Caracterización de los atractores en sistemas dinámicos no autónomos

Memoria escrita por

Juan Carlos Jara Pérez

Para optar al Grado de Doctor del
Programa Oficial de Doctorado Matemáticas

V^oB^o Los Directores del Trabajo

Tomás Caraballo Garrido   José Antonio Langa Rosado

Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

20 de diciembre de 2013

A mis padres y hermana,

por su infinito amor y cariño.

A mis tutores,

por su infinita dedicación y paciencia.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que de una manera u otra me han ayudado a terminar esta tesis. Al departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, por darme un sitio donde trabajar y un nuevo lugar al que pertenecer. A mi grupo de investigación, porque los he sentido como una nueva familia. A mis compañeros becarios, por tantos desayunos, partidos de fútbol, cenas y cervezas; que me ayudaron a desconectar el poco tiempo que estaba conectado. A mis amigos de siempre, por ser exactamente lo que son.

A todos, muchísimas gracias.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos es de gran importancia, ya que están relacionados con fenómenos del mundo real. Los problemas que consideraremos en este trabajo están, ante todo, motivados por la dinámica de las ecuaciones diferenciales no autónomas, tanto ordinarias como en derivadas parciales, y sus homólogas autónomas. Sin embargo, en vez de desarrollar una teoría que se ocupe específicamente de ecuaciones diferenciales, trataremos de llevar nuestros resultados tan lejos como nos sea posible en el lenguaje más abstracto de los procesos (para ecuaciones no autónomas) y los semigrupos (para ecuaciones autónomas). Hemos dividido este trabajo en una introducción, cuatro capítulos centrales y un capítulo final de conclusiones.

En el primer capítulo presentaremos las principales definiciones y resultados de la teoría para sistemas dinámicos autónomos. Comenzaremos, como no podía ser de otra forma, definiendo qué es un semigrupo. Dado un espacio métrico (X, d), un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es una familia de aplicaciones continuas de X en sí mismo que cumple tres propiedades: la primera, que $T(0)$ es la aplicación identidad sobre X, esto significa que si el tiempo es 0, entonces el punto x no se "mueve"; la segunda, es que la composición de la aplicación en tiempo t con la aplicación en tiempo s, es la aplicación en tiempo $t + s$, es igual "mover" un punto una cantidad de tiempo t y después volverlo a "mover" una cantidad de tiempo s que "moverlo" una cantidad de tiempo $t + s$ directamente; y la tercera es que la aplicación que lleva el par (t, x) de $\mathbb{R}_0^+ \times X$ a $T(t)x$ de X es continua con la topología producto. Una vez sabemos qué es un semigrupo, pasaremos a dar la definición formal de atractor global. El atractor global, que denotaremos por $\mathcal{A}$, es un conjunto del espacio X que verifica que, dado un conjunto acotado B de X, cuando voy aplicando las aplicaciones $T(t)$ a B, y voy aumentando el tiempo hasta infinito, el resultado, $T(t)B$, se va acercando cada vez más al atractor. O dicho de otro modo, que el atractor atrae a cualquier subconjunto acotado de X. Esta idea de atracción se puede ver de manera formal en la Definición 2.1.2. Además, pediremos que este conjunto $\mathcal{A}$ sea compacto y que sea invariante por la acción del semigrupo. Esto es que, dado cualquier tiempo t positivo o cero, el resultado de aplicar la aplicación $T(t)$ al conjunto $\mathcal{A}$ es el mismo conjunto $\mathcal{A}$. Un resultado interesante que demostraremos es que, si existe el atractor global, entonces es único. Además, el atractor global está carecterizado por el conjunto de todas las soluciones globales acotadas del semigrupo, donde una solución global del semigrupo es una función continua de $\mathbb{R}$ en X tal que $T(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau)$ para todo τ real y $t \geq 0$. A continuación daremos una condición necesaria y suficiente para la existencia del atractor global. Esta condición es que el semigrupo sea asintóticamente compacto y disipativo, conceptos que introduciremos de manera formal en la Sección 2.2. Una vez que tenemos un sistema dinámico con atractor global, el comportamiento asintótico puede ser descrito mediante un análisis de la dinámica interna del atractor. El "Teorema Fundamental de los Sistemas Dinámicos"de [31] es el resultado más general de este tipo, y describe cualquier flujo en un espacio métrico compacto como una descomposición de partes invariantes aisladas recurrentes por cadena y las conexiones entre ellas. Esto es lo que se conoce como Descomposición de Morse y que definimos en la Sección 2.5. En [17] se introdujeron los denominados semigrupos de tipo gradiente, o $\mathcal{J}$-gradiente dinámico y que nosotros presentamos en la Sección 2.4, como un concepto intermedio entre los semigrupos gradientes, los que poseen una función de Lyapunov, y los semigrupos que poseen atractor de tipo gradiente, esto es, aquellos que poseen un atractor que se puede expresar como la unión de los conjuntos inestables de sus conjuntos invariantes aislados. Arago et al. ([2]) consiguieron demostrar que los conceptos de semigrupo gradiente y de semigrupo de tipo gradiente son, en realidad, equivalentes y que, además, por la forma en que se construye la función de Lyapunov, la familia disjunta de los conjuntos invariantes aislados de un semigrupo de tipo gradiente en un espacio métrico general puede ser reordenada de tal manera que forme una descomposición de Morse del atractor. Estos hechos están presentes en este trabajo, ya que los resultados novedosos que aquí presentamos son la generalización, bajo ciertas hipótesis, de los de Aragao et al. ([2]) al caso de que tengamos una descomposición de Morse con infinitas componentes (Capítulo 3), o al caso no autónomo (Capítulo 5).

En el Capítulo 3 pasaremos a tratar el caso en el que tengamos infinitas componentes de Morse en el atractor global. Comenzaremos con un ejemplo que motive este trabajo y la idea es repetir, bajo ciertas hipótesis, el trabajo que fue desarrollado en Aragao et al. ([2]), obteniendo así la equivalencia entre semigrupo gradiente generalizado, semigrupo gradiente dinámico generalizado y descomposición de Morse. En este caso supondremos que tenemos una colección de conjuntos $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$, donde los conjuntos son disjuntos pero no aislados, ya que en las aplicaciones se comprueba que típicamente M_∞ es un conjunto de acumulación de la sucesión $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Así, dado un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia de conjuntos disjunta e invariantes $\mathbf{M}_\infty$, con M_j aislado para $j \in \mathbb{N}$, decimos que un semigrupo es gradiente dinámico generalizado respecto a $\mathbf{M}_\infty$ si para toda solución $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi(t_0) \notin M_j$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y todo $j \in \mathbb{N} \cup \infty$, se verifica que

$$M_j \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_i, \text{ para } 1 \leq i < j \leq \infty. \tag{1.1}$$

Después pasaremos a ver qué es un descomposición de Morse $\mathbf{M}_\infty$ con infinitas componentes. Básicamente es la misma definición que en el caso finito, salvo que esta vez tenemos una cadena infinita de atractores locales $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots A_\infty = \mathcal{A}$ y por tanto definimos $M_j := A_j \cap A_{j-1}^*$, $M_\infty = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j^*$. A continuación se verán algunas propiedades relativas a los conjuntos de Morse y los pares atractor-repulsor. En la Sección 3.2 construiremos una descomposición de Morse a partir de una colección de conjuntos invariantes disjuntos $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ con M_j aislado para $j \in \mathbb{N}$ que verifica la condición (1.1). Para ello será crucial demostrar que dada una colección de conjuntos como la definida anteriormente, entonces M_1 es un atractor local. A partir de aquí construiremos una cadena infinita de atractores locales, sus repulsores asociados y finalmente la descomposición de Morse que coincidirá con los conjuntos M_j. En la Sección 3.3 veremos qué es un semigrupo gradiente generalizado y construiremos una función de Lyapunov a partir de una descomposición de Morse, probando así otra parte del teorema central de este capítulo. Ya en la última sección de este capítulo demostraremos que dada una función de Lyapunov respecto a una colección de conjuntos $\mathbf{M}_\infty$ en $\mathcal{A}$, se verifica que el semigrupo es gradiente dinámico generalizado y por tanto tendríamos todas las piezas para formar así el Teorema 3.4.6 que dice lo siguiente:

Teorema 1.0.1 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es un semigrupo gradiente generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ en el sentido de la Definición 3.3.1 y $\mathbf{M}_\infty$ está ordenada con respecto a la función de Lyapunov.*

ii) $\{T(t) : t \geq 0\}$ *un semigrupo gradiente dinámico generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ que satisface (3.7).*

iii) $\mathbf{M}_\infty$ *de una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$.*

En el Capítulo 4 pasamos al estudio de los sistemas dinámicos no autónomos. Al igual que en el capítulo anterior comenzamos con la definición de semigrupo, en este capítulo comenzaremos con la generalización de semigrupo en los sistemas dinámicos no autónomos (o SDNA de manera abreviada), esto es la definición de proceso de evolución. Un proceso de evolución es una familia biparamétrica de aplicaciones $\{S(t,s) : t \geq s\}$ que verifica tres propiedades. Estas propiedades son la generalización de las mismas propiedades que pedíamos para semigrupos y son: $S(t,t)$ es la identidad sobre X, si el tiempo inicial y final es el mismo entonces el punto no se "mueve"; $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, puedo "mover" un punto desde el tiempo s al t o "mover" al punto de s a τ y luego de τ a t, donde τ es un tiempo intermedio entre s y t; y finalmente que la aplicación que lleva a cada (t,s,x) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$ en $S(t,s)x$ de X es continua. Y al igual que antes pasaremos a definir a continuación qué es un atractor. Al estar tratando en este caso con una familia biparamétrica de aplicaciones, en vez de una con un sólo parámetro como en los semigrupos, nos encontramos ante una doble elección a la hora de definir la atracción, ya que tenemos dos formas de entenderla. Cuando optemos por fijar el tiempo inicial y hacer tender el tiempo final hacia infinito hablaremos de atracción hacia adelante o forward, y cuando lo que fijemos sea el tiempo final y hacemos tender el tiempo inicial a menos infinito hablaremos de atracción hacia atrás, o pullback. Por esto mismo no hablaremos del atractor global, sino del atractor forward (relacionado con el atractor uniforme $\mathcal{A}$ en el sentido de Chepyzhov y Vishik [28]) o del atractor pullback (ver Kloeden y Rasmussen [48] o Carvalho, Langa y Robinson [21]). Estos dos enfoques son lo mismo en el marco autónomo, ya que $S(t,s)$ se comporta como un semigrupo $T(t-s)$ pero, en general, estos conceptos no tienen ninguna relación en el marco no autónomo. En nuestro caso nos centraremos en el atractor pullback, ya que es con este tipo de atractores con los que hemos desarrollado esta parte del trabajo y es en definitiva el que permite entender la dinámica en el atractor uniforme (ver Chepyzhov y Vishik [28] o Bortolan et al. [10]). Otra gran diferencia con respecto al atractor global de los semigrupos es que, en el caso de los procesos de evolución, el atractor pullback no es un conjunto, sino una familia parametrizada de conjuntos. Así, la idea de invarianza, es la invarianza en el sentido de familia de conjuntos, o expresado más formalmente, que dados dos tiempo cualesquiera t, s, con $t \geq s$, diremos que la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante por la acción del proceso si $S(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$. El atractor pullback se define de manera formal como:

Definición 1.0.2 *Se dice que una familia* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *es el atractor pullback para un proceso de evolución* $S(\cdot,\cdot)$ *si*

(i) $\mathcal{A}(t)$ *es compacto para cada* $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathcal{A}(\cdot)$ *es invariante respecto a* $S(\cdot,\cdot)$,

(iii) $\mathcal{A}(\cdot)$ *atrae pullback a conjuntos acotados de* X, *y*

(iv) $\mathcal{A}(\cdot)$ *es la familia minimal con la propiedad (iii).*

También existe una caracterización del atractor a través de las soluciones globales completas, como en el caso de los semigrupos, pero necesitamos que el atractor pullback sea acotado, esto es que $\mathcal{A}(t)$ sea uniformemente acotado en t. A continuación pasaremos a dar algunos resultados sobre la existencia del atractor pullback. Uno de ellos relaciona la existencia del atractor pullback para un proceso de evolución con la existencia de una familia de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrae a subconjuntos acotados de X bajo el proceso de evolución (Teorema 4.2.8). En este caso el atractor vendrá dado para cada $\mathcal{A}(t)$ como la clausura de la unión de todos los conjuntos ω-límite de todos los conjuntos acotados de X en tiempo t. Otro resultado, que impone más condiciones sobre el proceso de evolución, pero que permite expresar el atractor de forma sencilla, es el Teorema 4.2.15, que dice que si el proceso de evolución es fuertemente acotado pullback disipativo y asintóticamente pullback compacto (véanse las definiciones de la Sección 4.2.3) entonces existe el atractor pullback, es acotado en el pasado y es el ω-límite del conjunto absorbente pullback asociado.

El Capítulo 4 finaliza con una aplicación de la teoría de atractores pullback sobre un modelo depredador-presa, en el que podemos observar la riqueza de la dinámica no autónoma (en relación a la autónoma) para un sistema de dos EDOs. Más precisamente, consideraremos el siguiente modelo no autónomo de tipo depredador-presa,

$$\begin{cases} A'(t) = \alpha f(t)A(t) - \beta g(t)A^2(t) - \gamma A(t)P(t) \\ P'(t) = \delta h(t)P(t) - \lambda m(t)P^2(t) + \mu A(t)P(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Este tipo de modelos de Lotka-Volterra ha sido estudiado como un modelo clásico de interacción entre dos especies. Esta interacción depende del signo del producto de las dos variables.

Si ambas son positivas, entonces tenemos un modelo depredador-presa como en (1.2), si $\gamma < 0$ y $\mu > 0$, entonces cada especie se beneficia de la otra, creando una interacción de simbiosis y si $\gamma > 0$ y $\mu < 0$ las dos especies compiten mutuamente para sobrevivir. Las funciones $\alpha f(t)$ y $\delta h(t)$ representan los ratios de crecimiento de A y P respectivamente, y $\beta g(t)A^2$ y $\lambda m(t)P^2$ son los efectos inhibidores del medio que cada una de las especies tiene sobre su propia reproducción. Podemos encontrar en la literatura un extenso estudio relacionado a este tipo de sistemas, tanto autónomos como no autónomos, y también para EDPs (véase por ejemplo [50] y [52] para un estudio exhaustivo en dimensión infinita con coeficientes acotados). En dimensión finita existen muy buenos trabajos sobre modelos no autónomos, como [76], para un sistema depredador-presa con coeficientes que dependen del tiempo no negativos y acotados, o [1] para un sistema de competitición con coeficientes acotados para tiempos grandes. El estudio de estos problemas con coeficientes no acotados necesita usualmente de más condiciones restrictivas relacionadas con la densidad de las funciones, llamadas "condiciones medias" (véase [9, 12] y las referencias que allí se encuentran).

En nuestro caso, supondremos que

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0, \tag{1.3}$$

$$f(t) \leqslant g(t) \text{ y } g(t) \geqslant g_0 > 0, \text{ para cierto } g_0 \text{ constante }, \tag{1.4}$$

$$0 < h_0 \leqslant h(t) \leqslant H_0 < \infty \text{ y } 0 < m_0 \leqslant m(t) \leqslant M_0 < \infty \text{ con } h_0, m_0, M_0, H_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Supondremos acotaciones globales en la mayoría de las funciones de (1.2), excepto en $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$, obteniendo, en primer lugar, la existencia del atractor pullback del sistema. Sin embargo, aunque la función $f(\cdot)$ pueda ser negativa en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, necesitaremos suponer más hipótesis sobre las funciones $f(t)$ y $g(t)$, para asegurar la permanencia de las soluciones.

Como estamos trabajando con un modelo biológico, consideraremos solamente datos iniciales positivos. Además, cuando $(A_s, P_s) > (0,0)$, esto es cuando $A_s, P_s > 0$, $A(t,s;A_s,P_s)$ y $P(t,s;A_s,P_s)$ serán siempre positivas y si $(A_s,P_s) = (0,0)$, entonces $A(t,s;0,0) \equiv P(t,s;0,0) \equiv 0$ para todo $t \geqslant s \in \mathbb{R}$.

Este ejemplo resulta de gran interés, ya que demostramos la gran riqueza que poseen los sistemas dinámicos no autónomos en comparación con los sistemas dinámicos autónomos incluso en el caso de la ecuación logística (Teorema 4.4.1). En este sentido, cabe destacar la Observación 6, que nos muestra que a pesar de existir una función de Lyapunov $V(\cdot)$ para un sistema de la forma, con $\eta(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$,

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(\alpha - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, esto no implica que cualquier solución converja a un equilibrio del sistema. Esto no ocurre en un sistema dinámico autónomo, en el cual si existe función de Lyapunov toda solución converge a un equilibrio del sistema. Con esto pretendemos mostrar las dificultades que aparecen al tratar con los SDNA, y que su estudio, aunque sea una generalización de un SDA, no es tan simple. En particular, para una buena función de Lyapunov tendremos que desplazar nuestro marco de estudio al caso de los semiflujos cruzados (véase Capítulo 5).

En el último capítulo de esta memoria veremos las diferentes nociones existentes de atractores para una ecuación diferencial no autónoma. En efecto, dada una ecuación diferencial no autónoma nos encontraremos con cuatro sistemas dinámicos diferentes: el grupo base, el semiflujo skew-product, el sistema dinámico no autónomo asociado y el proceso de evolución. Cada uno de estos cuatro sistemas está definido en un espacio diferente y son:

(a) El *grupo base* $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ sobre P asociado a las dinámicas de las no linealidades dependientes del tiempo que aparecen en la ecuación, y que está definido por $(\theta_t f)(\cdot,\cdot) = f(t+\cdot,\cdot)$,

(b) el *semiflujo skew product* $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ definido en el espacio producto $P \times X$

(c) el *sistema dinámico no autónomo* $(\theta,\varphi)_{(P,X)}$ con $\varphi(t,\theta_s p)\varphi(s,p) = \varphi(t+s,p)$,

(d) y el *proceso de evolución* $S(t,s)$.

Cada uno de ellos origina un atractor asociado diferente. Además de esos cuatro atractores nos encontramos que podemos tener un quinto atractor, el atractor uniforme $\mathcal{A}$:

(i) Un atractor global $\mathbb{A}$ para el semiflujo skew product $\pi(t)$,

(ii) un atractor global Ξ para el grupo base θ_t (en nuestro caso, supondremos a P como atractor global),

(iii) un atractor cociclo $\{A(p)\}_{p\in P}$ para el semiflujo cociclo φ,

(iv) un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ para el proceso de evolución $S(t,s)$,

(iv) y el atractor uniforme $\mathcal{A} = \Pi_X(\mathbb{A}) := \{x \in X : \text{ existe } p \in P \text{ con } (p,x) \in \mathbb{A}\}$.

Esto nos será de gran utilidad para la siguiente parte del capítulo, ya que usaremos las relaciones entre atractores para abordar el problema de equivalencia entre existencia de función de Lyapunov y descomposición de Morse, que en el lenguaje de procesos y atractores pullback no tiene solución (ver Aragao et al. [3]), y que al cambiar el marco a semiflujos skew-product sí podemos darle solución. En efecto, pasaremos a tratar un problema que Aragao et al. [3] dejaron abierto cuando desarrollaron sus artículos sobre la descomposición de Morse para SDNA. Tal como hemos visto ya consiguieron demostrar la equivalencia entre sistema gradiente y sistema de tipo gradiente. En sus artículos no acaban aquí, sino que muestran cómo esta descomposición de Morse puede hacerse en el caso no autónomo. Sin embargo, no consiguen demostrar que suponiendo la existencia de una función de Lyapunov para el proceso, dicho proceso es de tipo gradiente dinámico (todo ello de acuerdo con la generalización de las definiciones de función de Lyapunov y proceso de tipo gradiente en el caso no autónomo). En este trabajo hemos conseguido dar una respuesta positiva a ese problema abierto. Aquí adoptamos un enfoque diferente al que da Aragao et al. [3], que nos permitie ir más allá en la teoría. De hecho, adoptamos el enfoque de la descomposición de Morse para atractores aleatorios en Liu [59] que trata el caso de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas. Como se desarrolló en Kloeden y Rasmussen [48], dado un espacio base compacto P, la existencia de un atractor global $\mathbb{A}$ de un flujo skew product en $P \times X$ (véase Chepyzhov y Vishik [29] o Kloeden y Rasmussen [48]) nos lleva a la existencia de atractores pullback $A(p)$, para $p \in P$ (véanse Definición 5.1.6 y Teorema 5.2.6). Luego, una definición de descomposición de Morse del atractor del flujo skew product en $P \times X$ nos permitirá la descomposición de Morse del atractor pullback en X para un sistema dinámico no autónomo:

Definición 1.0.3 *Sea φ un SDNA que admite atractor pullback $\hat{S}$ con $\Pi_X \hat{S}$ precompacto y verificándose $(H2)$ del Teorema 5.2.7. Sean $(\hat{A}_i, \hat{R}_i)$, $i = 1, \cdots, n$, pares atractor-repulsor pullback en $\hat{S}$ con*

$$\emptyset = A_0(p) \subsetneq A_1(p) \subsetneq \cdots \subsetneq A_n(p) = S(p)$$

y

$$S(p) = R_0(p) \supsetneq R_1(p) \supsetneq \cdots \supsetneq R_n(p) = \emptyset$$

para todo $p \in P$. Entonces, la familia $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos compactos no autónomos invariantes, definidos por

$$\hat{M}_i = \hat{A}_i \cap \hat{R}_{i-1}, \ 1 \leq i \leq n,$$

se llama una decomposición de Morse pullback de $\hat{S}$, y cada $\hat{M}_i$ es llamado un conjunto de Morse pullback.

En particular, esto implica el concepto de atracción en sentido pullback ($s \to -\infty$) y repulsión local en sentido pullback-backwards (esto es, fijado $t \in \mathbb{R}$, hacemos tender $s \to +\infty$). Este enfoque nos permitirá probar la equivalencia entre la existencia de una descomposición de Morse de un atractor pullback y la existencia de una función de Lyapunov asociada, un resultado que no se encuentra en las referencias previas. Por lo tanto, prestamos especial atención a las propiedades dinámicas descritas por este tipo de caracterización de los atractores pullback. Escribiremos a continuación los resultados principales que obtenemos, que muestran las propiedades dinámicas del SDNA φ a través de una descomposición de Morse sobre el atractor:

Teorema 1.0.4 *Supongamos que $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ es una decomposición de Morse pullback del atractor pullback $\hat{S}$, determinado por los pares atractor-repulsor pullback $(\hat{A}_i, \hat{R}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que $\Pi_X \hat{A}_i \cap \Pi_X \hat{R}_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, la colección de conjuntos de Morse pullback determina el comportamiento límite del SDNA φ sobre $\hat{S}$. Más precisamente, tenemos que:*

(i) Para cualquier conjunto no autónomo puntual $\hat{x}$ en $\hat{S}$ con

$$dist(\tilde{x}\ , \bigcup_{i=1}^{n} \partial \tilde{R}_i) > 0,$$

tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p), \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)) = 0.$$

(ii) *Si φ es invertible sobre $\tilde{S}$, entonces para cualquier conjunto no autónomo puntual $\hat{x}$ en $\hat{S}$ con*

$$dist(\tilde{x}\ ,\bigcup_{i=1}^{n} \partial\tilde{A}_i) > 0,$$

tenemos

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(-t,\theta_t p)x(\theta_t p), \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)) = 0.$$

(iii) *Si σ es una órbita entera a lo largo del conjunto no autónomo puntual $\hat{x}$ satisfaciendo*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p), \Pi_X \hat{M}_i) = 0 \tag{1.6}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi^{\sigma}(-t,\theta_t p)x(\theta_t p), \Pi_X \hat{M}_j) = 0$$

para algún $1 \le i,j \le n$, entonces $i \le j$; además, $i = j$ si y sólo si σ se encuentra sobre $\hat{M}_i$.

(iv) *Si $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ son l órbitas enteras a lo largo de los conjuntos no autónomos puntuales $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_l$ respectivamente tal que para algún $1 \le j_0,\dots,j_l \le n$, $\omega_{x_k}(p) \subset M_{j_{k-1}}(p)$ y $\omega^{*,\sigma_k}_{x_k}(p) \subset M_{j_k}(p)$ para cada $p \in P$ y $k = 1,\dots,l$, entonces $j_0 \le j_l$. Además, $j_0 < j_l$ si y sólo si σ_k no se encuentra sobre $\bigcup_{i=1}^{n} \hat{M}_i$ para algún k, en otro caso $j_0 = \dots = j_l$.*

El siguiente muestra que dada una descomposición de Morse tenemos una función de Lyapunov:

Teorema 1.0.5 *Supongamos que $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^{n}$ es una descomposición de Morse del atractor pullback $\hat{S}$ respecto al SDNA φ. Existe entonces una función de Lyapunov continua $L : P \times X \to \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:*

(i) *$L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) \le L(p,x)$ para todo $(p,x) \in P \times X$ y $t \ge 0$.*

(ii) *$L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) = L(p,x)$ cuando $x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)$ para todo $t \ge 0$, y L toma diferentes valores constantes sobre los diferentes conjuntos de Morse.*

(iii) *$L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) < L(p,x)$ cuando $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)$ para todo $t > 0$.*

Y también demostramos su recíproco:

Teorema 1.0.6 *Supongamos que el SDNA φ admite un atractor pullback $\hat{S}$, en el universo $\hat{\mathcal{D}}$ dado por (5.17), satisfaciendo que $\Pi_X \hat{S}$ es precompacto, la hipótesis $(H2)$ del Teorema*

5.2.7, y que $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ es una colección de conjuntos no autónomos compactos en $\hat{S}$ con el asociado $\tilde{M}_i$ siendo compacto y mutuamente disjuntos. Supongamos además que existe una función continua de Lyapunov $L : P \times X \to \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:

(i) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) \leq L(p,x)$ *para todo* $(p,x) \in P \times X$ *y* $t \geq 0$.

(ii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) = L(p,x)$ *cuando* $x \in \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t \geq 0$, *y* L *tomando diferentes valores constantes sobre diferentes* $\hat{M}_i$.

(iii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) < L(p,x)$ *cuando* $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t > 0$.

Entonces, $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ *es una descomposición de Morse del atractor pullback* $\hat{S}$.

Cabe destacar que para poder obtener estos resultados imponemos una serie de condiciones adicionales. La primera es que para probar que si tengo un atractor $\hat{S}$ para un SDNA φ, una función de Lyapunov y una colección de conjuntos no autónomos compactos $\hat{\mathcal{M}}$ en $\hat{S}$, entonces la coleccción $\hat{\mathcal{M}}$ es una descomposición de Morse sobre $\hat{S}$, necesitamos imponer que $\Pi_X \hat{S} := \bigcup_{p \in P} S(p)$ sea precompacto. Otra de las condiciones que usaremos durante toda esta última parte es la hipótesis $(H2)$ del Teorema 5.2.7, que dice que dado un atractor $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ sobre un SDNA φ se verifique que $\lim_{t \to +\infty} \sup_{p \in P} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), \Pi_X \hat{A}) = 0$ para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$. Finalmente presentaremos algunos ejemplos para ilustrar nuestros resultados.

En la última parte de esta memoria presentaremos algunas conclusiones y problemas abiertos a los que este trabajo ha dado lugar.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos autónomos

En este primer capítulo presentamos los conceptos básicos y desarrollamos los primeros resultados de la teoría de los sistemas dinámicos autónomos. Definiremos el atractor global y los conceptos de semigrupos gradientes y gradientes dinámicos. Indispensables para poder hablar después de descomposición de Morse del atractor global y presentar los resultados de Aragao et al. [3], donde se demuestran que estos tres conceptos son, en realidad, equivalentes.

2.1. Primeras definiciones

Sea X un espacio métrico con la distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$.

Definición 2.1.1 *Decimos que una familia $\{T(t) : t \geq 0\}$ de aplicaciones continuas del espacio X en sí mismo es un semigrupo no lineal en X, o simplemente semigrupo si no hay riesgo de confusión, cuando se cumplen las tres propiedades siguientes:*

1) $T(0) = Id$,

2) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $s, t \geq 0$,

3) $(t, x) \mapsto T(t)x$ *es continua de* $[0, +\infty) \times X$*, con la topología producto, en* X.

Los semigrupos no lineales son también llamados sistemas dinámicos autónomos, y en este texto vamos a utilizar indistintamente ambas nomenclaturas.

Observemos que, por la propiedad de semigrupo, se tiene que la familia de aplicaciones $\{T(t) : t \geq 0\}$ es conmutativa para la operación de composición de aplicaciones, ya que, cualesquiera que sean $t, s \geq 0$ se tiene que $T(s)T(t) = T(s+t) = T(t+s) = T(t)T(s)$.

Fijemos un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico $X := (X, d)$ que a veces denominaremos espacio de fases del semigrupo; dicho semigrupo se va a notar, en ocasiones, por $T(\cdot)$.

Queremos recordar en primer lugar la definición de atractor global para un semigrupo no lineal $T(\cdot)$ (Hale [37]; Babin & Vishik [8]; Temam [77]; Henry [41]; Ladyzhenskaya [49]), y después discutir cómo este concepto puede ser generalizado al atractor de un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$.

Lo ideal es que el atractor de un sistema dinámico dado sea un objeto que describa por completo la dinámica asintótica del modelo que da lugar a dicho sistema. Una exitosa teoría general debería conducir a poder comprender de forma razonable el comportamiento asintótico del modelo, incluyendo la localización del atractor, la velocidad a la que atrae en el espacio de estados, y las estimaciones sobre su dimensión o complejidad.

Comenzaremos dando sentido a la palabra *atracción*. En la definición, denotaremos la semidistancia de Hausdorff entre A y B por $dist(A,B)$ definida por

$$dist(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b)$$

Nótese que $dist(A,B)=0$ implica solamente que $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, donde $\overline{M}$ denota la clausura de M en X.

Definición 2.1.2 *Sean B y C subconjuntos de X. Decimos que B atrae a C bajo $T(\cdot)$ si $dist(T(t)C,B) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

Recordemos que, dados un subconjunto $A \subset X$ y un número positivo $\epsilon > 0$, su ϵ-entorno, denotado por $\mathcal{O}_\epsilon(A)$, es la unión de todas las bolas abiertas centradas en sus puntos y poseyendo radio ϵ, es decir,

$$\mathcal{O}_\epsilon(A) := \bigcup_{a\in A} B(a;\epsilon) = \{x \in X : d(x,A) < \epsilon\}.$$

De la definición anterior se deduce que un subconjunto B es atraído por un subconjunto A si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon, B) \geq 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(A) \text{ para todo } t \geq T. \tag{2.1}$$

Intuitivamente, un conjunto que atrayese a todo punto en X debería quedarse fijo por la acción del semigrupo. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.1.3 *Se dice que un conjunto $A \subset X$ es invariante bajo $T(\cdot)$ si $T(t)A = A$ para cualquier $t \geq 0$.*

Por supuesto, dentro de un conjunto invariante pueden existir varios subconjuntos invariantes.

Dadas estas definiciones, estamos en posición de dar la definición de atractor para un semigrupo.

Definición 2.1.4 *Se dice que un conjunto $\mathcal{A} \subseteq X$ es el atractor global para un semigrupo $T(\cdot)$ si verifica*

(i) $\mathcal{A}$ es compacto,

(ii) $\mathcal{A}$ es invariante, y

(iii) $\mathcal{A}$ atrae cada subconjunto acotado B de X.

En realidad, esta definición produce el mínimo conjunto compacto que atrae a cada subconjunto acotado de X (en el sentido de (iii)), y el máximo conjunto acotado invariante. Por lo tanto, uno puede encontrar en la literatura al atractor global mencionado como el "atractor maximal" o el "atractor minimal".

Nótese que esta definición requiere que el atractor global atraiga conjuntos acotados de X de una forma uniforme.

Un apunte importante sobre el atractor global es que, cuando existe, es único.

Proposición 2.1.5 *Si existe un atractor global para el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, entonces dicho atractor es único.*

Demostración: Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos atractores globales para el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Como $\mathcal{A}_2$ es compacto, y $\mathcal{A}_1$ es un atractor global, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} dist(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$$

Pero como $\mathcal{A}_2$ es invariante por $T(\cdot)$ tenemos que $T(t)\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2$ para cada $t \geq 0$. Por tanto,

$$0 = \lim_{t\to\infty} dist(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = \lim_{t\to\infty} dist(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = dist(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1),$$

Así que $dist(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$ y, entonces, $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$ ya que $\mathcal{A}_1$ es cerrado. Cambiando ahora los papeles de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ nos queda la igualdad.

$\square$

Además, el atractor global puede ser caracterizado como el conjunto de todas las soluciones globales acotadas. Si el semigrupo procede de una ecuación diferencial, esto proporciona una caracterización analítica, en vez de una geométrica/dinámica, del atractor global.

Para ser precisos, vamos a dar la siguiente definición.

Definición 2.1.6 *Una función continua $\xi(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una solución global para $T(\cdot)$ si satisface que $T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ y todo $t \geq 0$.*

La demostración de la siguiente caracterización es sencilla.

Teorema 2.1.7 *Si un semigrupo $\{T(\cdot) : t \geq 0\}$ tiene un atractor global $\mathcal{A}$, entonces*

$$\mathcal{A} = \{y \in X : \text{ existe una solución global acotada } \xi : \mathbb{R} \longrightarrow X \text{ con } \xi(0) = y\}$$

Demostración: Dado $y \in \mathcal{A}$ necesitamos construir una solución global acotada $y(t)$ con $y(0) = y$. Lo haremos encontrando una solución $y(t) \in \mathcal{A}$ con $y(0) = y$. Para $t > 0$ podemos tomar simplemente $y(t) = T(t)y$. Para $t < 0$ procederemos inductivamente. Como $T(1)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, al ser $\mathcal{A}$ invariante, existe $y_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)y_{-1} = y$. Sea $y(t) = T(t+1)y_{-1}$ para $-1 \leq t < 0$. Por el mismo procedimiento, existe $y_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)y_{-2} = y_{-1}$, y tenemos que $y(t) = T(t+2)y_{-2}$ para $-2 \leq t < -1$. Continuando de esta forma obtenemos la solución global $y(t)$.

A la inversa, si $y(\cdot)$ es una solución global acotada entonces $\mathcal{A}$ atrae a $Y = \cup_{t\in\mathbb{R}} y(t)$. Como $y(0) = T(t)y(-t)$, por definición de solución global, se tiene que $dist(y(0), \mathcal{A}) \leq dist(T(t)Y, \mathcal{A})$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, y entonces $dist(y(0), \mathcal{A}) = 0$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado se concluye que $y(0) \in \mathcal{A}$.

$\square$

Si $\xi : \mathbb{R} \to X$ es una solución global, denotaremos a su imagen con el símbolo $\gamma(\xi) := \{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$, y dicha imagen se va a llamar la órbita de la solución ξ o, de otra forma, la órbita global de la solución ξ.

Antes de comenzar con los resultados que aseguran la existencia del atractor global, vamos a dar algunas definiciones más que nos serán de ayuda posteriormente.

Dado un subconjunto B de X denotamos por $\gamma^+(B)$ su semiórbita positiva respecto del semigrupo $\{T(\cdot)\}$, esto es

$$\gamma^+(B) := \{T(t)x : t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x\in B} \gamma^+(x).$$

Decimos que un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ es acotado, cuando la semiórbita positiva de cualquier subconjunto acotado de X es un acotado de X, mientras que se dice eventualmente acotado cuando para cada subconjunto acotado $B \subset X$ existe $\tau = \tau(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_\tau(B)$ es un acotado de X.

Obsérvese que, si un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X posee atractor global $\mathcal{A}$, entonces $\{T(t) : t \geq 0\}$ es necesariamente eventualmente acotado, pues dado un acotado $B \subset X$, haciendo $\epsilon = 1$ en el apunte sobre la atracción del atractor global tenemos, en primer lugar, que $\mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ es acotado y, en segundo, por (2.1), existe $\tau = \tau(B)$ de modo que $\gamma^+_\tau(B)$ es acotado. En particular, si $\xi : \mathbb{R} \to X$ es una solución global para $T(\cdot)$ entonces, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, el subconjunto $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$ es acotado.

Dados dos subconjuntos B y D de X, se dice que D absorbe al conjunto B, por la acción del semigrupo, si existe un $\tau = \tau(B) \geq 0$ de manera que $T(t)B \subset D$ para todo $t \geq \tau$.

Finalmente, se dice que un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo, cuando existe un subconjunto acotado D de X que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X por la acción del semigrupo.

Las nociones de atracción y absorción son equivalentes en el sentido de que un semigrupo $T(\cdot)$ es disipativo si y sólo si existe un subconjunto acotado A que atrae a todos los subconjuntos acotados de X. Recíprocamente, si suponemos que A atrae a todos los acotados, entonces fijando $\epsilon > 0$ cualquiera, es inmediato de (2.1) que, poniendo $D := \mathcal{O}_\epsilon(A)$, resulta que D es acotado y satisface la definición de disipatividad, como queríamos.

2.2. Conjuntos ω-límites y existencia de atractores

En esta sección introduciremos el concepto de conjunto ω-límite, que va a jugar un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de los atractores globales que analizaremos en la próxima sección.

Definición 2.2.1 *El conjunto ω-límite de un conjunto B de X, denotado por $\omega(B)$, se define de la siguiente manera:*

$$\omega(B) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} T(s)B} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

El conjunto ω-límite de cualquier subconjunto B de X es un conjunto cerrado al ser una intersección de cerrados.

Daremos ahora una caracterización del conjunto ω-límite de un conjunto B de X que nos será de gran utilidad para futuras demostraciones. Denotaremos por $\mathbb{R}_0^+$ al conjunto $[0, \infty)$.

Lema 2.2.2 *El conjunto ω-límite de un subconjunto $B \subset X$ está carecterizado por*

$$\omega(B) = \{x \in X : \text{ existen sucesiones } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}_0^+ \text{ con } t_n \to \infty \text{ y } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } B,$$

$$\text{tales que } x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\}$$

Demostración: Llamemos $\omega'(B)$ al conjunto definido por el término derecho de la igualdad anterior. Dado $x \in \omega(B)$, para cada natural n se tiene que $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$. Luego, para cada n debe existir $z_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que $d(x, z_n) < \frac{1}{n}$, pero, por la definición de $\gamma_n^+(B)$, existen $t_n \geq n$ y $x_n \in B$ de manera que $z_n = T(t_n)x_n$. Así se tiene evidentemente que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, con $t_n \to \infty$, es decir, $x \in \omega'(B)$.

Por otra parte, sea $x \in \omega'(B)$, entonces $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, para ciertas sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$, con $t_n \to \infty$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B. Ahora, dado $t \geq 0$ cualquiera, escogiendo un natural $n(t)$ de modo que $t_n \geq t$ para $n \geq n(t)$, se ve fácilmente que $T(t_n)x_n \in \gamma_t(B)$ siempre que $n \geq n(t)$, de donde resulta que $x \in \overline{\gamma_t(B)}$, y de la arbitrariedad con la que fue tomado $t \geq 0$, concluimos que $x \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$, es decir, $x \in \omega(B)$ y el lema queda demostrado.

□

Con este resultado es ahora muy simple demostrar que si $B \subset C$ entonces $\omega(B) \subset \omega(C)$ y si $x : \mathbb{R} \to X$ es una solución global de $T(\cdot)$ se tiene que $\omega(x(t)) = \omega(x(s))$ cualesquiera que sean s y t.

En algunas ocasiones se puede definir un concepto semejante al de conjunto ω-límite, pero donde el tiempo avanza hacia atrás, definiendo lo que se conoce como conjunto α-límite.

Definición 2.2.3 *Sea $\xi : \mathbb{R} \to X$ una solución global del semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Definimos su conjunto α-límite de la siguiente manera:*

$$\alpha(\xi) := \{x \in X : \text{ existe } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \to -\infty \ (n \to +\infty) \text{ tal que } x = \lim_{n\to\infty} \xi(t_n)\}$$

Vamos a introducir ahora la definición de semigrupo asintóticamente compacto, que son los semigrupos con los que trabajaremos a partir de ahora, ya que en estos semigrupos las principales propiedades de los conjuntos ω-límites necesarias en el estudio de los atractores globales se verifican siempre.

Definición 2.2.4 *Decimos que un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X es asintóticamente compacto, cuando para toda sucesión acotada de puntos de X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y toda sucesión de números reales no negativos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$ se tiene que la sucesión de puntos de X, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, posee una subsucesión convergente.*

Y otra definición más

Definición 2.2.5 *Se dice que un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X es eventualmente compacto, si existe $t_0 > 0$ tal que la aplicación $T(t_0) : X \to X$ es una aplicación compacta, es decir, si para cada subconjunto acotado B de X su imagen por $T(t_0)$, $T(t_0)B$, es un subconjunto relativamente compacto de X.*

Supongamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo eventualmente compacto y sea $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) : X \to X$ es una aplicación compacta. Entonces, del hecho de que una aplicación continua transforma conjuntos compactos en conjuntos compactos y de la propiedad de semigrupo, se deduce que para todo $t \geq t_0$, $T(t) : X \to X$ es una aplicación compacta, pues, $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$.

Lema 2.2.6 *Dado un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ eventualmente compacto y eventualmente acotado, se verifica que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto.*

Demostración: Sean $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números con $t_n \to \infty$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de puntos de X. Sea, por la compacidad eventual, $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) : X \to X$ es una aplicación compacta y, por la acotación eventual de $T(\cdot)$, $\tau \geq 0$ de manera que la semiórbita, $\gamma_\tau^+(B_0)$, del subconjunto acotado $B_0 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es acotada. Finalmente, escogiendo un número real $t' > t_0 + \tau$, consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t'$ para todo $n \geq n_0$. Definiendo el conjunto acotado $B := \{T(t_n - t')x_n : n \geq n_0\} \subset \gamma_\tau^+(B_0)$, de la observación que sigue a la definición de compacidad eventual, resulta inmediato que $T(t')B$ es relativamente compacto y siendo $\{T(t_n)x_n \geq n_0\}$ un subconjunto de $T(t')B$, se sigue la conclusión.

□

Establecemos ahora las principales propiedades de los conjuntos ω-límites para semigrupos asintóticamente compactos.

Lema 2.2.7 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico X. Para todo subconjunto no vacío $B \subset X$ se tiene que su conjunto ω-límite satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\omega(B)$ es no vacío, compacto, invariante y atrae a B por la acción de $T(\cdot)$.

(ii) $\omega(B)$ es el menor conjunto cerrado de X que atrae a B.

(ii) Si B es conexo o existe un conexo C que contiene a B y que es atraído por $\omega(B)$, entonces $\omega(B)$ es conexo.

Demostración:

(i) Primero vamos a ver que $\omega(B)$ es no vacío. Tomemos una sucesión cualquiera de números reales no negativos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de B. De la compacidad asintótica se deduce que la sucesión $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente y por el Lema 2.2.2 tenemos que este límite pertenece a $\omega(B)$.

