EL ORIGEN HISTORICO DE LA LOGICA MATEMATICA: BOOLE

Pascual Martínez Freire. Universidad de Málaga.

En las líneas que siguen me propongo tres objetivos. En primer lugar, establecer el papel desempeñado por George Boole (1815–1864) en el surgimiento de la lógica matemática. En segundo lugar, caracterizar su obra lógica, tanto en sí misma (presentando los rasgos básicos de su álgebra lógica) como en relación con la lógica anterior y posterior. Finalmente, analizar algunas de sus aportaciones, sin pretender un estudio exhaustivo, en especial su teoría de las proposiciones categóricas (enmarcada en una lógica de clases) y su teoría de las proposiciones hipotéticas (enmarcada a su vez en una lógica de enunciados).

I. Conviene comenzar señalando que un examen de la historia de la lógica occidental nos muestra, a grandes rasgos, la existencia de dos líneas creadoras separadas por un periodo cuasiestéril. La primera línea corresponde a lo que podemos denominar lógica tradicional [1] y se extiende en el tiempo desde el siglo IV A.C. hasta el siglo XVIII, mientras que la segunda línea corresponde a la lógica matemática y se extiende desde la segunda mitad del XIX hasta nuestros días.

En efecto, la lógica tradicional arranca con Aristóteles, creador consciente [2] de la lógica, y se cierra como línea creadora con la llamada *Lógica de Port–Royal* de 1662 (*La logique ou l'art de penser* de Arnauld y Nicole), pasando por la muy rica lógica medieval, donde destaca la figura de Pedro Hispano.

---

[1] Aunque la lógica inspirada por la tradición aristotélico–escolástica se ha denominado a veces lógica clásica, no resulta conveniente mantener esta denominación, ya que hoy es habitual llamar lógica clásica, dentro de la lógica matemática, partes de la lógica sistematizadas en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, en contraposición a las denominadas lógicas ampliadas y también a las lógicas divergentes.

[2] Al final de las *Refutaciones sofísticas* declara Aristóteles: "Por otro lado, sobre las materias de la Retórica existían trabajos numerosos y antiguos, mientras que sobre el razonamiento no teníamos absolutamene nada anterior que citar, sino que hemos pasado mucho tiempo en penosas investigaciones. Así pues, si os parece, después de examinarla, que, siendo tal el estado de cosas que existía en un principio, nuestra investigación tiene un rango honroso en relación a las otras disciplinas cuya tradición ha asegurado su desarrollo, no os quedará, a todos vosotros que habeis seguido estas lecciones, sino mostrar indulgencia por las lagunas de nuestra investigación y mucho agradecimiento por los descubrimientos hechos en ella". (La traducción es mía).

Tras la *Lógica de Port-Royal* nos encontramos con un periodo cuasi estéril de prácticamente dos siglos, en los que básicamente se repite, resume o comenta esa obra de 1662. Ello supone una situación diferente en la historia de la lógica respecto de la historia de otras ciencias, que conocen en estos siglos un rápido crecimiento creador.

Con todo hay una especial excepción dentro de este periodo cuasiestéril, constituida por la importante obra lógica de Leibniz (1646–1716).

Desde el punto de vista de la historia de la lógica, la obra lógica de Leibniz tiene dos características destacables: por un lado, careció de lo que podemos llamar "operancia" histórica en el momento de su elaboración, ya que permaneció en su mayor parte inédita hasta principios de nuestro siglo, y, por otro lado, es una clara anticipación de la lógica matemática.

Siguiendo a Beth [3], podemos decir que el programa lógico de Leibniz comprendía tres partes. En primer lugar, la característica universal, esto es, la elaboración de un lenguaje científico universal, susceptible de representar cualquier argumentación científica y cualquier proceso de formación de conceptos científicos. En segundo lugar, el cálculo razonador, es decir, un sistema exhaustivo de formas argumentativas concluyentes (teoría formal de la deducción). Y en tercer lugar, el arte combinatoria, que es un sistema exhaustivo de formas definitorias (teoría formal de la definición).

