



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO DE FIN DE GRADO:
**DINÁMICA GLOBAL DE SISTEMAS
MUTUALISTAS**

Irene Marín Gayte

Dirigido por:
José Antonio Langa Rosado
Antonio Suárez Fernández

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que, directa o indirectamente, han contribuido y seguirán contribuyendo en mi formación tanto académica como personal. En especial, dar las gracias a toda mi familia, en concreto, a mis padres, Inma y Manolo, que desde pequeña me han enseñado y transmitido el valor de la vida y de la familia, también, agradecer a mi hermana Inma, que desde su debilidad ha sido mi GRAN maestra y me ha enseñado la fuerza transformadora de lo pequeño y aparentemente inútil para la sociedad.

Por último agradecer a todos mis profesores, en particular a Antonio Ruiz, el profesor que me transmitió el amor por las Matemáticas; también agradecer a mis directores José Antonio Langa y Antonio Suárez por haberme aguantado todo el año y haberme abierto este nuevo campo de estudio. Por todo ello y a todos, ¡Muchísimas gracias!

Abstract

This work is framed within the field of Dynamical Systems and we aim to continue the study of the stability of dynamical systems that we already started on the subjects of “AED” and “MOM”.

In this text we investigate the existence of a Lyapunov function associated to a gradient-like system, semigroups or evolution processes. Because of that, a detailed study of Morse theory plays a central role.

The applicability of the results explained here is exemplified by studying the attractor of a three dimensional mutualistic model of two plants in competition and a pollinator with cooperative relation with plants. Also we compare the dynamical properties of the system in the absence of the pollinator. We observe how cooperation is a common fact to increase biodiversity. We also give mathematical evidence on how a cooperative species induces an increased biodiversity, even if the cooperative specie is driven to extinction. Due to this fact, we propose a change in the formulation model wich could explain this kind of phenomenon.

Índice general

Introducción	IX
I Descomposición de Morse para sistemas gradiente autónomos en dimensión infinita	1
1. Atractores Globales	3
1.1. Primeras definiciones	3
1.2. Conjuntos ω -límites	10
1.3. Existencia de atractores	18
2. Semigrupos Gradiente	21
2.1. Función de Lyapunov	21
2.2. Estructura de los semigrupos gradiente	24
2.3. Existencia de atractores para semigrupos gradiente	27
3. Teoría de Morse-Conley	29
3.1. Semigrupos de Tipo Gradiente	29
3.1.1. Definición	29
3.1.2. Estabilidad bajo perturbación	30
3.2. Parejas atractores-repulsores	33
3.3. Función de Lyapunov para un par atractor-repulsor	40
3.4. Descomposición de Morse	45
3.5. Equivalencia entre semigrupos gradiente y de tipo gradiente	53
4. Niveles de energía	57
4.1. Definición	57
4.2. Estructura de los niveles de energía	58
II Estudio de sistemas Lotka-Volterra	65
5. Sistema Lotka-Volterra con dos especies	67
5.1. Función de Kamke	67
5.2. Existencia y unicidad de solución	71

5.3. Puntos de equilibrio y estabilidad	74
6. Sistemas Lotka-Volterra con tres especies	83
6.1. Existencia y unicidad	83
6.2. Puntos de equilibrio y estabilidad	86
6.3. Estudio de los Fenómenos 1 y 2	97
6.4. Descomposición de Morse del atractor del sistema mutualista	109
Conclusiones	115
Anexo: Ecuación Logística	117
Bibliografía	119

Introducción

El análisis de las propiedades cualitativas de los semigrupos en los espacios de fases generales (espacios de Banach infinito dimensionales o espacios métricos arbitrarios) ha recibido mucha atención en la últimas cuatro décadas. En particular, el estudio de los conjuntos compactos invariantes y atrayentes ha desarrollado una amplia y profunda área de investigación, dando informaciones cruciales de un número creciente de fenómenos de las distintas ramas de la Ciencia como Física, Biología, Economía, Ingeniería y otros.

Cuando se muestra que un sistema dinámico dado posee atractor global, todo su comportamiento asintótico puede ser descrito por un análisis detallado de la dinámica interna de este conjunto invariante. Para este objetivo, un estudio cuidadoso de la estructura geométrica del atractor global aparece como un hecho fundamental. Probablemente, el resultado más general en esta línea es lo que se conoce como el “*Teorema Fundamental de los Sistemas Dinámicos*”, sugerido en [19] a partir de los resultados de [10], y que describe cualquier flujo en un espacio métrico compacto descomponiéndolo en partes invariantes aisladas recurrentes por cadena y las conexiones entre ellas. En la terminología de [10], es lo que se llama una Descomposición de Morse de un conjunto compacto invariante (véase la Definición 3.4.1), y ha sido considerado en diferentes marcos, como el caso de los flujos en [10], y también de los semiflujos en espacios compactos como en [22], o incluso en espacios topológicos no compactos como en [17, 20, 21]

Por otro lado, muy recientemente se han introducido en [8] los denominados semigrupos de tipo gradiente (véase la Definición 3.1.1) como un concepto intermedio entre los semigrupos gradiente (aquellos que poseen función de Lyapunov) y los semigrupos que poseen un atractor tipo gradiente, es decir, aquellos que poseen un atractor escrito como la unión de los conjuntos inestables de sus conjuntos invariantes aislados.

Este trabajo está estructurado en dos grandes partes. En la primera parte, vamos a trabajar con un semigrupo de tipo gradiente en un espacio métrico arbitrario y construiremos una función de Lyapunov para él. Mostraremos así el resultado principal de este trabajo, que es que todo sistema de tipo gradiente es efectivamente un sistema gradiente; es decir, mostrando un relación de equivalencia entre poseer una función de Lyapunov y un sistema de tipo gradiente. Nuestros resultados evitan cualquier hipótesis de compacidad asociada al espacio de fases sobre el que actúan los semigrupos que consideremos. Por otra parte, nuestras demostraciones, aunque están inspiradas en trabajos clásicos como [10, 22], son diferentes de las allí incluidas y siguen la línea novedosa introducida en [1].

Para la construcción de la función de Lyapunov, primeramente, vamos a demostrar que la familia disjunta de los conjuntos invariantes aislados de un semigrupo de tipo gradiente

en un espacio métrico general puede ser reordenada de tal manera que da lugar a una Descomposición de Morse del atractor. Además, las demostraciones son intuitivas, centradas en la dinámica del semigrupo. Un refinamiento de los resultados de [10] nos va a llevar a una definición de función de Lyapunov generalizada, no simplemente definida en el atractor, sino en todo el espacio de fases, y también asociada a una familia de conjuntos invariantes aislados arbitraria.

Hemos ordenado el texto con el objetivo de mostrar, paso a paso, las técnicas que suelen ser usadas en el estudio de los semigrupos no lineales, y también introducir, sin prisas, las herramientas necesarias para el entendimiento del resultado de equivalencia entre los conceptos de semigrupos gradiente y tipo gradiente.

En una segunda parte del trabajo, vamos a aplicar todo este estudio teórico a los modelos mutualistas en Ecología que intentan describir las relaciones de cooperación (o de ayuda mutua) entre las especies que conviven en un determinado ecosistema (véase [4–6]). Es conocido que estas relaciones de cooperación son fundamentales tanto para la riqueza de la biodiversidad como para la persistencia de las especies, que interactúan generando una red compleja de nodos y relaciones.

Un modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales para un sistema mutualista en Ecología ha sido el propuesto por Bastola et al. el cual hace referencia a numerosos ecosistemas reales en distintos lugares del mundo (véase [7]). Básicamente, el modelo es estudiado como la interacción mediante relaciones de ayuda mutua entre grupos de plantas y polinizadores (o aves que dispersan semillas). En particular, los autores analizan la conexión entre grupos de especies competitivas y los enlaces cooperativos entre plantas y polinizadores.

El modelo matemático supone que P es el número total de plantas y A es el número total de animales; las plantas y los animales, por sí solos, están en competición y además las plantas y los animales tienen relaciones de cooperación. Entonces, podemos escribir el siguiente sistema de $P + A$ ecuaciones diferenciales para S_{p_i} y S_{a_i} , variables de densidad de especies para las i -ésimas especies de plantas y animales, respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{dS_{p_i}}{dt} = \alpha_{p_i} S_{p_i} - \sum_{j=1}^P \beta_{p_{ij}} S_{p_i} S_{p_j} + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} S_{p_i} S_{a_k} \\ \frac{dS_{a_i}}{dt} = \alpha_{a_i} S_{a_i} - \sum_{j=1}^A \beta_{a_{ij}} S_{a_i} S_{a_j} + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} S_{a_i} S_{p_k} \\ S_{p_i}(0) = S_{p_i0} \\ S_{a_i}(0) = S_{a_i0} \end{cases} \quad (1)$$

para todo p_i con $1 \leq i \leq P$ y para todo a_i con $1 \leq i \leq A$.

Los números reales α_{p_i} y α_{a_i} representan la tasa de crecimiento intrínseco en ausencia de competición y cooperación para plantas y animales, respectivamente. La interacción competitiva entre las plantas la medimos mediante el parámetro $\beta_{p_{ij}} \geq 0$ y la interacción competitiva entre los animales la denotamos por $\beta_{a_{ij}} \geq 0$. Por último, la interacción mutualista entre plantas y animales, y viceversa, la medimos mediante los parámetros $\gamma_{p_{ij}} \geq 0$ y $\gamma_{a_{ij}} \geq 0$, respectivamente.

Para este modelo los autores en [7] estudiaron la arquitectura del sistema mutualista, es

decir, la topología de conexiones entre especies; lo que nosotros denominamos en este trabajo como la estructura geométrica del atractor global.

Muchos sistemas ecológicos se organizan mediante relaciones de cooperación entre los distintos nodos que conforman, en general, una red compleja. Los autores en [7] prueban que es precisamente esta topología de la red compleja la causante del enriquecimiento de la biodiversidad. Podemos observar que la red de conexiones forma un sistema complejo fuertemente anidado, con un número pequeño de especies muy conectadas (especies generalistas) y una gran cantidad de especies con bajo número de conexiones (véase Figura 1).

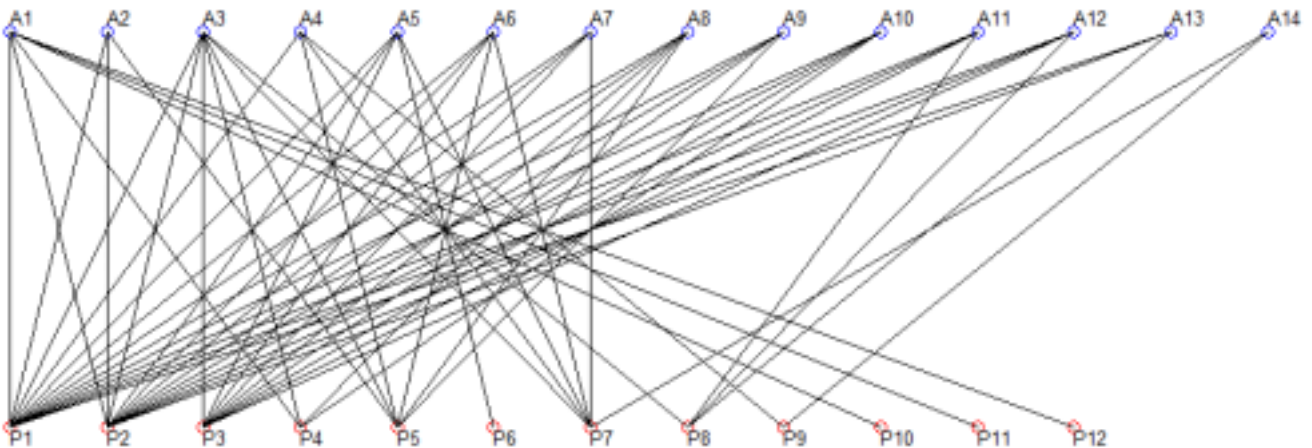


Figura 1: Red mutualista compleja: grafo bipartito, en el que cada parte (A- catorce nodos- y P- doce nodos-) está en competición entre los individuos de ese grupo. Las uniones representan la interacciones de cooperación entre los dos grupos.

En concreto, nos encontramos con los siguientes dos fenómenos:

- Fenómeno 1: La presencia de especies generalistas cooperativas contribuye al incremento de la biodiversidad (véase [7]).
- Fenómeno 2: Las especies que con su presencia inducen un incremento de la biodiversidad son más vulnerables a la extinción (véase [23]).

En esta segunda parte del trabajo pretendemos dar evidencias matemáticas de estos dos fenómenos. Para ello, vamos a estudiar un modelo mutualista descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales en tres dimensiones de dos plantas en competición y un polinizador en relación cooperativa con las plantas. Vamos a comparar las propiedades dinámicas del sistema en presencia o en ausencia del polinizador; y estudiaremos la estructura geométrica del atractor para el sistema tridimensional. Observamos cómo la cooperación es un hecho común para aumentar la biodiversidad en este modelo simplificado, que constituye un hecho general para los sistemas dinámicos en Ecología (véase [7]). Además, veremos cómo la existencia de una especie cooperativa puede incluir un aumento de la biodiversidad, aún cuando la especie camina a la extinción. Para ver este hecho vamos a proponer un cambio necesario en el modelo inicial propuesto en [7], que puede explicar este fenómeno.

En efecto, siguiendo los resultado de [14], nos centraremos en un caso muy simple, es decir, en un sistema mutualista de tres dimensiones donde encontraremos dos plantas (u_1, u_2) en competición, y un polinizador (u_3) con relaciones de cooperación con ellas:

$$\begin{cases} u'_1 = u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3), \\ u'_2 = u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3), \\ u'_3 = u_3(\alpha_3 - u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2), \\ (u_1(0), u_2(0), u_3(0)) = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \end{cases} \quad (2)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ y suponiendo positivo el dato inicial.

En ausencia del polinizador, u_3 , estamos ante un sistema competitivo de tipo Lotka-Volterra, en el cual todo el comportamiento dinámico está bien definido en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, se sabe menos del sistema tridimensional, debido principalmente a la falta de orden en el problema. Ciertamente sabemos, aunque éste no sea nuestro caso, que cuando u_1 y u_2 cooperan y u_3 compite con ambos, el sistema genera un flujo monótono (véase [24, 28]).

Desde un punto de vista dinámico y siguiendo [7], el Fenómeno 1 para (2) quiere decir que la presencia de la especie cooperativa u_3 provoca la coexistencia de las especies u_1, u_2 . Además, éstas pueden extinguirse en ausencia de u_3 . Nosotros estudiaremos una región detallada en los parámetros del punto para el Fenómeno 1, concluyendo la generalidad de dicho comportamiento.

El Fenómeno 2 es más sorprendente y no será observado con mucha generalidad. Buscaremos un incremento de la biodiversidad en presencia de u_3 , es decir, la coexistencia de u_1 y u_2 no se da si u_3 no está presente, pero u_3 va a la extinción. Veremos que este hecho es imposible, pues el comportamiento asintótico de (2) con $u_3 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ es el mismo que el asociado con el sistema competitivo para (u_1, u_2) con $u_3 = 0$, así que no incrementa la coexistencia de las especies.

Sin embargo, sabemos por [7, 25], que el vínculo cooperativo en una cadena reduce la competición, es decir, la intensidad de competición entre dos especies disminuye si ellas tienen en común un enlace cooperativo con otras especies. Este hecho es crucial, y conduce a una modificación no trivial del modelo general (1). Matemáticamente, encontramos una posible explicación para el Fenómeno 2 con respecto a nuestro modelo tridimensional, suponiendo que en el caso en el que $u_3 = 0$ la intensidad de competición aumenta, es decir, es $1 > \beta_0 > \beta$.

Así, nosotros estudiaremos y compararemos el comportamiento cualitativo del sistema (2) con el del sistema siguiente,

$$\begin{cases} u'_1 = u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta_0 u_2), \\ u'_2 = u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta_0 u_1), \\ (u_1(0), u_2(0)) = (u_1^0, u_2^0) \end{cases} \quad (3)$$

con $0 < \beta < \beta_0 < 1$.

Además, analizaremos las regiones posibles en las que el Fenómeno 2 se produce, y en consecuencia, concluiremos que el modelo general (1) tiene que ser modificado para que el Fenómeno 2 sea posible en el caso de redes complejas mutualistas como aparece en [7].

Ahora pasemos a exponer brevemente los contenidos de cada capítulo:

En el primer capítulo introduciremos las definiciones de los conceptos básicos de la Teoría de Atractores y estableceremos las primeras propiedades de los sistemas dinámicos autóno-

mos, así como las importantes propiedades de los conjuntos ω -límites en un sistema asintóticamente compacto, lo que va a ser crucial en el primer resultado sobre existencia de atractores que presentamos.

Los semigrupos gradiente serán definidos en el capítulo dos, pero de manera más general a como se encuentra, por ejemplo, en [16]. En otras palabras, aquí los consideramos asociados a una familia finita y disjunta de conjuntos invariantes aislados cualesquiera, no necesariamente a un conjunto finito de puntos de equilibrio. Para estos semigrupos estudiaremos en detalle la estructura del atractor, demostrando que éste se escribe como unión de los conjuntos inestables de los invariantes aislados, es decir, que su atractor es de tipo gradiente. Para finalizar el capítulo, establecemos un criterio de existencia de atractores para semigrupos gradiente, basado en el resultado más general contenido en el primer capítulo.

Una vez conocidos los principales resultados de los dos primeros capítulos, estamos ya en condiciones de exponer el concepto más novedoso de esta parte del trabajo que es el de semigrupo de tipo gradiente. Los semigrupos de tipo gradiente son una nueva clase de sistemas dinámicos que poseen la dinámica de un sistema gradiente. El objetivo de este tercer capítulo es exponer este nuevo concepto junto con un teorema de convergencia uniforme sobre compactos para llegar a demostrar la equivalencia entre los semigrupos gradiente y de tipo gradiente.

También expondremos las herramientas que serán definitivas para establecer nuestro resultado de equivalencia entre semigrupos gradiente y semigrupos de tipo gradiente. Vamos a definir la noción de Descomposición de Morse de un atractor en términos de las parejas atractor-repulsor. La importancia de estas parejas reside en el hecho de que se pueden construir para ellas una especie de “función de Lyapunov” con propiedades muy especiales, lo que será crucial para obtener la función de Lyapunov clásica para los semigrupos de tipo gradiente, demostrando el principal resultado de este trabajo.

Para terminar esta primera parte, que como vemos es la parte más extensa y teórica del trabajo, vamos a mostrar otra forma de obtener una Descomposición de Morse en términos de un concepto nuevo que vamos a llamar “nivel de energía” y que proporciona información adicional sobre el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema, “empaquetando” aquellos puntos de equilibrio que poseen características dinámicas semejantes.