Para probar la compacidad, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\omega(B)$. Por el Lema 2.2.2, cada $n \in \mathbb{N}$ tiene asociado un par de sucesiones $(t_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$, con $t_j^{(n)} \to \infty$, cuando $j \to \infty$, y $(x_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ en B tales que $x_n = \lim_{j\to\infty} T(t_j^{(n)})x_j^{(n)}$. De donde se puede concluir que, para cada natural n existe un natural j_n tal que

$$d(x_n, T(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)}) < \frac{1}{n}, \text{ con } t_{j_n}^{(n)} \geq n. \tag{2.2}$$

Como $t_{j_n}^{(n)} \to \infty$, cuando $n \to \infty$, por la compacidad asintótica, podemos extraer una subsucesión convergente de $(T(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por

$$(T(t_{j_{n_k}}^{(n_k)})x_{j_{n_k}}^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

y por x a su límite. El Lema 2.2.2 implica ahora que $x \in \omega(B)$, y de (2.2) obtenemos que

$$d(x_{n_k}, T(t_{j_{n_k}}^{(n_k)})x_{j_{n_k}}^{(n_k)}) < \frac{1}{n_k},$$

de donde resulta que $x_{n_k} \to x$, cuando $k \to \infty$, lo que demuestra la compacidad de $\omega(B)$. Ahora probaremos que $\omega(B)$ es invariante. Sean $x \in \omega(B)$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$, con $t_n \to \infty$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B de manera que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Entonces, dado $t \geq 0$, de la continuidad del operador $T(t) : X \to X$ y de la propiedad de semigrupo se sigue que

$$T(t)x = T(t)(\lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n) = \lim_{n\to\infty} T(t + t_n)x_n,$$

con $t + t_n \to \infty$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B, lo que significa que $T(t)x \in \omega(B)$ y por tanto $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Recíprocamente, sean $x \in \omega(B)$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$, con $t_n \to \infty$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B de manera que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Fijado $t \geq 0$ vemos que

$$x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t + (t_n - t))x_n = \lim_{n\to\infty} T(t)(T(t_n - t)x_n). \tag{2.3}$$

Por otro lado, usando la compacidad asintótica, obtenemos un punto $z \in X$ y una subsucesión $(T(t_{n_j} - t)x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(T(t_n - t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$z = \lim_{j\to\infty} T(t_{n_j} - t)x_{n_j},$$

de donde, gracias al Lema 2.2.2, se sigue que $z \in \omega(B)$, y usando la continuidad de $T(t) : X \to X$ en (2.3) y el hecho de que toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, obtenemos que

$$x = T(t)(\lim_{j\to\infty} T(t_{n_j} - t)x_{n_j}) = T(t)z,$$

lo que muestra que $x \in T(t)\omega(B)$, concluyendo así la inclusión $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ y, por lo tanto, la invarianza de $\omega(B)$.

Veamos que $\omega(B)$ atrae a B, es decir, que $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, \omega(B)) = 0$. Supongamos que esto no sea cierto, entonces existe $\epsilon > 0$ y podemos construir una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos con $t_n \to \infty$ tales que

$$dist(T(t_n)B, \omega(B)) > \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, la definición de semidistancia nos dice que para cada natural n se puede hallar $x_n \in B$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon, \tag{2.4}$$

pero, la compacidad asintótica de $T(\cdot)$ nos permite extraer una subsucesión de $(T(t_n)x_n)$ que converge a un punto x que obligatoriamente está en $\omega(B)$. Entonces, la continuidad de la función distancia de un punto a un conjunto y (2.4) nos garantizan que $d(x, \omega(B)) \geq \epsilon$, contradiciendo que $x \in \omega(B)$, estableciendo que $\omega(B)$ atrae a B, y completando la prueba del apartado (i).

(ii) De la definición de $\omega(B)$ se sigue que él mismo es cerrado y, por el apartado anterior, tenemos que atrae a B por $T(\cdot)$. Para probar que es el menor cerrado con estas propiedades, consideremos un conjunto cerrado F de X que atraiga a B por $T(\cdot)$, y mostremos que $\omega(B) \subset F$.

En efecto, en caso contrario, existirá un punto $x \in \omega(B)$ tal que $x \notin F$. Como F es un conjunto cerrado, se tiene que $d(x, F) > \delta > 0$, para algún δ positivo. Ahora, sean $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$, con $t_n \to \infty$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B, podemos encontrar $t^* > 0$ tal que

$$dist(T(t)B, F) < \delta \text{ siempre que } t \geq t^*.$$

Luego
$$d(T(t)z, F) < \delta \text{ para todo } z \in B \text{ y todo } t \geq t^*.$$

Pero, escogiendo $n(t^*) \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t^*$ siempre que $n \geq n(t^*)$, concluimos que para todo $n \geq n(t^*)$ se verifica
$$d(T(t_n)x_n, F) < \delta,$$
de donde, por la continuidad de la función $X \ni \omega \mapsto d(\omega, F) \in \mathbb{R}$, y después de pasar el límite en n, se deduce que $d(x, F) \leq \delta$, lo que contradice la elección de x y demuestra el apartado (ii).

(iii) Supongamos que exista un conjunto conexo C conteniendo a B y que sea atraído por $\omega(B)$, pero que $\omega(B)$ no sea conexo. Entonces, se puede escribir $\omega(B)$ como la unión de dos conjuntos no vacíos cerrados (en $\omega(B)$ y por lo tanto en X, ya que $\omega(B)$ es cerrado en X) y disjuntos F_1 y F_2. Se sigue del apartado (i) que F_1 y F_2 son compactos, luego $d(F_1, F_2) =: \delta > 0$, donde
$$d(F_1, F_2) := \text{ínf}\{d(a, b) : a \in F_1, b \in F_2\}.$$

Ahora, como $\omega(B)$ atrae a C, existe $t^* > 0$ tal que
$$T(t)C \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) \text{ para todo } t \geq t^*,$$
es decir,
$$\gamma^+_{t^*}(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) = \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1) \cup \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2).$$

Pero, $\gamma^+_{t^*}$ es la imagen del conjunto conexo $[t^*, \infty) \times C$ por la aplicación continua $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$, por lo tanto $\gamma^+_{t^*}(C)$ es conexo y como $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$ y $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2)$ son disjuntos, obligatoriamente $\gamma^+_{t^*}(C)$ sólo puede estar contenido en uno de estos dos conjuntos. Supongamos, por fijar ideas, que sea $\gamma^+_{t^*}(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$. Entonces,
$$F_2 \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma^+_{t^*}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t^*}(C)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)},$$
con lo que $d(F_2, F_1) \leq \frac{\delta}{2}$, que no puede ser cierto teniendo en cuenta la definición de δ, y permite concluir que $\omega(B)$ es conexo cuando $\omega(B)$ atrae a un conexo que contiene a B.

En el caso en que B sea conexo, el resultado se deduce de lo que hemos probado arriba simplemente escogiendo $C = B$, terminando la demostración del lema.

□

Se pueden demostrar, de manera análoga, propiedades similares a las presentadas en el lema anterior para los conjuntos α-límites de la soluciones globales acotadas de los semigrupos asintóticamente compactos. Lo que nos da el siguiente resultado:

Lema 2.2.8 *Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico X y $\xi : \mathbb{R} \to X$ una solución global acotada suya. Entonces, el conjunto α-límite de ξ, $\alpha(\xi)$, es no vacío, compacto, conexo, invariante y*

$$\lim_{t \to -\infty} d(\xi(t), \alpha(\xi)) = 0. \tag{2.5}$$

Demostración: Probaremos sólamente que $\alpha(\xi)$ es no vacío y que se tiene la convergencia de (2.5), ya que el resto de propiedades se demuestran de manera análoga a las del conjunto ω-límite.

En efecto, sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números positivos con $t_n \to -\infty$.

Escribiendo para cada natural n

$$\xi(t_n) = T(-t_n)\xi(2t_n),$$

como $-t_n \to \infty$, y $\{\xi(2t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión acotada de puntos de X, la compacidad asintótica asegura que $\{T(-t_n)\xi(2t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, o sea, $\{\xi(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente y, por definición, tal límite debe pertenecer a $\alpha(\xi)$, probando que $\alpha(\xi) \neq \emptyset$.

Por otra parte, supongamos que no se verifique la atracción hacia atrás en (2.5). Entonces, existirán $\epsilon > 0$ y una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números no positivos con $t_n \to -\infty$ de modo que

$$d(\xi(t_n), \alpha(\xi)) \geq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Pero, repitiendo el argumento que hemos usado para probar que $\alpha(\xi) \neq \emptyset$, se concluye que la solución $\{\xi(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente hacia un punto $x \in X$, y dicho punto deberá pertenecer a $\alpha(\xi)$, lo que contradice a (2.6) y, por lo tanto, se verifica (2.5).

□

Para finalizar la sección probaremos un resultado bastante útil sobre conjuntos ω-límites, y que vamos a usar en numerosas ocasiones.

Lema 2.2.9 *Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y $A \subset X$ cerrado e invariante por $T(\cdot)$. Entonces*

$$\omega(A) = A.$$

Demostración: En efecto, sea $x \in A$, entonces, por la invarianza de A, se tiene que para cada natural n existe un punto $x_n \in A$ tal que $x = T(n)x_n$ y, evidentemente, $x = \lim_{n\to\infty} T(n)x_n$, luego $x \in \omega(A)$ por el Lema 2.2.2, estableciendo la inclusión $A \subset \omega(A)$.

Por otro lado, sean $x \in \omega(A)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}_0^+$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tales que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Usando la invarianza de A vemos que $T(t_n)x_n \in A$ para todo natural n, de donde $x \in \overline{A} = A$, lo que significa que $\omega(A) \subset A$ y la demostración queda terminada.

□

Vamos ahora a establecer condiciones suficientes que garanticen la existencia del atractor global para un semigrupo dado en un espacio métrico.

Teorema 2.2.10 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X. Entonces $\{T(t) : t \geq 0\}$ posee atractor global $\mathcal{A}$ si y sólo si es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en este caso, si $\mathcal{B}$ denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de X, entonces el atractor viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B). \tag{2.7}$$

Demostración: Supongamos primero que exista el atractor global $\mathcal{A}$ para $\{T(t) : t \geq 0\}$. Entonces, como hemos visto antes $\{T(t) : t \geq 0\}$ es disipativo. Para ver que es también asintóticamente compacto, sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de puntos de X y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números no negativos con $t_n \to \infty$.

Por un lado, considerando el conjunto acotado $B := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} dist(T(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

y, en particular, para todo $x' \in B$

$$\lim_{n \to \infty} d(T(t_n)x', \mathcal{A}) \leq \lim_{n \to \infty} dist(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0. \tag{2.8}$$

Entonces, aplicando simplemente la definición de límite de sucesiones en (2.8), para cada $j \in \mathbb{N}$ se puede encontrar un punto $z_j \in \mathcal{A}$ de manera que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j) < \frac{1}{j}. \tag{2.9}$$

Ahora, como $\mathcal{A}$ es un conjunto compacto, la sucesión $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. Denotando dicha subsucesión de la misma manera, sea $x \in \mathcal{A}$ su límite. Entonces, por (2.9),

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, x) \leq d(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j) + d(z_j, x) < \frac{1}{j} + d(z_j, x),$$

es decir, $T(t_{n_j})x_{n_j} \to x$, cuando $j \to \infty$, probando así la compacidad asintótica de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es asintóticamente compacto y disipativo. Sea $\mathcal{A} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$ el conjunto definido en (2.7) y probemos que $\mathcal{A}$ es, efectivamente, el atractor global de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

En primer lugar, notemos que gracias al Lema 2.2.7, para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto $\omega(B)$ es no vacío, compacto, invariante y atrae a B por la acción de $T(\cdot)$. De ahí, vemos que $\mathcal{A}$ es invariante, por ser unión de conjuntos invariantes, y además, atrae a todos los acotados de X por medio de $T(\cdot)$. Luego el teorema quedará demostrado en cuanto probemos la compacidad de $\mathcal{A}$, lo que haremos usando la disipatividad de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

En efecto, sea $D \subset X$ un subconjunto acotado que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X por medio de $T(\cdot)$. Tomando la clausura de D, si hiciera falta, podemos suponer que D es cerrado, entonces su propiedad de absorción junto con la propiedad (ii) del Lema 2.2.7, nos dicen que $\omega(B) \subset D$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Luego $\mathcal{A} \subset D$ y por tanto $\overline{\mathcal{A}} \subset D$ lo que implica que $\omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D)$. Como $\mathcal{A}$ es invariante se tiene que $\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}})$ y así se puede concluir la cadena de inclusiones

$$\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D) \subset \mathcal{A},$$

y consecuentemente $\omega(D) = \mathcal{A}$, concluyendo la compacidad de $\mathcal{A}$, teniendo en cuenta el Lema 2.2.7.

□

Observación 1 *Observemos que, en realidad, bajo las condiciones del Teorema 2.2.10, hemos probado que $\mathcal{A} = \omega(D)$, donde D es un acotado absorbente para el semigrupo $T(t)$.*

2.3. Semigrupos gradientes

Vamos a presentar los semigrupos gradientes, que serán los tipos de semigrupos en los que basaremos nuestros resultados. La dinámica de estos semigrupos queda descrita por una función auxiliar, llamada función de Lyapunov, que posee propiedades muy particulares. Nuestro objetivo en esta sección será mostrar que este tipo de sistemas posee una dinámica que puede ser descrita de manera muy detallada.

Decimos que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio para el semigrupo $T(\cdot)$ si es un punto fijo para la aplicación $T(t)$ para cada $t \geq 0$; esto es, $T(t)x^* = x^*$ para cada $t \geq 0$. Denotamos por $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los puntos de equilibrio de $T(\cdot)$.

Definición 2.3.1 *Un semigrupo $T(\cdot)$ es llamado gradiente si posee una función de Lyapunov; esto es, si existe una función continua $V : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

(i) $t \mapsto V(T(t)x)$ es no creciente para cada $x \in X$; y

(ii) si x es tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para cada $t \geq 0$, entonces $x \in \mathcal{E}$.

En un sistema gradiente, el conjunto ω-límite de cada (punto) condición inicial debe ser un subconjunto del conjunto de equilibrios. Bajo ciertas hipótesis lo mismo ocurre con los conjuntos α-límites, que definimos a continuación (ver también la Definición 2.2.3):

Definición 2.3.2 *Dado $x \in X$, supongamos que existe una solución acotada hacia atrás $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$. Entonces el conjunto α-límite de x a traves de ϕ, $\alpha_\phi(x)$,* *se define como*

$$\alpha_\phi(x) = \{y \in X : \text{ existe } t_n \to -\infty \text{ tal que } \phi(t_n) \to y\}.$$

Ahora podemos probar que las trayectorias de los semigrupos gradientes son, hacia adelante y hacia atrás, asintóticas al conjunto de equilibrios, en el sentido siguiente:

Lema 2.3.3 *Si $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente entonces $\omega(x)$ es un subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Si $x \in X$ y existe una solución global acotada $\phi : (-\infty, 0] \to X$ con $\phi(0) = x$ entonces $\alpha_\phi(x)$ es un subconjunto de $\mathcal{E}$.*

Demostración:

Como la semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ a lo largo de $x \in X$ es precompacto, el conjunto $\{V(T(t)x) : t \geq 0\}$ es acotado inferiormente y, entonces, como la aplicación $t \mapsto V(T(t)x)$ es no creciente para cada $x \in X$, se sigue que $V(T(t)x)$ tiende a una constante c cuando $t \to +\infty$. También, por ser $\gamma^+(x)$ precompacto, se tiene que $\omega(x)$ es compacto e invariante. Como V es continua se deduce que $V(T(t)y) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \omega(x)$. Finalmente, por (ii) en la Definición 2.3.1, se deduce que $y \in \mathcal{E}$.

Usaremos un argumento diferente para demostrar que $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$ (podríamos usar el mismo argumento de $\omega(x)$ si asumiésemos que $\gamma^+(x)$ es acotado). Como el caso $\alpha_\phi(x) = \emptyset$ es trivial, supongamos que $\alpha_\phi(x)$ es no vacío, y veamos primero que V es constante a lo largo de $\alpha_\phi(x)$. Como $V(\phi(t))$ es creciente cuando $t \to -\infty$ y el conjunto $\{\phi(t) : t \leq 0\}$ es acotado, se deduce que $V_\phi := \lim_{t\to-\infty} V(\phi(t))$ existe. Al ser V continua, $V(\phi(t_n)) \to V_\phi$ para toda sucesión t_n tal que $\phi(t_n)$ sea convergente a x.

$\square$

Uno podría estar tentado de interpretar este lema como una garantía de que todas las trayectorias convergen hacia $\mathcal{E}$, pero esto presupone que $\omega(x)$ atrae a x. Como se vio en la sección anterior, necesitamos además algunas condiciones sobre $T(\cdot)$ para garantizarlo. Como esto también garantiza que $T(\cdot)$ tiene un atractor global, combinamos ambos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4 *Supongamos que $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente que es acotado, asintóticamente compacto, y tiene un conjunto de equilibrios acotado $\mathcal{E}$. Entonces $\omega(x)$ atrae a x para cada $x \in X$, y consecuentemente, $T(\cdot)$ tiene un atractor global $\mathcal{A}$. Además si $\mathcal{E}$ está formado por puntos aislados, entonces para cada $x \in X$ existe un $e \in \mathcal{E}$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} T(t)x = e. \tag{2.10}$$

Demostración:

Para cada $x \in X$, $\gamma^+(x)$ es acotado por hipótesis. Como $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, se deduce del Lema 2.2.7 que $\omega(x)$ atrae a x. Como $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ para cada $x \in X$ y $\mathcal{E}$ es acotado,

$T(\cdot)$ es puntualmente disipativo. El semigrupo $T(\cdot)$ satisface por lo tanto las hipótesis del Teorema 2.2.10, y posee atractor global.

Ahora, como $\omega(x)$ atrae a x, podemos apelar al Lema 2.2.7 que garantiza que $\omega(x)$ es conexo. Ya que $\omega(x)$ es un subconjunto de $\mathcal{E}$, si los puntos de $\mathcal{E}$ están aislados entonces $\omega(x)$ debe estar también compuesto por puntos aislados, de donde se deduce (2.10).

□

Podemos describir completamente la estructura del atractor en un sistema gradiente: es la variedad inestable del conjunto de equilibrios. Si Ξ es un conjunto invariante, entonces la variedad inestable de Ξ, $W^u(\Xi)$, está definida como

$$W^u(\Xi) := \{y \in X : \text{ existe una solución acotada hacia atrás} \tag{2.11}$$
$$\phi : (-\infty, 0] \to X \text{ tal que } \phi(0) = y \text{ y además } \lim_{t \to -\infty} dist(\phi(t), \Xi) = 0\}.$$

Obsérvese que si Ξ es un solo punto ξ (que es de equilibrio), entonces la condición de convergencia en (2.11) es simplemente $\lim_{t \to -\infty} \phi(t) = \xi$.

Este tipo de sistemas gradientes son esencialmente la única clase de sistemas autónomos para los cuales tenemos un conocimiento detallado de la estructura del atractor.

Teorema 2.3.5 *Si $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con atractor global $\mathcal{A}$ y un conjunto de equilibrios $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$. En particular, si $\mathcal{E}$ es finito, es decir $\mathcal{E} = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ entonces*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} W^u(e_i^*). \tag{2.12}$$

Demostración:

Si $x \in \mathcal{A}$, existe una solución global $\phi : \mathbb{R} \to X$ que pasa por x. Como $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es compacto, $\alpha_\phi(x)$ es no vacío. Se deduce que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$. Para probar la igualdad, obsérvese que si $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe entonces una solución global $\phi : \mathbb{R} \to X$ que pasa por x y $dist(\phi(t), \mathcal{E}) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$. Se deduce que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, en otras palabras, $x \in \mathcal{A}$.

Para probar que se verifica (2.12) cuando $\mathcal{E}$ es finito, es suficiente demostrar que $\alpha_\phi(x)$ es conexo, ya que entonces $\alpha_\phi(x)$ estaría formada por puntos, y se deduce entonces que para cada $x \in \mathcal{A}$ existe una trayectoria hacia atrás $\phi : (-\infty, 0] \to X$ con $\phi(t) \to e$ cuando $t \to -\infty$, para cierto $e \in \mathcal{E}$.

Para demostrar que $\alpha_\phi(x)$ es conexo, obsérvese que

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \le 0} \overline{\bigcup_{s \le t} \phi(s)}$$

Entonces $\alpha_\phi(x)$ es la intersección de una sucesión de conjuntos encajados compactos y conexos, y por tanto conexo.

□

Hemos visto ya que la estructura del atractor de un semigrupo gradiente autónomo puede ser completamente descrita: viene dada por la unión de todas las variedades inestable de sus equilibrios. Sin embargo, la clave de la definición de semigrupo gradiente es la existencia de una función de Lyapunov, y éste es un punto muy delicado.

Nuestro objetivo principal en este capítulo es caracterizar un semigrupo gradiente en términos de sus propiedades dinámicas, eliminando el requisito sobre la existencia de una función de Lyapunov, y extenderemos el análisis al caso en que haya una cantidad numerable de conjuntos de Morse.

Trataremos el caso no autónomo en el Capítulo 5, que supone una parte fundamental en el contenido de esta Memoria.

2.4. Propiedades dinámicas de los semigrupos gradientes

Recordemos que un semigrupo $T(\cdot)$ es gradiente si existe una función continua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que $V(T(t)x)$ es no creciente a lo largo de trayectorias y siempre que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geq 0$, x debe ser un punto de equilibrio.

Vamos a tratar una versión generalizada de un semigrupo gradiente, reemplazando el equilibrio por conjuntos invariantes más generales.

Definición 2.4.1 *Decimos que $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ es una familia de conjuntos invariantes aislados si existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(E_i) \cap \mathcal{O}_\delta(E_j) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$, y E_i es el subconjunto invariante maximal (con respecto a $T(\cdot)$) de $\mathcal{O}_\delta(E_i)$.*

Podemos enunciar ahora nuestra definición generalizada de un semigrupo gradiente.

Definición 2.4.2 *Decimos que un semigrupo $T(\cdot)$ con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia de conjuntos aislados invariantes $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ es un semigrupo gradiente con respecto a $\mathcal{J}$, o un $\mathcal{J}$-semigrupo gradiente, si existe una función continua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que*

(i) la aplicación $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x)$ es una función no creciente para cada $x \in X$;

(ii) V es constante en cada E_i; y

(iii) $V(T(t)x) = V(x)$ para cada $t \geq 0$ si y sólo si $x \in \bigcup_{i=1}^n E_i$.

Una función con las propiedades anteriores recibe el nombre de función de Lyapunov de $T(\cdot)$ con respecto a $\mathcal{J}$.

Para un sistema gradiente "clásico"(donde el conjunto $\mathcal{J}$ consiste en puntos de equilibrio aislados) ya hemos demostrado que cada trayectoria en el atractor es, a la vez, asintótica hacia algún equilibrio cuando el tiempo tiende a $+\infty$ y a $-\infty$ (la demostración es fácilmente adaptable al caso generalizado). Más aún, como V es no creciente a lo largo de trayectorias y solamente constante en elementos de $\mathcal{J}$, éstas no pueden formar una "estructura homoclina"(colecciones de órbitas produciendo un contorno cerrado) dentro del atractor; daremos una definición formal.

Definición 2.4.3 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo y sea $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ una familia de conjuntos invariantes aislados. Una estructura homoclina en $\mathcal{J}$ es un conjunto no trivial de órbitas heteroclinas entre elementos de $\mathcal{J}$ que forman un ciclo. Más fácilmente, es un conjunto de soluciones globales $\{\xi_i : \mathbb{R} \to X\}_{i=1}^k$ tal que*

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi_i(t), E_i) = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} dist(\xi_i(t), E_{i+1}) = 0,\ 1 \leq i \leq k,$$

donde $E_i \in \mathcal{J}$ y $E_1 = E_{k+1}$.

Vamos a dar la siguiente definición

Definición 2.4.4 *Un semigrupo $T(\cdot)$ es un gradiente dinámico con respecto a la familia $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ de conjuntos invariantes aislados, o $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, si satisface las dos propiedades siguientes:*

(G1) Dada una solución global $\xi : \mathbb{R} \to X$ en $\mathcal{A}$, existen $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ tales que

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), E_i) = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} dist(\xi(t), E_j) = 0.$$

(G2) La colección $\mathcal{J}$ no contiene estructuras homoclinas.

Dedicaremos las siguientes secciones a probar la siguiente caracterización dinámica de los semigrupos gradientes.

Teorema 2.4.5 *Sean $T(\cdot)$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y $\mathcal{J}$ una colección finita de conjuntos invariados aislados. Entonces $T(\cdot)$ es $\mathcal{J}$-gradiente si y sólo si es $\mathcal{J}$-gradiente dinámico.*

Para la prueba de este teorema necesitamos hablar de la descomposición de Morse de un atractor.

2.5. Descomposiciones de Morse

El "Teorema Fundamental de los Sistemas Dinámicos"(ver [65]) describe cualquier flujo en un espacio métrico como una descomposición de conjuntos compactos aislados y conexiones entre ellos. En la terminología de Conley [31], esto es llamado una "descomposición de Morse"de un conjunto compacto invariante (véase el Teorema 2.5.12), y esta idea ha sido aplicada en una variedad de contextos diferentes.

A continuación presentamos algunos resultados debidos a Aragao-Costa et al. [4] mostrando que las propiedades dinámicas (G1) y (G2) son suficientes para construir una función de Lyapunov. Consideraremos un semigrupo $T(\cdot)$ en un espacio métrico general (X, d), que tiene un atractor global $\mathcal{A}$ y una colección finita de conjuntos invariantes aislados $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$. Vamos a probar que $\mathcal{J}$ puede ser reordenado de forma que sea una descomposición de Morse para $\mathcal{A}$, y usando esta descomposición, posteriormente construiremos una función de Lyapunov en X para $T(\cdot)$, demostrando que $T(\cdot)$ es, de hecho, un sistema gradiente.

Ahora queremos introducir la noción de descomposición de Morse para un atractor $\mathcal{A}$ de un semigrupo $T(\cdot)$. Comenzaremos con la noción de pareja, o par, atractor-repulsor.

Definición 2.5.1 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$. Decimos que un subconjunto no vacío E de $\mathcal{A}$ es un atractor local si existe un $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(E)) = E$. El repulsor E^* asociado al atractor local E es el conjunto definido por*

$$E^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap E = \emptyset\}.$$

El par (E, E^*) es llamado una pareja atractor-repulsor para $T(\cdot)$.

Obsérvese que si E es un atractor local, entonces E^* es cerrado e invariante; y que E es un atractor local si y sólo si es compacto, invariante, y atrae a $\mathcal{O}_\epsilon(E)$ para cierto $\epsilon > 0$. Cualquier punto en $\mathcal{A} \setminus \{E \cup E^*\}$ debe ser atraído por E, y repelido por E^*.

Nótese que la definición anterior difiere ligeramente de la usual, ya que el atractor local está obligado a atraer a los entornos de E en X y no sólamente en $\mathcal{A}$ como en Conley [31] o Rybakowski [71]. Mostraremos que de hecho estas definiciones coinciden, pero primero probaremos un resultado parcial en esta dirección, a saber, que los conjuntos que son atractores locales en $\mathcal{A}$ son estables en el sentido de Lyapunov en todo el espacio de fases X.

Antes necesitamos el importante lema siguiente, que aquí presentamos en su versión para perturbación de procesos, ya que consideramos que sería de gran interés continuar en esta línea (ver Capítulo 6).

Lema 2.5.2 *Sea $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\tau \in (0,1]}$ una familia colectivamente asintóticamente compacta de semigrupos no lineales en un espacio métrico X convergiendo uniformemente sobre compactos a un semigrupo $\{T_0 : t \geq 0\}$. Sean también, $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(0, 1]$ con $\eta_k \to 0^+$ e $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos de la recta real de modo que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $I_k := [-t_k, \infty)$ para una cierta sucesión creciente de números positivos $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $t_k \to \infty$.*

Con estas condiciones, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada cualquiera de puntos de X, definiendo para cada natural k, $\xi_k : I_k \to X$ por $\xi_k(t) := T_0(t + t_k)x_k$, $t \in I_k$, entonces, existen $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ una solución global para $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ y una subsucesión de $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a ξ_0 sobre compactos de la recta.

Demostración:

En efecto, por la compacidad asintótica colectiva de la familia $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in (0,1]}$, sea $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ un subconjunto infinito de números naturales tal que la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k)x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

converge hacia un punto $z_0 \in X$ y definamos

$$\xi_0^{(0)}(t) := T_0(t)z_0 \text{ para } t \geq 0.$$

Ahora, consideremos, por la misma razón de antes, $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0$ un subconjunto infinito tal que $t_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}_1$ y la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge hacia un punto $z_1 \in X$. Definamos

$$\xi_0^{(1)}(t) := T_0(t+1)z_1 \text{ para } t \in [-1, 0].$$

Observemos, por el hecho de que si una sucesión converge todas las subsucesiones suyas convergen al mismo límite, que

$$\xi_0^{(1)}(0) = T_0(1)z_1 = \lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_1} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = \lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_0} T_{\eta_k}(t_k)x_k = z_0 = \xi_0^{(0)}(0).$$

Análogamente, sea $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ un subconjunto infinito tal que $t_k > 2$ para todo $k \in \mathbb{N}_2$ y la sucesión $(T_{\tau_k}(t_k - 2)x_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge hacia un punto $z_2 \in X$. Definamos

$$\xi_0^{(2)}(t) := T_0(t+2)z_2 \text{ para } t \in [-2, -1],$$

igual que antes, y notemos que

$$\xi_0^{(2)}(-1) = T_0(1)z_2 = \lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_2} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - 2)x_k = \lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_1} T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = z_1 = \xi_0^{(1)}(-1).$$

Repitiendo el argumento, obtendremos una cadena decreciente de conjuntos infinitos de números naturales

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0 \supset \mathbb{N}_1 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_n \supset \cdots$$

tal que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ existe un punto $z_n \in X$ tal que

$$z_n = \lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_n} T_{\eta_k}(t_k - n)x_k,$$

y definiendo la aplicación

$$\xi_0^{(n)}(t) := T_0(t+n)z_n \text{ para } t \in [-n, -n+1]$$

se tiene que

$$\xi_0^{(n)}(1-n) = \xi_0^{(n-1)}(1-n) \text{ siempre que } n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Expuestos estos hechos, definimos, por un lado, $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ poniendo

$$\begin{cases} \xi_0^{(0)}(t), t \geq 0 \\ \xi_0^{(n)}(t), t \in [-n, -n+1], n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.14}$$

y obtenemos de (2.13) que $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ está definida sin ambigüedades.

Afirmamos que $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ es solución global de $T_0(\cdot)$.

De hecho, dados $t, \tau \geq 0$, simplemente aplicando la definición de ξ_0, tenemos que

$$T_0(t)\xi_0(\tau) = T_0(t)T_0(\tau)z_0 = T_0(t+\tau)z_0 = \xi_0(\tau+t),$$

porque $\tau + t \geq 0$.

Ahora, dado $\tau < 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, -n+1]$, se sigue que $\xi_0(\tau) = T_0(\tau+n)z_n$. Si $t + \tau \geq 0$, entonces

$$T_0(t)\xi_0(\tau) = T_0(t)T_0(\tau+n)z_n = T_0((t+\tau)+n)z_n = T_0(t+\tau)T_0(n)z_n = T_0(t+\tau)z_0 = \xi_0(\tau+t),$$

pues, como es fácil ver, $T_0(n)z_n = z_0$.

Si $\tau + t < 0$, existe un natural $m \leq n$ de manera que $(\tau+t) \in [-m, -m+1]$ y así obtenemos, teniendo en cuenta que $T_0(n-m)z_n = z_m$,

$$T_0(t)\xi_0(\tau) = T_0(t)T_0(\tau+n)z_n = T_0((t+\tau+m)+(n-m))z_n =$$

$$T_0(t+\tau+m)T_0(n-m)z_n = T_0(t+\tau+m)z_m = \xi_0^{(m)}(\tau+t) = \xi_0(\tau+t),$$

con lo que $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ es solución global de $T_0(\cdot)$.

Por otra parte, definiendo $\mathbb{N}^*$ de modo que su n-ésimo elemento es es n-ésimo elemento del conjunto $\mathbb{N}_n$, en el orden creciente de los números naturales, vemos que $\mathbb{N}^*$ es un conjunto infinito y, por lo tanto, considerando la restricción $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, se sigue que $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una subsucesión de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre compactos de la recta hacia $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$.

En efecto, sean, en primer lugar, $0 \leq a < b$ cualesquiera dados. Entonces, la hipótesis de convergencia de los semigrupos nos dice que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in C_0} \sup_{t\in[a,b]} dist(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) = 0,$$

donde $C_0 := \{T_{\eta_k}(t+t_k)x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ y por esto, como para todo natural k se tiene que

$$dist(T_{\eta_k}(t+t_k)x_k, T_0(t)z_0) \leq dist(T_{\eta_k}(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k)+$$

$$dist(T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)z_0),$$

se sigue que

$$\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_0} \sup_{t\in[a,b]} dist(T_{\eta_k}(t+t_k)x_k, T_0(t)z_0) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_0} \sup_{t\in[a,b]} dist(\xi_k(t), \xi_0(t)) = 0.$$

Ahora, fijado un natural n, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in C_n} \sup_{t\in[-n,-n+1]} dist(T_{\eta_k})(t)x, T_0(t)x) = 0,$$

donde $C_n := \{T_{\eta_k}(t_k - n)x_k : k \in \mathbb{N}_n\}$ e igual que antes, como para todo $k \in \mathbb{N}_n$ y $t \in [-n, -n+1]$ se verifica que

$$dist(T_{\eta_k}(t + t_k)x_k, T_0(t + n)z_n) \leq dist(T_{\eta_k}(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k, T_0(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k)+$$

$$dist(T_0(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k, T_0(t + n)z_n),$$

vemos que

$$\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_n} \sup_{t\in[-n,-n+1]} dist(T_{\eta_k}(t + t_k)x_k, T_0(t + n)z_n) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}_n} \sup_{t\in[-n,-n+1]} dist(\xi_k(t), \xi_0(t)) = 0.$$

Finalmente, el caso general se sigue de los considerados anteriormente, pues todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ está contenido en una cantidad finita de intervalos de la manera que hemos considerado arriba y observando que, para cada natural n la sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ es, a partir de su n-ésimo término, una subsucesión de $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

□

Lema 2.5.3 *Si E es un conjunto compacto invariante por $T(\cdot)$ y existe un $\epsilon > 0$ tal que E atrae a $\mathcal{O}_\epsilon(E) \cap \mathcal{A}$, entonces para cualquier $\delta > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que*

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset \mathcal{O}_\delta(E) \tag{2.15}$$

Demostración:

Dado δ con $0 < \delta < \epsilon$, supongamos que no existe $\delta' > 0$ tal que se verifica (2.15). Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \to x \in E$, y una sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \to \infty$ tal que $dist(T(t_n)x_n, E) = \delta$ y $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(E)$, para cada $t \in [0, t_n]$. Puesto que $T(\cdot)$ tiene un atractor global, no es difícil ver que, gracias al Lema 2.5.2 para $T_{\eta_k} \equiv T_0$, para cada k, existe una solución global $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\xi_n : [-t_n, \infty) \to X$ dada por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$ satisfaciendo que $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Claramente $dist(\xi(0), E) = \delta$, mientras que

$$\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(E)} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(E) \cap \mathcal{A} \text{ para cada } t \leq 0.$$

Se deduce que E no puede atraer a $\mathcal{O}_\epsilon(E) \cap \mathcal{A}$, lo que es una contradicción.

□

Las consecuencias del siguiente lema son extremadamente útiles.

Lema 2.5.4 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X con atractor global $\mathcal{A}$. Si E es un atractor local para $T(\cdot)$ restringido a $\mathcal{A}$ y K es un subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap E^* = \emptyset$, entonces E atrae a K.*

Demostración:

Sea K un subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap E^* = \emptyset$. Si E no atrae a K, existe entonces $\delta > 0$, $\{t_n\}$ con $t_n \to \infty$, $x \in K$, y $\{x_n\} \in K$ con $x_n \to x$ tal que $dist(T(t_n)x_n, E) \geq \delta$. Usando el Lema 2.5.3 existe δ' con $0 < \delta' < \delta$ tal que $dist(T(t)x_n, E) \geq \delta'$ para todo $t \in [0, t_n]$. Esto implica que $dist(T(t)x, E) \geq \delta'$ para todo $t \geq 0$ y, consecuentemente, que $\omega(x) \cap E = \emptyset$.

□

Vamos ahora a deducir que un atractor local en $\mathcal{A}$ es un atractor local en X.

Corolario 2.5.5 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X con atractor global $\mathcal{A}$, y E un atractor local para $T(\cdot)$ restringido a $\mathcal{A}$. Entonces E es un atractor local para $T(\cdot)$ en X.*

Demostración:

Usando el Lema 2.5.3, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \cap E^* = \emptyset$ para todo $\delta' < \delta$. Por la invarianza de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(E))$ y del hecho de que E atrae subconjuntos compactos de $\mathcal{A}$ que no intersectan con E^*, se deduce que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset E$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(E))$ atrae a $\mathcal{O}_{\delta'}(E)$, E atrae a $\mathcal{O}_{\delta'}(E)$ como se dijo.

□

Un segundo corolario nos proporciona una propiedad fundamental del par atractor-repulsor.

Corolario 2.5.6 *Sea (E, E^*) un par atractor-repulsor, y $\xi : \mathbb{R} \to X$ una solución global de $T(\cdot)$. Si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(E^*) \text{ para cada } t \leq 0 \text{ y } \mathcal{O}_\delta(E^*) \cap E = \emptyset$$

entonces

$$dist(\xi(t), E^*) \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty.$$

Demostración:

Si la conclusión fuese falsa entonces existiría un $\delta' > 0$ y una sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \to \infty$ tal que $dist(\xi(-t_n), E^*) \geq \delta'$. Esto contradice el hecho de que E debe atraer a $K = \{z \in \mathcal{A} : dist(z, E^*) \geq \delta'\}$.

□

Podemos ahora describir las dinámicas asintóticas asociadas al par atractor-repulsor.

Proposición 2.5.7 *Sea (E, E^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$. Si $\xi : \mathbb{R} \to X$ es una solución global acotada para $T(\cdot)$ con $\xi(0) \notin E \cup E^*$, entonces*

$$dist(\xi(t), E) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \text{ y } dist(\xi(t), E^*) \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty.$$

Más aún, si $x \in X \backslash \mathcal{A}$ entonces $dist(T(t)x, E \cup E^*) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Como consecuencia, $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente dinámico con respecto a $\{E, E^*\}$.

Demostración:

Como $\xi(0) \notin E^*$, $\omega(x) \cap E$ es no vacío y del hecho de que E es un atractor local se deduce que $dist(\xi(t), E) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Ahora supongamos que $\xi(t)$ no converge a E^* cuando $t \to -\infty$; consideraremos dos casos, y veremos que cada uno nos lleva a una contradicción. Si $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap E^* = \emptyset$, entonces $\xi(\mathbb{R})$ es invariante, contiene a un punto que no está en E, pero es atraido por E (Lema 2.5.4) lo cual es una contradicción. Por otro lado, si $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap E^*$ es no vacío, existe un $\delta > 0$ sucesiones $\{t_n\}$, $\{\tau_n\}$, ambas tendiendo a infinito, tal que

$$dist(\xi(-t_n), E^*) = \delta,$$

$$\xi(-t_n + \tau_n) \to z \in E^* \text{ cuando } n \to \infty, \text{ y}$$

$$dist(\xi(-t_n + t), E) \leq \delta \text{ para todo } 0 \leq t \leq \tau_n.$$

De esto obtenemos una solución global $\zeta : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $dist(\zeta(t), E^*) \leq \delta$ para todo $t \geq 0$. En este caso $\omega(\zeta(0)) \notin E$ lo que implica que $\zeta(0) \in E^*$, llegando a una contradicción.

Ahora para $x \in X \setminus \mathcal{A}$ probaremos que $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)x, E \cup E^*) = 0$. Si $\overline{\gamma^+(x)} \cap E \neq \emptyset$ entonces $dist(T(t)x, E) \to 0$. De otro modo, $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(E) = \emptyset$ para algún $\delta > 0$ y en este caso afirmamos que $dist(T(t)x, E^*) \to 0$. Si no, existe un $\epsilon > 0$ y una sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \to \infty$ tal que $dist(T(t_n)x, E^*) \geq \epsilon$. Considerando la sucesión de funciones $\xi_n : [t_n, \infty) \to X$ definidas por $\xi_n(t) = T(t + t_n)x$ para $t \geq -t_n$, construimos una solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $dist(\xi(0), E^*) \geq \epsilon$ y $dist(\xi(t), E) \geq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\omega(\xi(0)) \cap E = \emptyset$ y $\xi(0) \notin E^*$, lo que es una contradicción.

□

Vamos a introducir ahora la noción de descomposición de Morse de un atractor.

Definición 2.5.8 ***(Descomposición de Morse).*** *Una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$ es una n-upla ordenada*

$$\mathcal{J} := (E_1, E_2, \ldots, E_n)$$

de conjuntos invariantes aislados, con la propiedad de que para cada $x \in \mathcal{A}$, existen i, j con $i \geq j$ tal que

$$\alpha(x) \in E_i \text{ y } \omega(x) \in E_j.$$

La siguiente proposición da una situación en la que podemos obtener fácilmente una descomposición de Morse. Después veremos que dada una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$, esta construcción puede ser invertida.

Lema 2.5.9 *Dada una familia creciente*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$$

de $n+1$ conjuntos atractores locales, para cada $j = 1, \cdots, n$ definimos

$$E_j := A_j \cap A^*_{j-1},$$

donde A^*_j es el repulsor asociado a A_j: Entonces $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$.

Demostración:

Obsérvese primero que como A_j y A^*_{j-1} son invariantes, también lo es cada E_j. Ahora tómese $x \in \mathcal{A}$, y sea i el menor elemento de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_i$ pero $x \notin A_{i-1}$. Entonces si $x \in A^*_{i-1}$, $x \in E_i$, y como E_i es invariante, $\alpha(x)$, $\omega(x) \in E_i$.

Supongamos entonces que $x \notin A^*_{i-1}$. Entonces $\alpha(x) \in A^*_{i-1}$ usando la Proposición 2.5.7, y como A_i es invariante se deduce que $\alpha(x) \in A_i \cap A^*_{i-1} = E_i$. Ahora, como $x \notin A^*_{i-1}$, $\omega(x) \in A_{i-1}$. Ahora, si $\omega(x) \in A^*_{i-2}$ entonces $\omega(x) \in E_{i-1}$; y si $\omega(x) \notin A^*_{i-2}$ se tiene que (por la invarianza de $\omega(x)$) $\omega(x) \in A_{i-2}$. Continuando de esta forma, llegará un momento en que o $\omega(x) \in E_j$ con $j < i$ o $\omega(x) \in A_1 = E_1$, y claramente $1 \leq i$.

□

A continuación describiremos la construcción de una descomposición de Morse del atractor de un semigrupo $T(\cdot)$ que es $\mathcal{J}$-gradiente dinámico. El siguiente resultado jugará un papel fundamental.