Ateniéndonos a la constitución histórica de la lógica matemática, podemos señalar dos fases, diferenciadas en el tiempo, en su localización geográfica y en su propósito básico. La primera fase en el tiempo se desarrolla en tierras británicas y su propósito es la ampliación del simbolismo lógico, es decir, el empleo sistemático de símbolos [4] a fin de convertir la lógica en un álgebra. Dentro de esta primera fase destacan George Boole y Augustus De Morgan (1806–1871). A su vez, la segunda fase en el tiempo se desarrolla en el continente europeo y su propósito es la fundamentación lógica de las matemáticas, esto es, introducir claridad lógica en las nociones fundamentales de la matemática así como rigor lógico en sus demostraciones. Dentro de esta segunda fase destacan Gottlob Frege (1848–1925) y Giuseppe Peano (1858–1932). Posteriormente los *Principia Mathematica* (1910–1913) de Whitehead y Russell suponen la consolidación de la lógica matemática.

Tal como veremos en detalle, prescindiendo de Leibniz, cuya obra lógica sólo entró en la historia a principios de este siglo, George Boole, con su *The Mathematical Analysis of Logic* de 1847, constituye el origen histórico de la lógica matemática.

II. Boole nació en Lincoln en 1815, siendo hijo de un modesto zapatero preocupado por la cultura. Su instrucción no fue más allá de la enseñanza primaria, aunque su padre despertó en él el interés por la aritmética y le enseñó el manejo y construcción de instrumentos ópticos. La quiebra del negocio familiar obligó a Boole a ponerse a trabajar a los quince años, al parecer primero como bedel de una escuela y luego como maestro de escuela. En 1835 abrió su propia escuela en Lincoln.

---

[3] Cf.: *Mathematical Thought*, Reidel, Dordrecht, 1965, pp. 44–45.

[4] Sobre la noción técnica de símbolo, véase mi obra *Lógica Matemática. Primeras lecciones* (Biblioteca Matemática, Madrid, 1975), p. 6.

Boole fue un notable autodidacta, forzado a ello por las circunstancias personales, estudiando todas las obras de matemáticas que caían en sus manos. A los veinticuatro años envió varios escritos al nuevo *Cambridge Mathematical Journal* relativos a ecuaciones diferenciales y al concepto de invariancia. La capacidad y facilidad de trabajo de Boole eran tan extraordinarias que en 1844 recibió una medalla de la *Royal Society* por sus escritos sobre análisis matemático.

Nuestro hombre se relacionó con importantes científicos de la época, que influyeron en su evolución intelectual. Ante todo con el algebrista Gregory, amigo suyo y editor del citado *Cambridge Mathematical Journal.* Pero también se relacionó con el lógico y matemático De Morgan, advirtiendo ambos su coincidencia en varias ideas de tal manera que tomaron la decisión de dejar de consultarse. En realidad, si comparamos a De Morgan con Boole notamos que el primero está más apegado a la tradición lógica que el segundo y es menos innovador. Boole siguió con interés la polémica entre De Morgan y Hamilton [5]acerca de la prioridad en la teoría de la cuantificación del predicado [6]; al parecer esta polémica le impulsó a ocuparse de la lógica, pensando que su noción del álgebra podría aplicarse a esta ciencia.

Lo cierto es que en 1847 publicó su obra *The Mathematical Analysis of Logic,* escrita de un tirón en varias semanas de la primavera, donde la lógica aparece aliada al álgebra y separada de la filosofía .

Como consecuencia del prestigio alcanzado por Boole, en 1849 es nombrado profesor de matemáticas del recién fundado Queen's College de Cork (actual Irlanda), a pesar de no poseer título universitario. Más tarde, en 1857, se reconocería oficialmente su alto valor científico al ser nombrado miembro de la *Royal Society.*

Su producción lógica se completó con la publicación, en 1854, de *An Investigation of the Laws of Thought,* obra que desarrolla las ideas y teorías contenidas en su libro de 1847 además de incluir varios capítulos sobre la teoría de probabilidades. Por otra parte, en 1859 y 1860 publica dos importantes libros de matemáticas que fueron textos universitarios durante muchos años.

Finalmente en 1864 George Boole falleció de una enfermedad de pulmón.

III. En términos generales podemos decir que la preparación matemática de Boole le capacitó para desarrollar una lógica donde se usan los recursos del álgebra ordinaria, pero que no es un álgebra matemática. Esto quedará suficientemente claro más adelante, pero de momento podemos indicar que el sistema de Boole incluye leyes que son propia y específicamente lógicas, como por ejemplo la llamada ley del exponente ($x^n = x$), que es una versión general de lo que hoy suele denominarse idempotencia del producto lógico.

