

## Función de demanda y caos

---

F. JAVIER LANDA BERCEBAL  
FRANCISCO VELASCO MORENTE  
*Universidad de Sevilla*

*Este artículo, que forma parte de una línea de investigación en la que venimos trabajando desde hace algún tiempo, en torno a la teoría del caos, tiene por objetivo conocer, analizar y obtener una explicación de los comportamientos extraños de las funciones de demanda, así como indicar la manera de cómo a través de la influencia en el entorno y en los propios consumidores, esos comportamientos extraños no se produzcan o al menos se prevean, a través del reflejo que de los mismos se manifiesta en las funciones de demanda, desde una perspectiva dinámica.*

### 1. INTRODUCCION

La evolución social, en general, de la humanidad apoyada en condicionantes de tipo tecnológico y económico ha llevado a una situación en la que se aprecia con claridad las diferencias existentes entre los distintos grupos que componen aquella. Unas sociedades han evolucionado hacia el bienestar más rápidamente que otra, y algunas todavía se encuentran a nivel de pura subsistencia. Este hecho discriminante ha provocado que los habitantes de las zonas más desarrolladas, que a su vez ya han cubierto sus necesidades vitales básicas, estén cambiando de manera permanente la idea de **necesidad** por la de **deseo**, lo que conlleva a que la comprensión de los mercados sea cada vez más dificultosa. Los métodos de análisis y estudio de los mismos tienen que evolucionar y encontrar nuevos itinerarios que sean capaces de dar respuesta anticipativa y acertada al posible nuevo deseo del consumidor y/o comprador, o al menos poder prever que la respuesta va a ser lo suficientemente **compleja** y no sometida a ninguna ley de comportamiento conocida, que induzcan al investigador y al decisor a plantear y a ejecutar acciones que contrarresten de la manera más radical posible los efectos de esa complejidad.

### 2. LA RESPUESTA EXTRAÑA DEL CONSUMIDOR

La acción de un potencial comprador es producto de un proceso de decisión. Al final

del mismo se realiza el acto de comprar o de no comprar, no hay más posibilidades, es una respuesta de variable dicotomía. En ese proceso de decisión influyen distintos grupos de variables, internas, externas y de marketing.

Desde la empresa u organización se pueden dominar de manera directa las variables propias de marketing. Las demás variables que influyen en el comportamiento del comprador no son dominadas, al menos en teoría, por la organización, como tampoco lo es el propio proceso de decisión que lleva al acto de adquirir, en su caso, el producto y/o servicio. La respuesta del consumidor puede ser peor o mejor conocida, es decir, más o menos compleja.

El comportamiento del comprador se refleja en el mercado y el mismo se puede estudiar a través de la estimación de las funciones de demanda. Estas funciones consideran las variables del entorno del consumidor, de la organización y las propias variables del esfuerzo de marketing que esta última realiza. El ajuste a la respuesta del mercado de las funciones se obtiene a través de los parámetros que acompañan a las variables independientes de las mismas. Los diferentes valores de esos parámetros en un análisis temporal recogen la respuesta directa del mercado, para diferentes valores del esfuerzo de marketing y para unas determinadas condiciones del entorno, que pueden variar y de hecho varían. Si el entorno es favorable en relación a que la respuesta del consumidor sea positiva a los intereses de la organización, entonces los parámetros tomarán un valor, si es desfavorable serán otros los valores; en definitiva podrá desarrollar un mayor y más eficaz esfuerzo de marketing que intente amortiguar los efectos negativos provenientes de ese entorno.

El estudio a corto plazo de la evolución de las funciones de demanda permitirá analizar el comportamiento de respuesta del mercado ante la oferta del producto y/o servicio. No obstante, ocurre, en ocasiones, que aún establecido lo que se puede entender como un buen ajuste de la función, las previsiones esperadas no se cumplen, la respuesta del mercado no obedece a las expectativas puestas en el mismo, la demanda en definitiva, tiene un comportamiento raro o no esperado. Entendemos que cuando ese hecho se produce, lo es, porque la respuesta del mercado, reflejada en los parámetros de las funciones, es caótica.

La organización, tal y como hemos indicado, tan sólo puede influir en las variables que controla y que no son otras que las del propio esfuerzo de marketing. El resto de variables no controlables y el propio entorno ejercerán una influencia decisiva en el comportamiento del consumidor que vendrá recogido en los parámetros de ajuste.

Partimos de la hipótesis de que variaciones producidas en un entorno relativamente estable y a la vez con acciones de marketing de otras organizaciones de tipo no agresivo, producen comportamientos de los consumidores no previstos a través de un análisis tradicional y que se traducen en oscilaciones extrañas de la demanda de una organización cualquiera o en su caso, de un sector. Insistimos en el aspecto de estabilidad relativa en

general, puesto que entendemos que ante variaciones radicales del entorno o estrategias competitivas agresivas, se producen comportamientos de los consumidores que se reflejan en variaciones de demanda, en muchas ocasiones difíciles de prever.

Tradicionalmente se ha expresado que los ajustes de las funciones dan resultado siempre y cuando las condiciones históricas sean similares a las del momento en el que se produce el ajuste. La hipótesis que hemos enunciado en el párrafo anterior se traduce en el sentido de que aún manteniéndose en un momento del tiempo determinado, unas condiciones parecidas a períodos anteriores, puede ocurrir que los consumidores actúen de manera tal, que cualquier previsión realizada a través del ajuste, sobre posible cantidad demandada que los mismos van a efectuar, sea absolutamente errónea. Porque variaciones de comportamiento difícilmente apreciables pueden traducirse en una respuesta que en algunos casos se podrá considerar como caótica.

Todo el conjunto de factores, externos e internos, que influyen en el comportamiento y posterior respuesta del consumidor, se reflejan o quedan recogidos en la denominada función de demanda.

La demanda puede ser estudiada desde una perspectiva del conjunto de las organizaciones para un producto-mercado en concreto, en este caso estaríamos ante la idea de demanda global; o bien desde la óptica de una sola organización, también para un producto-mercado en concreto, encontrándonos, en este caso, ante la demanda para esa organización en concreto. Para cumplir con el objetivo propuesto en esta investigación, es indiferente la óptica que mantengamos, puesto que se trata de medir la respuesta de los consumidores a través de las funciones de demanda y comprobar si las variaciones que pueden sufrir el valor de los parámetros, ante cambios en el entorno y para diversos niveles de esfuerzo de marketing, inducen a comportamientos extraños de las funciones y en su caso poder calificar esos comportamientos extraños, como caóticos.

Las funciones de demanda relacionan, la influencia del entorno, las variables internas del consumidor y los niveles que se determinan en las variables de marketing con la cantidad demandada del producto y/o servicio que se trate. A largo plazo todo el conjunto de variables actúan e influyen de manera directa, produciéndose una respuesta que se puede considerar histórica en relación al producto estudiado. Podemos indicar que se formaría una función de demanda para un ciclo largo. Pero el trabajar con la idea del largo plazo resulta, aunque interesante, poco operativo, ya que las variaciones que sufren las respuestas de los consumidores, fruto de su proceso de comportamiento, se deben más a la influencia de variables que actúan a corto plazo que la de las que actúan a largo plazo. Muchos cortos plazos agregados producen la visión del largo plazo.