Lema 2.5.10 *Sea $T(\cdot)$ un $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, con $\mathcal{J} = \{E_1 \cdots, E_n\}$. Entonces, existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que E_k es un atractor local para $T(\cdot)$. En particular, $W^u(E_k) = E_k$.*

Demostración:

Usando el Lema 2.5.4, es suficiente demostrar que existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que E_k es un atractor local para $T(\cdot)$ restringido a $\mathcal{A}$. Si no hubiese un atractor local en $\mathcal{J}$ entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe una solución global $\xi_i : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $dist(\xi_i(t), E_i) \to 0$ cuando $t \to -\infty$. Como $\xi_i(t)$ debe converger a un único elemento de $\mathcal{J}$ cuando $t \to +\infty$, esto produce una estructura homoclina lo que es una contradicción.

□

La siguiente proposición muestra que en un sistema gradiente dinámico uno puede reordenar la colección de conjuntos invariantes aislados de manera que formen una descomposición de Morse del atractor.

Proposición 2.5.11 *Si $T(\cdot)$ es un gradiente dinámico con respecto a $\mathcal{J} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, entonces estos conjuntos pueden ser reordenados de manera que formen una descomposición de Morse del atractor.*

Demostración:

Como $T(\cdot)$ es un $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, cualquier solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ satisface

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), E_l) = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} dist(\xi(t), E_k) = 0 \tag{2.16}$$

para ciertos $l, k \in \{1, \ldots, n\}$. Necesitamos reordenar los conjuntos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de forma que si se verifica (2.16) se deduzca que $l \geq k$.

Si (después de una posible reordenación) E_1 es un atractor local para $T(\cdot)$ y

$$E_1^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap E_1 = \emptyset\},$$

entonces, para cada $i > 1$, E_i está contenido en E_1^*; y para cualquier solución global $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ con $\phi(0) \notin \mathcal{A} \setminus \{E_1 \cup E_1^*\}$

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\phi(t), E_1^*) = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} dist(\phi(t), E_1) = 0.$$

Si consideramos ahora la restricción $T_1(\cdot)$ de $T(\cdot)$ a E_1^* entonces $T_1(\cdot)$ es un $\mathcal{J}$-semigrupo dinámico en E_1^* con conjuntos invariantes aislados $\{E_2, \cdots, E_n\}$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que E_2 es un atractor local para el semigrupo $T_1(\cdot)$ en E_1^*. Si E_2^* es el repulsor asociado al conjunto invariante aislado E_2 para $T_1(\cdot)$, en E_1^* podemos proceder de manera similar y considerar la restricción $T_2(\cdot)$ del semigrupo $T_1(\cdot)$ a E_2^* y $T_2(\cdot)$ es entonces un $\mathcal{J}$-semigrupo dinámico en E_2^* con conjuntos invariantes aislados asociados $\{E_3, \cdots, E_n\}$.

Procediendo de esta forma hasta acabar con todos los conjuntos invariantes aislados obtenemos una reordenación de $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de forma que E_j es un atractor local para la restricción de $T(\cdot)$ a E_{j-1}^* (el repulsor asociado a E_{j-1} en E_{j-2}^*); tomaremos por convenio que $E_0^* = \mathcal{A}$.

Veremos ahora que esta construcción garantiza que si ξ es una solución global que satisface (2.16) entonces $l \geq k$. De la convergencia cuando $t \to +\infty$ de $\xi(\cdot)$ a E_k, necesariamente $\xi(0) \in E_{k-1}^*$. Pero E_{k-1}^* es invariante, y contiene solamente los conjuntos $\{E_k, E_{k+1}, \ldots, E_n\}$, de lo que se deduce inmediatamente que $l \geq k$.

□

Vamos a probar un recíproco del Lema 2.5.9, y mostrar que dada una descomposición de Morse $\{E_1, \ldots, E_n\}$, se puede encontrar una sucesión de atractores locales tal que $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Teorema 2.5.12 *Sea $T(\cdot)$ un $\mathcal{J}$-semigrupo dinámico con $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$, ordenados de manera que forman una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$. Definimos $A_0 = \emptyset$, y para $j = 1, 2 \ldots, n$*

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{j} W^u(E_i) \tag{2.17}$$

(obsérvese que $W^u(E_1) = E_1$). Entonces cada A_j es un atractor local para $T(\cdot)$ en X,

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = \mathcal{A}, \tag{2.18}$$

y

$$E_j = A_j \cap A^*_{j-1}.$$

Demostración:

Para demostar que A_j es un atractor local en X, es suficiente (debido al Lema 2.5.4) probar que A_j es un atractor local para $T(\cdot)$ restringido a $\mathcal{A}$. Para este fin tomaremos $d > 0$ tal que

$$\mathcal{O}_d(\cup_{i=1}^{j} E_i) \cap (\cup_{i=j+1}^{n} E_i) = \emptyset; \tag{2.19}$$

entonces dado $\delta < d$ existe un $\delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$. De hecho, si este no fuese el caso existiría una sucesión $\{x_k\} \in \mathcal{A} \setminus A_j$ con $dist(x_k, A_j) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y una solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $dist(\xi(t), A_j) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$, lo que contradice el hecho de que $\xi(0) \notin A_j$, ya que entonces $\xi(0) \in W^u(E_i)$ para algun $i > j$, y esto no es posible por (2.19) y nuestra elección de δ.

Ahora, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$ atrae claramente a $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)$ ya que A_j es invariante. Por otro lado, como $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$, se deduce que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$, y como $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)$ es invariante, está contenido en A_j, probando que A_j es un atractor local.

Para probar que $E_j = A_j \cap A^*_{j-1}$, obsérvese que si $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$ entonces la solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ a través de z debe satisfacer

$$\lim_{t \to -\infty} dist\left(\xi(t), \bigcup_{i=1}^{j} E_i\right) = 0 \text{ y } \lim_{t \to +\infty} dist\left(\xi(t), \bigcup_{i=j}^{n} E_i\right) = 0.$$

Como consecuencia de (2.16) se deduce que $z \in E_j$, lo que demuestra que $A_j \cap A^*_{j-1} \subset E_j$. La otra inclusión es inmediata a partir de la definición de A_j y A^*_{j-1}

□

Terminaremos esta sección con un resultado que relaciona los conjuntos aislados invariantes de $\mathcal{J}$ con los atractores locales $\{A_j\}$. Esto será muy útil en la parte final de nuestra prueba de la existencia de una función de Lyapunov para los semigrupos $\mathcal{J}$-gradientes dinámicos.

Proposición 2.5.13 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo $\mathcal{J}$-gradiente dinámico con $\mathcal{J} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ que forma una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$. Entonces, con $\{A_j\}_{j=0}^n$ definidas como en el Teorema 2.5.12,*

$$\bigcap_{j=1}^{n} (A_j \cup A^*_j) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j.$$

Demostración:

Si $z \in \cup_{j=1}^n E_j$, sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $z \in E_k = A_k \cap A^*_{k-1}$. Entonces $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n$ y $z \in A^*_{k-1} \subset A^*_{k-2} \subset \cdots \subset A^*_0$. Por lo tanto,

$$z \in (\bigcap_{j=k}^{n} A_j) \cap (\bigcap_{j=1}^{k-1} A^*_j) \subset [\bigcap_{j=k}^{n} (A_j \cup A^*_j)] \cap [\bigcap_{j=0}^{k-1} (A_j \cup A^*_j)] = \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A^*_j).$$

Si $z \in \cap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$, sea $I := \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ y $J := \{j_1, j_2, \cdots, j_l\}$ tal que $I \cup J = \{0, 1, \ldots, n\}$ con $I \cap J = \emptyset$, $z \in A_i$ para todo $i \in I$, y $z \in A_j^*$ para todo $j \in J$. Claramente, si $i := \min I$, necesariamente $I = \{i, i+1, i+2, \ldots, n\}$ y $J = \{0, 1, 2, \ldots, i-1\}$. Consecuentemente, $z \in A_i$ y $z \in A_{i-1}^*$, donde $z \in A_i \cap A_{i-1}^* = E_i$.

□

2.6. Descomposición de Morse y función de Lyapunov

En esta sección mostraremos que la existencia de una descomposición de Morse puede ser usada para construir una función de Lyapunov, en particular probando que un $\mathcal{J}$-gradiente dinámico es realmente un sistema gradiente. La demostración está inspirada en el trabajo de Conley [31] (véase también Rybakowski [71]).

Primero probaremos un resultado que asegura que cualquier semigrupo con un atractor global $\mathcal{A}$ es un $\mathcal{A}$-gradiente, esto es, que existe una función de Lyapunov "respecto de $\mathcal{A}$".

Lema 2.6.1 *Si $T(\cdot)$ es un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$, la aplicación $h : X \to \mathbb{R}$ definida para cada $z \in X$ por*

$$h(z) := \sup_{t \geq 0} dist(T(t)z, \mathcal{A}),$$

es continua, no creciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$, y $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$. Además, $h(T(t)x) = h(x)$ para todo $t \geq 0$ si y sólo si $x \in \mathcal{A}$.

Demostración:

Primero demostraremos que h es continua. Claramente $h(z) = 0$ si $z \in \mathcal{A}$; dado $\epsilon > 0$, se puede elegir ϵ' con $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\epsilon'}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$, lo que demuestra la continuidad de h en $\mathcal{A}$. Ahora fijemos $z_0 \in X \setminus \mathcal{A}$, tal que $h(z_0) > 0$, y consideremos $\mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para cierto μ con $0 < \mu < h(z_0)$. Como la función $x \mapsto dist(x, \mathcal{A})$ es continua, podemos encontrar un entorno acotado U de z_0 tal que $h(z) > \mu$ para todo $z \in U$. Finalmente, sea $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(t)U) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para todo $t \geq \tau$. Entonces

$$h(z) = \sup_{0 \leq s \leq \tau} dist(T(s)z, \mathcal{A})$$

para cada $z \in U$, y por las propiedades de continuidad de $T(\cdot)$ se deduce que h es continua en z.

Para ver que h es no creciente a lo largo de trayectorias, obsérvese que, para $z \in X$ y $t_1 > 0$,

$$\begin{aligned} h(T(t_1)z) &= \sup_{t \geq 0} dist(T(t)T(t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} dist(T(t+t_1)z, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t \geq t_1} dist(T(t)z, \mathcal{A}) \leq \sup_{t \geq 0} dist(T(t)z, \mathcal{A}) = h(z) \end{aligned}$$

Si $z \in \mathcal{A}$ entonces $h(T(t)z) = 0$ para todo $t \geq 0$. Si $h(T(t)z) = c \geq 0$ para todo $t \geq 0$ entonces debe ser $c = 0$ (si $c > 0$ entonces $dist(T(t)z, \mathcal{A}) \nrightarrow 0$, una contradicción) de donde $z \in \mathcal{A}$.

□

Vamos a construir ahora una función de Lyapunov un poco más sofisticada que respete un par atractor-repulsor dado (en un sentido apropiado).

Proposición 2.6.2 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico (X, d) con atractor global $\mathcal{A}$ y sea (E, E^*) una pareja atractor-repulsor en $\mathcal{A}$. Entonces, existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ tal que*

(i) $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en X,

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ es no creciente a través de trayectorias,

(iii) $f^{-1}(0) = E$ y $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = E^*$, y

(iv) dado $z \in X$, si $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$, entonces $z \in E \cup E^*$.

Demostración:

Obsérvese primero que E y E^* son subconjuntos cerrados disjuntos de $\mathcal{A}$ y, como $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de X, E y E^* son subconjuntos cerrados disjuntos de X. Con el convenio de que $dist(z, \emptyset) = 1$ para cada $z \in X$, definimos la función $l : X \to [0, 1]$ por

$$l(z) := \frac{dist(z, E)}{dist(z, E) + dist(z, E^*)}, \; z \in X$$

(esto es una función de Uryshon canónica si E y E^* son no vacíos). Claramente l está bien definida y es uniformemente continua en X, ya que para cada $z, w \in X$

$$|l(z) - l(w)| \leq \frac{2}{d_0} d(z, w)$$

donde $d_0 := \inf_{e \in E} \inf_{e^* \in E^*} d(e, e^*) > 0$. Además, $l^{-1}(0) = E$, y $l^{-1}(1) = E^*$.

Usaremos una construcción similar a la del Lema 2.6.1, reemplazando $dist(z, \mathcal{A})$ por $l(z)$: definiendo $k : X \to [0, 1]$

$$k(z) := \sup_{t \geq 0} l(T(t)z),$$

que $k(z) \in [0, 1]$ es inmediato del hecho de que $l(X) = [0, 1]$. Mostraremos ahora que esta función $k : X \to \mathbb{R}$ satisface todas las propiedades $(i) - (iv)$ del enunciado del teorema, excepto que (iv) se verifica sólo si $z \in \mathcal{A}$.

(i) Veremos primero que $k : X \to \mathbb{R}$ es continua. Si $z_0 \in E^*$, entonces para todo $z \in X$

$$|k(z) - k(z_0)| = 1 - k(z) \leq 1 - l(z),$$

ya que $l(z) \leq k(z) \leq 1$. Junto con la continuidad de l, esto garantiza la continuidad de k en z_0. Si $z_0 \in E$, entonces $l(z_0) = 0$. Usando la continuidad de l, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(E)) \subset [0, \epsilon)$. El Lema 2.5.3 implica que existe un $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset \mathcal{O}_\delta(E)$, de donde concluimos que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset [0, \epsilon)$ y por lo tanto k es continua en z_0.

Finalmente, si $z_0 \in X \setminus (E \cup E^*)$, entonces la Proposición 2.5.7 garantiza que, o bien

$$\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z_0, E) = 0, \text{ o bien } \lim_{t\to\infty} dist(T(t)z_0, E^*) = 0.$$

Si $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z_0, E^*) = 0$, entonces $k(z_0) = 1$. Dado $\epsilon > 0$, por la continuidad de l existe un entorno abierto W de E^* en X tal que $l(W) \subset (1-\epsilon, 1]$. Si $t_0 > 0$ es tal que $T(t_0)z_0 \in W$, por la continuidad de $T(t_0) : X \to X$, existe un entorno U de z_0 tal que $T(t_0)U \subset W$, de donde se deduce que $1 - \epsilon < k(z) \leq 1$ para todo $z \in U$ (ya que $T(t_0)z \in W$ y entonces $1 - \epsilon < l(T(t_0)z) \leq k(z)$). Luego k es continua en z_0.

Alternativamente, si $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z_0, E) = 0$, entonces $l(z_0) > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(E)) \subset [0, l(z_0)/2)$ y, usando el Lema 2.5.3, existe un $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_\delta(E)) \subset \mathcal{O}_\delta(E)$. De esto, existe un $t_0 > 0$ con la propiedad de que $T(t)z_0 \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para todo $t \geq t_0$. Por la continuidad de $T(t_0) : X \to X$, existe un entorno U_1 de z_0 en X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(E)$. Entonces, para todo $z \in U_1$, se deduce que $T(t_0)z \in \mathcal{O}_{\delta'}(E)$ y por lo tanto $T(t)z \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para todo $t \geq t_0$. Finalmente, por la continuidad de l, existe un entorno U_2 de z_0 en X tal que $l(z) > l(z_0)/2$ para todo $z \in U_2$. Por lo tanto, para cada $z \in U_1 \cap U_2$, $K(z) = \sup_{0\leq t\leq t_0} l(T(t)z)$, y el argumento usado en el Lema 2.6.1 nos muestra ahora que k es continua en z_0.

(ii) Demostrar que $t \mapsto k(T(t)z)$ es no creciente para cada $z \in X$ es igualmente sencillo, ya que si $0 \leq t_1 \leq t_2$ entonces

$$\begin{aligned} k(T(t_1)z) &= \sup_{t\geq 0} l(T(t)T(t_1)z) = \sup_{t\geq 0} l(T(t+t_1)z) = \sup_{t\geq t_1} l(T(t)z) \\ &\geq \sup_{t\geq t_2} l(T(t)z) = \sup_{t\geq 0} l(T(t+t_2)z) = k(T(t_2)z). \end{aligned}$$

(iii) Es claro de la definición de k y de la invarianza de E y E^*, que $k(E) = \{0\}$ y $k(E^*) = \{1\}$. Ahora, si $z \in X$ es tal que $k(z) = 0$, entonces $l(T(t)z) = 0$ para todo $t \geq 0$, en particular, $0 = l(T(0)z) = l(z)$, y así $z \in E$; esto es, $k^{-1}(0) \subset E$ lo que muestra que $k^{-1}(0) = E$. Por otro lado, si $z \in \mathcal{A}$ es tal que $k(z) = 1$ y $z \notin E^*$, entonces $\omega(z) \subset E$. Por la continuidad de l y el hecho de que $\omega(z)$ atrae a z, se deduce que $\lim_{t\to\infty} l(T(t)z) = 0$. Por lo tanto, existe un $t_0 > 0$ tal que $1 = k(z) = \sup_{0\leq t\leq t_0} l(T(t)z)$. Esto implica la existencia de un $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')z) = 1$; esto es, $T(t')z \in E^*$. Consecuentemente $\omega(z) = \omega(T(t')z) \subset E^*$, lo que contradice el hecho de que $\omega(z) \subset E$ y entonces, si $k(z) = 1$ para algún $z \in \mathcal{A}$ debe ser que $z \in E^*$. De esto concluimos que $k^{-1} \cap \mathcal{A} \subset E^*$ y entonces $k^{-1} \cap \mathcal{A} = E^*$.

(iv) Demostraremos ahora que si $z \in \mathcal{A}$ y $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$ entonces $z \in E \cup E^*$. Si $z \notin E \cup E^*$, $\omega(z) \subset E$ (obsérvese que $z \in \mathcal{A}$) y de la definición de k y del hecho de que $\omega(z)$ atraiga a z tenemos que $k(z) = \lim_{t\to\infty} k(T(t)z) = 0$. Ya que $k^{-1}(0) = E$, z debe pertenecer a E lo que es una contradicción.

Vamos a hacer un ajuste final a k con el objeto de asegurar que la propiedad (iv) se verifica para todo $z \in X$, y no sólo para $z \in \mathcal{A}$: tomamos $h : X \to \mathbb{R}$ la función del Lema 2.6.1, y definamos $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(z) := k(z) + h(z), \;\; z \in X.$$

Es claro que f satisface (i) y (ii) (ya que k y h lo hacen). Para demostrar (iii), es claro que $f(E) = \{0\}$, y si $f(z) = 0$ para algún $z \in X$, entonces $h(z) = k(z) = 0$ y tendremos que $z \in E$, esto es $f^{-1}(0) = E$. Además, como $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$ tenemos que $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = E^*$.

Terminaremos el argumento probando (iv). Tomemos $z \in X$ con $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$. Si $z \in \mathcal{A}$ entonces $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$, y ya hemos visto que esto implica que $z \in E \cup E^*$. Si $z \in X \setminus \mathcal{A}$ entonces o bien $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z, E^*) = 0$ o bien $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z, E) = 0$, y ambos casos llevan a contradicción. Si $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z, E) = 0$ entonces

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} f(T(t)z) = \lim_{t\to\infty} k(T(t)z) + \lim_{t\to\infty} h(T(t)z) = 0 + 0 = 0, \tag{2.20}$$

lo que implica que $z \in E \subset \mathcal{A}$, y esto contradice el hecho de que $z \in X \setminus \mathcal{A}$. De forma similar, si $\lim_{t\to\infty} f(T(t)z, E^*) = 0$ entonces

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} f(T(t)z) = \lim_{t\to\infty} k(T(t)z) + \lim_{t\to\infty} h(T(t)z) = 1 + 0 = 1.$$

Esto nos da una contradicción, ya que $k(z) \geq \lim_{t\to\infty} k(T(t)) \geq 1$ implica que $k(z) = 1$ y por lo tanto $h(z) = 0$; pero $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$, y $z \notin \mathcal{A}$

$\square$

Es fácil construir ahora una función de Lyapunov para un semigrupo $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, mostrando que es, de hecho, un semigrupo gradiente.

Teorema 2.6.3 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ que es $\mathcal{J}$-gradiente dinámico con la familia de conjuntos invariantes aislados $\mathcal{J} = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Entonces, $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente generalizado respecto a $\mathcal{J}$, esto es, existe una función de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo todas las propiedades de la Definición 2.4.2, que además puede ser elegido de forma que $V(E_k) = k - 1$, $k = 1, \ldots, n$.*

Demostración:

Supongamos que $T(\cdot)$ es un gradiente dinámico respecto a $\mathcal{J}$, que ha sido reordenado de manera que forme una descomposición de Morse para $\mathcal{A}$. Sea $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$ una sucesión de atractores locales definidos como en (2.18) y $\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathcal{A}$ los correspondientes repulsores, de forma que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, tenemos que $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Sea $h : X \to \mathbb{R}$ la función definida en el Lema 2.6.1 y sea $k_j : X \to \mathbb{R}$ la función construida en la Proposición 2.6.2 para la pareja atractor-repulsor (A_j, A_j^*), $j = 1, \ldots, n$. Entonces la función continua $V : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(z) := h(z) + \sum_{j=1}^{n} k_j(z),\ z \in X$$

es la función de Lyapunov requerida. Comprobaremos las propiedades $(i) - (iii)$ de la Definición 2.4.2.

(i) V es no creciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$, ya que h y k_j, $1 \leq j \leq n$ lo son.

(ii) Demostraremos que $V(E_k) = k - 1$. Si $z \in E_k = A_k \cap A_{k-1}^*$ entonces

$$z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A} \text{ y } z \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathcal{A}.$$

Por lo tanto $k_j(z) = 0$ si $k \leq j \leq n$ y $k_j(z) = 1$ si $1 \leq j \leq k-1$, donde

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n} k_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} k_j(z) + \sum_{j=k}^{n} k_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} 1 + \sum_{j=k}^{n} 0 = k - 1.$$

(iii) Finalmente demostraremos que si $z \in X$ es tal que $V(T(t)z) = V(z)$ para todo $t \geq 0$, entonces $z \in \cup_j E_j$. Usando que $h : X \to \mathbb{R}$ y cada k_j, $1 \leq j \leq n$, es no creciente a través de soluciones de $T(\cdot)$, concluimos que para todo $t \geq 0$ y $j = 1, \ldots, n$

$$f_j(T(t)z) = k_j(T(t)z) + h(T(t)z) = k_j(z) + h(z) = f_j(z).$$

De una parte, de (iv) de la Proposición 2.6.2 se deduce que $z \in (A_j \cup A_j^*)$, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, esto es, $z \in \cap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$. De la Proposición 2.5.13

$$\bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j,$$

y por tanto $z \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

$\square$

De esta forma podemos concluir que el Teorema 2.4.5, que establece que un semigrupo es $\mathcal{J}$-gradiente si y sólo si es $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, se acaba de demostrar.

El siguiente resultado proporciona más regularidad para la función de Lyapunov continua.

Teorema 2.6.4 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo local con atractor global $\mathcal{A}$ que es $\mathcal{J}$-gradiente dinámico, donde $\mathcal{J} = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Entonces, existe una función $W : X \to \mathbb{R}$ que es una función de Lyapunov para $T(\cdot)$ respecto a $\mathcal{J}$ y tal que* *(i)* $t \mapsto W(T(t)z)$ *es diferenciable para todo* $z \in X$ *y*

(ii) $t \mapsto W(T(t)z)$ *es estrictamente decreciente siempre que* $z \notin \cup_{i=1}^{n} E_i$.

Demostración:

Sea $V : X \to \mathbb{R}$ la función definida en el Teorema 2.6.3 y sea

$$W(z) := \int_0^\infty e^{-t} V(T(t)z)dt.$$

Comenzaremos con la continuidad de W. Nótese primero que $W(z) \leq n + V(z)$ para todo $z \in X$. Ahora, como existe un atractor global y las soluciones dependen continuamente de las condiciones iniciales, para cada $z \in X$ existe un $\epsilon_z > 0$ y $t_1 > 0$ tal que $V(\gamma^+(T(t_1)\mathcal{O}_{\epsilon_z}(z)))$ es acotado. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ y $z' \in X$ tomamos un $\bar{t} > 0$ y un entorno B de z' tal que,

$$\int_{\bar{t}}^\infty e^{-t} dt < \frac{\epsilon}{4(M_B + 1)} \tag{2.21}$$

donde $M_B := \sup\{V(T(t)w) : w \in B,\, t \geq t_1\} > 0$.

Ahora, por la continuidad de V y de que $[0, \infty) \times X \mapsto T(t)x \in X$, es fácil ver que existe un $\delta > 0$ tal que, si $z \in X$ satisface que $d(z, z') < \delta$ entonces,

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-s} |V(T(t)z) - V(T(t)z')| dt \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto y (2.21) demuestran que, para $z \in X$ con $d(z, z') < \delta$

$$|W(z) - W(z')| \leq \int_0^{\bar{t}} e^{-s} |V(T(t)z) - V(T(t)z')| dt \; + \; 2M_B \int_{\bar{t}}^\infty e^{-t} dt \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Claramente, $W : X \to \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$. Ahora, si $z \in \cup_{i=1}^{n} E_i$ entonces $T(t)z \in \cup_{i=1}^{n} E_i$ para todo $t \geq 0$ y $V(T(t)z)$ es constante para todo $t \geq 0$ probando que $W(T(t)z)$ es constante. Recíprocamente, si $z \in X$ es tal que

$$W(T(t)z) = \int_0^\infty e^{-s} V(T(t+s)z) dt$$

es constante, entonces $V(T(t)z)$ es constante para todo $t \geq 0$ y, consecuentemente, $z \in \cup_{i=1}^{n} E_i$ por las propiedades de V.

A continuación, dado $z \in X \setminus \cup_{i=1}^{n} E_i$ vamos a probar que $t \mapsto W(T(t)z)$ es estrictamente decreciente. De hecho, para cada $t > 0$

$$W(T(t)z) - W(z) = \int_0^\infty e^{-s} [V(T(s+t)z) - V(T(s)z)] ds,$$

de donde podemos ver que para todo $t > 0$ se tiene que $W(T(t)z) - W(z) = 0$. Entonces, $V(T(s+t)z) - V(T(s)z) = 0$ para todo $s \geq 0$, en particular, $V(T(t)z) = V(z)$ y, como consecuencia, $V(T(t)z) = V(T(s)z) = V(z)$ para todo $s \in [0,t]$. Repitiendo este razonamiento, concluimos que $V(T(s)z) = V(z)$ para todo $s \geq 0$, lo que contradice la elección de z.

Ahora, dado $z \in X$, $t \geq 0$ y $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{W(T(t+h)z) - W(T(t)z)}{h} =$$

$$= \frac{e^t}{h}\left[(e^h - 1)\int_{t+h}^{\infty} e^{-s}V(T(s)z)ds \ - \int_t^{t+h} e^{-s}V(T(s)z)ds\right],$$

lo que converge a

$$e^t \int_t^{\infty} e^{-s}V(T(s)z)ds - V(T(t)z) \leq 0,$$

probando la diferenciabilidad de $t \mapsto W(T(t)z) \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Descomposición de Morse con infinitas componentes

En las secciones anteriores hemos demostrado (véase también [2]) que dada una familia disjunta $M = \{M_1, \cdots, M_n\}$ de conjuntos invariantes aislados sobre el atractor global para un semigrupo $T(t)$, la propiedad dinámica de ser gradiente dinámico, la existencia de una familia ordenada asociada de pares atractor-repulsor locales, y la existencia de una función de Lyapunov asociada a M, son propiedades equivalentes. El objetivo de este capítulo es generalizar este resultado al caso de una cantidad numerable de conjuntos de Morse con un conjunto invariante de acumulación (y por tanto no aislado).

De hecho, la teoría general de la descomposición de Morse de conjuntos invariantes aislados es genéricamente adaptada a la existencia de un número finito de conjuntos invariantes de Morse. Sin embargo, no es inusual tener un número infinito de invariantes en un atractor global. Por ejemplo, considérese la ecuación diferencial escalar

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

con

$$f(y) = \begin{cases} -y \text{ if } y \leq 0, \\ (1-e^{-y}) \left|\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)\right| \text{ if } 0 < y \leq 1, \\ 1-y \text{ if } y \geq 1. \end{cases}$$

Obsérvese que la ecuación tiene como puntos fijos:

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{2},\ y_3 = \frac{1}{3}, ...,\ y_k = \frac{1}{k}, ...,\ y_\infty = 0$$

con variedades inestables asociadas

$$W^u(1) = 1,\ W^u\left(\frac{1}{2}\right) = [\frac{1}{2}, 1),\ ...,\ W^u\left(\frac{1}{k}\right) = [\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}), ...,\ W^u(0) = 0$$

y como atractor global $\mathcal{A} = [0,1]$. En [6] los autores estudian una versión multivaluada de la bien conocida ecuación de Chafee-Infante (ver Henry [41] o Chafee, Infante [23]), que también conduce a un atractor global con un número infinito de equilibrios, que de hecho ha motivado la necesidad del trabajo en este capítulo.

En la siguiente sección reescribiremos algunos resultados sobre las dinámicas relacionadas a los pares atractor-repulsor. Generalizaremos algunas de las definiciones dadas en las dos últimas secciones, las referidas a semigrupo gradiente generalizado, descomposición de Morse y semigrupo gradiente, al caso de un número infinito de conjuntos invariantes aislados $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ dentro del atractor global. En las secciones 3.2, 3.3 y 3.4 probaremos los principales resultados de este capítulo, la equivalencia entre un semigrupo gradiente dinámico referido a $\mathbf{M}_\infty$, una descomposición de Morse del atractor global, y la existencia de una función de Lyapunov asociada a $\mathbf{M}_\infty$.

3.1. Semigrupos gradientes dinámicos.

Definición 3.1.1 *Una familia disjunta (numerable) de conjuntos invariantes es una familia $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ de conjuntos invariantes con la propiedad de que, dado $j \in \mathbb{N}$, existe δ_j tal que*

$$\mathcal{O}_{\delta_j}(M_j) \cap \mathcal{O}_{\delta_j}(M_i) = \varnothing, \text{ para todo } i \neq j, i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{3.1}$$

Definición 3.1.2 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo que tiene una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ con M_j aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Una estructura homoclina asociada a M es un subconjunto finito $\{M_{k_1}, \cdots, M_{k_p}\}$ de $\mathbf{M}$ junto con un conjunto de soluciones globales $\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ tal que*

$$M_{k_j} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_j(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_{k_{j+1}},\ 1 \leq j \leq p$$

donde $M_{k_{p+1}} := M_{k_1}$.

Observación 2 *El conjunto M_∞ se supone que no es aislado. La razón es que típicamente en las aplicaciones M_∞ es un conjunto de acumulación de la sucesión $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cuando $i \to \infty$. Luego, no es aislado. Esto ocurre en el ejemplo dado en la introducción de esta parte, y también en la aplicación de [6].*

Definición 3.1.3 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ con M_j aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Decimos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo gradiente dinámico generalizado relativo a $\mathbf{M}_\infty$ si para toda solución $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi(t_0) \notin M_j$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y todo $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se verifica que*

$$M_j \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_i, \text{ para } 1 \leq i < j \leq \infty. \tag{3.2}$$

Observación 3 *Es obvio que la condición (3.2) implica las siguientes propiedades:*

- *Paca cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ existen $1 \leq i, j \leq \infty$ tal que*

$$M_j \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_i, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq \infty.$$

- *No existen estructuras homoclinas asociadas a $\mathbf{M}_\infty$.*

Cuando el número de conjuntos M_i es finito, está demostrado en [4] que estas dos propiedades implican (3.2) para una adecuada reordenación de los conjuntos.

Obsérvese que, en particular, (3.2) implica que no existe solución global $\xi(t)$ con $\xi(t_0) \notin M_1$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), M_1) = 0.$$

El siguiente lema implica que un conjunto invariante aislado dentro de un atractor global es compacto.

Lema 3.1.4 *Sea M un conjunto invariante aislado que es relativamente compacto. Entonces M es compacto.*

Demostración: Necesitamos demostrar que M es cerrado. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un cierto y_n, donde $y_n \in M$. Por la continuidad de T tenemos que $T(t)y_n \to T(t)y$ para todo $t > 0$. Entonces $T(t)y \in \overline{M}$. Luego, $T(t)\overline{M} \subset \overline{M}$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, como M es invariante, para todo $t > 0$ existe $z_n \in M$ tal que $T(t)z_n = y_n$. Como M es relativamente compacto, tomando una subsucesión tenemos que $z_n \to z \in \overline{M}$, y entonces $T(t)z = y$. Además, $\overline{M} \subset T(t)\overline{M}$ para todo $t > 0$. Se deduce así que $\overline{M}$ es invariante. Como M es un conjunto invariante aislado, obtenemos que $M = \overline{M}$.

□

Corolario 3.1.5 *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo en X con atractor global $\mathcal{A}$ y (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $\{T(t) : t \geq 0\}$, entonces $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo gradiente dinámico generalizado asociado a la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados $\{A, A^*\}$.*

Obsérvese que (3.1) implica que

$$M_i \cap M_\infty = \varnothing, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.6 *La condición (3.2) implica que no existe ninguna solución global $\xi : \mathcal{A} \to X$ con $\xi(t_0) \in \mathcal{A} \setminus M_\infty$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\xi(t), M_\infty) = 0. \tag{3.4}$$

Demostración: Es obvio ya que en (3.2) el índice i no puede ser ∞.

□

Lema 3.1.7 *Sea* $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup M_\infty$ *una colección de conjuntos compactos, invariantes tales que* $M_j \cap M_i = \varnothing$ *para* $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \infty$, *y supongamos que el conjunto compacto invariante* $M_\infty \subset \mathcal{A}$ *verifica que*

$$\lim_{i\to\infty} dist(M_i, M_\infty). \tag{3.5}$$

Entonces $\mathbf{M}_\infty$ *es una familia disjunta de conjuntos invariantes.*

Demostración: Tomemos j arbitrariamente. Tenemos que verificar (3.1). Existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{O}_{\delta_1}(M_j) \cap O_{\delta_1}(M_\infty) = \varnothing.$$

En vista de (3.5) existe un $N > j$ tal que

$$M_i \subset O_{\frac{\delta_1}{2}}(M_\infty) \text{ si } i > N.$$

Luego,

$$\mathcal{O}_{\delta_1}(M_j) \cap O_{\frac{\delta_1}{2}}(M_i) = \varnothing \text{ si } i > N.$$

Obviamente, existe un $\delta_2 > 0$ para el que

$$\mathcal{O}_{\delta_2}(M_j) \cap O_{\delta_2}(M_i) = \varnothing \text{ para } 1 \leq i \leq N,\ i \neq j.$$

Entonces el resultado se tiene tomando $\delta_j = \text{mín}\{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\}$.

□

Podemos ahora introducir el concepto de descomposición de Morse referido a $\mathbf{M}_\infty$.

Definición 3.1.8 *Dada una familia creciente* $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots A_\infty = \mathcal{A}$ *de atractores locales, para* $j \in \mathbb{N}$, *definimos* $M_j := A_j \cap A_{j-1}^*$, $M_\infty = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j^*$. *La familia infinita y ordenada* $\mathbf{M}_\infty := \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ *es llamada una descomposición de Morse de* $\mathcal{A}$.

Se tienen además las siguientes propiedades de los conjuntos M_j.

Lema 3.1.9 $M_\infty \cap A_j = \varnothing$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$. *Luego,* $M_\infty \subset A_\infty \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ *y* $M_\infty \cap M_j = \varnothing$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $y \in M_\infty$. Entonces $y \in A_j^*$, para todo $j \in \mathbb{N}$, lo que implica que $y \notin A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

□

Lema 3.1.10 *Los conjuntos* M_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *son compactos.*

Demostración: Como $M_j \subset \mathcal{A}$, son relativamente compactos. Además, como M_j es la intersección de conjuntos cerrados, es cerrados.

□

Podemos dar también la siguiente caracterización:

Proposición 3.1.11 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y $\mathbf{M}_\infty := \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$ con la familia de atractores locales $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\infty = \mathcal{A}$. Entonces,*

$$\bigcap_{j=0}^{\infty}(A_j \cup A_j^*) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j) \cup M_\infty.$$

Demostración: Si $z \in \bigcup_{j=1}^\infty M_j$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \in M_k = A_k \cap A_{k-1}^*$. Luego $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_\infty$ y $z \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \cdots \subset A_0^*$. Luego

$$z \in (\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j) \cap (\bigcap_{j=0}^{k-1} A_j^*) \subset [\bigcap_{j=k}^{\infty}(A_j \cup A_j^*)] \cap [\bigcap_{j=0}^{k-1}(A_j \cup A_j^*)] = \bigcap_{j=0}^{\infty}(A_j \cup A_j^*),$$

probándose así que $\bigcup_{j=1}^\infty M_j \subset \bigcap_{j=0}^\infty (A_j \cup A_j^*)$. Si $z \in M_\infty$, entonces $z \in \bigcap_{j=0}^\infty A_j^* \subset \bigcap_{j=0}^\infty (A_j \cup A_j^*)$.

Para demostrar la otra inclusión, tomemos $z \in \bigcap_{j=0}^\infty (A_j \cup A_j^*)$. Si $z \in \bigcap_{j=0}^\infty A_j^*$, entonces $z \in M_\infty$. El otro caso es que $z \in A_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Sean $I := \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$ y $J := \{j_1, j_2, \ldots, j_l \ldots\}$ tal que $I \cup J = \mathbb{Z}^+$ con $I \cap J = \varnothing$ y $z \in A_i$ para todo $i \in I$ y $z \in A_j^*$ para todo $j \in J$. Claramente, si $i := \min I$, necesariamente $I = \{j \geq i\}$ y $J = \{0, 1, \ldots, i-1\}$, y consecuentemente $z \in A_i$ y $z \in A_{i-1}^*$. Luego, $z \in A_i \cap A_{i-1}^* = M_i$, de lo que $\bigcap_{j=0}^\infty (A_j \cup A_j^*) \subset \bigcup_{j=1}^\infty M_j$.

$\square$

3.2. Construcción de una descomposición de Morse

En esta sección describiremos la construcción de una descomposición de Morse del atractor global $\mathcal{A}$ relativo a la familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para $j \in \mathbb{N}$ y se satisface (3.2). Por el Lema 3.1.6 tenemos que (3.4) no se verifica.

El siguiente lema jugará un importante papel en nuestro objetivo

Lema 3.2.1 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal con atrator global $\mathcal{A}$ y una familia de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty = \{M_1, \ldots, M_n, \ldots M_\infty\}$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para $j \in \mathbb{N}$ y se satisface (3.2). Entonces, M_1 es un atractor local para $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Demostración: Primero probaremos que para todo $\delta \in (0, \delta_1)$ existe un $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$\gamma^+ (\mathcal{O}_{\delta'} (M_1)) \subset \mathcal{O}_\delta (M_1),$$

donde δ_1 satisface que $\mathcal{O}_{\delta_1}(M_1) \cap \mathcal{O}_{\delta_1}(M_i) = \varnothing$ para $i > 1$ o $i = \infty$.

Si no fuese así, existirá $\delta > 0$ y sucesiones $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de tiempos positivos y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en X tales que para todo k

$$d(x_k, M_1) < \frac{1}{k},$$

$$d(T(t_k)x_k, M_1) = \delta$$

y

$$d(T(t)x_k, M_1) < \delta \text{ for } t \in [0, t_k).$$

Luego, si definimos, para cada k, $\xi_k(t) := T(t + t_k)x_k$ para $t \in [-t_k, \infty)$, como $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, concluimos, por el Lema 2.5.2, que existe una solución global $\xi : \mathbb{R} \to X$ para $T(\cdot)$ tal que $\xi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ uniformemente en conjuntos compactos de tiempos. Entonces, $d(\xi_k(t), M_1) \leq \delta$ para $t \in [-t_k, 0]$ implica que

$$d(\xi(t), M_1) \leq \delta < \delta_1 \text{ para } t \leq 0.$$

Pero por (3.2) tenemos que $\xi(t) \to M_j$, con $j > 1$, cuando $t \to -\infty$, lo que es una contradicción.

M_1 es el conjunto invariante maximal en $\mathcal{O}_\epsilon(M_1)$ para algún $\epsilon > 0$. Luego, para $\delta < \text{mín}\{\epsilon, \delta_1\}$ tomamos $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(M_1)) \subset \mathcal{O}_\delta(M_1),$$

de modo que

$$\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(M_1)) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta(M_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(M_1),$$

y entonces, como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(M_1))$ es invariante,

$$\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(M_1)) \subset M_1.$$

La otra inclusion es trivial, y por tanto M_1 es un atractor local.

□

Para el atractor local M_1, sea $M_1^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap M_1 = \varnothing\}$ su repulsor asociado, luego cada M_i, con $i \geq 2$, está contenido en M_1^* y de forma más general cada órbita $\xi(\mathbb{R})$ de toda solución $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ que converja a M_i, $i \geq 2$, cuando $t \to \infty$, está contenida en M_1^*. Considerando la restricción $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a M_1^* tenemos que $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ satisface (3.2) en el espacio M_1^* con conjuntos invariantes aislados $\{M_i\}_{i=2}^\infty \cup M_\infty$. Podemos asumir, por el último lema, que M_2 es un atractor local para el semigrupo $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ en M_1^*. Si $M_{2,1}^*$ es el repulsor asociado a el atractor local M_2 para $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ en M_1^* podemos proceder y considerar la restricción $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ del semigrupo $\{T_1(t) : t \geq 0\}$

a $M^*_{2,1}$ y entonces $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ satisface (3.2) en $M^*_{2,1}$ con conjuntos invariantes aislados asociados $\{M_i\}_{i=3}^{\infty} \cup M_\infty$.

Estableciendo $\mathcal{A} =: M^*_{0,-1}$ y $M^*_{1,0} := M^*_1$, para $j \geq 1$ tenemos que M_j es un atractor local para la restricción de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $M^*_{j-1,j-2}$ cuyo repulsor será denotado por $M^*_{j,j-1}$.

Definamos $A_0 := \varnothing$, $A_1 := M_1$ y para $j = 2, 3, \cdots$,

$$A_j := A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(M_j) = \bigcup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(M_i). \tag{3.6}$$

También, $A_\infty = \mathcal{A}$.

Es claro que $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W^{\mathrm{u}}(M_i) \cup W^{\mathrm{u}}(M_\infty)$.

Lema 3.2.2 *Supongamos que se cumplen las condiciones del Lema 3.2.1. Entonces* $M_\infty = \bigcap_{j=0}^{\infty} A^*_j$.

Demostración: Sea $z \in M_\infty$. Entonces como M_∞ es invariante, $\omega(z) \subset M_\infty$. Luego z no puede estar en $W^u(M_j)$ para $j \in \mathbb{N}$, ya que si fuese así tendríamos por (3.2) que $\omega(z) \cap M_i \neq \varnothing$ para algún $i \leq j$, lo que es una contradicción. Así que, por (3.6) tenemos que $z \notin A_j$ para $j \in \mathbb{N}$. Luego, $\omega(z) \cap A_j = \varnothing$, y entonces $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} A^*_j$.

Para la otra inclusión, sea $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} A^*_j$. Entonces $\omega(z) \cap A_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Si $z \notin M_\infty$, tomemos una solución global $\xi(\cdot)$ tal que $\xi(0) = z$. Entonces por la condición (3.2) tenemos que $\xi(t) \to M_i$ cuando $t \to +\infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Pero entonces $\omega(z) \cap A_i \neq \varnothing$, lo que es una contradicción.

