UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE

MATEMATICAS

"TEORIA DE PERTURBACION EN CADENAS DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO"

Maria José Vazquez Cueto

Memoria dirigida por:

Prof. Dr. D. Rafael Infante Macias

Prof.Dr. D. Antonio Pascual Acosta

2.5778

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

" TEORIA DE PERTURBACION EN CADENAS DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO "

por

MARIA JOSE VAZQUEZ CUETO

Visado en Sevilla a

18 de Septiembre de 1979.

Fdo: Prof.Dr.D.Rafael Infante Macías

Prof.Dr. D. Antonio Pascual Acosta

Memoria presentada para aspirar al Grado de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Sevilla. Septiembre 1979

Fdo: Mª José Vázquez Cueto

PROLOGO

Cuando el modelo de una situaciòn real viene descrito por una cadena de Markov es interesante, para las aplicaciones pràcticas, estudiar què ocurrirìa si a esta cadena se la somete a una perturbaciòn de cualquier tipo. Se considera en esta Memoria el caso de una cadena de Markov, de paràmetro contìnuo y espacio de estados discreto, que es forzada a volver a unos estados llamados "permisibles" cuando entra en los estados"prohibidos". Las propiedades de la cadena modificada se expresan en tèrminos de la cadena original y de la "compensaciòn" resultante de la perturbaciòn. La tècnica empleada en este estudio es el "mètodo de compensaciòn" desarrollado por KEILSON en una serie de artìculos iniciados en 1.964 y recogidos en su reciente obra de 1.979.

El mètodo de compensaciòn tiene sus raices en la teoria del potencial clásico, y es la forma natural de tratar los problemas de perturbaciòn. Además, el mètofo formula una aproximaciòn independiente de la teoria moderna del potencial probabilistico, y la Memoria contiene algunos comentarios sobre este aspecto. De gran interès es la distribución de la cadena modificada en los estados permisibles, y se demuestra còmo el termino de compensaciòn puede considerarse como el potencial de un cargo de compensación (con carga total nula). Este es el potencial de Green si la cadena original es transitoria y el"potencial ergòdico" si la cadena original es ergòdica. La teoria del potencial para cadenas ergòdicas usada en la Memoria se basa en la "matriz fundamental" de las cadenas ergòdicas.

El propòsito original de Keilson al introducir el mètodo de compensaciòn fue reemplazar la tècnica de Wiener-Hopf en el plano complejo (para cadenas homogèneas) por el anàlisis en el dominio del tiempo (PRABHU, 1965)

El objeto de la memoria es estudiar un modelo de perturbaciòn en el que la matriz de intensidad de la cadena de Markov original se transforma con la ayuda de la matriz de reemplazamiento, resultando la cadena de Markov modificada. Para hacer enfasis sobre el mecanismo de perturbaciòn y el mètodo de compensaciòn se considera la cadena de Markov en su forma màs simple.

La caracteristica principal de este mètodo es que se trata con dos cadenas simultaneamente, y por tanto, la compensaciòn debe tener en cuenta las propiedades teòricas de los potenciales de ambas cadenas. Además, un estudio màs profundo del mètodo de compensaciòn revela su conexiòn con la teorìa de perturbaciòn de semigrupos, probada mediante la "2ª ecuaciòn resolvente".

En el primer capìtulo incluimos los resultados fundamentales sobre cadenas de Markov de paràmetro contìnuo que seràn utilizados posteriormente a lo largo de la Memoria. Se hace especial hincapiè en el estudio de resolventes, operadores y teoremas lìmites.

En el último apartado del capìtulo se describe la teorìa de potencial para cadenas ergòdicas siguiendo los trabajos de SYSKI (1973,1978).

A lo largo del segundo capìtulo se estudia un modelo de perturbaciòn con reemplazamientos gobernados por una matriz de reemplazamiento sobre los estados permisibles, siguiendo la tècnica introducida por ARJAS y SPEED (1975) para cadenas de Markov de paràmetro discreto. Se examinan con detalle las consecuencias del mètodo de compensaciòn en los modelos de perturbaciòn siendo los principales resultados los relativos a la distribuciòn lìmite de la cadena modificada restringida a los estados permisibles.

Dedicamos el tercer capîtulo al estudio de diferentes aplicaciones del modelo de perturbaciòn desarrollado en el anterior.

El cuarto capîtulo està dedicado al estudio de un modelo especial sugerido por DYNKIN (1965) sobre la transformaciòn del espacio de estados. La transformaciòn en cuestiòn corresponde a una matriz de reemplazamiento deterministica, y èsto nos lleva a simplificaciones bastante sorprendentes en la obtenciòn de la soluciòn general.

Se aplica el mecanismo de perturbaciòn a la transformaciòn del espacio de estados considerada por Dynkin en un proceso de Markov general demostrandose que dicha transformaciòn equivale a un modelo de reemplazamiento con una determinada matriz de reemplazamiento sugerida por ella.

Se termina el capîtulo calculando algunas medidas de efectividad para un sistema M/M/1 perturbando una cadena de Markov que verifica la condiciòn de Dynkin.

Hemos intentado abordar las cuestiones fundamentales que se encuentran planteadas hoy dîa en esta lînea de investigaciòn, limitandonos solo al caso de cadenas de Markov de paràmetro contînuo con las consiguientes lagunas que ello haya podido originar en la temàtica general del trabajo. En todo caso cuanto aqui hemos apuntado puede servirnos para un posterior estudio de esta materia en el caso de espacios de estados continuo.

CONTENIDO

CAPITULO I

CADENAS DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO

Introducciòn

Resultados fundamentales

Potencial ergòdico

1.1. INTRODUCCION.

Incluimos en este capitulo los resultados fundamentales sobre cadenas de Markov de parâmetro continuo que serân utilizados a lo largo de la memoria.

Se hace especial hincapiè en el estudio de resolventes, operadores y teoremas limites, a los que dedicamos diferentes epìgrafes del apartado 1.2 de este capitulo.

Estos resultados estân sacados fundamentalmente de las obras de COX-MILLER (1965), CHUNG (1967), CINLAR (1975) y KEMENY-SNELL-KNAPP (1976).

El ultimo apartado de este capitulo describe la teoria del potencial para cadenas ergòdicas siguiendo los trabajos de SYSKI (1973, 1978). El rasgo principal de esta teoria, debida inicialmente a KEILSON (1965) es el uso de la matriz fundamental de la cadena ergòdica. Se estudian primordialmente los operadores potenciales ergòdicos y los potenciales ergòdicos de carga. El resultado principal es que, para cadenas ergòdicas, el operador potencial ergòdico (matriz fundamental) es el que reemplaza de un modo natural al operador potencial de Green para cadenas transitorias.

La dificultad que se presenta al usar la matriz fundamental es que algunos de sus elementos son negativos, y es esencial que la suma de ellos por filas valga cero. La ventaja es que se obtiene una teoria para cadenas ergòdicas similar a la obtenida para las transitorias.

1.2.RESULTADOS FUNDAMENTALES.

1.2.1.Definiciones y propiedades.

Definiciòn I.2.1

Un proceso estocàstico de paràmetro continuo es una familia uniparàramètrica de variables aleatorias (X_t) sobre un espacio probabilistico $\{\Omega, \mathcal{S}, P\}$. El paràmetro t puede pertenecer a cualquier conjunto arbitrario lineal , estudiaremos preferentemente el caso en que t pertenece a $T^0 = (0,\infty)$ ò a $T = [0,\infty)$.

Definiciòn 1.2.2

Una cadena de Markov con paràmetro continuo es un prceso estocàstico $X = (X_t, t \in T^0)$ con espacio de estados Γ y que posee la propiedad de Markov : Para cada $n \geq 2$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $i_1, i_2, \dots i_n \in \Gamma$

$$P\left(X_{t_n}(\omega) = i_n \,/\, X_{t_1}(\omega) = i_1 \dots X_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}\right) = P\left(X_{t_n}(\omega) = i_n \,/\, X_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}\right)$$

La cadena se dirà que tiene probabilidades de transiciòn estacionarias o que es homogenea si y solo si

$$P\left(X_{s+t}(\omega) = j \,/\, X_s(\omega) = i\right)$$

no depende de s.

En una cadena de Markov homogenea podemos definir

$$P_{ij}(t) = P\left(X_{s+t}(\omega) = j \,/\, X_s(\omega) = i\right) \qquad t > 0$$

La función $p_{ij}(t)$ es la probabilidad de transición del estado i al j en el tiempo t.

Lás funciones de transición verifican las relaciones:

(a) $p_{ij}(t) \geq 0$

(b) $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ $\quad \forall i,j \in \Pi \quad \forall s,t \in T^0$

(c) $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$ (1)

(CINLAR 1975)

Si notamos $P(t) = (p_{ij}(t))$ estas propiedades pueden establecerse como siguen:

(a) Cada elemento de $P(t)$ es no negativo.

(b) La suma por filas de $P(t)$ vale la unidad.

(c) La familia $(P(t)\ ,\ t \geq 0)$ es un semigrupo con respecto a la multiplicación matricial usual.

Las condiciones (a) y (b) se expresan diciendo que para cada t la matriz $(p_{ij}(t))$ es estocàstica.

La condición (c) es conocida como la ecuación de Chapman Kolmogorov

Una matriz P de funciones $p_{ij}(\cdot)$, tales que $i,j \in \Pi$, definidas en T^0 y que satisfacen las condiciones (a) , (b) y (c) se dirà matriz de transición.

La matriz $P(t) = (p_{ij}(t))$ serà por tanto la matriz de transiciòn de la cadena de Markov y su conjunto de indices serà el espacio de estados Π.

Teorema 1.2.1

Las funciones $p_{ij}(t)$ de una matriz de transiciòn son continuas en T^0 si y solo si existen los limites

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = u_{ij}$$

En este caso la matriz limite satisface las condiciones

(1) $u_{ij} \geq 0$

(2) $\sum_j u_{ij} \leq 1$

(3) $u_{ij} \leq \sum_k u_{ik} u_{kj}$

(CHUNG 1967)

Para asegurarnos , pues , algunas condiciones de regularidad supongamos que la matriz de transiciòn es estandard , o sea que existen los limites de las $p_{ij}(t)$ en $t = 0$ y valen

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \qquad (\delta \text{ de Kronecker})$$

Con esta nueva condiciòn impuesta , y una vez establecida la continuidad en el teorema 1.2.1 pasamos a estudiar la diferenciabilidad de las funciones. El interès de ello no es meramente matemàtico ya que las derivadas de las funciones $p_{ij}(t)$ juegan un papel muy importante en el estudio de las cadenas de Markov de paràmetro continuo.

Puesto que las derivadas estan definidas como el limite de un cociente , lo primero con que nos encontramos es con el problema de cuàndo existe tal limite.

Teorema 1.2.2

Para cada $i \in \Pi$

$$-P'_{ii}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} \qquad (2)$$

existe y puede ser infinito.

Demostraciòn:

Consideremos

$$\varphi(t) = - \ln p_{ii}(t)$$

entonces φ toma valores finitos ya que $p_{ii}(t) > 0 \quad \forall t$, (CHUNG 1967)

De (1)

$$p_{ii}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)\, p_{ki}(t) \geq (a) \geq p_{ii}(s)\, p_{ii}(t).$$

de donde

$$-\ln p_{ii}(t+s) \leq -\ln p_{ii}(s) - \ln p_{ii}(t)$$

es decir

$$\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$$

Sea

$$q_i = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \leq \infty$$

Si $q_i < \infty$, por definiciòn de supremo , dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 tal que

$$\frac{\varphi(t_0)}{t_0} + \varepsilon > q_i$$

Para cada t escribimos

$$t_0 = n t + \delta$$

donde $0 \leq \delta < t$, entonces

$$q_i - \varepsilon < \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \leq \frac{n \varphi(t) + \varphi(\delta)}{t_0} = \frac{nt}{t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}$$

pero

$$\lim_{t \to 0} \frac{nt}{t_0} = 1$$

y

$$\lim_{t \to 0} \varphi(\delta) = \lim_{t \to 0} \left[- \ln p_{ii}(\delta) \right] = - \ln p_{ii}(0) = -\ln 1 = 0$$

por ser la matriz estandard. De donde , tomando limites

$$q_i - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \leq \overline{\lim}_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \leq q_i$$

y , puesto que ε es arbitrario

$$q_i = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t}$$

Si $q_i = \infty$, solo tenemos que reemplazar $q_i - \varepsilon$ por una costante M tan grande como queramos y la conclusiòn es la misma.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t}$$

de donde existe el limite.

Teorema 1.2.3

Para cada i y j tales que $i \neq j$,

$$p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \qquad (3)$$

existe y es finito.

Demostraciòn:

Para la demostraciòn de esta teorema usaremos esencialmente argumentos probabilisticos basados en las propiedades de las cadenas de Markov de paràmetro discreto.(REVUZ 1975)

Sea $(p_{ij}(\cdot))$ la matriz de transiciòn de una cadena de Markov de parametro continuo estandard $(X_t\ ,\ t \geq 0)$. Consideremos X_t solo en ciertos tiempos , es decir , miraremos el proceso X_t solo en los tiempos h,2h,3h,... domde h es un nùmero positivo pequeño. Con este concepto discreto del proceso X_t notemos que $p_{ij}(mh) = p^{(m)}_{ij}(h)$ es decir , $p_{ij}(mh)$ puede considerarse como la probabilidad de pasar de i a j en m pasos en un proceso discreto de matriz de transiciòn $p_{ij}(h)$.

Definimos las probabilidades tabù

$$_j p^{(m)}_{ii}(h) = P\left(X_{mh}(\omega) = i\ ,\ X_{(m-1)h}(\omega) \neq j \ldots X_h(\omega) \neq j \ /\ X_0(\omega) = i\right)$$

que es la probabilidad de pasar de i a i en m pasos de tamaño h sin pasar por el estado j (llamado estado tabù)

Y

$$f_{ij}^{(n)}(h) = P\left(X_{nh}(\omega) = j\ ,\ X_{vh}(\omega) \neq j\ \ 1 \leq v \leq n \,/\, X_0(\omega) = i \right)$$

la probabilidad de ir de i a j exactamente en n pasos de tamaño h. (KEMENY-SNELL-KNAPP , 1976)

Entonces

$$p_{ij}(nh) \geq \sum_{v=0}^{n-1} {}_j p_{ii}^{(v)}(h)\ \ p_{ij}(h)\ \ p_{jj}\left[(n-v-1)h\right] \tag{4}$$

puesto que en el segundo miembro no se consideran todos los posibles casos de ir de i a j en n pasos de tamaño h.

Además

$$p_{ii}(nh) = {}_j p_{ii}^{(n)}(h) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}^{(m)}(h)\ p_{ji}\left[(n-m)h\right]$$

de donde

$${}_j p_{ii}^{(n)}(h) = p_{ii}(nh) - \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}^{(m)}(h)\ p_{ji}\left[(n-m)h\right] \geq$$

$$\geq p_{ii}(nh) - \max_m\ p_{ji}\left[(n-m)h\right] \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}^{m}(h) \geq$$

$$\geq p_{ii}(nh) - \max_m\ p_{ji}((n-m)h) \tag{5}$$

puesto que

$$\sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}^{(m)}(h) \leq 1$$

ya que es la probabilidad de llegar a j desde i por primera vez en menos de n pasos.

Por ser la matriz de transición estandard, dado $\varepsilon > 0$, existe t_0 tal que, dados i y j

$$\max_{0 \le t \le t_0} p_{ji}(t) < \varepsilon$$

$$\min_{0 \le t \le t_0} p_{ii}(t) > 1 - \varepsilon$$

$$\min_{0 \le t \le t_0} p_{jj}(t) > 1 - \varepsilon$$

Si $nh < t_0$ entonces de (5)

$$_j p_{ii}^{(n)}(h) \geq 1 - \varepsilon - \varepsilon = 1 - 2\varepsilon$$

y sustituyendo en (4)

$$p_{ij}(nh) \geq (1-2\varepsilon) \sum_{v=0}^{n-1} p_{ij}(h)\, p_{jj}[(n-v-1)h] \geq$$

$$\geq (1-2\varepsilon) \sum_{v=0}^{n-1} p_{ij}(h)\,(1-\varepsilon)$$

$$p_{ij}(nh) \geq (1-2\varepsilon)\, n\, p_{ij}(h)\,(1-\varepsilon) \geq (1-3\varepsilon)\, n\, p_{ij}(h)$$

de donde

$$\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geq \frac{1-3\varepsilon}{h}\, p_{ij}(h) \tag{6}$$

Sea

$$q_{ij} = \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$

si $h \to 0$ y $nh \to t$ donde $0 < t < t_0$ en (6), entonces de la continuidad de las $p_{ij}(t)$ se deduce que

$$\lim_{nh \to t} \frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geq (1-3\varepsilon) \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$$

$$\frac{p_{ij}(t)}{t} \geq (1-3\varepsilon)\, q_{ij}$$

de donde $q_{ij} < \infty$ y

$$\underline{\lim_{t \to 0}} \; \frac{p_{ij}(t)}{t} \geq q_{ij}$$

de donde existe el limite y vale

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$

Definiciòn 1.2.3

Dada la matriz de transiciòn estandard $P(t)$ correspondiente a la cadena de Markov de paràmetro continuo $X = (X_t \,,\, t \in T)$, llamamos matriz de intensidad Q a aquella cuyos elementos son de la forma

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \qquad (7)$$

$$q_i = -q_{ii} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \qquad (8)$$

Si $q_{ii} = 0$, el estado i se dirà absorbente.

Si $q_{ii} = -\infty$, el estado i se dirà istàntaneo.

En el caso en que $-\infty < q_{ii} < 0$, el estado se dirà estable. (COX-MILLER 1965)

Señalemos que la matriz de intensidad Q de una cadena de Markov de paràmetro continuo tiene las siguientes propiedades:

$q_{ij} \geq 0 \qquad i \neq j$

$q_{ii} \leq -\sum_{j \neq i} q_{ij}$, dàndose la igualdad en el caso en que el proceso sea honesto , en cuyo caso la matriz Q se dirà conservativa. (LOEVE 1963).

1.2.2.Ecuaciones adelantadas y atrasadas.

De la ecuación (7) se deduce que

$$p_{ij}(\Delta t) = \Delta t \, q_{ij} + \theta(\Delta t)$$

De la ecuación (8) se deduce que

$$1 - p_{ii}(\Delta t) = \Delta t \, q_i + \theta(\Delta t)$$

donde $\theta(\Delta t)$ es un infinitesimo que tiende a cero cuando Δt tiende a cero.