Sin lugar a dudas que variables como el producto, culturales y sociales, de tipo económico o cualesquiera otras ya estudiadas en epígrafes anteriores, condicionarán el comportamiento del consumidor. Pero ese acondicionamiento no surge en momentos cortos de

tiempo. Mas bien dadas unas ciertas condiciones del entorno y de otras variables muy estables o rígidas al cambio, se producirá un escenario. En ese escenario se establecerá un comportamiento del consumidor adecuado al mismo. Y con las variables de actuación, a corto plazo, por parte de las organizaciones de un sector o por una sola organización se inducirán comportamientos en los consumidores que se traducirán, en el mejor de los casos, en respuestas que supongan variaciones positivas en la cantidad demandada de productos y/o servicios.

Esto es, funciones de demanda con pendiente positiva.

Entendemos que la respuesta del consumidor es equilibrada en el tiempo, si los factores de influencia a largo plazo, se mantienen en unos determinados márgenes de estabilidad. Pero ese equilibrio del consumidor a largo plazo, no significa que no se desequilibre a corto plazo. Que su comportamiento a corto plazo esté previsto, aún en la idea de desequilibrio, en la mayor parte de las ocasiones, pero que ocurra que en otras ocasiones, las previsiones no se cumplan, que la respuesta no sea la esperada. Es, al darse este último caso, cuando nos interesa conocer si ello va a ocurrir o puede ocurrir.

### 3. FUNCION DE DEMANDA EN SISTEMAS DINAMICOS CAOTICOS

Los modelos de comportamiento del consumidor finalizar en la respuesta. Al estudiar la respuesta a través de las cantidades demandadas, estamos ante la evolución de las mismas, esto es, ante el cambio de estado de la demanda a través o a lo largo del tiempo. Esa evolución no es un modelo, es la misma realidad, constituye un sistema dinámico en toda su extensión. Sin embargo el ajuste de esa realidad, sí que constituye un modelo, puesto que simplifica la realidad misma.

La evolución de la cantidad demandada a lo largo del tiempo ( $q_i$ ) se puede expresar como una función del tiempo  $q_i(t)$ . Esa evolución se representa a través de lo que se conoce como trayectoria. El conjunto de todas las trayectorias posibles del sistema, expresan el comportamiento del mismo.

La evolución en el tiempo de la cantidad demandada, representada a través de su función de demanda, la podemos establecer de la siguiente manera:

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

En forma de ecuación queda de la siguiente manera:

$$q_t = f(q_{t-1}) \text{ o también } q_{t+1} = f(q_t)$$

Es importante la idea que se recoge en las expresiones anteriores, ya que están indicando que la variación de la variable a través del tiempo es una función de la misma va-

riable, pero con diferentes valores, esto es, los propios surgidos de la evolución de la respuesta que dará, en su caso, el consumidor.

El valor que toman cada una de las  $q_i$  en un momento determinado de tiempo, se denomina estado del sistema. Y el espacio de los diferentes estados que alcanza el sistema, en este caso definido por el conjunto  $Q$  se le llama **espacio de estado o de fases**, ya que la función  $f$  que relaciona la ecuación anterior es una **aplicación**,  $f: Q \rightarrow Q$ .

Si el espacio de los estados estuviera definido por  $m$  variables, entonces la aplicación  $f$  estaría definida en el conjunto  $Q^m$ , tal que, entonces tendríamos  $f: Q^m \rightarrow Q^m$ . Hablaríamos de espacio de fases unidimensionales o bien  $m$ -dimensionales. Para  $m = 1, 2, 3, \dots$

Las variables, en este caso, representadas por las diferentes cantidades demandadas que se manifiestan a través del tiempo, describen el sistema, y por ello las denominamos **variables de estado**, que se agrupan a su vez en el llamado **vector estado**. Este vector es el que acumula toda la información acerca del estado del sistema. En base a esto anterior, podemos indicar que el espacio de fases es el conjunto de todos los posibles vectores del sistema.

La aplicación  $f$ , a su vez, representa la ley de evolución del sistema dinámico, ya que si tomamos de nuevo la ecuación:

$$q_t = f(q_{t-1}) \text{ o también } q_{t+1} = f(q_t)$$

podemos observar cómo transforma cada estado en el siguiente. Si partimos de un estado inicial  $q_0$ , la evolución temporal se corresponderá con la sucesión  $q_0, q_1, q_2, \dots$ , que es una solución con **condición inicial**  $q_0$ . Luego tendremos la siguiente cadena evolutiva:

$$q_1 = f(q_0); q_2 = f(q_1) = f^2(q_0)$$

Generalizando para  $t$  períodos de tiempo o unidades temporales, tendremos:

$$q_t = f^t(q_0)$$

y  $\Phi_q(t) = f^t(q)$  que es la denominada solución general.

Esta expresión anterior permite conocer el estado del sistema en cualquier momento a partir de una posición inicial. A través de ella y con los diferentes valores de los distintos estados del sistema, podemos definir la **órbita** de la variable, tal que:

$$O^+(q) = \{q, f(q), f^2(q), f^3(q), f^4(q), \dots\}$$

El comportamiento y evolución de las funciones de demanda, no dependen sólo y exclusivamente de los valores que la propia variable vaya tomando a lo largo del tiempo. Hemos mantenido que la respuesta dada por los consumidores y traducida en esas funciones, dependía de factores internos y externos al propio consumidor. Al realizar el ajuste de las funciones de demanda que representan la realidad de la cantidad demandada por

los consumidores, es necesario introducir parámetros que hagan más adecuado ese ajuste a la realidad. Formalmente podríamos expresar este aspecto de la siguiente forma:

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, p)$$

Estos parámetros pertenecen a lo que podemos denominar como el espacio de los parámetros (P), siendo constitutivos del propio sistema o intrínsecos al mismo.

Cuando pasan  $t$  unidades de tiempo, un sistema dinámico se encuentra en un cierto estado:

$$q(t) = f(q_e, t)$$

Imaginemos que en ese determinado momento, el estado de la cantidad demandada lo representamos por  $q_e$ . Podemos indicar que  $q_e$  es un estado en equilibrio o que el sistema se encuentra en equilibrio en el estado  $q_e$  si:

$$f(q_e, t) = q_e \text{ para todo } t \geq 0$$

Ese estado en **equilibrio** será **estable** si al estado inicial, que hemos denominado  $q_0$ , está muy próximo al de equilibrio  $q_e$ . De tal manera que:

$$q(t) = f(q_0, t) \rightarrow (q_e) \text{ para todo } t$$

Utilizando la diferencia entre el valor de los estados, en términos absolutos, tenemos:

$$|q_0 - q_e| < \delta \rightarrow |f(q_0, t) - q_e| < \tau \text{ para todo } t \geq 0$$

La expresión anterior indica, que tomando un margen ( $\tau$ ), si el estado inicial ( $q_0$ ) no se desvía del estado de equilibrio ( $q_e$ ) más de un valor ( $\delta$ ), entonces el estado inicial no se desviará en el transcurso del tiempo del estado de equilibrio en más de un valor ( $\tau$ ). El estado de equilibrio  $q_e$  será asintóticamente estable, si además de ser estable, manifiesta:

$$|q_0 - q_e| < r \rightarrow q(t) = f(q_0, t) \rightarrow q_e \text{ para } t \rightarrow \infty$$

La expresión anterior, indica que si el estado inicial se desvía del de equilibrio en menos de un número  $r$ , entonces el estado  $q(t) = f(q_0, t)$  se aproxima permanentemente al estado  $q_e$ .

Cuando un sistema dinámico se estabiliza, lo hace en un atractor. Es una parte del espacio de fases de manera que cualquier punto que comienza a moverse en sus proximidades, se acerca cada vez más a él, a esa parte del espacio de fases.