La segunda parte del trabajo comienza con el capítulo cinco, en el que estudiamos el comportamiento dinámico del sistema Lotka-Volterra con dos especies. En este capítulo pretendemos establecer las condiciones en los parámetros que nos den la estabilidad de los distintos puntos de equilibrio. Para todo este estudio haremos referencia al Anexo, en el que estudiamos la solución y estabilidad de la ecuación logística. También en este capítulo vamos a exponer brevemente la definición y principales propiedades de la función de Kamke, pues esta función nos va a ayudar a la hora de demostrar la existencia y estabilidad de la solución.

Para finalizar el desarrollo de esta segunda parte estudiaremos, en el capítulo seis, la existencia, unicidad y estabilidad de la solución del sistema (2). Tras este estudio, pasaremos a analizar los dos fenómenos ya mencionados anteriormente, y para esto, nos hará falta el análisis que hicimos en el capítulo anterior. Terminaremos construyendo el atractor tipo gradiente para el sistema (2) y probando, que dicho sistema es gradiente y, por tanto, que posee una función de Lyapunov. De hecho sabemos explícitamente cuál es dicha función pues en el capítulo tres la construimos para demostrar el teorema de equivalencia entre ambos

semigrupos.

Para terminar el trabajo, expondremos las conclusiones a las que hemos llegado con nuestro estudio y también apuntaremos ciertos problemas que no hemos abordado y quedan abiertos para trabajos futuros.

Parte I

Descomposición de Morse para sistemas gradiente autónomos en dimensión infinita

Capítulo 1

Atractores Globales

En este primer capítulo vamos a presentar los conceptos básicos y desarrollaremos los primeros resultados de la teoría de los sistemas dinámicos autónomos.

Nosotros denotaremos con el símbolo \mathbb{R}_0^+ al conjunto de números reales no negativos, $[0, +\infty)$.

1.1. Primeras definiciones

Comencemos este capítulo con algunas de las definiciones más importantes de nuestro trabajo y a continuación veamos algunas propiedades de dichas definiciones.

Consideramos X un espacio métrico con distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

Definición 1.1.1. *Decimos que una familia $\{T(t), t \geq 0\}$ de aplicaciones continuas del espacio X en sí mismo es un **semigrupo no lineal** en X , o simplemente **semigrupo**, cuando se cumplen las siguientes propiedades:*

- (a) $T(0) = Id$, siendo Id la aplicación identidad del espacio X .
- (b) $T(t + s) = T(t)T(s)$, cualquiera que sea la pareja de números reales no negativos t y s (propiedad de semigrupo).
- (c) La aplicación $(t, x) \in [0, +\infty) \times X \mapsto T(t)x \in X$ es continua.

En el apartado (c) de la definición anterior, evidentemente, se está considerando el conjunto $[0, +\infty) \times X$ dotado con la topología producto.

Los semigrupos no lineales son también llamados **sistemas dinámicos autónomos**. De hecho es fácil comprobar cómo los sistemas diferenciales autónomos son semigrupos no lineales, tomando como familia de aplicaciones la solución del problema de Cauchy para un dato inicial t_0 .

Además, la familia $\{T(t), t \geq 0\}$ es conmutativa para la composición de aplicaciones, ya que $T(t)T(s) = T(t + s) = T(s + t) = T(s)T(t)$ para cualesquiera $t, s \geq 0$.

Fijemos ahora, un semigrupo no lineal $\{T(t), t \geq 0\}$ en un espacio métrico $X := (X, d)$, que también llamaremos **espacio de fases** del semigrupo y dicho semigrupo lo denotaremos simplemente por $T(\cdot)$.

Definición 1.1.2. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es **invariante** respecto al semigrupo $T(\cdot)$, o simplemente invariante, cuando para todo $t \geq 0$ se tiene que $T(t)A = A$.

Proposición 1.1.3. Sea $T(\cdot)$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , entonces para todo conjunto B invariante se verifica que \overline{B} es invariante.

Demostración Tenemos que probar que $T(t)\overline{B} = \overline{B}$ para todo $t \geq 0$, y lo vamos a hacer por doble inclusión.

Veamos primero que $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ para todo $t \geq 0$.
Sea $x \in \overline{B} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ siendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de B . Entonces como $T(t)$ es continua para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$T(t)x = T(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t)x_n, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Y como B es invariante, $T(t)x_n \in B$ para todo $t \geq 0$. Así ya concluimos que $T(t)x \in \overline{B}$ para todo $t \geq 0$.

Para ver la otra inclusión $(\overline{B} \subseteq T(t)\overline{B})$ tomamos $x \in \overline{B} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de B .

Luego, para todo número natural n , tenemos que existe $u_n \in B$ tal que $x_n = T(t)u_n$ para cualquier $t \geq 0$, pues $x_n \in B$ y B es invariante por hipótesis.

Con lo cual, nos queda que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t)u_n = T(t) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) = T(t)z, \text{ para todo } t \geq 0,$$

siendo $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \overline{B}$.

Por lo tanto, queda probado que $x \in T(t)\overline{B}$ para todo $t \geq 0$ y con esto terminamos la demostración de la proposición. ■

Proposición 1.1.4. La unión de subconjuntos de X invariantes por el semigrupo $T(\cdot)$ es también invariante.

Demostración

Veamos que se verifica la definición de invariante para la unión de invariantes de X .

Sean $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia formada por subconjuntos invariantes de X , siendo L un conjunto de índices cualesquiera.

Entonces

$$T(t) \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} T(t)A_\lambda$$

para todo $t \geq 0$, pues $T(\cdot)$ es una familia de aplicaciones continuas.

Además, como A_λ son conjuntos invariantes de X por hipótesis, tenemos que:

$$T(t) \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} T(t)A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

para todo $t \geq 0$.

Con esto podemos dar por finalizada la demostración, puesto que ya tenemos que se verifica la definición de subconjunto invariante para $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$

■

Antes de continuar con nuevas definiciones, vamos a hacer una observación sobre los conjuntos invariantes. Pues la intersección de conjuntos invariantes no tiene porqué ser invariante; será invariante si para cada $t > 0$ la aplicación $T(t)$ es inyectiva.

Definición 1.1.5. Una aplicación $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una ***solución global*** del semigrupo $T(\cdot)$ cuando para todo $t \geq 0$ y todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$$

Definición 1.1.6. Se llama ***órbita global*** u órbita de la solución ξ a la imagen de la aplicación ξ ; es decir, $\gamma(\xi) = \{\xi(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 1.1.7. Toda órbita global de un semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ es invariante por dicho semigrupo.

Demostración

Queremos ver que $T(t)\gamma(\xi) = \gamma(\xi)$ para todo $t \geq 0$.

Para demostrarlo lo haremos por doble contención.

Sea $x \in \gamma(\xi) \Rightarrow x = \xi(\tau)$, para algún $\tau \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x = \xi(\tau) = \xi(t + \tau - t) = T(t)\xi(\tau - t) \in T(t)\gamma(\xi), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Con esto ya tenemos la primera inclusión ya que $\gamma(\xi) \subseteq T(t)\gamma(\xi)$.

Recíprocamente, sea ahora $x \in T(t)\gamma(\xi)$ con $t \geq 0 \Rightarrow \exists z = \xi(\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $x = T(t)z$.

Entonces, se verifica que $x = T(t)z = T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$ pues ξ es solución global. Con lo cual ya tenemos demostrada la otra inclusión pues $\xi(t + \tau) \in \gamma(\xi) \Rightarrow T(t)\gamma(\xi) \subseteq \gamma(\xi)$.

Con estas dos inclusiones tenemos probada nuestra proposición.

■

Proposición 1.1.8. *Toda solución global de un semigrupo $T(\cdot)$ es continua.*

Demostración

Dados t y t_0 reales, con $|t - t_0| < \delta$ y $\tau < \min\{t, t_0\}$ (pues buscamos que $t - \tau, t_0 - \tau$ sean mayores que 0).

Tenemos que,

$$d(\xi(t), \xi(t_0)) = d(T(t - \tau)\xi(\tau), T(t_0 - \tau)\xi(\tau)) < \epsilon,$$

pues por la propiedad (c) de la definición de semigrupo sabemos que dicha aplicación es continua. ■

Proposición 1.1.9. *Un subconjunto $A \in X$ es invariante por el semigrupo $T(\cdot)$ si y sólo si A es unión de órbitas globales de $T(\cdot)$.*

Demostración

En efecto, por un lado, como ya hemos visto, toda órbita global es un conjunto invariante y por la Proposición 1.1.4, la unión de subconjuntos invariantes es invariante; entonces tenemos que si A es unión de órbitas globales es inmediato que A es invariante.

Recíprocamente, supongamos que A es invariante.

Sea $x_0 \in A \Rightarrow T(t)x_0 \in A$, para todo $t \geq 0$; por ser A invariante. Pero también, por la invarianza, tenemos que $\exists x_{-1} \in A$ de forma que $x_0 = T(1)x_{-1}$. Análogamente, podemos afirmar que $\exists x_{-2} \in A$ tal que $x_{-1} = T(1)x_{-2}$. Luego $x_0 = T(2)x_{-2}$. Si repetimos este argumento, obtenemos que para cada natural $n \exists x_{-n} \in A$ cumpliendo que $x_{-n+1} = T(1)x_{-n}$. Con lo cual $x_0 = T(n)x_{-n}$.

Más generalmente, tenemos que: $x_{n-m} = T(n)x_{-m}$ si $m \geq n$.

Definimos ahora $\xi : \mathbb{R} \rightarrow A$ como:

$$\xi(\tau) := \begin{cases} T(\tau)x_0 & \text{si } \tau \geq 0 \\ T(\tau + n)x_{-n} & \text{si } \tau \in [-n, 1 - n] \end{cases}$$

ξ está bien definida pues:

(a) $\xi(\tau) \in A$ para todo $\tau \geq 0$ pues A es invariante.

(b) Si $\tau \in [-n, 1 - n] \Rightarrow T(\tau + n) = T(\tau)T(n)$ pues $\tau + n \geq 0$, ya que $\tau \in [-n, 1 - n]$. Y por la razón descrita antes para $\xi(\tau)x_0$, sabemos que como $x_{-n} \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$; tenemos que $T(\tau + n)x_{-n} \in A$ si $\tau \in [-n, 1 - n]$.

(c) A continuación veamos que los valores de ξ en los extremos de los intervalos coinciden.

Si $\tau = -n_0$, fijando $n_0 \Rightarrow \xi(-n_0) = T(-n_0 + n_0)x_{-n_0} = T(0)x_{-n_0} = x_{-n_0}$, pues por definición de semigrupo $T(0)$ es la aplicación identidad. Pero por otro lado también tenemos que:

$$\xi(-n_0) = T(-n_0 + (n_0 + 1))x_{-n_0-1} = T(1)x_{-n_0-1}.$$

Usando que $x_{-n+1} = T(1)x_{-n}$ con $n = n_0 + 1$ obtenemos:

$$\xi(-n_0) = T(1)x_{-n_0-1} = x_{-n_0}.$$

Así tenemos visto que para el caso de los intervalos de la forma $[-n, 1 - n]$ la definición de ξ coincide en los extremos de dichos intervalos.

Ahora veamos el caso de $\tau = 0$:

Por un lado tenemos que $\xi(0) = T(0)x_0 = x_0$

Y por otro lado tomando $n = 1$, obtenemos:

$$\xi(0) = T(0+1)x_{-1} = T(1)x_{-1} = x_0$$

Luego ambas definiciones coinciden en los extremos, con lo cual la función ξ está bien definida en todo su dominio.

Una vez probada que ξ está bien definida tenemos que ver que efectivamente esta función ξ es solución global para $t \geq 0$.

$$\cdot \text{ Si } t \geq 0 \text{ y } \tau \geq 0 \Rightarrow T(t)\xi(\tau) = T(t)T(\tau)x_0 = T(t+\tau)x_0 = \xi(t+\tau) \text{ pues } t+\tau \geq 0.$$

$$\cdot \text{ Si } t \geq 0 \text{ y } \tau < 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \tau \in [-n, 1 - n].$$

En dicho caso tenemos dos posibilidades.

Caso 1: Supongamos que $t + \tau \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(t)\xi(\tau) &= T(t)T(\tau+n)x_{-n} = T(t+\tau+n)x_{-n} = T(t+\tau)T(n)x_{-n} = T(t+\tau)x_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(t)\xi(\tau) = T(t+\tau)x_0 = \xi(t+\tau). \end{aligned}$$

ya que $T(n)x_{-n} = x_0$ por construcción de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Caso 2: Supongamos ahora que $t + \tau < 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $t + \tau \in [-m, 1 - m]$ con $m \leq n$ con n el ya descrito antes. Entonces,

$$\begin{aligned} T(t)\xi(\tau) &= T(t)T(\tau+n)x_{-n} = T(t+\tau+n)x_{-n} = T(t+\tau+m+n-m)x_{-n} = \\ &= T(t+\tau+m)T(n-m)x_{-n}, \end{aligned}$$

pues ambos argumentos son no negativos. Entonces

$$T(t)\xi(\tau) = T(t+\tau+m)T(n-m)x_{-n} = T(t+\tau+m)x_{-m} = \xi(t+\tau).$$

Luego queda probada que ξ es órbita global.

Y como ξ tiene a todos los puntos de A , así deducimos que A es unión de órbitas globales y con esto acabamos la demostración. ■

Definición 1.1.10. Decimos que un **subconjunto** A de X atrae a un subconjunto B de X , por medio del semigrupo $T(\cdot)$ cuando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Por distancia entre dos conjuntos consideramos la semidistancia de Hausdorff. La **semi-distancia de Hausdorff** desde un conjunto A hasta otro conjunto B la definimos como

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

siendo d la distancia definida en X .

Obsérvese que es una semidistancia puesto que si $\text{dist}(A, B) = 0$ esto no implica que $A = B$, sino que $A \subseteq \overline{B}$.

Lema 1.1.11. *Un subconjunto B de X es atraído por un subconjunto A de X si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon, B) \geq 0$ tal que*

$$T(t)B \subset O_\epsilon(A)$$

para todo $t \geq T$, siendo

$$O_\epsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) = \{x \in X, d(x, A) < \epsilon\}.$$

Este lema se deduce rápidamente de la definición anterior.

Definición 1.1.12. *Decimos que un subconjunto \mathcal{A} de X es un **atractor global** para el semigrupo $T(\cdot)$ si es un conjunto compacto, invariante por $T(\cdot)$ y atrae a todos los subconjuntos acotados de X por la acción de $T(\cdot)$.*

Observemos que de la forma en que hemos definido el atractor global parece que un semigrupo puede tener varios atractores globales. Pero con la siguiente proposición veremos que un semigrupo posee a lo más un atractor global en el sentido de la definición anterior.

Proposición 1.1.13. *Si existe un atractor global para el semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ entonces dicho atractor es único.*

Demostración

Sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 dos atractores globales para el semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$. Entonces como \mathcal{A}_2 es compacto, tenemos que \mathcal{A}_2 es acotado de X .

Usando ahora que \mathcal{A}_1 es atractor global tenemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0 \Leftrightarrow \text{dist}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$ pues \mathcal{A}_2 es invariante.

Luego de aquí deducimos que $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$ pues $\overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$ ya que \mathcal{A}_1 es compacto luego cerrado.

De forma análoga, deducimos que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ pues \mathcal{A}_2 también es atractor global y \mathcal{A}_1 compacto.

Así llegamos a que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$ y terminamos la demostración de la proposición. ■

Teorema 1.1.14. *Si un semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ en un espacio métrico X posee atractor global \mathcal{A} , entonces \mathcal{A} es la unión de todos los subconjuntos acotados invariantes de X .*

Demostración

Veamos por doble contención que efectivamente \mathcal{A} es la unión de todos los subconjuntos invariantes acotados.

Como \mathcal{A} es atractor global entonces \mathcal{A} es acotado (pues es compacto) e invariante. Con lo cual, es obvio que \mathcal{A} está contenido en la unión de todos los conjuntos acotados invariantes de X .

Recíprocamente, sea $B \subset X$ subconjunto acotado e invariante. Como \mathcal{A} es atractor global $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} dist(T(t)B, \mathcal{A}) = 0$.

Pero como B es invariante, tenemos que $T(t)B = B$ para todo $t \geq 0$. Luego,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} dist(B, \mathcal{A}) = 0 \Rightarrow B \subset \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A},$$

pues \mathcal{A} es cerrado por ser atractor global.

Con esto hemos demostrado que cualquier subconjunto acotado e invariante de X está contenido en \mathcal{A} . ■

De este teorema podemos deducir un sencillo corolario, que caracteriza los atractores en términos de las soluciones del sistema.

Corolario 1.1.15. *Si un semigrupo $T(\cdot)$ en un espacio métrico X posee atractor global \mathcal{A} , entonces \mathcal{A} es la unión de todas las órbitas globales acotadas del semigrupo.*

Demostración

Como \mathcal{A} es invariante sabemos que \mathcal{A} es unión de órbitas globales por la Proposición 1.1.8. Dichas órbitas son acotadas pues \mathcal{A} es acotado.

Por otro lado, si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global acotada, también hemos visto que su órbita $\gamma(\xi)$ es un subconjunto invariante acotado; y por el teorema anterior está contenida en \mathcal{A} . Con esto acabamos la demostración del corolario. ■

Antes de seguir con el desarrollo de nuestro trabajo, observemos que un atractor global \mathcal{A} de un semigrupo no lineal $T(\cdot)$ contiene, como ya hemos visto, a todos los subconjuntos invariantes de X ; pero no se cumple que cualquier subconjunto de \mathcal{A} sea invariante.

Por último, para finalizar esta primera parte del capítulo introduciremos algunas notaciones y definiciones adicionales.

Definición 1.1.16. *Dado un subconjunto B de un espacio métrico X denotamos por $\gamma^+(B)$ su **semiórbita positiva** respecto del semigrupo $T(\cdot)$ definida por*

$$\gamma^+(B) = \{T(t)x : t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x).$$

También podemos considerar “trozos” de órbitas para tiempos arbitrariamente grandes, es decir; dados $B \subset X$ y $\tau \geq 0$ notamos por $\gamma_\tau^+(B)$ al conjunto siguiente,

$$\gamma_\tau^+(B) = \gamma^+(T(\tau)B) = \{T(t)x : t \geq \tau, x \in B\}.$$

Definición 1.1.17. Decimos que un semigrupo $T(\cdot)$ es **acotado** si la semiórbita positiva de cualquier subconjunto acotado de X es un acotado de X . Mientras que decimos que un semigrupo $T(\cdot)$ es **eventualmente acotado** cuando para cada subconjunto acotado $B \subset X$ $\exists \tau = \tau(B) \geq 0 : \gamma_\tau^+(B)$ es un acotado de X .

