplanos de medida μ no nula paralelos a uno dado es a lo más numerable y por tanto dado un hiperplano con medida μ no nula existe otro paralelo tan cercano como se quiera al anterior con medida μ nula.

En realidad, en este caso del enlosado, el número de cubos que intersecta uno dado está acotado por una constante dependiente sólo de la dimensión del espacio d con lo cual es fácil adaptar la demostración de forma que el Teorema anterior sigue siendo válido aunque no se tenga la hipótesis $\mu(R_i \cap R_j) = 0$ para $i \neq j$.

Observación 5.7.3. En el Teorema 5.7.1, nuestra pretensión sería poder tomar la sucesión $P_n^\epsilon(x,u)$ sin necesidad de dar el resultado a través de la función ψ lo que nos daría

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_K |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,u)|^2 = 0,$$

que establece que $\nabla u + P_n^\epsilon(x,u)$ es una buena aproximación en $L^2(K)^d$ de ∇u^ϵ. Esto no es sin embargo posible ya que no tenemos ninguna garantía de que la función P_n^ϵ sea continua o al menos boreliana en el segundo argumento, con lo cual no podemos ni tan siquiera asegurar que la función $P_n^\epsilon(x,u)$ sea siquiera medible. Sin embaro, como para funciones escalonadas se tiene la igualdad $P_n^\epsilon(x,\psi) = \sum_{i=1}^m P_n^\epsilon(x,c_i)\chi_{R_i}$ en $L^2(K)^d$, todos los términos que aparecen en (5.7.2) están bien definidos.

Observación 5.7.4. Si para todo $s \in \mathbb{R}$ existe una sucesión u_s^ϵ solución de un problema

$$\begin{cases} -\Delta u_s^\epsilon + +H(x,u_s^\epsilon,\nabla u_s^\epsilon) = f_s^\epsilon \quad \text{en } \Omega^\epsilon, \\ u_{s,n}^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)\cap L^\infty(\Omega^\epsilon), \end{cases}$$

donde $f^\epsilon \in H^{-1}(\Omega^\epsilon) + L^1(\Omega^\epsilon)$ verifican (5.1.1) y donde la sucesión u_s^ϵ converge en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-debil hacia una una función u_s tal que $u_s = s$ en K, entonces definiendo $P^\epsilon(x,s) = \nabla u_s^\epsilon$ se tiene un resultado similar al Teorema 5.7.1 donde ahora en vez de (5.7.2), se puede escribir

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \int_K |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P^\epsilon(x,\psi)|^2 \leq C\mu(K)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_K |u-\psi|\, d\mu\right)^{\frac{1}{l}}.$$

Demostración del Teorema 5.7.1. Sea i con $1\leq i\leq m$, se considera $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ en Ω, $\varphi \geq 1$ en $K\cap R_i$. Por el Lema 5.3.1 y la definición de P_n^ϵ, existen unas constantes C y l que dependen de forma creciente de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ (no dependen de i) tales que si $u_{c_i,n}$ es el límite en $H_0^1(\Omega)$ débil y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil de $u_{c_i,n}^\epsilon$ (el cual existe por la Observación 5.6.2) entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\limsup_{\epsilon\to 0} \int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - (P_n^\epsilon(x,c_i) - \nabla u_{c_i,n})|^2 \\ &\leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla u^\epsilon - \nabla u - (P_n^\epsilon(x,c_i) - \nabla u_{c_i,n})|^2 \varphi \\ &\leq C\left(\int_\Omega \varphi d\mu\right)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_\Omega |u - u_{c_i,n}|\varphi d\mu\right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Haciendo tender φ hacia la función característica de $K \cap R_i$, se puede escribir

$$(5.7.3)\qquad \begin{aligned} &\limsup_{\epsilon\to 0} \int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - (P_n^\epsilon(x,c_i) - \nabla u_{c_i,n})|^2 \\ &\leq C\mu(K\cap R_i)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_{K\cap R_i} | u - u_{c_i,n} | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Tomando ahora

$$\begin{aligned} &\int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,c_i)|^2 \\ &\leq 2\int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - (P_n^\epsilon(x,c_i) - \nabla u_{c_i,n})|^2 + 2\int_{K\cap R_i} |\nabla u_{c_i,n}|^2 \end{aligned}$$

y recordando que gracias al Teorema 5.4.1 la sucesión $u_{c_i,n}$ converge a u_{c_i} en $H_0^1(\Omega)$ fuerte y en $L^\infty(\Omega)$ $*$-débil (y por tanto en $L^1(\Omega, d\mu)$), se deduce (recordar que $u_{c_i} = c_i$ en K), tomando límite en n y aplicando (5.7.3), que