Los atractores cumplen una serie de condiciones tales como:

- Las soluciones con **condiciones iniciales** dentro del atractor, permanecen siempre en él.
- Existe un conjunto de puntos, alrededor del atractor, que conforman la denomina-

da **cuenca de atracción**, de forma tal que las soluciones con condiciones iniciales en esa cuenca de atracción, se aproxima asintóticamente al atractor.

Los estados de cualquier sistema que se dan de una manera permanente, o que aproximadamente son los mismos, una y otra vez y cada vez más próximos entre sí, pertenecen a un conjunto que podemos denominar atractor. Los atractores pueden estar representados geográficamente por una estructura simple o compleja. Si partimos de una condición inicial  $q_0$  la solución  $q(t)$  del sistema dinámico es única. El comportamiento a través del tiempo de  $q(t)$  es el mismo para todas las soluciones que se encuentren en la misma cuenca de atracción. Varias soluciones  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ ; que tengan condiciones iniciales, en el momento cero del tiempo, esto es al inicio,  $q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0)$ ; tendrán trayectorias cualitativamente equivalentes si las condiciones iniciales pertenecen a la misma cuenca de atracción.

Los estados atractores de los sistemas dinámicos, son fundamentales. Dirigen el movimiento del sistema, ya que todo el sistema tiende hacia ellos, en búsqueda del equilibrio. Una vez que el sistema ha pasado por los estados transitorios hacia el atractor, podemos indicar que éste es el estado en el que se encuentra el sistema.

El comportamiento en el tiempo de la función de demanda, dependerá del tipo de atractor hacia el que tienda. Si la función de demanda es lineal, podrá presentar, tan sólo, un atractor puntual; si es una función no lineal podrá manifestar varios atractores, del tipo que sean.

De todos los tipos de atractores que existen, el único que podemos especificar que es estrictamente caótico, es el llamado atractor extraño. Esto significa que existen atractores que no son estrictamente caóticos, lo cual no quiere decir que no puedan manifestar caos. Para aclarar lo anterior nos vamos a apoyar en una idea expuesta por LORENZ (1), con motivo de unas reflexiones que él mismo realiza respecto a una publicación de TIEN YIEN LI y JAMES YORKE titulada: "El período tres implica caos".

LI y YORKE demostraron que determinadas ecuaciones en diferencias presentaban una solución de período tres que implicaba la existencia de una colección infinita de soluciones periódicas y una colección infinita de soluciones no periódicas. Con esta demostración, estos autores establecieron el término caos al referirse al comportamiento presentado por los sistemas dinámicos constituidos por ecuaciones que manifiestan algunas soluciones no periódicas. En base a lo anterior la idea de caos en un sistema dinámico de demanda se establece indicando que a la mayor parte de los estados iniciales, les sigue un comportamiento no periódico y sólo unos pocos tienden a la periodicidad. Esto es, estados que se manifiestan periódicos y estados que no se manifiestan periódicos al transcurrir el tiempo.

(1) LORENZ, E. N.: *La Esencia del Caos*, Debate, 1995, págs. 19 y ss.

Esta argumentación de LI y YORKE es lo que induce a que LORENZ haga esas reflexiones que hemos mencionado. Para LORENZ, la existencia de soluciones periódicas y no periódicas indica la presencia de lo que él denomina **caos limitado**. Y emplea el término **caos total** cuando todas las soluciones son **no periódicas**. Como él indica, la probabilidad de encontrar en el **caos total**, un comportamiento periódico, es cero.

Apoyándonos en los argumentos de LI, YORK y en las reflexiones de LORENZ, podemos establecer esa distinción de atractores que no son estrictamente caóticos, sería la idea del caos limitado y el atractor extraño que sería absolutamente caótico, caos total, y que toda la comunidad científica, al referirse a este último le denomina, atractor extraño o caótico.

Una de las características, junto al estudio de los diagramas de FEIGENBAUM, para expresar que un sistema dinámico de demanda es caótico, es su sensibilidad a las condiciones iniciales. Los exponentes de LIAPUNOV sirven para medir esa sensibilidad, de tal manera que partiendo de una situación inicial, a la que le sometemos a una infinitesimal variación, al realizar infinitas iteraciones, sobre el sistema dinámico, al final esa situación inicial se ha convertido en un estado en el que los valores pueden diferir, en comparación a las condiciones iniciales. La divergencia que se haya podido producir, será indicativa de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Miden, en definitiva, lo que ocurre si a un valor inicial del sistema, se le modifica infinitesimalmente, se hacen evolucionar en el tiempo, el valor original y el resultado de su variación infinitesimal. Al final de la evolución del sistema dinámico, los dos valores iniciales divergen mucho o poco.

Si tomamos el sistema dinámico:

$$q_{t+1} = f(q_t)$$

para un valor en el inicio  $q_0$  al que le incrementamos un número infinitesimal  $d$ , de forma que tenemos otro valor  $(q_0 + \tau)$ . Después de realizar un número de iteraciones  $t$ , los dos valores anteriores, que se diferenciaban infinitesimalmente, se habrán convertido en  $f^t(q_0)$  y  $f^t(q_0 + \tau)$ .

La distancia al inicio del proceso entre los dos puntos, como hemos indicado es infinitesimal, pero cuál es la distancia al final de las iteraciones a las que se ha sometido al sistema. Sometamos esa diferencia a un valor que recoja las condiciones iniciales y las iteraciones o unidades de tiempo.

$$|f^t(q_0 + \tau) - f^t(q_0)| = \tau e^{t\Gamma(q_0)}$$

La diferencia que existe al final del número  $t$  de iteraciones, ha aumentado de manera exponencial. Además ese exponente, no sólo depende del número de iteraciones, sino además de la condición inicial, representada por el valor  $q_0$ .

Si se opera con la expresión anterior, tomando logaritmos y límites, obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma(q_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \left| \frac{f^t(q_0 + \tau) - f^t(q_0)}{\tau} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{df^t(q_0)}{dq_0} \right| \end{aligned}$$

$$\frac{df^t(q_0)}{dq_0}$$

es la derivada de la función  $(f^t(q_0))$ , esto es, la derivada del final de las  $t$  iteraciones sustituyendo el valor de las condiciones iniciales.

Si el sistema dinámico es bidimensional, apoyándonos en el concepto anterior, se podría definir el primer exponente de LIAPUNOV, como:

$$\Gamma_1(q_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |Df^t(q_0)|$$

el término  $|Df^t(q_0)|$ , es el determinante de la matriz jacobiana de  $f^t$ , para el punto  $q_0$ . Se verificará que:

$$e^{\Gamma_1(q_0)} e^{\Gamma_2(q_0)} = |Df(q_0)|$$

La igualdad anterior se hace extensiva si el sistema es n-dimensional.

Los exponentes de LIAPUNOV se ordenan de manera decreciente, de forma que  $\Gamma_1 \geq \dots \geq \Gamma_n$ . Si el atractor de un sistema disipativo es un punto fijo (atractor puntual), todos los exponentes, en general, serán negativos. Si se trata de un atractor de ciclo límite, el primer exponente será cero y todos los demás negativos. Si el atractor es un toroide, entonces los primeros serán cero y el resto negativos. Y si es un atractor extraño, entonces se combinarán, el positivo, con el cero y con el negativo. Lo expresado anteriormente para dimensión  $n = 3$ , quedaría: a) atractor puntual (-, -, -); b) atractor ciclo límite (0, -, -); c) atractor toroidal (0, 0, -) y d) atractor extraño (+, 0, -). En cualquier caso se producirá caos si  $\Gamma_1 > 0$ . Además, si observamos la igualdad que nos definen los exponentes de LIAPUNOV, podremos observar que para que el exponente sea positivo, es necesario que la diferencia del numerador sea positiva, lo que significa que al final de la  $t$  iteraciones, los estados finales son divergentes, habiendo partido de posiciones muy cercanas (condiciones iniciales).