□

Lema 3.2.3 *Supongamos que se cumplen las condiciones del Lema 3.2.1. Entonces los conjuntos* M_j, $j \in \mathbb{N} \cup \infty$, *son compactos.*

Demostración: Como $M_j \subset \mathcal{A}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos que los conjuntos M_j son compactos si $j \in \mathbb{N}$. Además, el Lema 3.2.2 implica que M_∞ es cerrado, y como $M_\infty \subset \mathcal{A}$ tenemos que M_∞ es compacto.

□

Lema 3.2.4 *Supongamos que se cumplen las condiciones del Lema 3.2.1. Supongamos además que, dado* $j \in \mathbb{N}$, *existe un* δ_j *tal que*

$$W^u(M_j) \cap \mathcal{O}_{\delta_j}\Big(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} M_i \cup M_\infty)\Big) = \emptyset. \tag{3.7}$$

Entonces,

$$A_j \cap \mathcal{O}_{\delta_j}\Big(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} M_i \cup M_\infty)\Big) = \emptyset. \tag{3.8}$$

Demostración: Para $j = 1$ el resultado se tiene ya que $A_1 = M_1 = W^u(M_1)$. Supongamos que (3.8) es verdad para $j-1$ y probaremos que se tiene para j. Si no fuera así, existiría una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en A_j tal que para todo k

$$d(x_k, \bigcup_{i=j+1}^{\infty} M_i \cup M_\infty) < \frac{1}{k}.$$

Como $A_j := A_{j-1} \cup W^u\left(M_j\right)$ y tenemos (3.8) para $j-1$, entonces $x_k \in W^u\left(M_j\right)$, de lo que, por hipótesis, llegamos a una contradicción.

Corolario 3.2.5 *Bajo las hipótesis del lema previo, dado $j \in \mathbb{N}$, existe un δ_j tal que*

$$\mathcal{O}_{\delta_j}(A_j) \cap (\bigcup_{i=j+1}^{\infty} M_i \cup M_\infty) = \emptyset. \tag{3.9}$$

Teorema 3.2.6 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal con atrator global $\mathcal{A}$ y una familia de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty = \{M_1, \ldots, M_n, \ldots M_\infty\}$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para $j \in \mathbb{N}$ y se satisface (3.2). Supongamos que también se verifica que cada M_j es un atractor local para la restricción de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $M^*_{j-1,j-2}$, entonces A_j definido en (3.6) es un atractor local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ en X, y*

$$M_j = A_j \cap A^*_{j-1}. \tag{3.10}$$

Como consecuencia, $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ define una descomposición de Morse sobre el atractor global $\mathcal{A}$.

Demostración: Si demostramos que para todo $0 < \delta < \delta_j$, existe un $\delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$, entonces $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$ atrae a $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)$ y (como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$ es invariante) está contenido en A_j, demostrando así que A_j es un atractor local.

Supongamos que existe un $j \in \mathbb{N}$ para el que existe un $\delta \in (0, \delta_j)$ y sucesiones $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $t_k \to \infty$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que

$$d\left(x_k, A_j\right) < \frac{1}{k},$$
$$d\left(T\left(t_k\right) x_k, A_j\right) = \delta,$$

y

$$d\left(T\left(t\right) x_k, A_j\right) < \delta \text{ para } t \in [0, t_k).$$

Entonces, como en el Lemma 3.2.1, obtenemos una solución global $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ satisfaciendo

$$d\left(\xi_0\left(t\right), A_j\right) \leq \delta \text{ para todo } t \leq 0 \tag{3.11}$$

con

$$d\left(\xi_0\left(0\right), A_j\right) = \delta. \tag{3.12}$$

Para esta solución global, existe un $M_i \in \mathbf{M}_\infty$ tal que

$$\lim_{t \to -\infty} d\left(\xi_0\left(t\right), M_i\right) = 0,$$

y como $\delta \in (0, \delta_j)$, con δ_j satisfaciendo (3.9) se verifica que $i \leq j$, y entonces $\xi_0(0) \in W^u(M_i) \subset A_j$, lo que contradice a (3.12).

Para demostrar que $M_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ obsérvese que

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(M_i)$$

y $A^*_{j-1} = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\}$. Luego, dado $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$ tenemos que la solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ a través de z debe satisfacer que

$$\bigcup_{i=1}^{j} M_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} M_i.$$

Como consecuencia de esto y del hecho de que $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisface (3.2) obtenemos que $z \in M_j$. Esto muestra que $A_j \cap A^*_{j-1} \subset M_j$. La otra inclusión es inmediata por la definición de A_j y de A^*_{j-1}.

$\square$

Finalmente, (3.10) y el Lema 3.2.2 implican que $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ definen una descomposición de Morse sobre el atractor global $\mathcal{A}$.

Observación 4 *Como supusimos* (3.2) *para un sistema gradiente dinámico, tenemos un orden en los conjuntos de Morse por niveles de energía del atractor global en el sentido de [4], en el cual el atractor está descrito por las conexiones de las soluciones globales entre los diferentes niveles de energía de una forma decreciente.*

3.3. Función de Lyapunov para un semigrupo gradiente dinámico generalizado

En esta sección construiremos una función de Lyapunov para un semigrupo gradiente dinámico generalizado.

Definición 3.3.1 *Decimos que un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j son aislados para $j \in \mathbb{N}$ es un semigrupo gradiente generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ si existe una función continua $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tal que:*

(i) La función real $[0,\infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *es decreciente para cada* $x \in \mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \cup M_\infty)$,

(ii) V *es constante en* M_i *para cada* $i \in \mathbb{N} \cup \infty$,

(iii) $V(T(t)x) = V(x)$ *para todo* $t \geq 0$ *si y solo si* $x \in \mathbf{M}_\infty$.

Una función V *con las propiedades anteriores es llamada una función de Lyapunov para el semigrupo gradiente generalizado* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *con respecto a* $\mathbf{M}_\infty$.

Probaremos ahora que un sistema gradiente dinámico generalizado implica la existencia de una función de Lyapunov.

Proposición 3.3.2 *Sea* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *un semigrupo con atractor global* $\mathcal{A}$ *y una familia disjunta de conjuntos invariantes* $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ *en* $\mathcal{A}$ *tales que* M_j *son aislados para* $j \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathbf{M}_\infty$ *es una descomposición de Morse, entonces* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es gradiente en el sentido de la Definición 3.3.1 con respecto a* $\mathbf{M}_\infty$. *Además, la función de Lyapunov* $V : X \to \mathbb{R}$ *puede ser escogida de la siguiente forma:* $V(x) = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$, *para* $x \in M_k$, $k \in \mathbb{N}$, $V(x) = 1$, *para* $x \in M_\infty$.

Demostración:

Sea $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots \mathcal{A}$ la sucesión de atractores locales definida en la Definición 3.1.8 y $\emptyset = A_\infty^* \subset \ldots A_n^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathcal{A}$ sus correspondientes repulsores asociados, de forma que para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$, y $M_\infty = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j^*$.

Sea $f_j : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ la función de la Proposición 2.6.2 para el par atractor-repulsor (A_j, A_j^*).

Definimos la función continua $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por

$$V(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_j(z), \ z \in \mathcal{A}.$$

Entonces $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov para el semigrupo gradiente generalizado $\{T(t) : t \geq 0\}$ con respecto a $\mathbf{M}_\infty$.

De hecho, como cada $f_j : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $j \geq 1$, es no creciente a lo largo de las soluciones de $\{T(t) : t \geq 0\}$, V es también no creciente a lo largo de las soluciones de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Ahora, si $z \in \mathcal{A}$ es tal que $V(T(t)z) = V(z)$ para todo $t \geq 0$, entonces, usando que cada f_j, $j \geq 1$, es no creciente a lo largo de las soluciones de $\{T(t) : t \geq 0\}$, concluimos que $f_j(T(t)z) = f_j(z)$ para todo $t \geq 0$ y para cada $j \in \mathbb{N}$. De la parte (iv) de la Proposición 2.6.2, tenemos que $z \in (A_j \cup A_j^*)$, para cada $j \in \mathbb{N}$; esto es, $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} (A_j \cup A_j^*)$. Del Lema 3.1.11 tenemos que

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \cup M_\infty,$$

y entonces $z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \cup M_\infty$.

Si $k \in \mathbb{N}$ y $z \in M_k = A_k \cap A^*_{k-1}$, se deduce que $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_\infty = \mathcal{A}$ y $z \in A^*_{k-1} \subset A^*_{k-2} \subset \cdots \subset A^*_0 = \mathcal{A}$. De aquí $f_j(z) = 0$ si $k \leqslant j$ y $f_j(z) = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Luego,

$$V(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} f_j(z) + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Finalmente, demostraremos la continuidad de V. Como $f_j(z) \in [0,1]$, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sum_{j \geq N} \frac{1}{2^j} f_j(z) \leq \sum_{j \geq N} \frac{1}{2^j} \leq \epsilon \text{ para todo } z \in \mathcal{A}$$

Entonces, como cada f_j es continuo, es inmediato demostrar la continuidad de V.

3.4. Descomposición de Morse por una función de Lyapunov

Demostraremos ahora que la existencia de una función de Lyapunov (que se de nominará función ordenada de Lyapunov) con respecto a la familia $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ implica que el semigrupo es gradiente dinámico y que (3.7) se verifica. Luego, junto con los resultados previos, obtendremos la equivalencia entre los semigrupos dinámicamente gradientes generalizados referidos a $\mathbf{M}_\infty$ satisfaciendo (3.7), la existencia de una función de Lyapunov ordenada asociada a M_∞ y la existencia de una descomposición de Morse del atractor global, generalizando los resultados del Capítulo 2

Como antes, $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y consideramos una familia de conjuntos invariantes disjunta $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j son aislados para $j \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4.1 *Decimos que $\mathbf{M}_\infty$ está ordenado con respecto a una función de Lyapunov generalizada V, o equivalentemente, que V es una función ordenada de Lyapunov con respecto a $\mathbf{M}_\infty$, si*

$$L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq L_n \leq \cdots < L_\infty.$$

donde $L_j = V(z)$ para $z \in M_j$. Además, no puede haber un número infinito de conjuntos M_j con el mismo valor de V.

Observación 5 *Si $L_n \to L_\infty$, entonces se verifica la última condición en la Definición 3.4.1. Además, si (3.5) se satisface, por la continuidad de V se tiene que $L_n \to L_\infty$.*

Obsérvese que el Lema 3.2.4 es también una consecuencia de la existencia de una función de Lyapunov.

Proposición 3.4.2 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathbf{M}_\infty$ ordenado con respecto a la función de Lyapunov generalizada V. Entonces para toda trayectoria completa $\xi : \mathbb{R} \to X$,*

i) o existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(t) \in M_i$, para todo $t \in \mathbb{R}$,

ii) o existen $M_j, M_r \in \mathbf{M}_\infty$ con $r > j$ tal que

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), M_r) = 0, \lim_{t\to\infty} dist(\xi(t), M_j) = 0.$$

Demostración: Supongamos que $i)$ no se cumple. La función $t \mapsto V(\xi(t))$ es monótona y, ya que $\xi(t) \in \mathcal{A}$, es también acotada. Luego, el siguiente límite existe

$$L_- = \lim_{t\to-\infty} V(\xi(t)), L_+ = \lim_{t\to+\infty} V(\xi(t)).$$

Entonces,

$$V(y) = L_- \text{ para todo } y \in \alpha(\xi),$$
$$V(y) = L_+ \text{ para todo } y \in \omega(\xi).$$

Es bien sabido que los conjuntos $\omega(\xi)$ y $\alpha(\xi)$ son invariantes y conexos (véase por ejemplo [74] o el Lema 2.2.8).

Como $\omega(\xi)$ es invariante, para todo $y \in \omega(\xi)$ y $t \geq 0$ tenemos que $T(t)y \in \omega(\xi)$, y entonces $V(y) = V(T(t)y) = L_+$. Luego, $y \in M_j$ para algún $j \in \mathbb{N} \cup \infty$.

De hecho, demostraremos que $\omega(\xi) \subset M_j$. Por contradicción, supongamos que existe $z \in M_i \cap \omega(\xi)$, $i \neq j$. Esto no es posible si $j = \infty$, ya que en este caso tenemos que $L_i < L_+ = L_\infty$. Supongamos entonces que $j < \infty$. El número de conjuntos M_i tales que $L_i = L_+$ es finito. Denotemos por $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_m \in \mathbf{M}_\infty$ a los conjuntos tales que $V(x) = L_+$ si $x \in \hat{E}_k$ para algún $k \in \{1, \ldots, m\}$. Podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\epsilon(\hat{E}_k) \cap \mathcal{O}_\epsilon(\hat{E}_r) = \varnothing$ para todo $r \neq k$, $r, k \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\omega(\xi)$ es conexo, existe $u \in \omega(\xi)$ tal que $u \notin \bigcup_{k=1}^m \mathcal{O}_\epsilon(\hat{E}_k)$. Pero hemos demostrado que todo $u \in \omega(\xi)$ pertenece a algún M_k con $k \in \mathbb{N} \cup \infty$, y entonces $V(u) = L_+$ implica que $u \in \bigcup_{k=1}^m \mathcal{O}_\epsilon(\hat{E}_k)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\lim_{t\to+\infty} dist(\xi(t), M_j) = 0$.

De forma similar podemos demostrar que $\alpha(\xi) \subset M_r$ para algún $r \in \mathbb{N} \cup \infty$. Luego, $\lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), M_r) = 0$.

Como $L_- \geq L_+$, es claro que $r \geq j$. Como estamos en el caso donde $i)$ no se cumple, el hecho de que si V es constante sobre una solución global $\xi(t)$ implica que pertenece a un conjunto fijo M_i elimina la posibilidad de que $r = j$.

□

Corolario 3.4.3 *Supongamos que se verifican las condiciones de la Proposición 3.4.2. Entonces los conjuntos M_j, $j \in \mathbb{N} \cup \infty$, son compactos.*

Demostración: Por la Proposición 3.4.2 la condición (3.2) se satisface. El resultado se sigue entonces del Lema 3.2.3.

□

La existencia de una función de Lyapunov asociada a un número infinito de conjuntos invariantes ofrece, como en el caso de un número finito de conjuntos invariantes, una caracterización del atractor global como sigue.

Proposición 3.4.4 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathbf{M}_\infty$ ordenado con respecto a la función de Lyapunov generalizada V. Entonces*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u (M_j) \cup W^u (M_\infty).$$

Demostración: Si $x \in \mathcal{A}$, entonces x pertenece a una trayectoria completa acotada, luego la Proposición 3.4.2 implica que $x \in W^u (M_j)$ para algún $j \in \mathbb{N} \cup \infty$. Luego, $\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u (M_j) \cup W^u (M_\infty)$.

A la inversa, sea $x \in W^u (M_j)$ para algún $j \in \mathbb{N} \cup \infty$. Como M_j es compacto, existe t_0 tal que $\bigcup_{t \leq t_0} \xi(t)$ es acotado, donde $\xi(\cdot)$ es una trayectoria completa satisfaciendo que $\lim_{t \to -\infty} d(\xi(t), M_j) = 0$. De la definición de trayectoria completa y del hecho de que $T(t)$ es eventualmente disipativo se deduce que $\bigcup_{t \geq t_0} \xi(t)$ es también acotado. Luego, $\xi(\cdot)$ es una trayectoria completa acotada. Pero entonces $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $x = \xi(0) \in \mathcal{A}$.

Proposición 3.4.5 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^\infty \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathbf{M}_\infty$ ordenado con respecto a la función de Lyapunov generalizada V. Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un δ_j tal que*

$$W^u (M_j) \cap \mathcal{O}_{\delta_j}(\bigcup_{i \geq j+1} M_i \cup M_\infty) = \varnothing.$$

Demostración: Observemos que por el Corolario 3.4.3 los conjuntos M_j son compactos para $j \in \mathbb{N} \cup \infty$. Primero, sea k_j el primer entero $k_j > j$ tal que $L_{k_j} > L_j$. Vamos a probar la existencia de δ'_j para el que $W^u (M_j) \cap \mathcal{O}_{\delta'_j}(\cup_{i \geq k_j} M_i \cup M_\infty) = \varnothing$.

Por contradicción supongamos la existencia de $j \in \mathbb{N}$ y una sucesión $x_n \in W^u (M_j)$ tal que

$$dist(x_n, \cup_{i \geq k_j} M_i \cup M_\infty) < \frac{1}{n}.$$

Entonces existe $y_n \in \cup_{i\geq k_j} M_i \cup M_\infty$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Como $V(y_n) \geq L_{k_j} > L_j$, por la continuidad de V existe $n,\ \varepsilon > 0$ tal que

$$V(x_n) \geq L_j + \varepsilon.$$

Pero $x_n \in W^u(M_j)$ implica la existencia de una trayectoria completa acotada $\xi(t)$ tal que $\xi(0) = x_n$ y

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), M_j) = 0.$$

Por la definición de V tenemos que $V(\xi(t)) \geq L_j + \varepsilon$ para $t \leq 0$. Tomamos entonces sucesiones $t_m \to -\infty$, $z_m \in M_j$ para las que

$$\lim_{t_m\to-\infty} d(\xi(t_m), z_m) = 0.$$

Como M_j es compacto, podemos suponer que $z_m \to z_0$ y entonces

$$\lim_{t_m\to-\infty} d(\xi(t_m), z_0) = 0.$$

De nuevo, por la continuidad de V tenemos que $V(z_0) \geq L_j + \varepsilon$ y $V(z_0) = L_j$, lo que es una contradicción.

Además, considerando un j para el que $k_j - 1 > j$, comprobaremos que existe δ_j'' tal que $W^u(M_j) \cap \mathcal{O}_{\delta_j''}(\cup_{i=j+1}^{k_j-1} M_i) = \varnothing$. Si no, argumentando entonces como antes obtenemos sucesiones $x_n \in W^u(M_j),\ y_n \in \cup_{i=j+1}^{k_j-1} M_i$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $y_n \in M_k$ para todo n y algún $k \in \{j+1, ..., k_j - 1\}$. Tomamos una trayectoria completa acotada $\xi_n(t)$ tal que $\xi_n(0) = x_n$ y

$$\lim_{t\to-\infty} dist(\xi_n(t), M_j) = 0.$$

Escogemos $\varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$\mathcal{O}_\varepsilon(M_r) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(M_i) = \varnothing \text{ para todo } r, i \in \{j, ..., k_j - 1\}$$

y tomamos n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces $x_n \in \mathcal{O}_\epsilon(M_k)$. Como $t \mapsto \xi(t)$ es continua, se deduce la existencia de $t_n > 0$ tal que

$$\begin{aligned} dist(\xi_n(-t_n), M_k) &= \varepsilon, \\ dist(\xi_n(-t_n), M_k) &< \varepsilon \text{ para todo } t \in (-t_n, 0]. \end{aligned}$$

Definimos las funciones $\overline{\xi}_n(t) = \xi_n(t - t_n)$. Entonces $dist(\overline{\xi}_n(0), M_k) = \varepsilon$ y $\overline{\xi}_n(t_n) = x_n$. Existe una trayectoria completa $\overline{\xi}(\cdot)$ tal que es límite de las subsucesiones $\overline{\xi}_n(t) \to \overline{\xi}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$V(\overline{\xi}_n(t)) \leq L_j \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

y entonces por la continuidad de V,

$$V(\overline{\xi}(t)) \leq L_j \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que $t_n \to +\infty$. De otra forma, si $t_n \to t_0$, entonces como M_k es compacto, tenemos que $\overline{\xi}\,(t_0) = \lim_{n\to\infty}\ x_n = x \in M_k$, luego $V\left(\overline{\xi}\,(t_0)\right) = L_j$. Por lo tanto,

$$V(\overline{\xi}(t)) \geq V(\overline{\xi}(t_0)) = L_j \text{ para todo } t \leq t_0.$$

Por las dos últimas desigualdades, tenemos que $V(\overline{\xi}(t)) = L_j$ para todo $0 \leq t \leq t_0$. También, $\overline{\xi}(t) = T(t-t_0)\overline{\xi}(t_0)$ si $t \geq t_0$, luego también $V(\overline{\xi}(t)) = L_j$ para todo $t \geq t_0$. De la definición de una función de Lyapunov, obtenemos que $\overline{\xi}(0) \in M_k$. Pero $dist(\overline{\xi}_n(0), M_k) = \epsilon$ y $\overline{\xi}_n(0) \to \overline{\xi}(0)$.

Luego, es claro que

$$dist(\overline{\xi}\,(t)\,, M_k) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por otro lado,

$$V\,(x_n) = V\left(\overline{\xi}_n\,(t_n)\right) \leq V\left(\overline{\xi}_n\,(t)\right) \leq L_j \text{ para todo } 0 \leq t \leq t_n.$$

Como $x_n \to x \in M_k$, la continuidad de V implica que $V\,(x_n) \to V\,(x) = L_j$ y $V\left(\overline{\xi}_n\,(t)\right) \to V\left(\overline{\xi}\,(t)\right)$. Luego,

$$V\left(\overline{\xi}\,(t)\right) = L_j \text{ para todo } t \geq 0.$$

De la definición de una función de Lyapunov, tenemos que $\overline{\xi}\,(t) \in M_k$ para todo $t \geq 0$. Esto es una contradicción, ya que $dist(\overline{\xi}_n\,(0)\,, M_k) = \varepsilon$ y $\overline{\xi}_n\,(0) \to \overline{\xi}\,(0)$.

Tomando $\mathcal{O}_{\delta_j} = \mathcal{O}_{\delta'_j} \cup \mathcal{O}_{\delta''_j}$ obtenemos el resultado requerido.

□

Podemos concluir ahora el teorema central de este capítulo.

Teorema 3.4.6 *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo con atractor global $\mathcal{A}$ y una familia disjunta de conjuntos invariantes $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ en $\mathcal{A}$ tal que M_j es aislado para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo gradiente generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ en el sentido de la Definición 3.3.1 y $\mathbf{M}_\infty$ está ordenado con respecto a la función de Lyapunov.

ii) $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo gradiente dinámico generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ que satisface (3.7).

iii) $\mathbf{M}_\infty$ de una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$.

Demostración: Es consecuencia inmediata del Teorema 3.2.6 y de las Proposiciones 3.3.2, 3.4.2 y 3.4.5.

Corolario 3.4.7 *Sea* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *un semigrupo con atractor global* $\mathcal{A}$ *y una familia disjunta de conjuntos invariantes* $\mathbf{M}_\infty = \{M_i\}_{i=1}^{\infty} \cup M_\infty$ *en* $\mathcal{A}$ *tal que* M_j *es aislado para cada* $j \in \mathbb{N}$*. Supongamos que* $\mathbf{M}_\infty$ *es una descomposición de Morse de* $\mathcal{A}$*. Entonces*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(M_j) \cup W^u(M_\infty).$$

Demostración: A la vista del Teorema 3.4.6, $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo gradiente generalizado con respecto a $\mathbf{M}_\infty$ en el sentido de la Definición 3.3.1 y $\mathbf{M}_\infty$ está ordenado con respecto a la función de Lyapunov. Luego, el resultado se tiene por la Proposición 3.4.4.

$\square$

Capítulo 4

Sistemás dinámicos no autónomos

En este capítulo vamos a generalizar los resultados del Capítulo 2 para el caso de sistemas dinámicos no autónomos en espacios infinito dimensionales. Estudiaremos resultados de existencia para el atractor pullback y usaremos estos resultados para demostrar la permanencia, en un sentido biológico, de dos especios en un modelo Lotka-Volterra de depredador-presa.

4.1. Procesos de evolución y atractores pullback

A continuación vamos a dar la definición precisa de la noción de proceso, en el marco abstracto de un espacio métrico general. Sin embargo, concretaremos nuestro análisis a espacios de Banach o Hilbert cuando estos sean necesarios.

La dinámica se produce en un espacio de fases X, que representa todas las posibles "configuraciones"del sistema subyacente. Para nuestro espacio de fases escogeremos un espacio métrico X con métrica $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0,+\infty)$. Denotaremos por $C(X)$ al conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en sí mismo.

Definición 4.1.1 *Un proceso de evolución en X es una familia biparamétrica de aplicaciones $\{S(t,s) : t,s \in \mathbb{R}, t \geq s\}$ en $C(X)$ con las siguientes propiedades:*

1) $S(t,t) = Id$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$

2) $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, *para todo* $s \leq \tau \leq t$,

3) $(t,s,x) \mapsto S(t,s)x$ *es continua de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$ *en* X, *para todo* $t \geq s$.

Como una abreviatura conveniente, en lo siguiente nos referiremos al "proceso $S(\cdot,\cdot)$.$^{\text{en}}$ vez de al "proceso de evolución $\{S(t,s) : t,s \in \mathbb{R}, t \geq s\}$". Dado un proceso de evolución, la solución correspondiente a la condición inicial $x(s) = x_s$ es la aplicación $t \longmapsto S(t,s)x_s$.

Si X es un espacio vectorial normado y $S(t,s)$ es lineal para cada $t \geq s$ entonces decimos que $S(\cdot,\cdot)$ es un proceso de evolución lineal.

El operador $S(t,s)$ lleva cada estado x en X desde un tiempo inicial s hasta el estado $S(t,s)x$ con un tiempo final t. Notemos que, para un $\sigma \geq 0$ fijado, el operador $S(\sigma+t,t)$ puede ser un operador diferente para cada $t \in \mathbb{R}$. Como señalamos anteriormente, no es sólo el tiempo transcurrido, sino que el tiempo inicial también juega un papel importante en la evolución.

La clase de procesos para los que la evolución depende sólo del tiempo transcurrido, es decir, $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $t \geq s$, es lo que hemos llamado un proceso autónomo, o semigrupo.

Dado un semigrupo $T(\cdot)$, la familia de operadores $\{S_T(t,s) : t \geq s\}$ definidos por $S_T(t,s) = T(t-s)$ para todo $t \geq s$, es un proceso de evolución que denotaremos como el proceso de evolución correspondiente a $T(\cdot)$. Debido a esta observación elemental, los sistemas autónomos forman un subconjunto de los sistemas no autónomos.

Para un proceso de evolución dado $S(\cdot,\cdot)$, ampliaremos la definición de cada $S(t,s)$ de una forma obvia a subconjuntos B de X, teniendo

$$S(t,s)B := \{S(t,s)x : x \in B\}.$$

Como tenemos dos formas de entender las dinámicas asintóticas, tendremos dos definiciones de "órbita"de un conjunto dado, a saber:

- La órbita hacia adelante o forward de B desde $s \in \mathbb{R}$ será
$$\gamma_f(B,s) := \bigcup_{t \geq s} S(t,s)B.$$
- La órbita hacia atrás o pullback de B hasta $t \in \mathbb{R}$ será
$$\gamma_p(B,t) := \bigcup_{s \leq t} S(t,s)B.$$

La forma más elemental en la que la dinámica de un proceso puede ser entendida como "simple.es si las órbitas de un conjunto acotado están acotadas. Como tenemos dos nociones de órbitas, tendremos las dos correspondientes nociones de lo que significa ser acotado para un proceso.

Definición 4.1.2 *Un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ en un espacio métrico X es llamado acotado forward si $\gamma_f(B,s)$ es un conjunto acotado para cualquier subconjunto B acotado de X y cada $s \in \mathbb{R}$. De forma similar, $S(\cdot,\cdot)$ es llamado acotado pullback si $\gamma_p(B,t)$ es un conjunto acotado para cualquier subconjunto B acotado de X y cada $t \in \mathbb{R}$.*

Lo ideal es que el atractor de un sistema dinámico dado sea un objeto que describa por completo la dinámica asintótica del modelo. Una teoría exitosa general debería conducirnos a poder comprender de forma razonable el comportamiento asintótico del modelo dado, incluyendo la localización del atractor, la velocidad a la que atrae en el espacio de estados, y las estimaciones sobre su dimensión o complejidad.

Durante las últimas décadas, el concepto de atractor para un sistema dinámico autónomo dado se ha resuelto, desarrollándose una teoría general que va camino de cumplir los objetivos descritos anteriormente. En lo que sigue intentaremos explicar las diferentes nociones posibles del atractor en el caso no autónomo, así como sus diferencias y similitudes, con el objetivo de formar una teoría que nos lleve al entendimiento de ambos sistemas dinámicos, autónomos y no autónomos.

Para la noción de atractor global para un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ necesitamos ser mucho más cuidadosos que con el caso autónomo. En el siguiente apartado consideraremos algunos ejemplos sencillos para ilustrar algunos conceptos básicos que conducen a la definición de atractor para un proceso de evolución.

Antes de ver estos ejemplos, vamos a introducir una noción de invarianza para un proceso de evolución que se puede aplicar a un familia de conjuntos dependientes del tiempo que serán usados frecuentemente en lo que sigue.

Definición 4.1.3 *Se dice que una familia de conjuntos dependientes del tiempo* $\{\mathcal{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\ \}$ *es invariante bajo la acción de* $S(\cdot,\cdot)$ *si*

$$S(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(t) \text{ para todo } t \geq \tau.$$

Por ejemplo, si $S(\cdot,\cdot)$ es el proceso correspondiente a la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = -x$, cualquier familia $K(\cdot)$ de conjuntos de la forma

$$K(t) = Ce^{-t}[a,b]$$

es invariante bajo $S(\cdot,\cdot)$; solamente $\mathbb{R}$ y $\{0\}$ son invariantes en el sentido clásico, el autónomo.

$$S(t,t_0,x_0) = x_0e^{-(t-t_0)} \text{ y } T(t) = Ce^{-t}$$
$$S(t,t_0)K(t_0) = Ce^{-t_0}[a,b]e^{-(t-t_0)} = C[a,b]e^{-t} = K(t)$$

Tal como se establece en el Teorema 2.1.7, si un semigrupo posee atractor, entonces éste es la unión de todas las soluciones globales. En el caso no autónomo, la noción de atractor permite (en algunos casos) una caracterización equivalente del atractor pullback,

$$\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\xi(t) \mid \xi : \mathbb{R} \to X \text{ es una solución global acotada de } S(\cdot,\cdot)\}, \tag{4.1}$$

que vamos a definir formalmente a continuación.

Definición 4.1.4 *Sea* $S(\cdot,\cdot)$ *un proceso de evolución. Dado* $t \in \mathbb{R}$, *un conjunto* $K \subset X$ *se dice que atrae de forma pullback a conjuntos acotados en tiempo* t *bajo* $S(\cdot,\cdot)$ *si*

$$\lim_{s \longrightarrow -\infty} dist(S(t,s)D,K) = 0$$

para cada subconjunto acotado $D \subset X$.

Una familia de subconjuntos de X dependiente del tiempo, $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$, atrae pullback a subconjuntos acotados de X bajo $S(\cdot,\cdot)$ si $K(t)$ atrae pullback a conjuntos acotados en tiempo t bajo $S(\cdot,\cdot)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

En esta definición de atracción pullback el tiempo final queda fijado y el tiempo inicial "se envía" hacia $-\infty$. Nótese que nunca evolucionamos las soluciones hacia atrás en el tiempo, sino más bien se considera el estado final del sistema en algún tiempo t fijo a partir de los tiempos anteriores s. Esta es también la noción de atracción que podemos encontrar en Chepyzhov & Vishik [29] o en la teoría para atractores de sistemas dinámicos aleatorios (Arnold [5]) asociado a ecuaciones diferenciales estocásticas (Crauel [32], Crauel et al. [35], Crauel & Flandoli [34]).

Definición 4.1.5 *Se dice que una familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es el atractor pullback para un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ si*

(i) $\mathcal{A}(t)$ es compacto para cada $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathcal{A}(\cdot)$ es invariante respecto a $S(\cdot,\cdot)$,

(iii) $\mathcal{A}(\cdot)$ atrae pullback a conjuntos acotados de X, y

(iv) $\mathcal{A}(\cdot)$ es la familia minimal con la propiedad (iii).

Merece la pena mencionar que la propiedad (iv) significa que, si existiese otra familia $C(\cdot)$ que atrayese subconjuntos acotados de X, entonces $A(t) \subseteq C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En general, esto hace falta para garantizar la unicidad del atractor pullback; en el caso de semigrupos esto es una consecuencia de las equivalentes, en el caso autónomo, de (i)-(iii). Esta necesidad está relacionada con el debilitamiento de la propiedad de invarianza impuesta por la naturaleza no autónoma de los procesos de evolución. Incluso si $T(\cdot)$ es un semigrupo el correspondiente proceso (definido por $S_T(t,s) = T(t-s)$) puede tener una familia de conjuntos compactos, invariantes y pullback atrayentes que no es minimal. De hecho, si $T(t)x = e^{-t}x$, $x \in \mathbb{R}$, entonces para $S_T(\cdot,\cdot)$ la familia $\{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante, y para cada $t \in \mathbb{R}$, $[-e^{-t}, e^{-t}]$ es compacto y atrae subcobjuntos acotados de $\mathbb{R}$ en tiempo t. Esto tiene relación con el hecho de que para un atractor pullback sólo se pide que atraiga conjuntos acotados independientes del tiempo, no que él mismo se encuentre en la clase de conjuntos que tiene que atraer.

Profundizando en esta línea, téngase en cuenta que como $\mathcal{A}(\cdot)$ atrae a cualquier subconjunto acotado de X (propiedad (iii)), también atrae pullback a cualquier familia dependiente del tiempo que esté "acotada en el pasado": si $B(\cdot)$ es una familia de conjuntos acotados tal que

$$\bigcup_{s \le t} B(s) \text{ es acotado para cierto } t \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

entonces

$$\lim_{s \to -\infty} dist(S(t,s)B(s), \mathcal{A}(t)) = 0.$$

Esto es, esencialmente, una consecuencia trivial de (4.2), pero sirve para subrayar el hecho de que, aunque solamente definimos atracción sobre conjuntos acotados, algunas familias dependientes del tiempo son atraídas. Es natural preguntarse bajo qué condiciones el atractor pullback podría atraer a más familias, en general, no autónomas (ver Sección 4.3).

La propiedad de atracción pullback en (*iii*) no implica ningún tipo de atracción forward. De hecho, excepto en situaciones muy particulares (por ejemplo cuando el proceso de evolución es asintóticamente autónomo hacia el mismo semigrupo no lineal en el futuro y en el pasado) el comportamiento pullback y forward no están relacionados (véanse entre otros, Carvalho et al. [22]; Cheban et al. [25]; Langa et al. [54]; Rodríguez-Bernal & Vidal-López [69]).

Finalmente, nótese que (*i*) no requiere que $\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t)}$ sea compacto, ni siquiera acotado (hemos visto ya un ejemplo trivial en el que $\mathcal{A}(\cdot)$ es no acotado). De hecho, la caracterización hecha antes en (4.1) no se mantiene en general. Para perseguir esto, es útil distinguir entre soluciones que son acotadas en el pasado y en el futuro; con este fin daremos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.6 *Dado un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ en X, decimos que la función $\xi : \mathbb{R} \to X$ es una solución global para $S(\cdot,\cdot)$ si se verifica que*

$$S(t,s)\xi(s) = \xi(t) \text{ para todo } t \geq s.$$

Definición 4.1.7 *Decimos que una solución global $\xi^* : \mathbb{R} \longrightarrow X$ de un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ es acotada hacia atrás o acotada en el pasado si existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi^*(t) : t \leq \tau\}$ es un subconjunto acotado de X. De forma similar, $\xi^*(\cdot)$ es acotada hacia delante o acotada en el futuro si existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi^*(t) : t \geq \tau\}$ es un subconjunto acotado de X.*

Lema 4.1.8 *Si un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ posee un atractor pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ y ξ^* es una solución global acotada en el pasado, entonces $\xi^*(t) \in \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Por ser ξ^* solución global acotada en el pasado existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $Y = \cup_{t\leq\tau}\xi^*(t)$ es acotado y por tanto será atraído por $\mathcal{A}(t)$, con lo que

$$\lim_{s\to-\infty} dist(S(t,s)Y, \mathcal{A}(t)) = 0$$

Distinguimos ahora dos casos,

- Si $t \leq \tau$, obtenemos que

  $$\lim_{s\longrightarrow-\infty} dist(\xi^*(t), \mathcal{A}(t)) = \lim_{s\longrightarrow-\infty} dist(S(t,s)\xi^*(s), \mathcal{A}(t)) \leq$$
  $$\leq \lim_{s\longrightarrow-\infty} dist(S(t,s)Y, \mathcal{A}(t)) = 0$$

  Por tanto, al ser $\mathcal{A}(t)$ compacto tenemos que $\xi^*(t) \in \mathcal{A}(t)$.

- Si $t > \tau$, sabemos que

  $\xi^*(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$, con lo que $S(t,\tau)\xi^*(\tau) \in S(t,\tau)\mathcal{A}(\tau)$, y por la invarianza del atractor concluimos que $\xi^*(t) \in \mathcal{A}(t)$.

De hecho, el atractor pullback debe contener toda la "variedad inestable" de una solución, o de cualquier conjunto invariante que sea "acotado en el pasado" (para la definición véase el siguiente Lema 4.1.10).

Definición 4.1.9 *Sea $\Xi(\cdot)$ un conjunto invariante. La variedad inestable de $\Xi(\cdot)$ se define como*

$$W^u(\Xi(\cdot))(t) = \{x \in X : \text{ existe una órbita } \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X \text{ tal que}$$

$$\varphi(t) = x \text{ y } \lim_{s \longrightarrow -\infty} dist(\varphi(s), \Xi(s)) = 0\}$$

Lema 4.1.10 *Supongamos que $\Xi(\cdot)$ es un conjunto invariante que es acotado en el pasado, esto es*

$$\bigcup_{t \leq \tau} \Xi(t) \text{ es acotado para cierto } \tau \in \mathbb{R}.$$

Entonces $W^u(\Xi(\cdot))(t) \subset \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Tomemos $x \in W^u(\Xi(\cdot))(t)$. Entonces, por definición, existe una órbita $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ tal que $\varphi(t) = x$ y

$$\lim_{s \longrightarrow -\infty} dist(\varphi(s), \Xi(s)) = 0.$$

En particular, como $\Xi(\cdot)$ es acotado en el pasado, $B = \{\varphi(s) : s \leq t\}$ es un subconjunto acotado de X. Como $x = \varphi(t) = S(t,s)\varphi(s)$, se tiene que $x \in S(t,s)B$ para cada $s \leq t$. Y como $\mathcal{A}(t)$ atrae a cualquier conjunto acotado, se tiene que $x \in \mathcal{A}(t)$.

□

Cuando el propio atractor pullback es acotado en el pasado, éste se puede escribir como la unión de todas las soluciones acotadas en el pasado.

Teorema 4.1.11 *Si un atractor pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ es acotado en el pasado entonces*

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \xi(\cdot) \text{ es una solución acotada en el pasado}\}.$$

Demostración: Ya hemos demostrado que $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$ para cualquier solución acotada en el pasado $\xi(\cdot)$. Que para cualquier $\xi \in \mathcal{A}(t)$ exista una solución acotada en el pasado $\xi(\cdot)$ con $\xi(t) = \xi$ se sigue de la invarianza de $\mathcal{A}(\cdot)$ y del argumento del Teorema 2.1.7.

□

Corolario 4.1.12 *Si un atractor pullback es acotado (es decir, $\mathcal{A}(t)$ es uniformemente acotado en t) entonces el atractor se escribe como la unión de todas las soluciones completas y acotadas.*

Demostración: Cualquier solución acotada es acotada en el pasado, por tanto contenida en el atractor pullback. Para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y cualquier $x \in \mathcal{A}(s)$, la solución forward a través de x está contenida en $\mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq s$, ya que el atractor es invariante, y entonces la trayectoria a través de x es acotada.

□

Toda la teoría general de los atractores pullback puede ser escrita en el lenguaje de los cociclos (ver Capítulo 5). De hecho, una generalización alternativa de las propiedades de semigrupos al marco de los sistemas no autónomos involucra aplicaciones cociclo (Kloeden [46] y Kloeden y Rassmussen [48]). Hay algunos tipos particulares de dependencia no autónoma, como la periódica, quasiperiódica, o la casi periódica (Sell [73]; Chepyzhov & Vishik [28]) o en el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas (Arnold [5]; Schmalfus [72]; Crauel & Flandoli [34]), donde es natural trabajar dentro del marco de los sistemas dinámicos cociclos (ver Sección 5.1).

En la siguiente sección desarrollaremos la teoría de existencia para atractores pullback, de forma que recuperaremos los resultados para el atractor global de un sistema autónomo como casos particulares.

4.2. Resultados de existencia para atractores pullback

4.2.1. Conjuntos omega límites

Comenzaremos generalizando la noción de conjuntos $\omega-$límites, eligiendo definir nuestros conjuntos límites no autónomos usando el procedimiento pullback. Eventualmente construiremos nuestro atractor pullback como la unión de los conjuntos $\omega-$límites.

Definición 4.2.1 *Sea $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en un espacio métrico X y sea B un subconjunto de X. El $\omega-$límite pullback de B se define como*

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t,s)B}$$

Esta definición es equivalente a

$$\omega(B,t) = \{y \in X : \textit{existen una sucesión } \{s_k\} \leq t, \textit{ con } s_k \to -\infty \tag{4.3}$$

$$\textit{cuando } k \to \infty, \textit{ y } \{x_k\} \in B, \textit{ tal que } y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k\}.$$

Nótese que hemos usado, y usaremos, la notación abreviada "una sucesión $\{x_k\} \in X$.$^{\text{en}}$ vez de "una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$"; y para sucesiones de números reales escribiremos con frecuencia "$\{s_k\} \leq t$"para referirnos a "$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_k \in \mathbb{R}$ y $s_k \leq t$ para todo $k \in \mathbb{N}$".

Claramente, si $T(\cdot)$ es un semigrupo y $S_T(\cdot,\cdot)$ es el correspondiente proceso, entonces $\omega(B,t)$ es independiente de t y coincide con la definición de conjunto ω-límite para semigrupos (véase Hale [37], Temam [77] o el Capítulo 2):

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{r\geq s} T(r)B}.$$

Queremos encontrar ahora condiciones bajo las que $\omega(B,t)$ sea no-vacío, invariante, y que atraiga de forma pullback a B en tiempo t. Podemos tratar rápidamente la cuestión de la invarianza.

Lema 4.2.2 *Sea $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en un espacio métrico X.*

- *(i) Para cualquier $B \subset X$, $\omega(B,s)$ es positivamente invariante: $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$.*
- *(ii) Si $\omega(B,s)$ es compacto y atrae pullback a B en tiempo s, entonces $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$ para todo $t \geq s$.*
- *(iii) Si $\omega(B,t)$ atrae pullback a C en tiempo t, donde C es un conjunto conexo que contiene a B, entonces $\omega(B,t)$ es conexo.*

Demostración:

(i) Si $\omega(B,t) = \emptyset$, no hay nada que probar. Si $\omega(B,t) \neq \emptyset$, por la continuidad de $S(t,s)$ y por (4.3) inmediatamente se observa que $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$.

(ii) Si $\omega(B,s)$ es compacto y atrae pullback a B, entonces $\omega(B,t) \subset S(t,s)\omega(B,s)$. En efecto, para $x \in \omega(B,t)$, existe una sucesión $\{\sigma_k\} \leq t$ con $\sigma_k \to -\infty$, y $\{x_k\} \in B$ tal que $S(t,\sigma_k)x_k \to x$ cuando $k \to \infty$. Como $\sigma_k \to -\infty$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_k \leq s$ para todo $k \geq k_0$. Por tanto $S(t,s)S(s,\sigma_k)x_k = S(t,\sigma_k)x_k \to x$ para todo $k \geq k_0$. Además como $\omega(B,s)$ es compacto y atrae pullback a B en tiempo s, $dist(S(s,\sigma_k)x_k, \omega(B,s)) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Es entonces fácil ver que $\{S(s,\sigma_k)x_k\}$ tiene una subsucesión (que llamaremos igual) que converge a cierto $y \in \omega(B,s)$. Se sigue de la continuidad de $S(t,s)$ que $S(t,s)y = x$. Por lo tanto $\omega(B,t) = S(t,s)\omega(B,s)$.