Por otro lado, sería erróneo considerar el álgebra de Boole como exclusivamente una lógica de clases. En efecto, aunque inicialmente se presenta como tal, es en realidad un álgebra general, ya que se desarrolla tanto como lógica de clases (teoría

---

5 Boole supervaloraba a Hamilton, y así escribe: "De Sir W. Hamilton es imposible hablar sino con ese respeto que se debe al genio y a la enseñanza" *(The Mathematical Analysis of Logic,* Blackwell, Oxford, 1965, p. 12. En lo sucesivo citaremos esta edición mediante la abreviatura MAL).

6 De hecho la polémica no tenía sentido, ya que la teoría de la cuantificación del predicado se encuentra ya en la obra de 1827 de George Bentham titulada *Outline of a New System of Logic.*

de proposiciones categóricas y teoría del silogismo, ampliando Boole notablemente esta última a modos nuevos, no aristotélicos) cuanto como lógica de enunciados (teoría de proposiciones hipotéticas).

Boole es un decidido defensor del empleo de símbolos en lógica, aunque prefiere, siempre que es posible, recurrir a los símbolos ya familiares de las matemáticas. Para él, por un lado, la ley del progreso científico supone el paso natural a investigaciones superiores y nuevas, pero tal paso exige el empleo de símbolos. Por otro lado, Boole condena el uso de símbolos cuando son caracteres que nada sugieren, pero defiende tal uso cuando se hace con pleno entendimiento de su sentido y de los razonamientos implícitos. El símbolo aparece claramene como un resorte de generalización y ésta es consubstancial con el ejercicio disciplinado de la razón [7].

Conviene detenerse un momento en la noción de Boole del álgebra en general, ya que se trata de una noción sumamente actual y tal que posibilita la entrada de la lógica en el campo algebraico. Para nuestro autor el álgebra no depende de la interpretación de sus símbolos, sino de sus leyes de combinación. Vemos aquí una expresa subordinación de la semántica a la sintaxis, lo cual es esencial a un cálculo algebraico o sintáctico. Asimismo para Boole cabe una pluralidad de interpretaciones respecto de un mismo sistema (por ejemplo, propiedades de los números, cuestiones geométricas, problemas de dinámica u óptica) y, lo que nos parece más importante, no es necesario que la interpretación se limite al ámbito de lo cuantitativo [8]. Esto último supone la apertura del álgebra a una interpretación lógica en términos de inferencias válidas.

En cuanto a la relación de la lógica o bien con la filosofía o bien con la matemática, la doctrina de Boole se establece al hilo de la controversia sobre la prioridad de la lógica o de las matemáticas en una educación liberal. En 1836 surgió, en efecto, una discusión entre Whewell y Hamilton acerca del diferente valor educativo de ambas disciplinas [9]. En resumen, Whewell valoraba la matemática, por encima de la lógica, en la adquisición de hábitos de razonar, aludiendo que los razonamientos tienen un contenido determinado en la matemática y no se establecen en general tal como ocurre en la lógica; en cambio, Hamilton insistía en la prioridad de la lógica menospreciando a su vez las matemáticas en su papel educativo. Por su parte Boole observa que la postura de Hamilton es solidaria con la consideración de la lógica como rama de la filosofía. En efecto, supuesta la superioridad de la filosofía sobre las matemáticas (en la medida en que la primera investiga causas y las segundas no) y admitido que la lógica es una rama de la filosofía, se desprende la superioridad de la lógica sobre las matemáticas [10]. Boole no se empeña en discutir el trasfondo de la primera premisa (a saber, que la filosofía es investigación de causas), pero admitiéndolo niega totalmente la segunda premisa: "Entonces me veo obligado a aseverar que, según este punto de vista sobre la naturaleza de la filosofía, la lógica no forma parte de ella. Sobre el principio de una clasificación verdadera, nunca más debemos asociar lógica y metafísica, sino lógica y matemáticas" [11],

---

7 Cf.: MAL, pp. 9–10.

8 Cf.: MAL, pp. 3–4.

9 Para ciertos detalles relativos a esta discusión véase mi obra *Filosofía de la ciencia empírica. Un estudio a través de Whewell* (Paraninfo, Madrid, 1978), pp. 197–200.