#### 4. EL ANALISIS DESDE LA OPTICA DEL CAOS

El estudio del comportamiento del consumidor y el posterior reflejo que del mismo se manifiesta en las funciones de demanda, ha servido a los investigadores y a los analistas de las organizaciones para poder prever con mayor o menor acierto cuál va a ser la reacción de los propios compradores y con ello la variación que en las cantidades demandadas de producto y/o servicio se van a producir.

No obstante lo anterior, en ocasiones ocurre que a pesar de que la previsión efectuada pueda catalogarse desde el punto de vista estadístico, como de muy acertada, la realidad diverge de lo establecido a nivel teórico sin que haya, al menos de manera aparente, una explicación que justifique claramente esa diferencia entre lo estimado y la realidad. Evidentemente realizar previsiones de futuro en base a la sola tendencia del pasado puede resultar excesivamente simplista, sobretodo si el entorno no goza de una estabilidad suficiente en lo referente a la implicación y desarrollo de las diferentes variables o factores que lo conforman.

Cuando hacemos referencia a la idea de prever la demanda del futuro de una organización, estamos pensando, que la misma se debe obtener en base a una combinación de diferentes métodos, cualitativos y cuantitativos, que en su conjunto y aprovechando la sinergia de los mismos, logren el objetivo pretendido lo más ajustadamente posible. Si consideramos las tendencias al consumo de las personas integrantes del segmento de mercado estudiado, la evolución de la población, los estilos de vida y su variación, etc. y a ello añadimos la evolución histórica de la demanda en un entorno suficientemente estable, estaremos en condiciones de expresar que el ajuste obtenido reflejará la realidad futura de manera suficientemente acertada. Sin embargo, insistimos que esto último en ocasiones no se manifiesta. Desde un punto de vista que podemos calificar de clásico, podríamos argumentar, para justificar el desacuerdo, que el ajuste estadístico no es bondadoso hacia el futuro, porque el entorno no es estable; que otras variables o factores, comerciales y/o no comerciales, que influyen en el comportamiento del consumidor han modificado el mismo respecto a lo esperado, o que la propia reinterpretación de los mensajes que el consumidor recibe, conlleva una reacción de éste, no esperada. En cualquier caso la respuesta final del consumidor será diferente de la prevista.

Hemos calificado en el párrafo anterior como clásicos, ciertos argumentos que habitualmente se emplean cuando lo estimado no coincide con la realidad futura. Son clásicos pero a su vez son actuales y por ello sirven perfectamente en el momento presente. La cuestión es, si la investigación que se realiza para establecer qué es, o qué variables han influido en los consumidores, para que su respuesta sea diferente de la prevista, utiliza todas las hipótesis de trabajo posibles. Si sólo se utilizan hipótesis de corte tradicional o no se contemplan otras poco usadas o manejadas. Y además si dado un modelo de ajuste previsional de la demanda futura, existe algún mecanismo que pueda indicar la posibilidad de que esa demanda prevista, no sea tal.

El proceso por el que un consumidor toma una decisión de comprar o de no hacerlo, es muy complejo y difícilmente controlable. Al actuar tan diferentes variables o factores, muchos de ellos desconocidos, el resultado final puede diferir ampliamente de lo planteado. Por ello en este artículo no hemos entrado a analizar el proceso que determina el comportamiento final del consumidor. Lo que planteamos es que, con independencia de cuáles sean los factores que influyen en el comportamiento, que estén ordenados esos factores en la mente del consumidor y qué grado de influencia ejerzan sobre él mismo, al final el consumidor dará una respuesta, que se traducirá en consumir o en no hacerlo y que ello se verá reflejado en una determinada función de demanda.

Es a partir del ajuste de la función de demanda cuando aplicamos nuestra investigación. Entendiendo, que al expresar la palabra ajuste no nos referimos a una acción estrictamente estadística en base a una trayectoria histórica. El ajuste estadístico no es desdeñable, pero sí insuficiente y por ello debe ser completado con análisis sobre tendencias, ventajas buscadas por los consumidores, etc. ésto es, factores de tipo cualitativo que pueden servir para confirmar que el ajuste estadístico de tipo cuantitativo es bueno o para perfeccionar el ajuste obtenido.

Si la función de demanda obtenida refleja lo más acertadamente posible cómo es el comportamiento de los consumidores en el segmento de mercado estudiado, entonces podremos analizar esa función desde la perspectiva de encontrar oscilaciones o mejor aún posibles oscilaciones de la función ante las probables variaciones de sus elementos configuradores, ésto es, las variables y los parámetros que la definan.

Decimos lo anterior, porque realizar un casi perfecto ajuste no significa que el investigador tenga absolutamente claro qué es lo que va a ocurrir en relación al comportamiento futuro de la función. Y ello aún en el caso de que el entorno sea muy estable y que los demás factores que influyen en el comportamiento de los consumidores no induzcan de manera clara a la inestabilidad.

Es sobradamente conocido que la demanda de un producto y/o servicio que se manifiesta en un momento cualquiera del tiempo es una función o depende de factores del entorno, normalmente incontrolables, así como de variables a largo y a corto plazo, que se pueden suponer más controlables. Si precisamos en mayor medida esto anterior, podemos indicar que estableciendo un orden que vaya de mayor a menor control de las variables y factores que influyen o explican la demanda; en primer lugar tendríamos las variables a corto plazo o de tipo táctico, como son el precio y la comunicación; en segundo lugar las estratégicas, producto y distribución y después el resto de factores y variables, de control prácticamente inexistente o nulo.

Cuando se obtiene una función de demanda, quedan reflejadas de forma clara aquellas variables que son más fácilmente controlables por la organización, ésto es, las denominadas tácticas, cuyo nivel de gasto en términos monetarios se denomina esfuerzo de marke-

ting. La influencia del resto de las variables y/o factores, pero fundamentalmente los no controlables se manifiestan en esa función a través del nivel alcanzado por los diferentes parámetros que conforman la misma. Por ello, una organización podrá influir en el valor de la función de manera muy parcial.

En este trabajo hemos considerado la función de demanda, en un determinado momento del tiempo, definida como:

$$D = f(\text{Factores del entorno, v. estratégicas, v. tácticas})$$

La influencia de los factores del entorno y de las variables estratégicas, se refleja en la estructura de los parámetros que acompañan a la función, y en cada momento del tiempo en el valor que pueden llegar a alcanzar. Y la aportación, al menos en términos cuantitativos, de las variables tácticas queda establecido en el denominado esfuerzo de marketing.

En base a lo anterior, hemos establecido una **hipótesis de trabajo** que podemos expresar de la siguiente manera:

— **A corto plazo y en entornos considerados como estables, una función dinámica de demanda puede presentar tendencias no previstas e inestables, para según qué valores adopten los parámetros que la definen, y que en su caso, pueden ser consideradas y analizadas, esas inestabilidades, desde una perspectiva de caos limitado o total.**

Esta hipótesis supone la consideración de que no todas las funciones de demanda dinámica medidas a corto plazo y en entornos estables tienen que presentar soluciones no periódicas. Ello supone que no todas las funciones presentarán síntomas de trayectoria hacia el caos. Entendemos que, según cada caso, las funciones estudiadas podrán presentar en algunos momentos soluciones periódicas y no periódicas, con lo que nos encontraríamos ante un caos limitado. Por otra parte, existe la posibilidad teórica de que en todo instante del tiempo de vida de la función, toda solución sea no periódica; en este último caso estaríamos ante la presencia del denominado caos total.