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,c_i)|^2 \\ &\leq C\mu(K\cap R_i)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_{K\cap R_i} | u - c_i | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades desde $i = 1$ hasta m y aplicando la desigualdad de Hölder junto con el hecho de que $\mu(R_i \cap R_j) = 0$ para $i \neq j$, se deduce (recordando que $\psi = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{R_i}$ y por tanto $P_n^\epsilon(x,\psi) = \sum_{i=1}^m P_n^\epsilon(x,c_i)\chi_{R_i}$)

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_K |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,\psi)|^2 \\ &= \limsup_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^m \int_{K\cap R_i} |\nabla u^\epsilon - \nabla u - P_n^\epsilon(x,\psi)|^2 \\ &\leq C \sum_{i=1}^m \mu(K\cap R_i)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_{K\cap R_i} | u - c_i | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^m \mu(K\cap R_i) \right)^{1-\frac{1}{l}} \left(\sum_{i=1}^m \int_{K\cap R_i} | u - c_i | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}} \\ &\leq C\mu(K)^{1-\frac{1}{l}} \left(\int_K | u - psi | \, d\mu \right)^{\frac{1}{l}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Apéndice.

Algunas Observaciones acerca del Concepto de Capacidad.

Recordamos en este Apéndice la definición de capacidad, sus propiedades y su relación con las medidas de Hausdorff. El concepto de capacidad nos va a permitir hablar con precisión de los valores puntuales de una función debilmente derivable, la cual en principio sólo esta definida en casi todo.

Siguiendo a G. Dal Maso y a U. Mosco vamos también a definir una familia $\mathcal{M}_0$ de medidas en $\mathbb{R}^d$ con respecto a las cuales las funciones de H^1 son medibles y que aparecen de forma natural en los problemas de Homogeneización en dominios con agujeros. (Ver por ej. [DM M1], [DM M2], [DM 3]).

Definición A.1. *Sea $s \geq 0$. Para todo $\delta > 0$ y para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$, se define*

$$H_{s,\delta}(A) = \inf \left\{ \alpha_s 2^{-s} \sum_{i=1}^{n} diam(A_i)^s : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ diam(A_i) \leq \delta \right\},$$

con

$$\alpha_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

Se define la medida de Hausdorff $s-$dimensional de A mediante

$$H_s(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{s,\delta}(A) = \sup_{\delta > 0} H_{s,\delta}(A).$$

Definición A.2. *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Sea p con $1 \leq p < +\infty$. Para todo conjunto compacto K contenido en Ω se define la p-capacidad de K como*

$$cap_p(K) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p : \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \geq \chi_K\right\}.$$

Esta definición se extiende a conjuntos abiertos $U \subset \Omega$ mediante

$$cap_p(U) = \sup\{cap_p(K) : \ K \text{ compacto, } K \subset \Omega\}.$$

Para un conjunto cualquiera $A \subset \Omega$, se define su p-capacidad como

$$cap_p(A) = \inf\{cap(U) : \ U \text{ abierto, } A \subset U \subset \Omega\}.$$

En el caso $p = 2$ simplificaremos la escritura escribiendo $cap_2(A)$ como $cap(A)$.

Definición A.3. *Diremos que una propiedad se verifica p en quasi todo (quasi todo si $p = 2$) en Ω si se verifica en todos los puntos de Ω salvo en un conjunto de $p-$capacidad nula.*

Observación A.1. En realidad es frecuente utilizar la notación $cap_p(A)$ en el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^d$ y en el caso en que se trata de un conjunto abierto arbitrario indicarlo como $cap_p(A, \Omega)$. Nosotros sólo usaremos la escritura $cap_p(A, \Omega)$ cuando sea necesario especificar el abierto.

Las propiedades de las medidas de Hausdorff y de la capacidad en tanto que medidas se recogen en los siguientes teoremas.