Observemos que si un semigrupo $T(\cdot)$ posee atractor global \mathcal{A} entonces $T(\cdot)$ es necesariamente eventualmente acotado. En efecto, dado $B \subset X$ acotado entonces sabemos que $T(t)B \rightarrow \mathcal{A}$. Y como \mathcal{A} es atractor global tenemos que para todo $\epsilon > 0, \exists \tau : \forall t \geq \tau$ se tiene que $T(t)B \subset O_\epsilon(\mathcal{A})$.

Y como $\gamma_\tau^+(B) \subset T(t)B \Rightarrow \gamma_\tau^+(B) \subset O_\epsilon(\mathcal{A})$.

Tomando $\epsilon = 1$ tenemos que $O_1(\mathcal{A})$ es acotado, pues \mathcal{A} es acotado y $\exists \tau = \tau(B) : \gamma_\tau^+(B) \subset O_1(\mathcal{A})$

En particular, si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global para $T(\cdot)$, entonces para todo τ real obtenemos que $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$ es acotado.

Definición 1.1.18. Dados dos subconjuntos B y D de X decimos que D **absorbe** al conjunto B , por medio del semigrupo $T(\cdot)$, si existe $\tau = \tau(B) \geq 0 : T(t)B \subset D \forall t \geq \tau$.

Llamamos a un semigrupo $T(\cdot)$ **disipativo** si existe un subconjunto acotado D de X que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X por medio del semigrupo $T(\cdot)$.

Proposición 1.1.19. Un semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ es disipativo si y sólo si existe un subconjunto acotado A que atrae a todos los subconjuntos acotados de X por medio del semigrupo $T(\cdot)$.

Demostración

Supongamos que $T(\cdot)$ es disipativo. Sea D el subconjunto acotado de X que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X . Entonces D atrae a todos los subconjuntos acotados de X .

Supongamos que A es un subconjunto acotado de X que atrae a todos los subconjuntos acotados de X . Entonces, fijamos $\epsilon > 0$, tomamos $D = O_\epsilon(A)$. D es acotado y satisface la definición de disipatividad. ■

1.2. Conjuntos ω -límites

Ahora, en esta parte del capítulo introducimos el importante concepto de conjunto ω -límite, que va a jugar un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de los atractores globales.

Definición 1.2.1. Dado un subconjunto B de X , definimos su conjunto ω -límite como:

$$\omega(B) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Es inmediato ver que el conjunto ω -límite de cualquier subconjunto B de X es un conjunto cerrado, por ser intersección de conjuntos cerrados.

Desde el punto de vista práctico, es decir, para la demostración de resultados, esta definición no es muy útil. Por eso vamos a dar la siguiente caracterización que hará la definición más manejable en términos de límites de sucesiones.

Lema 1.2.2. El conjunto ω -límite de un subconjunto $B \subset X$ está caracterizado por:

$$\omega(B) = \{x \in X : \text{existen sucesiones } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}_0^+ \text{ con } t_n \rightarrow +\infty \text{ y } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } B, x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n\}. \quad (1.1)$$

Demostración

Para esta demostración llamaremos $\omega'(B)$ al conjunto definido por el término derecho de (1.1) y lo probaremos por doble inclusión.

Sea $x \in \omega(B)$; veamos que x está también en $\omega'(B)$. En efecto, dado $x \in \omega(B)$, para cada natural n tenemos que $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$; por la Definición 1.2.1. Luego, para cada n natural, debe existir $u_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que $d(x, u_n) < \frac{1}{n}$. Y por la definición de $\gamma_n^+(B)$ sabemos que existen $t_n \geq n$ y $x_n \in B$ de forma que $u_n = T(t_n)x_n$. Con lo cual, es evidente que, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$ con $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$, $t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$. Es decir, que $x \in \omega'(B)$.

Veamos ahora la otra inclusión, para ello supongamos $x \in \omega'(B)$. Entonces por la definición de dicho conjunto tenemos que, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$, para ciertas sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}_0^+ con $t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en B . Sea pues $t \geq 0$ cualquiera, como $t_n \rightarrow +\infty$ existe $n' = n'(t) \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n'$. Así, es fácil ver que $T(t_n)x_n \in \gamma_t^+(B)$, siempre que $n \geq n'$. Luego, $x \in \overline{\gamma_t^+(B)}$ y como esto ocurre para cualquier $t \geq 0$ tenemos que

$$x \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

■

Con la ayuda de este último resultado es muy sencillo ver que si $B \subset C$ entonces $\omega(B) \subset \omega(C)$, y también que si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global de $T(\cdot)$ se tiene que $\omega(\xi(t)) = \omega(\xi(s))$ para cualesquiera dos números reales s y t . Además, gracias a este resultado podemos caracterizar el conjunto ω -límite de un invariante, como vemos a continuación.

Proposición 1.2.3. Si A es un subconjunto invariante de un espacio métrico X , entonces tenemos que $\omega(A) = \overline{A}$.

Demostración

De nuevo realizaremos esta prueba por doble inclusión.

Sea $x \in \omega(A)$ Entonces existen ciertas sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tales que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Como A es invariante y $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ con $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Con lo cual, $x \in \bar{A}$ por definición de \bar{A} .

Recíprocamente, sea $x \in \bar{A}$. Entonces, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ con $u_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser A invariante, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $u_n = T(n)x_n$. Con esto ya tenemos que, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$ con $t_n = n \in \mathbb{R}_0^+$, $t_n \rightarrow +\infty$ y $x_n \in A$. Así hemos probado que $x \in \omega(A)$ y tenemos que ambos conjuntos son iguales. ■

Proposición 1.2.4. *Sea X un espacio métrico y $T(\cdot)$ un semigrupo. Entonces se verifica que $\omega(x) = \omega(T(t)x)$ para todo $x \in X$ y $t \geq 0$.*

Demostración

Lo demostraremos usando de nuevo el argumento de la doble inclusión.

Sea $y \in \omega(T(t)x)$ con un cierto $x \in X$ y con $t \geq 0$. Entonces, por (1.1) tenemos que, existen unas sucesiones $(\bar{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\bar{t}_n \rightarrow +\infty$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T(t)x$, para todo $t \geq 0$ tales que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{t}_n)y_n$.

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = T(t')x$ para cierto $t' = t'(n) \geq 0$ pues $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T(t)x$ para todo $t \geq 0$.

Luego, $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{t}_n)T(t')x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{t}_n + t')x$ pues $t' \geq 0$.

Así llegamos a que $y \in \omega(x)$, ya que si llamamos $t_n = \bar{t}_n + t' \in \mathbb{R}_0^+$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con $t_n \rightarrow +\infty$, pues $t_n, t' \geq 0$ y $\bar{t}_n \rightarrow +\infty$; y tomando como $x_n = x$ para todo número natural n , tenemos que y cumple (1.1) para el conjunto $B = \{x\}$.

Veamos ahora la otra inclusión. Tomamos $y \in \omega(x)$, entonces por (1.1) tenemos que existen ciertas sucesiones $(\bar{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\bar{t}_n \rightarrow +\infty$ e $y_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{t}_n)x$.

Fijemos $t' \geq 0$, entonces tenemos que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{t}_n - t')T(t')x$, pues $\bar{t}_n - t' \geq 0$ ya que $\bar{t}_n \rightarrow +\infty$.

Así conseguimos probar que $y \in \omega(T(t')x)$, pues si tomamos como $t_n = \bar{t}_n - t'$ e $y_n = T(t')x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica (1.1).

Como esto sucede para cualquier $t' \geq 0$ arbitrario ya tenemos probado que $\omega(x) \subset \omega(T(t)x)$ para todo $t \geq 0$. ■

En algunas ocasiones es interesante tratar un concepto semejante al de conjunto ω -límite, pero considerando que el tiempo corre hacia atrás; esto se conoce como conjunto α -límite. Aunque apenas usaremos este concepto, vamos a ver su definición por su similitud con el conjunto ω -límite.

Definición 1.2.5. Sea $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ una solución global del semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Definimos su conjunto α -límite como:

$$\alpha(\xi) := \{x \in X : \text{existe } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi(t_n)\}.$$

Desde ahora en adelante trabajaremos con los semigrupos asintóticamente compactos, que vamos a definir a continuación. Utilizaremos dichos semigrupos porque las principales propiedades de los conjuntos ω -límites necesarias en el estudio de los atractores globales se verifican siempre para los semigrupos asintóticamente compactos.

Definición 1.2.6. Decimos que un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X es **asintóticamente compacto**, cuando para toda sucesión acotada de puntos de X , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y toda sucesión de números reales no negativos, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$, se tiene que la sucesión de puntos de X , $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, posee una subsucesión convergente.

Como ejemplo abstracto de dicha definición destacamos los semigrupos eventualmente compactos véase la definición siguiente:

Definición 1.2.7. Decimos que un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X es **eventualmente compacto**, si existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) : X \rightarrow X$ es una aplicación compacta; es decir, si para cada subconjunto B de X tenemos que $T(t_0)B$ es un conjunto relativamente compacto.

Veamos ahora algunas propiedades de los semigrupos eventualmente compactos.

Proposición 1.2.8. (a) En un semigrupo eventualmente compacto las aplicaciones de la forma $T(t)$, con $t \geq t_0$ siendo t_0 el proporcionado en la Definición 1.2.7, son aplicaciones compactas.

(b) Un semigrupo eventualmente compacto y eventualmente acotado es asintóticamente compacto.

Demostración

(a) Veamos que el conjunto de aplicaciones del semigrupo son compactas para todo $t \geq t_0$, siendo t_0 el número real positivo que aparece en la Definición 1.2.7.

Sea $t_0 > 0$ tal que la aplicación $T(t_0)$ es compacta. Entonces se verifica que, $T(t) = T(t - t_0 + t_0) = T(t - t_0)T(t_0)$ para todo $t \geq t_0$.

Como $T(t_0)$ es compacta y $T(t)$ es continua; entonces podemos afirmar que $T(t)$ es compacta para todo $t \geq t_0$.

(b) Como $T(\cdot)$ es eventualmente compacto, tenemos que existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) : X \rightarrow X$ es una aplicación compacta.

Y como $T(\cdot)$ es eventualmente acotado, tenemos que para todo subconjunto B de X acotado, existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B) \subset X$ es acotado.

Tomamos pues, $B_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sucesión acotada. Entonces tenemos

que $\gamma_\tau^+(B_0)$ es acotado.

Sea $t' > t_0 + \tau \Rightarrow$ Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t_n \geq t'$ y para todo $n \geq n_0$, definiendo el conjunto $B = \{T(t_n - t')x_n : n \geq n_0\} \subset \gamma_\tau^+(B_0)$, que está acotado; el conjunto $T(t')B$ es relativamente compacto (por el apartado (a)).

Con lo cual $\{T(t_n)x_n : n \geq n_0\} \subset T(t')B$ es relativamente compacto.

Así podemos concluir que que $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto. ■

Ahora veamos con el siguiente lema las principales propiedades de los conjuntos ω -límites para semigrupos asintóticamente compactos.

Lema 1.2.9. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico X , entonces, para todo subconjunto B de X , no vacío, se tiene que:*

- (a) $\omega(B)$ es no vacío, compacto invariante y atrae a B por la acción de $T(\cdot)$.
- (b) $\omega(B)$ es el menor conjunto cerrado de X que atrae a B .
- (c) Si B es conexo, o existe C conexo tal que $C \supset B$ y C es atraído por $\omega(B)$; entonces $\omega(B)$ es conexo.

Demostración

(a) Veamos primero que $\omega(B)$ es no vacío.

Escogemos una sucesión cualquiera de números reales no negativos, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$; y una sucesión de puntos de B , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

De la compacidad asintótica de $T(\cdot)$ tenemos que $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Luego por la definición de $\omega(B)$ dada en (1.1) tenemos que dicho límite de la subsucesión convergente está en $\omega(B)$. Así llegamos a que $\omega(B)$ es no vacío.

· Pasemos ahora a ver que $\omega(B)$ es compacto.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \omega(B)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(t_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_j^{(n)} \rightarrow +\infty$, cuando $j \rightarrow +\infty$, y $(x_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}} \subset B$ cumpliendo que:

$$x_n = \lim_{j \rightarrow +\infty} T(t_j^{(n)})x_j^{(n)}.$$

De donde se puede deducir que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un natural j_n tal que

$$d(x_n, T(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} \text{ con } t_{j_n}^{(n)} \geq n \quad (1.2)$$

Como $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto podemos extraer una subsucesión convergente de $(T(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)})$, es decir;

$$(T(t_{j_{n_k}}^{(n_k)})x_{j_{n_k}}^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x, \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

Por el Lema 1.2.2, $x \in \omega(B)$ y siguiendo con (1.2) tenemos que

$$d\left(x_{n_k}, T\left(t_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right)x_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right) < \frac{1}{n_k},$$

de aquí tomando límite cuando $k \rightarrow +\infty$, resulta que $x_{n_k} \rightarrow x$.

Así queda demostrado que $\omega(B)$ es compacto, pues toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

· Ahora pasamos a demostrar que $\omega(B)$ es invariante; para ello veremos por doble inclusión que $\omega(B) = T(t)\omega(B)$ para todo $t \geq 0$.

Sea $x \in \omega(B)$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, de forma que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$.

Para todo $t \geq 0$ podemos deducir que $T(t)x = T(t)\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t)T(t_n)x_n$, pues $T(t)$ es una aplicación continua para todo $t \geq 0$. Y usando la propiedad de semigrupo tenemos que:

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t + t_n)x_n,$$

con $t + t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en B . Así, por el Lema 1.2.2, llegamos a la conclusión de que $T(t)x \in \omega(B)$ y con ello que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Pasamos ahora a ver la prueba de la contención recíproca.

Sea entonces $x \in \omega(B)$, con lo cual existen unas ciertas sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$, y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ de manera que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$.

Fijamos pues $t \geq 0$; entonces,

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n - t + t)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t)T(t_n - t)x_n. \quad (1.3)$$

Por otro lado, usando que $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, obtenemos que existe un punto $z \in X$ y una subsucesión de $\left(T(t_n - t)x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $z = \lim_{j \rightarrow +\infty} T(t_{n_j} - t)x_{n_j}$. Así, por el Lema 1.2.2 se sigue que $z \in \omega(B)$; por la continuidad de $T(t)$ podemos afirmar que:

$$x = T(t)\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n - t)x_n\right) = T(t)z \text{ con } z \in \omega(B).$$

Así hemos demostrado que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ y con ello queda probado que $\omega(B)$ es invariante.

· Ahora, para acabar la prueba de este primer apartado vamos a demostrar que $\omega(B)$ atrae a B , o sea, que se cumple que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, \omega(B)) = 0$.

Lo probaremos por reducción al absurdo. Para ello supongamos que dicho límite no es 0; entonces existe $\epsilon > 0$ tal que podemos construir una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$ cumpliendo que $\text{dist}(T(t_n)B, \omega(B)) > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, por la definición de semidistancia tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede hallar $x_n \in B$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon. \quad (1.4)$$

Usando ahora el argumento de la compacidad asintótica de $T(\cdot)$ resulta que $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a un punto x , que podemos afirmar que está en $\omega(B)$ debido al Lema 1.2.2.

Así, tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$ en la desigualdad (1,4) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \epsilon,$$

y como la función distancia de un punto a un conjunto es continua, la expresión anterior equivale a que

$$d(x, \omega(B)) \geq \epsilon.$$

Esto es una contradicción pues $x \in \omega(B)$; con lo cual lo que habíamos supuesto era falso y con ello tenemos que $\omega(B)$ atrae a B .

(b) En este apartado ya tenemos visto que $\omega(B)$ es cerrado por definición y atrae a B por el apartado (i); con lo cual nos queda probar que es el menor cerrado.

Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado tal que F atrae a B por medio de $T(\cdot)$.

Veamos que $\omega(B) \subset F$.

Para ello supongamos que no es cierta dicha afirmación, es decir, supongamos que existe $x \in \omega(B)$ y $x \notin F$. Como F es cerrado, sabemos que se verifica que $d(x, F) > \delta$ para algún $\delta > 0$.

Como $x \in \omega(B)$ entonces existen ciertas sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tales que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$.

Además, como F atrae a B podemos afirmar que existe $t^* > 0$ para todo $z \in B$ tenemos que $d(T(t)z, F) < \delta$ si $t \geq t^*$.

Como $t_n \rightarrow +\infty$ entonces existe $n^* = n(t^*)$ tal que $t_n \geq t^*$ para todo $n \geq n^*$.

Luego para todo $n \geq n^*$ resulta que $d(T(t_n)x_n, F) < \delta$, y así tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$, nos queda que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(t_n)x_n, F) \leq \delta$. De donde se sigue que, como $X \ni \omega \mapsto d(\omega, F) \in \mathbb{R}$ es continua, que

$$d(x, F) \leq \delta,$$

lo que contradice que $x \notin F$.

Con lo cual queda demostrado el apartado (b).

(c) Esta prueba la haremos también por reducción al absurdo; para ello supongamos que existe un conjunto conexo C que contiene a B y es atraído por $\omega(B)$, pero que $\omega(B)$ no es conexo.

Entonces podemos escribir $\omega(B)$ como unión de dos conjuntos vacíos, cerrados (en $\omega(B)$ y por lo tanto cerrados en X , pues $\omega(B)$ es cerrado en X) y disjuntos, F_1, F_2 .

Por el apartado (i) tenemos que $\omega(B)$ es compacto, con lo cual, F_1, F_2 son dos conjuntos compactos.

Sea $\delta := d(F_1, F_2) > 0$ pues F_1, F_2 son disjuntos, con

$$d(F_1, F_2) = \inf\{d(a, b) : a \in F_1, b \in F_2\}.$$

Como $\omega(B)$ atrae a C , existe $t^* > 0$ tal que $T(t)C \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B))$.

Entonces,

$$T(t)C = \gamma_{t^*}^+(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) = \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1) \cup \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2) \text{ para todo } t \geq t^*,$$

ya que F_1, F_2 son disjuntos y δ es la distancia que los separa.

Como $\gamma_{t^*}^+(C)$ es la imagen de un conjunto conexo, $[t^*, +\infty) \times C$, mediante la aplicación continua $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$; podemos afirmar que $\gamma_{t^*}^+(C)$ es conexo. Observemos también, que $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$ y $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2)$ son disjuntos, esto obliga a que $\gamma_{t^*}^+(C)$ esté contenido solamente en uno de los dos conjuntos. Supongamos, por fijar ideas, que $\gamma_{t^*}^+(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$, entonces,

$$F_2 \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma_{t^*}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t^*}^+(C)} \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1).$$

Con lo que hemos llegado a un absurdo ya que hemos obtenido que $d(F_1, F_2) \leq \frac{\delta}{2}$ y esto contradice la definición de δ .