El método de trabajo que emplearemos es la de realizar simulaciones sobre evoluciones temporales de **algunos** de los ajustes más significativos y reconocidos en el entorno de la docencia e investigación del área de conocimiento de Comercialización e Investigación de Mercados. En concreto hacemos referencia a las probables evoluciones de tipo cóncavo y en forma de ese.

El enfoque teórico del estudio de las soluciones periódicas y no periódicas de las funciones dinámicas de demanda se puede realizar de dos maneras diferentes. Considerando aplicaciones unidimensionales, que en este caso en concreto, supone hacer el análisis tomando como única variable independiente el esfuerzo de marketing de la organización en

su conjunto. O bien se puede descomponer ese esfuerzo de marketing en más de una, de las variables que lo conforman y establecer qué variables, teóricamente, pueden producir mayor estabilidad o, en su caso, mayor tendencia a la inestabilidad. Dependerá de lo que el investigador o el decisor piensen para tomar una u otra opción. Desde el punto de vista del análisis y de las herramientas matemáticas utilizables, en ambos casos son prácticamente las mismas. Puntos, superficies y espacios atractivos, repulsivos, superatractivos; estudio de las duplicaciones de períodos a través de los diagramas de FEIGENBAUM en variables unidimensionales y la utilización de los exponentes de LIAPUNOV para cualquier dimensión.

Entendemos, por otra parte, que la reacción que induce a la evolución de las funciones dinámicas de demanda se efectúa en momentos discretos, de ahí que empleemos constantemente el término **aplicación** y no el de **flujo**, que se correspondería con una perspectiva de movimiento continuo. No obstante es importante hacerlo con ecuaciones en diferencias, se podría haber llegado a la misma solución, ya que a partir de cualquier flujo y observando el mismo en determinados momentos del tiempo se puede encontrar una aplicación.

El plantear el tiempo discreto y no el continuo, obedece a que aunque la función de demanda dinámica evoluciona en el tiempo de forma continua, sin embargo cada paso que avanza, lo hace por la influencia de variables que se producen en forma no continua sino discreta. Por ejemplo, si se decide que el presupuesto de esfuerzo de marketing va a consistir en realizar diez campañas publicitarias, en reducir el precio del producto en un porcentaje y varias veces a lo largo de un determinado período de tiempo, etc.; esas acciones no se realizan de manera continua sino discreta y a cada acción de marketing que se efectúa, aunque sea de forma retardada, la respuesta del mercado se producirá también de manera discreta. Ante cada acción de marketing el mercado responde, con una reacción y así sucesivamente. En cualquier caso si se adopta la idea de movimiento continuo, tan sólo y una vez obtenida la función a estudiar, habría que determinar para un momento o para **n** momentos de tiempo de ese flujo continuo, como es la respuesta del mercado. Habríamos convertido el enfoque continuo en discreto.

## 5. RESULTADOS DEL ANALISIS

Para investigar el comportamiento de cualquier función dinámica de demanda, es necesario, o bien observar la evolución real de la misma a lo largo de sucesivos períodos de tiempo, o bien, a nivel teórico, realizar una simulación que manifieste qué es o qué comportamiento se podría producir en la función estudiada en base a sucesivas iteraciones, de tipo evolutivo, sobre la misma. Esto anterior llevaría a conocer la estructura de la función y su representación gráfica. Y esta última tendría una morfología diferente según el valor de los parámetros y de las variables independientes que la conforman.

La idea utilizada para contrastar la hipótesis que hemos definido, ha sido la de some-

ter diferentes funciones a una simulación temporal (2) en la que se pusiera de manifiesto cuáles de ellas presentaban indicios claros de acercamiento a una situación de caos, en su versión limitado o total; utilizando para ello el diagrama de FEIGENBAUM de duplicación de períodos. A aquellas funciones que han demostrado claramente el camino hacia el caos, se les ha sometido posteriormente a un estudio en el que se pusiera de manifiesto su sensibilidad a las condiciones iniciales y con ello a la divergencia que los valores de las funciones presentan en su proceso de evolución. El uso de los exponentes de LIAPUNOV, en el estudio de la divergencia de cada función, ha indicado claramente como, para según qué valores de los parámetros que conforman la estructura de las funciones de demanda, se presenta divergencia, o no, según el caso, de las tendencias de la función tratada en cada momento.

En general podemos indicar que en el estudio hemos encontrado funciones que representan soluciones no periódicas para determinados valores de los parámetros y periódicas para otros. Esto significa que al no surgir una continuidad en la no periodicidad estamos ante lo que hemos definido como caos limitado, éste es se da caos para determinadas circunstancias, momentos y situaciones, pero no en su totalidad. Si se hubieran encontrado para cualquier valor de los parámetros soluciones no periódicas, entonces estaríamos ante la manifestación de caos total.

### 5.1. Funciones unidimensionales

La siguiente expresión representa una función de tipo logístico, cuya estructura se corresponde con  $q_{t+1} = a q_t (1 - q_t)$ . La función es de tipo cóncavo, lo que indica que se incrementa el esfuerzo de marketing hasta un determinado límite, para a continuación proceder al decrecimiento del mismo. Situación habitual en muchas de las opciones que se manifiestan en la política de muchas organizaciones.

Esta función, como no podía ser de otra forma, presenta comportamiento caótico. Y decimos que no podía ser de otra forma, debido a que las familias de funciones del tipo logístico, son el paradigma de la manifestación de caos. El propio FEIGENBAUM trabajó con este tipo de funciones para encontrar su constante del caos.

Si observamos (en la figura 1a) el diagrama de FEIGENBAUM, presenta ciclos de período dos, a partir de los cuales se manifiesta una nube de puntos que representan un cierto desorden identificado con la inestabilidad y caos. Los exponentes de LIAPUNOV (figura 2a) confirman lo que se expone en el diagrama, ya que a partir de determinado valor del parámetro comprendido en el intervalo (3.5, 3.6) se manifiesta una divergencia positiva. Los exponentes de LIAPUNOV son positivos.

(2) En este artículo tan sólo expondremos los resultados obtenidos en algunas de ellas. La investigación ha sido más extensa, tratándose muchas otras funciones.