Teorema A.1. *Para todo $s \geq 0$ la medida de Hausdorff s-dimensional es una medida boreliana en $\mathbb{R}^d$. (En general no es de Radon.)*

Para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$, $H_s(A)$ es una función decreciente en s, de hecho si s es tal que $H_s(A)$ es finito entoces para todo $s' > s$ se tiene $H_{s'}(A) = 0$.

Definición A.4. *Se define la dimensión de Hausdorff de A como*

$$dim_H(A) = \inf\{s \geq 0 : \ H_s(A) = 0\}.$$

Observación A.2. Esta definición es coherente con la defininición de dimensión en geometría, ya que en el caso en el que A es subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^d$ de dimensión r su dimensión de Hausdorff coincide con r. De hecho H_r nos da el volumen en la variedad, así en $\mathbb{R}^d$ se tiene la igualdad $\ell = H_d$, (donde estamos considerando ℓ como la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$).

Respecto a la capacidad se tiene.

Teorema A.2. *La p-capacidad verifica las siguientes propiedades*

1.- $cap_p(A) \geq 0$.

2.- $cap_p(\emptyset) = 0$.

3.- La p-capacidad es numerablemente subaditiva. i.e. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una familia numerable de subconjuntos de* Ω *entonces*

$$cap_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} cap_p(A_i).$$

4.- Si A, B son dos subconjuntos de Ω *entonces se tiene la desigualdad de Choquet.*

$$cap_p(A \cup B) + cap_p(A \cap B) \leq cap(A) + cap(B).$$

5.- Si $A \subset \Omega \subset \Omega'$ *entonces*

$$cap_p(A, \Omega') \leq cap_p(A, \Omega).$$

6.- Si Ω, Ω' *son dos conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^d$ *y* $A \subset \Omega \cap \Omega'$, *(*$p < d$ *si alguno de los abiertos es no acotado), entonces*

$$cap_p(A, \Omega) = 0 \iff cap_p(A, \Omega') = 0.$$

7.- La p-capacidad es una medida exterior en Ω *tal y como se deduce de las propiedades anteriores, pero no es una medida boreliana, de hecho ningún conjunto A con la propiedad* $0 < cap_p(A) < +\infty$ *es medible Caratheodory para la capacidad.*

Se tienen las siguientes relaciones entre p-capacidad y medida de Hausdorff.

Teorema A.3. *Se considera* $\Omega = \mathbb{R}^d$*.,A un subconjunto de* $\mathbb{R}^d$ *y* $p < d$.

1.- Existe $C_1 > 0$ *que depende sólo de d y de p tal que* $m(A) \leq C_1 cap_p(A)^{d/(d-p)}$.

2.- Existe $C_2 > 0$ *que depende sólo de d y de p, tal que* $cap_p(A) \leq C_2 H_{d-p}(A)$. *De hecho para* $1 < p < d$ *se verifica que para todo conjunto A con* $H_{d-p}(A) < +\infty$ *se tiene* $cap_p(A) = 0$.

3.- Si $cap_p(A) = 0$, *entonces para todo* $s > d - p$, $H_s(A) = 0$, *(i.e. la dimensión de Hausdorff de A es a lo más* $d - p$*).*

4.- Para $p = 1$ se tiene de hecho

$$cap_1(A) = 0 \iff H_{d-1}(A) = 0.$$

Pasamos ahora a estudiar la relación entre la p-capacidad y el conjunto de puntos donde está definida una función de $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.4. *Si u es una función de $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \le p < +\infty$ ($p < d$ si Ω no es acotado), entonces el límite*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)dy$$

existe y es finito p en quasi todo en Ω.

En todo este trabajo se hace la siguiente convención sobre los valores de u. Para todo $x \in \Omega$ se toma

$$\liminf_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)dy \le u(x) \le \limsup_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)dy.$$

Esto define los valores de u, p en quasi todo en Ω y la función u así determinada es p-quasicontinua lo cual significa que para todo $\delta > 0$ existe un conjunto cerrado K contenido en Ω con $cap_p(\Omega \setminus K) < \delta$ tal que u es continua en K.

Los siguientes resultados relacionan la convergencia en $W^{1,p}(\Omega)$ con la convergencia p en quasi todo.