10 Cf.: MAL, pp. 11–12.

11 MAL, p. 13.

Así pues en Boole la lógica aparece asociada a la otra ciencia formal, aunque no confundida con ella. El tratamiento algebraico de la lógica realizado por nuestro autor fecunda la lógica y le da su forma actual (lógica matemática).

IV. Aunque la lógica de Boole rebasa la lógica de clases, su álgebra se ilustra inicialmente desde una interpretación en términos de clases. Pero mientras en Aristóteles (en el marco de su silogística) las clases o términos generales no son ni la clase universal ni la clase vacía, en cambio Boole adopta ambas como nociones básicas.

Efectivamente nuestro hombre toma como punto de partida la clase universal, que simboliza mediante el 1 y que denomina universo. La caracteriza como comprendiendo todas las clases concebibles de objetos, realmente existentes o no [12]. A su vez, lo que podemos llamar clases ordinarias o normales surgen por selección o elección en la clase universal de grupos de individuos con una o varias propiedades comunes.

Dentro del cálculo, en las ecuaciones, Boole emplea los símbolos "x", "y" o "z" que representan, al mismo tiempo, esa operación de elección de individuos y el resultado de la misma, siendo pues símbolos de clases. Boole no emplea el signo de pertenencia "E" (introducido más tarde por Peano) pero tampoco lo necesita en sus ecuaciones. En cuanto al producto de clases, como "xy", supone dos selecciones sucesivas: 1) selección *de* la clase Y, y 2) selección *en* la clase Y de los individuos de la clase X. El resultado es la clase cuyos miembros son tanto X como Y.

Los símbolos "x", "y", "z" son denominados por Boole, en atención a la operación que representan, símbolos electivos. A su vez, cualquier expresión que contenga símbolos electivos, como por ejemplo "xy", es denominada función electiva. Finalmente cualquier ecuación que tenga como miembros funciones electivas, como por ejemplo "xy = yx", es una ecuación electiva [13]. En *An Investigation of the Laws of Thought* [14]los símbolos del sistema son presentados de modo más expreso y ordenado, distinguiendo: 1) símbolos literales, como «x», «y», etc., 2) signos de operación, como "+", "–", "x", y 3) el signo de identidad, "=".

V. Volviendo al MAL nos ocuparemos de la elección y sus leyes. La elección representada mediante el símbolo es una operación mental, la cual no es una abstracción, ya que no perdemos de vista lo concreto, y procede mediante comparación y atención. Hay tres leyes básicas, que lo son de la operación de elección y también del álgebra lógica.

La primera ley dice que el resultado de la elección es independiente de la agrupación del tema o esfera de objetos. En la explicación Boole introduce, sin previo aviso, la unión o suma de clases, que representa mediante el signo aritmético "+". En efecto, podemos seleccionar la clase X en un todo o bien seleccionar la clase X en las partes de ese todo uniendo los resultados; en ambos casos tenemos

---

[12] Cf.: MAL, p. 15. De Morgan utiliza también el término "universo", refiriéndose unas veces a la clase universal y otras veces al conjunto de objetos sobreentendidos en un enunciado (universo del discurso).

[13] Cf.: MAL, p. 16.

[14] Dover, New York, 1958, p. 27. En lo sucesivo citaremos esta edición mediante la abreviatura LT. (Existe una versión castellana de esta obra en Paraninfo, Madrid, 1982).

constituida la misma clase. La expresión simbólica de esta ley, que no es sino la distribución del producto respecto de la suma, es la siguiente:

$$x (u + v) = xu + xv$$

La segunda ley señala que el orden de los actos de elección es indiferente. El ejemplo de Boole es el siguiente: seleccionar en animales las ovejas y luego los que tienen cuernos, o seleccionar en animales los que tienen cuernos y luego las ovejas, produce el mismo resultado [15]. Su expresión simbólica es la conmutación o simetría del producto:

$$xy = yx$$

La tercera ley establece que aunque repitamos una elección el resultado es el mismo. Su expresión simbólica es denominada por Boole ley del exponente, no tiene paralelo en el álgebra matemática y corresponde a lo que actualmente suele denominarse idempotencia del producto lógico.

$$x^n = x$$

VI. Además de esas leyes, explícitamente establecidas por Boole como primeros principios en el MAL, empleará en su álgebra otros principios derivados de la noción de universo.