Ambas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial por

$$P(\Delta t) = I + Q\Delta t + (\theta(\Delta t))$$

y de las ecuaciones de Chapman Kolmogorov en forma matricial se deduce que

$$P(t+\Delta t) = P(t)\left[I + Q\Delta t + (\theta(\Delta t))\right]$$

$$P(t+\Delta t) = P(t) + P(t)\, Q\, \Delta t + P(t)\,(\theta(\Delta t)) .$$

$$P(t+\Delta t) - P(t) = P(t)\, Q\, \Delta t + P(t)\,(\theta(\Delta t))$$

de donde

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t)\, Q + \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t}$$

y tomando limites cuando $\Delta t \to 0$, se deduce que

$\dot{P}(t) = P(t)\, Q$ Ecuación Forward

Para obtener las ecuaciones atrasadas consideramos las ecuaciones de Chapman Kolmogorov en la forma

$$P(t+\Delta t) = P(\Delta t)\ P(t)$$

y , operando de forma anàloga a la anterior , se deduce

$$P'(t) = Q\ P(t) \qquad \text{Ecuaciòn Backward}$$

En ambos casos teniendo en cuenta que la matriz $P(t)$ es estandard , se verifica que $P(0) = I$ de donde

$$P'(0) = Q$$

Las ecuaciones Forward y Backward reciben el nombre de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. La ecuaciòn Forward o ecuaciòn adelantada permite conocer el estado del sistema en el instante $t+\Delta t$ conocido el estado en el instante t. La ecuaciòn Backward o ecuaciòn atrasada permite , dado el estado del sistema en $t+\Delta t$, saber cuàl es el estado en el instante t. Estas dos ecuaciones desarrolladas se pueden escribir como

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(t)\, q_{kj} \qquad \text{Forward}$$

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt} = \sum_k q_{ik}\, p_{kj}(t) \qquad \text{Backward}$$

Nos preguntamos ahora si , dadas estas ecuaciones , para una matriz Q arbitraria , con la condiciòn inicial $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 1)¿tienen soluciòn ùnica separadamente? 2)¿cuàl es la conexiòn entre las soluciones de las dos ecuaciones? 3)¿cuando la soluciòn , siendo ònica , define la distribuciòn de probabilidad de un proceso de Markov?

Teorema 1.2.4

Para una matriz Q el sistema de ecuaciones

$$z'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik}\, z_{kj}(t) \qquad (9)$$

$$z'_{ij}(t) = \sum_k z_{ik}(t)\, q_{kj} \qquad (10)$$

tiene una soluciòn $(\bar{p}_{ij})$ que es una matriz de transiciòn subestocàstica standard.

Ademàs , si (z_{ij}) es una matriz de transiciòn subestocàstica que satisface

$$z'_{ij}(0) = q_{ij}$$

entonces

$$z_{ij}(t) \geqslant \bar{p}_{ij}(t)$$

La matriz de transiciòn subestocàstica $(\bar{p}_{ij})$ serà llamada "soluciòn minimal" correspondiente a la matriz $Q = (q_{ij})$. (CHUNG 1967)

Teorema 1.2.5

Si la soluciòn minimal correspondiente a la matriz Q dada es una matriz de transiciòn estocàstica , entonces es la matriz de transiciòn subestocàstica cuya matriz Q coincide con la dada , necesariamente conservativa. En particular es la ònica soluciòn del sistema de ecuaciones (9) y (10).(CHUNG 1967) .

1.2.3. Resolventes.

Si el espacio de estados es finito puede calcularse la matriz de transiciòn $P(t)$ a partir de Q usando las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. Sin embargo , a menos que Q tenga alguna estructura especial ,tal càlculo es dificil en el caso en que el espacio de estados sea infinito. En este caso es interesante considerar los potenciales

$$u_{ij}^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} p_{ij}(t)\, dt \qquad i,j \in \Pi$$

Puesto que $P(t)$ es continua en t , su trasformada de Laplace U^{α} la determina univocamente. De esta forma , conocidos los u_{ij}^{α} para todo α en algûn intervalo , los $p_{ij}(t)$ pueden obtenerse mediante la transformada de Laplace inversa.

Tomando trasformadas en las ecuaciones Backward y Forward se deduce:

De la ecuaciòn Backward

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \left(\frac{d}{dt} P(t) \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} Q\, P(t)\, dt \; .$$

$$-I + \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P(t)\, dt = Q \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P(t)\, dt$$

de donde

$$(\alpha I - Q)\, U^{\alpha} = I$$

Análogamente,de la ecuaciòn Forward

$$U^{\alpha} (\alpha I - Q) = I$$

Es decir , la resolvente U^{α} es la inversa de $(\alpha I - Q)$.

Teorema 1.2.6

La propiedad de Markov puede expresarse mediante la ecuaciòn resolvente

$$U^{\alpha} - U^{\beta} = (\beta - \alpha) U^{\alpha} U^{\beta} \qquad \alpha . \beta > 0$$

con

$$U^{\alpha} U^{\beta} = U^{\beta} U^{\alpha}$$

En efecto

$$U^{\alpha} U^{\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P(t)\, dt \int_0^{\infty} e^{-\beta s} P(s)\, ds =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P(t)\, P(s)\, e^{-\beta s}\, dt\, ds = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t - \beta s} P(t+s)\, dt\, ds$$

haciendo el cambio

$$x = s + t$$

$$y = t - s$$

se deduce que

$$U^{\alpha} U^{\beta} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x} P(x)\, dx \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)y}\, dy$$

$$U^{\alpha} U^{\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) P(x)\, dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[U^{\beta} - U^{\alpha}\right]$$

de donde

$$U^{\alpha} - U^{\beta} = (\beta - \alpha) U^{\alpha} U^{\beta}$$

y la simetria de esta identidad implica que los operadores conmutan.

1.2.4. Operadores.

A los operadores de transiciòn correspondientes a las probabilidades de transiciòn de una cadena de Markov homogènea se les llama "endomorfismos de Markov".

La matriz P(t) induce dos endomorfismos de Markov, ambos denotados por P(t), actuando sobre el espacio $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\Pi)$ de las funciones medibles acotadas sobre el espacio de estados Π con la norma del supremo, ysobre el espacio $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\Pi)$ de las medidas acotadas sobre Π con la norma de "variaciòn total", definidos por P(t) f y μP(t) para $f\in\mathcal{B}$ y $\mu\in\mathcal{M}$ respectivamente mediante

$$P(t)\, f(i) = \sum_j p_{ij}(t)\, f(j)$$

$$\mu P(t)(j) = \sum_i \mu(i)\, p_{ij}(t)$$

con los sumatorios extendidos a todos los estados de Π. Y con normas definidas por

$$\| f \| = \sup_i | f(i) |$$

$$\| \mu \| = \sum_j | \mu(j) |$$

Los espacios $\mathcal{B}$ y $\mathcal{M}$ estàn relacionados mediante el producto escalar

$$f \cdot \mu = \sum_i f(i)\, \mu(i) \qquad f\in\mathcal{B} \quad \mu\in\mathcal{M}$$

y

$$\mu(P(t)\, f) = (\mu\, P(t))\, f$$

Teorema 1.2.7

Para $\mu \in \mathcal{M}$ las ecuaciones Backward y Forward pueden escribirse

$$\frac{d}{dt} \mu P(t) = \mu P(t) \Omega = \Omega \mu P(t)$$

y tienen una soluciòn ùnica cuya transformada de Laplace verifica

$$\mu = \mu \alpha U^\alpha + \mu U^\alpha (-\Omega) = \mu \alpha U^\alpha + \mu (-\Omega) U^\alpha$$

En efecto:

Tomando transformadas en la ecuaciòn Backward

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\frac{d}{dt} \mu P(t) \right) dt = \int_0^\infty \mu P(t) \Omega e^{-\alpha t} dt$$

y haciendo la primera integral por partes

$$\left[e^{-\alpha t} \mu P(t) \right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty \mu P(t) e^{-\alpha t} dt = \mu \int_0^\infty P(t) \Omega e^{-\alpha t} dt$$

$$-\mu + \alpha \mu U^\alpha = \mu U^\alpha \Omega$$

de donde

$$\mu = \alpha \mu U^\alpha + \mu U^\alpha (-\Omega)$$

Y anàlogamente para la otra relaciòn , partiendo de la ecuaciòn Forward.

1.2.5. Distribuciones limites.

Para las probabilidades limites de una cadena de Markov de paràmetro continuo pueden darse teoremas similares a los existentes para una cadena de Markov de paràmetro discreto. (ISAACSON-MADSEN 1976)

Uno de los màs importantes puede enunciarse como sigue:

Teorema 1.2.8

Si una cadena de Markov de paràmetro continuo es irreducible, es decir todos los estados se comunican, entonces la distribuciòn limite

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = e_j$$

existe y es independiente de las condiciones iniciales del proceso. Los limites son tales que se anulan identicamente

$$e_j = 0 \qquad \forall j \in \Pi$$

o son todos positivos y constituyen una distribuciòn de probabilidad con

$$\sum_{j \in \Pi} e_j = 1$$

(BHAT 1972)

Cuando existe el limite, al tender t a ∞, $p_{ij}(t)$ tiende a cero y, entonces de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov se deduce que

$$0 = -q_{jj}\, e_j + \sum_{\substack{k \in \Pi \\ k \neq j}} q_{kj}\, e_k$$

que en notaciòn matricial puede escribirse como

$$e\, Q = 0$$

donde $e = (e_0, e_1, \ldots)$. El vector $(0,0,\ldots)$ es una soluciòn de este sistema e implica que es cero la probabilidad de que el proceso se encuentre en un estado finito cuando t tienda a ∞. Para obtener una soluciòn no nula podemos imponer la condiciòn adicional

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} e_j = 1$$

En este caso la soluciòn limite es ùnica.

De las ecuaciones Backward y Forwardse deduce que

$$P(t) = e^{Qt} \qquad \text{para} \quad t \geq 0 \qquad \text{(PARZEN 1972)}$$

de donde , al ser $e\,Q = 0$, se implica que

$$e\,P(t) = e$$

o , de forma equivalente , que

$$e\,\alpha\,U^{\alpha} = e$$

y , por tanto la distribuciòn e es invariante. En general , para cualquier $\mu \in \mathcal{M}$ la medida $(\mu 1)\,e$ es invariante.

1.2.6.Relaciones.

En lo sucesivo se usaràn algunas relaciones entre las probabilidades de transiciòn y la distribuciòn de primera entrada de i a j , $F_{ij}(t)$. En terminos de las transformadas de Laplace u^{α}_{ij} y f^{α}_{ij} , respectivamente , estas relaciones son

$$\left.\begin{aligned} u^{\alpha}_{ij} &= f^{\alpha}_{ij}\, u^{\alpha}_{jj} \qquad (i \neq j) \\ u^{\alpha}_{jj} &= (\alpha + q_j)^{-1}\,(1 - f^{\alpha}_{jj})^{-1} \qquad \forall i,j \in \mathcal{N} \ , \ \alpha > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

(COHEN 1969)

Notando m_{ij} y $m_{jj}=m_j$ a la media del tiempo de primera entrada desde i a j y a la media del tiempo de primera vuelta a j, respectivamente; y, de forma similar, $m_{ij}^{(2)}$ y $m_j^{(2)}$ a los segundos momentos, la ecuación Backward implica entonces las siguientes relaciones

$$\sum_{k\neq j} q_{ik}\, m_{kj} = -1 + q_j\, m_j\, \delta_{ij}$$

$$\sum_{k\neq j} q_{ij}\, m_{kj}^{(2)} = -2\, m_{ij} + q_j\, m_j^{(2)}\, \delta_{ij}$$

1.3. POTENCIAL ERGODICO.

La teoria del potencial para cadenas de Markov està bien establecida para el caso de cadenas transitorias. (KEMENY-SNELL-KNAPP 1976, REVUZ 1975). Para cadenas recurrentes la situaciòn es menos satisfactoria.

La teoria del potencial que aquì se describe para cadenas ergòdicas es originaria de KEILSON (1965) y es similar, aunque no idèntica, a otras teoria de potencial para cadenas recurrentes (KEMENY-SNELL-KNAPP 1976, REVUZ 1975).

El principal rasgo distinctivo de esta aproximaciòn es el uso de la matriz fundamental de la cadena ergòdica.

Supongamos la cadena de Markov $X = (X_t , 0 \leq t < \infty)$, ergodica , con matriz de transiciòn estocàstica $P(t)$, y sea E la matriz ergodica.

Definiciòn 1.3. 1

La matriz $Z(t) = (z_{ij}(t))$ dada por

$$Z(t) = P(t) - E \qquad 0 \leq t < \infty \tag{1}$$

se denomina "matriz de aproximaciòn de la cadena ergòdica" , siendo sus elementos de la forma

$$z_{ij}(t) = p_{ij}(t) - e_j$$

Las propiedades de $Z(t)$ corresponden a las propiedades de $P(t)$. Asì , $Z(t)$ es continua en $t = 0$ por serlo $P(t)$, y , ademàs ,

$$\lim_{t \to 0} Z(t) = Z(0) = \lim_{t \to 0} (P(t) - E) = I - E$$

$$\lim_{t \to \infty} Z(t) = \lim_{t \to \infty} (P(t) - E) = 0$$

La matriz $Z(t)$ tiene algunas propiedades muy interesantes aunque , en principio , su forma parece bastante artificial. Asì

$$Z(t+s) = Z(t)\, Z(s)$$

ya que

$$Z(t+s) = P(t+s) - E = P(t)\, P(s) - E$$

$$Z(t)\,Z(s) = [P(t)-E]\,[P(s)-E] = P(t)\,P(s) - E\,P(t) -$$

$$- E\,P(s) + E\,E = P(t)\,P(s) - E - E + E = P(t)\,P(s) - E$$

Además el generador infinitesimal del semigrupo $(Z(t) , t \geq 0)$ coincide con el del semigrupo de Markov $(P(t) , t \geq 0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{Z(t)-Z(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P(t)-E-P(0)+E}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P(t)-P(0)}{t} = Q$$

Y de las ecuaciones Backward y Forward se deduce

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \frac{d}{dt}[P(t)-E] = \frac{d}{dt}P(t) = \begin{cases} Q\,P(t) = Q\,Z(t) \\ \\ P(t)\,Q = Z(t)\,Q \end{cases} \tag{2}$$

con $Z(0) = I - E$

ya que $E\,Q = Q\,E = 0$

Además es interesante hacer notar que

$$Z(t)\,P(s) = Z(t+s) = Z(s+t) = P(s)\,Z(t)$$

$$Z(t)\,E = (P(t) - E)\,E = (E - E) = 0 = E\,Z(t)$$

$$Q\,Z(t) = Q\,(P(t) - E) = Q\,P(t)$$

y $Z(t)$ está acotada , ya que

$$\|Z(t)\| = \sup_i \sum_j |z_{ij}(t)| = \sup_i \sum_j (|p_{ij}(t) - e_j|) \leq$$

$$\leq \sup_i \left(\sum_j |p_{ij}(t)| + \sum_j e_j \right) = 2$$

de donde

$$\|Z(t)\| \leq 2$$

Todos los productos matriciales están , por tanto , bien definidos , con sus elementos dados por series absolutamente convergentes.

Por otra parte, considerando a $Z(t)$ como un operador acotado sobre el espacio de las medidas acotadas sobre Π, $\mathcal{M}$, para $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu Z(t)$ es una medida, de elementos

$$\mu Z(t)(j) = \sum_i \mu(i)\, z_{ij}(t)$$

y $\mu Z(t) \in \mathcal{M}$

con

$$\| \mu Z(t) \| \leq 2 \|\mu\|$$

Sin embargo, $Q\, Z(t) = Z(t)\, Q$, en general, no está acotado ya que

$$\sum_j \left| \sum_k q_{ik}\, z_{kj}(t) \right| \leq \sum_j \sum_k |q_{ik}|\, |z_{kj}(t)| =$$

$$= \sum_k |q_{ik}| \sum_j |z_{kj}(t)| \leq \sum_k |q_{ik}| = 2\, q_i$$

necesitamos, por tamto, imponer la condicion (3) para asegurarnos que los elementos de $\mu\, Q\, Z(t)$ vienen dados por series absolutamente convergentes.

$$|\mu|\, q = \sum_i |\mu(i)|\, q_i < \infty \tag{3}$$

para cualquier funcibn $q = (q_i)$.

Definicibn 1.3.2

A la resolvente o nucleo -potencial del semigrupo $(Z(t),\ t \geq 0)$ dada por

$$Z^\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, Z(t)\, dt \tag{4}$$

con elementos de la forma

$$z_{ij}^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \, z_{ij}(t) \, dt \tag{5}$$

se denomina "resolvente ergòdica" o "α-potencial ergòdico" del semi-grupo $(P(t) , t \geqslant 0)$.

Las integrales que definen las z_{ij} en (5) convergen para $\alpha > 0$, y además

$$Z^{\alpha} = U^{\alpha} - \frac{E}{\alpha} \qquad \alpha > 0 \tag{6}$$

Las ecuaciones Backward y Forward, dadas por (2), pueden escribirse en la forma

Backward: $$I - E = \alpha Z^{\alpha} - Q Z^{\alpha} \tag{7}$$

Forward $$I \quad E = \alpha Z^{\alpha} - Z^{\alpha} Q \tag{8}$$

ya que, para la ecuaciòn Backward

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} Z(t) \, dt = \alpha \int_0^{\infty} Z(t) \, e^{-\alpha t} dt = E - I + \alpha Z^{\alpha}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \, Q \, Z(t) \, dt = Q Z^{\alpha}$$

de donde

$$E - I + \alpha Z^{\alpha} = Q Z^{\alpha}$$

y por tanto

$$I - E = \alpha Z^{\alpha} - Q Z^{\alpha}$$

Y anàlogamente para la ecuaciòn Forward.

Por tamto Z puede considerarse como la inversa generalizada de $\alpha I - Q$ relativa a $Z(0) = I - E$, en el mismo sentido en que U lo era relativa a $P(0) = I$.

Definición 1.3.3

La matriz $Z = (z_{ij})$ dada por

$$Z = \int_0^\infty (P(t) - E) \, dt \tag{9}$$

si existe , se denomina "matriz fundamental" o "nucleo -potencial" de la cadena ergòdica.

Veamos bajo què condiciones existe el potencial ergòdico Z.

Teorema 1.3.1

Sea T_j el tiempo de la primera vuelta al estado j de la cadena ergòdica $X = (X_t \, , \, 0 \leq t < \infty)$, y sea $m_j^{(2)} = E (T_j^2)$. Si para cada $j \in \Pi$, $m_j^{(2)} < \infty$ (y todos los m_{ij} = tiempo medio de la primera entrada a j desde i , son finitos) , entonces el potencial ergòdico Z, dado por (9) existe (y todos los z_{ij} son finitos) , y puede escribirse

$$\lim_{\alpha \to 0} Z^{\alpha} = Z \tag{10}$$

y ademaś

(a) $z_{jj} > 0$ para cada j

(b) $\sum_j z_{ij} = 0$ $i \in \Pi$

(c) $\sum_j |z_{ij}| = 2 \sum_{j / z_{ij} \geq 0} z_{ij} \leq 2 \sum_j z_{jj} \leq \infty$

Demostraciòn:

Veamos primero la existencia de Z. Para ello distinguiremos los casos en que $i=j$ e $i\neq j$.