Figura 1a

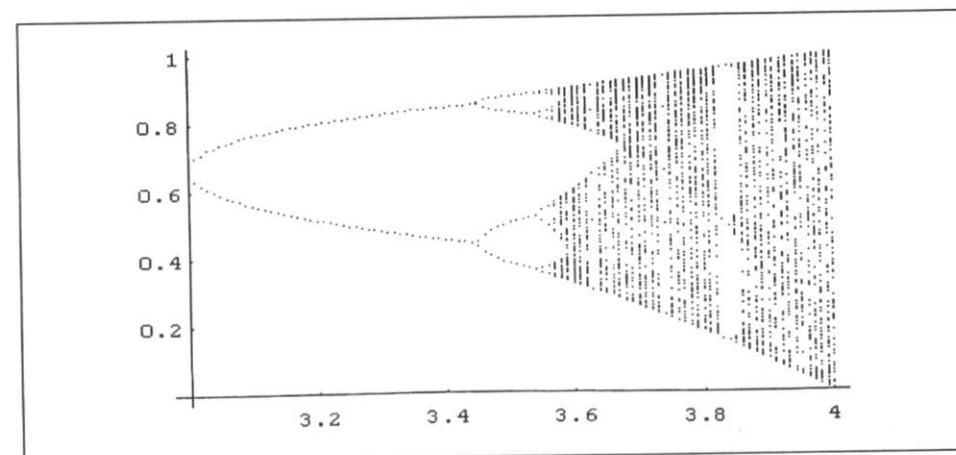
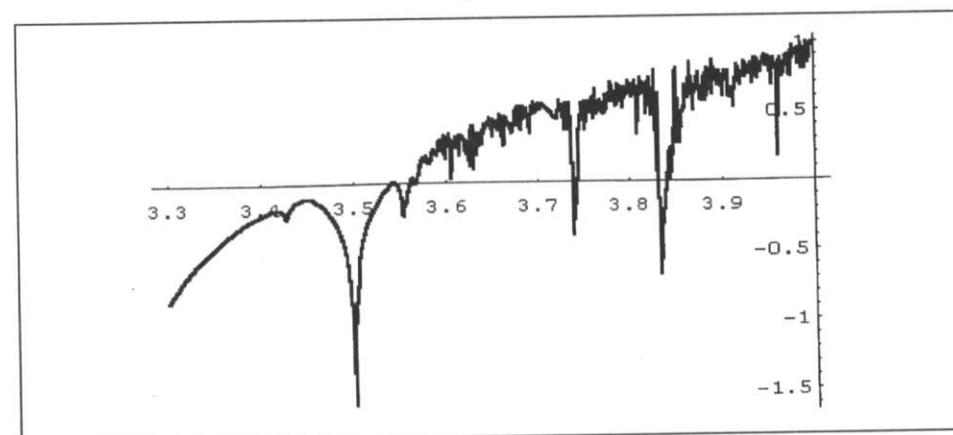


Figura 2a

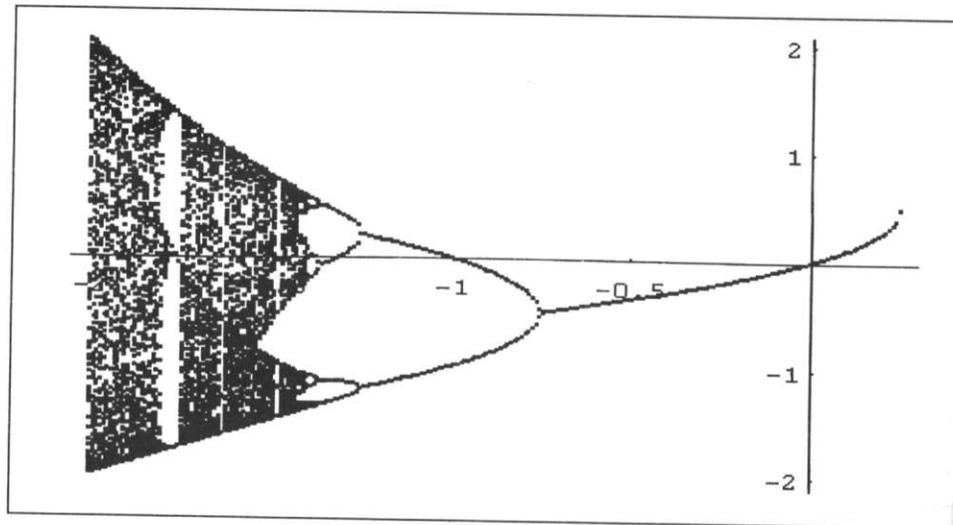


Es necesario llamar la atención en el sentido, se manifestará en otras ocasiones, de que al aumentar el valor del parámetro, existen tres momentos, alrededor de los valores 3.75; 3.83 y 3.85 del parámetro, en los que los exponentes se tornan negativos. Existe convergencia o no manifestación de caos. Lo que de alguna manera confirma el cómo la variación en los parámetros refleja situaciones estables e inestables de la respuesta del mercado.

La siguiente función  $q_{t+1} = q_t^b + a$ , es de tipo potencial. En ella se ha dispuesto diferentes valores del parámetro  $b$ , que condicionan su propia morfología. En relación al parámetro  $a$ , se le han dado distintos valores para cada uno de los valores de  $b$  que hemos tratado.

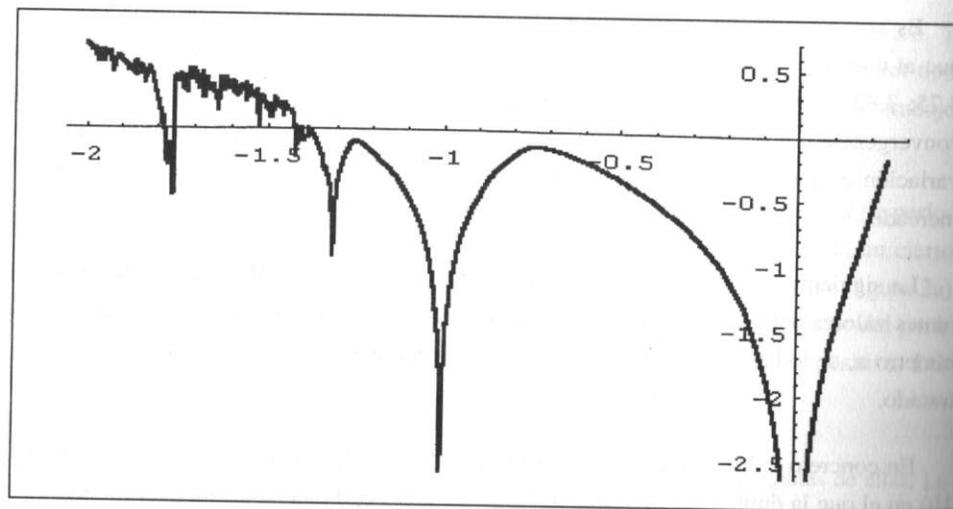
En concreto si  $b=2$  entonces, la función presenta un diagrama de FEIGENBAUM (figura 1b) en el que la duplicidad de ciclos hace que se entre en la nube desordenada y densa de

Figura 1b



puntos. Se confirma la entrada en el caos, al observar los valores de los exponentes de LIAPUNOV (figura 2b). En concreto a partir del valor parametral de -1.42, se manifiesta divergencia positiva en la función, con algunas entradas en la convergencia para otros valores del parámetro.

Figura 2b



5.2. Funciones multidimensionales

En este artículo vamos a tratar un modelo multidimensional, en concreto bidimensional. Se trata del modelo econométrico de KOYCK (3), que relaciona la demanda de un bien en un determinado momento del tiempo con el presupuesto publicitario, tomado en el mismo momento del tiempo, y la demanda del mismo bien en un período anterior.

La expresión simplificada del modelo es:

$$q_t = a' + \Gamma q_{t-1} + b A_t + E$$

siendo  $q_t$  la demanda en el momento  $t$ .

$$a' = (1 - \Gamma) a.$$

$a, b, \Gamma$  parámetros a estimar.

$q_{t-1}$  la demanda en el momento anterior del tiempo.

$A_t$  el presupuesto publicitario en el período de tiempo tratado.

$E$  es el error y se define como una diferencia de errores de los períodos de tiempo consecutivos ( $e_t - \Gamma e_{t-1}$ ).

Si el ajuste es bueno, el error se puede considerar despreciable.

Al tratarse de modelos dinámicos, los mismos representan la evolución que la variable o variables tratadas manifiestan a través del tiempo. En este sentido la expresión anterior es clara, la demanda depende de dos variables. Pero es necesario hacer notar, que el presupuesto publicitario, también debe de depender en alguna medida de su propia proyección pasada; o lo que es lo mismo  $A_t$  debe ser función de  $A_{t-1}$ , en cualquier caso y ello sin perjuicio de otras posibles dependencias. Luego la expresión anterior puede quedar:

$$q_t = a' + \Gamma q_{t-1} + b g(A_{t-1}) + E$$

$$A_t = g(A_{t-1})$$

El presupuesto publicitario del período  $t$  va en relación o es función del presupuesto publicitario del período anterior, y así sucesivamente.