Por una parte tenemos el principio de contradicción, presentado en LT del modo siguiente [16]:

$$x (1-x) = 0$$

En esta ecuación aparece el símbolo "0", que representa la clase nula o vacía. Asimismo aparece la expresión "1–x", que representa lo que actualmente suele denominarse clase complementaria o complemento de X y que Boole llama clase contraria o suplementaria [17]. Por tanto, la ecuación indica que los X que son no–X es igual a la clase nula; tomando el ejemplo de nuestro autor, una clase cuyos miembros son al mismo tiempo hombres y no hombre no existe. Obsérvese que la clase complementaria se simboliza recurriendo al universo o 1, ya que el complemento de X es lo que queda al restar del universo la clase X, esto es, los no–X.

Boole emplea también lo que podemos denominar principio del complemento, es decir, el principio de que la clase X y la clase no–X juntas constituyen el universo [18], lo cual puede simbolizarse mediante la siguiente ecuación:

$$(1-x)+x=1$$

Finalmente otro principio empleado por nuestro hombre en sus cálculos [19] indica que el universo menos el complemento de X es igual a X, lo cual cabe simbolizar mediante la ecuación siguiente:

$$1 - (1-x) = x$$

---

15 Cf.: MAL, p. 17.
16 LT, p. 49.
17 Cf.: LT, p. 48.
18 Cf.: por ejemplo MAL, p. 20.
19 Cf.: por ejemplo MAL, p. 27.

Aparte de estos principios, Boole emplea asimismo una serie de reglas de operación, de las cuales algunas se establecen expresamente mientras que otras se usan de hecho sin apenas advertencia.

Entre las no establecidas expresamente figura, en primer lugar, la regla de sustitución de variables, aunque Boole recurre a ella menos sistemáticamente que en las presentaciones axiomáticas de lógicos posteriores. Asimismo tampoco se explicita el recurso a reglas habituales de transformación algebraica, como el paso de un miembro a otro de una ecuación, la multiplicación de ecuaciones miembro a miembro, la eliminación de un mismo término cuando aparece con el signo + y el signo –, etc.; se trata del empleo de recursos aritméticos dentro del álgebra lógica, justificado por la reducción de proposiciones a ecuaciones y la reducción de inferencias a sistemas de ecuaciones.

A su vez, entre las establecidas expresamente en el MAL tenemos, por un lado, las reglas lógicas de conversión, obversión y subalternación [20]), y, por otro lado, las reglas de eliminación de términos comunes a dos o más premisas como recurso para, por eliminación de términos medios, obtener conclusiones lógicas, tal como veremos luego en detalle.

VII. Para la expresión de las proposiciones categóricas, Boole emplea dos tipos de formas canónicas en el MAL. Primero introduce un tipo que responde a una traducción intuitiva [21]y más tarde presenta un nuevo tipo más adecuado para el tratamiento de la teoría silogística [22], caracterizado por la presencia en todos los casos del símbolo electivo auxiliar "v".

Este símbolo plantea algunos problemas de interpretación. Por un lado es descrito por nuestro autor como el símbolo de una clase indefinida en todos los sentidos salvo en el de contener algunos de los individuos de la clase a cuya expresión simbólica determina [23]. Pero por otro lado puede entenderse como una anticipación del cuantificador existencial, de tal manera que su lectura puede ser frecuentemente "algunos" o bien "existe" [24].

Veamos pues el primer tipo de formas canónicas:

A: Todo X es Y: $x(1 - y) = O$
E: Ningún X es Y: $xy = O$
I: Algún X es Y: $v = xy$
O: Algún X no es Y: $v = x(1 - y)$

La ecuación que expresa las proposiciones de tipo A señala que los X que no son-Y es igual a la clase nula. A su vez, la ecuación que expresa las proposiciones de tipo E nos dice que los X que son Y es igual a la clase nula. Así pues las proposiciones universales se expresan recurriendo a la clase nula o vacía, encontran-