Si $i=j$, consideremos la ecuaciòn (6) **escrita** para z_{jj}

$$z_{jj}^{\alpha} = u_{jj}^{\alpha} - \frac{e_j}{\alpha}$$

Usando la expresiòn explicita**para** los u_{jj}^{α} dada en el apartado anterior por (11), y aplicando la regla de **L'Hoppital sucesivamente,** se deduce

$$\lim_{\alpha\to 0} z_{jj}^{\alpha} = \frac{1}{2}\ \frac{e_j}{m_j}\ \left(m_j^{(2)} - m_j^{2}\ e_j \right)$$

Este limite es estrictamente positivo y por tanto $z_{jj} > 0$ en un entorno del origen. Ademàs, para cada $\tau > 0$ fijo,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{z_{jj}^{\tau\alpha}}{z_{jj}^{\alpha}} = 1$$

y por tanto z_{jj} varìa muy poco en $\alpha = 0$. Entonces aplicando el teorema tauberiano (CHUNG 1967)

$$\lim_{\alpha\to 0} z_{jj}^{\alpha} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t z_{jj}(s)\, ds$$

De donde

$$\lim_{\alpha\to 0} z_{jj}^{\alpha} = z_{jj}$$

existe y es finito.

Si $i\neq j$, escribimos

$$z_{ij}^{\alpha} = z_{jj}^{\alpha} - (u_{jj}^{\alpha} - u_{ij}^{\alpha})$$

y usando de nuevo las expresiones de u_{ij}^{α}, y u_{jj}^{α} dadas en el apartado anterior, podemos escribir

$$\lim_{\alpha \to 0} (u^{\alpha}_{jj} - u^{\alpha}_{ij}) = m_{ij}\, e_j$$

por tanto

$$\lim_{\alpha \to 0} z^{\alpha}_{ij} = z_{jj} - m_{ij}\, e_j$$

existe y es finito. Aplicando el mismo razonamiento anterior , puede aplicarse el teorema tauberiano , y se deduce que

$$z_{ij} = \lim_{\alpha \to 0} z^{\alpha}_{ij} = \lim_{t \to \infty} \int_0^t z_{ij}(s)\ ds .$$

Por otra parte las expresiones (a) y (b) se deducen de la propia definición de los elementos de Z.

Además la igualdad de (c) se sigue del hecho de que

$$\sum_j |z_{ij}| = \sum_{j / z_{ij} \geq 0} z_{ij} + \sum_{j / z_{ij} \leq 0} (-z_{ij})$$

y la suma por filas de los $z_{ij} \geq 0$ debe coincidir con la suma de los $z_{ij} \leq 0$ por (b) , luego

$$\sum_j |z_{ij}| = 2 \sum_{j / z_{ij} \geq 0} z_{ij}$$

La expresión (b) indica que Z puede decirse que es conservativa en el mismo sentido que Q , pero de elementos diagonales positivos como se expresa en (a). Además

$$\| Z \| = \sup_i \sum_j | z_{ij} |$$

de donde Z en general no está acotada , y , en este sentido , se comporta como el generador Q y , para cadenas transitorias , como la U.

Lema 1,3,1

En una cadena ergòdica con momentos de primera entrada m_{ij},

$$0 \leq z^{\alpha}_{jj} - z^{\alpha}_{ij} \leq m_{ij} \qquad \forall\, i , j \in \Pi \tag{12}$$

Demostraciòn:

Notemos por $F_{ij}(t)$ a la distribuciòn de la primera entrada de i a j, y sea f^{α}_{ij} su transformada de Laplace correspondiente dada por

$$f^{\alpha}_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} F_{ij}(t)\, dt$$

De las expresiones dadas para las u^{α}_{ij} y u^{α}_{jj} en el apartado anterior podemos escribir

$$z^{\alpha}_{jj} - z^{\alpha}_{ij} = u^{\alpha}_{jj} (1 - f^{\alpha}_{ij})$$

pero

$$\frac{1 - f^{\alpha}_{ij}}{\alpha} = m_{ij}\, g^{\alpha}_{ij}$$

donde g^{α}_{ij} es la transformada de Laplace de la distribuciòn del tiempo de vida

$$z^{\alpha}_{jj} - z^{\alpha}_{ij} = \alpha\, m_{ij}\, u^{\alpha}_{jj}\, g^{\alpha}_{ij} \leq m_{ij}$$

Este lema indica que $|z^{\alpha}_{ij}|$ puede no estar acotada uniformemente en i. Esto contrasta con el hecho de que $0 \leq u^{\alpha}_{ij} \leq u_{ij}$ para cadenas transitorias.

Teorema 1.3.2

Sea $\mu \in \mathcal{M}$ satisfaciendo la condiciòn

$$\sum_i |\mu(i)| m_{ij} < \infty \qquad \text{para cada} \quad j \in \Pi \tag{13}$$

entonces

$$\lim_{\alpha \to 0} \mu \varepsilon^\alpha = \mu \varepsilon \tag{14}$$

Demostraciòn:

Para cada j

$$\mu \varepsilon^\alpha(j) = \sum_i \mu(i) \varepsilon^\alpha_{ij} = -\sum_i \mu(i) (\varepsilon^\alpha_{jj} - \varepsilon^\alpha_{ij}) + \sum_i \mu(i) \varepsilon^\alpha_{jj}$$

y por (13) y en virtud del lema I.3.1

$$|\mu(i)| \, |\varepsilon^\alpha_{jj} - \varepsilon^\alpha_{ij}| < \infty$$

y por tanto del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{\alpha \to 0} \mu \varepsilon^\alpha(j) = -\lim_{\alpha \to 0} \sum_i \mu(i) (\varepsilon^\alpha_{jj} - \varepsilon^\alpha_{ij}) +$$

$$+ \lim_{\alpha \to 0} \sum_i \mu(i) \varepsilon^\alpha_{jj} = -\sum_i \mu(i) \lim_{\alpha \to 0} (\varepsilon^\alpha_{jj} - \varepsilon^\alpha_{ij}) + \left(\sum_i \mu(i)\right) \lim_{\alpha \to 0} \varepsilon^\alpha_{jj} =$$

$$= -\sum_i \mu(i) (\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}) + \sum_i \mu(i) \varepsilon_{jj} = \sum_i \mu(i) \varepsilon_{ij}$$

Veamos ahora algunos teoremas relativos a la descomposiciòn de Riesz de algunas medidas.

Teorema 1.3.3

Si $\mu \in \mathcal{M}$ satisface la condiciòn (3) entonces tiene como ùnica descomposiciòn

$$\mu = \lambda + \eta \tag{15}$$

donde $\lambda = \mu E$ es invariante y $\eta = \lim_{\alpha \to 0} \sigma U^\alpha$, donde $\sigma = \mu(-Q)$ es ùn cargo con $\sigma 1 = 0$ y $\lim_{\alpha \to 0} \eta \alpha U^\alpha = 0$

Además , para las cadenas transitorias $\lambda = 0$ y $\eta = \sigma U$ es el potencial de Green del cargo σ; para las cadenas ergódicas $\lambda = (\mu s) e$ donde e es la distribución ergódica.

Demostración:

Consideremos la forma resolvente de la ecuación Backward

$$I = \alpha U^{\alpha} - Q U^{\alpha}$$

aplicando la medida μ puede escribirse en la forma

$$\mu = \mu \alpha U^{\alpha} + \mu(-Q) U^{\alpha}$$

Por (3) $\|\mu\| < \infty$ y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$\lambda = \lim_{\alpha \to 0} \mu \alpha U^{\alpha} = \mu \lim_{\alpha \to 0} \alpha U^{\alpha} = \mu E$$

De donde λ es invariante , $\lambda = 0$ en las cadenas transitorias y $\lambda = (\mu s) e$ para las cadenas ergódicas.

Además por (3) , $\| \sigma \| = \| \mu (-Q) \| < \infty$

de donde existe $\lim\limits_{\alpha \to 0} \sigma U$ y vale

$$\lim_{\alpha \to 0} \sigma U^{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \mu (-Q) U^{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \mu (I - \alpha U^{\alpha}) = \mu - \lambda$$

y

$$\lim_{\alpha \to 0} \eta \alpha U^{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha (\mu - \lambda) U^{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha \mu U^{\alpha} - \lambda \alpha U^{\alpha} = 0$$

Para las cadenas transitorias U^{α} decrece con α de donde del teorema de la convergencia dominada se deduce que

$$\eta = \sigma U$$

Teorema 1.3.4

Para $\mu \in \mathcal{M}$ satisfaciendo la condición (3) , sea $\lambda = \mu E$ la medida invariante para la cadena ergódica , y sea $\sigma = \mu(-Q)$ con $\sigma 1 = 0$ y satisfaciendo la condición (13). Entonces , μ tiene como única descomposición

$$\mu = \lambda + \sigma Z \tag{16}$$

Demostración:

Consideremos la forma resolvente de la ecuación Backward

$$I - E = \alpha Z^{\alpha} - Q Z^{\alpha}$$

aplicando la medida μ

$$\mu - \mu E = \mu \alpha Z^{\alpha} + \mu(-Q) Z^{\alpha} = \alpha \mu Z^{\alpha} + \sigma Z^{\alpha} \tag{17}$$

Pero $|\alpha z_{ij}^{\alpha}| \leq 1$ y del teorema de la convergencia dominada se deduce que

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \mu Z^{\alpha} = 0$$

Para calcular $\lim_{\alpha \to 0} \sigma Z^{\alpha}$ se necesita la condición (12). Aplicando el teorema 1.2.2 para σ

$$\lim_{\alpha \to 0} \sigma Z^{\alpha} = \sigma Z$$

y tomando limites cuando $\alpha \to 0$ en la ecuación (17)

$$\mu = \mu E + \sigma Z = \lambda + \sigma Z$$

La medida σZ será denominada " potencial ergódico del cargo σ ". Entonces el teorema 1.2.4 indica que la medida μ en una cadena ergòdica puede representarse como la suma de una medida invariante λ y el potencial ergòdico de un cargo σ con masa total cero.

En cadenas transitorias $\eta = \sigma U$ y en cadenas ergòdicas $\eta = \sigma Z$

Por tanto Z es el operador potencial ergòdico que reemplaza al operador potencial de Green U en las cadenas ergòdicas.

En la mayoria de las aplicaciones μ es una medida de probabilidad y λ es la distribuciòn ergòdica , asi que σZ compensa μ de su diferencia con $\bar{e}$.

CAPITULO II

MODELO DE PERTURBACION

2.1.INTRODUCCION.

Cuando el modelo de una situaciòn real viene descrito por una cadena de Markov , es interesante en muchas aplicaciones pràcticas estudiar què ocurriria si a esta cadena se la somete a una perturbaciòn de cualquier tipo.

Las propiedades de la cadena modificada se expresan en tèrminos de la cadena original y de la "compensaciòn" resultante de la perturbaciòn.

La tècnica que seguimos en este estudio es el mètodo de compensaciòn desarrollado por KEILSON (1964) y , màs recientemente,por SYSKI (1977).

A lo largo del capitulo se estudia un modelo de perturbaciòn con reemplazamientos gobernados por una matriz de reemplazamiento sobre los estados "permisibles" , siguiendo la tècnica introducida para cadenas de Markov de paràmetro discreto por ARJAS y SPEED (1975). Las consecuencias del mètodo de compensaciòn en los modelos de perturbaciòn son examinadas con detalle. Los principales resultados conciernen a la distribuciòn limite de la cadena modificada restringida a los estados permisibles.

2.2. REEMPLAZAMIENTO.

Consideremos una cadena de Markov homogènea $X = (X_t \,,\, 0 \le t < \infty)$ con espacio de estados discreto Π y generada por la matriz de transiciòn estocàstica standard $P(t) = \left(p_{ij}(t)\right)$. Sea Q la correspondiente matriz conservativa, que escribiremos en la forma

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S^c & S \end{array} \\ \begin{array}{c} S^c \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

donde S es un subconjunto fijo del espacio de estados Π y $S^c = \Pi - S$. Los estados de S^c se diràn "prohibidos" y los de S "permisibles". Modificamos esta cadena, que llamaremos original, en el sentido siguiente: Siempre que se produzca una transiciòn de S a S^c serà reemplazada por una transiciòn de S a S. Las transiciones de S^c en sì mismo y de S^c a S no se veràn afectadas en esta modificaciòn. Esto trae consigo que la matriz conservativa Q quede modificada para dar lugar a una nueva matriz Q^* en la forma

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S^c & S \end{array} \\ \begin{array}{c} S^c \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22}^* \end{pmatrix} \end{array}$$

donde Q_{22}^* recogerà las transiciones, dadas por Q_{22}, de S a S y las de S a S^c, dadas por Q_{21}, reemplazadas.

Llamemos $R = (r_{ij})$ a la matriz de reemplazamiento, de tal forma que r_{ij} sea la probabilidad de que el elemento i sea reemplazado por el elemento j :

Si $i \in \Pi$ y $j \in S^c$, entonces $r_{ij} = 0$, ya que ningùn elemento de S^c es el reemplazado de alguno de Π .

Si $i \in S$ y $j \in S$, entonces $r_{ij} = 0$, salvo en los casos en que $i=j$, ya que ningùn elemento de S es reemplazado.

La matriz R tiene , por tanto , la forma

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donde R_{12} es una matriz rectangular correspondiente a la distribuciòn de reemplazamientos de S^c en S.

Consideremos $I = J_1 + J_2$,

donde

$$J_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

entonces

$$J_1 \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{pmatrix}$$

o sea $Q = J_1 Q + J_2 Q$,

donde $J_1 Q$ comprende las transiciones que no se han visto afectadas por la modificación considerada , y $J_2 Q$ comprende las transiciones prohibidas que han sido reemplazadas.

Así la matriz de intensidad correspondiente a la cadena $\overset{*}{X}=(X^*_t, 0 \leq t < \infty)$, modificada de la X , vendrá dada por:

$$Q^* = J_1 Q + J_2 Q \mathcal{R} \tag{1}$$

Evidentemente

$$Q^* \cdot \mathbb{1} = J_1 Q \mathbb{1} + J_2 Q \mathcal{R} \mathbb{1} = J_2 Q \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1} = 0 .$$

ya que la suma por filas de los elementos de R_{12} vale 1 y la suma por filas de los elelmentos de Q vale 0,por ser Q conservativa.

Además

$$Q^*_{22} = Q_{22} + Q_{21} R_{12} \tag{2}$$

por tanto Q^*_{22} depende de las transiciones de S en sí mismo y de S a S^c de la cadena original , así como del reemplazamiento de estas últimas , tal como se dijo anteriormente.

Definición 2.2.1

La matriz de intensidad conservativa Q^* correspondiente a la cadena modificada con los reemplazamientos hechos siguiendo la matriz de reemplazamiento R viene definida por la ecuación (1), donde Q es la matriz de intensidad conservativa de la cadena original.

Lema 2.2.1

De las definiciones de Q y Q^* se deducen las siguientes relaciones:

a) $J_1 Q^* = J_1 Q$ b) $J_2 Q^* = J_2 Q R$

c) $J_1 Q^* J_1 = J_1 Q J_1$ d) $J_2 Q^* J_2 = J_2 Q R$

e) $R^2 = R$ f) $Q R = Q^* R$

g) $Q^* - Q = J_2 Q (R-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q_{21} & Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$

h) $q_i^* \leq q_i \qquad \forall i \in \pi$ (3)

En efecto:

a)

$$J_1 Q^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$J_1 \overset{*}{Q} = J_1 Q$$

b)

$$J_2 Q^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

$$J_2 Q R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_{11} R_{12} + Q_{12} \\ 0 & Q_{21} R_{12} + Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

c) $\quad J_1 \overset{*}{Q} = J_1 Q$

de donde

$$J_1 \overset{*}{Q} J_1 = J_1 Q J_1$$

d)

$$J_2 Q^* J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} + Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

de donde

$$J_2 Q R = J_2 \overset{*}{Q} J_2$$

e)

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

de donde

$$R^2 = R$$

f)

$$QR = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{11}R_{12} + Q_{12} \\ 0 & Q_{21}R_{12} + Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q^*R = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21}R_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{11}R_{12} + Q_{12} \\ 0 & Q_{21}R_{12} + Q_{22} \end{pmatrix}$$

de donde

$$Q\,R = Q^*R$$

g)

$$Q^* - Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} + Q_{21}R_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q^* - Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q_{21} & Q_{21}R_{12} \end{pmatrix}$$

$$J_2\, Q(R-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2\, Q\,(R-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q_{21} & Q_{21}R_{12} \end{pmatrix}$$

de donde

$$Q^* - Q = J_2\, Q\,(R-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q_{21} & Q_{21}R_{12} \end{pmatrix}$$

h)

$$q_i^* = -q_{ii}^* = \begin{cases} -q_{ii} & i \in S^c \\ -q_{ii} - \sum\limits_{k \in S^c} q_{ik}\, r_{ki} & i \in S \end{cases}$$

de donde

$$q_i^* = q_i \qquad\qquad i \in S^c$$

$$q_i^* = q_i - \sum_{k \in S^c} q_{ik}\, r_{ki} \qquad\qquad i \in S$$

por tanto

$$q_i^* \leq q_i \qquad\qquad \forall\, i \in \Pi$$

Según los teoremas 1.2.4 y 1.2.5, dada la Q^* matriz , el sistema de ecuaciones

(Backward) $\quad \dfrac{d}{dt} P^*(t) = Q^*\, P^*(t)$

$t \geq 0$

(Forward) $\quad \dfrac{d}{dt} P^*(t) = P^*(t)\, Q^*$

tieme una ùnica soluciòn subestocàstica standard , llamada la soluciòn minimal correspondiente a la Q^* matriz. Si esta soluciòn minimal es estocàstica , entonces es la ùnica matriz de transiciòn subestocàstica standard cuya Q^* matriz coincide con la dada. En particular es la ùnica soluciòn del sistema planteado.

Notemos $\overset{*}{P}(t) = \left(p^*_{ij}(t)\right)$ a esta ùnica soluciòn , que serà , por tanto , la matriz de transiciòn de la cadena modificada $X^* = (X^*_t\ ,\ 0 \leq t < \infty)$ correspondiente a la matriz de intensidades Q^*.