La función anterior puede tener estructuras diferentes, en cada caso debe presentar la que mejor se ajuste a la realidad de la inversión publicitaria.

Representando un simbolismo matemático, lo que estamos expresando es lo siguiente:

$$(q_t, A_t) = f(q_{t-1}, A_{t-1})$$

(3) Utilizaremos esta expresión aún siendo conscientes de que es muy limitada al representar la realidad. No obstante la misma sirve, dado que el objetivo de este artículo es mostrar la utilización de la teoría caótica en funciones dinámicas de demanda.

El presupuesto publicitario lo hemos definido como la función siguiente. Pudiendo ser cualquier otra función, según el caso real que se esté tratando:

$$A_t = d A_{t-1} (1 - A_{t-1})$$

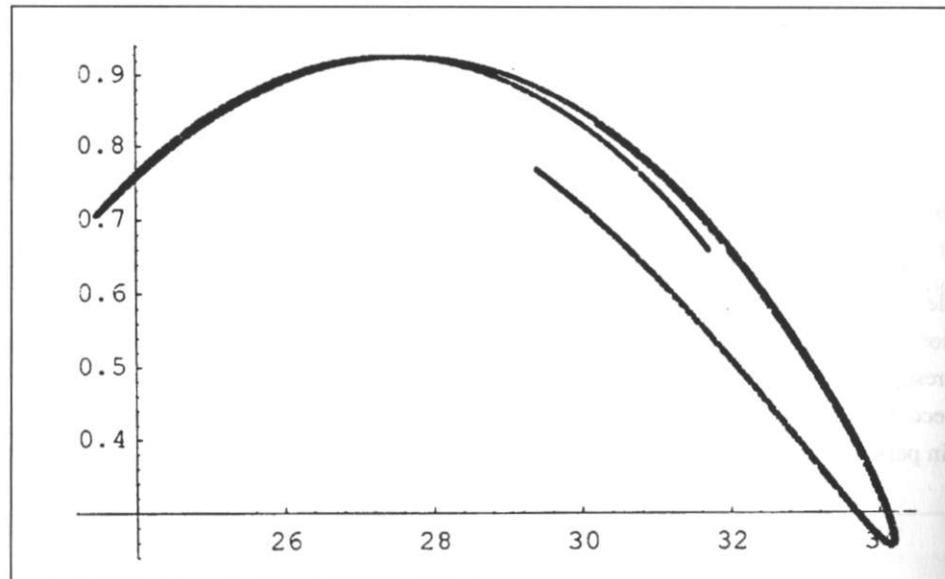
$d$  es un parámetro de ajuste a estimar

A partir de la expresión de KOYCK, hemos otorgado valores a los parámetros; iterando la función para simular una evolución temporal, obteniendo los resultados que indicamos a continuación.

La figura 1c muestra la función para  $a = 15$ ,  $b = 18$ ,  $\Gamma = 0.2$  y  $d = 3.7$ . Los exponentes de LIAPUNOV para esta función son:

(0.349071, -1.60944)

Figura 1c



estos exponentes muestran que existe caos limitado. Uno de ellos, el positivo muestra la existencia de divergencia, mientras el otro expresa convergencia.

El resto de las figuras muestran la misma relación de KOYCK, habiendo introducido la variación consistente en modificar el parámetro  $d$  correspondiente al ajuste de la función de presupuesto publicitario.

En concreto, los valores del parámetro para cada relación funcional, han sido: 3.65 para la función representada en la figura 2c; 3.8 para la función de la figura 3c; 3.9 para la de la figura 4c y 3.95 para la representación expuesta en la figura 5c.

Figura 2c

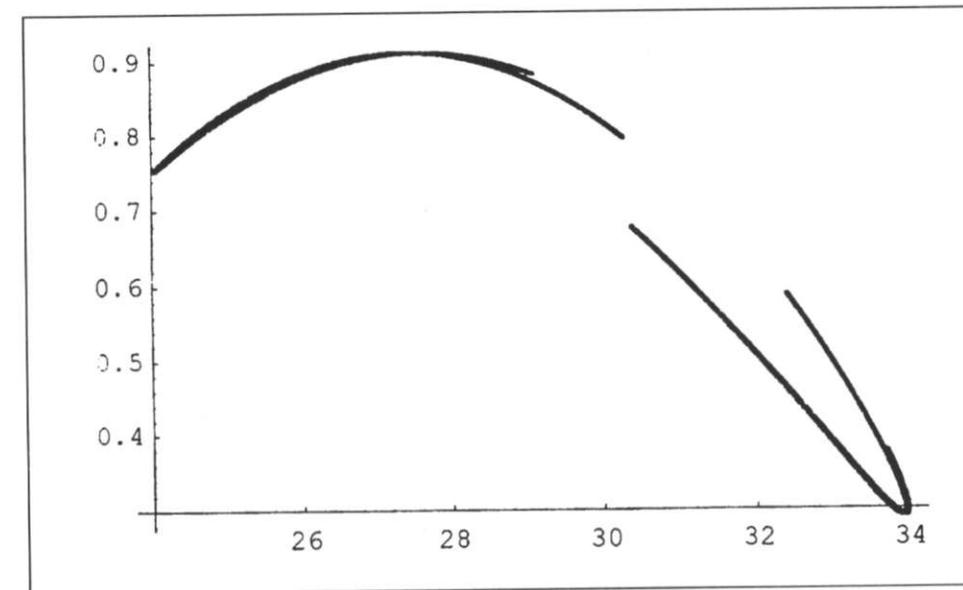
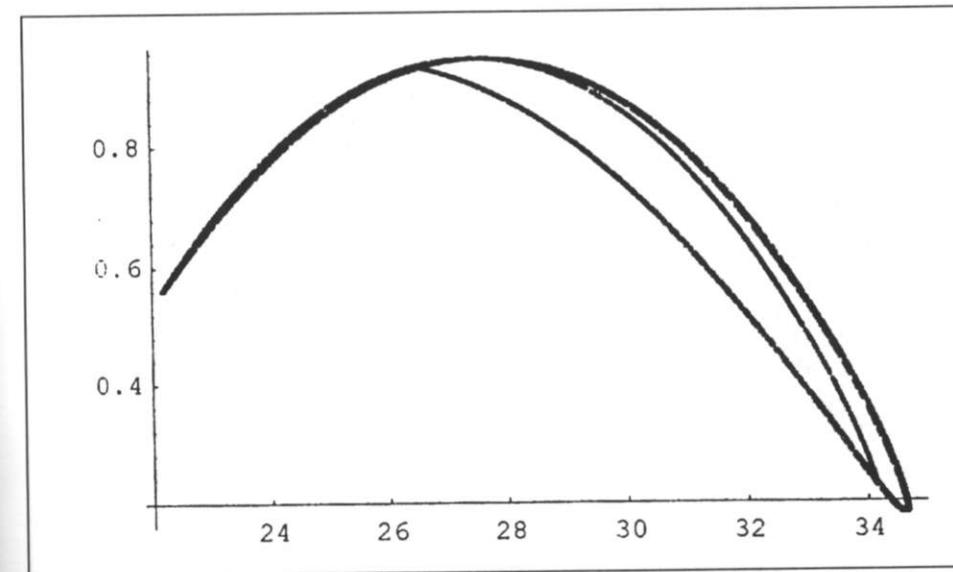


Figura 3c



Los exponentes de LIAPUNOV, ordenados de igual forma que las figuras, han sido respectivamente de:

(0.253372, -1.60944); (0.4334, -1.60944); (0.497338, -1.60944)

y por último (0.580288, -1.60944).