---

20 Cf.: MAL, pp. 26–30.
21 pp. 21–22.
22 p. 32.
23 Cf.: LT, p. 63.
24 Tal como señala Kotarbinski, Peirce fue el primero, en 1885, en introducir el concepto de cuantificador, proponiendo tanto la denominación *(quantifier)* como los símbolos " TT " y " ¿ " para lo que actualmente denominamos cuantificador universal y cuantificador existencial respectivamente. (Cf.: *Lecons sur l'histoire de la logique*, PUF, París, 1964, p. 221).

do su ilustración en los correspondientes diagramas de Venn que son diagramas de vaciedad o no-existencia, posteriores a Boole. Por otra parte, la ecuación que expresa las proposiciones de tipo I señala que existe una clase V igual a los X que son Y, mientras que la ecuación que expresa las proposiciones de tipo O nos dice que existe una clase V igual a los X que no son Y. En suma, las proposiciones particulares se expresan recurriendo al símbolo electivo auxiliar «v», encontrando su ilustración también en los correspondientes diagramas de Venn que son diagramas de existencia.

En cuento al segundo tipo de formas canónicas se caracteriza por la ausencia del símbolo «O» y la presencia en todos los segundos miembros de las ecuaciones del símbolo «v». Boole suprime ahora el símbolo «O» a fin de posibilitar la elimación de términos medios en la teoría silogística y emplea «v» en todos los segundos miembros para hacer uniformes todas las ecuaciones; sin embargo, quizás pudiera pensarse que la presencia de «v» en los segundos miembros supone una cuantificación del predicado, ya que la lectura de tal símbolo puede ser ahora la palabra «algunos». Tenemos:

A: Todo X es Y: $x = vy$
E: Ningún X es Y: $x = v(1 - y)$
I: Algún X es Y: $vx = vy$
O: Algún X no es Y: $vx = v(1 - y)$

VIII. Al ocuparse Boole de la expresión de las proposiciones hipotéticas se mueve en el marco de la lógica de enunciados, ya no de la lógica de clases. Ello indica el carácter general del álgebra lógica de nuestro autor y, al mismo tiempo, que el tratamiento simbólico de la lógica de enunciados no tuvo que esperar a Frege, sino que ya aparece en Boole, aunque las expresiones algebraicas de éste (al igual que luego los símbolos de Frege) resulten hoy artificiosas.

También aquí se parte del 1, denominado ahora universo hipotético y caracterizado como todos los casos y coyunturas de circunstancias concebibles. Los símbolos "X", "Y", "Z" (mayúsculas) representan ahora enunciados o proposiciones, y ya no clases. A su vez, los símbolos electivos "x", "y", "z" (minúsculas) vienen a representar (lo que podemos calificar de) los metaenunciados "X es verdadera", "Y es verdadera", "Z es verdadera", respectivamente; "$1 - x$". "$1 - y$", "$1 - z$" representarán los metaenunciados "X es falsa", "Y es falsa", "Z es falsa", respectivamente [25].

Boole adopta expresamente el principio de tercero excluido, esto es, que dada una proposición o es verdadera o es falsa. En realidad, su lenguaje simbólico de las proposiciones hipotéticas corresponde a un metalenguaje al incluir y simbolizar valoraciones veritativas. Incluso, cuando resulta necesario para el cálculo, el metaenunciado "X es verdadera" se representa mediante la ecuación "$x = 1$", mientras que el metaenunciado "X es falsa" se representa mediante la ecuación "$x = 0$" [26].

Para expresar una proposición conjuntiva, y de acuerdo con el tratamiento metalingüístico indicado, Boole ofrece el siguiente ejemplo: "X e Y son simultáneamente verdaderas" se expresará por la ecuación "$xy = 1$".

En cuanto a la expresión de proposiciones alternativas, nuestro autor es sensible a la distinción entre disyunción y contravalencia (aunque no emplee esta

[25] Cf.: MAL, p. 49.
[26] Cf.: MAL, p. 51.

terminología). La regla usada para llegar a la ecuación expresiva se resume así: se consideran los distintos casos en los que se supone que la proposición alternativa es verdadera y se iguala a la suma de las correspondientes expresiones electivas, de modo que la ecuación resultante expresa la proposición [27].