Por lo tanto, lo que hemos supuesto es falso, es decir, $\omega(B)$ es conexo cuando $\omega(B)$ atrae a un conexo que contiene a B .

En el caso que B sea conexo, el resultado se deduce de lo que hemos probado tomando $C = B$, y con esto hemos acabado la demostración del lema. ■

Para los conjuntos α -límites de las soluciones globales acotadas de los semigrupos asintóticamente compactos se pueden demostrar propiedades similares a las presentadas en el lema anterior, como vemos a continuación.

Lema 1.2.10. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico X y $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ una solución global acotada suya; entonces el conjunto α -límite de ξ , $\alpha(\xi)$, es no vacío, compacto, conexo, invariante y verifica que:*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \alpha(\xi)) = 0. \tag{1.5}$$

Demostración

Probemos primero que $\alpha(\xi)$ es no vacío y que se tiene (1.5), pues las otras propiedades se demuestran de forma totalmente análoga al caso del conjunto ω -límite.

Veamos que es no vacío.

En efecto, sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números no positivos con $t_n \rightarrow -\infty$. Para cada natural n tenemos que: $\xi(t_n) = T(-t_n)\xi(2t_n)$, con $-t_n \rightarrow +\infty$ y $(\xi(2t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sucesión acotada (pues ξ es una solución global acotada).

Con lo cual, como $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, podemos afirmar que $(\xi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente con límite en $\alpha(\xi)$. Por tanto, $\alpha(\xi)$ es distinto del vacío.

Veamos ahora que se tiene (1.5).

Lo probaremos por reducción al absurdo, para ello supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que se tiene que $d(\xi(t_n), \alpha(\xi)) \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números no positivos con $t_n \rightarrow -\infty$.

Por lo visto anteriormente sabemos que $(\xi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a un

punto $x \in \alpha(\xi)$.

Como los términos de dicha subsucesión cumplen que $d(\xi(t_{n_k}), \alpha(\xi)) \geq \epsilon$ y tomando límite cuando $k \rightarrow +\infty$, tenemos que:

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} d(\xi(t_{n_k}), \alpha(\xi)) \geq \epsilon,$$

que como la aplicación que a un punto le asigna la distancia de dicho punto a un conjunto dado es una aplicación continua, esta desigualdad es equivalente a:

$$d\left(\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \xi(t_{n_k}), \alpha(\xi)\right) \geq \epsilon \Leftrightarrow d(x, \alpha(\xi)) \geq \epsilon.$$

Y con esto llegamos a una contradicción con el hecho de que $x \in \alpha(\xi)$. Por lo tanto se verifica (1.5) y así queda terminada la demostración de este lema. ■

Para terminar esta sección vamos a demostrar una última propiedad de los conjuntos ω -límites que usaremos en numerosas ocasiones durante el desarrollo de este trabajo.

1.3. Existencia de atractores

En esta sección analizamos el problema de establecer condiciones suficientes que nos garanticen la existencia de un atractor global para un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X . Para ello con el siguiente teorema vamos a probar que la existencia del atractor global para un sistema autónomo es equivalente a la compacidad asintótica con disipatividad.

Teorema 1.3.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X . Entonces $T(\cdot)$ posee atractor global \mathcal{A} si y sólo si $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en ese caso, si \mathcal{B} denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de X , entonces el atractor global viene dado por:*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B) \tag{1.6}$$

Demostración

Supongamos primero que \mathcal{A} es el atractor global de $T(\cdot)$ y probemos que dicho semigrupo es asintóticamente compacto y disipativo.

Usando la Proposición 1.1.18 tenemos que $T(\cdot)$ es disipativo pues \mathcal{A} atrae a todos los subconjuntos acotados de X por ser atractor global.

Con lo cual nos queda probar que el semigrupo es asintóticamente compacto.

Consideremos una sucesión acotada de puntos de X , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, otra sucesión de números no negativos, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y el conjunto acotado $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de \mathcal{B} , (está acotado porque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada).

Por la definición de atractor global sabemos que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0$. En particular, tenemos que para todo $x' \in B$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(t_n)x', \mathcal{A}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0. \quad (1.7)$$

Luego, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $u_j \in \mathcal{A}$ tal que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, u_j) < \frac{1}{j}. \quad (1.8)$$

Como \mathcal{A} es un conjunto compacto, entonces $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, que la denotamos de la misma forma. Sea x el límite de dicha subsucesión, que cumple que está en \mathcal{A} pues \mathcal{A} es cerrado. Entonces usando (1.8) tenemos que:

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, x) \leq d(T(t_{n_j})x_{n_j}, u_j) + d(u_j, x) < \frac{1}{j} + d(u_j, x).$$

Tomando límite cuando $j \rightarrow +\infty$ tenemos que

$$x = \lim_{j \rightarrow +\infty} T(t_{n_j})x_{n_j}.$$

Y con esto queda probado que $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto.

Supongamos ahora que $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto y disipativo, y veamos que $\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$ es el atractor global de $T(\cdot)$.

Por el Lema 1.2.9 sabemos que $\omega(B)$ es no vacío, compacto, invariante y atrae a B ; con lo cual \mathcal{A} es invariante, ya que es unión de conjuntos invariantes. Y además, \mathcal{A} atrae a todos los acotados de X , pues $\omega(B)$ atrae a B para todo $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, sólo nos queda ver que \mathcal{A} es compacto. Para ello, sea D un subconjunto acotado de X que absorbe a todos los subconjuntos de \mathcal{B} , D existe pues $T(\cdot)$ es disipativo.

Podemos suponer que D es cerrado, y si no lo es tomamos a partir de ahora como conjunto D su clausura, \overline{D} .

De la propiedad de absorción de D y por el apartado (ii) del Lema 1.2.9 podemos afirmar que $\omega(B) \subset D$ para todo $B \in \mathcal{B}$; con lo cual tenemos que:

$$\mathcal{A} \subset D \Rightarrow \overline{\mathcal{A}} \subset D \Rightarrow \omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D)$$

Como \mathcal{A} es invariante, $\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}})$, pues $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow \omega(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}})$.

Así podemos escribir la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D) \subset \mathcal{A},$$

y consecuentemente tenemos que $\mathcal{A} = \omega(D)$, que es compacto por el Lema 1.2.9.

En realidad, hemos probado que $\mathcal{A} = \omega(D) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$. Y con esto acabamos la demostración del teorema. ■

Capítulo 2

Semigrupos Gradiente

En este capítulo presentamos la clase de semigrupos que va a ser el objetivo de nuestros resultados, y que consiste en caracterizar dichos sistemas por medio de su dinámica.

La dinámica de los semigrupos gradiente queda descrita por medio de una función auxiliar, llamada función de Lyapunov, que posee propiedades muy particulares y, por eso, sugiere que la clase de los sistemas gradiente debe constituir una clase notable de sistemas.

Nuestro objetivo en este capítulo es mostrar que, efectivamente, estos sistemas poseen una dinámica que permite ser comprendida de manera bastante detallada y, sorprendentemente, como veremos después, todos los semigrupos tienen, en cierto sentido que aclararemos más tarde, la dinámica de un gradiente.

2.1. Función de Lyapunov

Para poder introducir el concepto de función de Lyapunov necesitamos definir algunas nociones previas.

Definición 2.1.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y Ξ un conjunto invariante de X .*

(a) *Decimos que Ξ es un **conjunto invariante aislado** si existe $\delta > 0$ tal que Ξ es el conjunto invariante maximal de $T(\cdot)$ contenido en $\mathcal{O}_\delta(\Xi)$; es decir, si A es un conjunto invariante de $T(\cdot)$ contenido en $\mathcal{O}_\delta(\Xi)$ entonces $A \subset \Xi$.*

(b) *Sea $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ un conjunto finito de conjuntos invariantes por $T(\cdot)$. Decimos que S es una **familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados** si cada uno de sus elementos son conjuntos invariantes aislados y existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \emptyset$ siempre que $1 \leq i < j \leq n$.*

(c) *Decimos que $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una **solución estacionaria** o **un punto de equilibrio** del semigrupo $T(\cdot)$, si ξ es una solución global del semigrupo y además es una aplicación constante, es decir, $\xi(t) = u^*$ para todo $t \geq 0$ con $u^* \in X$.*

Observemos que los puntos de equilibrio tal y como los hemos definidos son conjuntos invariantes aislados.

También, es fácil ver que si $T(\cdot)$ posee atractor global, entonces como ya vimos en la Proposición 1.1.3., la clausura de un subconjunto invariante suyo es invariante; resulta que para estos semigrupos sus invariantes aislados acotados son cerrados.

Los conjuntos invariantes aislados, como veremos más adelante, son los responsables de la organización de la dinámica del sistema, de ahí la importancia de su estudio.

Recordemos que si $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de números reales y $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en I , se dice que ϕ es **decreciente** (o **creciente**) cuando dados $t < s$ en I se tiene que $\phi(t) \geq \phi(s)$, ($\phi(t) \leq \phi(s)$, respectivamente).

Ahora podemos dar la definición de semigrupos gradiente y con ella la definición de la función de Lyapunov.

Definición 2.1.2. Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados. Decimos que $T(\cdot)$ es un **semigrupo gradiente generalizado** respecto de la familia S , si existe una función $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes cuatro propiedades:

(a) $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

(b) $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de soluciones, es decir, para todo $x \in X$ la función real $t \in [0, +\infty) \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ es decreciente.

(c) Si para algún $x \in X$ se tiene que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geq 0$ entonces se verifica que $x \in \Xi$ para algún $\Xi \in S$.

(d) La función $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que es constante sobre cada subconjunto invariante aislado perteneciente a S , o sea, para cada $\Xi \in S$ existe un número real $L = L(\Xi)$ tal que $V(x) = L$ para todo $x \in \Xi$.

Una función $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple estas cuatro propiedades se llama una **función de Lyapunov generalizada** para un semigrupo $T(\cdot)$ asociada a la familia S .

En el caso especial en que el conjunto de puntos estacionarios de $T(\cdot)$ es de la forma $S = \mathcal{E} := \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$, con $u_i^* \in X$ para todo $1 \leq i \leq n$ decimos simplemente que $T(\cdot)$ es un **semigrupo gradiente** y la función $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ asociada, una **función de Lyapunov**.

Con lo cual un semigrupo gradiente es una terna de la forma $(T(\cdot), S, V)$, siendo $T(\cdot)$ un semigrupo no lineal, S una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados y V la función de Lyapunov correspondiente.

Para ilustrar estas definiciones vamos a ver el siguiente ejemplo que nos ayudará a afianzar estos conceptos.

Ejemplo 2.1.3.

Sea $N \in \mathbb{N}$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), & \text{si } t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases}, \quad (2.1)$$

donde $\nabla f(x)$ representa el gradiente de la función f evaluado en el punto $x \in \mathbb{R}^N$.

Supongamos también que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Como $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, la función $\nabla f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un campo de fases C^1 , por tanto, localmente Lipschitz, sabemos que el operador solución asociado al problema (2.1) define un semigrupo (de hecho un grupo) no lineal en el espacio métrico \mathbb{R}^N . Es decir, podemos definir el semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ siendo $T(t)x_0 = x(t, x_0)$ para todo $t \geq 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$, con $x(\cdot, x_0) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ la solución del problema (2.1). Supongamos que $\nabla f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ posea solamente un número finito de ceros en \mathbb{R}^N , denotados por $\mathcal{E} := \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$.

Con estas condiciones, la función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov para el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Demostración

Veamos pues que f cumple las cuatro propiedades mencionadas en la definición anterior, siendo $S = \mathcal{E} := \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$.

(a) Es obvio que f es continua pues $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ por hipótesis.

(b) En esta parte tenemos que probar que $f(T(t)x_0)$ es decreciente para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tenemos que la función de variable real $[0, +\infty) \ni t \mapsto f(T(t)x_0) = f(x(t, x_0)) \in \mathbb{R}$ es de clase C^1 , y entonces aplicando la regla de la cadena y que $x(\cdot, x_0)$ es solución de (2.1) tenemos que, para todo $t > 0$

$$\frac{d}{dt}(f \circ x(\cdot, x_0))(t) = \nabla f(x(t, x_0)) \cdot \dot{x}(t, x_0) = -|\nabla f(x(t, x_0))|^2 \leq 0, \quad (2.2)$$

sabiendo que operamos con el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^N y que por $|\cdot|$ representamos la norma correspondiente en dicho espacio. Así ya tenemos probado que la función f es decreciente, con lo cual f cumple la propiedad (ii).

(c) Ahora debemos ver que si $f(T(t)x_0) = f(x_0)$, para todo $t \geq 0$ entonces se cumple que $x_0 = u_i^*$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Para ello, supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(T(t)x_0) = f(x_0)$ para todo $t \geq 0$. Entonces, usando (2.2), se cumple que:

$$\frac{d}{dt}f(T(t)x_0) = 0 \Leftrightarrow -|\nabla f(x(t, x_0))|^2 = 0 \Leftrightarrow |\dot{x}(t, x_0)|^2 = 0.$$

O sea, que tenemos que $\dot{x}(t, x_0) = 0$ para todo $t \geq 0$, que equivale a que $x(t, x_0) = x_0$ para todo $t \geq 0$, es decir, que $x_0 \in \mathcal{E}$ por definición de dicho conjunto. Así tenemos completada la prueba de dicho apartado.

(d) En este apartado debemos probar que f es constante sobre cada punto de \mathcal{E} .

Como sabemos que $x(t, u_i^*) = u_i^*$ es solución del problema (2.1), para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y para todo $t \geq 0$. Entonces, fijando $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $\nabla f(x(t, u_i^*)) = 0 \Rightarrow f(x(t, u_i^*)) = cte \in \mathbb{R}$ para todo $t \geq 0$.

Con esto queda demostrado que la función de nuestro ejemplo es una función de Lyapunov para el semigrupo $T(\cdot)$.

2.2. Estructura de los semigrupos gradiente

Los sistemas dinámicos gradiente forman uno de los pocos ejemplos de sistemas que se conocen en los que se puede describir de manera bastante precisa la dinámica que poseen. Por ello, a continuación, vamos a desarrollar el comportamiento de las soluciones globales y para eso necesitamos ver la definición de estructuras homoclinas.

Definición 2.2.1. Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados.

Una **estructura homoclina** con respecto a S consiste en un subconjunto

$$\{\Xi_{l_1}, \Xi_{l_2}, \dots, \Xi_{l_k}\} \text{ con } k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

junto con una familia de soluciones globales $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : 1 \leq j \leq k\}$ tales que, poniendo $\Xi_{l_{(k+1)}} := \Xi_{l_1}$ se cumple que, para todo $j = 1, 2, \dots, k$ se tiene que:

- Para cada j existe $t_j \in \mathbb{R}$ con $\xi_j(t_j) \notin (\Xi_{l_j} \cup \Xi_{l_{(j+1)}})$
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_j(t), \Xi_{l_j}) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi_j(t), \Xi_{l_{(j+1)}}) = 0$.

Una estructura homoclina se puede entender como una especie de polígono contenido en \mathcal{A} , donde los vértices son conjuntos invariantes aislados y las aristas soluciones globales, teniendo en cuenta cierta orientación en las aristas cuando se pasa de un vértice a otro.

Proposición 2.2.2. Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados acotados, $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$, que posee atractor global \mathcal{A} y $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ su función de Lyapunov. Entonces se verifican las dos propiedades siguientes:

(a) Si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global acotada de $T(\cdot)$ entonces, existen $\Xi_{l_1}, \Xi_{l_2} \in S$ tales que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_{l_1}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_{l_2}) = 0.$$

(b) No existen estructuras homoclinas asociadas a S .

Demostración

(a) Sea $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ una solución global acotada para $T(\cdot)$. Como V es función de Lyapunov, entonces por el apartado (ii) de la Definición 2.1.2 sabemos que la función $t \in [0, +\infty) \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ es monótona. Y como $\xi(t)$ está en el compacto \mathcal{A} para todo $t \in \mathbb{R}$, se deduce que existen los límites siguientes,

$$L := \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\xi(t)) \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\xi(t)). \quad (2.3)$$

Sean $\alpha(\xi)$ y $\omega(\xi)$ los conjuntos α y ω -límites asociados a la solución ξ , respectivamente. De (2.3) y de la caracterización de dichos conjuntos en términos de límites de sucesiones, se sigue que V , restringida a $\alpha(\xi)$, es constante e igual a L , y que V restringida a $\omega(\xi)$ es constante e igual a l .

Entonces, dado $x \in \omega(\xi)$, por ser un conjunto invariante, tenemos que $T(t)x \in \omega(\xi)$ para todo $t \geq 0$; con lo cual $V(x) = V(T(t)x) = l$ para todo $t \geq 0$ que por el apartado (iii) de la Definición 2.1.2 queda que $x \in \Xi_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ahora veamos por reducción al absurdo que $\omega(\xi) \subset \Xi_{i_0}$; es decir, supongamos que existe $z \in \omega(\xi) \setminus \Xi_{i_0}$. Entonces, por lo que ya hemos visto anteriormente, podemos afirmar que existe $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $i_1 \neq i_0$, tal que $z \in \Xi_{i_1}$. Así, el conjunto $\omega(\xi)$ posee un punto x en Ξ_{i_0} y otro punto z en Ξ_{i_1} . Pero, como S es una familia finita de conjuntos invariantes aislados podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi_r) \cap \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_k) = \emptyset$, siempre que $r \neq k$ en $\{1, 2, \dots, n\}$. Por ser $\omega(\xi)$ un conjunto conexo y la función distancia de un punto a un subconjunto, una función continua, se sigue (del Teorema del valor medio) que existe un tercer punto, llamémosle $y \in \omega(\xi)$, tal que $d(y, \Xi_{i_0}) = \epsilon$; que además, por estar en $\omega(\xi)$, repitiendo el argumento usado para x , tenemos que $y \in \Xi_{i_2}$. Luego llegamos a una contradicción, pues y no puede estar en ninguno de los subconjuntos invariantes aislados de S , por la elección de ϵ .

Con esto hemos llegado a la conclusión de que $\omega(\xi) \subset \Xi_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, y de manera semejante se prueba que $\alpha(\xi) \subset \Xi_{j_0}$ para algún $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$. Así queda terminada la prueba de dicho apartado, pues la función distancia a un conjunto es una función continua y por la definición de los conjuntos α y ω -límites en términos de límites de sucesiones tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_{i_0}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_{j_0}) = 0.$$

(b) Para demostrar este apartado, también, supondremos que lo que queremos probar es falso y entonces veremos que llegamos a una contradicción.