Y , por $Q^*_{21} = 0$ tendrà la forma

$$P^*(t) = \begin{pmatrix} P^*_{11}(t) & P^*_{12}(t) \\ 0 & P^*_{22}(t) \end{pmatrix}$$

La idea bàsica del mètodo de Perturbaciòn consiste en expresar $\overset{*}{P}(t)$ en funciòn de $\bar{P}(t)$.

Vamos a emplear el mètodo de compensaciòn introducido por KEILSON (1965) para estudiar el problema. Consiste este mètodo en interpretar la transformaciòn de la cadena original X en la cadena modificada X^*, en tèrminos de la dinàmica de X , considerando que las transiciones prohibidas de S a S^c y la consiguiente vuelta a los estados de S se deben a un cargo negativo (aniquilaciòn) introducido en S^c y otro igual pero de signo contrario (creaciòn) en $\bar{S}$. Para ello nos ayudaremos del nùcleo y medidas de compensaciòn que definiremos en el apartado siguiente.

2.3. NUCLEO Y MEDIDAS DE COMPENSACION.

Definición 2.3.1

La matriz $C(t)=\left(c_{ij}(t)\right)$ definida por:

$$C(t) = P^*(t)\,(Q^* - Q) \tag{4}$$

con $\quad C(0) = Q^* - Q$

se denomina "núcleo de compensación" (KEILSON-SYSKI , 1974)

Podemos escribir $C(t)$ en la forma

$$C(t) = \begin{pmatrix} -P^*_{12}(t)\,Q_{21} & P^*_{12}(t)\,Q_{21}R_{12} \\ -P^*_{22}(t)\,Q_{21} & P^*_{22}(t)\,Q_{21}R_{12} \end{pmatrix}$$

tiene , por tanto , algunos de sus elementos negativos , y la suma de sus elementos por filas vale cero.

Lema 2.3.1

El núcleo de compensación $C(t)$ definido por (4) , verifica que

$$P(s)\,C(t) = C(t+s) \tag{5}$$

y $c_{ij}(\cdot)$ son funciones continuas de t para $0 \le t < \infty$.

Demostración :

De la definición 2.3.1

$$C(t+s) = \overset{*}{P}(t+s)\,(Q^{*}-Q).$$

Ahora bien , $\overset{*}{P}(t)$ es la matriz de transición de la cadena modificada luego satisface la ecuación

$$\overset{*}{P}(t+s) = \overset{*}{P}(s)\,\overset{*}{P}(t) .$$

de aquí

$$C(t+s) = \overset{*}{P}(s)\,\overset{*}{P}(t)\,(Q^{*}-Q) = \overset{*}{P}(s)\,C(t)$$

Esta relación indica que cada columna de $C(t)$ satisface

$$\overset{*}{P}(s)\,c_{ij}(t) = c_{ij}(t+s)$$

así que para j fijo , las funciones $c_{\cdot j}(\cdot)$ constituyen la ley de salida de la cadena modificada. Por tanto $c_{ij}(\cdot)$ es una función continua de t para $0 \leq t < \infty$.(LEVIATAN, 1972)

Definición 2.3.2

Dado el espacio $\mathcal{M}$ de las medidas acotadas sobre el espacio de estados π , y considerado $C(t)$ como un operador acotado sobre él , llamaremos "medidas de compensación " a $\mu C(t)$ (KEILSON-SYSKI ,1974)

Como Q y $P(t)\, Q = Q\, P(t)$ no están generalmente acotadas , sólo se considerarán aquéllas medidas μ tales que , para cualquier función $q = (q_i)$, satisfagan la condición

$$|\mu|\, q = \sum_i |\mu(i)|\, q_i < \infty \tag{6}$$

esto asegurará que los productos matriciales con la medida μ están bien definidos , con elementos dados por series absolutamente convergentes , y permitirá la asociatividad en los casos de interés práctico.

Lema 2.3.2

Basándose en la condición (6) , se verifica

a) $\|\mu \cdot Q\| < \infty$

b) $\|\mu P(t)\, Q\| < \infty$

c) $\|\mu Q^*\| < \infty$

d) $\|\mu P^*(t)\, Q^*\| < \infty$

Demostración:

a) $\|\mu Q\| = \sum_j |\mu Q(j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(i)\, q_{ij} \right| \leq$

$$\leq \sum_j \sum_i |\mu(i)|\, |q_{ij}| = \sum_i |\mu(i)| \sum_j |q_{ij}| =$$

$$= \sum_i |\mu(i)| \left(\sum_{j \neq i} |q_{ij}| + |q_{ii}| \right) = 2 \sum_i |\mu(i)|\, q_i = 2|\mu| \cdot q < \infty .$$

Anàlogamente b)

d) $\| \mu P^*(t) Q^* \| = \sum_j | \mu P^*(t) Q^*(j) | = \sum_j | \sum_i \mu(i) \sum_\ell p^*_{i\ell} q^*_{\ell j} | \leq$

$$\leq \sum_j \sum_i | \mu(i) \sum_\ell p^*_{i\ell} q^*_{\ell j} | \leq \sum_j \sum_i |\mu(i)| \sum_\ell p^*_{i\ell} |q^*_{\ell j}| = \sum_i |\mu(i)| \sum_j \sum_\ell p^*_{i\ell} |q^*_{\ell j}|$$

$$= \sum_i |\mu(i)| \sum_\ell p^*_{i\ell} \sum_j |q^*_{\ell j}| = 2 \sum_i |\mu(i)| \, q^*_i \leq (3) \leq 2 \sum_i |\mu(i)| q_i < \infty .$$

Anàlogamente c).

Sin embargo la condiciòn (6) impuesta no basta en los casos en que incluyamos a la matriz C(t). Por estar $\overset{*}{P}(t)$ acotada bastarà con acotar $Q^* - Q$, pero debido a su forma es suficiente suponer que las sumas por filas de la submatriz Q_{21} estàn uniformemente acotadas , es decir ,

$$\sum_{\ell \in S^c} q_{i\ell} \leq K \qquad \forall i \in S \tag{7}$$

observemos que esta condiciòn no es muy fuerte y se satisface en la mayorìa de los casos de interès pràctico;en particular cuando S^c sea finito ya que entonces se tratarà de suma finita de elementos finitos.

Lema 2.3.3

Bajo las condiciones (6) y (7) , la medida de compensaciòn $\mu C(t)$ està bien definida , y

$$\| \mu (Q^* - Q) \| \leq 2K \|\mu\|$$

$$\| \mu \, C(t) \| \leq 2K \|\mu\|$$

$$\mu\, c(t)\, \mathbf{1} = 0$$

$$\mu\, c(t)\, R = 0$$

Demostraciòn:

Veamos en primer lugar que

$$\sum_j | q^*_{ij} - q_{ij} | \leq 2K \qquad \forall i \in \Pi$$

para ello distinguiremos entre los casos en que $i \in S$ e $i \in S^c$.

Si $i \in S$

$$\sum_j | q^*_{ij} - q_{ij} | = \sum_{j \in S} | q^*_{ij} - q_{ij} | + \sum_{j \in S^c} | q^*_{ij} - q_{ij} | = \sum_{j \in S} \Big| \sum_{\ell \in S^c} q_{i\ell} r_{\ell j} \Big| +$$

$$+ \sum_{j \in S^c} | - q_{ij} | \leq \sum_{j \in S} \sum_{\ell \in S^c} q_{i\ell} r_{\ell j} + \sum_{j \in S^c} q_{ij} = \sum_{\ell \in S^c} q_{i\ell} \sum_{j \in S} r_{\ell j} + \sum_{j \in S^c} q_{ij} =$$

$$= \sum_{\ell \in S^c} q_{i\ell} + \sum_{j \in S^c} q_{ij} \leq 2K.$$

ya que $R_{12}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y se verifica (7).

Si $i \in S^c$

$$\sum_j | q^*_{ij} - q_{ij} | = 0 \leq 2K$$

ya que $q^*_{ij} = q_{ij} \qquad \forall\, i \in S^c,\ j \in \Pi.$

Por tanto

$$\| Q^* - Q \| = \sup_i \sum_j | q^*_{ij} - q_{ij} | \leq 2K$$

y ademàs

$$\| c(t) \| = \| P^*(t) (Q^* - Q) \| \leq \| P^*(t) \| \, \| Q^* - Q \| \leq 2K$$

luego $\mu(Q^* - Q)$ y $\mu C(t)$ estàn bien definidas , pertenecen a $\mathcal{M}$ y

$$\| \mu (Q^* - Q) \| \leq \| \mu \| \, \| Q^* - Q \| \leq 2K \| \mu \|$$

$$\| \mu\, c(t) \| \leq \|\mu\| \, \|c(t)\| \leq 2k \|\mu\|.$$

y los productos matriciales satisfacen la asociatividad , de donde

$$\mu\, c(t) = \mu \cdot P^*(t)\,(Q^* - Q) = \mu\, P^*(t) \cdot (Q^* - Q)$$

$$\mu\, c(t) \cdot 1 = \mu \cdot c(t)\, 1 = \mu \cdot 0 = 0$$

$$\mu\, c(t) \cdot R = \mu \cdot c(t)\, R = 0$$

ya que

$$c(t) \cdot 1 = P^*(t)\,(Q^* - Q) \cdot 1 = P^*(t) \cdot (Q^* - Q)\, 1 = 0$$

$$c(t) \cdot R = P^*(t)\,(Q^* - Q) \cdot R = P^*(t) \cdot (Q^* - Q)\, R = 0$$

Una vez definidos el nùcleo y las medidas de compensaciòn , vamos a expresar la matriz de transiciòn de la cadena modificada en funciòn de la matriz de trahsiciòn de la cadena original , asì como la medida $\mu \overset{*}{P}(t)$ en funciòn de $\mu P(t)$.

Teorema 2.3.1

La soluciòn de la ecuaciòn Backward de la cadena modificada

$$\frac{d}{dt} P^*(t) = Q^* P^*(t).$$

con $\overset{*}{P}(0) = I$

viene expresada en forma matricial por

$$\overset{*}{P}(t) = P(t) + \int_0^t C(t-s)\, P(s)\, ds \qquad t \geq 0 \tag{8}$$

donde $P(t)$ es la soluciòn de la ecuaciòn Backward de la cadena original.

Demostraciòn:

La ecuaciòn Backward de la cadena modificada podemos escribirla como

$$\frac{d}{dt} P^*(t) = (Q^* - Q)\, P^*(t) + Q\, P^*(t)$$

y por (4)

$$\frac{d}{dt} P^*(t) = c(t) + Q\, P^*(t) \qquad t \geq 0 \qquad (9)$$

Notemos $G(t) = e^{-Qt} \overset{*}{P}(t)$,

de aquì

$$\overset{*}{P}(t) = e^{Qt}\, G(t)$$

derivando

$$\frac{d}{dt} P^*(t) = e^{Qt} \frac{d}{dt} G(t) + Q\, e^{Qt}\, G(t)$$

$$\frac{d}{dt} P^*(t) = e^{Qt} \frac{d}{dt} G(t) + Q\, P^*(t)$$

Entonces , comparando (9) y (10)

$$e^{Qt} \frac{d}{dt} G(t) = c(t)$$

$$\frac{d}{dt} G(t) = e^{-Qt}\, c(t) \qquad \text{(Ecuaciòn diferencial de soluciòn)}$$

$$G(t) = \int_0^t e^{-Qs}\, c(s)\, ds + G(0) .$$

De aquì

$$\overset{*}{P}(t) = e^{Qt}\int_0^t e^{-Qs}\, C(s)\, ds + e^{Qt}\, G(0)$$

$$\overset{*}{P}(t) = \int_0^t e^{Q(t-s)}\, C(s)\, ds + e^{Qt}$$

ya que $G(0) = I$

Ahora bien , e^{Qt} es la soluciòn de la ecuaciòn Backward de la cadena original , COX-MILLER (1965)

luego

$$\overset{*}{P}(t) = \int_0^t P(t-s)\, C(s)\, ds + P(t)$$

Teorema 2.3.2

Bajo las condiciones (6) y (7) , la soluciòn de la ecuaciòn no homogènea

$$\frac{d}{dt}\, \mu \overset{*}{P}(t) = \mu \overset{*}{P}(t)\, Q + \mu\, C(t) \qquad t \geq 0$$

con $\mu \overset{*}{P}(0) = \mu$

viene dada por

$$\mu P^*(t) = \mu P(t) + \int_0^t \mu\, C(t-s)\, P(s)\, ds \tag{11}$$

La demostraciòn se hace siguiendo un procedimiento anàlogo al seguido en el teorema 2.3.1.

2.4. SEGUNDA ECUACION RESOLVENTE.

Expresada , mediante (8) , la matriz de transiciòn del proceso modificado, $P^*(t)$, en funciòn de la matriz de transiciòn de la cadena original , $P(t)$, y un tèrmino conservativo , procederemos a estudiar las medidas invariantes del proceso reemplazado. Establezcamos antes la llamada "2º ecuaciòn resolvente del proceso" que serà , más adelante , de gran ayuda , y permitirà relacionar las medidas invariantes de ambos procesos.

Denotemos por $U^{*\alpha}=(u_{ij}^{*\alpha})$ a la transformada de Laplace de $P^*(t)$ dada por

$$U^{*\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P^*(t)\, dt \qquad , \qquad \alpha > 0$$

La forma resolvente de las ecuaciones Forward y Backward de la cadena original son , por tanto

$$\alpha U^{*\alpha} - I = U^{*\alpha} Q^* \tag{12}$$

$$\alpha U^{*\alpha} - I = Q^* U^{*\alpha} \tag{13}$$

Si notamos por $C^\alpha=(c_{ij}^\alpha)$ a la transformada de Laplace de $C(t)$

$$C^\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} C(t)\, dt$$

entonces por la definiciòn de $C(t)$

$$C^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P^*(t)\,(Q^* - Q)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P^*(t)\, dt \cdot (Q^* - Q)$$

de donde

$$C^{\alpha} = U^{*\alpha}\,(Q^* - Q) \tag{14}$$

Ahora bien , de (12) y (13) las resolventes $U^{*\alpha}$ y U^{α} son las inversas de $(\alpha I - \overset{*}{Q})$ y $(\alpha I - Q)$ respectivamente , entonces de la identidad

$$Q^* - Q = (\alpha I - Q) - (\alpha I - Q^*) =$$

$$= (\alpha I - Q^*)\,(\alpha I - Q^*)^{-1}(\alpha I - Q) - (\alpha I - Q^*)\,(\alpha I - Q)^{-1}(\alpha I - Q) =$$

$$= (\alpha I - Q^*)\,(U^{*\alpha} - U^{\alpha})\,(\alpha I - Q)$$

se deduce que

$$U^{*\alpha} - U^{\alpha} = (\alpha I - Q^*)^{-1}\,(Q^* - Q)(\alpha I - Q)^{-1} = U^{*\alpha}(Q^* - Q)\, U^{\alpha}$$

$$U^{*\alpha} = U^{\alpha} + C^{\alpha}\, U^{\alpha}. \tag{15}$$

relaciòn conocida como la "segunda ecuaciòn resolvente."

Podrìa haberse obtenido tambien de (8) tomando transformadas y usando la propiedad conmutativa de la convoluciòn integral (FELLER (1966)

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, \overset{*}{P}(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P(t)\, dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \int_0^t C(t-s)\, P(s)\, ds$$

$$U^{*\alpha} = U^{\alpha} + C^{\alpha}\, U^{\alpha}$$

De las expresiones $C^{\alpha} = U^{*\alpha}(\overset{*}{Q} - Q)$ y la segunda ecuaciòn resolvente pueden deducirse fàcilmente algunas relaciones interesantes. Asì

$$C^{\alpha} = U^{*\alpha}\,(Q^* - Q) = (\alpha I - Q^*)^{-1}\left[(\alpha I - Q) - (\alpha I - Q^*)\right]$$

18

$$C^\alpha = (\alpha I - Q^*)^{-1}(\alpha I - Q) - I$$

$$I + C^\alpha = (\alpha I - Q^*)^{-1}(\alpha I - Q).$$

$$(\alpha I - Q^*)(I + C^\alpha) = \alpha I - Q \tag{16}$$

o de forma equivalente

$$(I + C^\alpha)(\alpha I - Q)^{-1} = (\alpha I - Q^*)^{-1}$$

$$(I + C^\alpha)\, U^\alpha = U^{*\alpha}$$

$$U^\alpha + C^\alpha U^\alpha = U^{*\alpha}$$

$$U^\alpha + U^{*\alpha}(Q^* - Q)\, U^\alpha = U^{*\alpha}$$

$$U^\alpha = U^{*\alpha}\left(I - (Q^* - Q)\, U^\alpha\right) \tag{17}$$

que es una forma particular de la segunda ecuaciòn resolvente y expresa U^* directamente en tèrminos de la cadena original y el operador perturbador $Q^* - Q$.

2.5.MEDIDAS INVARIANTES.

El teorema de ergodicidad para las cadenas de Markov (**Teorema 1·2.8**) con matriz de transiciòn $P(t)$ nos indica que los limites

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha\, u_{ij}^\alpha = e_{ij} \qquad i.j \in \Pi$$

existen , y la matriz limite $E = (e_{ij})$ satisface las relaciones

$$E\,P(t) = P(t)\,E$$

$$E\,\mathcal{Q} = \mathcal{Q}E = 0$$

$$E\,E = E$$

$$E\,\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$$

Al estar P(t) acotada , por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (LOEVE ,1963) para $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu E \in \mathcal{M}$ y adamaŝ

$$\lim_{t \to \infty} \mu P(t) = \mu \lim_{t \to \infty} P(t) = \mu E$$

Si la cadena es ergódica , todas las filas de E son idènticas, estrictamente positivas y $E\bar{1} = \bar{1}$. Para las cadenas transitorias , sin embargo , todos los $e_{ij} = 0$.

Para la cadena modificada $\overset{*}{P}(t)$, se obtienen anàlogas relaciones

$$\lim_{t \to \infty} P^{*}(t) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha\, U^{*\alpha} = E^{*}$$

Sin embargo hay que hacer notar que , tal como se ha definido, la cadena modificada es transitoria en S^{c}. De aquì

$$E^{*} = \begin{pmatrix} 0 & E^{*}_{12} \\ 0 & E^{*}_{22} \end{pmatrix}$$

Por otra parte S constituye un conjunto cerrado para la cadena modificada , ningùnestado de S^{c} puede alcanzarse desde S , luego E^{*}_{12} da las probabilidades de entrada a S y E^{*}_{22} la distribuciòn limite sobre S.

Dependiendo de la elección de la matriz de reemplazamiento R , la transitividad o ergodicidad de la matriz de transiciòn de la cadena original $P(t)$, darà lugar a la transitividad o ergodicidad de la matriz correspondiente a la cadena modificada , $\overset{*}{P}(t)$, en $\bar{S}$.