(iii) Finalmente probaremos la afirmación sobre el carácter conexo de $\omega(B,t)$. Supongamos que $\omega(B,t)$ no es conexo, entonces $\omega(B,t)$ está incluido en la unión disjunta de dos conjuntos compactos Θ_1,Θ_2 (separados por una distancia positiva), con

$$\omega(B,t) \cap \Theta_i \neq \emptyset,\ i = 1,2. \tag{4.4}$$

Pero obsérvese que, como $B \subset C$ y $\omega(B,t)$ atrae a C, entonces $\omega(B,t) = \omega(C,t)$. Además, existe $s_k \to -\infty$ tal que $S(t,s_k) \cap \Theta_i \neq \emptyset$, $i = 1,2$. En efecto, si no, existe $i \in \{1,2\}$ tal que, para todo $r_k \to -\infty$, $S(t,r_k)C \cap \Theta_i = \emptyset$, lo que contradice (4.4). Pero, como C es conexo y el proceso continuo, para todo $k \in \mathbb{N}$, $S(t,s_k)C$ es también conexo, así que por la separación estricta de Θ_1 y Θ_2 obtenemos la existencia de una sucesión acotada $c_k \in C$ tal que $S(t, s_k)c_k \cap \Theta_i = \emptyset$, $i = 1, 2$, lo que contradice que $\omega(B, t) \subset \Theta_1 \cup \Theta_2$ y atrae a C.

□

Vamos a buscar ahora condiciones bajo las que podamos garantizar que $\omega(B, t)$ atraiga pullback a B. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.2.3 *Supongamos que K es un subconjunto compacto de X y $\{x_n\} \in X$ es una sucesión con $dist(x_n, K) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente con límite en K.*

Demostración:

Dado $k \in \mathbb{N}$, tomamos x_{n_k} tal que $dist(x_{n_k}, K) < 1/k$. Entonces, como K es compacto, existe $y_k \in K$ con $d(x_{n_k}, y_k) < 1/k$. Ahora, de nuevo por la compacidad de K, existe una subsucesión (que llamaremos igual) y_k tal que $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0 \in K$. Así, obtenemos el resultado $d(x_{n_k}, y_0) \leq d(x_{n_k}, y_k) + d(y_k, y_0)$.

□

Nuestro primer resultado muestra que $\omega(B, t)$ es "suficientemente grande"para atraer a B siempre que exista un candidato razonable para un conjunto que atraiga a B en tiempo t. Nótese que debido al Lema 4.2.2 (*ii*), siempre que $\omega(B, t)$ atraiga pullback a B, será invariante. Para completar incluimos la propiedad de la invarianza, que nos viene dada "gratis"gracias a la propiedad de atracción.

Lema 4.2.4 *Sea $S(\cdot, \cdot)$ un proceso de evolución en un espacio métrico X. Supongamos que B es un subconjunto no vacío y acotado de X que es atraído pullback por un conjunto compacto K en tiempo t. Entonces $\omega(B, t)$ es no vacío, compacto, invariante, y atrae pullback a B en tiempo t.*

Demostración:

Primero, obsérvese que para cualquier sucesión $\{x_n\} \in B$ y cualquier sucesión $\{s_n\} \in \mathbb{R}$ con $s_n \to -\infty$, del hecho de que K atraiga a B se sigue que $dist(S(t, s_n)x_n, K) \to 0$. El Lema 4.2.3 implica ahora que $S(t, s_n)x_n$ tiene una subsucesión convergente y, por definición, el límite de esta subsucesión debe ser un elemento de $\omega(B, t)$.

Esto muestra que $\omega(B, t)$ es no vacío, y que atrae pullback a B en tiempo t, ya que si no, existiría $\epsilon > 0$, una sucesión $\{s_n\} \in \mathbb{R}$ con $s_n \to -\infty$ y una sucesión $\{x_n\} \in B$ tal que

$$dist(S(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

contradiciendo la existencia de una subsucesión de $\{S(t, s_n)x_n\}$ que converge a un elemento de $\omega(B, t)$.

Nótese que $\omega(B, t)$ es compacto ya que es un subconjunto cerrado de un compacto.

□

Claramente este resultado será de más interés cuando exista una familia compacta $K(\cdot)$ tal que $K(t)$ atraiga a B para cada $t \in \mathbb{R}$. El siguiente concepto es útil en aplicaciones para obtener atracción de conjuntos ω-límites (y por lo tanto la existencia de atractores pullback) sin tener que encontrar una familia K compacta y atrayente explícitamente.

Definición 4.2.5 *Un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ en un espacio métrico es llamado pullback asintóticamente compacto si, para cada $t \in \mathbb{R}$, cada sucesión $\{s_k\} \leq t$, y cada sucesión acotada $\{x_k\} \in X$ tal que $s_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$, la sucesión $\{S(t, s_k)x_k\}$ tiene una subsucesión convergente.*

Ahora es simple mostrar que un proceso con una familia de conjuntos compactos pullback atrayentes es asintóticamente compacto, y en particular, cualquier proceso con un atractor pullback debe ser asintóticamente compacto.

Lema 4.2.6 *Si $S(\cdot,\cdot)$ tiene una familia de conjuntos compactos pullback atrayente $K(\cdot)$, entonces es pullback asintóticamente compacto.*

Demostración:

Tómense sucesiones $\{s_k\} \leq t$ con $s_k \to -\infty$ y $\{x_k\} \in X$ contenida en un conjunto acotado B; entonces como $dist(S(t,s)B, K(t)) \to 0$ y $K(t)$ es compacto, el Lema 4.2.3 nos garantiza que $S(t, s_k)x_k$ tiene una subsucesión convergente.

En vez de investigar el recíproco directamente, investigaremos qué condiciones adicionales requeriremos para asegurar que $\omega(B,t)$ atraiga pullback a B en tiempo t, como en el Lema 4.2.4.

Lema 4.2.7 *Sea $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución pullback asintóticamente compacto. Supongamos que B es un subconjunto acotado y no vacío de X que es pullback atraído por un conjunto acotado B_0 en tiempo t. Entonces $\omega(B,t)$ es no vacío, compacto, invariante, y atrae pullback a B en tiempo t.*

□

Demostración:

Nótese primero que como B_0 atrae a B, existe un tiempo s_0 tal que

$$dist(S(t,s)B, B_0) \leq 1 \text{ para todo } s \leq s_0.$$

En particular, se sigue que $\overline{\cup_{s\leq s_0} S(t,s)B}$ es acotado. Nótese ahora que para toda sucesión $\{x_k\} \in B$ y $\{s_k\} \leq s_0$, con $s_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$, sabemos que $\{S(t,s_k)x_k\}$ es acotado. Se sigue del hecho de que $S(\cdot,\cdot)$ es pullback asintóticamente compacto que existe una subsucesión de $\{S(t,s_k)x_k\}$ (que llamaremos igual) que converge a cierto $y \in X$. Entonces $y \in \omega(B,t)$ por definición, y $\omega(B,t)$ es no vacío. Que $\omega(B,t)$ atraiga a B aparece exactamente en la prueba del Lema 4.2.4.

Para finalizar mostraremos que $\omega(B,t)$ es compacto. Dada una sucesión $\{y_k\} \in \omega(B,t)$ existe $x_k \in B$ y $\{s_k\} \leq \text{mín}(s_0, -k)$, tal que $d(S(t,s_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$. Como $\{S(t,s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tiene una subsucesión convergente, se sigue que $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ tiene una subsucesión convergente y $\omega(B,t)$ es compacto.

□

4.2.2. Primer resultado: existencia de conjuntos compactos atrayentes

El primer resultado general sobre la existencia de atractores es una generalización del análogo para sistemas dinámicos autónomos (Temam [77]; Hale [37]; Babin y Vishik [8]; Robinson [68]); el resultado que más se parece al que enunciamos aquí fue demostrado por Crauel en [33]. Esto muestra que la existencia del atractor pullback es equivalente a la existencia de una familia de conjuntos compactos pullback atrayentes: dados como una familia se pueden obtener propiedades sobre la invarianza adicionales a través de una adecuada construcción en términos de conjuntos ω-límites.

Teorema 4.2.8 *Si $S(\cdot,\cdot)$ es un proceso de evolución en un espacio métrico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $S(\cdot,\cdot)$ tiene un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Existe una familia de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrae a subconjuntos acotados de X bajo $S(\cdot,\cdot)$.

En este caso

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B,t) : B \subset X, B \text{ acotado}\}} \tag{4.5}$$

y $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es minimal en el sentido de que, si existe otra familia de conjuntos cerrados y acotados $\{\hat{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}\}$ que atraiga pullback subconjuntos acotados de X bajo $S(\cdot,\cdot)$, entonces $\mathcal{A}(t) \subset \hat{\mathcal{A}}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Si $S(\cdot,\cdot)$ tiene un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, cada $\mathcal{A}(t)$ es compacto y atrae pullback a subconjuntos acotados de X.

Para demostar el recíproco procederemos de la siguiente forma. Primero nótese que, como una consecuencia inmediata de la caracterización en (4.3), $\omega(B,t) \subset K(t)$, para todo $B \subset X$ acotado y todo $t \in \mathbb{R}$. Se sigue del Lema 4.2.4 que $\omega(B,t)$ atrae a B, y entonces por el Lema 4.2.2 apartado (ii) que $\omega(B,t)$ es invariante. De esta forma, si definimos $\mathcal{A}(t)$ como en (4.5) producimos un conjunto compacto que atrae pullback a todos los subconjuntos acotados de X.

La invarianza de $\mathcal{A}(\cdot)$ se sigue de la invarianza de cada conjunto ω-límite $\omega(B,t)$. De hecho, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ con $x_n \to x_0$ cuando $n \to +\infty$. Entonces $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B,t)$ y , por la continuidad de $S(t,s)$, $S(t,s)x_n = y_n \to S(t,s)x_0$, lo cual implica que $S(t,s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$ y entonces $S(t,s)\mathcal{A}(s) \subset \mathcal{A}(t)$.

Ahora, tomamos $y_0 \in \mathcal{A}(t)$. Entonces, existe $y_n \in \omega(B_n,t)$ con $y_n \to y_0$ cuando $n \to +\infty$. Pero entonces, otra vez por la invarianza de la familia $\omega(B_n,t)$, existe $x_n \in \omega(B_n,s)$ con $S(t,s)x_n = y_n$. Pero como $x_n \in \omega(B_n,s) \subset \mathcal{A}(s)$, y $\mathcal{A}(s)$ es compacto y no depende de n, existe una subsucesión x_{n_j} que converge a cierto $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, para el cual $S(t,s)x_0 = \lim_{j\to\infty} S(t,s_{n_j})x_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0$. Se sigue que $S(t,s)\mathcal{A}(s) \supset \mathcal{A}(t)$, y entonces $\mathcal{A}(\cdot)$ es invariante.

La propiedad de minimalidad se deduce simplemente de la observación de que si $\hat{\mathcal{A}}(t)$ es cerrado, acotado, y atrae pullback a conjuntos acotados en tiempo t, entonces $\omega(B,t) \subset \hat{\mathcal{A}}(t)$ para cualquier subconjunto acotado B de X, y por lo tanto $\mathcal{A}(t) \subset \hat{\mathcal{A}}(t)$.

□

Observemos que en muchas aplicaciones, cuando se intenta verificar la hipótesis principal del Teorema 4.2.8 es a menudo posible probar algo más fuerte, la existencia de un conjunto compacto absorbente:

Definición 4.2.9 *Un conjunto $B \subset X$ absorbe pullback a conjuntos acotados en tiempo $t \in \mathbb{R}$ si, para cada conjunto acotado D de X, existe $T = T(t,D) \le t$ tal que*

$$S(t,s)D \subset B, \text{ para todo } s \le T.$$

Una familia $B(\cdot)$ absorbe pullback conjuntos acotados si $B(t)$ absorbe pullback conjuntos acotados en tiempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Si un conjunto absorbe conjuntos acotados en tiempo t, entonces dicho conjunto atrae pullback a conjuntos acotados en tiempo t.

4.2.3. Segundo resultado: existencia de un conjunto acotado atrayente

En la demostración del Teorema 4.2.8 se apeló al Lema 4.2.4 para garantizar las propiedades atrayentes de los conjuntos ω-límites. Pero ya hemos visto que existe un resultado paralelo al Lema 4.2.4, concretamente el Lema 4.2.7, que usa la noción de compacidad asintótica en vez de asumir la existencia de una familia compacta atrayente. No es, por lo tanto, una sorpresa que podamos reemplazar una hipótesis por la otra en nuestro teorema de atractor para dar un resultado más fácilmente aplicable.

Antes de esto, vamos a establecer una condición suficiente para que un proceso de evolución sea pullback asintóticamente compacto, el cual, a menudo, podrá ser verificado en las aplicaciones.

Definición 4.2.10 *Un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ es llamado eventualmente pullback compacto si es acotado pullback (véase la Definición 4.1.2) y existe $\tau \geq 0$ tal que, si B es un subconjunto acotado de X y $t \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{S(t,t-\tau)B}$ es compacto.*

Lema 4.2.11 *Sea $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en un espacio métrico X. Si $S(\cdot,\cdot)$ es eventualmente pullback compacto, entonces $S(\cdot,\cdot)$ es asintóticamente pullback compacto.*

Demostración:

Sea $\{x_j\} \in X$ una sucesión acotada, y $\{s_j\} \leq t$ tal que $s_j \to -\infty$. Si $B = \gamma_p(\{x_j\}, t-\tau)$, entonces B es acotado y además $S(t,t-\tau)B$ es relativamente compacto y contiene a $\{S(t,s_j)x_j\}$. Se sigue que $\{S(t,s_j)x_j\}$ es relativamente compacto.

□

Vamos ahora a añadir una suposición de "disipatividad" a la compacidad asintótica para recuperar las propiedades atrayentes de nuestros conjuntos ω-límites, y recuperar el atractor pullback otra vez.

Definición 4.2.12 *Decimos que un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ es pullback disipativo si existe una familia $B(\cdot)$ de conjuntos acotados tal que $B(t)$ atrae pullback conjuntos acotados en tiempo t.*

Teorema 4.2.13 *Si $S(\cdot,\cdot)$ es pullback disipativo y pullback asintóticamente compacto, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\mathcal{A}(t)$ dado en (4.5) es cerrado, invariante, y atrae pullback a subconjuntos acotados de X en tiempo t. Más aún, la familia $\mathcal{A}(\cdot)$ es minimal entre las familias $B(\cdot)$ tales que para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $B(t)$ es cerrado y atrae pullback subconjuntos acotados de X en tiempo t.*

Demostración:

Obsérvese que la hipótesis del Lema 4.2.7 se satisface, y por lo tanto $\omega(B,t)$ es no vacío, compacto, invariante, y atrae pullback a B en tiempo t para cualquier subconjunto acotado B de X. Por lo tanto, si $\mathcal{A}(t)$ es definido como en (4.5), $\mathcal{A}(\cdot)$ es cerrado, invariante y atrae pullback a subconjuntos acotados de X. Si $B(t)$ es cerrado y atrae pullback a conjuntos acotados en tiempo t, es claro que $\omega(B,t) \subset B(t)$ para cada subconjunto acotado B de X y, consecuentemente, $\mathcal{A}(t) \subset B(t)$. Esto completa la demostración.

□

Nótese que este resultado no proporciona ninguna compacidad sobre el conjunto $\mathcal{A}(t)$. Esto es sólo una restricción en el entorno de dimensión infinita, ya que $\mathcal{A}(t)$ es acotado y cerrado, pero no podemos asegurar que sea compacto. Sin embargo, en el caso de los sistemas autónomos no tenemos tal restricción, y el correspondiente resultado, que dice que si $T(\cdot)$ es disipativo acotado y asintóticamente compacto, entonces tiene un atractor global $\mathcal{A}$, parece más fuerte.

Obtener el correspondiente resultado para procesos requiere una nueva hipótesis que involucra cierta uniformidad en la "disipatividad"de $S(\cdot,\cdot)$.

Definición 4.2.14 *Decimos que un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ es fuertemente acotado pullback disipativo si, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe un subconjunto acotado $B(t)$ de X que atrae pullback a subconjuntos acotados de X en tiempo τ para cada $\tau \leq t$; esto es, dado un subconjunto acotado D de X y $\tau \leq t$,*

$$\lim_{s\to -\infty} dist(S(\tau,s)D, B(t)) = 0.$$

Nótese que la familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dada en la definición anterior no necesita tener una unión acotada. Sin embargo, podemos escogerla de forma que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\cup_{s\leq t} B(s)$ sea acotada.

El siguiente teorema establece una condición suficiente para la existencia de un atractor pullback compacto $\mathcal{A}(\cdot)$ que es acotado en el pasado, es decir

$$\bigcup_{s\leq t} \mathcal{A}(s) \text{ es acotado para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.2.15 *Si un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ es fuertemente acotado pullback disipativo y asintóticamente pullback compacto, entonces $S(\cdot,\cdot)$ tiene un atractor pullback compacto $\mathcal{A}(\cdot)$ dado por $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t), t)$ el cual es acotado en el pasado.*

Demostración:

En realidad, sólamente tenemos que verificar que $\mathcal{A}(t)$ definido en (4.5) es compacto. Para cada $\tau \leq t$, como $B(t)$ atrae pullback a todos los conjuntos acotados en tiempo τ, se sigue que $\omega(B,\tau) \subset \overline{B}(t)$ para cada acotado $B \subset X$. Y puesto que $\omega(B,\cdot)$ es invariante,

$$\omega(B,t) = S(t,\tau)\omega(B,\tau) \subset S(t,\tau)\overline{B}(t) \text{ para cada } \tau \leq t.$$

Se sigue

$$\omega(B,t) \subset \bigcap_{\sigma\leq t} \overline{\bigcup_{\tau\leq\sigma} S(t,\tau)B(t)} = \omega(\overline{B}(t), t).$$

Como esto se mantiene para cada acotado B, se sigue que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(\overline{B}(t), t)$ y consecuentemente $\mathcal{A}(t)$ es compacto. Y como claramente $\omega(\overline{B}(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$, se deduce que $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t), t)$.

Hemos demostrado ya que $\mathcal{A}(\tau) \subset \overline{B}(t)$ para todo $\tau \leq t$, por lo que $\mathcal{A}(\cdot)$ es acotado en el pasado, como se afirmó.

□

Nótese que si un proceso de evolución tiene un atractor pullback que es acotado en el pasado, entonces debe ser fuertemente acotado pullback disipativo (estableciendo $B(t) = \bigcup_{s\leq t} \mathcal{A}(t)$); y hemos visto ya (Lema 4.2.6) que cualquier proceso con atractor pullback debe ser asintóticamente compacto. Luego las condiciones del Teorema 4.2.15 son de hecho necesarias y suficientes para la existencia de un atractor pullback que sea acotado en el pasado.

4.2.4. Tercer resultado: la propiedad de aplastamiento pullback

Vamos ahora a pasar a un enfoque más reciente que impone un tipo diferente de hipótesis sobre la compacidad que suele ser más facil de comprobar en algunas aplicaciones. El término “aplastamiento”fue introducido por Kloeden & Langa [47] en un artículo que ampliaba la teoría autónoma para tratar sistemas dinámicos aleatorios (y por analogía los sistemas no autónomos que tratamos aquí). Nótese que estos resultados están restringidos a espacios de Banach (y más particularmente a espacios de Hilbert).

Definición 4.2.16 *Un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ en un espacio de Banach X es llamado aplastante pullback si, dado $t \in \mathbb{R}$, para cada conjunto acotado B en X y $\epsilon > 0$ existe un $T_0 = T_0(B,\epsilon,t) \in \mathbb{R}$ y un subespacio finito dimensional X_ϵ de X tal que*

$$\bigcup_{s \le T_0} P_\epsilon S(t,s)B \text{ es acotado}$$

y

$$\|(I - P_\epsilon)\left(\cup_{s\le T_0} S(t,s)B\right)\|_X \le \epsilon \tag{4.6}$$

donde $P_\epsilon : X \to X_\epsilon$ es una proyección acotada y (4.6) es entendida en el sentido de que $\|(I-P_\epsilon)S(t,s)x_0\|_X \le \epsilon$ para todo $x_0 \in B$ y $s \le T_0$.

Un semigrupo $T(\cdot)$ es aplastante si el correspondiente proceso $S_T(\cdot,\cdot)$ es aplastante pullback (por supuesto, la definición autónoma fue introducida primero, véase Ma et al. [61]).

Vamos a ver ahora que la propiedad de aplastamiento pullback implica que $S(\cdot,\cdot)$ sea pullback asintóticamente compacto, que, por el Teorema 4.2.13, conduce a la existencia del atractor pullback. Sin embargo, se puede demostrar también que si X es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces esta implicación se puede invertir. En particular, esto muestra que en un espacio de Banach uniformemente convexo, todo proceso con atractor pullback debe satisfacer la propiedad de aplastamiento pullback.

Recordemos que un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in X$

$$\|x\|_X, \|y\|_X \le 1, \ \|x-y\| > \epsilon \ \Rightarrow \ \frac{\|x+y\|}{2} < 1-\delta;$$

por ejemplo, los espacio de Hilbert, espacios L^p con $p \in (1,\infty)$, y espacio de Sobolev $W^{s,p}$ con $p \in (1,\infty)$ son uniformemente convexos, véase Brézis [11], Sección III.7.

Teorema 4.2.17 *Sea $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en un espacio de Banach X. Si $S(\cdot,\cdot)$ posee la propiedad de aplastamiento pullback, entonces es pullback asintóticamente compacto y para cada $B \subset X$,*

$$\bigcup_{s\le T_0} S(t,s)B$$

es acotado para cierto $T_0 = T_0(B,t)$. Si X es uniformemente convexo entonces la implicación inversa también es cierta.

Demostración:

Sea B un subconjunto acotado de X, y fijemos $t \in \mathbb{R}$. La propiedad de la acotación se deduce trivialmente de la definición de aplastamiento pullback.

Para demostrar que $S(\cdot,\cdot)$ es pullback asintóticamente compacto, sea $\{s_n\} \leq t$ una sucesión con $s_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$, y $\{x_n\} \in B$. Como $S(\cdot,\cdot)$ posee la propiedad de aplastamiento pullback, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un subespacio finito dimensional X_k de X y un T_k tal que

$$\bigcup_{s \leq T_k} P_k S(t,s)B \text{ es acotado}$$

y

$$\left\| (I - P_k)\left(\bigcup_{s \leq T_k} S(t,s)B \right) \right\|_X < 1/k.$$

Se deduce que existe un n_k tal que para todo $n \geq n_k$,

$$\{P_k S(t,s_n)x_n\} \text{ es un subconjunto acotado de } X_k$$

y

$$\|(I - P_k)S(t,s_n)x_n\|_X < 1/k.$$

Ahora podemos usar un argumento diagonal estándar para encontrar una sucesión (que llamaremos igual) tal que $\{P_k S(t,s_n)x_n\}$ converge para cada k. Junto con la convergencia de P_k hacia la identidad en $\{S(t,s_n)x_n\}$ implica que $\{S(t,s_n)x_n\}$ converge, y entonces $S(\cdot,\cdot)$ es asintóticamente compacto.

Supongamos ahora que X es uniformemente convexo y demostremos que la propiedad de acotación junto con la compacidad asintótica implican aplastamiento pullback.

Sea B un conjunto acotado en X. Por el Lema 4.2.7, $\omega(B,t)$ es no vacío, compacto, invariante, y atrae pullback a B en tiempo t. Como

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t-\tau} S(t,s)B},$$

se deduce del hecho de que $\omega(B,t)$ atraiga pullback a B que dado $\epsilon > 0$ existe un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$dist\left(\overline{\bigcup_{s \leq t-\tau} S(t,s)B}, \omega(B,t) \right) < \frac{\epsilon}{4} \text{ para todo } \tau \geq n_\epsilon.$$

Como $\omega(B,t)$ es compacto, existe un $l_\epsilon \in \mathbb{N}$, y $x_1, \ldots, x_{l_\epsilon}$ en $\omega(B,t)$ tal que

$$\omega(B,t) \subset \bigcup_{i=1}^{l_\epsilon} B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{4}\right),$$

de donde

$$\overline{\bigcup_{s\leq t-n_\epsilon} S(t,s)B} \subset \bigcup_{i=1}^{l_\epsilon} B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right). \tag{4.7}$$

Ahora, sea $X_\epsilon := span\{x_1, x_2, \ldots, x_{l_\epsilon}\}$. Como X es uniformemente convexo existe una proyección $P_\epsilon : X \to X_\epsilon$ tal que $\|x - P_\epsilon x\| = dist(x, X_\epsilon)$ para cada $x \in X$ (véase, por ejemplo, Rudin [70]). Se deduce de (4.7) que

$$P_\epsilon(\bigcup_{s\leq t-\tau_\epsilon} S(t,s)B) \text{ es un subconjunto acotado de } X$$

y que

$$\left\|(I-P_\epsilon)(\bigcup_{s\leq t-\tau_\epsilon} S(t,s)B)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

en otras palabras, que $S(\cdot,\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento pullback.

□

Corolario 4.2.18 *Supongamos que $T(\cdot)$ es un semigrupo en un espacio de Banach X uniformemente convexo. Entonces $T(\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento si y solo si $T(\cdot)$ es acotado y asintóticamente compacto.*

Vamos a dar ahora el resultado principal de esta sección cuya demostración se deduce inmediatamente del Teorema 4.2.15 y del Teorema 4.2.17.

Teorema 4.2.19 *Supongamos que un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento pullback, es fuertemente acotado y pullback disipativo. Entonces el proceso tiene atractor pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Además, si X es un espacio de Banach uniformemente convexo y $S(\cdot,\cdot)$ tiene un atractor pullback $\mathcal{A}(\cdot)$, entonces $S(\cdot,\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento pullback.*

Corolario 4.2.20 *Supongamos que un semigrupo $T(\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento y es acotado disipativo. Entonces tiene un atractor global $\mathcal{A}$. Además, si X es un espacio de Banach uniformemente convexo y $T(\cdot)$ tiene un atractor global $\mathcal{A}$ entonces $T(\cdot)$ tiene la propiedad de aplastamiento.*

4.3. Bases de atracción

Nos hemos concentrado hasta ahora en los conjuntos que atraen pullback subconjuntos acotados fijos de X. Una consecuencia de esto es que, a menos de que el atractor pullback sea acotado en el pasado, no está en la clase de conjuntos que son requeridos para atraer. Esto impide una deducción de la unicidad del atractor pullback si la condición de minimalidad (no necesaria en el caso autónomo) no se cumple.

Además, si sólamente sabemos que un proceso es pullback disipativo y asintóticamente compacto, entonces podemos concluir únicamente la existencia de un atractor cerrado minimal (Teorema 4.2.13), una distinción que es importante en espacios de fases infinito dimensionales. Para garantizar la compacidad del atractor pullback hemos tenido que imponer disipatividad fuertemente pullback, que también implica que el atractor pullback sea acotado en el pasado (Teorema 4.2.15). Pero el atractor pullback puede ser compacto sin ser acotado en el pasado, como se puede ver en el Teorema 4.2.8, o, un poco más general, cuando el atractor pullback está asociado a una ecuación diferencial aleatoria (Crauel et al. [35], Crauel y Flandoli [34] o Schmalfuß [72]).

Ya hemos señalado que la atracción pullback de conjuntos fijos acotados implica la atracción pullback de familas dependientes del tiempo que son acotadas en el pasado. Pero, de hecho, esto es común en aplicaciones en las que existe un atractor pullback que atrae familias dependientes del tiempo más generales. En esta sección desarrollaremos una teoría que lo permita para estas bases de atracción más generales. Es posible desarrollar todo el procedimiento de la teoría en un marco más general, pero tal generalidad podría enturbiar nuestra presentación. Sin embargo, en este marco podemos probar la unicidad del atractor y su compacidad de la definición de pullback disipativo y proceso pullback asintótico compacto (véase Teorema 4.3.6)

En lo que sigue consideraremos la familia $\mathcal{M}$ formada por todas las familias de subconjuntos no vacíos de X dependientes del tiempo,

$$D(\cdot) = \{D(t) : D(t) \subset X,\, D(t) \neq \emptyset\}_{t\in\mathbb{R}}$$

Si $D(\cdot)$ y $D'(\cdot)$ son elementos de $\mathcal{M}$, escribiremos $D'(\cdot) \subset D(\cdot)$ para referirnos a que $D'(t) \subset D(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 4.3.1 *Un subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathcal{M}$ es cerrado para la inclusión si siempre que $D(\cdot) \in \mathcal{D}$ y $D'(\cdot) \in \mathcal{M}$ es tal que $D'(\cdot) \subset D(\cdot)$, entonces $D'(\cdot) \in \mathcal{D}$. Llamaremos a estos conjuntos bases de atracción.*

Nótese que debido al requerimiento de que $\mathcal{D}$ sea cerrado para la inclusión, la colección de todas las familias constantes $D(\cdot)$ donde $D(t) = D$ para todo $t \in \mathbb{R}$ no es una posible base de atracción. En su lugar, la base de atracción minimal que incluye a estos conjuntos ("la base acotada"$\mathcal{D}_B$) consiste en todas las familias $D(\cdot)$ tales que para algún conjunto acotado D, $D(t) \subset D$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Otro ejemplo sencillo es la colección de familias $D(\cdot)$ tales que para algún $\lambda > 0$

$$\sup_{x\in D(t)} \|x\|\, e^{\lambda t} \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty.$$

En este sentido, una base de atracción particularmente útil es la colección de conjuntos "temperados"$\mathcal{J}$ que consiste en todas las familias $D(\cdot)$ tales que

$$t \mapsto \sup_{x\in D(t)} \|x\|$$

crece sub-exponencialmente cuando $t \to -\infty$ (véanse, entre otros, Flandoli & Schmalfuss [36]; Marín-Rubio & Real [62]; Wang [81]; Kloeden y Langa [47]).

Estableceremos ahora una serie de definiciones que son paralelas a las realizadas anteriormente, pero que aquí hacen referencia a una determinada base de atracción $\mathcal{D}$ en lugar de sólamente a unos conjuntos acotados fijos.

Definición 4.3.2 *Sea $\mathcal{D}$ una base de atracción. Una familia de conjuntos compactos $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ se dice que es el $\mathcal{D}$-atractor pullback de un proceso de evolución $S(\cdot,\cdot)$ si*

(i) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ es invariante;

(ii) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ atrae pullback a cada $D(\cdot) \in \mathcal{D}$:

$$\lim_{s \to -\infty} dist(S(t,s)D(s), \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) = 0, \text{ para cada } t \in \mathbb{R};$$

(iii) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ es minimal: para cualquier otra familia de conjuntos cerrados $C(\cdot)$, satisfaciendo la propiedad (ii), entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset C(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Diferentes bases de atracción darán lugar a diferentes atractores, y reflejan diferentes aspectos de las dinámicas. De hecho, considérese el siguiente ejemplo

$$\dot{x} = f(t,x), \ x(\tau) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable definida como

$$f(t,x) = \begin{cases} -x, & x \in [-e^{-t}, e^{-t}] \\ -x - x(x-e^{-t})e^{t}, & e^{-t} \leq |x| \leq 2e^{-t} \\ -2x, & |x| \geq 2e^{-t}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Si $\mathcal{D}$ contiene a $D(\cdot) = \{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ entonces el $\mathcal{D}$-atractor $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ verificará

$$[-e^{-t}, e^{-t}] \subset \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset [-2e^{-t}, 2e^{-t}].$$

Por otro lado, si tomamos la base de atracción que sólamente fija conjuntos acotados, el atractor pullback será $\mathcal{A}(\cdot)$ con $\mathcal{A}(t) = \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Las condiciones para la existencia del $\mathcal{D}$-atractor son muy similares a las de atractores pullback para conjuntos acotados.

Definición 4.3.3 *Sea X un espacio métrico, $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en X, y $\mathcal{D}$ una base de atracción en X. Dado $D(\cdot) \in \mathcal{D}$, el pullback ω-límite de $D(\cdot)$ se define como*

$$\omega(D(\cdot),t) := \bigcap_{T \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq T} S(t,s)D(s)}.$$

Definición 4.3.4 *Sea X un espacio métrico, $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución en X, y $\mathcal{D}$ una base de atracción en X. El proceso $S(\cdot,\cdot)$ se dice que es pullback $\mathcal{D}$-asintóticamente compacto si, para cada $t \in \mathbb{R}$, toda sucesión $\{s_k\} \leq t$ con $s_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$ y $\{x_k\} \in X$ con $x_k \in D(s_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{S(t,s_k)x_k\}$ tiene una subsucesión convergente.*

Los teoremas de existencia previos para atractores pullback pueden ser escritos ahora respecto a una base de atracción $\mathcal{D}$. Daremos ahora dos resultados generales que son los análogos de los Teoremas 4.2.13 y 4.2.15 (véase Caraballo et al. [16]).

Para el teorema de existencia necesitaremos la siguiente generalización del Lema 4.2.7 con pequeños cambios.

Lema 4.3.5 *Sea $\mathcal{D}$ una base de atracción y $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución pullback $\mathcal{D}$-asintóticamente compacto. Entonces, para cada $B(\cdot) \in \mathcal{D}$, $\omega(B(\cdot),t)$ es no vacío, compacto, invariante, y atrae pullback a $B(\cdot)$ en tiempo t.*

El siguiente teorema contiene exactamente al Teorema 4.2.15 como un caso particular si tomamos $\mathcal{D}$ para que sea la base acotada $\mathcal{D}_B$.

Teorema 4.3.6 *Sea $\mathcal{D}$ una base de atracción y $S(\cdot,\cdot)$ un proceso de evolución. Supongamos que $S(\cdot,\cdot)$ es pullback $\mathcal{D}$-asintóticamente compacto y que exista un $B(\cdot) \in \mathcal{D}$ que atrae pullback a todas las familias en $\mathcal{D}$. Entonces $\omega(B(\cdot),\cdot) \in \mathcal{D}$ es el único $\mathcal{D}$-atractor pullback para $S(\cdot,\cdot)$, y es también el máximo conjunto invariante en $\mathcal{D}$.*

Demostración:

Primero veamos que $\omega(B(\cdot),t)$ atrae pullback a cada $D(\cdot) \in \mathcal{D}$ en tiempo t. De hecho, es inmediato de la definición de $\omega(D(\cdot),t)$ y del hecho de que $B(t)$ atraiga pullback a $D(\cdot)$ en tiempo t, que $\omega(D(\cdot),t) \subset B(t)$. A continuación, se desprende de la invarianza de $\omega(D(\cdot),\cdot)$ y del hecho de que $\omega(B(\cdot),t)$ atrae pullback a $B(\cdot)$ en tiempo t que $\omega(D(\cdot),t) \subset \omega(B(\cdot),t)$.

La minimalidad es una consecuencia sencilla del hecho de que $\omega(B(\cdot),t) \subset B(t)$ y de la invarianza de la familia $\omega(B(\cdot),\cdot)$. La maximilidad se deduce de que para cada familia invariante $C(\cdot) \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{s\to-\infty} dist(S(t,s)C(s),\mathcal{A}(t)) = dist(C(t),\mathcal{A}(t)) = 0,$$

de modo que $C(t) \subset \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y así también tenemos la unicidad de la familia $\mathcal{A}(\cdot)$ en la base $\mathcal{D}$.

$\square$

Si suponemos que cualquier subconjunto acotado $D \subset X$ está incluido en la base de atracción $\mathcal{D}$, esto es, $D(\cdot) = \{D(t) = D : t \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}$ para cada subconjunto acotado D de X, entonces existe una sencilla relación entre atractor pullback para conjuntos acotados, $\mathcal{A}(\cdot)$, y el $\mathcal{D}$-atractor pullback, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$. De hecho, gracias a la minimalidad de $\mathcal{A}(\cdot)$,

$$\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, supongamos que $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ es acotado en el pasado. En este caso, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ es atraído a $\mathcal{A}(\cdot)$, y como es invariante se deduce que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset \mathcal{A} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Tenemos, por lo tanto, el siguiente resultado (Marín-Rubio & Real [62]):

Proposición 4.3.7 *Supongamos que $\mathcal{D}$ es una base de atracción que contiene a cada subconjunto acotado de X, y que $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ es acotado en el pasado. Entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\cdot) = \mathcal{A}(\cdot)$, donde $\mathcal{A}(\cdot)$ es el atractor pullback para subconjuntos acotados de X.*

4.4. Aplicación a un modelo depredador-presa

En esta sección vamos a aplicar la teoría desarrollada en las secciones anteriores para analizar una aplicación biológica de interés. La idea de que las poblaciones son sistemas autogobernados, que regulan su densidad de acuerdo a sus propias propiedades y las de su entorno, ha sido ampliamente presentada en la literatura ecológica. En dinámica de poblaciones, una pregunta básica es la de determinar si dos especies sobrevivirán en el futuro. Esto ha sido formalizado como el criterio de la permanencia (véase [38, 43] y las referencias en este trabajo). Las propiedades de crecimiento de cada población natural varían a lo largo del tiempo. La mayoría, quizás todas, de estas variaciones surgen, en última instancia, de fluctuaciones en el entorno de la población. Las condiciones ambientales físicas suelen cambiar mucho a lo largo del año y pueden influir en los organismos directamente. El buen tiempo puede estimular el crecimiento en el tamaño del cuerpo y en la reproducción, y por el contrario el mal tiempo puede causar la muerte. De forma similar, el entorno biológico puede fluctuar de diferentes maneras que influyen sobre la dinámica de la población. Este tipo de variación en el tiempo en eventos de dinámica de poblaciones puede producir profundos efectos sobre la ecología y la evolución de especies individuales, y sobre la composición de comunidades ecológicas. La incorporación explícita de parámetros que dependen del tiempo en modelos de dinámica de poblaciones requiere que estos modelos sean no autónomos, es decir, que el comportamiento dinámico esté determinado no sólo por el tamaño de la población, sino también por el tiempo propiamente (los coeficientes dependen del tiempo). Nuestro objetivo será analizar el comportamiento asintótico de un sistema de dos especies, tanto en sentido pullback, como en sentido forward. Escribiremos aquí nuestro sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(t) = \alpha f(t)A(t) - \beta g(t)A^2(t) - \gamma A(t)P(t) \\ P'(t) = \delta h(t)P(t) - \lambda m(t)P^2(t) + \mu A(t)P(t). \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Un trabajo donde se demuestra la existencia del atractor pullback para un modelo de competición finito dimensional es [51]. Los autores consideran coeficientes dependientes del tiempo continuos que son asintóticamente positivos y globalmente acotados. Nuestro objetivo en este trabajo es el estudio del comportamiento asintótico del sistema, en sentido forward y en sentido pullback, usando técnicas simples relacionadas con la forma de obtener información en el caso autónomo. En la Sección 4.4.1 se prueba la existencia del atractor pullback, usando las condiciones sobre los coeficientes

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0, \tag{4.11}$$

$$f(t) \leqslant g(t) \text{ y } g(t) \geqslant g_0 > 0, \text{ para cierto } g_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

$$0 < h_0 \leqslant h(t) \leqslant H_0 < \infty \text{ y } 0 < m_0 \leqslant m(t) \leqslant M_0 < \infty \text{ con } h_0, m_0, M_0, H_0 \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

mostrando que el atractor pullback es globalmente acotado aunque f y g no sean necesariamente acotadas. La Sección 4.4.2 trata del estudio de la ecuación logística no autónoma con coeficientes no acotados. En esa sección estudiamos la permanencia de las soluciones bajo ciertas hipótesis relacionadas con el ratio entre los coeficientes. Finalmente, en la Sección 4.4.3, se prueba la permanencia de cualquier solución con condiciones iniciales positivas usando una hipótesis adicional sobre $f(t)$.

No nos hemos centrado en la existencia de soluciones globales, que son las que juegan el papel de puntos de equilibrio en las ecuaciones logísticas no autónomas, sino que hemos encontrado una función (que no es necesariamente una solución) que nos da información sobre la dinámica del sistema. Esta técnica no está restringida a ecuaciones logísticas, sino que también puede usarse para otras ecuaciones donde la no linealidad puede ser factorizada, por ejemplo para ecuaciones de la forma $x'(t) = \Pi_{i=1}^{n}(x(t) - f_i(t))$.

4.4.1. Existencia del atractor pullback

Nuestro objetivo en esta sección es construir una familia de conjuntos acotados absorbentes asegurando, gracias al Teorema 4.2.8, la existencia del atractor pullback para el sistema (4.10). Como afirmamos anteriormente, sólo consideraremos los casos donde $A_0, P_0 \geqslant 0$. Es fácil comprobar que $(A, P) = (0, 0)$ es una solución de (4.10) y se obtiene solamente cuando $(A_s, P_s) = (0, 0)$. Es bien sabido que si el dato inicial $(A_s, P_s) > (0, 0)$, entonces la solución es siempre positiva porque no puede cruzar la solución (0,0), esto es, la órbita siempre se mantiene por encima del (0,0). Luego, tenemos una acotación inferior para cualquier solución del sistema.

Sea $\overline{A}_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ y $\overline{P}_0 = \frac{\delta H_0 + \mu \overline{A}_0}{\lambda m_0}$. Gracias a (4.12), $\int_{-\infty}^{t} g(\theta) d\theta = \infty$ y también $\int_{s}^{\infty} g(\theta) d\theta = \infty$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Además,

$$A'(t) \leqslant \alpha f(t)A(t) - \beta g(t)A(t)^2 \leqslant \alpha g(t)A(t) - \beta g(t)A(t)^2 = (\alpha - \beta A(t))g(t)A(t).$$

Sea $\overline{A}(t, s; A_s)$ la solución del problema

$$\begin{cases} \overline{A}'(t) = (\alpha - \beta \overline{A})g(t)\overline{A} \\ \overline{A}(s) = A_s. \end{cases}$$

Este es un problema de valores iniciales para una EDO de tipo Bernouilli, luego su solución explícita es

$$\begin{aligned}\overline{A}(t,s;A_s) &= \frac{1}{A_s^{-1}e^{-\alpha\int_s^t g(\theta)d\theta} + \beta\int_s^t g(\theta)e^{-\alpha\int_\theta^t g(\tau)d\tau}d\theta} \\ &= \frac{1}{A_s^{-1}e^{-\alpha\int_s^t g(\theta)d\theta} + \frac{\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha\int_s^t g(\theta)d\theta})}.\end{aligned}$$

Como $\int_s^t g(\theta)d\theta \xrightarrow{s\to-\infty} \infty$ y $\int_s^t g(\theta)d\theta \xrightarrow{t\to\infty} \infty$, para cada valor positivo A_s, la solución $\overline{A}(t,s;A_s)$ converge a $\overline{A}_0$, en ambos sentidos: pullback y forward, esto es, $\overline{A}(t,s;A_s) \xrightarrow{t\to\infty} A_0$ y $\overline{A}(t,s;A_s) \xrightarrow{s\to-\infty} A_0$.