Al analizar esta función bidimensional, lo que hemos estado variando ha sido el pará-

Figura 4c

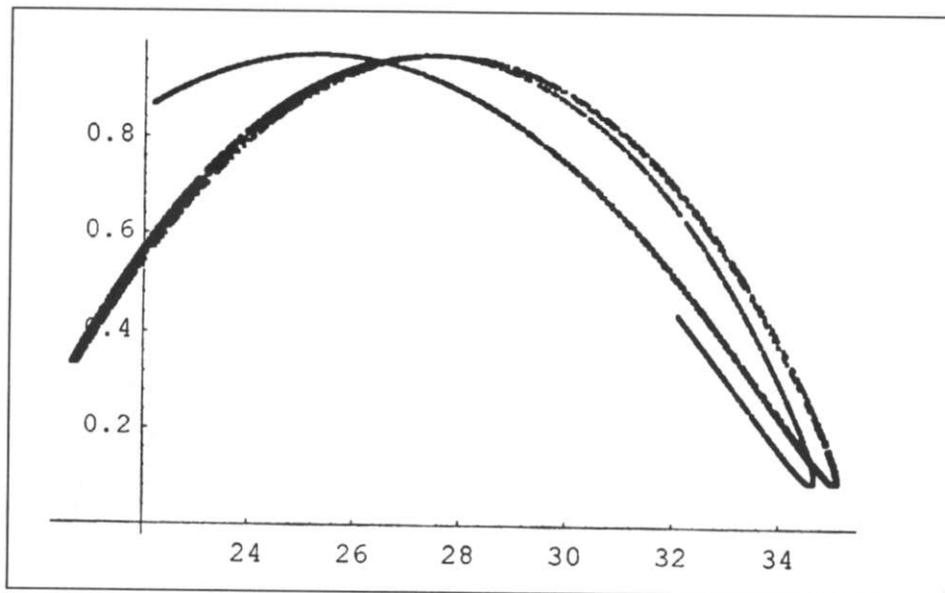
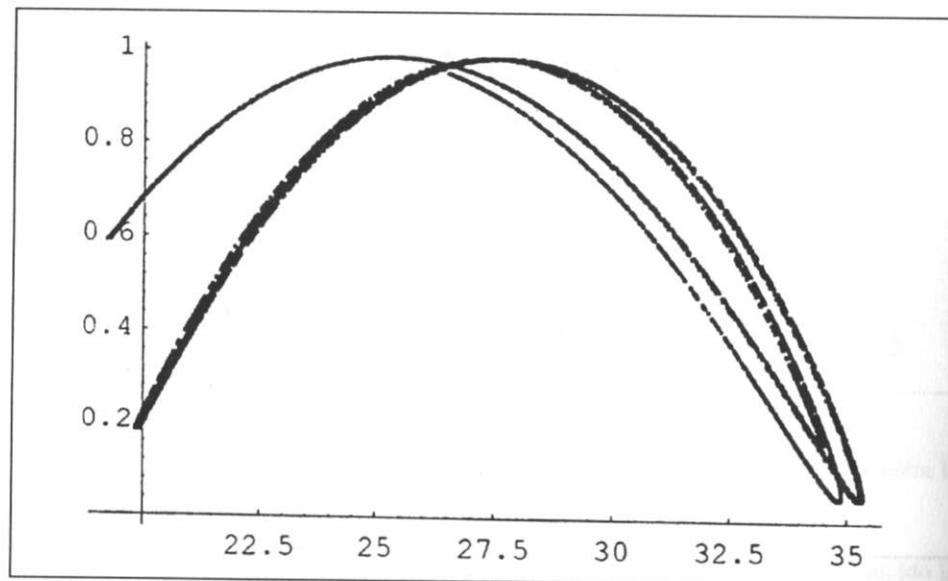


Figura 5c



metro que define la relación de cambio del presupuesto publicitario. Dado que esa decisión de variación en el presupuesto publicitario viene dada por los responsables de la organización, el parámetro de ajuste, es consecuencia, no ya del comportamiento del mercado sino del comportamiento de los decisores de la organización. Con ello indicamos que las consecuencias de las variaciones inestables de la función dinámica de demanda, no so-

lamente van a depender del propio mercado, sino también de las acciones de los propios decisores de la organización que se trate.

## 6. CONCLUSIONES

La importancia de encontrar funciones que responden a la idea de caos limitado y de otras que no se acercan a esa posibilidad, es elevada. Decimos esto porque ello representa el hecho de que si una organización tras el ajuste cuantitativo y cualitativo de sus funciones de demanda observa:

- Las funciones ajustadas no responden con soluciones no periódicas, esto es, no presentan el más mínimo indicio de caos, entonces esa organización, está en condiciones de afirmar que el mercado, segmento o segmentos del mismo, a los que dirige su oferta, son muy estables, no ya desde el punto de vista del entorno, sino desde la propia respuesta de los consumidores. Prácticamente estaríamos ante una aproximación a lo que entendemos por un mercado cautivo, o al menos de gran fidelidad a la marca, marcas que esa organización comercializa o incluso a la propia organización.
- Las funciones ajustadas responden con soluciones no periódicas para unos valores de los parámetros, y para otros valores, reflejan soluciones periódicas. Ello significaría que la organización se mueve en el campo de caos limitado, lo que a su vez significa que en determinadas circunstancias se puede esperar que la respuesta de la demanda tenga posibilidades de no ser controlada. Expresado de otra manera, podríamos decir que no existe aproximación a la certeza de que las previsiones que se realicen sobre la demanda futura, respondan a la realidad del mercado.

Ante esta situación y conociendo para qué valores de los parámetros de ajuste, se encuentran las soluciones no periódicas, la organización, a través fundamentalmente de las variables que controla, representadas en el esfuerzo de marketing, debe realizar acciones que impidan, en la medida de lo posible, que el ajuste de su función a la respuesta real del mercado, se acerque a aquellos valores de los parámetros que pueden representar inestabilidad. Con intención de dar la mayor claridad posible a esta idea que venimos desarrollando, podemos expresar, utilizando la figura de la comparación, que conociendo los valores de los parámetros que teóricamente representan el caos, es como si la organización conociera, al menos teóricamente, de forma previa, a qué situación no se debe acercar, e intentará por todos los medios evitar que ello se produjera. Ello en términos normales y ante un mercado y un entorno relativamente estables. Si el entorno es inestable de por sí y al mercado le ocurre lo mismo, este tipo de análisis se haría innecesario, ya que siempre se estaría en la consideración de que la respuesta del mercado va a ser permanente e inestable.

- c) Las funciones ajustadas responden a soluciones no periódicas para cualquier valor de los parámetros. Estamos ante la inestabilidad total de la respuesta del mercado, ante el denominado caos total.

La cuestión, es que con independencia de la dimensión espacial del modelo, los parámetros de ajuste deben quedar definidos en toda relación funcional, de tal manera que se sepa de forma adecuada, qué parámetros reflejan: a) la relación estricta de intercambio en el mercado, b) la influencia del macroentorno y el microentorno, c) las acciones de los decisores de las organizaciones.

Lo expresado en el párrafo anterior podemos indicar que constituye lo que se denominaría una condición necesaria, aunque no suficiente para poder analizar, con relativo éxito, funciones dinámicas de demanda desde una perspectiva de teoría del caos.