Supongamos pues, que $\{\Xi_{l_1}, \Xi_{l_2}, \dots, \Xi_{l_k}\} \subset S$ y $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : j = 1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de soluciones globales, forman una estructura homoclina en el atractor \mathcal{A} del semigrupo $T(\cdot)$; es decir, poniendo $\Xi_{l_{(k+1)}} := \Xi_{l_1}$, se tiene para cada $j = 1, 2, \dots, k$, que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_j(t), \Xi_{l_j}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi_j(t), \Xi_{l_{(j+1)}}) = 0. \quad (2.4)$$

Como el semigrupo $T(\cdot)$ posee una función de Lyapunov V , tenemos que por la propiedad (iv) de la Definición 2.1.2, para cada $j = 1, 2, \dots, k, k+1$, existe un número real L_j tal que $V(x) = L_j$ para todo $x \in \Xi_j$. De la continuidad de la función V y de la propiedad (ii) de la

Definición 2.1.2 tenemos que necesariamente: $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_k \geq L_{k+1} = L_1$. Con lo cual deducimos que todos estos números son iguales entre sí y llamemos L a dicho número.

Por otra parte, fijado $j = 1, 2, \dots, k$, como la solución ξ_j cumple que $L_j \geq V(\xi_j(t)) \geq L_{j+1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $L_j = L_{j+1}$; entonces, para todo real s se verifica que $V(T(t)\xi_j(s)) = V(\xi_j(t+s)) = L = V(\xi_j(s))$ para todo $t \geq 0$. Y aplicando la propiedad (iii) de la Definición 2.1.2 tenemos que $\xi_j(s) \in \Xi$ para algún $\Xi \in S$ y para todo $s \in \mathbb{R}$. Pero usando (2.4) tenemos que $\Xi_{l_j} = \Xi_{l_{j+1}} = \Xi$ y por la arbitrariedad con que hemos elegido j , podemos deducir que todos los conjuntos invariantes aislados de la estructura homoclina son iguales, y los denotamos por Ξ .

Por tanto, tenemos que todas las soluciones $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X, j = 1, 2, \dots, k$, están contenidas en Ξ ; lo que está en contradicción con el hecho de que $\{\Xi_{l_1}, \Xi_{l_2}, \dots, \Xi_{l_k}\} \subset S$ junto con $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : j = 1, 2, \dots, k\}$ formen una estructura homoclina. Así, queda terminada la demostración de dicho apartado y con ello la demostración de la proposición. ■

Basándonos en la proposición anterior y en el Corolario 1.1.15 podemos obtener alguna información más sobre la estructura geométrica de los atractores de los semigrupos gradiente. Para ello debemos introducir lo que se conoce como conjuntos estables e inestables asociados a un conjunto invariante.

Definición 2.2.3. Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y Ξ un conjunto invariante por él, definimos;

(a) El conjunto inestable de Ξ como

$$W^u(\Xi) := \{x \in X : \text{existe } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ solución global con } \xi(0) = x \\ \text{tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

(b) El conjunto estable de Ξ como

$$W^s(\Xi) := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, \Xi) = 0\}.$$

Observemos que si $x \in W^u(\Xi)$ y $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global para $T(\cdot)$ con $\xi(0) = x$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0$, entonces $\xi(s) \in W^u(\Xi)$ para todo real s , puesto que, dado $\xi_s \in \mathbb{R}$, definiendo $\xi_s : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $\xi_s(t) := \xi(t+s)$ para cada real t , es inmediato que ξ_s es solución global para $T(\cdot)$, y además cumple que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_s(t), \Xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t+s), \Xi) = 0$.

Corolario 2.2.4. Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ aotados. Si $T(\cdot)$ posee atractor global \mathcal{A} , entonces \mathcal{A} se escribe como la unión de los conjuntos inestables de los conjuntos invariantes aislados de S , es decir,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^n W^u(\Xi_j). \quad (2.5)$$

Demostración

Vamos a demostrar que ambos conjuntos son iguales por doble inclusión.

Comencemos viendo que \mathcal{A} está contenido en la unión de los conjuntos inestables. Sabemos que \mathcal{A} es unión de todas la órbitas globales acotadas de $T(\cdot)$, con lo cual, si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global acotada por la Proposición 2.2.2 tenemos que existe $\Xi \in S$ tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0$. Con lo cual, $\xi(t) \in W^u(\Xi)$, probando así la inclusión.

Ahora probaremos la inclusión contraria, por ello tomemos $x \in W^u(\Xi)$, para algún $\Xi \in S$. Entonces, existe $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ solución global con $\xi(0) = x$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0$. Como Ξ es acotado por hipótesis, tenemos que $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$ está acotado para todo $\tau \in \mathbb{R}$ y también, como ya hemos visto, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$ es acotado. Con lo cual $\gamma(\xi)$ es una órbita acotada que por el Corolario 1.1.15 tiene que estar en \mathcal{A} .

Así queda demostrada la igualdad de ambos conjuntos. ■

Definición 2.2.5. *Si un semigrupo no lineal $T(\cdot)$ posee atractor global \mathcal{A} y una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de manera que el atractor admite la representación (2.5), entonces decimos que $T(\cdot)$ posee un **atractor tipo gradiente**.*

2.3. Existencia de atractores para semigrupos gradiente

Para terminar este capítulo, vamos a probar un resultado sobre la existencia de un atractor en el caso especial en que el semigrupo sea un semigrupo gradiente. La idea esta demostración, en cierta forma se encuentra inspirada en [18].

Teorema 2.3.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo gradiente generalizado respecto de una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados acotados, $S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$. Si $T(\cdot)$ es un semigrupo eventualmente compacto y eventualmente acotado, entonces posee atractor global.*

Demostración

Por la Proposición 1.2.8 sabemos que un semigrupo eventualmente compacto y eventualmente acotado es asintóticamente compacto. Con lo cual, si vemos que $T(\cdot)$ es disipativo ya tendremos demostrado este teorema; ya que por el Teorema 1.3.1 tenemos que un semigrupo no lineal $T(\cdot)$ asintóticamente compacto y disipativo posee un atractor global. Para ello, pasemos a demostrar que $T(\cdot)$ es disipativo.

En efecto, sea

$$D_0 = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_1(\Xi_j).$$

Entonces, D_0 es acotado ya que Ξ_j lo es para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $T(\cdot)$ es eventualmente acotado tenemos que existe $\tau^* \geq 0$ tal que el conjunto

$$D := \gamma_{\tau^*}^+(D_0)$$

es acotado. Bajo estas condiciones, vamos a probar que D cumple la condición de disipatividad.

En primer lugar, notemos que, por la compacidad y la acotación eventual de $T(\cdot)$ obtenemos que D_0 tiene la propiedad de absorber a todos los puntos de X por medio del semigrupo $T(\cdot)$; esto se demuestra siguiendo un razonamiento análogo al usado en la demostración de la Proposición 2.2.2. Es decir, se cumple que para cada punto $x \in X$ existe $\tau_x \geq 0$ de manera que

$$T(t)x \in D_0 \text{ para todo } t \geq \tau_x. \quad (2.6)$$

Además, dado un subconjunto compacto, $K \subset X$, para cada $x \in K$ consideramos $\tau_x \geq 0$ tal que se cumple (2.6). Como D_0 es abierto, para cada $x \in K$, por la continuidad del operador $T(\tau_x) : X \rightarrow X$, existe $\delta_x > 0$ tal que $T(\tau_x)\mathcal{O}_{\delta_x}(x) \subset D_0$.

Por la definición del conjunto D podemos deducir que

$$T(t)\mathcal{O}_{\delta_x}(x) \subset D \text{ para todo } t \geq \tau^* + \tau_x. \quad (2.7)$$

Por ser K compacto, existe una cantidad finita de puntos de K , x_1, x_2, \dots, x_p , de modo que poniendo para cada $j = 1, 2, \dots, p$, y $\delta_j := \delta_{x_j}$ y $\tau_j := \tau_{x_j}$, se tiene que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^p \mathcal{O}_{\delta_j}(x_j).$$

Sea $\tau_k := \max_{1 \leq j \leq p} \tau_j$, entonces usando (2.7) tenemos que

$$T(t)K \subset D \text{ para todo } t \geq \tau^* + \tau_k. \quad (2.8)$$

Finalmente, como $T(\cdot)$ es eventualmente compacto, sabemos que existe $t_0 > 0$ de modo que $T(t_0) : X \rightarrow X$ es una aplicación compacta. Entonces, dado un acotado $B \subset X$ cualquiera tenemos que el conjunto $K := \overline{T(t_0)B}$ es un compacto que contiene a $T(t_0)B$ y por (2.8) llegamos a que:

$$T(t)T(t_0)B \subset T(t)K \subset D \text{ para todo } t \geq \tau^* + \tau_k.$$

Luego, poniendo $\tau(B) := t_0 + \tau^* + \tau_k$, concluimos que

$$T(t)B \subset D \text{ para todo } t \geq \tau(B),$$

lo que demuestra que, efectivamente, D es un acotado que absorbe a todos los subconjuntos acotados de X por la acción del semigrupo $T(\cdot)$, y consecuentemente, $T(\cdot)$ es disipativo.

Y con esto queda demostrado el teorema. ■

Capítulo 3

Teoría de Morse-Conley

En este capítulo presentaremos la teoría de los semigrupos de tipo gradiente que está desarrollada de manera más profunda y extensa en [8]. Esta clase de semigrupos es definida como base de la dinámica de los semigrupos gradiente que hemos estudiado en el capítulo anterior. De manera informal, podemos decir que un semigrupo de tipo gradiente es un semigrupo que satisface la Proposición 2.2.2 La importancia de estudiar esta clase de semigrupos reside en el hecho de que se puede probar su estabilidad bajo perturbación sin hacer uso de la función de Lyapunov. En otras palabras, la existencia de la función de Lyapunov puede ser suprimida si el objeto de interés en estudio es, por ejemplo, la estructura del atractor. Sin embargo, de forma sorprendente, vamos a establecer que la dinámica de los semigrupos gradiente es autosuficiente en el sentido de que la existencia de la función de Lyapunov se convierte en una consecuencia de sus propiedades dinámicas.

Por lo tanto, en este capítulo vamos a presentar la definición de dichos semigrupos y demostraremos un lema que usaremos en bastantes ocasiones, y nos ayudará a probar el gran resultado de nuestro trabajo, que es como ya hemos dicho, la equivalencia entre los semigrupos tipo gradiente y los semigrupos gradiente generalizados.

Después de ver varios resultados sobre los semigrupos tipo gradiente, pasaremos a ver el resultado principal de este trabajo. Con dicho resultado, demostraremos la equivalencia entre los conceptos principales que ya hemos estudiado, es decir, veremos que las nociones de semigrupo gradiente y de semigrupo tipo gradiente coinciden. Esto en la práctica es muy útil pues tenemos que es equivalente encontrar una función de Lyapunov a demostrar que el semigrupo no posee estructuras homoclinas pero sí posee una estructura que cumpla la propiedad (G1) de la Definición 3.1.1.

3.1. Semigrupos de Tipo Gradiente

Comencemos viendo la definición de los semigrupos de tipo gradiente.

3.1.1. Definición

Definición 3.1.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X poseyendo atractor global \mathcal{A} y una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados,*

$S := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\} \subset \mathcal{A}$. Decimos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un **semigrupo de tipo gradiente generalizado** respecto de la familia S si se cumplen las condiciones siguientes:

(G1) Para toda solución global acotada $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ existen índices $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0.$$

(G2) No existen estructuras homoclinas asociadas a S .

Por abuso de notación, a veces se dirá que el par $(T(\cdot), S)$ es un **semigrupo de tipo gradiente**.

3.1.2. Estabilidad bajo perturbación

Ahora vamos a establecer la estabilidad de la definición anterior bajo perturbación. Para ello, será necesario trabajar con familias de semigrupos no lineales y por eso comenzamos introduciendo el concepto de compacidad asintótica colectiva.

Definición 3.1.2. Decimos que una familia de semigrupos no lineales en un espacio métrico X , $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ para $\eta \in (0, 1]$, es **colectivamente asintóticamente compacta**, si para cada sucesión $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $(0, 1]$ con $\eta_k \rightarrow 0^+$, cada sucesión acotada $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en X y cada sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números reales positivos con $t_k \rightarrow +\infty$, se tiene que la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k)x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Para demostrar el resultado de esta sección necesitamos introducir, además, el concepto de convergencia uniforme sobre compactos para una familia de semigrupos no lineales. Por eso, proseguimos esta sección con dicha definición; para así poder terminar la sección demostrando el lema.

Definición 3.1.3. Sea $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in (0, 1]}$ una familia de semigrupos no lineales en un espacio métrico X . Decimos que $(T_\eta)_{\eta \in (0, 1]}$ **converge uniformemente sobre compactos** de $[0, +\infty) \times X$ a un semigrupo $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, e indicaremos este hecho simplemente por $T_\eta \rightarrow T_0$ cuando $\eta \rightarrow 0^+$, si para todo $\tau > 0$ y todo subconjunto compacto $K \subset X$ se verifica que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in K} \sup_{t \in (0, \tau]} d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) = 0.$$

Lema 3.1.4. Sea $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in (0, 1]}$ una familia colectivamente asintóticamente compacta de semigrupos no lineales en un espacio métrico X , convergiendo uniformemente sobre compactos a un semigrupo $\{T_0(t) : t \geq 0\}$. Sean, también, $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(0, 1]$ con $\eta_k \rightarrow 0^+$ e $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos de la recta real de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $I_k := [-t_k, +\infty)$ para una sucesión creciente de números positivos, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $t_k \rightarrow +\infty$.

Con estas condiciones, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada cualquiera de puntos de X , definiendo para cada natural k , $\xi_k : I_k \rightarrow X$ como $\xi_k(t) := T_{\eta_k}(t + t_k)x_k$, entonces, existen $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ una solución global para $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ y una subsucesión de $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a ξ_0 sobre compactos de la recta.

Demostración

En efecto, como $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in (0,1]}$ es una familia colectivamente asintóticamente compacta existe $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$, un subconjunto infinito de números naturales, tal que la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k)x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge hacia un punto $u_0 \in X$. Entonces definimos

$$\xi_0^{(0)}(t) := T_0(t)u_0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Consideramos, por la misma razón de antes, un subconjunto infinito de números naturales, $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0$, tal que $t_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}_1$ y la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ converge hacia un punto $u_1 \in X$. Definimos

$$\xi_0^{(1)}(t) := T_0(t+1)u_1 \text{ para todo } t \in [-1, 0].$$

Observemos que, por el hecho de que si una sucesión converge todas sus subsucesiones convergen al mismo límite, y tenemos que

$$\xi_0^{(1)}(0) = T_0(1)u_1 = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_1}} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_0}} T_{\eta_k}(t_k)x_k = u_0 = \xi_0^{(0)}(0).$$

Análogamente, sea $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ un subconjunto infinito tal que $t_k > 2$ para todo $k \in \mathbb{N}_2$ y la sucesión $(T_{\eta_k}(t_k - 2)x_k)_{k \in \mathbb{N}_2}$ converge hacia un punto $u_2 \in X$. Y definimos

$$\xi_0^{(2)}(t) := T_0(t+2)u_2 \text{ para todo } t \in [-2, -1].$$

Siguiendo el razonamiento anterior notamos que:

$$\xi_0^{(2)}(-1) = T_0(1)u_2 = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_2}} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - 2)x_k = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_1}} T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = u_1 = \xi_0^{(1)}(-1).$$

Repitiendo este argumento, obtenemos una cadena decreciente de conjuntos infinitos de números naturales

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0 \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_n \supset \cdots$$

tal que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ existe un punto $u_n \in X$ tal que

$$u_n = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_n}} T_{\eta_k}(t_k - n)x_k,$$

y si definimos la aplicación

$$\xi_0^{(n)}(t) := T_0(t+n)u_n \text{ para todo } t \in [-n, 1-n],$$

tenemos que

$$\xi_0^{(n)}(1-n) = T_0(1)u_n = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_n}} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_{n-1}}} T_{\eta_k}(t_k - n + 1)x_k = u_{n-1} = \xi_0^{(n-1)}(1-n) \Rightarrow$$

$$\xi_0^{(n)}(1-n) = \xi_0^{(n-1)}(1-n). \tag{3.1}$$

Para continuar con la demostración vamos a definir una nueva aplicación $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$, tal que

$$\xi_0(t) := \begin{cases} \xi_0^{(0)}(t), & t \geq 0 \\ \xi_0^{(n)}(t), & t \in [-n, 1-n], \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Gracias a (3.1) sabemos que ξ está bien definida. Podemos afirmar que ξ_0 es una solución global de $T_0(\cdot)$, pues ξ_0 cumple la definición ya que para todo $t \geq 0$ tenemos que:

(a) Si $\tau \geq 0$ entonces,

$$T_0(t)\xi_0(\tau) = T_0(t)T_0(\tau)u_0 = T_0(t+\tau)u_0 = \xi_0(t+\tau).$$

(b) Si $\tau < 0$ y $t + \tau \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, 1-n]$ y

$$T_0(t)\xi_0(\tau) = T_0(t)T_0(\tau+n)u_n = T_0(t+\tau+n)u_n = T_0(t+\tau)T_0(n)u_n = T_0(t+\tau)u_0 = \xi_0(t+\tau).$$

(c) Si $\tau < 0$ y $t + \tau < 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, 1-n]$ y, también existe un natural $m \leq n$ de manera que $t + \tau \in [-m, 1-m]$ y así, como $u_m = T_0(1)u_{m+1} = T_0(2)u_{m+2} = \dots = T_0(n-m)u_n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} T_0(t)\xi_0(\tau) &= T_0(t)T_0(\tau+n)u_n = T_0(t+\tau+n)u_n = T_0((t+\tau+m) + (n-m))u_n = \\ &= T_0(t+\tau+m)T_0(n-m)u_n = T_0(t+\tau+m)u_m = \xi_0(t+\tau). \end{aligned}$$

Con lo cual, ξ_0 cumple la definición de solución global para $T_0(\cdot)$ como habíamos afirmado.

Definimos, ahora, el conjunto infinito \mathbb{N}^* de modo que su n -ésimo elemento es el n -ésimo elemento de \mathbb{N}_n , en el orden creciente de los números naturales. Además, consideramos la restricción $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, que es una subsucesión de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Veamos que dicha subsucesión converge uniformemente sobre compactos de la recta real hacia $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$.