Teorema A.5. *Dada una sucesión $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ que converge a una función u en $W^{1,p}(\Omega)$ fuerte, entonces existe una subsucesión $u_{n'}$ que converge a u p en quasi todo.*

Si u_n converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$ débil entonces para todo q con $1 \le q < p$ existe una subsucesión $u_{n'}$ que converge a u, q en quasi todo.

Definición A.5. *(G. Dal Maso y U. Mosco). Se nota por $\mathcal{M}^0(\Omega)$ el conjunto de medidas borelianas positivas μ tales que $\mu(A) = 0$ para todo conjunto $A \subset \Omega$ con $cap(A) = 0$, ($cap = cap_2$).*

Se nota por $\mathcal{M}_b^0(\Omega)$ el conjunto

$$\mathcal{M}_b^0(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{M}^0(\Omega) : \ \mu(\Omega) < +\infty\}.$$

Obsevación A.3. Las medidas de $\mathcal{M}^0(\Omega)$ no tienen por qué ser medidas de Radon, de hecho pueden ser no finitas en algún subconjunto de Ω.

Observación A.4. G. Dal Maso ha probado que para toda medida $\mu \in \mathcal{M}^0(\Omega)$ existe $\nu \in H^{-1}(\Omega)$ positiva (y por tanto una medida) y existe una función positiva f medible respecto de ν, tal que para todo conjunto de Borel A contenido en Ω se tiene

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

Aunque no es cierto que la convergencia en $H_0^1(\Omega)$ débil iimplica la convergencia en quasi todo, es remarcable que (como indica el siguiente Teorema) si implica la convergencia μ en casi todo para $\mu \in \mathcal{M}^0(\Omega)$.

Teorema A6. *Sea $\mu \in \mathcal{M}^0(\Omega)$, sean $u_n \in H^1(\Omega)$ nulas fuera de un conjunto μ $\sigma-$finito y sea $u \in H^1(\Omega)$. Si u_n converge a u en $H^1(\Omega)$ débil entonces existe una subsucesión $u_{n'}$ de u_n que converge a u μ en casi todo en Ω.*

Demostración. Vamos a comenzar suponiendo que $u = 0$, $u_n \geq 0$ y u_n acotadas en $L^\infty(\Omega)$, (y por tanto en $L^\infty(\Omega, d\mu)$). Por hipótesis, existe un conjunto $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$ con $\mu(A_i)$ finito para todo $i \in \mathbb{N}$ y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, las funciones u_n son nulas fuera de A.

Para todo $i \in \mathbb{N}$, $L^1(A_i, d\mu)$ es separable. Para probar esta afirmación se define la medida $\mu\lfloor A_i$ por $\mu\lfloor A_i(B) = \mu(A_i \cap B)$ para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^d$. Entonces $\mu\lfloor A_i$ es una medida de Radon en $\mathbb{R}^d$ ([F]) y por tanto $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^d, \mu\lfloor A_i)$ ([FO] Proposición 7.9). Del hecho de que la convergencia uniforme implica la convergencia en $L^1(\mathbb{R}^d, \mu\lfloor A_i)$ y de que $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ con la topología de la convergencia uniforme es separable se deduce el resultado.

Por tanto $L^\infty(A_i, d\mu)$ es el dual de un espacio separable lo que significa en particular (Teorema de Alooglu) que los conjuntos acotados de $L^\infty(A_i, d\mu)$ son secuencialmente debilmente relativamente compactos en la topología $*-$débil. En nuestro caso se deduce que existe una subsucesión $u_{n'}$ de u_n y un elemento $w \in L^\infty(A_i, d\mu)$ tales que $u_{n'}$ converge a w en $L^\infty(A_i, d\mu)$ $*-$débi. Mediante un proceso diagonal podemos suponer w definida en A y que $u_{n'}$ converge a w en $L^\infty(A_i, d\mu)$ $*$-débil para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, sabemos que $u_{n'}$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ débil y por tanto, usando el Teorema de Mazur, se tiene que existe una sucesión $v_{n'}$ que converge a cero en $H_0^1(\Omega)$

fuerte, con $v_{n'}$ de la forma

$$v_{n'} = \sum_{j'=n'}^{\infty} \alpha_{n'}^{j'} u_{j'},$$

donde para todo n', $\alpha_{n'}^{j'} \geq 0$ para todo j', $\alpha_{n'}^{j'}$ son todos nulos salvo un número finito de j' y $\sum_{j'=n'}^{\infty} \alpha_{n'}^{j'} = 1$.