Consideraremos sólo cuatro casos bàsicos que corresponden a las situaciones màs interesantes. Supondremos que la cadena original es transitoria o ergòdica y similarmente que la cadena modificada es transitoria o ergòdica sobre $\bar{S}$.

De primordial importancia es la siguiente extensiòn de la definiciòn de nucleo de compensaciòn.

Definiciòn 2.5.1

La matriz $C = (c_{ij})$ ddfinida tèrmino a tèrmino por

$$C = \lim_{t \to \infty} C(t) \qquad (15)$$

siempre que exista el limite , serà llamada "nucleo de compensaciòn limite"

Para $\mu \in \mathcal{M}$, μC serà llamada "medida de compensaciòn limite"

Teorema 2.5.1

Bajo las condiciones (6) y (7) y para $\overset{*}{P}(t)$ ergòdica sobre $\bar{S}$, el nucleo de compensaciòn limite , C , y la medida de compensaciòn μC existen y vienen dadas por

$$C = \overset{*}{E}(\overset{*}{Q} - Q) \qquad (16)$$

$$\mu C = \lim_{t \to \infty} \mu C(t) = \lim_{\alpha \to 0} \mu \alpha C^{\alpha} \qquad (17)$$

Además

$$\| C \| \leq 2K$$

$$\lim_{t \to \infty} \| \mu C(t) - \mu C \| = 0$$

$$\mu C 1 = 0 \quad ; \quad \mu C R = 0 .$$

Demostración:

$$| c_{ij}(t) | = \left| \sum_{e} p^*_{ie}(t) (q^*_{ej} - q_{ej}) \right| \leq \sum_{e} p^*_{ie}(t) | q^*_{ej} - q_{ej} |$$

de la condición (7)

$$| q^*_{ej} - q_{ej} | \leq 2K \qquad \text{para cada } j \in \Pi$$

por tanto

$$| c_{ij}(t) | \leq 2K \sum_{e} p^*_{ie}(t) = 2K$$

luego existe

$$\lim_{t \to \infty} c_{ij}(t)$$

Veamos ahora que se verifica (16)

$$c_{ij} = \lim_{t \to \infty} c_{ij}(t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{e} p^*_{ie}(t) (q^*_{ej} - q_{ej}) = \sum_{e} e^*_{ie} (q^*_{ej} - q_{ej})$$

ya que $| q^*_{ej} - q_{ej} | \leq 2K$ y $\sum_{e} e^*_{ie} = 1$ y, por tanto se puede aplicar el ~~teorema~~ de Helly (CHUNG,1974;).

Por otra parte , por $| c_{ij}(t) | \leq 2K$, $\| C(t) \| \leq 2K$ entonces del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue , existe el límite

$$\lim_{t \to \infty} \mu C(t)$$

y vale

$$\lim_{t \to \infty} \mu C(t) = \mu \lim_{t \to \infty} C(t) = \mu C$$

Además

$$\| \mu C \| \leq \| \mu \| \, \| C \|$$

y

$$\|C\| = \sup_i \sum_j |c_{ij}| = \sup_i \sum_j \left| \sum_e e^*_{ie} (q^*_{ej} - q_{ej}) \right| \leq$$

$$\leq \sup_i \sum_j \sum_e e^*_{ie} |q^*_{ej} - q_{ej}| = \sup_i \sum_e e^*_{ie} \sum_j |q^*_{ej} - q_{ej}| \leq$$

$$\leq \sup_i 2K \sum_e e^*_{ie} = 2K$$

de donde

$$\|\mu C\| \leq 2K \|\mu\|$$

y

$$\|\mu C(t) - \mu C\| = \|\mu \overset{*}{P}(t) (Q^* - Q) - \mu E^* (Q^* - Q)\| \leq$$

$$\|\mu \overset{*}{P}(t) - \mu E^*\| \; \|Q^* - Q\|$$

de donde

$$\lim_{t \to \infty} \|\mu C(t) - \mu C\| = 0$$

ya que $\mu E^* = \lim_{t \to \infty} \mu P^*(t)$ y se verifica la condiciòn (7)

Por otra prte

$$\mu C 1 = \mu E^* (Q^* - Q) 1 = 0$$

ya que $(Q^* - Q) 1 = 0$

y

$$\mu C R = \mu E (Q^* - Q) R = 0$$

ya que $(Q^* - Q) R = 0$

En el caso en que $\overset{*}{P}(t)$ sea transitoria , imponemos la condiciòn

$$\lim_{i \to \infty} (q^*_{ij} - q_{ij}) = 0 \qquad \text{para cada } j \qquad (7')$$

Esta condiciòn se satisface frecuentemente en las aplicaciones.

Teorema 2.5.2

Bajo las condiciones (6) y (7) y para $\overset{*}{P}(t)$ transitoria sobre S , el nucleo de compensación limite y la medida de compensación se anulan.

Demostración:

Para cada i , j

$$c_{ij} = \lim_{t\to\infty} c_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{e} p^{*}_{ie}(t)\,(q^{*}_{ej} - q_{ej}) = \sum_{e} e^{*}_{ie}\,(q^{*}_{ej} - q_{ej}) = 0$$

ya que E 1 = 0 y por tanto puede aplicarse el teorema de Helly (CHUNG,1974

Además μ C = 0 aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Por tanto , en la pràctica el ùnico caso importante es aquèl en que $\overset{*}{P}(t)$ sea ergòdica sobre S.

Teorema 2.5.3

Para P(t) transitoria y $\overset{*}{P}(t)$ ergòdica sobre S , la medida invariante $\lambda^{*} = \mu \overset{*}{E}$, y la medida de compensación $\rho = \mu C$,con $\mu \in \mathcal{M}$, satisfacen bajo las condiciones (6) y (7) las siguientes relaciones:

$$\lambda^{*} = \rho\, U \tag{18}$$

$$\rho = \lambda^{*}(-Q) \tag{19}$$

Demostración:

Consideremos la segunda ecuación resolvente

$$\overset{*}{U}{}^{\alpha} = U^{\alpha} + C^{\alpha} U^{\alpha} \qquad , \qquad \alpha > 0$$

aplicando el operador $\alpha\mu$,

$$\alpha\mu U^{*\alpha} = \alpha\mu U^{\alpha} + \alpha\mu C^{\alpha} U^{\alpha}$$

Notando $\quad \rho^{\alpha} = \alpha\mu C^{\alpha}$

la ecuación queda en la forma

$$\alpha\mu U^{*\alpha} = \alpha\mu U^{\alpha} + \rho^{\alpha} U^{\alpha}$$

Por (6), $\|\mu\| < \infty$ y $\|\alpha U^{\alpha}\| \leq 1$, $\|\alpha U^{*\alpha}\| \leq 1$ entonces del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\mu U^{\alpha} = \mu \lim_{\alpha \to 0} \alpha U^{\alpha} = \mu E$$

y por ser $P(t)$ transitoria

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\mu U^{\alpha} = 0$$

Además

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\mu U^{*\alpha} = \mu \lim_{\alpha \to 0} \alpha U^{*\alpha} = \mu E^{*}$$

Por el teorema 2.5.1

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\mu C^{\alpha} = \mu C \qquad y \qquad \|\mu C\| \leq 2K < \infty$$

Por otro lado

$$\rho^{\alpha} U^{\alpha}(i) = \sum_j \rho^{\alpha}(i)\, u^{\alpha}_{ij} = \sum_j \left[\rho^{\alpha}(i) - \rho(i)\right] u^{\alpha}_{ij} +$$
$$+ \sum_j \rho(i)\, u^{\alpha}_{ij}\,.$$

ya que $u^{\alpha}_{ij} \leq u_{ij}$ y en virtud del teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{\alpha \to 0} \sum_j \left[\rho^{\alpha}(i) - \rho(i)\right] u^{\alpha}_{ij} = 0$$

y

$$\lim_{\alpha \to 0} \sum_j \rho(i)\, u^{\alpha}_{ij} = \sum_j \rho(i)\, u_{ij}$$

de aquí

$$\lim_{\alpha \to 0} \rho^{\alpha} U^{\alpha} = \rho U$$

En consecuencia

$$\nu^{*} = \mu E^{*} = \rho U = \mu C U$$

y

$$\rho = \mu C = \mu E^{*}(Q^{*} - Q) = \mu E^{*}(-Q) = \lambda^{*}(-Q).$$

Este teorema asegura que cuando la cadena original es transitoria , la medida invariante λ^* de la cadena modificada es el potencial de Green , ρU , del cargo de compensaciòn $\rho = \mu C$. Y reciprocamente , el cargo ρ es el gradiente de la medida λ^*.

En forma matricial se puede escribir (18) , teniendo en cuenta la definiciòn de ρ , como

$$E^{*} = C\ U$$

siendo sus elementos de la forma

$$e^{*}_{ij} = \sum_{k} c_{ik}\ u_{kj} \tag{20}$$

Ahora bien , para $i \in S$ y $j \in S$, C tiene sus filas idènticas ya que E^{*}_{22} tiene sus filas iguales por ser $\overset{*}{P}(t)$ ergòdica sobre S. En este caso $c_{ik} = c_k$ y la ecuaciòn (20) se reduce a

$$e^{*}_{j} = \sum_{k} c_{k}\ u_{kj} \qquad i \in S \quad j \in S \tag{21}$$

Para P(t) ergodica y $\overset{*}{P}(t)$ ergòdica sobre S , el argumento del teorema 2.5.3 no puede aplicarse ya que todos los elementos del $\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha} = U$ son infinitos

$$\mu_{ij} = \int_0^{\infty} p_{ij}(t)\, dt = \infty \qquad \forall\, i,j \in \pi$$

y el paso al limite debe hacerse con la ayuda del potencial ergòdico Z , cuya existencia y propiedades fueron estudiadas en el capitulo anterior.

Lema 2.5.1

Sea $C(t)$ el nucleo de compensaciòn definido en (4) , y sea E la matriz ergòdica de la cadena original. Entonces

$$C(t)\, E = 0 \qquad , \qquad t \geqslant 0$$

en particular

$$Q^{*} E = 0$$

La demostraciòn se deduce del hecho de que la suma por filas de los elementos de $C(t)$ se anula y E tiene todas sus filas idènticas.

Poniendo $C(t) = 0$ para $t < 0$ y usando el lema 2.5.2 , la ecuaciòn (8) puede escribirse en la forma

$$P^{*}(t) = P(t) + \int_0^t C(t-s)\,[P(s) - E]\, ds \qquad , \quad t \geqslant 0$$

y de aquì tomando transformadas y usando la convoluciòn integral se obtiene

$$U^{*\alpha} = U^{\alpha} + C^{\alpha} Z^{\alpha} \tag{22}$$

ecuaciòn que equivale a la segunda ecuaciòn resolvente dada en (15) y que hace el mismo papel que ella en las medidas invariantes cuando la cadena original es ergòdica.

Ahora bien ,

$$C^{\alpha} = U^{*\alpha} (Q^{*} - Q)$$

de donde , sustituyendo en la ecuaciòn (22)

$$U^{*\alpha} = U^{\alpha} + U^{*\alpha} (Q^{*} - Q)\, Z^{\alpha}$$

Por tanto

$$U^{*\alpha} \cdot (I - (Q^{*} - Q)\, Z^{\alpha}) = U^{\alpha}$$

ecuación que es análoga a la dada en (17) , de donde la ecuación de factorización permanece válida ya se use Z^{α} o U^{α}.

Supongamos ahora que se verifican todas las condiciones , dadas por el teorema 1.3.1 bajo las cuales esta asegurada la existencia de Z. Entonces se verifica el siguiente teorema

Teorema 2.5.4

Para P(t) ergódica y $\overset{*}{P}(t)$ ergódica sobre S, las medidas invariantes $\lambda^{*} = \mu E^{*}$, $\lambda = \mu E$ y la medida de compensación $\rho = \mu C$, con $\mu \in \mathcal{M}$ tales que se verifica la condición

$$\sum_{i} |\rho(i)\, m_{ij}| < \infty \quad , \quad j \in \Pi \tag{23}$$

donde m_{ij} es el tiempo medio de la primera entrada de i a j , satisfacen , bajo las condiciones (6) y (7) , las siguentes relaciones:

$$\lambda^{*} = \lambda + \rho Z \tag{24}$$

$$\rho = \lambda^{*} (-Q) \tag{25}$$

Demostración:

Consideremos la ecuación (22) y apliquemos el operador $\alpha\mu$ entonces podemos escribirla en la forma

$$\alpha \mu\, U^{*\alpha} = \alpha \mu\, U^{\alpha} + \rho^{\alpha} Z^{\alpha}$$

donde $\qquad \rho^\alpha = \alpha\mu C^\alpha$

Por (6) $\|\mu\| < \infty$ entonces del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha\mu U^{*\alpha} = \mu E^*$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha\mu U^{\alpha} = \mu E$$

Por el teorema 2.5.1

$$\lim_{\alpha\to 0} \rho^\alpha = \lim_{\alpha\to 0} \alpha\mu C^\alpha = \mu C = \rho$$

y

$$\|\rho\| < \infty$$

Por otro lado

$$\rho^\alpha \varepsilon^\alpha(j) = \sum_i \rho^\alpha(i) \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \sum_i [\rho^\alpha(i) - \rho(i)] \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} +$$

$$+ \sum_i \rho(i) \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$$

y por (23)

$$\sum_i |\rho(i) \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}| \leq \sum_i |\rho(i) m_{ij}| < \infty$$

entonces del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$\lim_{\alpha\to 0} \sum_i \rho(i) \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \sum_i \rho(i) \lim_{\alpha\to 0} \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \sum_i \rho(i) \varepsilon_{ij}$$

Además

$$\sum_i [\rho^\alpha(i) - \rho(i)] \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = -\sum_i [\rho^\alpha(i) - \rho(i)] (\overset{\alpha}{\varepsilon}_{jj} - \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}) +$$

$$+ \sum_i [\rho^\alpha(i) - \rho(i)] \overset{\alpha}{\varepsilon}_{jj}$$

y de (7)

$$\|\rho\| \leq 2k\|\mu\|$$

de donde

$$|\rho^\alpha(i) - \rho(i)| \, |\overset{\alpha}{\varepsilon}_{jj} - \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}| \leq |\rho^\alpha(i) - \rho(i)| m_{ij}$$

entonces del teorema de la convergencia dominada se deduce que

$$\lim_{\alpha\to 0} \sum_i (\rho^\alpha(i) - \rho(i)) \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} =$$

$$= -\sum_i \lim_{\alpha \to 0} \left(e^{\alpha}(i) - e(i) \right) \left(\varepsilon_{ij}^{\alpha} - \varepsilon_{ij}^{\alpha} \right) + \left(\lim_{\alpha \to 0} \varepsilon_{jj}^{\alpha} \right) \left(\sum_i \lim_{\alpha \to 0} e^{\alpha}(i) - e(i) \right) = 0$$

de donde

$$\mu E^{*} = \mu E + \mu C Z$$

Este teorema asegura que cuando la cadena original es ergòdica, la medida invariante λ^{*} de la cadena modificada tiene la descomposiciòn de Riesz relativa a la cadena original, tal que λ^{*} es la suma de una medida invariante λ (de la cadena original) y el potencial ergòdico ρZ del cargo de compensaciòn $\rho = \mu C$. Reciprocamente, el cargo ρ es el gradiente de λ^{*}.

En forma matricial puede escribirse (24), teniendo en cuenta la definiciòn de ρ, como

$$E^{*} = E + C Z \qquad (26)$$

que es la ecuaciòn fundamental que liga E^{*} con E en tèrminos del nucleo de compensaciòn C y la matriz fundamental Z.

La ergodicidad de $P^{*}(t)$ y de $P(t)$ sobre S, implica que las medidas invariantes del teorema anterior son $\lambda = (\mu 1) e$ y $\lambda^{*} = (\mu 1) e^{*}$ donde e y e^{*} son las distribuciones ergòdicas dadas por las filas de E y E^{*} respectivamente. Ademàs, $\lambda^{*} E^{*} = \lambda^{*}$ implica que λ^{*} tiene su soporte sobre S. Asì la ecuaciòn (26) por componentes puede escribirse

$$e_j^{*} = e_j + \sum_k c_k z_{kj} \qquad j \in S \qquad (27)$$

y

$$0 = e_j + \sum_k c_k z_{kj} \qquad j \in S^c \qquad (28)$$

Esta ecuación puede usarse para determinar los c_k y la ecuación (27) para determinar los e_j^* explícitamente.

Tanto el teorema 2.5.3 como el teorema 2.5.4 podrían haberse deducido fácilmente de los teoremas 1.3.2 y 1.3.3de la teoria relativa al potencial ergódico , sin mas que considerar la descomposición de Riesz de la medida λ^*relativa a la cadena original reemplazando σ por ρ . Debe señalarse , sin embargo , que el teorema 2.5.3 y el teorema 2,5.4 tienen más importancia que el simple hecho de qe sean descomposiciones de Riesz de una medida λ^*. Debido al mecanismo de perturbación , los dos teoremas tienen una rica estructura y dan una construcción especifica de las medidas incluidas. Así el cargo $\rho=\mu C$ viene dado explicitamente en términos del nucleo de compensación y λ^*es invariante para la cadena modificada. Esto se debe al hecho de que los teoremas 1.3.2 y 1.3.3 se deducen de las ecuaciones de Kolmogorov para una cadena , mientras que los teoremas 2.5.3 y 2.5.4 se obtienen de la segunda ecuación resolvente que incluye a las dos cadenas.

CAPITULO III

APLICACION DEL MECANISMO DE PERTURBACION EN TEORIA DE COLAS

3.1.INTRODUCCION.

Dedicamos esta capitulo al estudio de diferentes aplicaciones del modelo de perturbaciòn expuesto en el capitulo anterior.

Se considera en primer lugar un sistema de colas M/M/1 obtenièndose la distribuciòn ergòdica de la longitud de la cola en terminos del potencial de Green de un recorrido aleatorio (SPITZER , 1976) que es diferencia de dos procesos de Poisson , el de llegadas y el de servicio. Mediante el modelo de perturbaciòn se consigue expresar la soluciòn de la ecuaciòn restringida en terminos de la soluciòn de la ecuaciòn no restringida de la cadena original , compensando la modificaciòn debida al estado frontera 0 . El procedimiento que se sigue es anàlogo a la tècnica de Wiener-Hopf (KEILSON , 1965) .

La aplicaciòn considerada en el apartado 3.3 es de gran interès porque nos indica còmo se extrae el proceso de Poisson mediante perturbaciòn de la cola M/M/1 .

En el ùltimo apartado del capitulo se considera una cadena de Markov donde los estados 0 y 1 pueden comunicarse con cada uno de los otros , perturbandose dicha cadena para obtener un proceso de Poisson puro.