En efecto, sean, en primer lugar, $0 \leq a < b$ cualesquiera dos números reales dados. Entonces, por la hipótesis de convergencia de semigrupos tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{x \in C_0} \sup_{t \in [a,b]} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) = 0,$$

donde $C_0 := \{T_{\eta_k}(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, compacto.

Además para cada natural k y todo $t \geq 0$ se cumple que

$$d(T_{\eta_k}(t+t_k)x_k, T_0(t)u_0) \leq d(T_{\eta_k}(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k) + d(T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)u_0).$$

Con lo cual,

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_0}} \sup_{t \in [a,b]} d(T_{\eta_k}(t+t_k)x_k, T_0(t)u_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_0}} \sup_{t \in [a,b]} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) = 0.$$

Ahora, fijado un natural n , tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{x \in C_n} \sup_{t \in [-n, 1-n]} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) = 0,$$

donde $C_n := \{T_{\eta_k}(t_k - n)x_k : k \in \mathbb{N}_n\}$, compacto.

Igual que antes, para todo $k \in \mathbb{N}_n$ y para todo $t \in [-n, 1 - n]$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(T_{\eta_k}(t + t_k)x_k, T_0(t + n)u_n) &\leq d(T_{\eta_k}(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k, T_0(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k) + \\ &d(T_0(t + n)T_{\eta_k}(t_k - n)x_k, T_0(t + n)u_n). \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_n}} \sup_{t \in [-n, 1-n]} d(T_{\eta_k}(t + t_k)x_k, T_0(t + n)u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}_n}} \sup_{t \in [-n, 1-n]} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) = 0.$$

Finalmente, para el caso general de un un compacto cualquiera $K \subset \mathbb{R}$ tenemos que K está contenido en una cantidad finita de intervalos de la manera que hemos considerado arriba. Y como para cada natural n la sucesión $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ es, a partir de su n -ésimo término, una subsucesión de $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_n}$, entonces se tiene que

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in \mathbb{N}^*}} \sup_{t \in K} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) = 0.$$

Con lo cual, hemos probado que la subsucesión $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente sobre compactos de la recta real hacia $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$, terminando así la demostración del lema. ■

3.2. Parejas atractores-repulsos

Pasamos ahora a demostrar la equivalencia de los semigrupos gradiente y de tipo gradiente. Para llevar a cabo esta tarea tenemos que introducir unos nuevos conceptos y propiedades de la teoría de Morse-Conley (veáse [10]).

Para empezar la discusión vamos a hablar primero del concepto de atractor local y su repulsor correspondiente. Esta noción es la base para la que se puedan construir funciones de Lyapunov para semigrupos de tipo gradiente.

Definición 3.2.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X poseyendo atractor global \mathcal{A} . Decimos que un subconjunto $A \subset \mathcal{A}$ es un **atractor local** para $T(\cdot)$ cuando existe $\epsilon > 0$ de manera que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A$.*

*Si $A \subset \mathcal{A}$ es un atractor local para $T(\cdot)$, definimos su **repulsor complementario** indicado por A^* , como*

$$A^* := \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \emptyset\}.$$

En estas condiciones, el par (A, A^) se denomina un **par atractor-repulsor**.*

Observemos que si A es un atractor local entonces A es un conjunto cerrado e invariante para el semigrupo $T(\cdot)$, pues lo hemos definido como un conjunto ω -límite de un conjunto acotado, que ya vimos en el capítulo primero que es un conjunto cerrado e invariante.

Además, si (A, A^*) es un par atractor-repulsor, como A es cerrado e invariante, entonces A y A^* son disjuntos. Esto es debido a que, si existe $x \in A \cap A^*$, entonces, $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Pero, para todo $y \in \omega(x)$ se cumple que existe una cierta sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$, tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Notemos que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, pues $x \in A$ y A es invariante; con lo cual $y \in \overline{A} = A$, ya que A es cerrado. Y así hemos llegado a una contradicción pues habíamos supuesto que $\omega(x) \cap A = \emptyset$.

Proposición 3.2.2. *Si A es un atractor local para un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X y con atractor global \mathcal{A} , entonces su repulsor complementario, A^* , es un conjunto cerrado e invariante.*

Demostración

Veamos primero, por reducción al absurdo, que A^* es cerrado.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A^* : x_n \rightarrow x \in X$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Como \mathcal{A} es un conjunto cerrado, entonces tenemos que $x \in \mathcal{A}$.

Supongamos ahora que $x \notin A^*$, entonces existe $z \in \omega(x) \cap A$.

Por la caracterización del conjunto ω -límite como límite de sucesiones, tenemos que existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x$.

Por ser A atractor local, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A$, entonces como $z \in A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T(t_N)x \in \mathcal{O}_\epsilon(A)$ y como el operador $T(t_N)$ es continuo podemos afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(t_N)x_n \in \mathcal{O}_\epsilon(A)$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto,

$$\omega(x_n) = \omega(T(t_N)x_n) \subset \mathcal{O}_\epsilon(A) = A \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Esto es una contradicción con el hecho de que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A^*$; con lo cual, queda probado que $x \in A^*$ y así tenemos que A^* es cerrado.

Ahora veamos por doble inclusión que A^* es invariante.

Tomemos $x \in A^*$, entonces para todo $t \geq 0$ tenemos que $\omega(x) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \omega(T(t)x) \cap A = \emptyset$. Es obvio que, como $x \in A^*$ entonces $T(t)x \in A^*$ para todo $t \geq 0$. Con lo cual, $T(t)A^* \subset A^*$ para todo $t \geq 0$.

Por otra parte, consideremos $z \in A^* \subset \mathcal{A}$, entonces dado $t \geq 0$ tenemos que $z = T(t)x$, para algún $x \in \mathcal{A}$. Como ya vimos antes, podemos afirmar que $\omega(z) = \omega(x) \Rightarrow \omega(x) \cap A = \emptyset$, y llegamos a que $x \in A^*$ y $z \in T(t)A^*$, para todo $t \geq 0$. Así tenemos probada la otra inclusión, $A^* \subset T(t)A^*$ para todo $t \geq 0$, y con esto acabamos la demostración de la proposición. ■

Proposición 3.2.3. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X con atractor global \mathcal{A} , entonces se verifica que:*

A es un atractor local para $T(\cdot)$ si y sólo si A es compacto, invariante y atrae a $\mathcal{O}_\epsilon(A)$ para algún $\epsilon > 0$.

Demostración

Supongamos primero que A es un atractor local para $T(\cdot)$. Entonces, aplicando la Definición 3.2.1 tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $A = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(A))$. Con lo cual, por el Lema 1.2.9, es obvio, que $A = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(A))$ es compacto, invariante y atrae a $\mathcal{O}_\epsilon(A)$. Así queda demostrada esta primera implicación.

Ahora, supongamos que A es compacto, invariante y atrae a $\mathcal{O}_\epsilon(A)$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, dado $\delta > 0$ existe $t(\delta) > 0$ tal que $T(t)\mathcal{O}_\epsilon(A) \subset \mathcal{O}_\delta(A)$ para todo $t \geq t(\delta)$ y $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta(A)}$ para todo $\delta > 0$. Por tanto, como A es compacto, podemos deducir que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) \subset \bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathcal{O}_\delta(A)} = A$. Aplicando ahora el Lema 1.2.11 tenemos que, por ser A cerrado e invariante, $\omega(A) = A$; y como $A \subset \mathcal{O}_\epsilon(A)$ entonces obtenemos que $\omega(A) = A \subset \omega(\mathcal{O}_\epsilon(A))$. Con lo cual, llegamos a que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A$; terminando así la demostración de que A es atractor local y con ello acabamos la prueba de la proposición. ■

Debemos observar que nuestra definición de atractor local es ligeramente diferente de la que se encuentra en [10], puesto que aquí consideramos, como entorno de A , un entorno en todo el espacio X y no solamente restringido al atractor \mathcal{A} como se estudia en [10]. Sin embargo, mostraremos a continuación que nuestra definición coincide con la anterior, lo que nos va a permitir obtener las conclusiones de la teoría de Morse para espacios de fases no necesariamente compactos, lo que significa, en términos prácticos, que nuestros resultados se van a poder aplicar al estudio de la dinámica de EDP's.

Para realizar esta tarea, el siguiente lema es un resultado clave, de hecho, es crucial para todos los resultados que vamos a desarrollar desde ahora en adelante.

Lema 3.2.4. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X con atractor global \mathcal{A} . Si A es un compacto invariante por $T(\cdot)$ y existe $\epsilon > 0$ tal que A atrae a $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_\epsilon(A)$ por medio de $T(\cdot)$, entonces dado $\delta \in (0, \epsilon)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que*

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A).$$

Demostración

Esta prueba la haremos por reducción al absurdo; para ello supongamos que existe $\delta \in (0, \epsilon)$ y unas sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ con $t_n \rightarrow +\infty$ tales que $d(x_n, A) < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(T(t)x_n, A) < \delta \text{ para todo } t \in [0, t_n) \text{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

y

$$d(T(t_n)x_n, A) = \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, definimos para cada natural n la aplicación $\xi_n : [-t_n, +\infty) \rightarrow X$ por $\xi_n(t) := T(t + t_n)x_n$. Si usamos las hipótesis de compacidad asintótica colectiva y de convergencia uniforme en compactos para la familia constante de semigrupos $(T_\eta)_{\eta \in (0,1]}$, $T_\eta = T$ para todo $\eta \in (0, 1]$, por el Lema 3.1.4 sabemos que existe una solución global acotada, $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$,

para el semigrupo $T(\cdot)$ y una subsucesión de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que seguimos denotando igual, tal que para todo real t , $\xi_0(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(t)$.

Por otro lado, tenemos que $d(\xi_n(t), A) < \delta$, para todo $t < 0$ y n suficientemente grande, de donde tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$, concluimos que

$$d(\xi_0(t), A) \leq \delta \text{ para todo } t < 0,$$

y de $\delta = d(\xi_n(0), A)$, obtenemos que $\delta = d(\xi_0(0), A)$.

Finalmente, como $\delta < \epsilon$, obligatoriamente se tiene que A atrae a $K := \{\xi_0(t) : t \leq 0\} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_\epsilon(A)$. Con lo cual, dado $\mu \in (0, \delta)$ existe un $t_0 > 0$ tal que $d(T(t)z, A) < \mu$ para todo $z \in K$ siempre que $t \geq t_0$. Pero para $z := \xi_0(-t_0) \in K$ tenemos que

$$d(T(t_0)z, A) = d(T(t_0)\xi_0(-t_0), A) = d(\xi_0(0), A) = \delta.$$

Esto contradice el hecho de que $\mu < \delta$, completando así la prueba del lema. ■

Con el siguiente resultado probaremos que efectivamente nuestra definición de atractor local es equivalente a la que se da en [10].

Lema 3.2.5. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X poseyendo atractor global \mathcal{A} . Definimos, para cada $t \geq 0$, $S(t) := T(t)|_{\mathcal{A}}$ que, gracias a la invarianza resulta ser un semigrupo no lineal en el espacio métrico \mathcal{A} . Entonces:*

- (a) *Si $A \subset \mathcal{A}$ es un atractor local para $\{S(t) : t \geq 0\}$ en \mathcal{A} y $K \subset \mathcal{A}$ es un compacto disjunto con A^* , entonces A atrae a K por $S(\cdot)$.*
- (b) *Si $A \subset \mathcal{A}$ es un atractor local para $\{S(t) : t \geq 0\}$ en \mathcal{A} , entonces también lo es para $\{T(t) : t \geq 0\}$ en X .*

Demostración

(a) Sea $K \subset \mathcal{A}$ compacto tal que $K \cap A^* = \emptyset$. Veamos por reducción al absurdo que este apartado es cierto, para ello supongamos que A no atrae al conjunto K por medio del semigrupo $S(\cdot)$. Entonces, existe $\delta > 0$ para el cual hay una cierta sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$, $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\text{dist}(S(t_n)K, A) \geq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, existe una sucesión de puntos de K , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cumpliendo que

$$d(S(t_n)x_n, A) \geq \delta, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos suponer, cambiando la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por una subsucesión si hiciera falta, que $x_n \rightarrow x$, cuando $n \rightarrow +\infty$; el punto x está en K ya que K es compacto.

Ahora podemos aplicar el lema anterior, pues como A es atractor local satisface las hipótesis de dicho lema, y entonces tenemos que existe $\delta' \in (0, \delta)$ de forma que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A).$$

Así, obligatoriamente, deducimos que $d(S(t)x_n, A) \geq \delta'$, para todo $t \in [0, t_n]$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Como, $t_n \rightarrow +\infty$ y $x_n \rightarrow x$ afirmamos que

$$d(S(t)x, A) \geq \delta', \text{ para todo } t > 0.$$

La desigualdad anterior nos dice que $d(\omega(x), A) \geq \delta' \Rightarrow x \in A^*$; pero como $x \in K \subset A$, llegamos a una contradicción con el hecho de que $K \cap A^* = \emptyset$, terminando así la demostración de este apartado.

(b) Sea A un atractor local para el semigrupo $S(\cdot)$, veamos que A es un atractor local para el semigrupo $T(\cdot)$.

Consideremos $A^* \subset \mathcal{A}$, el repulsor complementario del atractor local A , entonces como A y A^* son disjuntos, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\mathcal{O}_{2\delta}(A) \cap A^* = \emptyset$. Aplicando el lema anterior, con $\epsilon = 2\delta$, tenemos que existe $\delta' \in (0, \delta)$ de manera que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A),$$

lo que implica que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \overline{\mathcal{O}_{\delta}(A)}$. Entonces, es fácil observar que, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \cap A^* = \emptyset$; y usando el apartado (i), con $K = \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$, afirmamos que A atrae a $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ por medio del semigrupo $S(\cdot)$ (y por tanto por medio del semigrupo $T(\cdot)$). Como A es compacto y $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ es invariante, por medio del semigrupo $T(\cdot)$, podemos deducir que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset A$. Pero, la otra inclusión es obvia, pues como $A \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ entonces, como A es compacto, $\omega(A) = A \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$; llegando así a que ambos conjuntos son iguales.

Con esto terminamos la demostración del apartado (ii) y con ello la demostración del lema. ■

Nuestro próximo objetivo será establecer que si (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, entonces $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente respecto de la familia $S := \{A, A^*\}$. Para ello, debemos ver una serie de lemas previos que nos van a ayudar a probar lo ya mencionado.

Lema 3.2.6. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} . Sean también (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$ y $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ solución global para $T(\cdot)$.*

Si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de manera que

$$d(\xi(t), A^*) < \delta \text{ para todo } t \leq t_0,$$

para cierto $\delta > 0$ con $\mathcal{O}_{\delta}(A^) \cap \mathcal{O}_{\delta}(A) = \emptyset$, entonces se verifica que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), A^*) = 0.$$

Demostración

Hagamos esta demostración por reducción al absurdo, para ello supongamos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), A^*) \neq 0.$$

Entonces, existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de números reales positivos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow +\infty$, de modo que para todo natural n

$$d(\xi(-t_n), A^*) \geq \epsilon.$$

Consideremos ahora el conjunto $\{\xi(-t_n) : n \in \mathbb{N}\}$, dicho conjunto está contenido en el compacto $K := \{x \in \mathcal{A} : d(x, A^*) \geq \epsilon\}$, que por el lema anterior, es atraído por A . Luego, existe $\tau > 0$ tal que $d(T(t)z, A) < \delta$ para todo $z \in K$ y todo $t \geq \tau$.

Tomamos ahora $z := \xi(-t_{n_0}) \in K$, con $t_{n_0} \geq \tau - t_0$, entonces tenemos que

$$d(\xi(t_0), A) = d(T(t_{n_0} + t_0)\xi(-t_{n_0}), A) = d(T(t_{n_0} + t_0)z, A) < \delta.$$

Así terminamos la prueba del lema, puesto que hemos llegado a una contradicción con la elección de δ , ya que tenemos que $d(\xi(t_0), A) < \delta$, $d(\xi(t_0), A^*) < \delta$ pero $\mathcal{O}_\delta(A) \cap \mathcal{O}_\delta(A^*) = \emptyset$. Con lo cual lo que hemos supuesto es falso y por tanto, $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), A^*) = 0$.

■

Lema 3.2.7. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} . Sean también (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$ y $F \subset \mathcal{A}$ un subconjunto cerrado con $F \cap A = \emptyset$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ tal que $d(x, A^*) < \epsilon$ siempre que $T(t)x \in F$ con $t \geq t_\epsilon$ y $x \in \mathcal{A}$.*

Demostración

Haremos también esta demostración por reducción al absurdo, para ello supongamos que existen $\epsilon > 0$, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de \mathcal{A} y una sucesión de números reales positivos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$, tales que $T(t_n)x_n \in F$ pero $d(x_n, A^*) \geq \epsilon$.

Como F es compacto podemos suponer que $x_n \rightarrow x \in F$, si no cogemos una subsucesión suya; y como $d(x_n, A^*) \geq \epsilon$, entonces $d(x, A^*) \geq \epsilon$ y por tanto $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$.

Si usamos el Lema 3.2.2 tenemos que dado $0 < \delta < d(F, A)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A). \quad (3.2)$$

Además, existe $\tau_1 > 0$ de modo que $T(t)x \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ siempre que $t \geq \tau_1$.

Por la continuidad del operador $T(\tau_1) : X \rightarrow X$, existe un natural n_0 de modo que $T(\tau_1)x_n \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ para todo $n \geq n_0$, luego por (3.2), tenemos que $T(t + \tau_1)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A)$ para todo $t \geq 0$ y todo $n \geq n_0$. En particular, si $t_n \geq \tau_1$ con $n \geq n_0$ obtenemos

$$T(t_n)x_n = T((t_n - \tau_1) + \tau_1)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A),$$

contradiciendo que $T(t_n)x_n \in F$ por la elección de δ , terminando así la demostración.

■

Lema 3.2.8. Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(a) Si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global acotada para $T(\cdot)$ con $x := \xi(0) \notin (A \cup A^*)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), A^*) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), A) = 0.$$

(b) Para todo $x \in X$ tenemos que, o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A) = 0$, o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A^*) = 0$.

Demostración

(a) En efecto, como $x \notin A^*$, por el apartado (i) del Lema 3.2.5, deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), A) = 0.$$

Para probar el otro límite, consideremos $F := \{x\}$, recordando que $F \cap A = \emptyset$, por el lema anterior, tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ tal que $d(z, A^*) < \epsilon$ siempre que $T(t)z \in F$ para todo $t \geq t_\epsilon$ y $z \in \mathcal{A}$; es decir, siempre que $T(t)z = x$ con $t \geq t_\epsilon$ y $z \in \mathcal{A}$.