Por otro lado,

$$P' \leqslant \delta H_0 P - \lambda m_0 P^2 + \mu\overline{A}P.$$

Definimos $\overline{P}(t,s;P_s)$ como la solución del problema

$$\begin{cases}\overline{P}'(t) = (\delta H_0 + \mu\overline{A})\overline{P} - \lambda m_0\overline{P}^2 \\ \overline{P}(s) = P_s.\end{cases} \tag{4.14}$$

Por el Lema 2.10 en [51],

$$\lim_{s\to-\infty} \overline{P}(t,s;A_s,P_s) = \overline{P}_0, \tag{4.15}$$

para cada $P_s > 0$.

Consecuentemente, la familia de conjuntos compactos fijos en el tiempo $\{K(t) = K : t \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dada por $K = [0,\overline{A}_0] \times [0,\overline{P}_0]$ es una familia absorbente en sentido pullback. Usando el Teorema 4.2.8, acabamos de probar la existencia del atractor pullback $\{\mathscr{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Además,

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}(t) \subset K.$$

4.4.2. Ecuaciones logísticas no autónomas

Para el estudio de los sistemas Lotka-Volterra necesitamos conocer primero algunas propiedades de la ecuación logística. En esta sección estudiaremos una ecuación logística no autónoma para obtener información sobre la permanencia de las soluciones en nuestro sistema depredador-presa. Esta ecuación ha sido estudiada durante mucho tiempo, incluso en el caso no autónomo. En [30] se estudia el problema con coeficientes acotados, probando la existencia de una solución global que atrae a cualquier otra solución para valores de tiempo grandes. Las condiciones medias pueden ser encontradas, por ejemplo, en [39], donde se estudia la ecuación cuando los coeficientes de la no linealidad convergen a cero. Los conceptos de atractor y repulsor aparecen en [63]. Un estudio más general de este tipo de ecuaciones puede ser encontrado en [78].

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) = \rho(t)x - \eta(t)x^2, & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t, \end{cases} \tag{4.16}$$

donde $\rho, \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas a trozos con $\eta(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos obtener en este caso la solución de forma explícita

$$x(t, s; x_s) = \frac{x_s e^{\int_s^t \rho(\theta)d\theta}}{1 + x_s \int_s^t \eta(\theta) e^{\int_s^\theta \rho(\xi)d\xi} d\theta}. \tag{4.17}$$

En el caso autónomo, donde $\rho(t) \equiv \rho > 0$ y $\eta(t) \equiv \eta$ no dependen del tiempo, existen dos soluciones constantes $x_1(t) \equiv 0$ y $x_2(t) \equiv \frac{\rho}{\eta}$, tales que x_1 es inestable y x_2 es estable si η es positivo. Esto se debe a que la función $g(x) = \rho x - \eta x^2$ es una parábola negativa con vértice positivo y

- si $x(t) \in (0, \frac{\rho}{\eta})$, entonces $x'(t) > 0$ y la solución crece hasta x_2,
- si $x(t) > \frac{\rho}{\eta}$, entonces $x'(t) < 0$ y la solución decrece hasta x_2.

En ambos casos, $x(t)$ no puede cruzar x_2 debido a la unicidad de las soluciones. Veamos que se pueden usar estos mismos argumentos para el caso no autónomo. Definamos $l(t) = \frac{\rho(t)}{\eta(t)}$. Como en el caso autónomo, $x_1 \equiv 0$ es una solución constante, pero $l(t)$ no verifica (4.16). Sin embargo, esta función nos da información sobre la dinámica de las soluciones del sistema como en el caso autónomo, esto es

- si $x(t) \in (0, l(t))$, entonces $x'(t) > 0$ y la solución crece,
- si $x(t) > l(t)$, entonces $x'(t) < 0$ y la solución decrece,
- si $x(t) = l(t)$, entonces $x'(t) = 0$.

La figura 4.1 muestra un ejemplo donde podemos ver cómo la dinámica de las soluciones depende de la función $l(t)$, pudiendo observarse como la dinámica de toda solución está relacionada con la dinámica de esta función.

Podemos decir que una función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es asintóticamente positiva forward (o backward) si su comportamiento es positivo cuando $t \to \infty$ (o $t \to -\infty$), esto es, existe un tiempo $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $l(t)$ es positivo cuando $t > \tau$ (ó $t < \tau$). Si existe $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$ tal que $l(t) > \varepsilon$ para valores grandes de t, diremos entonces que $l(t)$ es asintóticamente estrictamente positiva.

Teorema 4.4.1 *Sea $l(t)$ definido como antes y denotemos por $x(t, s; x_s)$ a cualquier solución de* (4.16) *con $x_s > 0$. Supongamos que*

$$\liminf_{t \to \infty} t\eta(t) > 0, \tag{4.18}$$

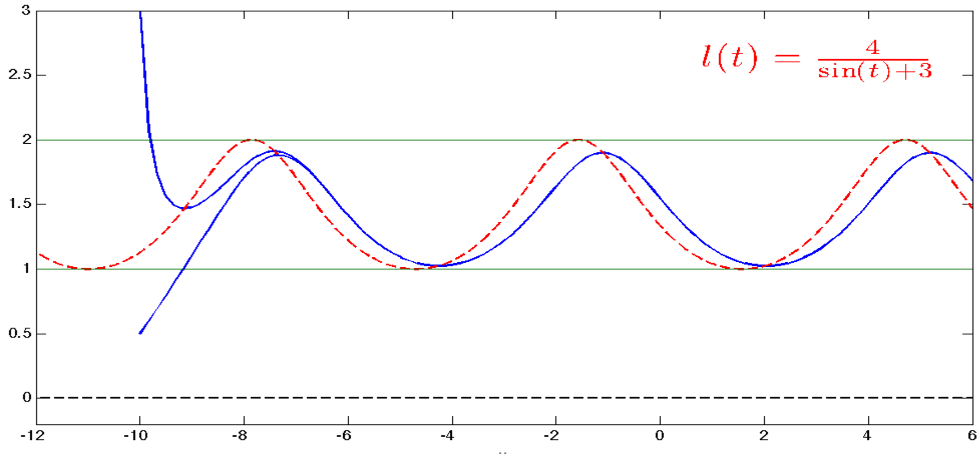


Figura 4.1: Trayectorias de la ecuación logística $x' = 4x - (\sin(t) + 3)x^2$ para dos soluciones diferentes empezando en $x_s = 0{,}5$ y $x_s = 3$. Las líneas verdes representan acotaciones por encima y por debajo de $l(t)$.

entonces

i) *si* $l(t) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma \in [-\infty, 0]$, $x(t, s; x_s)$ *converge a cero cuando* $t \to \infty$.

ii) *si* $l(t)$ *es asintóticamente estrictamente positiva forward para* $t > \tau$, $x(t, s; x_s)$ *no converge a cero cuando* $t \to \infty$. *Además, si* $l(t) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma \in (0, \infty]$, *entonces* $x(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma$ *para todo* $s \leqslant t$.

iii) *si* $l(t)$ *es asintóticamente estrictamente positiva backward cuando* $t < \tau$, $x(t, s; x_s)$ *no converge a cero en sentido pullback, esto es, para cada* $t_0 \in \mathbb{R}$, *existe* $\zeta > 0$ *y* $s_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $x(t_0, s; x_s) \geqslant \zeta$ *para todo* $s < s_0$.

Demostración: Para demostrar i), obsérvese que podemos reescribir el problema (4.16) como

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(l(t) - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t. \end{cases} \tag{4.19}$$

Si $\sigma < 0$, definimos el problema auxiliar

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(0 - x(t)) = -\eta(t)x^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t. \end{cases} \tag{4.20}$$

Entonces, como $l(t) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma$, existe un tiempo t_0 tal que $x(t, s; x_s) \leqslant x_-(t, s; x_s)$ para todo $t \geq t_0$, donde $x(t, s; x_s)$ y $x_-(t, s; x_s)$ son soluciones de (4.19) y (4.20) respectivamente. Sin embargo, el problema (4.20) tiene sólamente una solución constante $x^*(t) \equiv 0$, que atrae a cualquier solución en sentido forward. Además, cualquier solución $x(t, s; x_s)$ de (4.19) empezando en $x_s > 0$ decrecerá hacia cero cuando $t \to \infty$.

Consideremos ahora el caso $\sigma = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, definimos el siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(\varepsilon - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t, \end{cases} \tag{4.21}$$

Como antes, para cada ε, $x(t, s; x_s) \leqslant x_\varepsilon(t, s; x_s)$ siendo $x_\varepsilon(t, s; x_s)$ una solución de (4.21). Luego, si probamos que las soluciones de (4.21) tienden a ε cuando $t \to \infty$, entonces las soluciones de (4.19) tenderán también a cero cuando $t \to \infty$. Por la hipótesis en (4.18), se tiene que $x_\varepsilon(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} \varepsilon$ con $x_s > 0$. Como la elección de ε es arbitraria, podemos concluir que $x(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Procediendo de una manera análoga al caso anterior, si $0 < \sigma < \infty$ consideramos $\sigma_\varepsilon^+ = \sigma + \varepsilon$ y el problema

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(\sigma_\varepsilon^+ - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t. \end{cases} \tag{4.22}$$

Además, toda solución $x(t, s; x_s)$ con $x_s > \sigma$, es menor igual a σ_ϵ^+ cuando t converge a infinito debido a que $x(t, s; x_s) \leqslant x_{\sigma_\varepsilon^+}(t, s; x_s)$ para todo $t > t_0$. Si $x_s < \sigma$, solo necesitamos definir $\sigma_\varepsilon^- = \sigma - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, tal que $\sigma_\varepsilon^- > 0$, y el problema análogo a (4.22). En este caso, si $x_s < \sigma$, $x(t, s; x_s) \geqslant x_{\sigma_\varepsilon^-}(t, s; x_s)$ y $x_{\sigma_\varepsilon^-}(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma_\epsilon^-$. Entonces, $x(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} \sigma$.

Supongamos ahora que $\sigma = \infty$. Definiendo

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(M - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t, \end{cases} \tag{4.23}$$

cualquier solución de (4.16) con dato inicial x_s se encuentra por encima de la solución de (4.23) para el mismo valor inicial, $x_M(t, s; x_s)$. Como podemos tomar $M > 0$ tan grande como queramos, entonces $x(t, s; x_s) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$.

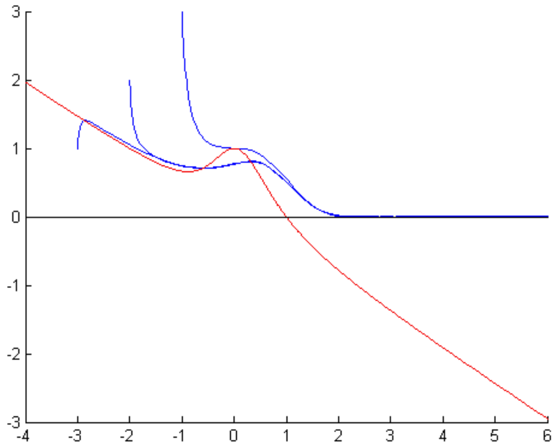
A continuación, demostraremos *iii*). Sea $l(t) > \varepsilon > 0$ para todo $t < \tau$. Si $t_0 < \tau$, entonces $x(t_0, s, x_s) \geqslant \min\{\varepsilon, x_s\}$ para cada $s < t_0$. Si no, tenemos que $x(t_0, s, x_s) < x_s$. Sea $\xi(t) = x(t, s; x_s)$ para cada $t \geqslant s$, entonces $\xi(s) = x_s$ y $\xi(t_0) < \min\{\varepsilon, x_s\}$. Como ξ es una función continua de $[s, t_0]$, existe entonces un subintervalo bajo $l(t)$ donde $\xi(t)$ es decreciente, pero esto es una contradicción ya que $\xi(t)$ debe ser creciente bajo $l(t)$. Ahora, si $t_0 \geqslant \tau$ distinguiremos dos casos dependiendo del valor inicial x_s.

- $x_s \geqslant \varepsilon$: Tomemos $s < \tau$, entonces $x(\tau, s; x_s) > \varepsilon$. Si no, como $x(\tau, s; x_s) < l(\tau)$, existe entonces un intervalo $[\tau - \delta, \tau]$, con $\delta > 0$, tal que $x(t, s; x_s)$ es creciente si t pertenece a ese intervalo de tiempo. Sea $\xi(t) = x(t, \tau; \varepsilon)$. Como $x_s \geqslant \varepsilon$, existe entonces un tiempo $\hat{t} \leqslant \tau - \delta$ tal que $x'(\hat{t}, s; x_s) = 0$, pero $x(\hat{t}, s; x_s) < l(\hat{t})$ lo que es imposible. Además, $x(t, s; x_s) \geqslant \xi(t)$ para $t > \tau$ y, especialmente, $x(t_0, s; x_s) \geqslant \xi(t_0) > 0$ para todo $s < \tau$.

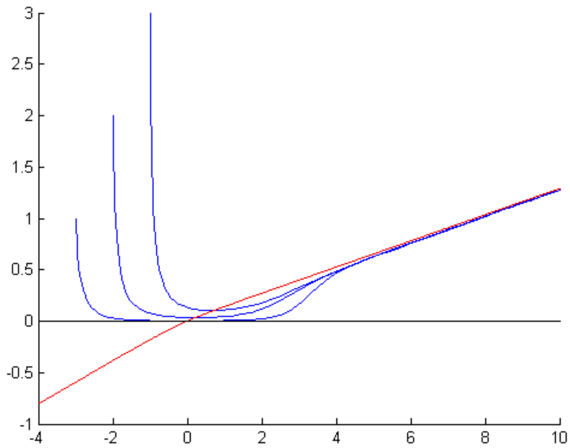
- $x_s < \varepsilon$: En este caso sólamente necesitamos definir $\xi(t) = x(t, \tau; x_s)$. Entonces, procediendo con argumentos análogos al caso anterior, $x(t, s; x_s) > \xi(t)$ para todo $s < \tau \leqslant t$. Además, $x(t_0, s; x_s) > \xi(t_0) > 0$.

$\square$

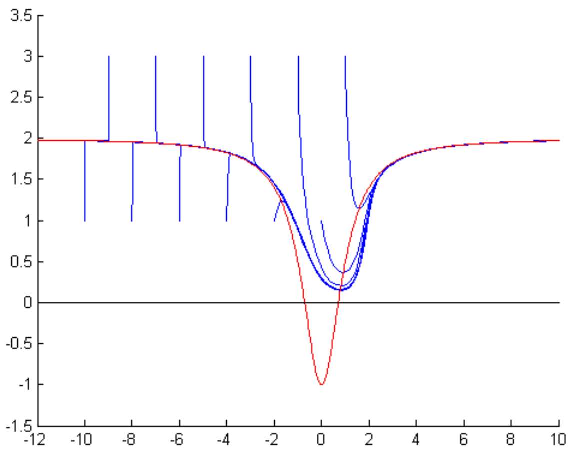
La siguiente figura muestra algunos ejemplos concretos donde pueden observarse las conclusiones del Teorema 4.4.1.



(a) $\rho(t) = 1 - t^3, \quad \eta(t) = 2 + t^2$



(b) $\rho(t) = t, \quad \eta(t) = \arctan(t) + 2\pi$



(c) $\rho(t) = 2t^2 - 1, \quad \eta(t) = t^2 + 1$

Figura 4.2: Soluciones de diferentes ecuaciones logísticas con coeficientes dependientes del tiempo. Las líneas azules representan las soluciones con diferentes condiciones iniciales y tiempos iniciales. Las líneas rojas representan la función $l(t)$.

Observación 6 *La hipótesis* (4.18) *es importante para asegurar la convergencia de las soluciones de los problemas auxiliares a las soluciones constantes. En efecto, si* (4.18) *no se* *da, incluso existiendo una función de Lyapunov $V(\cdot)$ para cualquier sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = \eta(t)x(t)(\alpha - x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leqslant t, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, de la forma

$$V(y) = \frac{y^3}{3} - \alpha\frac{y^2}{2},$$

no implica que cualquier solución converja a un equilibrio del sistema. La figura 4.3 muestra un ejemplo de esta dinámica tomando $\eta(t) = e^{-t}$, que converge a cero más rápido que t. Esto muestra la riqueza de los problemas no autónomos y una importante diferencia respecto al caso autónomo.

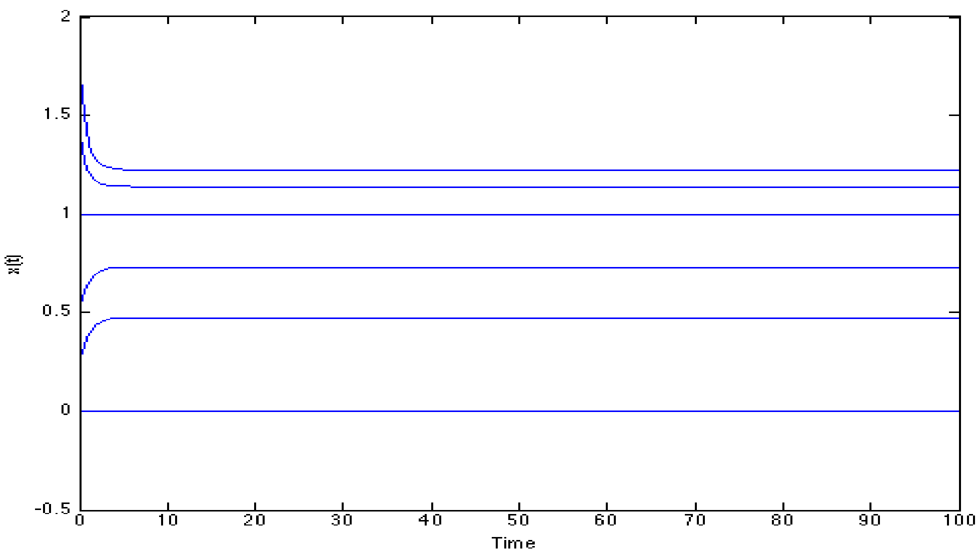


Figura 4.3: Trayectorias de la ecuación logística $x' = (1-x)xe^{-t}$ para $t \in [0, 100]$. Podemos observar como las soluciones para diferentes valores iniciales no convergen a cero ni a $x(t) \equiv 1$, incluso aunque exista una función de Lyapunov y un conjunto absorbente.

4.4.3. Permanencia de las soluciones

Nuestro objetivo en esta sección es probar, bajo algunas nuevas hipótesis, que toda solución de (4.10) no converge a cero cuando $t \to \infty$. Para ello definimos las funciones $\underline{A}(t, s; A_s)$ y $\underline{P}(t, s; P_s)$ que acotan inferiormente a las soluciones de $A(t, s; A_s)$ y $P(t, s; P_s)$ respectivamente, probando después que $A(t, s; A_s), P(t, s; P_s) > 0$ para cada $t \geq s$ y cada $A_s, P_s > 0$, esto es, ninguna de las especies se extingue (en un sentido biológico).

Como en la Sección 4.4.1, definimos el siguiente problema logístico,

$$\begin{cases} \underline{P}'(t) = \delta h_0 \underline{P} - \lambda M_0 \underline{P}^2 \\ \underline{P}(s) = P_s > 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Entonces, $P(t, s; P_s) \geqslant \underline{P}(t, s; P_s)$ para todo $P_s \geqslant 0$ y $t \geqslant s$. Debido a la naturalea autónoma de (4.24),

$$\underline{P}(t, s; P_s) \to \frac{\delta h_0}{\lambda M_0} \text{ cuando } t - s \to \infty,$$

lo que implica que $P(t, s; P_s)$ no converge a cero solamente cuando $t \to \infty$, sino también cuando $s \to -\infty$.

Vamos a probar ahora la permanencia de la función $A(t, s; A_s, P_s)$. Sabemos que

$$A' \geqslant \alpha f(t) A - \beta g(t) A^2 - \gamma A \overline{P}(t, s; A_s, P_s),$$

y definimos $\underline{A}(t, s; A_s)$ como la solución del problema

$$\begin{cases} \underline{A}'(t) = (\alpha f(t) - \gamma \overline{P}(t, s; A_s, P_s)) \underline{A} - \beta g(t) \underline{A}^2 \\ \underline{A}(s) = A_s \end{cases} \tag{4.25}$$

Esta solución satisface que $\underline{A}(t, s; A_s) \leqslant A(t, s; A_s)$ para todo $A_s \geqslant 0$ y $t \geqslant s$. Como en la Sección 4.4.2, definimos la función $l^s_{\underline{A}} : [s, +\infty) \to \mathbb{R}$ como:

$$l^s_{\underline{A}}(t) = \frac{\alpha f(t) - \gamma \overline{P}(t, s; A_s, P_s)}{\beta g(t)}. \tag{4.26}$$

Entonces, tenemos una familia de funciones $\{l^s_{\underline{A}}(t) : t \in [s, +\infty)\}_{s \in \mathbb{R}}$.

A partir de aquí, necesitamos suponer que

$$l^\infty_{\underline{A}}(t) = \frac{\alpha f(t) - \gamma \overline{P}_0}{\beta g(t)} \tag{4.27}$$

es asintóticamente estrictamente positiva forward, donde $\overline{P}_0$ está definido como en la Sección 4.4.1. Existe entonces un $\varepsilon > 0$ y un tiempo $\tau \in \mathbb{R}$ tales que $l^\infty_{\underline{A}}(t) > \varepsilon$ para todo $t > \tau$. Esta función $l^\infty_{\underline{A}}(t)$ es el límite de $l^s_{\underline{A}}(t)$ no solamente cuando $s \to -\infty$, debido a (4.15), sino también cuando $t \to \infty$ debido a la convergencia de $l^s_{\overline{P}}(t)$,

$$l^s_{\overline{P}}(t) = \frac{\delta H_0 + \mu \overline{A}(t, s; A_s)}{\lambda m_0} \xrightarrow{t \to \infty} \overline{P}_0, \tag{4.28}$$

y al Teorema 4.4.1.

Lema 4.4.2 *Sea $l^\infty_{\underline{A}}$ definida como antes y supongamos que es asintóticamente estrictamente positiva hacia adelante para $t > \tau$ y que las condiciones* (4.11), (4.12) *y* (4.13) *se verifican. Existe entonces un tiempo $t_0 = t_0(A_0, P_0)$ tal que $l^s_{\underline{A}}$, definido como en* (4.26), *es estrictamente positiva para todo $t > t_0$.*

Demostración: Como $\overline{P}(t,s;A_s,P_s) \xrightarrow{t\to\infty} \overline{P}_0$, para todo $s \in \mathbb{R}$ y $\xi > 0$ existe un tiempo $t_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $|\overline{P}(t,s_0;A_s,P_s) - \overline{P}_0| < \xi$ para cada $t > t_\xi$. Tomemos $\xi = \frac{\varepsilon\beta g_0}{2\gamma}$, por lo que si $t > t_\xi$

$$\frac{\alpha f(t) - \gamma\overline{P}(t,s_0;A_s,P_s)}{\beta g(t)} > -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\alpha f(t) - \gamma\overline{P}_0}{\beta g(t)}$$

Si $t > \sup\{\tau, t_\xi\}$,

$$\frac{\alpha f(t) - \gamma\overline{P_0}}{\beta g(t)} > \varepsilon$$

y entonces

$$\frac{\alpha f(t) - \gamma\overline{P}(t,s_0;A_s,P_s)}{\beta g(t)} > -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon > 0$$

también se verifica, y por tanto

$$\frac{\alpha f(t) - \gamma\overline{P}(t,s_0;A_s,P_s)}{\beta g(t)} > \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

□

Ahora, usando el resultado previo y el Teorema 4.4.1, podemos concluir que toda solución $\underline{A}(t,s;A_s)$ de (4.25) no converge a cero cuando $t \to \infty$. En otras palabras, tenemos la permanencia de las soluciones del problema (1.2). Podemos resumir este resultado de la siguiente manera

Teorema 4.4.3 *Suponiendo que se verifican* (4.11), (4.12), (4.13) *y que la función* $l^\infty_{\underline{A}}(t)$ *definida en* (4.27) *es asintóticamente estrictamente positiva forward en tiempo, el sistema* (4.10) *tiene permanencia en las soluciones para cualquier dato inicial positivo, esto es, para cualquier* $A_s, P_s > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}(A(t,s;A_s,P_s), P(t,s;A_s,P_s)) > (0,0), \text{ para todo } t \geq s.$$

Capítulo 5

Descomposición de Morse no autónoma

Como ya hemos mencionado antes en esta Memoria, la teoría de atractores es una herramienta muy útil para describir el comportamiento asintótico de un sistema dinámico sobre un espacio de Banach X. Sin embargo, un atractor global es usualmente un conjunto compacto invariante (finito dimensional) cuya existencia no nos proporciona, en general, mucha información sobre su estructura interna, que es un hecho crucial para entender bien el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Existe una enorme cantidad de publicaciones intentando entender la dinámica interna de estos conjuntos invariantes, tanto en el caso finito dimensional como en el infinito dimensional. Como hemos visto en el caso autónomo, uno de los enfoques más poderosos de este problema proviene de los resultados de Conley [31], que describe un flujo sobre un espacio métrico compacto como una descomposición en un número finito de conjuntos invariantes y las conexiones entre ellos. Ello nos ha conducido a una descomposición de Morse de un conjunto compacto e invariante, que ha sido generalizado a diferentes marcos, como en el caso de flujos ([31]), semiflujos sobre espacios compactos ([71]), o para espacios topológicos compactos y no compactos ([42],[64]).

Cuando el sistema que estamos considerando proviene de una ecuación diferencial no autónoma, existen diferentes enfoques con el objetivo de estudiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Entre ellos, los conceptos de atractor pullback para un proceso $S(t,s)$ o para un sistema dinámico no autónomo (véase la Definición 5.1.6) describe la existencia de familias de conjuntos dependientes del tiempo compactos e invariantes atrayentes en sentido pullback. Sin embargo, existe muy poco sobre la estructura interna y la geometría del atractor pullback, excepto en el caso en que el atractor provenga de una pequeña perturbación no autónoma de un sistema dinámico gradiente dado (véanse [22],[20],[21]). Uno de los problemas que se plantean en este marco es el tipo de atracción que va a ser considerada. De hecho, supongamos que tenemos un proceso $S(t,s)$ relacionado con una ecuación diferencial no autónoma. Como hemos visto, para estudiar las propiedades de atracción de las soluciones podemos tratar con atracción forward, esto es, cuando $t \to +\infty$ o con la atracción pullback, esto es, cuando, para un $t \in \mathbb{R}$ fijado, estudiamos el comportamiento de las soluciones cuando $s \to -\infty$. Estos dos enfoques son equivalentes en el marco autónomo, ya que en este caso $S(t,s)$ se comporta como un semigrupo $T(t-s)$ pero, en general, estos conceptos no tienen niguna relación en el marco no autónomo ([55]). Como consecuencia, y hasta donde nosotros conocemos, existen dos tipos diferentes de resultados para describir una descomposición de Morse de un atractor pullback dado, ambos basados en nociones alternativas de atractores y repulsores locales referidos a procesos. En efecto, en Rasmussen [67] y en Kloeden y Rasmussen [48] un atractor local está definido como un conjunto compacto invariante atrayente, en sentido pullback, de un entorno de sí mismo, y un repulsor asociado local como un conjunto compacto invariante atrayente de un entorno cuando $t \to -\infty$. Por otra parte, Aragao-Costa et al. [3] definen un atractor local de un conjunto compacto invariante con variedad inestable trivial, lo que, en el caso autónomo, es equivalente a la existencia de un conjunto compacto invariante atrayente, en sentido forward, de un entorno de sí mismo. Este enfoque es especialmente adecuado cuando hacemos pequeñas perturbaciones no autónomas de un sistema dinámico que posee atractor global. En este capítulo adoptaremos otra perspectiva y gracias a ello podremos generalizar los resultados en el Capítulo 2, lo cual no es posible desde el marco de [67].

5.1. Atractores para sistemas dinámicos no autónomos

Cuando nos enfrentamos con los atractores de ecuaciones diferenciales no autónomas, existen al menos dos importantes aproximaciones que pueden ser desarrolladas: La teoría de los atractores uniformes (conjuntos compactos y no invariantes que atraen hacia adelante en tiempo) y la teoría de los atractores pullback que acabamos de estudiar en los capítulos anteriores (familia de conjuntos compactos invariantes que atrae de forma pullback, pero, en general, no hacia adelante). En esta sección relacionaremos estas diferentes nociones para tomar ventaja de la invarianza en la teoría de los atractores pullback y de la atracción en la teoría de los atractores uniforme.

Estamos interesados en las dinámicas asintóticas de problemas de valores iniciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u), \ t \geq s \\ u(s) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde X es un espacio de Banach y $f : \mathbb{R} \times X \to X$ es una aplicación que pertenece a un espacio métrico $\mathcal{C}$. Supongamos que, para cada $f \in \mathcal{C}$, $u_0 \in X$, la solución de (5.1) está definida para todo $t \geq s$; esto es, para cada $u_0 \in X$, existe una única función continua $[s,\infty) \ni t \mapsto u(t,s,f,u_0) \in X$ satisfaciendo (5.1).

Para cada t, $f(t,\cdot)$ es el campo vectorial que dirige la solución en tiempo t. Luego, el camino descrito por la solución sobre X entre s y $s+\tau$ dependerá del campo vectorial $f(t,\cdot)$ para $t \in [s, s+\tau]$ y por tanto, dependerá de s y de τ. Cuando $f(t,\cdot) = f(\cdot)$ es independiente de

t, esto es, (5.1) es autónomo, el camino descrito por la solución no dependerá más de s, sino solamente de τ, el tiempo recorrido.

Existe un método general que nos da una forma de construir el espacio base para una ecuación diferencial no autónoma dada. El origen de este método es considerar la familia de no linearidades como un flujo base dirigido por la traslación de la no linealidad $f(t, \cdot)$ que ocurre en la ecuación original.

Consideramos $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$, el conjunto de funciones acotadas continuas de $\mathbb{R}$ en X con una métrica adecuada ρ. Denotemos por Σ_0 el conjunto de todas las traslaciones de f,

$$\Sigma_0(f) = \{f(s + \cdot) : \ s \in \mathbb{R}\},$$

y definimos el operador traslación $\theta_t : C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)$ por

$$\theta_t f(\cdot) = f(\cdot + t).$$

Cuando la dependencia del tiempo es autónoma o periódica esta construcción produce un espacio base cerrado Σ_0. Sin embargo, para términos no autónomos más generales (como por ejemplo cuasiperiódico) es conveniente considerar la clausura de Σ_0 con respecto a ρ:

$$\Sigma := \Sigma_\rho(f) = \text{la clausura de } \Sigma_0(f) \text{ en } C_b(\mathbb{R}, X) \text{ con respecto a } \rho,$$

conocido como el hull de la función f en el espacio $(C_b(\mathbb{R}, X); \rho)$, véase [28, 74]. La continuidad de θ_t sobre Σ_0 se amplía entonces a la continuidad de θ_t sobre Σ.

Obsérvese que podríamos haber considerado también $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$, en este caso θ_t define un semigrupo sobre Σ, la clausura de $\{f(s + \cdot) : \ s \geq 0\}$.

Así, podemos intentar analizar las ecuaciones diferenciales no autónomas como la combinación de un flujo base $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre Σ y, para cada $\sigma \in \mathit{\Sigma}$, el semiflujo $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, u_0) \mapsto \varphi(t, \sigma)u_0 \in X$ donde, para cada $u_0 \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \varphi(t, \sigma)u_0 \in X$ es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} &\dot{u} = \sigma(t, u), t > 0, \\ &u(0) = u_0 \in X. \end{aligned} \tag{5.2}$$

A partir de aquí vamos a tomar una notación más general, ya que no volveremos a hacer referencia a las ecuaciones (5.1) y (5.2).

Definición 5.1.1 Sean (X, d_X) y (P, d_P) dos espacios métricos. Un *sistema dinámico no autónomo (SDNA)*, denotado por (θ, φ) o abreviadamente φ cuando no pueda existir confusión, consiste en dos elementos:

(i) Un grupo base, que es un sistema dinámico θ sobre P con un conjunto tiempo $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$, i.e.

$$\theta_0(p) = p \text{ para todo } p \in P,$$

$$\theta_{t+s}p = \theta_t(\theta_s p) \text{ para todo } t, s \in \mathbb{T},$$

y la aplicación $(t, p) \mapsto \theta_t p$ continua.
(ii) Un modelo de un sistema no autónomo, llamado cociclo de φ sobre θ, i.e. una aplicación continua

$$\varphi : \mathbb{T}^+ \times P \times X \to X, (t, p, x) \mapsto \varphi(t, p, x)$$

tal que la familia $\varphi(t, p, \cdot) = \varphi(t, p) : X \to X$ de aplicaciones sobre X satisface la propiedad del cociclo:

$$\varphi(0, p) = \mathrm{id}_X, \varphi(t + s, p) = \varphi(t, \theta_s p) \circ \varphi(s, p) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{T}^+, s \in \mathbb{T}, p \in P. \tag{5.3}$$

P es llamado *espacio base* y X es el *espacio de estados* o de fases.

Observación 7 *Por conveniencia, escribiremos $\varphi(t, p, x)$ como $\varphi(t, p)x$. El tiempo para el flujo base (θ_t) lo supondremos siempre con $t \in \mathbb{R}$. Además, las aplicaciones $\varphi(t, p) : X \to X$ no se suponen invertibles en principio. Si es invertible, escribiremos $\varphi(t, p)^{-1} = \varphi(-t, \theta_t p)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Vamos a dar ahora la definición de conjunto no autónomo, que es un concepto básico para un SDNA.

Definición 5.1.2 Una familia de conjuntos $\hat{D} = \{D(p)\}_{p \in P}$ de X es llamada un *conjunto no autónomo*. Si cada *fibra* $D(p)$ es cerrada/compacta/abierta, entonces $\hat{D}$ se dice que es un conjunto *no autónomo cerrado/compacto/abierto*.

Observación 8 *Obsérvese que todo conjunto no autónomo $\hat{D}$ puede ser visto como un subconjunto $\tilde{D}$ del espacio ampliado $P \times X$: $\tilde{D} := \bigcup_{p \in P} \{p\} \times D(p) \subset P \times X$; pero sin embargo, no todo subconjunto de $P \times X$ es un conjunto no autónomo. Esto es, el conjunto de conjuntos no autónomos es una clase especial de subconjuntos de $P \times X$ que abarca todos los elementos de P. Para un conjunto no autónomo puntual $\hat{x} = \{x(p)\}_{p \in P}$, escribiremos simplemente $x(p)$.*

Definición 5.1.3 *Un conjunto no autónomo $\hat{D}$ se dice que es* positivamente invariante *bajo el SDNA φ si $\varphi(t, p)D(p) \subset D(\theta_t p)$ para todo $p \in P$ y $t \geq 0$. Se dice que es* invariante *si $\varphi(t, p)D(p) = D(\theta_t p)$ para todo $p \in P$ y $t \geq 0$.*

Definición 5.1.4 *Supongamos que $\hat{D}$ es un conjunto no autónomo, entonces el* conjunto omega límite pullback de $\hat{D}$, *$\omega_{\hat{D}}$, se define por*

$$\omega_{\hat{D}}(p) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s, \theta_{-s}p)D(\theta_{-s}p)}, \qquad \textit{para cada } p \in P.$$

Para simplificar la notación, escribiremos ω_D en vez de $\omega_{\hat{D}}$.

Definición 5.1.5 *Dados dos conjuntos no autónomos $\hat{D}$ y $\hat{A}$, diremos que $\hat{A}$* atrae pullback a *$\hat{D}$ si se verifica que*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), A(p)) = 0$$

para todo $p \in P$.

Observación 9 (i) Claramente $x \in \omega_D(p)$ si y sólo si existen sucesiones $t_n \to +\infty$ y $x_n \in D(\theta_{-t_n}p)$ tales que $\varphi(t_n, \theta_{-t_n}p)x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$.
(ii) Para cualquier par de conjuntos D_1 y D_2, tenemos que

$$\omega_{D_1\cup D_2}(p) = \omega_{D_1}(p) \cup \omega_{D_2}(p)$$

para cada $p \in P$. En efecto, por la definición de conjuntos omega límites se tiene que

$$\omega_{D_1\cup D_2}(p) \supset \omega_{D_1}(p) \cup \omega_{D_2}(p).$$

Veamos la otra inclusión. Para todo $x \in \omega_{D_1\cup D_2}(p)$, existen sucesiones $t_n \to +\infty$ y $x_n \in D_1(\theta_{-t_n}p) \cup D_2(\theta_{-t_n}p)$ tales que $\varphi(t_n, \theta_{-t_n}p)x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$. Luego, existe una subsucesión tal que

$$x_{n_k} \in D_1(\theta_{-t_{n_k}}p) \text{ o } x_{n_k} \in D_2(\theta_{-t_{n_k}}p)$$

para todo $k = 1, 2, \dots$ y $\varphi(t_{n_k}, \theta_{-t_{n_k}}p)x_{n_k} \to x$, $k \to +\infty$. Esto es, $x \in \omega_{D_1}(p)$ o $x \in \omega_{D_2}(p)$.
(iii) Si un conjunto no autónomo cerrado $\hat{E}$ atrae pullback a otro $\hat{D}$, entonces $\omega_D(p) \subset E(p)$ para todo $p \in P$. Si fuese falso para algún p_0 tendríamos que $\omega_D(p_0) \not\subset E(p_0)$. Tomemos $x \in \omega_D(p_0) \setminus E(p_0)$, existen entonces sucesiones $t_n \to +\infty$ y $x_n \in D(\theta_{-t_n}p_0)$ tales que $\varphi(t_n, \theta_{-t_n}p_0)x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$. Luego por la definición de semidistancia de Haussdorff y del hecho que $\hat{E}$ atrae pullback a $\hat{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < dist(\{x\}, E(p_0)) &\le \lim_{n\to+\infty} dist(\varphi(t_n, \theta_{-t_n}p_0)x_n, E(p_0)) \\ &\le \lim_{n\to+\infty} dist(\varphi(t_n, \theta_{-t_n}p_0)D(\theta_{-t_n}p_0), E(p_0)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es una contradicción.

Definición 5.1.6 *Supongamos que φ es un SDNA con espacio base P y espacio de estados X. Un universo $\hat{\mathcal{D}}$ es una colección de conjuntos no autónomos y no vacíos que son cerrados respecto a la inclusión de conjuntos, i.e. si $\hat{D}_1 \in \hat{\mathcal{D}}$ y $D_2(p) \subset D_1(p)$ para todo p, entonces $\hat{D}_2 \in \hat{\mathcal{D}}$. Un conjunto no autónomo compacto $\hat{S} \in \hat{\mathcal{D}}$ es llamado un $\hat{\mathcal{D}}$-*atractor pullback de *φ si*

- *$\hat{S}$ es invariante, i.e.*

$$\varphi(t,p)S(p) = S(\theta_t p), \text{ para todo } t \ge 0 \text{ y } p \in P. \tag{5.4}$$

- $\hat{S}$ *es* $\hat{\mathcal{D}}$*-pullback atrayente, i.e. para todo* $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$*, y todo* $p \in P$

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), S(p)) = 0. \tag{5.5}$$

Claramente, el atractor pullback del SDNA φ es el conjunto compacto invariante maximal en el universo $\hat{D}$. El siguiente teorema, que es una versión adaptada para el de atractores aleatorios de [45] y generaliza el resultado en [35], da una condición suficiente para la existencia y unicidad del atractor pullback.

Desde ahora, supongamos que P es compacto y que $\Pi_X\hat{S} := \bigcup_{p\in P} S(p)$ es precompacto en X siendo $\hat{S}$ el atractor pullback de φ.

Teorema 5.1.7 *[45, Teorema 2.2] Sea φ un SDNA con espacio base P y espacio de estados X. Sea $\hat{\mathcal{D}}$ un universo. Supongamos que existe un conjunto no autónomo compacto $\hat{C} \in \hat{\mathcal{D}}$ que atrae pullback a todos los elementos de $\hat{\mathcal{D}}$. El conjunto omega límite pullback ω_C de $\hat{C}$ es el único $\hat{\mathcal{D}}$-atractor pullback de φ.*

Todo cociclo genera un semifujo llamado semiflujo triangular o skew-product (semiflujo de producto cruzado).

Definición 5.1.8 *Sean (X, d_X) y (P, d_P) dos espacios métricos, y sea (θ, φ) un SDNA con espacio base P y espacio de estados X. El semiflujo skew-product (SFSP) π: $\mathbb{T}^+ \times P \times X \to P \times X$ es un semigrupo de la forma:*

$$\pi(t,p,x) := (\theta_t p, \varphi(t,p)x). \tag{5.6}$$

Cuando el sistema dinámico no autónomo se define en $\mathbb{T}$, el semiflujo skew product resultante se convierte en un flujo skew product (FSP).

Definición 5.1.9 *Un subconjunto $D \subset P \times X$ es positivamente invariante respecto a π si $\pi(t,D) \subset D$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$; $D \subset P \times X$ es* invariante *respecto a π si $\pi(t,D) = D$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Definición 5.1.10 *Un universo $\tilde{\mathcal{D}}$ es una colección de subconjuntos no vacíos de $P \times X$ que son cerrados respecto a la inclusión de conjuntos, i.e. si $\tilde{D}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}$ y $\tilde{D}_2 \subset \tilde{D}_1$, entonces $\tilde{D}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}$. Un subconjunto invariante compacto $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{D}}$ es llamado un $\tilde{\mathcal{D}}$-*atractor global de π *si*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\pi(t,D), \tilde{S}) = 0$$

para todo $D \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Para su posterior uso, recordaremos un teorema simple sobre la existencia de atractor global para un semiflujo.

Teorema 5.1.11 *Sea π un semiflujo sobre un espacio métrico X y $\tilde{\mathcal{D}}$ un universo que consiste en subconjuntos de X. Si existe un conjunto compacto $C \in \tilde{\mathcal{D}}$ tal que C atrae a* *todos los elementos de $\tilde{\mathcal{D}}$, entonces el omega límite $\omega_\pi(C)$ de C con respecto a π es el único atractor global de π en el universo $\tilde{\mathcal{D}}$. El omega límite de C se define como sigue:*

$\omega_\pi(C) = \{y \in X :$ *existen sucesiones* $\{t_n\}$ *y* $\{y_n\}$ *con* $t_n \in \mathbb{T}, t_n \to +\infty$ *y* $y_n \in C$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \pi(t_n, y_n) = y\}$.

Como antes, supondremos que P es compacto y θ_t-invariante, i.e. $\theta_t P = P$ para todo $t \in \mathbb{T}$, el atractor global $\tilde{S}$ de π en $\tilde{D}$ definido en el Teorema 5.1.11 se puede escribir como

$$\tilde{S} = \bigcup_{p\in P} \{p\} \times S(p).$$

donde $S(p) = \{x \in X : (p, x) \in \tilde{S}\}$.

En realidad, cualquier conjunto compacto respecto al SFSP π puede ser escrito de esta manera.