3.2. SISTEMA DE COLAS M/M/1.

Como aplicaciòn del modelo de perturbaciòn estudiado en el capîtulo anterior , consideremos el sistema de colas M/M/1. La solución dependiente del tiempo va a obtenerse perturbando una cadena que es diferencia de dos procesos de Poisson.

Sea el espacio de estados $\Pi = (0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Consideremos $S = (0,1,2,\ldots)$ y sea la cadena original el recorrido aleatorio sobre Π definido por:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ \mu & j = i-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i,j \in \Pi$$

$$q_i = \lambda + \mu$$

donde λ y μ son dos costantes positivas tales que $\lambda < \mu$

Modifiquemos ahora esta cadena original para obtener la cola M/M/1. Consideremos al estado 0 como una barrera **absorbente** , en el sentido de que , si la cadena original entra en los estados negativos de S^c , vuelve bruscamente al estado 0. La matriz de reemplazamiento R , para $i \in S^c$ y $j \in S$, tendrà por tanto la forma

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

o sea

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i<0 \quad j=0 \\ 0 & i<0 \quad j>0 \end{cases} \qquad i\in S^c \quad j\in S$$

Siguiendo el mecanismo de reemplazamiento , la matriz de intensidades de la cadena modificada en S , Q^*_{22} ,vendrà dada por

$$Q^*_{22} = Q_{21} R_{12} + Q_{22}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & \mu \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \lambda & j=i+1 \qquad i=0,1,2\dots \\ \mu & j=i-1 \qquad i=1,2\dots \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$q^*_i = \begin{cases} \lambda & i=0 \\ \lambda+\mu & i=1,2\dots \end{cases}$$

que es precisamente el generador de la cola M/M/1.

Vamos a calcular el nucleo de compensaciòn $C(t)$ para poder expresar la soluciòn **transitoria** de este nuevo proceso en funciòn de la soluciòn del proceso original.

$$c(t) = \begin{pmatrix} -P^*_{12}(t)\ Q_{21} & P^*_{12}(t)\ Q_{21} R_{12} \\ -P^*_{22}(t)\ Q_{21} & P^*_{22}(t)\ Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

Para $i \in \Pi$ $j \in S^c$

$$c_{ij}(t) = -\sum_{k \in S} p^*_{ik}(t)\ q_{kj}$$

y para $k \in S$ $j \in S^c$, $q_{kj} = 0$, excepto en el caso en que $k = 0$, $j = -1$

de donde

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu\ P^*_{io}(t) & j = -1 \\ 0 & j = -2, -3, \ldots \end{cases}$$

Para $i \in \Pi$ $j \in S$

$$c_{ij}(t) = \sum_{k \in S^c} \left(\sum_{t \in S} p^*_{it}(t)\ q_{tk} \right) r_{kj}$$

y para $k \in S^c$ $j \in S$, $r_{kj} = 0$, excepto en el caso en que $j = 0$, de donde

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & j = 1, 2 \ldots \\ \sum_{k \in S^c} \left(\sum_{t \in S} P^*_{it}\ q_{tk} \right) & j = 0 \end{cases}$$

y para $t \in S$ y $k \in S^c$, $q_{tk} = 0$, excepto en el caso $t = 0$ y $k = -1$,

de donde

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & j = 1, 2 \ldots \\ \mu\ P^*_{io}(t) & j = 0 \end{cases}$$

Por tanto $C(t)$ tiene sus columnas iguales a cero salvo las correspondientes a $j = 0$ y $j = -1$ que valen

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu \, p^*_{i0}(t) & j=-1 \quad i \in \Pi \\ \mu \, p^*_{i0}(t) & j=0 \quad i \in \Pi \end{cases}$$

Aplicando el teorema 2.3.I

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t \sum_k c_{ik}(t-s)\, p_{kj}(s)\, ds \qquad \forall i,j \in \Pi$$

de donde

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t c_{i0}(t-s)\, p_{0j}(s)\, ds + \int_0^t c_{i,-1}(t-s)\, p_{-1,j}(s)\, ds \qquad \forall i,j \in S$$

El mètodo de perturbaciòn expresa pues la soluciòn de la cadena modificada restringida a S , es decir la distribuciòn de la cola M/M/1 , en tèrminos de la soluciòn del problema original , compensando la modificaciòn debida al estado frontera **0**.

La cadena modificada restringida a S es ergòdica. La distribuciòn limite puede calcularse de $E^*_{22}\, Q^*_{22} = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 \cdots \\ e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 \cdots \\ e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

de donde

$$\begin{aligned} &-e^*_0 \lambda + \mu e^*_1 = 0 \\ &e^*_0 \lambda - (\lambda+\mu) e^*_1 + \mu e^*_2 = 0 \\ &\vdots \\ &e^*_j \lambda - (\lambda+\mu) e^*_{j+1} + \mu e^*_{j+2} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y por tanto

$$e^*_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j e^*_0$$

y como

$$\sum_j e^*_j = e^*_0 \sum_j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = 1$$

se deduce que

$$e^*_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

de donde

$$e^*_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \qquad j = 0, 1, 2 \ldots$$

que es la distribuciòn geomètrica.

El nucleo limite de compensaciòn C dado por el teorema 2.5.1 tiene la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E^*_{12} \\ 0 & E^*_{22} \end{pmatrix} (Q^* - Q)$$

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & e^*_0 & e^*_1 \ldots \\ & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & e^*_0 & e^*_1 \ldots \\ & \vdots & \vdots \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} & 0 & & 0 \\ \hline 0 \ldots & -\mu & \mu & 0 \ldots \\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 \ldots & -\mu e^*_0 & \mu e^*_0 & 0 \ldots \\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 \ldots & -\mu e^*_0 & \mu e^*_0 & 0 \ldots \\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

de donde

$$c_{ij} = \begin{cases} \lambda - \mu & j = -1 \quad i \in \pi \\ \mu - \lambda & j = 0 \quad i \in \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Otra manera de proceder serìa usando la relaciòn $E^* = C\,U$ dada en el teorema 2.5.3. En S^c la cadena modificada es transitoria de donde $e^*_j = 0 \quad \forall j \in S^c$ por tanto

$$\sum_k c_k u_{kj} = 0 \qquad \text{para} \quad j \in S^c$$

ecuación que permite calcular los c_k.

Y para $j \in S$

$$e_j^* = \sum_k c_k u_{kj}$$

ecuación que expresa la distribución ergódica de la cadena modificada en terminos de la cadena original.

La cadena original es la diferencia de dos procesos de Poisson de parâmetros λt y μt respectivamente. De aquí

$$P_{ij}(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{j-i}{2}} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \quad I_{j-i}(2t\sqrt{\lambda\mu})$$

donde $I_k(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden k dada por

$$I_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{j!\,\Gamma(k+j+1)}$$

que tiende a $\dfrac{x^k}{2^k k!}$ cuando x tiende a cero y a $\dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ cuando x tiende a ∞

Y las componentes del potencial de Green U son para $\lambda < \mu$

$$u_{j-i} = \begin{cases} (\mu-\lambda)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-i} & j-i = 0,1,2\ldots \\ (\mu-\lambda)^{-1} & j-i = -1,-2\ldots \end{cases}$$

(SAATY, 1967)

y por tanto

$$e_j^* = c_{-1}\, u_{-j} + c_0\, u_{0j} = -e_0^*\mu\, u_{-j} + e_0^*\mu\, u_{0j}$$

expresa la distribución ergòdica de la longitud de la cola en terminos del potencial de Green de un recorrido aleatorio que es diferencia de dos procesos de Poisson . (KEILSON 1962 , SPITZER 1976)

De la expresiòn de los u_{j-i} deducimos que

$$\mu_{oj} = \mu_j = (\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}$$

$$\mu_{-1j} = \mu_{j+1} = (\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1}$$

y sustituyendo en las relaciones que dan la distribuciòn ergòdica

$$e^*_j = -\mu e^*_o (\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} + \mu e^*_o (\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}$$

$$e^*_j = \mu e^*_o (\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}\left[1-\frac{\lambda}{\mu}\right] = e^*_o\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}$$

pero al ser $P(t)$ ergòdica en S , $\sum_{j\in S} e^*_j = 1$ y de aquì

$$\sum_{j\in S} e^*_o \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} = 1$$

y como suponemos $\lambda < \mu$

$$e^*_o \left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) = 1$$

y por tanto

$$e^*_o = \frac{\mu-\lambda}{\mu}$$

de aquì

$$e^*_j = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

que coincide con la expresiòn para los e^*_j deducida antes directamente de la matriz de intensidad de la cadena modificada y que se ha obtenido ahora usando solo resultados de la cadena original.

3.3. PERTURBACION DE LA COLA M/M/1. OBTENCION DEL PROCESO DE POISSON.

Consideremos el sistema de colas M/M/1 y sea $P(t)$ la distribución de la longitud de la cola. El generador Q de $P(t)$ vendrà dado por tanto , por

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \quad i = 0,1,2\dots \\ \mu & j = i-1 \quad i = 1,2\dots \end{cases}$$

$$q_{i} = \begin{cases} \lambda & i = 0 \\ \lambda + \mu & i = 1,2\dots \end{cases}$$

y $q_{ij} = 0$ en los demàs casos.

Perturbamos esta cola M/M/1 de la siguiente manera: Siempre que la cadena entre en un estado impar se la obliga a ir al estado par siguiente. Entonces , siguiendo el mecanismo de perturbaciòn ,

$$r_{ij} = r_{ii+1} = 1 \qquad i = 1,3,5,\dots$$

$$j = 0,2,4,\dots$$

$$r_{ij} = 0 \qquad i = 0,2,4,\dots$$

y el generador de la nueva cadena , Q^*, vendrà dado por

$$Q^* = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q^*_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$Q^*_{22} = Q_{21} R_{12} + Q_{22}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

es el generador del proceso de Poisson de parámetro λ. De donde la cadena modificada $X^* = (X^*_t \,,\; 0 \leq t < \infty)$ es el proceso de Poisson puro en S.

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$i = 0, 2, 4, \ldots$$

$$q^*_i = \lambda$$

Esta aplicación es de gran interés porque indica como se extrae el proceso de Poisson mediante perturbación de la cola M/M/1.

El nucleo de compensación de esta perturbación considerada viene dado por

$$C(t) = \begin{pmatrix} -P^*_{12}(t)\, Q_{21} & P^*_{12}(t)\, Q_{21} R_{12} \\ -P^*_{22}(t)\, Q_{21} & P^*_{22}(t)\, Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}.$$

Para $i \in \Pi$ $j \in S^c$

$$c_{ij}(t) = -\sum_{k\in S} p^{*}_{ik}(t)\, q_{kj}$$

y para $j \in S^c$ $k \in S$, $q_{kj} = 0$, excepto $q_{kk+1} = \lambda$ y $q_{kk-1} = \mu$ de donde

$$c_{ij}(t) = -\lambda\, p^{*}_{ij-1} - \mu\, p^{*}_{ij+1}$$

Para $i \in \Pi$ $j \in S$

$$c_{ij}(t) = \sum_{k\in S^c}\left(\sum_{t\in S} q_{tk}\, p_{it}(t)\right) r_{kj}$$

y para $k \in S^c$ $j \in S$ $j \neq 0$, $r_{kj} = 0$, salvo $r_{kk+1} = 1$, de donde

$$c_{ij}(t) = \sum_{t\in S} p^{*}_{it}(t)\, q_{tj-1} = \lambda\, p^{*}_{ij-2}(t) + \mu\, p^{*}_{ij}(t)$$

Entonces para $i \in \Pi$

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\lambda\, p^{*}_{ij-1}(t) - \mu\, p^{*}_{ij+1}(t) & j = 1,3,5,\ldots \\ \lambda\, p^{*}_{ij-2}(t) + \mu\, p^{*}_{ij}(t) & j = 2,4,6,\ldots \\ 0 & j = 0 \end{cases}$$

Aplicando el teorema 2.5.1

$$p^{*}_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t \sum_{k} c_{ik}(t-s)\, p(s)\, ds$$

$$p^{*}_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t \sum_{k\in S^c}\left(-\lambda\, p^{*}_{ik-1}(t-s) - \mu\, p^{*}_{ik+1}(t-s)\right) p_{kj}(s)\, ds\ +$$

$$+ \int_0^t \sum_{k\in S}\left[\lambda\, p^{*}_{ik-2}(t-s) + \mu\, p^{*}_{ik}(t-s)\right] p_{kj}(s)\, ds \qquad \forall i,j \in \Pi$$

que , restringida a S , expresa la soluciòn de la cadena modificada , o sea la soluciòn del proceso de Poisson , en terminos de la soluciòn general de la cola M/M/1.

Por otra parte la cadena modificada restringida a S es transitoria. Vamos a comprobar que entonces existe el nucleo limite de compensaciòn y vale cero.

$$c_{ij}= \lim_{t\to\infty} c_{ij}(t)$$

Para $i\in\Pi$ $j = 0$, $c_{ij}(t) = 0$, luego existe el limite y vale

$$c_{i0} = \lim_{t\to\infty} c_{i0}(t) = 0$$

Para $i\in\Pi$ $j = 1,3,5,\ldots$,

$$c_{ij}(t) = -\lambda\, p^{*}_{ij-1}(t) - \mu\, p^{*}_{ij+1}(t)$$

y por el teorema de ergodicidad existen los limites de $p^{*}_{ij}(t)$ y valen

$$\lim_{t\to\infty} p^{*}_{ij}(t) = 0$$

de donde existe el limite de $c_{ij}(t)$ y vale

$$\lim_{t\to\infty} c_{ij}(t) = 0$$

Anàlogamente para $i\in\Pi$ $j = 2,4,6,\ldots$ De donde

$$c_{ij}= \lim_{t\to\infty} c_{ij}(t) = 0$$

3.4. PERTURBACION DE UN PROCESO DE POISSON.

Consideremos el proceso de Poisson sobre los enteros $\Pi = (0,1,2\ldots)$ de paràmetro λ. La matriz Q generadora del proceso viene dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$q_i = \lambda \, .$$

Sea n unentero fijo y consideremos $S = (0,1,2,\ldots,n)$ y $S^c = (n+1, n+2, \ldots)$. Modificamos esta cadena en el sentido siguiente: Siempre que la cadena entre a S^c desde S se la obliga a volver al estado 0 .

La matriz de reemplazamiento R correspondiente a dicha modificaciòn viene dada por

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & 0 < j < n \end{cases}$$

De donde , siguiendo el mecanismo de perturbaciòn , la cadena modificada sobre S vendrà generada por

$$Q^*_{22} = Q_{22} + Q_{21} \, R_{12}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$Q^{*}_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}$$

Es decir , la cadena modificada sobre S va sucesivamente a todos los estados desde el estado 0 hasta alcanzar el estado n. De esta forma los conjuntos S y S^c estàn incomunicados y , ademàs , si nos restringimos a los estados prohibidos de S^c , la cadena vuelve a ser un proceso de Poisson de intensidad λ .

$$q^{*}_{ij} = \begin{cases} \lambda & i = 0,1,2 \ldots n-1 \qquad j = i+1 \\ \lambda & i = n \qquad j = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$q^{*}_{i} = \lambda \qquad i = 0,1,2,\ldots,n,n+1,\ldots$$

Vamos a calcular la soluciòn de la nueva cadena restringida a S^c y comprobar que dicha soluciòn coincide con la soluciòn de la cadena original por ser ambas procesos de Poisson de paràmetro λ .

Debido a la forma de la matriz de intensidad de la cadena modificada Q^* , la matriz de transiciòn viene dada por

$$P^{*}(t) = \begin{pmatrix} P^{*}_{11}(t) & 0 \\ 0 & P^{*}_{22}(t) \end{pmatrix}$$

de donde el nucleo de compensaciòn tiene la forma

$$c(t) = \begin{pmatrix} P^{*}_{11}(t) & 0 \\ 0 & P^{*}_{22}(t) \end{pmatrix} (Q^{*} - Q)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} P^*_{11}(t) & 0 \\ 0 & P^*_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Phi_{21} & \Phi_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P^*_{22}(t)\,\Phi_{21} & P^*_{22}(t)\,\Phi_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

Pero al ser

$$\Phi_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

para $i \in S$ y $j \in S^c$

$$C(t) = -\begin{pmatrix} \lambda & P^*_{0n}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & P^*_{1n}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda & P^*_{nn}(t) & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

y para $i \in S$ y $j \in S$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \lambda & P^*_{0n}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & P^*_{1n}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \\ \lambda & P^*_{nn}(t) & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

de donde

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & i \in S^c \quad j \in \Pi \\ -\lambda\, P^*_{in}(t) & i \in S \quad j = n+1 \\ \lambda\, P^*_{in}(t) & i \in S \quad j = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces del teorema 2.3.1

$$P^*_{ij}(t) = P_{ij}(t) + \int_0^t \sum_k c_{ik}(t-s)\, P_{kj}(s)\, ds \qquad \forall\, i,j \in \Pi$$

y para $i, j \in S^c$

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t)$$

ya que

$$c_{ik}(t-s) = 0 \qquad \forall k \in \Pi, \ i \in S^c$$

La cadena modificada es transitoria en S^c y ergòdica en S. Calculemos la distribuciòn ergòdica.

El nucleo limite de compensaciòn viene dado por

$$C = E^*(Q^* - Q)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E^*_{12} \\ 0 & E^*_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q_{21} & Q_{21} R_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E^*_{12} Q_{21} & E^*_{12} Q_{21} R_{12} \\ -E^*_{22} Q_{21} & E^*_{22} Q_{21} R_{12} \end{pmatrix}$$

En S

$$C = \begin{pmatrix} e^*_0 & e^*_1 & \dots & e^*_n \\ e^*_0 & e^*_1 & \dots & e^*_n \\ \vdots & & & \\ e^*_0 & e^*_1 & \dots & e^*_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \lambda & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots \\ \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema 2.5.3 , $E^* = C\,U$, donde U es el potencial de Green del proceso de Poisson original , dado por

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} & j \geq i \\ \\ 0 & j < i \end{cases}$$

de donde , teniendo en cuenta la expresión del nucleo C en S dada anteriormente

$$\begin{pmatrix} e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 & \dots & e^*_n \\ e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 & \dots & e^*_n \\ \vdots & & & & \\ e^*_0 & e^*_1 & e^*_2 & \dots & e^*_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \lambda e^*_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \dots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & \dots & \frac{1}{\lambda} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$e^*_i = e^*_n \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

de donde la distribución de la cadena modificada en S viene dada por

$$e^*_i = \frac{1}{n+1} \qquad i = 0,1,2,\dots n.$$

3.5. OBTENCION DEL PROCESO DE POISSON PURO MEDIANTE PERTURBACION.

Consideremos la cadena de Markov $X = (X_t , 0 \leq t < \infty)$ sobre el espacio de estados discreto $\Pi = (0,1,2,\dots)$ y generada por la matriz de intensidad Q dada por

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & i = 0,1,\dots \quad j = i+1 \\ \mu & i = 1 \quad j = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} \lambda & i = 0 \\ \lambda + \mu & i = 1 \\ \lambda & i = 2,3,\dots \end{cases}$$

La cadena de Markov así considerada difiere del proceso de Poisson en que los estados 0 y 1 pueden comunicarse con cada uno de los otros. La perturbación a que va a ser sometida la cadena evitarà èsto y producirà el proceso de Poisson puro.