En particular, para $t \leq -t_\epsilon$, como $\xi(t) \in \mathcal{A}$ y $T(-t)\xi(t) = \xi(0) = x$, concluimos que $d(\xi(t), A^*) < \epsilon$ para todo $t \leq -t_\epsilon$, con lo que tenemos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), A^*) = 0$; terminando la prueba del apartado (i).

(b) Si $x \in \mathcal{A}$ se sigue del apartado (i) y de la invarianza de los conjuntos cerrados A y A^* . Con lo cual, supongamos que $x \notin \mathcal{A}$, en este caso, sean $0 < \delta < \delta'$ satisfaciendo la conclusión del Lema 3.2.4, es decir,

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A),$$

con δ de forma que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) = A$. Entonces, por un lado si existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)x \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$, obligatoriamente, $T(t)x \rightarrow A$, cuando $t \rightarrow +\infty$

Por otro lado, si para todo $t > 0$ tenemos que

$$d(T(t)x, A) \geq \delta', \tag{3.3}$$

entonces $T(t)x \rightarrow A^*$, cuando $t \rightarrow +\infty$; porque, si no, existe una sucesión de términos reales positivos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y un $\epsilon > 0$ tales que

$$d(T(t_n)x, A^*) \geq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Ahora, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n : [-t_n, +\infty) \rightarrow X$ por $\xi_n(t) := T(t + t_n)x$. Aplicando el Lema 3.1.4, concluimos la existencia de una solución $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ para $T(\cdot)$ tal que, podemos suponer que, cumple $\xi_0(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(t)$ para todo t real.

Luego, tenemos que $d(\xi_0(0), A^*) \geq \epsilon$, que por el apartado (i) del Lema 3.2.5 podemos afirmar que $d(T(t)\xi_0(0), A) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$; esto equivale a decir que $\xi_0(t) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Pero (3.3) implica que, para todo t real, $d(\xi_0(t), A) \geq \delta'$, impidiendo así que la convergencia $\xi_0(t) \rightarrow A$ se satisfaga y concluyendo la prueba. ■

Gracias a los tres lemas anteriores ya podemos demostrar que el semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo tipo gradiente respecto de la familia $S := \{A, A^*\}$.

Proposición 3.2.9. *Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$. Entonces, $S := \{A, A^*\}$ es una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados de modo que $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo de tipo gradiente.*

Demostración

Veamos primero que S es una familia finita, disjunta, de conjuntos invariantes aislados. Para ello, tomamos $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(A^*) \cap \mathcal{O}_\delta(A) = \emptyset$ y que $\omega(\mathcal{O}_\delta(A)) = A$.

Por un lado, si $\Xi \subset \mathcal{O}_\delta(A)$ es un conjunto invariante, como A por el Lema 1.2.9. atrae a $\mathcal{O}_\delta(A)$; con lo cual A atrae a Ξ por medio del semigrupo $T(\cdot)$. Como Ξ es invariante tenemos que $\Xi \subset A$. Por tanto, A es el invariante maximal en $\mathcal{O}_\delta(A)$ y así A es un invariante aislado.

Por otro lado, sea $\Xi \subset \mathcal{O}_\delta(A^*)$ un conjunto invariante. Supongamos que existe $x \in \Xi \setminus A^*$ entonces por el Lema 3.2.5 como $\Xi \subset \mathcal{A}$, tenemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A) = 0$. Pero esto es imposible, puesto que $T(t)x \in \Xi \subset \mathcal{O}_\delta(A^*)$ para todo $t \geq 0$, y $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(A) \cap \mathcal{O}_\delta(A^*) = \emptyset$.

Así, tenemos que A^* es un invariante aislado y el conjunto $S = \{A, A^*\}$ es una familia finita, disjunta, de conjuntos invariantes aislados.

Para ver que $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente respecto de la familia S , basta aplicar la conclusión del apartado (i) del Lema 3.2.8 para establecer tanto la propiedad (G1) como la (G2) de la Definición 3.1.1, completando así la prueba. ■

3.3. Función de Lyapunov para un par atractor-repulsor

En esta sección probaremos el resultado clave para la construcción de una función de Lyapunov dado un semigrupo de tipo gradiente. Dicho resultado asegura la existencia de una función continua, con propiedades bastantes particulares, asociada a una pareja atractor-repulsor. La demostración que haremos, aunque está inspirada en la que se encuentra en [10], es un poco distinta por varias razones. Una de ellas es que nosotros no trabajamos, necesariamente, en un espacio de fases compacto, y otra es que se hace necesario introducir los efectos de la función dada en el lema siguiente.

Lema 3.3.1. *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo no lineal en un espacio métrico X poseyendo atractor global \mathcal{A} . La función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A}), x \in X,$$

está bien definida, es continua y decreciente a lo largo de soluciones $T(\cdot)$.

Demostración

En efecto, pues como para todo $x \in X$ existe $t_x > 0$ tal que $T(t)x \in \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ para todo $t \geq t_x$, y como la función real $t \in [0, t_x] \mapsto d(T(t)x, \mathcal{A}) \in \mathbb{R}$ es continua definida en un compacto, se sigue que la función h está bien definida, o sea, toma valores reales en todos los puntos de X .

Veamos ahora que h es continua. Dado $\epsilon > 0$ consideramos $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\epsilon'}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$. Esto prueba la continuidad para los puntos de \mathcal{A} . Sigamos viendo la continuidad para puntos que están fuera de \mathcal{A} . Sea $x_0 \in X \setminus \mathcal{A}$ un punto dado, entonces $h(x_0) > 0$. Consideremos $\mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para algún $0 < \mu < h(x_0)$, y, por la continuidad de la función distancia al conjunto \mathcal{A} , sea V un entorno acotado de x_0 tal que $d(x, \mathcal{A}) < \mu$ siempre que $x \in V$.

Finalmente, sea $\tau > 0$ tal que $\gamma_\tau^+(V) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$, esta contención la tenemos gracias al Lema 4.1.4. y a que \mathcal{A} es atractor global; de aquí, se ve fácilmente que h es continua en x_0 .

Con lo cual, para $x \in V$ tenemos que $h(x) = \sup_{0 \leq t \leq \tau} d(T(t)x, \mathcal{A})$, y como la familia de aplicaciones $\{T(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$ es equicontinua en todos los puntos de V , y la función distancia al conjunto \mathcal{A} es uniformemente continua, entonces concluimos que la función $h|_V : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, completando así la prueba de la continuidad de h .

Para ver que h es decreciente a lo largo de soluciones, consideremos $x \in X$ y $t_2 > t_1 \geq 0$, entonces tenemos que

$$h(T(t_1)x) = \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_1)x, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} d(T(t+t_1)x, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq t_1} d(T(t)x, \mathcal{A}) \geq \sup_{t \geq t_2} d(T(t)x, \mathcal{A}).$$

Por tanto,

$$h(T(t_1)x) \geq h(T(t_2)x) \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Con lo cual queda demostrado que h es decreciente a lo largo de las soluciones de $T(\cdot)$ y con ello acabamos la prueba de la proposición. ■

Con ayuda de este resultado y de las herramientas desarrolladas en la sección anterior, podemos probar el resultado fundamental de esta sección.

Proposición 3.3.2. *Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$. Entonces, existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las cuatro propiedades siguientes:*

- (a) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en todo el espacio X .
- (b) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$.
- (c) $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$.

(d) Dado $x \in X$, si $f(T(t)x) = f(x)$, para todo $t \geq 0$, entonces $x \in (A \cup A^*)$.

En estas condiciones, dicha función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **función de Lyapunov del par atractor-repulsor** (A, A^*) .

Demostración

En efecto, como A y A^* son disjuntos, cerrados relativos de \mathcal{A} , con \mathcal{A} un cerrado de X , se deduce que A y A^* siguen siendo cerrados y disjuntos de X .

Consideremos la función de Urysohn canónica asignada al par de cerrados, disjuntos (A, A^*) , $l : X \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$l(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}, \quad x \in X.$$

Dicha función está bien definida y es uniformemente continua en X , pues denotando $d_0 := d(A, A^*) > 0$, tenemos que $|l(x) - l(z)| \leq \frac{1}{d_0}d(x, z)$ para cualesquiera que sean x y z de X .

Veamos que efectivamente es uniformemente continua

$$\begin{aligned} l(x) - l(z) &= \frac{d(x, A)d(z, A^*) - d(z, A)d(x, A^*)}{(d(x, A) + d(x, A^*))(d(z, A) + d(z, A^*))} \Rightarrow \\ |l(x) - l(z)| &\leq \frac{|d(x, A) - d(z, A)|d(z, A^*) + |d(z, A^*) - d(x, A^*)|d(z, A)}{(d(x, A) + d(x, A^*))(d(z, A) + d(z, A^*))} \end{aligned}$$

Y usando la desigualdad triangular llegamos a que

$$|l(x) - l(z)| \leq \frac{1}{d_0}d(x, z).$$

Además, es inmediato verificar que $l^{-1}(0) = A$ y que $l^{-1}(1) = A^*$.

Definimos ahora, la función $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$k(x) := \sup_{t \geq 0} l(T(t)x).$$

Probemos que $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$, con imagen contenida en $[0, 1]$ y tal que $k^{-1}(0) = A$, $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$ y si $x \in \mathcal{A}$ y $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \geq 0$ entonces $x \in (A \cup A^*)$.

- $k(X) \subset [0, 1]$ es obvio pues $l(T(t)X) \subset [0, 1]$ para todo $t \geq 0$.

- Veamos ahora que k es decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$.

Dados $x \in X$ y $0 \leq t_1 \leq t_2$ tenemos que

$$k(T(t_1)x) = \sup_{t \geq 0} l(T(t)T(t_1)x) = \sup_{t \geq 0} l(T(t+t_1)x) = \sup_{t \geq t_1} l(T(t)x) \geq \sup_{t \geq t_2} l(T(t)x) = k(T(t_2)x),$$

probando así que es decreciente a lo largo de soluciones.

- A continuación, veamos que $k^{-1}(0) = A$ y $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$.

Es obvio que $k(A) = \{0\}$ y que $k(A^*) = \{1\}$, ya que A y A^* son invariantes y por definición de l . Dado $x \in X$ con $k(x) = 0$, tenemos que $l(T(t)x) = 0$ para todo $t \geq 0$; entonces, $l(T(0)x) = 0 \Leftrightarrow l(x) = 0$, con lo cual, $x \in A$.

Para ver la otra igualdad, consideremos $x \in \mathcal{A}$, $x \notin A^*$ y $k(x) = 1$, entonces se verifica que $\omega(x) \subset A$. Como $\omega(x)$ atrae a x por el semigrupo $T(\cdot)$, $\omega(x) \subset A$ y l es continua podemos afirmar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} l(T(t)x) = 0$. Con lo cual, existe $t_0 > 0$ tal que $1 = k(x) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)x)$.

Como l es continua, por el teorema de Weierstrass sabemos que existe $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')x) = 1$; por tanto, $T(t')x \in A^*$. Así deducimos que, $\omega(x) = \omega(T(t')x) \subset A^*$, pero este hecho es imposible pues $\omega(x) \subset A$ y $A \cap A^* = \emptyset$. Por ello, queda probado que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$.

- Pasemos a probar que si $x \in \mathcal{A}$ y $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \geq 0$ entonces $x \in (A \cup A^*)$.

Para ello, supongamos que $x \notin (A \cup A^*)$, entonces por el apartado (i) del Lema 3.2.8 tenemos que $\omega(x) \subset A$ y de la definición de la función k y del hecho de que $\omega(x)$ atrae a x por el semigrupo, se verifica que $k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(T(t)x) = 0$; con lo cual $x \in A$, hecho imposible con lo que hemos supuesto y así terminamos esta parte de la prueba.

- A continuación vamos a ver que $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, para ello dividiremos la demostración en tres casos:

Caso 1; Continuidad de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ en los puntos de A^* . Sabemos que para todo $x \in X$ tenemos que $l(x) \leq k(x) \leq 1$, entonces dado $x_0 \in A^*$ y $x \in X$

$$|k(x) - k(x_0)| = 1 - k(x) \leq 1 - l(x) = l(x_0) - l(x) = |l(x) - l(x_0)|,$$

y como l es una aplicación continua, ya tenemos que k es una aplicación continua en A^* .

Caso 2; Continuidad de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ en los puntos de A . Consideremos $\epsilon > 0$, como l es una función continua tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(A)) \subset [0, \epsilon]$; entonces por el Lema 3.2.4 existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A)$. Con lo cual, $k(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset [0, \epsilon]$; pues dado $x \in \mathcal{O}_{\delta'}(A) \Rightarrow T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(A)$, para todo $t \geq 0 \Rightarrow l(T(t)x) \in [0, \epsilon] \Rightarrow k(x) \in [0, \epsilon]$. Así hemos visto que k es continua en los puntos de A .

Caso 3; Continuidad de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ en los puntos de $X \setminus (A \cup A^*)$. Sea $x_0 \in X \setminus (A \cup A^*)$, entonces por el apartado (ii) del Lema 3.2.8 tenemos que, o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x_0, A) = 0$, o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x_0, A^*) = 0$.

Supongamos primero que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x_0, A^*) = 0$, entonces $k(x_0) = 1$ y por la continuidad de la función l podemos tomar, $\epsilon > 0$ tal que existe $V \subset X$ un entorno de A^* tal que $l(V) \subset (1 - \epsilon, 1]$. Sea $t_0 > 0$ de manera que $T(t_0)x_0 \in V$. Ahora, por la continuidad del operador $T(t_0)$, existe un entorno, U , del punto x_0 tal que $T(t_0)U \subset V$. Con lo cual, tenemos que $k(x) > 1 - \epsilon$ para todo $x \in U$ (pues $T(t_0)x \in V \Rightarrow 1 - \epsilon < l(T(t_0)x) \leq k(x)$). Así

llegamos a que para todo $x_0 \in X \setminus (A \cup A^*)$ y todo $\epsilon > 0$, existe U entorno de x_0 tal que $|k(x) - k(x_0)| = 1 - k(x_0) < \epsilon$ para todo $x \in U$; quedando probada la continuidad de k .

Para acabar la demostración de la continuidad de la función k para los puntos de $X \setminus (A \cup A^*)$, debemos estudiar lo que pasa cuando tenemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x_0, A) = 0$. En este caso, consideremos $x_0 \in X \setminus (A \cup A^*)$, entonces $l(x_0) > 0$, con lo cual, existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(A)) \subset [0, \frac{l(x_0)}{2})$. Si aplicamos el Lema 3.2.4 obtenemos que existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A)$.

Sea $t_0 > 0$ tal que $T(t)x_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ para todo $t \geq t_0$, como el operador $T(t_0)$ es continuo, existe $U_1 \subset X$ entorno de x_0 tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ y además, $T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(A)$ para todo $t \geq t_0$ y todo $x \in U_1$.

Ahora, por la continuidad de la función l tenemos que existe $U_2 \subset X$ entorno de x_0 de manera que $l(x) > \frac{l(x_0)}{2}$ para todo $x \in U_2$.

Consideremos $U = U_1 \cap U_2$, entonces para todo $x \in U$ y todo $t \geq t_0$ se verifica que $T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(A)$ y $k(x) \geq l(x) > \frac{l(x_0)}{2}$, con lo cual, $l(T(t)x) < \frac{l(x_0)}{2} < k(x)$. Por lo tanto, tenemos que para todo $x \in U$, $k(x) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)x)$, en realidad, este supremo es un máximo porque l es una función continua.

Así queda demostrado que $k|_U$ es continua, siendo U un entorno concreto del cualquier punto $x_0 \in X \setminus (A \cup A^*)$. Por lo que k es continua para todos los puntos de X que no están ni en A ni en A^* , terminando la prueba de la continuidad para el Caso 3.

Concluimos, tras estos tres casos, que la aplicación $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en todo el espacio métrico X .

Una vez probadas todas las propiedades de la función k que nos harán falta posteriormente, vamos ahora, a considerar la función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida ya en el Lema 3.3.1 $h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A})$, $x \in X$.

Finalmente, la función que buscamos como función de Lyapunov para el par atractor-repulsor (A, A^*) será $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := k(x) + h(x), x \in X.$$

Efectivamente esta función cumple las cuatro propiedades enunciadas en la proposición,

(a) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua; obvio pues ya hemos visto que tanto k como h son dos funciones continuas en X .

(b) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de soluciones; pues como ya hemos probado anteriormente k y h son decrecientes a lo largo de soluciones.

(c) $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$. Veamos primero que $f^{-1}(0) = A$. Claramente, $f(A) = \{0\}$ y si, recíprocamente, $f(x) = 0$ para algún $x \in X$, tenemos que tanto $h(x)$ como $k(x)$ son nulos, ya que son funciones positivas. Y como ya sabemos, si $h(x) = 0$ y si $k(x) = 0$ entonces $x \in A$; por lo tanto queda demostrado que $f^{-1}(0) = A$.

Para ver que $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$, observemos que $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$, y como ya sabemos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$, podemos afirmar que $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$, terminando así la prueba de este apartado.

(d) Veamos ahora que si $x \in X$ y $f(x) = f(T(t)x)$ entonces $x \in (A \cup A^*)$.

Si suponemos que $x \in \mathcal{A}$, entonces la implicación es obvia puesto que ya se ha demostrado para k .

Si suponemos que $x \in X \setminus \mathcal{A}$, entonces por el Lema 3.2.8 tenemos que o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A) = 0$, o bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A^*) = 0$. La primera igualdad no se puede dar ya que si se diera tendríamos que, como f es continua y $f(A) = 0$,

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A) \Rightarrow 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(T(t)x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(x) = f(x).$$

Con lo cual, llegaríamos a un absurdo ya que tendríamos que $x \in A$; por lo que este límite no puede ser nulo.

Así podemos afirmar que si $x \in X \setminus \mathcal{A}$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x, A^*) = 0$ y además $f(x) = 1$, pues, como h y k son continuas,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(T(t)x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(T(t)x) + \lim_{t \rightarrow +\infty} h(T(t)x) = 1 + 0 = 1.$$

Pero este hecho es una contradicción ya que como hemos visto $k(x) \geq k(T(t)x)$ para todo $t \geq 0$, y $1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(T(t)x) \leq k(x) \leq 1$, por tanto, $k(x) = 1$; lo que obliga a que $h(x) = 0$.

Pero, esto es imposible porque como x no está en \mathcal{A} se cumple que $0 < d(x, \mathcal{A}) \leq h(x)$.

Con lo cual, queda probado que si $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \geq 0$, entonces $x \in \mathcal{A}$ y como ya hemos visto, $x \in (A \cup A^*)$.