Veamos primero un ejemplo de disyunción. Sea la proposición alternativa "X es verdadera o Y es verdadera (o ambas)". Entonces tenemos tres casos en los que la proposición es verdadera, los cuales anotamos junto con sus correspondientes expresiones electivas:

Caso 1: X verdadera, Y falsa: $x(1 - y)$
Caso 2: X falsa, Y verdadera: $(1 - x)y$
Caso 3: X verdadera, Y verdadera: xy

Sumando las expresiones electivas e igualando a 1 tendremos: $x(1 - y) + (1 - x) y + xy = 1$, de donde $x - xy + y - xy + xy = 1$, con lo que resulta la ecuación expresiva $x + y - xy = 1$.

Veamos ahora un ejemplo de contravalencia. Sea la proposición alternativa "o X es verdadera o Y es verdadera (pero no ambas)". Entonces tenemos dos casos en los que la proposición es verdadera, los cuales registramos junto con sus correspondientes expresiones electivas:

Caso 1: X verdadera, Y falsa: $x (1 - y)$
Caso 2: X falsa, Y verdadera: $(1 - x) y$

Sumando e igualando a 1 tendremos: $x (1 - y) + (1 - x) y = 1$, de donde $x - xy + y - xy = 1$, y finalmente la ecuación expresiva $x - 2 x y + y = 1$.

Para terminar con la expresión de las proposiciones hipotéticas, veremos un ejemplo de expresión de proposición condicional. Sea la proposición "si X es verdadera, Y es verdadera". Como suponemos que en todos los casos en que X es verdadera Y también lo es, resulta que el caso en que X es verdadera Y es falsa hace la proposición condicional en cuestión falsa, con lo que la ecuación expresiva es:

$$x (1 - y) = 0$$

IX. Nos ocuparemos ahora de la teoría silogística presentada por Boole. Primero veremos el silogismo categórico, mostrando sus rasgos esenciales y algunos ejemplos, y luego aludiremos a los silogismos hipotéticos ofreciendo ejemplos de los silogismos condicionales.

En cuanto al silogismo categórico, sus premisas estarán expresadas por ecuaciones donde un término se repite (el que corresponde al término medio); la eliminación de tal término podrá originar una nueva ecuación, la cual expresará la conclusión del silogismo. Nuestro autor propone el siguiente método de eliminación: escribir las ecuaciones que representan las premisas, de modo que el término repetido aparezca en cada ecuación en miembros distintos, y luego multiplicar las ecuaciones miembro a miembro omitiendo el término repetido [28].

---

[27] Cf.: MAL, pp. 52–54.
[28] Cf.: MAL, 34.

Boole, contrariamente a Aristóteles, admite términos silogísticos del tipo no – X. En efecto, el Estagirita considera que expresiones como no–hombre no son un nombre y las denomina nombres indefinidos [29]. En cambio, nuestro hombre las acepta tanto en posición de sujeto como de predicado. En la posición de predicado estos términos no plantean necesariamente grandes cambios, ya que la negación es transportable a la cópula; en verdad, la expresión "es no – P" equivale a "no es P" y en la lógica matemática actual "x es no – f" y "x no es f" se simbolizan igualmente, por ejemplo, mediante "f – (x)". Pero en la posición de sujeto estos términos obligan a considerar un mayor número de modos silogísticos. De hecho, aunque Boole no realiza una presentación exhaustiva, ofrece modos silogísticos no–aristotélicos, de tal manera que, sin presentar los ciento noventa y dos modos válidos de silogismo que estudia Menne [30], sus principios teóricos rebasan los diecinueve modos escolásticos habituales y también los veinticuatro leibnizianos.

Veamos simplemente dos ejemplos de derivación de modos silogísticos categóricos, uno corresponderá a un modo aristotélico y el otro a un modo no–aristotélico.

Comenzaremos por el modo Barbara (1ª figura), anotando sus premisas así como sus ecuaciones expresivas pertinentes:

Todos los Y son X $y = vx$
Todos los Z son Y $z = \acute{v}y$

Debe observarse que el término repetido "y" aparece en miembros distintos para cada ecuación. Asimismo "v" y "$\acute{v}$" son dos "algunos" con alcance diferente. Multiplicando las ecuaciones miembro a miembro, y omitiendo "y", resulta la siguiente ecuación:

$$z = v\acute{v}x$$

Tal ecuación nos dice "Todos los Z son algunos en algunos X", es decir, "Todos los Z son algunos X", o simplemente "Todos los Z son X", conclusión que junto con las premisas dadas constituye el modo Barbara [31].