Consideremos $S^c = (0)$ y sea la matriz de reemplazamiento R definida por

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & & r_{0j} & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right)$$

donde

$$r_{0j} = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Siguiendo el mecanismo de perturbación la cadena modificada en S viene dada por

$$Q^*_{22} = Q_{22} + Q_{21} R_{12}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0 \ldots 0) + \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q}^*_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

por tanto para la cadena modificada

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \lambda & i = 0, 1, 2, \ldots \qquad j = i+1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$q^*_i = \lambda \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

que es el generador del proceso de Poisson puro de intensidad λ . La cadena modificada $X^* = (X^*_t \, , \, 0 \leq t < \infty)$ de la cadena original $X = (X_t, 0 \leq t < \infty)$ con matriz de intensidad Q perturbada , siguiendo la matriz de reemplazamiento R , es , por tanto , la cadena de Markov de un proceso de Poisson de paràmetro λ.

Vamos a calcular el nucleo de compensaciòn $C(t)$ para poder expresar la soluciòn dependiente del tiempo del proceso de Poisson en funciòn de la soluciòn del proceso original.

$$C(t) = \begin{pmatrix} -P^*_{12}(t)\, \mathcal{Q}_{21} & P^*_{12}(t)\, \mathcal{Q}_{21} \mathcal{R}_{12} \\ -P^*_{22}(t)\, \mathcal{Q}_{21} & P^*_{22}(t)\, \mathcal{Q}_{21} \mathcal{R}_{12} \end{pmatrix}$$

Para $i \in \Pi \quad j \in S^c$

$$c_{ij}(t) = - \sum_{k \in S} p^*_{ik}(t)\, q_{kj}$$

y para $k \in S$ $j \in S^c$, $q_{kj} = 0$, excepto en el caso en que $k=1$, luego

$$c_{i0}(t) = -\mu\, p^*_{i1}(t)$$

Para $i \in \pi$ $j \in S$

$$c_{ij}(t) = \sum_{k \in S^c} \left(\sum_{t \in S} q_{tk}\, p^*_{it}(t) \right) r_{kj}$$

y $r_{kj} = 0$ para el caso en que $k \in S^c$ y $j \in S$, excepto cuando $j=1$

de donde

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & j = 0, 2, 3, \dots \\ \sum_{t \in S} p^*_{it}(t)\, q_{t0} & j = 1 \end{cases}$$

y $q_{t0} = 0$ para $t \in S$, salvo en el caso $t=1$, por tanto

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & j = 0, 2, 3, \dots \\ \mu\, p^*_{i1}(t) & j = 1 \end{cases}$$

Por tanto $C(t)$ tiene sus columnas iguales a cero salvo las correspondientes a $j = 0$ y $j = 1$ donde vale

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu\, p^*_{i1}(t) & j=0 \quad i \in \pi \\ \mu\, p^*_{i1}(t) & j=1 \quad i \in \pi \end{cases}$$

Aplicando el teorema 2.3.1

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t c_{i0}(t-s)\, p_{0j}(s)\, ds + \int_0^t c_{i1}(t-s)\, p_{1j}(s)\, ds \quad i,j \in \pi$$

ecuación que expresa la solución de la cadena modificada , o sea la solución del proceso de Poisson , en terminos de la solución del proceso original , compensando la modificación debida a la no comunicación del estado 1 con el 0.

La cadena modificada es transitoria. Vamos a comprobar que el nucleo límite de compensación existe y vale cero.

$$c_{ij} = \lim_{t\to\infty} c_{ij}(t)$$

Para $i \in \pi$ $j=2,3,4,\ldots$, $c_{ij}(t) = 0$, luego existe el limite y vale

$$\lim_{t\to\infty} c_{ij}(t) = 0$$

Para $i \in \pi$ $j= 0$,

$$c_{ij}(t) = -\mu\, P^{*}_{i1}(t)$$

y por

$$\lim_{t\to\infty} p_{i1}(t) = 0$$

existe el limite de $c_{ij}(t)$ y vale

$$c_{i0} = \lim_{t\to\infty} c_{i0}(t) = 0$$

Anàlogamente para $i \in \pi$ $j=1$.

Por tanto existe el $\lim c_{ij}(t)$ $\forall i,j \in \pi$ y vale

$$c_{ij} = \lim_{t\to\infty} c_{ij}(t) = 0.$$

CAPITULO IV

TRANSFORMACIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS SIGUIENDO EL MECANISMO DE PERTURBACION

4.1.INTRODUCCION.

Este capitulo està dedicado al estudio de un modelo especial sugerido por DYNKIN (1965) sobre la transformaciòn del espacio de estados. La transformaciòn en cuestiòn corresponde a una matriz de reemplazamiento determinística , y èsto conduce a simplificaciones bastante sorprendentes en la obtenciòn de la soluciòn general.

Empezamos aplicando el mecanismo de perturbaciòn desarrollado en el capitulo 2 de esta memoria a la transformaciòn del espacio de estados considerada por Dynkin en un proceso de Markov general , demostrando que dicha transformaciòn es equivalente a un modelo de reemplazamiento con una determinada matriz de reemplazamiento sugerida por ella.

En el apartado 4.3 se considera un caso pràctico , comprobàndose la equivalencia entre la soluciòn de la cadena modificada dada por el mecanismo de perturbaciòn , expuesta en el capitulo 2 , y la obtenida aplicando el teorema de Dynkin para la transformaciòn del espacio de estados , poniéndose de manifiesto la simplificaciòn de los resultados cuando la matriz de transiciòn de la cadena original verifica la condiciòn de Dynkin.

Se termina el capítulo calculando algunas medidas de efectividad para un sistema de colas M/M/1 perturbando una cadena de Markov que verifica la condiciòn de Dynkin.

4.2. TRANSFORMACION DEL ESPACIO DE ESTADOS.

Vamos a aplicar el mecanismo de perturbación expuesto en el capítulo 2 a la transformación del espacio de estados considerada por Dynkin en un proceso de Markov general:

Sea $X = (X_t\ ,\ 0 \leq t < \infty)$ un proceso de Markov general sobre el espacio de estados Π con nucleo de Markov $P_t(x, \Gamma)$. Sea γ una transformación medible de Π en otro espacio de estados Π^* tal que $\gamma(\Pi) = \Pi^*$ y satisface la siguiente condición:

Para todo Γ y $x, x' \in \Pi$ tales que $\gamma(x) = \gamma(x')$

$$P_t(x, \gamma^{-1}(\Gamma)) = P_t(x', \gamma^{-1}(\Gamma)) \tag{1}$$

Denotemos $x_t^* = \gamma(x_t)$ y $P_t^*(\gamma(x), A) = P_t(x, A)$. Entonces el sistema $X^* = (X_t^*\ ;\ 0 \leq t < \infty)$ define un proceso de Markov sobre el espacio de estados Π^* con nucleo

$$P_t^*(x, \Gamma) = P_t(x, \gamma^{-1}(\Gamma)) \tag{2}$$

(DYNKIN, 1965)

En el caso en que el espacio de estados Π sea numerable puede identificarse P_t con la matriz $(p_{ij}(t))$ donde

$$p_{ij}(t) = P_t(i, \{j\})$$

son las probabilidades de transición del estado i al j.

La condición (1) puede escribirse entonces como

$$\sum_{k \in \gamma^{-1}(j)} p_{ik}(t) = \sum_{k \in \gamma^{-1}(j)} p_{i'k}(t) \tag{3}$$

y de la expresión (2) se deduce que la matriz de transición del proceso obtenido tiene la forma

$$p^{*}_{ij}(t) = \sum_{k \in \gamma^{-1}(j)} p_{ik}(t) \tag{4}$$

Para aplicar el modelo de perturbación a esta transformación del espacio de estados vamos a considerar que la cadena $X = (X_t ; 0 \leq t < \infty)$ es homogénea con espacio de estados discreto Π y la transformación γ de Π a S definida por

$$\gamma(i) = \begin{cases} i & i \in S \\ j & i \in S^c \end{cases}$$

donde j es un estado de S al que se vuelve desde i.

La condición (3) impuesta determina la forma del generador infinitesimal Q de la matriz de transición $P(t)$. De esta forma, si denotamos

$$A(j) = S^c \cap \gamma^{-1}(j)$$

para cada $j \in S$, la condición $\gamma(i) = \gamma(i')$ se satisface para

(a) $i \in S$, $i' \in S$ siempre que $i = i'$

(b) $i \in S^c$, $i' \in S^c$ tales que $\gamma(i) = r = \gamma(i')$ para algun $r \in S$, es decir, $i, i' \in A(r)$

(c) $i \in S^c$, $i' \in S$ tales que $\gamma(i) = i'$, es decir $i \in A(i')$

Por tanto la condición (3) no existe como tal en el caso (a) ya que, al ser, $i = i'$, se transforma en una identidad

$$\sum_{k\in\gamma^{-1}(j)} p_{ik}(t) = \sum_{k\in\gamma^{-1}(j)} p'_{ik}(t) = \sum_{k\in\gamma^{-1}(j)} p_{ik}(t) \qquad \text{para cada} \quad j\in S$$

de donde las submatrices $P_{21}(t)$ y $P_{22}(t)$ correspomdientes a $J_2P(t)$ son arbitrarias.

En el caso (b) la condiciòn (3) toma la forma

$$\sum_{k\in A(j)} p_{ik}(t) + p_{ij}(t) = \text{costante} \qquad \text{para todo} \quad i\in S^c$$

tal que $i\in A(r)$ para algùn $r\in S$.

En el caso (c) , al ser $i\in S^c$,e $i\in A(r)$ para algùn $r\in S$ se deduce que $i'=r$ y entonces la condiciòn (3) puede escribirse como

$$\sum_{k\in A(j)} p_{ik}(t) + p_{ij}(t) = \sum_{k\in A(j)} p_{rk}(t) + p_{rj}(t) \tag{5}$$

para cada $j\in S$, notando que si $A(j) = \emptyset$, entonces

$$p_{ij}(t) = \hat{p}_{rj}(t)$$

Por tanto en la submatriz $P_{12}(t)$ con $j\in S$ y para filas en el mismo $A(r)$, los elementos de la columna j tales que $A(j)=\emptyset$ son idénticos y valen $p_{rj}(t)$. Los elementos de las otras columnas correspondientes a $A(j)\neq\emptyset$ deben ser iguales a las columnas correspondientes de $P_{11}(t)$ de acuerdo con la ecuaciòn (5). Esto permite alguna flexibilidad en la elecciòn de los $p_{ij}(t)$ correspomdientes a la submatriz $P_{11}(t)$.

La forma de la matriz $P(t)$ que satisface la condiciòn (3) determina la forma de la matriz de intensidad Q.

Para $i \in S$, $j \in \Pi$, las intensidades q_{ij} son arbitrarias.

Para $i \in S^c$ las relaciones entre las q_{ij} se obtienen de (5) :

$i \in A(r)$ $j \neq r$

$$\sum_{k \in A(j)} q_{ik} + q_{ij} = \sum_{k \in A(j)} q_{rk} + q_{rj} \qquad (6)$$

$i \in A(r)$ $j = r$

$$-q_i + \sum_{\substack{k \in A(r) \\ k \neq i}} q_{ik} + q_{ir} = \sum_{k \in A(r)} q_{rk} - q_r$$

Además cuando $A(j) = \emptyset$

$$q_{ij} = q_{rj} \qquad \text{para } j \neq r \text{ , } j \in S \text{ y cada } i \in S^c$$

Esto significa que los elementos de Q_{21} y Q_{22} son arbitrarios. En Q_{12} , para filas en el mismo $A(r)$, los elementos de la columna j , donde $A(j) = \emptyset$, valen todos q_{rj}. Los elementos de las otras columnas con $A(j) \neq \emptyset$ deben ser confrontados con los elementos correspondientes de Q_{11} de acuerdo con la ecuación (6). Por tanto la restricción es fundamental en Q_{12} con alguna flexibilidad en Q_{11}.

Apliquemos el mecanismo de reemplazamiento descrito en el capitulo 2 a la matriz Q que satisface la condición (3).

La transformación γ del espacio de estados Π en S corresponde , de hecho , a una perturbación de la cadena original siguiendo la matriz de reemplazamiento R dada por γ . Cada fila de la submatriz R_{12} tiene todos sus elementos iguales a cero salvo uno que vale 1. Es decir, para $i \in S^c$ $j \in S$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in A(j) \\ 0 & i \notin A(j) \end{cases} \qquad (7)$$

Además $R_{11} = 0 = R_{21}$ ya que ningun elemento de S^c es el transformado de alguno de H. Y $R_{22} = I$ puesto que $\gamma(i)=i$ para $i \in S$.

Teniendo en cuenta (7), la condición (5) puede escribirse en forma matricial como

$$P_{11}(t)\, R_{12} + P_{12}(t) = R_{12}\, (\, P_{21}(t)\, R_{12} + P_{22}(t)\,) \qquad (8)$$

y la solución dada al proceso modificado en S por la ecuación (4) puede escribirse como

$$P^*_{22}(t) = P_{21}(t)\, R_{12} + P_{22}(t) \qquad (9)$$

de donde

$$Q^*_{22} = Q_{21}\, R_{12} + Q_{22} \qquad (10)$$

que coincide con la expresión de Q^*_{22} dada en el modelo de perturbación, es decir, la transformación del espacio de estados considerada por Dynkin es equivalente a un modelo de reemplazamiento con matriz de reemplazamiento dada por (7).

Vamos a comprobar que la solución $P^*_{22}(t)$ dada en (9) satisface la ecuación Forward en S.

$$\frac{d}{dt} P^*_{22}(t) = \frac{d}{dt} (\, P_{21}(t)\, R_{12} + P_{22}(t)\,)$$

$$\frac{d}{dt} P^*_{22}(t) = \frac{d}{dt} P_{21}(t) R_{12} + \frac{d}{dt} P_{22}(t) = (P_{21}(t)\ Q_{11} + P_{22}(t)\ Q_{21}\ )\ R_{12} +$$

$$+ (P_{21}(t)\ Q_{12} + P_{22}(t)\ Q_{22}) = P_{21}(t)\ (Q_{11}\ R_{12} + Q_{12}) + P_{22}(t)\ (\ Q_{21}\ R_{12} + Q_{22})$$

$$\frac{d}{dt} P^*_{22}(t) = P_{21}(t)\ R_{12}\ Q^*_{22} + P_{22}(t)\ Q^*_{22}$$

$$\frac{d}{dt} P^*_{22}(t) = P^*_{22}(t)\ Q^*_{22}$$

De la soluciòn de la cadena modificada dada en (4) y la solución dada por el teorema 2.3.1 se deduce que

$$\int_0^t \sum_k c_{ik}(t-s)\ p_{kj}(s)\ ds = \sum_{k \in A(j)} p_{ik}(t)$$

de hecho los elementos de $c_{ij}(t)$ tienen una forma especial cuando se verifica la condiciòn (3) , ya que por (10)

$$q^*_{ij} - q_{ij} = \sum_{k \in A(j)} q_{ik} \qquad i,j \in S$$

Lema 4.2.1

Suponiendo que se verifica la condiciòn (3)

$$P^*_{11}(t)\ R_{12} + P^*_{12}(t) = P_{11}(t)\ R_{12} + P_{12}(t) \tag{11}$$

Demostraciòn:

Consideremos la segunda ecuaciòn resolvente

$$C^\alpha U^\alpha = U^{*\alpha} - U^\alpha$$

y de

$$C^\alpha = U^{*\alpha} (Q^* - Q)$$

se deduce que

$$U_{11}^{*\alpha} - U_{11} = - U_{12}^{*\alpha} Q_{21} U_{11}^{\alpha} + U_{12}^{*\alpha} Q_{21} R_{12} U_{21}^{\alpha} = - U_{12}^{*\alpha} Q_{21} \left[U_{11}^{\alpha} - R_{12} U_{21}^{\alpha} \right]$$

$$U_{12}^{*\alpha} - U_{12} = - U_{12}^{*\alpha} Q_{21} \left[U_{12}^{\alpha} - R_{12} U_{22}^{\alpha} \right] = (8) = - U_{12}^{*\alpha} Q_{21} \left[R_{12} U_{21}^{\alpha} - U_{11}^{\alpha} \right] R$$

y por eliminaciòn

$$- U_{11}^{*\alpha} R_{12} + U_{11}^{\alpha} R_{12} = U_{12}^{*\alpha} - U_{12}^{\alpha}$$

de donde

$$U_{12}^{*\alpha} + U_{11}^{*\alpha} R_{12} = U_{11}^{\alpha} R_{12} + U_{12}^{\alpha}$$

Por tanto

$$P_{12}^{*}(t) + P_{11}^{*}(t)\ R_{12} = P_{11}(t)\ R_{12} + P_{12}(t)$$

Supongamos ahora que la cadena original es ergòdica y sean E y E^{*} las matrices limites de $P(t)$ y $\overset{*}{P}(t)$ respectivamente. entonces se verifica el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1

Si se verifica la condiciòn (3) , entonces la matriz limite de la cadena modificada verifica las siguientes relaciones

$$E_{11}^{*} = 0 \qquad\qquad E_{21}^{*} = 0$$

$$E_{12}^{*} = E_{12} + E_{11}\ R_{12} \qquad\qquad E_{22}^{*} = E_{22} + E_{21}\ R_{12}$$

es decir

$$\begin{aligned} e_{ij}^{*} &= 0 & & i \in \pi \quad j \in S^{c} \\ e_{ij}^{*} &= e_{j}^{*} = e_{j} + \sum_{k \in A(j)} e_{k} & & i \in \pi \quad j \in S \end{aligned} \qquad (12)$$

Demostración:

Consideremos la ecuación (11)

$$P^{*}_{11}(t)\ R_{12}+P^{*}_{12}(t) = P_{11}(t)\ R_{12}+P_{12}(t)$$

tomando limites se deduce que

$$E^{*}_{11}\ R_{12}+E^{*}_{12} = E_{11}\ R_{12}+E_{12}$$

pero

$$E^{*}_{11} = 0 = E^{*}_{21}$$

ya queenS^{c} es transitoria la cadena. De donde

$$E^{*}_{12} = E_{11}\ R_{12}+E_{12}$$

Consideremos la ecuación (9)

$$P^{*}_{22}(t) = P_{21}(t)\ R_{12}+P_{22}(t)$$

tomando limites se deduce que

$$E^{*}_{22} = E_{21}\ R_{12}+E_{22}$$

El teorema 4.2.1expresa la matriz limite de la cadena modificada en terminos de la cadena original,cuando ambas son ergódicas, mediante la relación

$$E^{*} = E\ R \tag{13}$$

De la relación (13) y el teorema 2.5.3 se deduce que, cuando la matriz de transición de la cadena original verifica la condición (3) , el potencial ergódico Z verifica la relación

$$C\ Z = E\ (R - I)$$

4.3.APLICACIONES

4.3.1.Estudio de un caso pràctico.