Por el Teorema A5 podemos suponer además que $v_{n'}$ converge a cero μ en casi todo.

Para toda función $\varphi \in L^1(A_i, d\mu)$ se tiene gracias a la convergencia de la sucesión $u_{n'}$ en $L^\infty(A_i, d\mu)$ $*-$débil que

$$\int_{A_i} u_{n'} \varphi d\mu \to \int_{A_i} w \varphi d\mu,$$

y por tanto dado $\epsilon > 0$ existe n_0' tal que para todo $n' \geq n_0'$

$$\left| \int_{A_i} (u_{n'} - w) \varphi d\mu \right| \leq \epsilon.$$

Entonces, para todo $n' \geq n_0'$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_i} (v_{n'} - w) \varphi d\mu \right| &= \left| \int_{A_i} \left[\sum_{j'=n'}^{\infty} \alpha_{n'}^{j'} (u_{j'} - w) \right] \varphi \right| \\ &\leq \sum_{j'=n'}^{\infty} \alpha_{n'}^{j'} \left| \int_{A_i} (u_{j'} - w) \varphi d\mu \right| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Esto es $v_{n'}$ converge a w en $L^\infty(A_i, d\mu)$ $*-$débil y puesto que también converge μ en casi todo a cero se deduce que $w = 0$ en A. Ahora la convergencia de $u_{n'}$ hacia w en $L^\infty(A_i, d\mu)$ $*$-débil y $w = 0$ implican que

$$\int_{A_i} u_{n'} d\mu \to 0.$$

Como $u_{n'} \geq 0$ se deduce que $u_{n'}$ converge a cero en $L^1(A_i, d\mu)$ y por tanto, que se puede extraer una subsucesión que converge puntualmente salvo en un conjunto $N_i \subset A_i$ con $\mu(N_i) = 0$. Por un proceso diagonal existirá una subsucesión que seguimos notando $u_{n'}$ para no complicar la notación, tal que si $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ entonces $\mu(N) = 0$ y $u_{n'}(x)$ converge a cero para todo $x \in A \backslash N$. Como $u_{n'} = 0$ fuera de A, se deduce que $u_{n'}$ converge a cero μ en casi todo.

Supongamos ahora u_n en las condiciones del Teorema, verificando además que están acotadas en $L^\infty(\Omega)$ y sea $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como antes.

Como primera observación, se tiene que $u = 0$ μ en casi todo en $\Omega \setminus A$, lo que se prueba aplicando de nuevo el Teorema de Mazur a la sucesión u_n lo que nos da una sucesión de combinaciones convexas de u_n que converge a u μ en casi todo, como claramente $v_n = 0$ en $\Omega \setminus A$, se deduce que $u = 0$ μ en casi todo en $\Omega \setminus A$.

Tomando ahora las sucesiones $(u_n - u)^+$ y $(u_n - u)^-$, estas sucesiones están acotadas en $L^\infty(\Omega)$, convergen a cero en $H^1(\Omega)$ débil y son nulas fuera de un conjunto σ-finto para μ con lo que aplicando lo demostrado anteriormente existen dos conjuntos N_1, N_2 tales que $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ y existen dos subsucesiones (que podemos suponer tienen los mismos índices) $(u_{n'} - u)^+$, $(u_{n'} - u)^-$ que convergen a cero puntualmente en $\Omega \setminus N_1$ y $\Omega \setminus N_2$ respectivamente. Por tanto $u_{n'}$ converge a u puntualemente en $\Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$ con $\mu(N_1 \cup N_2) = 0$.

En el caso en que no se tiene la acotación en $L^\infty(\Omega)$ se deduce (aplicando lo probado anteriormente a $T_k(u_n)$ y usando después un proceso diagonal para que la subsucesión encontrada sea la misma para todo k) que existen una subsucesión $u_{n'}$ y un conjunto N con $\mu(N) = 0$ tales que para todo $x \in \Omega \setminus N$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $T_k(u_{n'})(x)$ converge a $T_k(u)(x)$ en $\Omega \setminus N$. Ahora, por el Teorema A.4 existe un conjunto S con $\mu(S) = 0$ tal que si $x \in \Omega \setminus S$ entonces $u(x)$ es finito.