Sean las siguientes premisas, junto a las cuales anotamos las ecuaciones expresivas correspondientes:

Ningún Y es X $0 = xy$
Ningún Z es Y $y = v(1 - z)$

Aquí también el término repetido "y" aparece en miembros distintos de las ecuaciones. La ecuación expresiva de la primera premisa es del primer tipo canónico (véase apartado VII anterior), mientras que la ecuación correspondiente a la segunda premisa es del segundo tipo canónico, ya que si ambas fuesen del primer tipo no sería posible la eliminación del término medio. Por cierto que esa segunda

---

[29] Cf.: *De Interpretatione,* 16 a, 30 y ss.
[30] *Introducción a la lógica* (trad. Leopoldo – Eulogio Palacios), Gredos, Madrid, 1969, 4.7 De los silogismos.
[31] Cf.: MAL, nota p. 42.

ecuación expresa directamente la conversa simple de la premisa segunda, manipulación frecuente en Boole. Pues bien, multiplicando miembro a miembro las ecuaciones, omitiendo "y", resulta la siguiente ecuación:

$$0 = v(1 - z)x$$

Tal ecuación dice "Algunos no–Z que son X es igual a la clase nula", esto es, "Algunos no–Z no son X" o también "Algunos no–Z son no–X", conclusión que junto con las premisas dadas constituye un modo válido de la primera figura [32].

Ahora bien, este modo silogístico no es aristotélico, ya que su conclusión es un enunciado inverso con términos del tipo no–X tanto en el sujeto como en el predicado. Más aún, este silogismo pone en entredicho la regla silogística tradicional que dice que de dos premisas negativas nada puede concluirse.

Evidentemente si, como consecuencia del tratamiento de las ecuaciones expresivas de las premisas, la ecuación resultante no puede traducirse a proposición alguna, entonces no hemos localizado un modo silogístico.

Por otra parte, en lo que se refiere a los silogismos hipotéticos, Boole presenta sus proposiciones componentes como metaenunciados, es decir, incluyendo valoraciones veritativas, de tal manera que nos encontramos con proposiciones como "o X es verdadera o Y es verdadera". Así pues, la presencia de proposiciones hipotéticas (una o varias) es característica de estos silogismos.

El tratamiento algebraico de los silogismos hipotéticos consiste en formar las ecuaciones expresivas de las premisas y en eliminar el símbolo o símbolos que se encuentran en más de una de ellas; el resultado de tal eliminación expresará la conclusión [33]. A su vez, el método de eliminación frecuentemente practicado por Boole se reduce a eliminar un término repetido sustituyéndolo, en la ecuación que convenga, por su valor expresado en otra ecuación.

Veremos únicamente dos ejemplos de derivación de silogismos hipotéticos del tipo condicional, dejando los silogismos disyuntivos, cuyo tratamiento es análogo.

Sean las siguientes premisas, junto a las cuales anotamos sus ecuaciones expresivas:

Si X es verdadera, Y es verdadera $x(1 - y) = 0$
X es verdadera $x = 1$

Sustituyendo en la primera ecuación "x" por su valor expresado en la segunda ecuación, tenemos "$1(1 - y) = 0$", esto es, "$1 - y = 0$", y finalmente "$y = 1$", ecuación que expresa "Y es verdadera". Tal conclusión junto a las premisas dadas constituye lo que Boole llama silogismo condicional constructivo, es decir, una variante del *modus ponendo ponens.*

Sean ahora las premisas que se indican junto a sus ecuaciones expresivas:

Si X es verdadera, Y es verdadera $x(1 - y) = 0$
Y no es verdadera $y = 0$

---

[32] Cf.: MAL, p. 36.
[33] Cf.: MAL, p. 55.

Sustituyendo en la primera ecuación "y" por su valor expresado en la segunda, tenemos "x(1 − 0) = 0", lo cual nos da la ecuación final "x = 0", la cual expresa la conclusión "X no es verdadera". Tal conclusión junto a las premisas dadas constituye lo que nuestro autor denomina silogismo condicional destructivo, y que es una variante del *modus tollendo tollens.*