Consideremos la cadena de Markov homogènea $X = (X_t , 0 \leq t < \infty)$ con matriz de transiciòn $P(t)$ satisfaciendo la condiciòn (3) dada en el apartado anterior , sobre el espacio de estados discreto $\Pi=(0,1,2)$ y tomemos $S = (1,2)$. Transformamos el espacio de estados mediante la aplicacion γ definida de Π a S por

$$\gamma(0) = 2$$
$$\gamma(1) = 1$$
$$\gamma(2) = 2$$

y comprobemos los resultados del apartado anterior , es decir, la solución para la nueva cadena modificada dada por Dynkin (DYNKIN,1965) coincide con la obtenida mediante el mecanismo de perturbaciòn en el teorema 2.3.1.

Siguiendo con la notaciòn anterior

$A(1) = \emptyset$

$A(2) = (0)$

La condiciòn (3) se transforma en:

Para $i = 0$, $\gamma(i) = 2$ por tanto si buscamos i' tales que $\gamma(i') = 2$, debe ocurrir que $i' = 0,2$.

Sea $i' = 2$ ya que el caso de $i' = 0$ nos llevaria a una identidad. La condiciòn (3) entonces indica que para $j = 1$ $\quad p_{01}(t) = p_{21}(t)$

para $j = 2$ $\quad p_{02}(t) + p_{00}(t) = p_{22}(t) + p_{20}(t)$

Para $i = 1$, $\gamma(i) = 1$ por tanto $i' = 1$ y la condiciòn (3) impuesta se convierte en igualdad.

Para $i = 2$, $\gamma(i) = 2$ por tanto $i' = 0,2$. Sea $i' = 0$ la condiciòn (3) entonces toma la forma

$$p_{21}(t) = p_{01}(t)$$

$$p_{20}(t) + p_{22}(t) = p_{02}(t) + p_{00}(t)$$

De donde , en cualquiera de los casos , la condiciòn (3) se reduce a

$$\begin{aligned} p_{21}(t) &= p_{01}(t) \\ p_{20}(t) + p_{22}(t) &= p_{02}(t) + p_{00}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

lo que quiere decir que los elementos de $P_{21}(t)$ y $P_{22}(t)$ son arbitrarios , y los elementos de $P_{11}(t)$ tambien los podemos tomar arbitrarios quedando entonces impuestos los elemntos de $P_{12}(t)$.

Relaciones anàlogas verifica la matriz de intensidades Q. Fijemos

$$\left.\begin{aligned} q_{10} &= \mu \\ q_{12} &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_{11} = -(\mu+\lambda)$$

$$; \; q_{00} = -\mu$$

$$\left.\begin{aligned} q_{20} &= 0 \\ q_{21} &= \mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_{22} = -\mu$$

entonces

$$q_{01} = q_{21} = \mu$$

$$q_{02} = q_{20} + q_{22} - q_{00} = -\mu + \mu = 0$$

de donde

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

y aplicando el teorema de Dynkin para la transformación del espacio de estados (DYNKIN 1965) , la solución de la cadena modificada mediante la transformación γ viene dada por:

$$p^{*}_{i1}(t) = p_{i1}(t)$$

$$p^{*}_{i2}(t) = p_{i2}(t) + p_{i0}(t) \qquad i = 1,2$$

Apliquemos ahora el mecanismo de perturbacion expuesto en el capitulo 2 . La matriz R definida por la transformación γ viene dada por

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde Q^{*}_{22} tendrà la forma

$$Q^{*}_{22} = Q_{21} R_{12} + Q_{22}$$

$$Q_{22}^{*} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad 1)$$

$$Q_{22}^{*} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{22}^{*} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & (\lambda+\mu) \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de intensidad de la cadena modificada Q^{*} viene dada por

$$Q^{*} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu) & (\lambda+\mu) \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

El nucleo de compensaciòn limite tendrà la forma

$$C(t) = P^{*}(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} -\mu\, P_{01}^{*}(t) & 0 & \mu\, P_{01}^{*}(t) \\ -\mu\, P_{11}^{*}(t) & 0 & \mu\, P_{11}^{*}(t) \\ -\mu\, P_{21}^{*}(t) & 0 & \mu\, P_{21}^{*}(t) \end{pmatrix}$$

de donde los elementos de las columnas j correspondientes a $A(j) = 0$,

$j \in S$, valen cero , debido a la condiciòn (3) impuesta.

Del teorema 2.3.1 la soluciòn dependiente del tiempo para la cadena modificada viene dada por

$$P^*(t) = P(t) + \int_0^t C\,(t-s)\,P(s)\,ds$$

y para i , $j \in S$

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \int_0^t \mu\, p^*_{i1}(t-s)\left[-p_{0j}(s) + p_{2j}(s)\right] ds$$

de donde

$$p^*_{i1}(t) = p_{i1}(t) + \int_0^t \mu\, p^*_{i1}(t-s)\left[-p_{01}(s) + p_{21}(s)\right] ds$$

pero de (1)

$$p_{01}(s) = p_{21}(s)$$

y por tanto la integral se anula , de domde

$$p^*_{i1}(t) = p_{i1}(t)$$

Análogamente

$$p^*_{i2}(t) = p_{i2}(t) + \int_0^t \mu\, p^*_{i1}(t-s)\left[-p_{02}(s) + p_{22}(s)\right] ds =$$

$$= p_{i2}(t) + \int_0^t \mu\, p_{i1}(t-s)\left[-p_{02}(s) + p_{22}(s)\right] ds = p_{i2}(t) + p_{i0}(t)$$

ya que

$$p^*_{10}(t) = 0 \quad y \quad p^*_{11}(t) = p_{11}(t)$$

y por tanto

$$p^*_{12}(t) = 1 - p^*_{10}(t) - p^*_{11}(t) = p_{10}(t) + p_{11}(t) + p_{12}(t) - p_{11}(t)$$

de donde

$$p^{*}_{12}(t) = p_{10}(t) + p_{12}(t)$$

Esto muestra la equivalencia entre los dos procedimientos , y como se simplifican los resultados cuando la matriz de transición de la cadena original verifica la condición (3).

Estudiemos ahora la distribución ergódica.

Para la cadena original la matriz límite E debe verificar la relación

$$E\,Q = 0$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto

$$-\mu\, e_0 + \mu\, e_1 = 0$$

$$\mu\, e_0 - (\lambda+\mu)\, e_1 + \mu\, e_2 = 0$$

$$\lambda\, e_1 - \mu\, e_2 = 0$$

de donde

$$e_1 = e_0$$

$$e_1 = \frac{\mu}{\lambda}\, e_2$$

y de

$$1 = e_0 + e_1 + e_2$$

se deduce que

$$2\, e_0 + \frac{\lambda}{\mu}\, e_0 = 1$$

de donde

$$e_0 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = e_1$$

$$e_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

Por el teorema 4.2.1 la distribución ergòdica sobre S para la cadena modificada viene dada por

$$E^*_{22} = E_{22} + E_{21}\, R_{12}$$

es decir

$$e^*_j = e_j + \sum_{k \in A(j)} e_k$$

de donde

$$e^*_1 = e_1 \qquad \Rightarrow$$

$$e^*_2 = e_2 + e_1$$

$$\Rightarrow \quad e^*_1 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$$

$$e^*_2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

y $e_0 = 0$ por ser la cadena transitoria sobre S^c.

Aplicando el mecanismo de perturbación, la distribución limite de la cadena modificada, E, viene dada por

$$E^* = E + C\, Z \tag{15}$$

siendo C el nucleo de compensación limite y Z el potencial ergódico definidos por

$$C = \lim_{t \to \infty} c(t)$$

$$Z = \int_0^\infty [P(t) - E]\, dt$$

es decir

$$c_{i0} = \lim_{t \to \infty} c_{i0}(t) = \lim_{t \to \infty} -\mu p^*_{i1}(t) = -\mu e^*_1$$

$$c_{i1} = \lim_{t \to \infty} c_{i1}(t) = \lim_{t \to \infty} 0 = 0 \qquad \forall i \in \pi$$

$$c_{i2} = \lim_{t \to \infty} c_{i2}(t) = \lim_{t \to \infty} \mu p^*_{i1}(t) = \mu e^*_1$$

La relación (15) puede escribirse entonces como:

$$\begin{aligned} e^*_0 &= e_0 + \mu e^*_1 (z_{20} - z_{00}) \\ e^*_1 &= e_1 + \mu e^*_1 (z_{21} - z_{01}) \\ e^*_2 &= e_2 + \mu e^*_1 (z_{22} - z_{02}) \end{aligned} \qquad (16)$$

Al verificar la matriz P(t) la condición (3) , la matriz Z satisface las siguientes relaciones

$$z_{00} + z_{02} = \int_0^\infty [p_{00}(t) - e_0 + p_{02}(t) - e_2]\, dt =$$

$$= \int_0^\infty [p_{20}(t) + p_{22}(t) - e_0 - e_2]\, dt = z_{20} + z_{22}$$

$$z_{21} = \int_0^\infty [p_{21}(t) - e_1]\, dt = \int_0^\infty [p_{01}(t) - e_1]\, dt = z_{01}$$

Entonces de (16) y teniendo en cuenta que la cadena modificada es transitoria en S^c , se deduce que

$$0 = e_0 + \mu\, e^*_1 \,(\tau_{20} - \tau_{00}) \tag{17}$$

$$e^*_1 = e_1 \tag{18}$$

$$e^*_2 = e_2 + \mu\, e^*_1 \,(\tau_{20} - \tau_{00}) \tag{19}$$

De (17), teniendo en cuenta (18) se deduce que

$$\tau_{20} - \tau_{00} = - \frac{e_0}{\mu\, e_1}$$

y sustituyendo en (19)

$$e^*_2 = e_2 + e_0$$

y por tanto, como $e_0 = e_1$ para la cadena original ,

$$e^*_0 = 0$$

$$e^*_1 = e_1$$

$$e^*_2 = e_2 + e_1$$

que coincide con el resultado del teorema 4.21 y muestra la equivalencia entre dicho teorema y el análogo del modelo de perturbación , teorema 2.5.3 .

4.3.2. Estudio del sistema de colas M/M/1 .

En este epígrafe utilizaremos los resultados obtenidos en el apartado anterior , y ya aplicados en 4.3.1 en un caso particular, para el estudio de algunas medidas de efectividad de un sistema de colas M/M/1.

Vamos a calcular la distribución de la longitud de la cola M/M/1 de forma simple perturbando una cadena de Markov que verifique la condición (3) dada en el apartado anterior.

Consideremos la cadena de Markov homogènea $X = (X_t \, , \, 0 \leq t < \infty)$ con matriz de transición $P(t)$ definida sobre el espacio de estados $\Pi = (0,1,2,\dots)$ y generada por la matriz de intensidad

$$\mathcal{Q} = \left(\begin{array}{c|cccc} -\lambda & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ \hline \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right)$$

Sea $S^c = \{0\}$ y consideremos la matriz de reemplazamiento R definida por

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right)$$

Esta matriz , de hecho , corresponde a la transformación medible

$$\gamma : \Pi \longrightarrow S$$

definida por

$$\gamma(i) = \begin{cases} i & i \in S \\ 1 & i \in S^c \end{cases}$$

Vamos a comprobar que la matriz de transición $P(t)$ satisface la condición (3) , o , en forma matricial , la condición (8)

$$Q_{11} R_{12} + Q_{12} = -\lambda \; (1 \; 0 \; 0 \ldots) + (0 \; \lambda \; 0 \ldots) = (-\lambda \; 0 \; 0 \ldots)$$

$$Q_{21} R_{12} + Q_{22} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} (1 \; 0 \; 0 \ldots) + \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q_{21} R_{12} + Q_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$R_{12} \left[Q_{21} R_{12} + Q_{22} \right] = (-\lambda \; 0 \; 0 \ldots)$$

de donde

$$Q_{11} R_{12} + Q_{12} = R_{12} (Q_{21} R_{12} + Q_{22})$$

y por tanto

$$P_{11}(t) R_{12} + P_{12}(t) = R_{12} (P_{21}(t) R_{12} + P_{22}(t))$$

Entonces la solución de la cadena modificada dependiente del tiempo viene dada por (9):

para $i, j \in S$

$$P^{*}_{22}(t) = P_{22}(t) + P_{21}(t) R_{12}$$

$$P^*_{22}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{10}(t) \\ p_{20}(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$P^*_{22}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{10}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ p_{20}(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$P^*_{22}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) + p_{10}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) & p_{14}(t) \cdots \\ p_{21}(t) + p_{20}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) & p_{24}(t) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

de donde

$$p^*_{i1}(t) = p_{i1}(t) + p_{i0}(t) \qquad i = 1,2,3,4,\ldots$$

$$p^*_{ij}(t) = p_{ij}(t) \qquad j = 2,3,4,\ldots$$

Y la matriz Q^*_{22} de la cadena modificada tiene la forma

$$Q^*_{22} = Q_{22} + Q_{21} R_{12}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$Q^*_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

generador de la cola M/M/1 , Luego la soluciòn dada anteriormente corresponde a la distribuciòn de la cola M/M/1 , donde las $p_{ij}(t)$ son fàciles de calcular a partir de las ecuaciones de Chapman-kolmogorov para la cadena original.

Para el càlculo de la distribuciòn ergòdica de la cola M/M/1 calculemos antes la distribuciòn ergòdica de la cadena original.(Suponemos para ello que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$).

$$E\, Q = 0$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & \cdots \\ e_0 & e_1 & e_2 & \cdots \\ e_0 & e_1 & e_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} & -\lambda e_0 + \mu e_1 = 0 \\ & -(\lambda+\mu) e_1 + \mu e_2 = 0 \\ & \lambda e_0 + \lambda e_1 - (\lambda+\mu) e_2 + \mu e_3 = 0 \\ & \lambda e_2 + [-(\lambda+\mu)] e_3 + \mu e_4 = 0 \\ & \vdots \\ & \lambda e_{j-2} - (\lambda+\mu) e_{j-1} + \mu e_j = 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} e_1 &= \rho\, e_0 \\ e_2 &= \rho(\rho+1) e_0 \qquad ; \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \\ &\vdots \\ e_j &= \rho^{j-1}(\rho+1) e_0 \end{aligned}$$

Al ser la distribuciòn ergòdica

$$e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_j + \dots = 1$$

de donde

$$1 = e_0 + \rho e_0 + \sum_{j=2}^{\infty} (\rho + 1) \rho^{j-1} e_0$$

$$1 = e_0 \left[1 + \rho + (\rho+1) \frac{\rho}{1-\rho} \right]$$

y por tanto

$$e_0 = \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)}$$

$$e_1 = \rho \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)}$$

$$e_j = (1-\rho) \rho^{j-1} \qquad j \geq 2$$

y del teorema 4.2.1

$$e^*_0 = 0$$

$$e^*_1 = e_0 + e_1 = 1 - \rho$$

$$e^*_j = e_j = (1-\rho) \rho^{j-1} \qquad j \geq 2$$

de donde la distribuciòn ergòdica de la cola M/M/1 viene dada por

$$e^*_j = (1-\rho) \rho^{j-1} \qquad j = 1, 2, \dots$$

y ha sido calculada usando sólo resultados de la cadena original.

BIBLIOGRAFIA

ARJAS,E. - SPEED,T.P. (1975)

"Markov chains with replacement"

Stochastic Processes and their Aplcations (3) 175-184.

BHAT,N.U. (1972)

"Elements of applied stochastic processes"

Wiley.

CINLAR,E. (1975)

"Introduction to stochastic processes"

Prentice-Hall

COHEN, . (1969)

"The single server queue"

North-Holland

COX,D.R. - MILLER,H.D. (1965)

"The theory of stochastic processes"

Chapman-Hall

CHUNG,K.L. (1967)

"Markov chains with stationary transition probabilities"

Springer-Verlag

CHUNG,K.L. (1974)

"A course in probability theory"

Academic Press

DYNKIN,E.B. (1965)

"Markov processes"

Springer-Verlag

FELLER,W. (1950)

"An introduction to probabilite theory and its applications"

Wiley

FELLER,W. (1966)

"An introduction to probability theory and its applications"

Wiley

ISAACSON,D.L. - MADSEN,R.W. (1976)

"Markov chains:Theory and applications"

Wiley

KEILSON,J. - SYSKI,R. (1974)

"Compensation measures in the theory of Markov chains"

Stochastic Processes and their Applications (2) 59-72

KEILSON,J. (1979)

"Markov chains models-rarity and exponentiality"

Springer-Verlag

KEILSON,J. (1962)

"The use of Green's functions in the study of bounded random walks with applications to queueing theory"

Journal Math. Phys.

KEILSON,J. (1965)

"Green's function methods in probability theory"

Griffin

KEMENY,J.G. - SNELL,J.L. - KNAPP,A.W. (1976)

"Denumerable Markov chains"

Springer-Verlag

LEVIATAN,T. (1972)

"Perturbations of Markov processes"

Journal of Functional Analysis (10) 309-325

LOEVE,M. (1963)

"Probability theory"

Van Nostrand

PARZEN,E. (1972)

"Procesos estocasticos"

Paraninfo

PRABHU,N.V. (1965)

"Stochastic processes"

Macmillan.New York.

REVUZ,D. (1975)

"Markov chains"

North-Holland

SAATY, . (1967)

"Elementos de la teoria de colas"

Aguilar

SCHWEITZER,P.J. (1968)

"Perturbation theory and finite Markov chains"

Journal Applications Probability (5) 401-413

SPITZER,F. (1976)

"Principles of random walk"

Springer-Verlag

SYSKI,R. (1977)

"Perturbation models"

Stochastic Processes and their Applications (5) 93-129

SYSKI,R. (1973)

"Potential theory for Markov chains"

Probability Analysis in Applied Mathematics (3) 213-276

Academic Press

SYSKI,R. (1978)

"Ergodic potential"

Stochastic Processes and their Applications (7) 311-336