Sea $x \in \Omega \setminus (N \cup S)$ y $k > \mid u(x) \mid +1$ entonces $T_k(u_{n'}(x))$ converge a $T_k(u(x)) = u(x)$. Si k es suficientemente grande entonces $\mid T_k(u_{n'}(x)) - u(x) \mid < 1/2$ de donde se deduce que $\mid T_k(u_{n'}(x)) \mid < k - 1/2$ y por tanto que $T_k(u_{n'}(x)) = u_{n'}(x)$. Esto es $u_{n'}(x)$ converge a $u(x)$. Como $\mu(N \cup S) = 0$ se tiene el Teorema. ▮

BIBLIOGRAFÍA

[A R] S. ALBEVERIO - M. RÖCNER, *Clasical Dirichlet forms on topological vector spaces. Closability and a Cameron-Martin Formula.* J. Funct. Anal. 88 (1990), 2, 395-436.

[A] H. ATTOUCH, *Variational Convergence for Functions and Operators.* Pitman, London 1984.

[A P] H. ATTOUCH - C. PICARD, *Variational inequalities with varying obstacles: the general form of the limit problem.* J. Funct. Anal. 50 (1983), 329-386.

[B M] G. BARLES - F. MURAT, *Uniqueness and the maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions.* Por aparecer.

[B B M] A. BENSOUSSAN - L. BOCCARDO - F. MURAT, *H-convergence for quasilinear elliptic equations with quadratic growth.* Appl. Math. Optim. 26 (1992), 3, 253-272.

[B M P] L. BOCCARDO - F. MURAT - J.P. PUEL, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-lineaires à croissance quadratique.* Nonlinear partial differential equations and their applications, College de France Seminar, vol. IV, ed. by H. Brézis, J. L. Lions. Research in Math. 84 (1983), Pitman, London 19-73.

[B] A. BRAIDES, *An introduction to homogenization and Γ-convergence.* School on Homogenization, ICTP, Trieste, septiembre 6-17, 1993.

[B DC] A. BRAIDES - V. DE CICCO, *Relaxation and $\Gamma-$convergence of quadratics forms in $BV(I;\mathbb{R}^n)$.* Por aparecer en Annali Universitá Ferrara.

[BU1] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations.* Pitman, London, 1989.

[BU2] G. BUTTAZZO, *Γ-convergence and its applications to some problems in the calculus of variations* . School on Homogenization, ICTP, Trieste, septiembre 6-17, 1993.

[C] J. CASADO DÍAZ. Thèse, Université París VI. Por aparecer.

[C S] L. CARBONE - C. SBORDONE, *Some properties of Γ-limits of integral functionals.* Ann. Mat. Pura Appl. S.IV 122 (1979), 1-60.

[C D M Z] D. CIORANESCU - P. DONATO - F. MURAT - E. ZUAZUA, *Homegenization and corrector for wave equation in domain with small holes.* Ann. Sculola Norm. Sup. Pisa.Cl. Sci. 4, 18 (1991), 2, 251-293.

[C M] D. CIORANESCU - F. MURAT, *Un terme étrange venu d'ailleurs.* Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, vol. II, III ed. by H. Brézis, J.L. Lions. Research in Math. 60 y 70 (1982), Pitman, London, 98-138 and 154-178.

[DM1] G. DAL MASO, *Alcuni teoremi sui* Γ*-limiti di misuri.* Bollettino U.M.I. (5) 15-B (1978), 182-192.

[DM2] G. DAL MASO, *Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles.* Ann. Mat. Pura Appl., 129, (1981), 327-366.

[DM3] G. DAL MASO, $\Gamma-$*convergence and* $\mu-$*capacities.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 14 (1987), 423-464.

[DM4] G. DAL MASO, *An Introduction to* Γ*-convergence.* Birkhäuser, Boston 1993.

[DM D] G. DAL MASO - A. DEFRANCESCHI, *Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains.* Manuscripta Math. 61 (1988), 251-278.

[DM G] G. DAL MASO - A. GARRONI. *New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains.* Math. Mod. Meth. Appl. Sci. Por aparecer.

[DM M1] G. DAL MASO, U. MOSCO. *Wiener-criterion and* $\Gamma-$*convergence.* Appl. Math. Optim. 15 (1987), 15-63.