Observación 10 *Podríamos también suponer que θ_t es un semigrupo ($t \geq 0$) y P positivamente invariante ($\theta_t P \subset P$ para cada $t \geq 0$) (ver Bortolan et al. [10]), pero entonces habría que cambiar ciertas hipótesis y el contenido de los resultados que siguen a continuación.*

Lema 5.1.12 *Un conjunto no autónomo $\hat{D}$ es invariante/invariante hacia adelante bajo el SDNA φ si y solo si es invariante/invariante hacia adelante respecto al SFSP π visto como un subconjunto $\tilde{D}$ de $P \times X$.*

Demostración: Vamos a probar la primera implicación. Sea $\hat{D}$ un conjunto no autónomo invariante (el caso invariante hacia adelante es similar) de φ. Entonces, el asociado $\tilde{D}$ puede ser escrito como $\tilde{D} = \cup_{p\in P}\{p\} \times D(p)$. Sea $t \geq 0$, veremos que $\pi(t, \tilde{D}) = \tilde{D}$. Si escogemos $(p, x) \in \tilde{D}$, con $x \in D(p)$, entonces $\pi(t, (p, x)) = (\theta_t p, \varphi(t, p)x)$. Pero $\hat{D}$ es invariante, luego $\varphi(t, p)x = y \in D(\theta_t p)$ y entonces $(\theta_t p, y) \in \tilde{D}$ y $\pi(t, \tilde{D}) \subset \tilde{D}$. Si escogemos un par $(p, x) \in \tilde{D}$, con $x \in D(p)$, como $\hat{D}$ es invariante, $x = \varphi(t, q)y$ con $y \in D(q)$. Entonces $(p, x) = \pi(t, (q, y)) \in \pi(t, \tilde{D})$, luego $\tilde{D} \subset \pi(t, \tilde{D})$.

Para ver la otra implicación, supongamos que $\tilde{D} = \cup_{p\in P}\{p\} \times D(p)$ es invariante. Sea $x \in D(p)$ para algún $p \in P$ y $t \geq 0$. Sabemos que $\pi(t, (p, x)) \in \tilde{D}$, pero $\pi(t, (p, x)) = (\theta_t p, \varphi(t, p)x)$, entonces $\varphi(t, p)x \in D(\theta_t p)$, y esto significa que $\varphi(t, p)D(p) \subset D(\theta_t p)$. Sea ahora $x \in D(\theta_t p)$, entonces $(\theta_t p, x) \in \tilde{D}$, y $(\theta_t p, x) = \pi(t, (p, y))$ con $y \in D(p)$. Entonces $x = \varphi(t, p)y \in \varphi(t, p)D(p)$ y, consecuentemente, $D(\theta_t p) \subset \varphi(t, p)D(p)$.

□

En resumen, dada una ecuación diferencial no autónoma como (5,1), nos encontramos con cuatro sistemas dinámicos diferentes, aunque muy relacionados:

(a) El *grupo base* $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ sobre P asociado a las dinámicas de las no linealidades dependientes del tiempo que aparecen en la ecuación, y que está definido por $(\theta_t f)(\cdot, \cdot) = f(t + \cdot, \cdot)$,

(b) el *semiflujo skew product* $\{\pi(t): \ t \geq 0\}$ definido en el espacio producto $P \times X$,

(c) el *sistema dinámico no autónomo* $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ con $\varphi(t, \theta_s p)\varphi(s, p) = \varphi(t + s, p)$,

(d) y el *proceso de evolución* $S(t, s)$.

Obsérvese que cada uno de estos cuatro tipos de sistemas dinámicos descritos arriba puede poseer un atractor asociado:

(i) Un atractor global $\mathbb{A}$ para el semiflujo skew product $\pi(t)$,

(ii) un atractor global Ξ para el grupo base θ_t (en nuestro caso, supondremos a P como atractor global),

(iii) un atractor cociclo $\{A(p)\}_{p\in P}$ para el semiflujo cociclo φ,

(iv) un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ para el proceso de evolución $S(t, s)$,

(iv) y el atractor uniforme $\mathcal{A} = \Pi_X(\mathbb{A}) := \{x \in X : \ \text{existe } p \in P \text{ con } (p, x) \in \mathbb{A}\}$.

Nuestro objetivo ahora es relacionar los diferentes conceptos de 'atractores' para sistemas dinámicos no autónomos. Estas relaciones serán útiles a lo largo de este trabajo, y son cruciales para entender las dinámicas sobre el atractor uniforme (ver Bortolan et al. [10]).

5.2. Atractores cociclo y el atractor del flujo skew product

Dado un SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$, supongamos que $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ posee un atractor global $\mathbb{A}$ sobre $P \times X$. Sabemos que $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ tiene un atractor global si y solo si existe un conjunto compacto $\mathbb{K} \subset P \times X$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) = 0, \tag{5.7}$$

para todo subconjunto acotado $\mathbb{B}$ de $P \times X$.

Primero relacionaremos la compacidad asintótica de $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ con una condición equivalente para $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$.

Proposición 5.2.1 *Si $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ es un SDNA y $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ es el semiflujo skew product asociado sobre $P \times X$, entonces las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

(i) existe un subconjunto compacto $\mathbb{K}$ de $P \times X$ tal que para cada subconjunto acotado $\mathbb{B}$ de $P \times X$

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) = 0;$$

(ii) *existe un subconjunto compacto K de X tal que para cada subconjunto acotado B de X*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,p)B, K) = 0,$$

siendo el límite uniforme en $p \in P$.

Demostración: Supongamos que (i) es cierto, sea $K = \Pi_X \mathbb{K}$ y B un subconjunto acotado de X. Consideremos $\mathbb{B} := B \times P$. Entonces $\mathbb{B}$ es acotado en $P \times X$ y $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K})$ $= 0$. Así que

$$dist(\varphi(t,p)B, K) \leqslant \operatorname{dist}(\pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}),$$

para todo $p \in P$, y por lo tanto se tiene ii).

Recíprocamente, supongamos que (ii) es cierto, tomamos $\mathbb{K} = K \times P$, que es compacto ya que K y P son compactos. Dado cualquier subconjunto acotado $\mathbb{B}$ de $P \times X$ estará contenido en un conjunto de la forma $B \times P$, donde B es un subconjunto acotado de X. Como

$$\pi(t)[B \times P] \subseteq \left[\bigcup_{p\in P} \varphi(t,p)B\right] \times \theta_t P,$$

se deduce que

$$dist(\pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) \leq dist(\pi(t)[B \times P], K \times P) \leq \sup_{p\in P} dist(\varphi(t,p)B, K),$$

de donde se sigue (i).

$\square$

Este resultado constituye la base de la siguiente definición [**?**, 79, 28, 40].

Definición 5.2.2 *El SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ es uniformomente asintóticamente compacto si existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{p\in P} \operatorname{dist}(\varphi(t,p)B, K) = 0, \tag{5.8}$$

para cada subconjunto acotado B de X.

Acabamos de mostrar que la compacidad asintótica uniforme de $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ implica la compacidad asintótica de $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ y de aquí que $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ tenga un atractor global $\mathbb{A}$. La pregunta natural es cómo puede ser esto interpretado por el semiflujo cociclo. Podemos adoptar una primera aproximación si deseamos concentrarnos en el comportamiento asintótico cuando $t \to +\infty$. Obsérvese que la propiedad atrayente de $\mathbb{A}$ implica que si denotamos $\mathcal{A} = \Pi_X \mathbb{A}$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{p\in P} \operatorname{dist}(\varphi(t,p)B, \mathcal{A}) = 0, \tag{5.9}$$

para todos los subconjuntos acotados B de X.

Mientras que la invarianza de $\mathbb{A}$ bajo la acción de $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ no se traslada a $\mathcal{A}$ bajo la acción del SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$, la propiedad de minimalidad se preserva: el atractor global $\mathbb{A}$ es el conjunto cerrado minimal en $P \times X$ que atrae a todos los subconjuntos acotados, y su proyección $\mathcal{A}$ es el subconjunto cerrado minimal de X que es uniformemente atrayente (en el sentido de (5.9)) para todos los sunconjuntos acotados B de X. Esto es fácil de ver, ya que si $\tilde{\mathcal{A}} \subset X$ es uniformemente atrayente, $\tilde{\mathcal{A}} \times P$ es atrayente para $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$, de donde $\mathbb{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \times P$ y por lo tanto $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$.

Esto motiva la definición de atractor uniforme.

Definición 5.2.3 *El subconjunto cerrado minimal de X que es uniformemente atrayente para todos los subconjuntos acotados B de X es lo que llamamos el atractor uniforme para el SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$.*

Además, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 5.2.4 *Si el SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ es asintóticamente uniformemente compacto entonces tiene un atractor uniforme.*

Dado un subconjunto $\mathbb{E}$ de $P \times X$ denotamos por $E(p) = \{x \in X : (p, x) \in \mathbb{E}\}$ la $p-$sección de $\mathbb{E}$; luego

$$\mathbb{E} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times E(p) \tag{5.10}$$

Dado un conjunto no autónomo $\{E(p)\}_{p \in P}$ denotamos por $\mathbb{E}$ el conjunto definido por (5.10).

Obsérvese que

$$\bigcup_{p \in P} E(p) = \Pi_X \mathbb{E}.$$

Vamos ahora a relacionar los conceptos de atractores cociclos para un SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ con el atractor global para el semiflujo skew product asociado $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$.

En primer lugar, podemos particularizar la Definición 5.1.6 al caso en el que los conjuntos atraídos sean los acotados de X, lo que denominaremos atractor cociclo.

Definición 5.2.5 *Supongamos que P es compacto e invariante (esto es, el atractor global de $\{\theta_t : t \geqslant 0\}$ es P) y que $\{\theta_t : t \geqslant 0\}$ es un semigrupo sobre P y $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$, para todo $t > 0$. Un conjunto no autónomo compacto $\{A(p)\}_{p \in P}$ es llamado un atractor cociclo de $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ si*

- **(i)** *$\{A(p)\}_{p \in P}$ es invariante bajo el SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$; i.e., $\varphi(t, \theta_s p) A(\theta_s p) = A(\theta_{t+s} p)$, para todo $t \geq s \in \mathbb{R}$.*
- **(ii)** *$\{A(p)\}_{p \in P}$ atrae pullback a todos los subconjuntos acotados $B \subset X$, i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, \theta_{-t} p) B, A(p)) = 0.$$

Observación 11 *En el caso de que P no sea invariante y $\{\theta_t : t \geqslant 0\}$ tenga un atractor global Ξ , entonces podemos también definir el atractor cociclo $\{A(p)\}_{p\in\Xi}$ para cada $p \in \Xi$, ya que en este caso existe una solución global $\varphi : \mathbb{R} \to \Xi$ a lo largo de p, definiendo $\theta_{-t}p$, para todo $t \geq 0$ (ver Bortolan et al. [10]).*

Recordemos que para un conjunto no autónomo $\hat{D}$, denotamos $\Pi_X \hat{D} = \bigcup_{p\in P} D(p)$. Y para un conjunto $\tilde{D}$ en $P \times X$, también denotamos $\Pi_X \tilde{D} := \bigcup_{p\in P} D(p)$

Supongamos que existe un conjunto no autonomo abierto $\hat{U} = \{U(p)\}_{p\in P}$ que es también un conjunto abierto en $P \times X$ cuando es visto como subconjunto en el espacio ampliado, i.e. $\tilde{U} = \bigcup_{p\in P}\{p\} \times U(p)$ es abierto en $P \times X$. Sea

$$\hat{\mathcal{D}} = \{\hat{D} : \overline{D(p)} \subset U(p) \text{ para cada } p \text{ y } \Pi_X \hat{D} \text{ acotado}\} \tag{5.11}$$

y

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{D \subset P \times X : D \text{ acotado y } \overline{D} \subset \tilde{U}\}. \tag{5.12}$$

Entonces $\hat{\mathcal{D}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}$ son dos universos para el SDNA φ y el SFSP π, respectivamente.

Observación 12 *Obsérvese que, para un conjunto dado $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$, no es necesario que $\overline{\bigcup_{p\in P}\{p\} \times D(p)} \subset \tilde{U}$ (pero claramente tenemos que $\bigcup_{p\in P}\{p\} \times D(p) \subset \tilde{U}$). Luego tenemos*

$$\check{\mathcal{D}} = \{\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}} : \overline{\bigcup_{p\in P}\{p\} \times D(p)} \subset \tilde{U}\}. \tag{5.13}$$

Teorema 5.2.6 *Supongamos que $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{D}}$ es el atractor global del SFSP π en $\tilde{\mathcal{D}}$ satisfaciendo que $\Pi_X \tilde{A} \subset U(p)$ para cada p. Entonces el conjunto asociado $\hat{A}$ es el atractor pullback del SDNA φ en $\check{\mathcal{D}}$.*

Demostración: Para todo $\hat{D} \in \check{\mathcal{D}}$, como $\check{\mathcal{D}} \subset \hat{\mathcal{D}}$, es claro que el asociado $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}$. Ya que $\tilde{A}$ es el atractor global del SFSP π en $\tilde{\mathcal{D}}$, se deduce que $\Pi_X \tilde{A}$ es compacto en X y que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi(t,p)D(p), \Pi_X \tilde{A}) = 0.$$

Esto implica que, para cada $p \in P$,

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), \Pi_X \tilde{A}) = 0. \tag{5.14}$$

Es inmediato comprobar que el conjunto no autónomo $\hat{K}_1 = \{K_1(p)\}_{p\in P} \in \check{\mathcal{D}}$, con $K_1(p) \equiv \Pi_X \tilde{A}$, es un conjunto compacto no autónomo que atrae pullback a los conjuntos de $\check{\mathcal{D}}$. Entonces, por el Teorema 5.1.7, existe un atractor pullback del SDNA φ en $\check{\mathcal{D}}$.

Afirmamos que el atractor pullback de φ en $\check{\mathcal{D}}$ es en realidad el conjunto no autónomo $\hat{A}$ asociado a $\tilde{A}$. Por el Teorema 5.1.7, el atractor pullback en $\check{\mathcal{D}}$ es el conjunto omega límite pullback ω_{K_1} of $\hat{K}_1$. Como (5.14) se cumple para todo $\hat{D} \in \check{\mathcal{D}}$ y $\hat{K}_1 \in \check{\mathcal{D}}$, se sigue que

$\omega_{K_1}(p) \subset \Pi_X\tilde{A}$ para todo $p \in P$. Por la definición de conjuntos omega límites, ω_{K_1} atrae pullback a $\hat{K}_1$, y entonces es el conjunto no autónomo maximal en $\hat{K}_1$ que es invariante con respecto al SDNA φ. Por el Lema 5.1.12, el conjunto $\bigcup_{p\in P}\{p\} \times \omega_{K_1}(p)$ es invariante con respecto al SFSP π. Como $\tilde{A}$ es el atractor global de π, es el conjunto compacto maximal en $\tilde{\mathcal{D}}$. Por otro lado, el conjunto asociado $\tilde{K}_1$ de $\hat{K}_1$ es un elemento de $\tilde{\mathcal{D}}$ y $\tilde{A} \subset \tilde{K}_1$, luego $\tilde{A}$ es el conjunto compacto maximal en $\tilde{K}_1$ que es invariante respecto a π. De nuevo por el Lema 5.1.12 otra vez, el asociado $\hat{A}$ es el conjunto no autónomo compacto maximal $\hat{K}_1$ que es invariante respecto al SDNA φ. Esto es, $\hat{A} = \omega_{K_1}$ es el atractor pullback de φ en $\hat{\mathcal{D}}$. La prueba esta ahora completa.

□

Acabamos de ver que la existencia del atractor global para el semiflujo skew product $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ implica la existencia del atractor cociclo para el SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$. Sin condiciones adicionales el recíproco no se tiene; de hecho, podemos ver que el atractor cociclo no necesita en general ser acotado (véase, por ejemplo, [56]), mientras que el atractor global de $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ debe ser compacto. El siguiente resultado ofrece, bajo ciertas condiciones, el recíproco.

Teorema 5.2.7 *Supongamos que $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ es el atractor pullback del SDNA φ en $\hat{\mathcal{D}}$ satisfaciendo que:*

(H1) $\Pi_X\hat{A}$ *es precompacto,*

(H2) $\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), \Pi_X\hat{A}) = 0$ *para cada* $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$, *y*

(H3) $\overline{\Pi_X\hat{A}} \subset U(p)$ *para cada* p.

Entonces el conjunto asociado $\tilde{A}$ es el atrator global del SFSP π en $\tilde{\mathcal{D}}$.

Demostración: Obsérvese que el atractor pullback $\hat{A}$ es invariante respecto al SDNA φ, luego, por el Lema 5.1.12, $\tilde{A}$ es invariante respecto al SFSP π. Sea $\tilde{B}$ la clausura de $\tilde{A}$ en $P\times X$. Como $\tilde{A} \subset P\times\overline{\Pi_X\hat{A}}$, P es compacto y $\Pi_X\hat{A}$ es precompacto, entonces $\tilde{B}$ es compacto y, por la continuidad de π, se tiene que $\tilde{B}$ es un conjunto invariante respecto a π. Por la definición de $\tilde{B}$, tenemos que $A(p) \subset B(p)$ para cada $p \in P$. Por otro lado, por la hipótesis de que $\overline{\Pi_X\hat{A}} \subset U(p)$ para cada p, se deduce que el conjunto no autónomo asociado $\hat{B}$ de $\tilde{B}$ pertenece a $\hat{\mathcal{D}}$, luego $\hat{A}$ atrae pullback a $\hat{B}$. Esto es,

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)B(\theta_{-t}p), A(p)) = dist(B(p), A(p)) = 0, \tag{5.15}$$

lo que implica que $B(p) \subset A(p)$. Además, $A(p) = B(p)$ para cada p y entonces $\tilde{A}$ es compacto en $P \times X$.

Si $\tilde{C} \subset \tilde{U}$ es un conjunto compacto invariante con respecto a π, entonces por el Lema 5.1.12, el asociado $\hat{C}$ es invariante con respecto al SDNA φ. Además, por la atracción pullback de $\hat{A}$ en $\hat{\mathcal{D}}$, como el argumento en (5.15), se deduce que $C(p) \subset A(p)$ para cada p y entonces

$\tilde{C} \subset \tilde{A}$. Esto es, $\tilde{A}$ es el conjunto compacto maximal en $\tilde{U}$ que es invariante con respecto a π.

Sea $K := P \times \overline{\Pi_X \hat{A}}$. Entonces K es un conjunto compacto en $\tilde{U}$. Para todo $D \in \tilde{\mathcal{D}}$, podemos ampliarlo artificialmente agotando trivialmente todos los elementos de P, i.e., sea

$$D_1(p) := \begin{cases} D(p), & \text{si existe la } p\text{-fibra en } D, \\ \emptyset, & \text{si no existe la } p\text{-fibra en } D. \end{cases}$$

Entonces $\hat{D}_1 \in \hat{\mathcal{D}}$. Por hipótesis, tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)D_1(\theta_{-t}p), \overline{\Pi_X \hat{A}}) = 0 \text{ (atracción pullback uniforme).}$$

Luego se deduce que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} dist(\varphi(t, p)D_1(p), \overline{\Pi_X \hat{A}}) = 0 \text{ (atracción forward uniforme),}$$

y entonces

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\pi(t, D), P \times \overline{\Pi_X \hat{A}}) = \lim_{t\to+\infty} dist(\pi(t, D), K) = 0.$$

Esto es, que el conjunto compacto K atrae a todos los elementos de $\tilde{\mathcal{D}}$. Por el Teorema 5.1.11, existe un atractor global de π en $\tilde{\mathcal{D}}$ y el atractor es el conjunto compacto maximal en $\tilde{\mathcal{D}}$ que es invariante respecto a π. Además, este atractor es $\tilde{A}$.

□

Observación 13 *Obsérvese que en este caso, atracción pullback y atracción forward son conceptos equivalentes.*

Podemos entonces escribir el siguiente corolario.

Corolario 5.2.8 *(Proposición 3.32 en [48], o Teorema 3.4 en [15]) Supongamos que $\{A(p)\}_{p\in P}$ es el atractor cociclo de $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$, $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$ es el SFSP asociado. Supongamos que $\{A(p)\}_{p\in P}$ es uniformemente atrayente, i.e., para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{p\in P} \operatorname{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}p)D(\theta_{-t}p), A(p)) = 0,$$

y que $\bigcup_{p\in P} A(p)$ es precompacto en X. Entonces el conjunto $\mathbb{A}$ asociado a $\{A(p)\}_{p\in P}$, dado por

$$\mathbb{A} = \bigcup_{p\in\Xi} \{p\} \times A(p),$$

es el atractor global del semigrupo $\{\pi(t) : t \geqslant 0\}$.

Podemos ahora reinterpretar el Corolario 5.2.8 en términos del atractor uniforme.

Teorema 5.2.9 *Supongamos que el SDNA* $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ *es uniformemente asintóticamente compacto. Entonces tiene un atractor uniforme* $\mathcal{A}$ *y un atractor cociclo* $\{A(p)\}_{p\in P}$*, y se verifica que*

$$\bigcup_{p\in P} A(p) = \mathcal{A}. \tag{5.16}$$

5.3. Atractor pullback y atractor uniforme

Para cada $p \in P$ y cada solución global $\psi : \mathbb{R} \to P$ a través de p de $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$, podemos construir, por medio del SDNA $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$, un proceso de evolución como sigue: para $t \geqslant s \in \mathbb{R}$, definimos

$$S_{p,\psi}(t, s) = \varphi(t - s, \psi(s)).$$

Luego, dado $p \in P$ y una solución global $\psi : \mathbb{R} \to \Xi$ a través de p de $\{\theta_t : t \geqslant 0\}$ decimos que $\{S_{p,\psi}(t, s) : t \geqslant s\}$ es el *proceso de evolución asociado.*

Definición 5.3.1 *Dada una solución global acotada* $\eta : \mathbb{R} \to P$ *del sistema base* $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ *y dos conjuntos no autónomos* $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *y* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$*, decimos que* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ η-atrae pullback a $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *si*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{d}_H(\varphi(t, \eta(s-t))D(s-t), A(s)) = 0, \text{ para cada } s \in \mathbb{R}.$$

Observación 14 *Obsérvese que tenemos en cuenta el caso en el que* $D(t) \subset D$*, acotado en* X*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

El siguiente resultado es una consecuencia del Corolario 5.2.8 y muestra la relación entre el atractor global de un semiflujo skew product y el atractor pullback de un proceso de evolución.

Teorema 5.3.2 *Supongamos que el semiflujo skew product* $\{\pi(t) : t \geq 0\}$ *posee un atractor global* $\mathbb{A}$*. Si* $\eta : \mathbb{R} \to \Xi$ *es una solución global acotada* $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ *entonces, el proceso de evolución* $\{T_\eta(t, s) : t \geq s\}$ *dado por*

$$T_\eta(t, s)x = \varphi(t - s, \eta(s))x, \; x \in X,$$

posee un $(\mathfrak{D}, \eta)$*-pullback atractor* $\{A_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *con la propiedad de que* $A_\eta(t) = \{x \in X : (x, \eta(t)) \in \mathbb{A}\}$*, donde* $\mathfrak{D}$ *es la colección de todos los conjuntos no autónomos* $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *tales que* $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} D(t)$ *es acotado en* X*. Además,*

$$\mathbb{A} = \left\{ \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_\eta(t) \times \{\eta(t)\}, \; \eta(\cdot) \text{ es una solución global acotada para } \{\theta_t : t \in \mathbb{R}\} \right\}$$

Corolario 5.3.3 *Bajo las hipótesis del Teorema 5.3.2, el SDNA* $(\theta, \varphi)_{(P,X)}$ *tiene un atractor uniforme* $\mathcal{A}$ *y*

$$\mathcal{A} = \Pi_X \mathbb{A} = \bigcup_{\eta} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_\eta(t),$$

donde la primera unión está tomada sobre todas las soluciones globales $\eta : \mathbb{R} \to P$ *de* $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$.

Obsérvese que los Teoremas 5.2.7 y 5.2.6 son suficientemente generales como para cubrir atractores locales y atractores que atraen en el espacio entero. En particular, si el conjunto no autónomo $\hat{U}$ satisface que $U(p) \equiv X$ para cada $p \in P$, entonces el Corolario 5.2.8 implica el siguiente resultado, que establece que el atractor global del SFSP y el atractor pullback del SDNA son en realidad equivalentes.

Teorema 5.3.4 *Considérense los universos*

$$\hat{\mathcal{D}} = \{\hat{D} : \Pi_X \hat{D} \text{ acotado en } X\} \tag{5.17}$$

y

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{D \subset P \times X : D \text{ acotado}\}. \tag{5.18}$$

Entonces el SFSP admite un atractor global $\tilde{A}$ *en* $\tilde{\mathcal{D}}$ *si y sólo si el SDNA asociado admite un atractor pullback* $\hat{A}$ *en* $\hat{\mathcal{D}}$ *con* $\Pi_X \hat{A}$ *precompacto y verificando las hipótesis* $(H2)$ *en el Teorema 5.2.7. Además, el conjunto no autónomo asociado a* $\tilde{A}$ *es* $\hat{A}$.

5.4. Parejas atractor-repulsor

En la siguiente definición usamos la preimagen de un conjunto no autónomo. Como estamos interesados en la estructura interna del atractor, aplicaremos esta definición solamente cuando el conjunto no autónomo sea un subconjunto de $\hat{S}$, el $\mathcal{D}$-atractor pullback, y la preimagen que consideramos es sólo la que se encuentra sobre $\hat{S}$. En este caso, como $\hat{S}$ es invariante y compacto, podemos asegurar que la preimagen siempre existe y el conjunto α-límite es no vacío.

Lema 5.4.1 *Sean* $K_2 \subset X$ *y* $\hat{D} \subset \hat{S}$ *dos conjuntos compactos satisfaciendo que, para cada* $p \in P$,

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(-t, \theta_t p) D(\theta_t p), K_2) = 0, \tag{5.19}$$

donde $\varphi(-t, \theta_t p) D(\theta_t p)$ *representa la preimagen de* $D(\theta_t p)$ *restringida a* $\hat{S}$ *bajo la aplicación* $\varphi(t, p)$. *Entonces, el conjunto* α*-límite pullback* ω_D^* *de* $\hat{D}$, *definido por*

$$\omega_D^*(p) := \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(-t, \theta_t p) D(\theta_t p)}, \tag{5.20}$$

es un conjunto no autónomo compacto e invariante.

Observación 15 *El resultado análogo para conjuntos ω-límites de conjunto no autónomos es bien conocido, pero el resultado para conjuntos α-límites de un SDNA no invertible necesita ser demostrado.*

Demostración: Antes de nada, obsérvese que $\overline{\cup_{t\geq T}\varphi(-t,\theta_t p)D(\theta_t p)}$ es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto $\hat{S}$, y por tanto un subconjunto compacto. También, como la intersercción de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, el α-límite es un conjunto compacto.

Obsérvese que $x \in \omega^*_D(p)$ si y sólo si existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{t_n\}$ con $t_n \to +\infty$ y $x_n \in D(\theta_{t_n}p)$, y sucesiones $\{y_n\}$ con $y_n \in \varphi(-t_n,\theta_{t_n}p)x_n$ tales que $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$.

Si $x \in \omega^*_D(p)$, existen entonces sucesiones $\{x_n\}$ y $\{t_n\}$ con $t_n \to +\infty$, tales que $\varphi(t_n,p)x_n \in D(\theta_{t_n}p)$ y $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Para todo $s > 0$, cuando n es suficientemente grande como para que $t_n > s$, tenemos que $\varphi(t_n,p)x_n = \varphi(t_n - s,\theta_s p)\varphi(s,p)x_n \in D(\theta_{t_n-s}\theta_s p)$. Tomamos sucesiones $\{s_n = t_n - s\}$ e $\{y_n = \varphi(s,p)x_n\}$. Entonces $s_n \to +\infty$, $\varphi(s_n,\theta_s p)y_n \in D(\theta_{s_n}\theta_s p)$ y $\lim_{n\to+\infty} y_n = \varphi(s,p)x$. Esto es, $\varphi(s,p)x \in \omega^*_D(\theta_s p)$ y entonces $\varphi(s,p)\omega^*_D(p) \subset \omega^*_D(\theta_s p)$.

Si $y \in \omega^*_D(\theta_s p)$ para algún $s > 0$, existen sucesiones $\{t_n\}$ y $\{y_n\}$ con $t_n \to +\infty$, $\varphi(t_n,\theta_s p)y_n \in D(\theta_{t_n}\theta_s p)$ y $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Escogemos $\{z_n\}$ tal que $\varphi(s,p)z_n = y_n$ (obsérvese que z_n siempre existe). Entonces $\varphi(t_n + s,p)z_n = \varphi(t_n,\theta_s p)\varphi(s,p)z_n = \varphi(t_n,\theta_s p)y_n \in D(\theta_{t_n+s}p)$, i.e. $z_n \in \varphi(-t_n - s,\theta_{t_n+s}p)D(\theta_{t_n+s}p)$. Nótese que por (5.19) y la compacidad de K_2, la sucesión $\{z_n\}$ es relativamente compacta y denotamos por z el límite de $\{z_n\}$ (tomando una subsucesión si fuese necesario). Obsérvese que $z \in \omega^*_D(p)$. Ahora, por la continuidad de φ, se deduce que $y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \varphi(s,p)\lim_{n\to+\infty} z_n = \varphi(s,p)z \in \varphi(s,p)\omega^*_D(p)$. Esto es, $\omega^*_D(\theta_s p) \subset \varphi(s,p)\omega^*_D(p)$. La demostración queda así terminada.

□

Observación 16 *De igual manera que en la Observación 9, es inmediato comprobar que tenemos propiedades análogas para conjuntos α-límites pullback.*
(i) Dados dos conjuntos no autónomos $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$, si (5.19) *se verifica para un conjunto compacto K_2, con $\hat{D}$ reemplazado por $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$, entonces tenemos que*

$$\omega^*_{D_1\cup D_2}(p) = \omega^*_{D_1}(p) \cup \omega^*_{D_2}(p)$$

para cada $p \in P$.
(ii) Si un conjunto cerrado no autónomo $\hat{E}$ repele pullback *a otro $\hat{D}$, i.e. para cada p,*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(-t,\theta_t p)D(\theta_t p), E(p)) = 0,$$

entonces $\omega^*_D(p) \subset E(p)$ para todo $p \in P$.

Un conjunto $\tilde{A} \subset \tilde{S}$ es llamado un *atractor local* con respecto al SFSP π, si existe un entorno $\tilde{U}_1$ de $\tilde{A}$ en $\tilde{S}$ tal que $\omega_\pi(\tilde{U}_1) = \tilde{A}$. Si definimos

$$\tilde{U} := \bigcup_{t\geq\tau} \pi(t,\tilde{U}_1), \qquad \text{para algun } \tau \geq 0,$$

entonces $\tilde{U}$ es un conjunto positivamente invariante respecto a π tal que $\omega_\pi(\tilde{U}) = \tilde{A}$. También, la base de atracción $B(\tilde{A};\tilde{S})$ de $\tilde{A}$ restringida a $\tilde{S}$ viene dada por

$$B(\tilde{A};\tilde{S}) = \{(p,x) \in \tilde{S} : \pi(t,p,x) \in \tilde{U} \text{ para algun } t \geq 0\},$$

que es independiente de la elección de $\tilde{U}$. El repulsor dual de $\tilde{A}$ viene dado por

$$\tilde{R} = \tilde{S} \setminus B(\tilde{A};\tilde{S}),$$

y $(\tilde{A},\tilde{R})$ se dice que es un *par atractor-repulsor en* $\tilde{S}$ respecto al SFSP π. Como estos hechos son clásicos, omitiremos las demostraciones aquí (véanse [31, 71] para los detalles y [59, 60] para el caso aleatorio).

Observación 17 *Obsérvese que el Lema 5.1.12 implica que $\tilde{A}$ y $\tilde{R}$ son invariantes si y sólo si $\hat{A}$ y $\hat{R}$ lo son.*

Definición 5.4.2 *Sea φ un SDNA que admite un atractor pullback $\hat{S}$ con $\Pi_X\hat{S}$ precompacto y verificándose la hipótesis $(H2)$ del Teorema 5.2.7. Un par no autónomo compacto $(\hat{A},\hat{R})$ se dice que es un* par atractor-repulsor pullback en $\hat{S}$ *si el asociado par $(\tilde{A},\tilde{R})$ es un par atractor-repulsor del atractor global $\tilde{S}$ del SFSP π.*

Tenemos las siguientes propiedades básicas para pares atractor-repulsor pullback.

Teorema 5.4.3 *Supongamos que $\hat{S}$ es el atractor pullback del SDNA φ en el universo $\hat{\mathcal{D}}$ dado por* (5.17) *con $\Pi_X\hat{S}$ precompacto, satisfaciendo la hipótesis $(H2)$ del Teorema 5.2.7, y $(\hat{A},\hat{R})$ es un atractor-repulsor pullback en $\hat{S}$ satisfaciendo que $\Pi_X\hat{A} \cap \Pi_X\hat{R} = \emptyset$. Entonces, para cualquier conjunto puntual no autónomo $x(p) \in S(p) \setminus (A(p) \cup R(p))$ con $\operatorname{dist}(\tilde{x},\tilde{R}) > 0$, tenemos que para cada $p \in P$*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p), A(p)) = 0;$$

y para todo conjunto no autónomo puntual $x(p) \in S(p) \setminus (A(p) \cup R(p))$ con $\operatorname{dist}(\tilde{x},\tilde{A}) > 0$, tenemos que para cada $p \in P$

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(-t,\theta_t p)x(\theta_t p), R(p)) = 0.$$

Demostración: Sea $\tilde{U}$ la base de atracción de $\tilde{A}$ respecto al SFSP π, i.e. $\tilde{U} = \{(p,x) \in P \times X : \lim_{t\to\infty} d(\pi(t,p,x),\tilde{A}) = 0\}$. Probemos una propiedad más general de atracción pullback. Obsérvese que $\tilde{R} = \tilde{S} \setminus \tilde{U}$, y considérese el universo $\tilde{\mathcal{D}}$ definido en (5.12). Como $\Pi_X\hat{A} \cap \Pi_X\hat{R} = \emptyset$, se deduce que la hipótesis del Teorema 5.2.6 se satisface, luego $\hat{A}$ es un atractor pullback en el universo $\check{\mathcal{D}}$ definido en (5.13). En particular, para todo $x(p) \in U(p)$ con $\Pi_X\hat{x}$ acotado y $\operatorname{dist}(\tilde{x},\tilde{R}) > 0$, tenemos que $\hat{x} \in \check{\mathcal{D}}$. Además, la atracción pullback sobre $\hat{x}$ queda demostrada.

Obsérvese que para todo $x(p) \in S(p) \setminus (A(p) \cup R(p))$ con $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \tilde{A}) > 0$, existe un entorno compacto $\tilde{V}$ de $\tilde{R}$ en $\tilde{S}$, disjunto de $\tilde{A}$, tal que $\tilde{x} \subset \tilde{V}$. Por [64, Proposition 3.3], el α-límite $\omega^*_\pi(\tilde{V})$ de $\tilde{V}$ con respecto a π satisface que $\omega^*_\pi(\tilde{V}) = \tilde{R}$, i.e.,

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\pi(-t, \tilde{V}), \tilde{R}) = 0,$$

donde $\pi(-t, V)$ representa la preimagen de V bajo la aplicación $\pi(t, \cdot)$ restringida a $\tilde{S}$. Entonces se deduce que

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{p \in P} dist(\varphi(-t, p)V(p), \Pi_X \tilde{R}) = 0,$$

lo que nos da que para cada p,

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(-t, \theta_t p)V(\theta_t p), \Pi_X \tilde{R}) = 0. \tag{5.21}$$

Sea ω^*_V el conjunto alfa límite pullback del conjunto no autónomo $\hat{V}$, asociado a $\tilde{V}$. Por la definición de conjunto alfa límite pullback y la compacidad de $\Pi_X \tilde{R}$, ω^*_V es un conjunto no autónomo invariante por el Lema 5.4.1, y por tanto invariante cuando lo observamos como un subconjunto de $P \times X$ por el Lema 5.1.12. Sea $K_3 := \overline{\cup_{p \in P} \{p\} \times \omega^*_V(p)}$, entonces K_3 es un conjunto compacto que es invariante respecto a π. Sea $K_4 := P \times \Pi_X \tilde{R}$. Entonces K_4 es un conjunto compacto en $P \times X$ y $K_3 \subset K_4$ por (5.21). Obsérvese que $\Pi_X \hat{A} \cap \Pi_X \hat{R} = \emptyset$ implica que $\tilde{A} \cap K_4 = \emptyset$. Por [64, Proposition 3.3] sabemos que $\tilde{R}$ es el conjunto compacto invariante maximal respecto a π que es disjunto de $\tilde{A}$, luego tenemos que $K_3 \subset \tilde{R}$. En particular, $\omega^*_V(p) \subset R(p)$ para todo $p \in P$. La prueba está ahora completa.

□

Observación 18 *Obsérvese que la hipótesis* $\Pi_X \hat{A} \cap \Pi_X \hat{R} = \emptyset$ *puede parecer una restricción fuerte para un sistema dinámico no autónomo general. Sin embargo, es muy adecuada para pequeñas perturbaciones no autónomas de sistemas autónomos, como se muestra en [3].*

Por [64, Proposition 3.3], el Teorema 5.4.3, las Observaciones 9 (ii) y 16 (i), tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.4.4 *Supongamos que* $\hat{S}$ *es el atractor pullback del SDNA* φ *en el universo* $\hat{\mathcal{D}}$ *dado por* (5.17) *con* $\Pi_X \hat{S}$ *precompacto. Supongamos además que se verifica* $(H2)$ *del Teorema 5.2.7, y que* $(\hat{A}, \hat{R})$ *es un par atractor-repulsor pullback en* $\hat{S}$ *satisfaciendo que* $\Pi_X \hat{A} \cap \Pi_X \hat{R} = \emptyset$. *Entonces, para todo conjunto no autónomo puntual* $x(p) \in S(p) \setminus R(p)$ *con* $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \tilde{R}) > 0$, *tenemos que para cada* p

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(t, \theta_{-t} p)x(\theta_{-t} p), A(p)) = 0;$$

y para cada conjunto no autónomo puntual $x(p) \in S(p) \setminus A(p)$ *con* $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \tilde{A}) > 0$, *tenemos para cada* p

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(-t, \theta_t p)x(\theta_t p), R(p)) = 0.$$

Demostración: Sólo necesitamos observar que $\hat{x} \in \hat{A}$, $\varphi(t, \theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p) \in A(p)$ para todo $t \geq 0$ y $p \in P$; para todo $\hat{x} \in \hat{R}$, $\varphi(-t, \theta_t p)x(\theta_t p) \subset R(p)$ para todo $t \geq 0$ y $p \in P$.

□

Además, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.4.5 *Supongamos que $\hat{S}$ es el atractor pullback del SDNA φ en el universo $\hat{\mathcal{D}}$ dado por* (5.17) *con $\Pi_X \hat{S}$ precompacto, que se verifica la hipótesis $(H2)$ del Teorema 5.2.7, y que $(\hat{A}, \hat{R})$ es un atractor-repulsor pullback en $\hat{S}$ satisfaciendo que $\Pi_X \hat{A} \cap \Pi_X \hat{R} = \emptyset$. Entonces para cualquier conjunto no autónomo puntual $x(p) \in S(p)$ con $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \partial \tilde{R}) > 0$, tenemos que para cada p*

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p), A(p) \cup R(p)) = 0;$$

además, cuando φ es invertible sobre $\tilde{S}$, para cualquier conjunto no autónomo puntual $x(p) \in S(p)$ con $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \partial \tilde{A}) > 0$, tenemos que para cada p

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(-t, \theta_t p)x(\theta_t p), A(p) \cup R(p)) = 0.$$

Demostración: Obsérvese que para todo $\hat{x} \in \hat{R}$, tenemos que $\varphi(t, \theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p) \in R(p)$ por la invarianza de $\hat{R}$, luego las propiedades de atracción pullback se deducen del Corolario 5.4.4 y la Observación 9 (ii). Obsérvese que cuando φ es invertible, la propiedad de repulsión pullback es completamente similar a la propiedad de atracción invirtiendo t.

Observación 19 *Cuando φ es no invertible sobre $\tilde{S}$, no estamos seguros si se verifica la misma propiedad de repulsión que en el Corolario 5.4.5. La situación se vuelve complicada ya que la preimagen de $\tilde{x} \in \tilde{A}$ puede cruzar el borde de $\partial \tilde{A}$, i.e. puede existir alguna órbita que cruza a $\partial \tilde{A}$ y permanece cerca de $\partial \tilde{A}$ en tiempo backward.*

5.5. Descomposición de Morse y funciones de Lyapunov

Los siguientes conceptos de "órbita backwardz "órbita entera"para sistemas dinámicos no autónomos están adaptados de los conceptos introducidos en [59] para semiflujos aleatorios. Como ya hemos observado, cuando hablamos de preimágenes o de órbitas backward, sólo consideramos aquellas que se encuentran en el atractor global $\tilde{S}$.

Definición 5.5.1 *(i) Fijados $p \in P$ y $x \in X$, una aplicación $\sigma_{\cdot}(p) : \mathbb{R}^- \to X$ es llamada una* órbita backward de φ a lo largo de x dirigida por p *si se satisface la propiedad del cociclo:*

$$\sigma_0(p) = x, \ \ \sigma_{t+s}(p) = \varphi(s, \theta_t p) \circ \sigma_t(p) \quad \text{para todo } t \leq 0, s \geq 0, t+s \leq 0.$$

(ii) Denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los conjuntos no autónomos puntuales y sea $\hat{x} \in \mathcal{M}$. Una aplicación $\sigma : \mathbb{R}^- \to \mathcal{M}$ se dice que es una órbita backward de φ a lo largo de $\hat{x}$ *si para todo $p \in P$, se verifica la siguiente propiedad de cociclo:*

$$\sigma_0(p) = x(p),\ \sigma_{t+s}(p) = \varphi(s, \theta_t p) \circ \sigma_t(p) \quad \textit{para todo } t \le 0, s \ge 0, t+s \le 0.$$

Definición 5.5.2 *(i) Fijado $p \in P$ y $x \in X$, una aplicaión $\sigma_\cdot(p) : \mathbb{R} \to X$ se dice que es una* órbita entera de φ a lo largo de x dirigida por p *si se satisface la propiedad de cociclo:*

$$\sigma_0(p) = x,\ \sigma_{t+s}(p) = \varphi(s, \theta_t p) \circ \sigma_t(p) \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, s \ge 0.$$

(ii) Sea $\hat{x} \in \mathcal{M}$. Una aplicación $\sigma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ se dice que es una órbita entera de φ a lo largo de $\hat{x}$ *si para todo $p \in P$, se verifica la siguiente propiedad de cociclo:*

$$\sigma_0(p) = x(p),\ \sigma_{t+s}(p) = \varphi(s, \theta_t p) \circ \sigma_t(p) \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, s \ge 0.$$

Definición 5.5.3 *(i) Fijados $(p, x) \in P \times X$, una aplicación $(\sigma_\pi)_\cdot(p, x) : \mathbb{R}^- \to P \times X$ se dice que es una* órbita backward de π a lo largo de (p, x) *si se satisface la propiedad de cociclo:*

$$(\sigma_\pi)_0(p, x) = (p, x),\ (\sigma_\pi)_{t+s}(p, x) = \pi(s, (\sigma_\pi)_t(p, x)) \quad \textit{para todo } t \le 0, s \ge 0, t+s \le 0.$$

(ii) Fijados $(p, x) \in P \times X$, una aplicación $(\sigma_\pi)_\cdot(p, x) : \mathbb{R} \to P \times X$ se dice que es una órbita entera de π a lo largo de (p, x) *si se satisface la propiedad de cociclo:*

$$(\sigma_\pi)_0(p, x) = (p, x),\ (\sigma_\pi)_{t+s}(p, x) = \pi(s, (\sigma_\pi)_t(p, x)) \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, s \ge 0.$$

El punto (p, x) puede ser un conjunto en $P \times X$ de la forma $(p, x(p))$ donde $x(p)$ es un conjunto no autónomo puntual.