[DM M2] G. DAL MASO, U. MOSCO. *Wiener-criteria and energy decay for relaxed Dirichlet problems.* Arch. Rat. Mech. and Anal, 95, 4 (1986), 345-387.

[DM MU] G. DAL MASO - F. MURAT, *Limits of Dirichlet problems for homogeneus monotone operaiors in perforated domains.* Por aparecer.

[DG1] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area.* Rend. Math. 8 (1975), 277-294.

[DG2] E. DE GIORGI, *Convergence problems for functionals and operators.* Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, ed. by E. De Giorgi, E. Magenes y U. Mosco. May 8-12, Rome, (1978), 131-188.

[DG3] E. DE GIORGI, *G-operators and* Γ*-convergence.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 16-24, Warsaw, (1983), 1175-1191.

[E G] L.C. EVANS - R.F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advances Mathematics. CRC Press, Boca Raton Ann. Arbon, London 1992.

[F] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin 1969.

[F Z] H. FEDERER - W. ZIEMER, *The Lebesgue set of a function whose distribution derivatives are p-th power summable.* Indiana U. Math. J., 22 (1972), 139-158.

[FO] G.B. FOLLAND, *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications.* John Wiley and Sons. New York, 1984.

[FU] M. FUKUSHIMA, *Dirichlet Forms and Markov Processes.* North-Holland, 1980.

[G] S. GOLDBERG, *Unbounded Linear Operators. Theory and Applications.* Mc. Graw-Hill, New York, 1966.

[H] M.M. HAMZA, *Determination des formes de Dirichlet sur* $\mathbb{R}^n$. Thèse 3ème cycle, Université d'Orsay, 1975.

[K] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[K M] H. KACIMI - F. MURAT, *Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet où apparaît un Terme Étrange.* Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Vol II, Progess in Nonlinear Differential Equations Appl.,2 ,Birkhäuser, Boston, MA (1989), 661-696.

[L P] N. LABANI - C. PICARD, *Homogenization of a nonlinear Dirichlet problem in a periodically perforated domain.* Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems ed. by P. Bénilan, M. Chipot, L.C. Evans y M. Pierre. Pitman Res. Notes in Math. Sci. 208 (1989) 294-305.

[M] P. MARCELLINI, *Some problems of semicontinuity and of* Γ*-Convergence for integrals of the calculus of variations,* Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, ed. by E. De Giorgi, E. Magenes y U. Mosco, May 8-12, Rome, (1978), 205-221.

[MO] U. MOSCO, Cours de 3éme Cicle à l'Université de Paris VI, Feb.- Jun. 1993.

[MU1] F. MURAT. *H-convergence.* Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique. Univ. d'Alger 1977/78.

[MU2] F. MURAT. *Homogénéisation.* Séminaire á l'École Normale Superieure de Lyon 1990, Lyon.

[S] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[SK] I.V. SKRYPNIK, *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems.* Teubner-Verlag, Leipzig, 1986.

[T] M. TAKEDA, *The maximum markovian self-adjoint extensions of generalized Schrödinger operators.* J. Math. Soc. Japan, V. 44, 1 (1992).

[TA1] L. TARTAR, *Cours Peccot au Collège de France.* Parcialmente reescrito en [MU1], Mar. 1977.

[TA1] L. TARTAR, *Quelques remarques sur l'homogénéisation.* Functional Analysis and Numerical Analysis, Proceedings of the Japan-France Seminar 1976, ed. by H. Fujita, Japan Society for the promotion of Science, (1978), 469-482.

[V T] S. FINZI VITA - N.A. TCHOU, *Corrector results for relaxed Dirichlet problems.* Asymptotic Analysis, 5. North Holland, (1992), 269-281.

[Y] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, 6th Edit, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Z] W.P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, New York, 1989.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JUAN CASADO DIAZ

titulada SOBRE LA HOMOGENEIZACION DE PROBLEMAS NO COERCIVOS Y PROBLEMAS EN DOMINIOS CON AGUJEROS

acordó otorgarle la calificación de Apto cum laude por unanimidad

Sevilla, 26 de Noviembre 1997

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

Miguel Herrero Eduardo Casas

El Presidente El Secretario, El Doctorado,

Antonio Cañada Villar.