Tenemos el siguiente resultado de existencia para órbitas enteras o backwards.

Lema 5.5.4 *Supongamos que $\tilde{I} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times I(p) \subset P \times X$ es un conjunto compacto invariante respecto a π. Entonces, para todo punto $x \in I(p)$ y cualquier conjunto no autónomo puntual $\hat{x} \in \hat{I}$, existe una órbita backward y por tanto una órbita entera en $\hat{I}$, a lo largo de x o $\hat{x}$.*

Demostración: Observemos que a lo largo del punto (p_0, x_0), existe una órbita backward de π en $\tilde{I}$. A lo largo del conjunto $\tilde{x} \subset \tilde{I}$, para $k = -1$, escogemos un subconjunto $\tilde{x}_{-1} \subset \tilde{I}$ tal que $\tilde{x}$ y $\tilde{x}_{-1}$ son biyectivas, y para cada punto $(p_{-1}, x_{-1}) \in \tilde{x}_{-1}$ tenemos $\pi(1, p_{-1}, x_{-1}) = (p_0, x_0) \in \tilde{x}$. Definamos $(p_t, x_t) := \pi(1 + t, p_{-1}, x_{-1})$ para $t \in (-1, 0)$. De forma similar, podemos definir la órbita backward π sobre $[-2, -1]$, $[-3, -2]$, $\ldots$, y de esta forma obtenemos la órbita backward de π a lo largo de $\tilde{x}$. Por la relación obvia entre π y φ, se obtiene el resultado.

$\square$

Observación 20 *Si tenemos una órbita backward/entera $\sigma.(p)$ de φ podemos obtener una órbita backward/entera de π fácilmente, $(\sigma_\pi)_t(p,x) := (\theta_t p, \sigma_t(p))$. Y si tenemos una órbita backward/entera $(\sigma_\pi).(p,x)$ de π, podemos obtener una órbita backward/entera de φ mirando solamente la segunda proyección sobre X, $\sigma_t(p) := (\sigma_\pi)_t(p,x)|_X$. Obsérvese que este tipo de resultados, concernientes a la existencia de una órbita entera a lo largo de un punto sobre conjuntos invariantes, se deduce de argumentos de tipo estándar de la literatura (véase, por ejemplo, [75]).*

Observación 21 *Obsérvese que cuando φ está restringida a una órbita entera σ, denotada por φ^σ, es invertible. En este caso, el inverso de $\varphi^\sigma(t,p)$ a lo largo de la órbita entera σ es $\varphi^\sigma(-t,\theta_t p)$ para $t \in \mathbb{R}$. Obsérvese que para toda órbita entera σ, $\varphi^\sigma(t,p) = \varphi(t,p)$ para todo $t \geq 0$ y $p \in P$.*

Observación 22 *Es inmediato comprobar que un conjunto no autónomo $\hat{D}$ es invariante hacia adelante si y solo si $D(p) = D^+_\varphi(p)$ para cada $p \in P$, donde*

$$D^+_\varphi(p) := \{x \,|\, \varphi(t,p)x \in D(\theta_t p) \text{ para todo } t \geq 0\};$$

y un conjunto no autónomo $\hat{D}$ es invariante si y solo si $D(p) = D_\varphi(p)$ para cada $p \in P$, donde

$$D_\varphi(p) := \{x : \textit{existe una órbita entera } \sigma \textit{ en } \hat{D} \textit{ a lo largo de } x\textit{, esto es}$$

$$\sigma_t(p) \in D(\theta_t p), \textit{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 5.5.5 *Supongamos que $\hat{x} \in \mathcal{M}$ en $\hat{S}$, y σ es una órbita entera a lo largo de $\hat{x}$. Entonces el* conjunto alfa límite $\omega^{*,\sigma}_x$ de x a lo largo de σ *se define como*

$$\omega^{*,\sigma}_x(p) := \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \varphi^\sigma(-t,\theta_t p)x(\theta_t p)}.$$

Observación 23 *(i) Claramente, un punto $y \in \omega^{*,\sigma}_x(p)$ si y sólo si existen sucesiones $t_n \to +\infty$ y $y_n = \varphi^\sigma(-t_n,\theta_{t_n}p)x(\theta_{t_n}p)$ tal que $y_n \to y$ cuando $n \to +\infty$.*
(ii) Por definición, es claro que para todo $\hat{x} \in \mathcal{M}$, tenemos que $\omega^{*,\sigma}_x(p) \subset \omega^*_x(p)$ para cada $p \in P$ ya que ω^*_x es el alfa límite a lo largo de todas las posibles órbitas backward a lo largo de $\hat{x}$, recordando que $\omega^*_x(p)$ está definido en (5.20).

Para una órbita entera, el siguiente resultado proporciona una relación entre la atracción pullback y su localización.

Proposición 5.5.6 *Supongamos que $(\hat{A},\hat{R})$ es un par atractor-repulsor pullback en $\hat{S}$, y que $\sigma.(p_0) : \mathbb{R} \to S(\theta.p_0)$ es una órbita entera de φ a lo largo del punto $x_0 \in S(p_0)$ dirigido por p_0. Entonces, la órbita $\sigma.(p_0)$ satisface la propiedad de atracción pullback, i.e.*

$$\lim_{\tau\to+\infty} dist(\varphi(\tau,\theta_{t-\tau}p_0)\sigma_{t-\tau}(p_0), A(\theta_t p_0) \cup R(\theta_t p_0)) = 0 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

si y sólo si se encuentra en el par atractor-repulsor, i.e. $\sigma_t(p_0) \in A(\theta_t p_0) \cup R(\theta_t p_0)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*. De forma similar, la órbita* $\sigma.(p_0)$ *satisface la propiedad de repulsión pullback, i.e.*

$$\lim_{\tau\to+\infty} dist(\varphi^\sigma(-\tau, \theta_{t+\tau}p_0)\sigma_{t+\tau}(p_0), A(\theta_t p_0) \cup R(\theta_t p_0)) = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

si y sólo si se encuentra en el par atractor-repulsor.

Demostración: Si $\sigma.(p_0)$ se encuentra en el par atractor-repulsor, la propiedad de atracción pullback se verifica trivialmente por la invarianza de $\hat{A}$ y $\hat{R}$.

Si $\sigma.(p_0)$ no se encuentra en el par atractor-repulsor, por la invarianza de $\hat{A}$ y $\hat{R}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sigma_t(p_0) \notin A(\theta_t p_0) \cup R(\theta_t p_0), \qquad \text{para } t \leq t_0.$$

Entonces, por la definición de órbitas enteras, tenemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to+\infty} dist(\varphi(s, \theta_{t_0-s}p_0)\sigma_{t_0-s}(p_0), A(\theta_{t_0}p_0) \cup R(\theta_{t_0}p_0)) \\ =&dist(\sigma_{t_0}(p_0), A(\theta_{t_0}p_0) \cup R(\theta_{t_0}p_0)) > 0, \end{aligned}$$

i.e., la atracción pullback no se verifica. La demostración de la propiedad de repulsión pullback es similar.

□

Observación 24 *Obsérvese que la órbita entera* $\sigma.(p_0) : \mathbb{R} \to S(\theta.p_0)$ *a lo largo de* $x_0 \in S(p_0) \setminus (A(p_0) \cup R(p_0))$ *puede ser vista como una órbita entera en el SFSP* π *asociado a lo largo del punto* (p_0, x_0) *en* $\tilde{S}$*. Por la descomposición de Morse clásica para semiflujos (véase [71, 2]), sabemos que* (p_0, x_0) *es atraído por* $\tilde{A}$ *y repelido por* $\tilde{R}$ *con respecto a* π*. Esto implica que*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi(t, p_0)x_0, A(\theta_t p_0)) = 0$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\varphi^\sigma(-t, p_0)x_0, R(\theta_{-t}p_0)) = 0,$$

tomando subsucesiones de t *si fuese necesario ya que* $\varphi(t, p_0)x_0$ *y* $\varphi^\sigma(-t, p_0)x_0$*, así como* $\theta_t p_0$ *y* $\theta_{-t}p_0$*, pueden tener más de un punto límite.*

Definición 5.5.7 *Supongamos que* $(\tilde{A}_i, \tilde{R}_i)$*,* $i = 1, \cdots, n$*, son pares atractor-repulsor del SFSP* π *en* $\tilde{S}$ *con*

$$\emptyset = \tilde{A}_0 \subsetneq \tilde{A}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \tilde{A}_n = \tilde{S} \text{ y } \tilde{S} = \tilde{R}_0 \supsetneq \tilde{R}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \tilde{R}_n = \emptyset.$$

Entonces, la familia $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{M}_i\}_{i=1}^n$ *de conjuntos compactos invariantes, definidos por*

$$\tilde{M}_i = \tilde{A}_i \cap \tilde{R}_{i-1}, \ 1 \leq i \leq n,$$

se llama una descomposición de Morse de $\tilde{S}$ *con respecto a* π*, y cada* $\tilde{M}_i$ *se llama conjunto de Morse.*

Observación 25 *Es bien sabido que* $\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{M}_i = \bigcap_{i=1}^{n}(\tilde{A}_i \cup \tilde{R}_i)$ *(véanse [31, 2]).*

Definición 5.5.8 *Sea* φ *un SDNA que admite atractor pullback* $\hat{S}$ *con* $\Pi_X \hat{S}$ *precompacto y verificándose* $(H2)$ *del Teorema 5.2.7. Sean* $(\hat{A}_i, \hat{R}_i)$, $i = 1, \cdots, n$, *pares atractor-repulsor pullback en* $\hat{S}$ *con*

$$\emptyset = A_0(p) \subsetneq A_1(p) \subsetneq \cdots \subsetneq A_n(p) = S(p)$$

y

$$S(p) = R_0(p) \supsetneq R_1(p) \supsetneq \cdots \supsetneq R_n(p) = \emptyset$$

para todo $p \in P$. *Entonces, la familia* $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^{n}$ *de conjuntos compactos no autónomos invariantes, definidos por*

$$\hat{M}_i = \hat{A}_i \cap \hat{R}_{i-1},\ 1 \leq i \leq n,$$

se llama una descomposición de Morse pullback de $\hat{S}$, *y cada* $\hat{M}_i$ *es llamado un conjunto de Morse pullback.*

El siguiente resultado describe la dinámica asintótica interna en una decomposición de Morse pullback del atractor $\hat{S}$.

Teorema 5.5.9 *Supongamos que* $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^{n}$ *es una decomposición de Morse pullback del atractor pullback* $\hat{S}$, *determinado por los pares atractor-repulsor pullback* $(\hat{A}_i, \hat{R}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Supongamos que* $\Pi_X \hat{A}_i \cap \Pi_X \hat{R}_i = \emptyset$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces, la colección de conjuntos de Morse pullback determina el comportamiento límite del SDNA* φ *sobre* $\hat{S}$. *Más precisamente, tenemos que:*

(i) Para cualquier conjunto no autónomo puntual $\hat{x}$ *en* $\hat{S}$ *con*

$$dist(\tilde{x}\ , \bigcup_{i=1}^{n} \partial \tilde{R}_i) > 0,$$

tenemos que

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(t, \theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p), \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)) = 0.$$

(ii) Si φ *es invertible sobre* $\tilde{S}$, *entonces para cualquier conjunto no autónomo puntual* $\hat{x}$ *en* $\hat{S}$ *con*

$$dist(\tilde{x}\ , \bigcup_{i=1}^{n} \partial \tilde{A}_i) > 0,$$

tenemos

$$\lim_{t \to +\infty} dist(\varphi(-t, \theta_t p)x(\theta_t p), \bigcup_{i=1}^{n} M_i(p)) = 0.$$

(iii) *Si σ es una órbita entera a lo largo del conjunto no autónomo puntual $\hat{x}$ satisfaciendo*

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{p\in P} dist(\varphi(t,\theta_{-t}p)x(\theta_{-t}p),\Pi_X\hat{M}_i)=0 \tag{5.22}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{p\in P} dist(\varphi^{\sigma}(-t,\theta_{t}p)x(\theta_{t}p),\Pi_X\hat{M}_j)=0$$

para algún $1\le i,j\le n$, entonces $i\le j$; además, $i=j$ si y sólo si σ se encuentra sobre $\hat{M}_i$.

(iv) *Si $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ son l órbitas enteras a lo largo de los conjuntos no autónomos puntuales $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_l$ respectivamente tal que para algún $1\le j_0,\dots,j_l\le n$, $\omega_{x_k}(p)\subset M_{j_{k-1}}(p)$ y $\omega^{*,\sigma_k}_{x_k}(p)\subset M_{j_k}(p)$ para cada $p\in P$ y $k=1,\dots,l$, entonces $j_0\le j_l$. Además, $j_0<j_l$ si y sólo si σ_k no se encuentra sobre $\bigcup_{i=1}^n\hat{M}_i$ para algún k, en otro caso $j_0=\cdots=j_l$.*

Demostración: (i) y (ii) se deducen inmediatamente del Corolario 5.4.5 y la Observación 25. Como (iv) se tiene inmediatamente de (iii), sólo necesitamos probar (iii).

Para todo l,m diferentes, afirmamos que $\Pi_X\hat{M}_l\cap\Pi_X\hat{M}_m=\emptyset$. Obsérvese primero que, por definición de proyección tenemos las siguientes propiedades

$$\Pi_X(C\cap D)\subset\Pi_X C\cap\Pi_X D \qquad \text{para todo } C,D\subset P\times X$$

y

$$\Pi_X C\subset\Pi_X D \qquad \text{cuando } C\subset D\subset P\times X.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l<m$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi_X\hat{M}_l\cap\Pi_X\hat{M}_m &= [\Pi_X(\hat{A}_l\cap\hat{R}_{l-1})]\cap[\Pi_X(\hat{A}_m\cap\hat{R}_{m-1})]\\ &\subset \Pi_X\hat{A}_l\cap\Pi_X\hat{R}_{l-1}\cap\Pi_X\hat{A}_m\cap\Pi_X\hat{R}_{m-1}\\ &= \Pi_X\hat{A}_l\cap\Pi_X\hat{R}_{m-1}\\ &\subset \Pi_X\hat{A}_{m-1}\cap\Pi_X\hat{R}_{m-1}=\emptyset \end{aligned}\tag{5.23}$$

por hipótesis.

Por (5.22), se deduce que

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\pi(t,\tilde{x}),P\times\Pi_X\hat{M}_i)=0.$$

Observemos que $P\times\Pi_X\hat{M}_i$ es un conjunto compacto en $P\times X$, luego por la teoría disipativa clásica (véase [37, Lemma 3.2.1]) $\omega_\pi(\tilde{x})$ es un conjunto compacto invariante con respecto a π y $\omega_\pi(\tilde{x})\subset P\times\Pi_X\hat{M}_i$. Obsérvese que para todo punto $(p,x)\in[(P\times\Pi_X\hat{M}_i)\cap\tilde{S}]\setminus\tilde{M}_i$, por el teorema de descomposición de Morse clásico (véase [71] para los detalles), o $\omega_\pi(p,x)$ o $\omega^*_\pi(p,x)$ pertenecen a otro $\tilde{M}_k$ distinto de $\tilde{M}_i$, i.e. cualquier órbita entera de π a lo largo del punto (p,x) se irá fuera de $P\times\Pi_X\hat{M}_i$ en un tiempo positivo o negativo por (5.23). Luego

$\tilde{M}_i$ es el conjunto compacto invariante maximal de π en $(P \times \Pi_X \hat{M}_i) \cap \tilde{S}$ y entonces es el maximal en $P \times \Pi_X \hat{M}_i$ ya que $\tilde{S}$ es el conjunto compacto invariante maximal de π en todo el espacio $P \times X$. Además, tenemos que $\omega_\pi(\tilde{x}) \subset \tilde{M}_i$. De forma similar, $\tilde{M}_j$ es el conjunto compacto invariante maximal de π en $P \times \Pi_X \hat{M}_j$, y $\omega_\pi^{*,\sigma}(\tilde{x}) \subset \tilde{M}_j$. Y nuevamente por [71], $i \leq j$.

Si $i = j$, i.e. tanto $\omega_x(p)$ como $\omega_x^{*,\sigma}(p)$ pertenecen a $M_i(p)$ para todo p. Entonces el mismo argumento nos da que tanto $\omega_\pi(\tilde{x})$ como $\omega_\pi^{*,\sigma}(\tilde{x})$ pertenecen $\tilde{M}_i$. Luego, σ se encuentra sobre $\hat{M}_i$. Recíprocamente, si σ se encuentra sobre $\hat{M}_i$, entonces por definición de conjunto alfa límite y por la invarianza de $\hat{M}_i$ tenemos que tanto $\omega_x(p)$ como $\omega_x^{*,\sigma}(p)$ pertenecen a $M_i(p)$ para todo p. La prueba está ahora completa.

$\square$

Teorema 5.5.10 *Supongamos que $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ es una descomposición de Morse del atractor pullback $\hat{S}$ respecto al SDNA φ. Existe entonces una función de Lyapunov continua $L : P \times X \to \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:*

(i) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) \leq L(p,x)$ *para todo* $(p,x) \in P \times X$ *y* $t \geq 0$.

(ii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) = L(p,x)$ *cuando* $x \in \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t \geq 0$, *y L toma diferentes valores constantes sobre los diferentes conjuntos de Morse.*

(iii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) < L(p,x)$ *cuando* $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t > 0$.

Demostración: Por el Teorema 5.2.7, el conjunto $\tilde{S}$ asociado a $\hat{S}$ es compacto y se encuentra sobre el atractor global del SFSP π; por la definición de descomposición de Morse del atractor pullback, el asociado $\{\tilde{M}_i : i = 1, \dots, n\}$ es una descomposición de Morse para el atractor global $\tilde{S}$ de π y π es un semiflujo con espacio de estados $P \times X$. Luego el resultado se sigue de [2, Teorema 3.4 y Proposición 3.5].

$\square$

Teorema 5.5.11 *Supongamos que el SDNA φ admite un atractor pullback $\hat{S}$, en el universo $\hat{\mathcal{D}}$ dado por (5.17), satisfaciendo que $\Pi_X \hat{S}$ es precompacto, la hipótesis $(H2)$ del Teorema 5.2.7, y que $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ es una colección de conjuntos no autónomos compactos en $\hat{S}$ con el asociado $\tilde{M}_i$ siendo compacto y mutuamente disjuntos. Supongamos además que existe una función continua de Lyapunov $L : P \times X \to \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:*

(i) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) \leq L(p,x)$ *para todo* $(p,x) \in P \times X$ *y* $t \geq 0$.

(ii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) = L(p,x)$ *cuando* $x \in \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t \geq 0$, *y L tomando diferentes valores constantes sobre diferentes $\hat{M}_i$.*

(iii) $L(\theta_t p, \varphi(t,p)x) < L(p,x)$ *cuando* $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i(p)$ *para todo* $t > 0$.

Entonces, $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ es una descomposición de Morse del atractor pullback $\hat{S}$.

Demostración: Obsérvese que por el Teorema 5.3.4, el SFSP asociado π admite un atractor global, dado por $\tilde{S}$ asociado a $\hat{S}$, que atrae a todos los subconjuntos acotados de $P \times X$. La existencia de una función de Lyapunov implica que π es un semigrupo gradiente sobre $P \times X$. Entonces, π es un semigrupo tipo gradiente relativo a $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{M}_i\}_{i=1}^n$. Por [2, Teorema 2.18], obtenemos que $\tilde{\mathcal{M}}$ es realmente una descomposición de Morse del atractor global $\tilde{S}$. Además, por nuestra definición de descomposición de Morse no autónoma, se obtiene el resultado.

5.6. Aplicaciones

En un reciente artículo, Wang [80] caracterizó el atractor de un sistema gradiente sometido a pequeñas perturbaciones casi periódicas. En particular, basado en los resultados [17], si el atractor del sistema límite viene dado por la union de las variedades inestables de un número finito de equilibrios hiperbólicos, el atractor pullback también se compone de la union de las variedades inestables de un número finito de soluciones globales hiperbólicas casi periódicas del sistema perturbado. Obsérvese que una ecuación diferencial con un término no autónomo casi periódico f lleva a la definición de un SFSP con espacio base compacto P dado como clausura de las traslaciones de f, i.e. $P = \overline{\{f(t+\cdot), t \in \mathbb{R}\}}$. Vamos a mostrar ahora un par de ejemplos en este marco para ilustrar los resultados.

5.6.1. Un sistema de Lotka-Volterra casi periódico en $\mathbb{R}^2$

Considérese una famila de sistemas no autónomos Lotka-Volterra de tipo competitivo para dos especies u y v,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{u} = u(\lambda - a_\epsilon(t)u - bv) & u(s) = u_0 > 0 \\ \dot{v} = v(\mu - cv - du) & v(s) = v_0 > 0, \end{array} \right. \tag{5.24}$$

cuando, para algún $0 < a < A$, $a_\epsilon(t) \in [a, A]$ y es casi periódico. Supongamos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_\epsilon(t) - a| = 0.$$

Consideraremos sólo el caso $\lambda, \mu > 0$, ya que cuando alguno de esos parámetros es negativo el comportamiento es relativamente sencillo.

Obsérvese que los ejes u y v son invariantes, que las soluciones de (5.24) son únicas y el cono positivo $\overline{Q} = \{(u, v),\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$ y su interior $Q = \{(u, v)\ u > 0,\ v > 0\}$ son conjuntos invariantes. Además consideraremos soluciones sólo en $\overline{Q}$.

En el caso autónomo,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(\lambda - au - bv) \\ \dot{v} &= v(\mu - cu - dv), \end{aligned} \tag{5.25}$$

el sistema ha sido bien estudiado y depende de los productos ad y bc. Consideraremos $ad > bc$ y $(u_0, v_0) \in \overline{Q}$.

Si denotamos por T al semigrupo generado por las soluciones de esas ecuaciones, tenemos:

(i) si $\lambda < b\mu/d$, entonces $T(t)(u_0, v_0) \to e_2 = (0, \mu/c)$ cuando $t \to \infty$;

(ii) si $b\mu/d < \lambda < a\mu/c$, existe un punto fijo interior

$$e_1 = (\lambda d - b\mu, \mu a - \lambda c)/(ad - bc)$$

tal que

$$T(t)(u_0, v_0) \to e_1 \text{ cuando } t \to \infty;$$

y

(iii) si $\lambda > a\mu/c$, entonces $T(t)(u_0, v_0) \to e_3 = (\lambda/a, 0)$ cuando $t \to \infty$.

Para (5.24), obsérvese primero que la dinámica asintótica pullback sobre el eje u (que es, $v \equiv 0$) es descrita por el atractor pullback de la ecuación logística $\dot{u} = u(\lambda - a_\epsilon(t)u)$, mientras que para las dinámicas en el eje v ($u \equiv 0$) están descritas por la ecuación autónoma $\dot{v} = v(\mu - cv)$.

Ahora, de acuerdo con [80, 17], los siguientes resultados se verifican para el caso $ac > bd$ con ϵ suficientemente pequeño. Denotemos por $S_\varepsilon(t, s), t \geq s$, el proceso generado por las soluciones de (5.24).

Lema 5.6.1 *Supongamos que $ac > bd$*

i) Si $\lambda < b\mu/c$, entonces, para todo $(u_0, v_0) \in \overline{Q}$ tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} S_\epsilon(t, s)(u_0, v_0) = (0, \mu/c).$$

ii) Si $\lambda > a\mu/d$, para todo $(u_0, v_0) \in \overline{Q}$, existe una solución global casi periódica de (5.24)

$$\lim_{t\to\infty} S_\epsilon(t, s)(u_0, v_0) = (\alpha_\epsilon(t), 0),$$

donde $\alpha_\epsilon(t)$ es el atractor pullback para soluciones positivas de la ecuación logística $\dot{u} = u(\lambda - a_\epsilon(t)u)$.

iii) Finalmente, si

$$b\mu/c < \lambda < a\mu/d, \tag{5.26}$$

existe una solución global casi periódica $(U_\epsilon(t), V_\epsilon(t)) \in Q$ tal que para cada $u_0, v_0 > 0$ y cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\infty} S_\epsilon(t, s)(u_0, v_0) = (U_\epsilon(t), V_\epsilon(t)).$$

Si definimos, para cada ϵ suficientemente pequeño, $P_\epsilon = \overline{\{a_\epsilon(t+\cdot), t \in \mathbb{R}\}}$ y $\theta_t : P_\epsilon \to P_\epsilon$ por $\theta_t(p(\cdot)) = p(t+\cdot)$, podemos definir un SFSP en $P_\epsilon \times \mathbb{R}^2$ por

$$(p, u_0, v_0) \to (\theta_t p, \varphi_\epsilon(t, p)(u_0, v_0))$$

con

$$\varphi_\epsilon(t, \theta_s p)(u_0, v_0) = S_\epsilon(t+s, s, p)(u_0, v_0),$$

donde $S_\epsilon(t+s, s, p)$ indica la solución de 5.24 con $a_\epsilon(t) = p$.

En las condiciones de (5.26), podemos reescribir las soluciones globales haciéndolas depender del parámetro $p \in P_\epsilon$ por

$$(U_\epsilon(t), V_\epsilon(t)) = (U_\epsilon(\theta_t p), V_\epsilon(\theta_t p))$$

y también el atractor pullback por

$$\mathcal{A}_\epsilon(t) = A_\epsilon(\theta_t p), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},\ p \in P_\epsilon.$$

A partir de ahora y en aras a una mayor claridad, obviaremos la dependencia de ϵ, ya que no habrá confusión. Obsérvese que, dado un ϵ suficientemente pequeño, por el Lema 5.6.1 existe un atractor global A en $P \times \mathbb{R}^2$, y una descomposición de Morse dada por los conjuntos de Morse

$$M_i = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times \{e_i(p)\},\ i = 1, \ldots, 4,$$

con $e_4 = (0,0)$. De hecho, gracias al Lema 5.6.1, el sistema en $P \times \mathbb{R}^2$ es tipo gradiente con respecto a la familia $\{M_i\}_{i=1}^4$, que, por [2, Teorema 1.1], implica la existencia de una descomposición de Morse del atractor global en $P \times \mathbb{R}^2$ siendo los conjuntos de Morse $M_i = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times \{e_i(p)\}$, $i = 1, \ldots, 4$.

Luego, podemos describir ahora la descomposición de Morse del correspondiente atractor pullback en $\overline{Q}$, que está definido (véase [18]) por

$$A(p) = \bigcup_{1 \le i \le 4} W^u(e_i)(p),$$

donde

$$W^u(e_i)(p) = \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 : |\varphi(t, p)(u_0, v_0) - e_i(\theta_t p)| \to 0 \text{ as } t \to -\infty\}.$$

De hecho, es claro que lo siguiente forma una familia de pares atractor-repulsor (recuérdese que Q es el cono positivo):

$$A_0(p) = \emptyset,\ A_1(p) = \{e_1(p)\},\ A_2(p) = A_1(p) \cup (W^u(e_2)(p) \cap Q),$$

$$A_3(p) = A_2(p) \cup (W^u(e_3)(p) \cap Q),\ A_4(p) = A(p),$$

y

$$R_0(p) = A(p),\ R_1(p) = A(p) \setminus Q,\ R_2(p) = W^u(e_3)(p) \setminus Q,\ R_3(p) = \{e_4\},\ R_4(p) = \emptyset$$

con conjuntos de Morse asociados

$$M_i(p) = A_i(p) \cap R_{i-1}(p),$$

lo que nos lleva a

$$M_i(p) = \{e_1(p)\},\ i = 1, \ldots 4.$$

Obsérvese que es inmediato comprobar que $\Pi_X \hat{A}_i \cap \Pi_X \hat{R}_i = \emptyset$, luego se verifican nuestros resultados en los Teoremas 5.5.9 y 5.5.10.

5.6.2. Más ejemplos

Particularmente interesante son los siguientes modelos no autónomos de Lotka-Volterra para dos especies interactuando, con difusión:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u(\lambda(t,x) - a(t,x)u - b(t,x)v), & x \in \Omega,\ t > s, \\ v_t - \Delta v = v(\mu(t,x) - c(t,x)u - d(t,x)v), & x \in \Omega,\ t > s, \\ \mathcal{B}_1 u = 0,\ \mathcal{B}_2 v = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > s, \\ u(s) = u_s,\ v(s) = v_s, \end{cases} \tag{5.27}$$

con $\lambda, \mu, a, b, c, d \in L^\infty(Q)$, $Q = \mathbb{R} \times \Omega$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Los operadores $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ pueden representar condiciones en frontera de tipo Dirichlet o Robin (véase [52] para más detalles).

Supongamos que $\inf_Q a(x,t) > 0$ y $\inf_Q d(x,t) > 0$, podemos considerar los tres casos clásicos dependiendo de los signos de b y c:

Competición: $b, c > 0$.

Depredador-presa: $b > 0$, $c < 0$.

Simbiosis: $b, c < 0$.

En [52], se prueba que este sistema dinámico infinito dimensional no autónomo de Lotka-Volterra posee un comportamiento asintótico similar al modelado por la Eq. (5.24), i.e, las condiciones vienen dadas por la existencia de una solución global atrayente hacia adelante (para soluciones positivas), y soluciones globales semiestables sobre los ejes.

Si suponemos que la envolvente de las funciones no autónomas λ, a, b, μ, c y d generan un espacio compacto, a partir de los resultados de [48] podríamos describir la descomposición de Morse como en la sección anterior.

Capítulo 6

Conclusiones y problemas abiertos

A lo largo de esta Memoria hemos estudiado el atractor global $\mathcal{A}$ para un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de una ecuación diferencial autónoma y, más profundamente, los diferentes atractores que podemos tener dada una ecuación diferencial no autónoma. Hemos tratado con el atractor pullback en el Capítulo 4, estudiando además un modelo de Lotka-Volterra. También hemos tratado con el atractor global $\mathbb{A}$ para el semiflujo skew-product y con el atractor cociclo $\{A(p)\}_{p \in P}$, ambos en el Capítulo 5.

Hemos generalizado los resultados de Aragao et al. [3] al caso de tener infinitas componentes de Morse del atractor global $\mathcal{A}$, esto se hizo en el Capítulo 3 y conseguimos obtener la equivalencia entre semigrupo gradiente genralizado, semigrupo gradiente dinámico generalizado y descomposición de Morse como vimos en el Teorema 3.4.6.

Además de esta generalización de los resultados en Aragao et al. [3], conseguimos hacer lo mismo en el caso de enfrentarnos con una ecuación diferencial no autónoma. Para ello tuvimos que desplazar nuestro marco de estudio al de los semiflujos skew-product, o semiflujos cruzados tal como vimos en el Capítulo 5.

La extensión natural de este trabajo es conseguir estas mismas equivalencias para otro tipo de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo el caso de tener una ecuación diferencial no autónoma e infinitas componentes de Morse. Otro caso a considerar es el de usar, en el caso no autónomo, un espacio base Σ que no sea compacto en la línea en la que Bortolan et al. [10] trabajaron, ya que la compacidad de P ha sido un requisito indispensable para nosotros. También queda por ver si se podría repetir todo nuestro programa en el caso de tener una ecuación diferencial estocástica, o en el caso de perturbación de procesos.

Finalmente queda desarrollar algunas aplicaciones más a EDPs que refuercen todo lo que hemos presentado en esta Memoria, ya que, en su mayor parte, es un trabajo con un gran contenido teórico.

Bibliografía

[1] S. Ahmad, Convergence and ultimate bounds of solutions of the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **127** (1987) 377–387.

[2] E. R. Aragao-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho, J. A. Langa, Stability of gradient semigroups under perturbations, *Nonlinearity* **24** (2011), 2099–2117.

[3] E. R. Aragao-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho, J. A. Langa, Non-autonomous Morse decomposition and Lyapunov functions for gradient-like processes, *Trans. AMS*, 365 (2013), no. 10, 52775312.

[4] E.R. Aragao-Costa, T. Caraballo, A.N. Carvalho and J.A. Langa, Continuity of Lyapunov functions and of energy level for a generalized gradient system, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 39 (2012), no. 1, 5782.

[5] L. Arnold, *Random Dynamical System*, Springer Verlag, New York, (1998).

[6] J. M. Arrieta, A. Rodríguez-Bernal, J. Valero, Dynamics of a reaction-diffusion equation with a discontinuous nonlinearity, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 16 (2006), no. 10, 29652984.

[7] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, (1990).

[8] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors in Evolutionary Equations* Studies in Mathematics and its Applications **25**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1992).

[9] J. Balbus, J. Mierczyński, Time-averaging and permanence in nonautonomous competitive systems of PDE's via Vance-Coddington estiamtes, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **17** (2012) 1407–1425.

[10] M. C. Bortolan, T. Caraballo, A. N. Carvalho and J. A. Langa, Structure of Attractors for skew product semiflows, preprint.

[11] H. Brézis, *Analyse fonctionalle: Theorie et applications*, Paris: Masson (1983).

[12] T.A. Burton, V. Hutson, Permanence for nonautonomous pblackator-prey systems, *Differential Integral Equations*, **4** (1991) 126–1280.

[13] T. Caraballo, A.N. Carvalho, J.A. Langa, F. Rivero, Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes, *Nonlinear Analysis*, **72** (2010) 1967–1976.

[14] T. Caraballo, J.C. Jara, J.A. Langa, J. Valero, Morse Descomposition of Global Attractors with Infinite Components, preprint.

[15] T. Caraballo, J.C. Jara, J.A. Langa, Z. Liu, Morse Decomposition of Attractors for Non-autonomous Dynamical Systems, *Advanced Nonlinear Studies*, **13** (2013) 309–329.

[16] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán and J. Real, Pullback and forward attractors for a 3D LANS-alpha model with delay, *Discrete Cont. Dyn. Syst. 15* (2006), no. 2. 559–578.

[17] A. N. Carvalho and J. A. Langa, An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation, *J. Differential Equations* 246 (2009), 2646–2668.

[18] A. N. Carvalho, J. A. Langa, Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: continuity of local stable and unstable manifolds, *J. Differential Equations 233 (2007)*, no. 2, 622653.

[19] A. N. Carvalho, J. A. Langa and J. C. Robinson, On the continuity of pullback attractors for evolution process, *Nonlinear Analysis* 71 (2009), 1812–1824.

[20] A. N. Carvalho, J. A. Langa and J. C. Robinson, Lower semicontinuity of attractors for non-autonomous dynamical systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 29 (2009), no. 6, 17651780..

[21] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, Attractors for Infinite-dimensional Non-autonomous Dynamical Systems, *Applied Mathematical Sciences*, 182. Springer, New York (2013).

[22] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson and A. Suárez, Characterization of nonautonomous attractors of a perturbed gradient system, *J. Differential Equations* 236 (2007), 570–603.

[23] N. Chafee, E. F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Applicable Anal.* 4 (1974), 1737.

[24] D.N. Cheban, *Global Attractors of Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2004).

[25] D. N. Cheban, P. E. Kloeden and B. Schmalfuß, Pullback attractors in dissipative nonautonomous differential equations under discretization, *J. Dynam. Differential Equations* 13 (2001), no. 1, 185213.

[26] D. N. Cheban, P. E. Kloeden and B. Schmalfuß, The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical system, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory 2* (2002), 125–144.

[27] X. Chen, J. Duan, *State space decomposition for non-autonomous dynamical systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburg 141 A (2011) 957-974.

[28] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension, *J. Math. Pures Appl. 73* (1994), 279–333.

[29] V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* Colloquium Publications, Vol. 49. American Mathematical Society (2002).

[30] B.D. Coleman, Nonautonomous logistic equations as models of the adjustment of populations to environmental change, *Math. Biosci,.* **45** (1979) 159–173.

[31] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1978).

[32] H. Crauel, Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 176 (1999), 57–72.

[33] H. Crauel, Random point attractors versus random set attractors, *J. London Math. Soc. (2)* 63 (2001), no. 2, 413–427.

[34] H. Crauel and F. Flandoli, Attractors for random dynamical systems, *Prob. Th. Rel. Fields 100* (1994), 365–393.

[35] H. Crauel, A. Debussche and F. Flandoli, Random attractors, *J. Dynamics Differential Equations 9* (1997), 397–441.

[36] F. Flandoli and B. Schmalfuß, Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative white noise, *Stochastic Stochastic Rep. 59* (1996), no. 1, 21–45.

[37] J. K. Hale *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs Number 25 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).

[38] J. Hale, P. Waltman, Persistence in infinite dimensional systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **9** (1989) 388–395.

[39] T.G. Hallam, C.E. Clarck, Nonautonomous logistic equations as models of populations in a deteriorating environment, *J. Theoret. Biol.*, *93* (1981) 301–311.

[40] Haraux, A. (1991) *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Masson, Paris.

[41] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin-New York (1981).

[42] M. Hurley, Chain recurrence, semiflows and gradients, *J. Dyn. Diff. Equations*, **7** (1995),437456.

[43] V. Hutson, K. Schmitt, Permanence in dynamical systems, *Math. Biosci.*, **111** (1992) 1–71.

[44] J.C. Jara, F. Rivero, Asymptotic behaviour for Prey-Predator systems and logistic equations with unbounded time-dependent coefficients, *Discrete and Continuous Dynamical System - A*, to appear.

[45] H. Keller, B. Schmalfuss, *Attractors for stochastic Sine Gorden equations via transformation into random equations*, 1999, Universitat Bremen Report 448.

[46] P. E. Kloeden, Pullback attractors of nonautonomous semidynamical system. *Stochastics and Dynamics*, **3** (2003) 101–112.

[47] P. E. Kloeden and J. A. Langa, Flattening, squeezing and the existence of random attractors, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math Phys. Eng. Sci* 463 (2007), no. 2077, 163–181.

[48] P. E. Kloeden, M. Rasmussen, Nonautonomous Dynamical Systems, Mathematical Surveys and Mono- graphs, 176. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. viii+264 pp.

[49] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[50] J.A. Langa, J.C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, A. Suárez, Permanence and asymptotically stable complete trajectories for nonautonomous Lotka-Volterra models with diffusion, *SIAM J. Math. Anal.*, **40** (2009) 2179–2216.

[51] J.A. Langa, J.C. Robinson, A. Suárez, Forwards and pullback behaviour of a non-autonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinearity*, **16** (2003) 1277–1293.

[52] J.A. Langa, A. Rodríguez-Bernal, S. Suárez, On the long time behavior of non-autonomous Lotka-Volterra models with diffusion via the sub-supertrajectory method, *J. Differential Equations*, **249** (2010) 414–445.

[53] J. A. Langa, J. C. Robinson and A. Suárez, Bifurcation from zero of a complete trajectory for nonautonomous logistic PDEs, *Internat. J. Bifur Chaos Appl. Sci. Engrg. 15* (2005), no. 8, 2663–2669.

[54] J. A. Langa, J. C. Robinson and A. Suárez, Stability, inestability, and bifurcation phenomenea in nonautonomous differential equations, *Nonlinear 15* (2002), no. 3, 887–903.

[55] J. A. Langa, J. C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, A. Suárez, A. Vidal-López, Existence and nonexistence of unbounded forwards attractor for a class of non-autonomous reaction diffusion equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 18 (2-3) (2007), 483497

[56] J. A. Langa and A. Suárez, Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations, *Electronic JDE*, **72** (2002), 1-20.

[57] D. Li and P. E. Kloeden, Equi-attraction and the continous dependence of attractors on parameters, *Glasg. Math. J. 46* (1) (2004), 131–141.

[58] D. Li and P. E. Kloeden, Equi-attraction and the continous dependence of pullback attractors on parameters, *Stoch. Dyn. 4* (3) (2004), 373–384.

[59] Z. Liu, The random case of Conleys theorem: III. Random semiflow case and Morse decomposition, *Nonlinearity* 20 (2007), 27732791.

[60] Z. Liu, S. Ji, M. Su, Attractor-repeller pair, Morse decomposition and Lyapunov function for random dynamical systems, *Stochastics and Dynamics* 8 (2008), 625641.

[61] Q Ma, S Wang, C Zhong, Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications, *Indiana University Mathematics Journal* 51 (2002), 1541–1559.

[62] P. Marín-Rubio and J. Real, On the relation between two different concepts of pullback attractors for nonautonomous dynamical systems, *Nonlinear Anal. 67* (2007), no. 10, 2784–2799.

[63] M.N. Nkashama, Dynamics of logistic equations with non-autonomous bounded coefficients, *Electron. J. Differential Equations* **2000**, (2000) 8 pp. (electronic).

[64] M. Patrao, Morse decomposition of semiflows on topological spaces, *J. Dynam. Differential Equations* 19 (2007), no. 1, 181198.

[65] M. Patrao y Luiz A.B. San Martin, Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups, *J. Dyn. Diff. Equations* 19 (1) (2007), 155–180.

[66] G. Raugel, Global Attractors in Partial Differential Equations, *Handbook of Dynamical Systems, vol. 2*, Elsevier Sciences (2002), 885–982.

[67] M. Rasmussen, Morse decompositions of non-autonomous dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), no. 10, 5091–5115.

[68] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An introducing to dissipative parabolic PDEs and the theory of a global attractors*, Cambridge University Press, Cambridge UK (2001)

[69] A. Rodríguez-Bernal y A. Vidal-López, Existence, uniqueness and attractivity properties of positive complete trajectories for nonautonomous reaction-diffusion problems, *Discrete Contin. Dyn. Syst. 18* (2-3) (2007), 537-567.

[70] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New-York (2002).

[71] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag (1987).

[72] B. Schmalfuß, Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations, in V. Reitmann, T. Riedrich and N. Kosh (eds.), *International Seminar on Applied Mathematics - Nonlinear Dynamics: Attractors Approximation and Global Behaviour*, Technische Universitt, Dresden (1992), 185–192.

[73] G.R. Sell, Nonautonomous differential equations and dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967) 241–283 .

[74] Sell, G.R. & You, Y. (2002) *Dynamics of evolutionary equations.* Applied Mathematical Sciences Vol. 143. Springer-Verlag, New York.

[75] W. Shen, Y. Yi, Almost automorphic and almost periodic dynamics in skew-product semiflows, *Memoirs of the AMS* 136, no. 647, 1998.

[76] J. Sugie, Y. Saito, M. Fan, Global asymptotic stability for pblackator-prey systems whose prey receives time-variation of the environment, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *139* (2011) 3475–3483.

[77] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin (1988; second edition 1996).

[78] R.R. Vance, E.A. Coddington, A nonautonomous model of population growth, *J. Math. Biol.*, **27** (1989) 491–506.

[79] Vishik, M.I. (1992) *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations.* Cambridge University Press, Cambridge, England.

[80] B.Wang, Almost periodic dynamics of perturbed infinite-dimensional dynamical systems, *Nonlinear Anal.* 74 (2011), 72527260.

[81] Y. Wang, C. Zhong, S. Zhou, Pullback attractors of nonautonomous dynamical systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 16*, (2006), no. 3, 587–614.