Así queda demostrado que la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov para el par atractor-repulsor (A, A^*) . ■

3.4. Descomposición de Morse

Ahora vamos a introducir la noción de Descomposición de Morse para un atractor de un semigrupo no lineal en un espacio métrico. Dicho concepto será el puente que nos va permitir pasar de un semigrupo de tipo gradiente a un semigrupo gradiente puro.

Comencemos observando que si A_1 y A_2 son atractores locales para $T(\cdot)$ que cumplen $A_1 \subset A_2$, entonces simplemente aplicando la definición de repulsor complementario tenemos que $A_2^* \subset A_1^*$; pues se $x \in A_2^* \Rightarrow \omega(x) \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \omega(x) \cap A_1 = \emptyset \Rightarrow x \in A_1^*$.

Definición 3.4.1. Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} . Dada una cadena creciente formada por $n+1$ atractores locales de la forma

$$\emptyset =: A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n := \mathcal{A},$$

y considerando la cadena decreciente de sus repulsores complementarios

$$\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \cdots \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A},$$

poniendo para cada $j = 1, 2, \dots, n$, $\Xi_j := A_j \cap A_{j-1}^*$, la n -tupla ordenada

$$\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n).$$

se llama **Descomposición de Morse del atractor** \mathcal{A} y los conjuntos Ξ_j 's los **conjuntos de Morse de esta descomposición**.

Ahora en lo que queda de esta sección vamos a ver cómo se puede construir una Descomposición de Morse para un semigrupo de tipo gradiente, y para ello, el lema siguiente juega un papel importante.

Lema 3.4.2. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y que es de tipo gradiente respecto de la familia finita disjunta $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes aislados acotados. Entonces, alguno de los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a S es un atractor local para $T(\cdot)$.*

Demostración

Veamos primero que existe $j = 1, 2, \dots, n$ tal que para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ de manera que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) \quad (3.5)$$

donde δ_0 cumple que $\mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_r) = \emptyset$, siempre que $i \neq r$ y Ξ_i es el invariante maximal contenido en $\mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i)$.

Esto lo probaremos por reducción al absurdo, por ello supongamos que existen $\delta > 0$ y para cada $j = 1, 2, \dots, n$, una sucesión de números reales positivos, $(t_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$, con $t_k^{(j)} \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$, y $(x_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tales que para todo j y todo k , naturales,

$$d(x_k^{(j)}, \Xi_j) < \frac{1}{k},$$

$$d(T(t_k^{(j)})x_k^{(j)}, \Xi_j) = \delta,$$

y

$$d(T(t)x_k^{(j)}, \Xi_j) < \delta \text{ siempre que } t \in [0, t_k^{(j)}).$$

Entonces, definamos para cada $j = 1, 2, \dots, n$ y cada natural k ,

$$\xi_k^{(j)} := T(t + t_k^{(j)})x_k^{(j)}, \text{ para todo } t \in [-t_k^{(j)}, +\infty).$$

Por el Lema 3.1.4 podemos suponer que para cada $j = 1, 2, \dots, n$ existe una solución global $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ para $T(\cdot)$ tal que $\xi_k^{(j)} \rightarrow \xi_j$ (si $k \rightarrow +\infty$) uniformemente sobre compactos de la recta real; y como $T(\cdot)$ es de tipo gradiente respecto de S tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_j(t), \Xi_j) = 0, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n.$$

Pero también, por el mismo motivo, tenemos que ξ_j debe converger, cuando $t \rightarrow +\infty$, a un invariante aislado en S ; lo que produce una estructura homoclina en \mathcal{A} y esto es imposible pues $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente. Con lo cual, lo que hemos supuesto es falso y por tanto queda visto (3,5)

Ahora, sea $\Xi_j \in S$ para el cual se cumple (3.5), entonces es obvio que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j)) \subset \overline{\mathcal{O}_{\delta}(\Xi_j)} \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_j)$. Pero como Ξ_j es el invariante maximal contenido en $\mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_j)$ tenemos que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j)) = \Xi_j$, probado así que Ξ_j es atractor local, como buscábamos. ■

Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y que es de tipo gradiente respecto de la familia finita disjunta $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes aislados. Si después de una posible reordenación, Ξ_1 es, por el lema anterior, un atractor local para $T(\cdot)$ y $\Xi_1^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi_1 = \emptyset\}$ es su repulsor complementario, entonces, como los elementos de S son cerrados, invariantes y disjuntos entre sí, se sigue que para todo $j \geq 2, \Xi_j \subset \Xi_1^*$.

Considerando $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ la restricción de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a Ξ_1^* , tenemos que $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ hereda de $\{T(t) : t \geq 0\}$ las propiedades que definen los semigrupos de tipo gradiente, o sea, que $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ es de tipo gradiente en el espacio métrico Ξ_1^* respecto de la familia disjunta $S_1 := \{\Xi_2, \Xi_3, \dots, \Xi_n\}$ de invariantes aislados.

Entonces, de nuevo por aplicación del lema anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Ξ_2 es un atractor local para $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ en Ξ_1^* . Sea $\Xi_{2,1}^*$ el repulsor complementario de Ξ_2 en Ξ_1^* .

Al igual que antes, tenemos que $\Xi_j \subset \Xi_{2,1}^*$ siempre que $j \geq 3$ y se puede suponer que Ξ_3 es un atractor local para la restricción de $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ al conjunto $\Xi_{2,1}^*$, que es de tipo gradiente en $\Xi_{2,1}^*$ respecto de la familia $S_2 := \{\Xi_3, \Xi_4, \dots, \Xi_n\}$.

Poniendo $\Xi_{3,2}^*$ para indicar el repulsor complementario de Ξ_3 en $\Xi_{2,1}^*$, podemos seguir con el razonamiento hasta que se acaben todos los elementos de S , donde, al final, obtenemos que Ξ_1 es un atractor local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ en X y, poniendo, $\Xi_{1,0}^* := \Xi_1^*$, para cada $j \geq 2, \Xi_j$ es un atractor local para la restricción de $\{T(t) : t \geq 0\}$ al repulsor $\Xi_{j-1,j-2}^*$.

Por otro lado, observemos que si la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados, S , está ordenada por medio de la construcción que hemos descrito arriba, entonces para toda solución global acotada $\xi : \mathbb{R} \rightarrow +\infty$ con

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0, \quad (3.6)$$

obligatoriamente tenemos que $i \geq j$.

En efecto, en primer lugar, observemos que si Ξ es un atractor global en \mathcal{A} y Ξ^* es su repulsor complementario, entonces para toda solución global $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow X$ con $\zeta(0) \in \Xi^*$, se cumple que $\zeta(t) \in \Xi^*$ para todo t real, simplemente porque para todo t real se cumple que $\omega(\zeta(t)) = \omega(\zeta(0))$.

Ahora, notemos que si $j = 1$ no hay nada que demostrar.

Si $j = 2$, necesariamente $\xi(0) \in \Xi_1^*$; pues si $\xi(0) \notin \Xi_1^*$, entonces $\omega(\xi(0)) \cap \Xi_1 \neq \emptyset \Rightarrow \omega(\xi(0)) \subset \Xi_1$, y esto contradice que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_2) = 0$. Por lo tanto, $\xi(0) \in \Xi_1^*$, y $\xi(t) \in \Xi_1^*$ para todo t real. Como $\Xi_k \subset \Xi_1^*$ para todo $k \geq 2$, entonces ya tenemos que $i \geq j = 2$.

Para el caso general, probemos primero que si $j \geq 3, 3 \leq k \leq j$, y $\xi(0) \in \Xi_{k-2,k-3}^*$ y se cumple (3.6) entonces $\xi(0) \in \Xi_{k-1,k-2}^*$.

Observemos que, si $k = 3$ y $\xi(0) \in \Xi_{1,0}^*$ pero $\xi(0) \notin \Xi_{2,1}^*$, entonces, como $\xi(t) \in \Xi_1^*$ para todo t real y $\Xi_{2,1}^*$ es el repulsor complementario de Ξ_2 podemos afirmar que $\omega(\xi(0)) \subset \Xi_2$ lo que contradice que $j \geq 3$, ya que $\omega(\xi(0)) \subset \Xi_j$ por (3.6).

Si $k > 3$, $\xi(0) \in \Xi_{k-2,k-3}^*$ pero $\xi(0) \notin \Xi_{k-1,k-2}^*$, entonces, como $\xi(t) \in \Xi_{k-2,k-3}^*$ para todo t real y $\Xi_{k-1,k-2}^*$ es el repulsor complementario de Ξ_{k-1} podemos afirmar que $\omega(\xi(0)) \subset \Xi_{k-1}$, obligando, por (3.6), a que $\Xi_{k-1} = \Xi_j$, o sea, $k - 1 = j$ lo que contradice $k \leq j$.

De estos hechos, resulta que si (3.6) se cumple, se tiene que para todo k con $3 \leq k \leq j$, si $\xi(0) \in \Xi_{k-2,k-3}^*$ entonces $\xi(0) \in \Xi_{k-1,k-2}^*$. En particular, tenemos que $\xi(0) \in \Xi_{j-1,j-2}^*$ y por tanto, $\xi(t) \in \Xi_{j-1,j-2}^*$, y como $\Xi_l \subset \Xi_{j-1,j-2}^*$ siempre que $l \geq j$, obligatoriamente $i \geq j$, estableciendo el caso general.

A continuación con el siguiente teorema probaremos que la reordenación de los conjuntos de S , que hemos explicado anteriormente produce una Descomposición de Morse para el atractor \mathcal{A} de un semigrupo de tipo gradiente respecto de S .

Primero vamos a fijar algunas notaciones.

Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y que es de tipo gradiente respecto de la familia finita disjunta $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes aislados, que está, reordenada según ya hemos explicado. Pongamos,

$$A_0 := \emptyset, A_1 := \Xi_1, \text{ y para } j = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$A_j := A_{j-1} \cup W^u(\Xi_j). \quad (3.7)$$

Observemos que, con estas definiciones, para $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$A_j = \bigcup_{i=1}^j W^u(\Xi_i),$$

de donde, en particular, $A_n = \bigcup_{i=1}^n W^u(\Xi_i) = \mathcal{A}$.

Ahora ya podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 3.4.3. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y que es de tipo gradiente respecto de la familia finita disjunta $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes aislados, que está reordenada de forma que Ξ_1 es atractor local para $T(\cdot)$ en X y para $j \geq 2$, Ξ_j es atractor local para $T(\cdot)$ restringido a $\Xi_{j-1,j-2}^*$ con $\Xi_{1,0}^* := \Xi_1^*$, según hemos mostrado anteriormente.*

Entonces, para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$, el conjunto A_j como fue definido en (3.7) es un atractor local para $T(\cdot)$ en X . Además, para todo $j = 1, 2, \dots, n$ se verifica que

$$A_j \cap A_{j-1}^* = \Xi_j.$$

Es decir, los conjuntos de Morse de la descomposición son precisamente los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a S .

Demostración

La demostración de este teorema la dividiremos en cuatro pasos intermedios.

Primer paso: Veamos primero por inducción que existe $\delta > 0$ de manera que para todo $j = 1, 2, \dots, n - 1$ tenemos que

$$\mathcal{O}_\delta \left(\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i \right) \cap A_j = \emptyset. \quad (3.8)$$

(\cdot) Caso $j=1$, $A_1 = \Xi_1$, y es obvio que como son conjuntos invariantes aislados, tenemos que $\mathcal{O}_\delta \left(\bigcup_{i=2}^n \Xi_i \right) \cap A_1 = \emptyset$.

(\cdot) Supongamos ahora que tenemos la igualdad para $j - 1$, es decir, supongamos que $\mathcal{O}_\delta \left(\bigcup_{i=j}^n \Xi_i \right) \cap A_{j-1} = \emptyset$ y probemos para j .

Para eso, supongamos que $\mathcal{O}_\delta \left(\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i \right) \cap A_j \neq \emptyset$, entonces existe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A_j$ tal que

$$d \left(x_j, \bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i \right) < \frac{1}{k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

En realidad, podemos suponer que para todo k se cumple que

$$d(x_k, \Xi_{i_0}) < \frac{1}{k}, \quad (3.9)$$

para un cierto $j + 1 \leq i_0 \leq n$ fijo.

Como $A_j := A_{j-1} \cup W^u(\Xi_j)$ y estamos suponiendo la hipótesis cierta para $j - 1$, podemos además suponer que $x_k \in W^u(\Xi_j)$ para todo k natural.

Así, para cada natural k existe una solución global de $T(\cdot)$, $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow X$ con $\xi_k(0) = x_k$ cumpliendo que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_k(t), \Xi_j) = 0. \quad (3.10)$$

Como tenemos (3.9), entonces para cada natural k es posible encontrar un par de números reales $t'_k < t_k$ de forma que

$$d(\xi_k(t'_k), \Xi_{i_0}) = \delta \text{ y } d(\xi_k(t), \Xi_{i_0}) < \delta \text{ para todo } t \in (t'_k, t_k],$$

con δ tal que los δ -entornos de los elemntos de S son disjuntos entre sí.

Definamos, ahora, para cada k , la aplicación $\zeta_k : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $\zeta_k(t) := \xi_k(t + t'_k)$. Es fácil comprobar (por el Lema 3.1.4), que con estas condiciones la sucesión $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de la recta real hacia una solución global $\zeta^{(1)} : \mathbb{R} \rightarrow X$, que no está contenida en Ξ_{i_0} y cumple

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\zeta^{(1)}(t), \Xi_{i_0}) = 0.$$

Como $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente, existe un $\Xi_{i_1} \in S$ de modo que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\zeta^{(1)}(t), \Xi_{i_1}) = 0$. Y por la manera en que los hemos ordenado obligatoriamente tenemos que $i_1 > i_0$. Así, por otro lado, para cada natural r obtenemos un real τ_r tal que

$$d(\zeta^{(1)}(\tau_r), \Xi_{i_1}) < \frac{1}{r}$$

y por esto, junto con la convergencia $\zeta_k \rightarrow \zeta^{(1)}$, existe un natural k_r cumpliendo

$$d(\zeta_k(\tau_r), \Xi_{i_1}) < \frac{1}{r} \text{ siempre que } k \geq k_r,$$

teniendo en cuenta (3.10) (y la definición de ζ_k) obtenemos, para cada natural r , $\tau'_r < \tau_r$ de forma que

$$d(\zeta_{k_r}(\tau'_r), \Xi_{i_1}) = \delta \text{ y } d(\zeta_{k_r}(t), \Xi_{i_1}) < \delta \text{ siempre que } t \in (\tau'_r, \tau_r].$$

Luego, si definimos para cada r natural, $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $\phi_r(t) := \zeta_{k_r}(t + \tau'_r)$, podemos suponer, por el Lema 3.1.4, que existe una solución $\zeta^{(2)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ que no está contenida en Ξ_{i_1} de manera que $\phi_r \rightarrow \zeta^{(2)}$ uniformemente sobre compactos de la recta real, con

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\zeta^{(2)}(t), \Xi_{i_1}) = 0.$$

De nuevo, como $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente, sabemos que existe $\Xi_{i_2} \in S$, con $i_2 > i_1$, de modo que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\zeta^{(2)}(t), \Xi_{i_2}) = 0$.

Ahora, como el conjunto S es finito, este razonamiento parará después de un número finito de etapas y en la etapa final estaremos obligados a tener, o bien una estructura homoclina en \mathcal{A} , o bien estaríamos en una contradicción con el orden de los conjuntos de S . Ambas situaciones son imposibles, concluyendo así la prueba de este primer paso.

Antes de seguir, recordemos que gracias a (3.8), podemos afirmar que

$$\left(\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i \right) \cap \overline{A_j} = \emptyset$$

y, por tanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$ se cumple

$$\left(\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i \right) \cap \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) = \emptyset. \quad (3.11)$$

Segundo paso: Veamos ahora, que para todo $j = 1, 2, \dots, n$ y todo $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ de modo que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_j).$$

En efecto, en primer lugar, observemos que si tomamos $j = n$, $A_n = \bigcup_{i=1}^n W^u(\Xi_i) = \mathcal{A}$, el atractor global, que por el Lema 3.2.4 tenemos que la afirmación es cierta.

Por lo tanto, veamos la afirmación para un $j = 1, 2, \dots, n - 1$, para ello supongamos que es falsa; entonces existen $\delta \in (0, \delta_0)$ y sucesiones $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números reales positivos con $t_k \rightarrow +\infty$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tales que

$$d(x_k, A_j) < \frac{1}{k}, \quad d(T(t_k)x_k, A_j) = \delta \quad \text{y} \quad d(T(t)x_k, A_j) < \delta, \quad \text{siempre que } t \in [0, t_k].$$

De aquí, usando argumentos como los ya utilizados anteriormente, podemos obtener una solución global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ para $T(\cdot)$ cumpliendo

$$d(\xi_0(t), A_j) \leq \delta \quad \text{para todo } t \leq 0 \tag{3.12}$$

con

$$d(\xi_0(0), A_j) = \delta. \tag{3.13}$$

Finalmente, como $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente, cumple (G1), con lo que existe $\Xi_i \in S$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_0(t), \Xi_i) = 0$$

y como $\delta \in (0, \delta_0)$, donde δ_0 cumple (3.11), resulta, teniendo en cuenta (3.12), obligatoriamente $i \geq j$, mostrando que $\xi_0(0) \in W^u(\Xi_i) \subset A_j$, lo que contradice (3.13) y por esto nuestra segunda afirmación también es correcta.

Tercer paso: A continuación, veamos que dado $j = 1, 2, \dots, n$, y fijando $\delta \in (0, \delta_0)$ y $\delta' \in (0, \delta)$ de modo que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$, entonces

$$\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) = A_j,$$

es decir, que A_j es atractor local.

Como $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j)$ tenemos que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta(A_j)}$.

Para ello lo haremos por doble inclusión.

Sea $x \in \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$ entonces, por la invarianza de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$, existe $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ solución global con $\xi(0) = x$ de modo que $\xi(t) \in \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$ para todo t real. Luego, $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(A_j)} \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$ para todo t real. De donde, por la elección de δ_0 , (3.11), y por la propiedad (G1) de un semigrupo de tipo gradiente, tenemos que $\xi(t) \in A_j$.

Recíprocamente, como A_j es invariante, $A_j \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$.

Así, queda probado que A_j es un atractor local para el semigrupo $T(\cdot)$ en X .

Cuarto paso: Veamos ya por último que para todo $j = 1, 2, \dots, n$ tenemos que $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Observemos que para cada j

$$A_j = \bigcup_{i=1}^j W^u(\Xi_i).$$

Lo haremos por doble inclusión

Sea $x \in A_j \cap A_{j-1}^*$, entonces tenemos si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una solución global por x , ella debe cumplir que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d\left(\xi(t), \bigcup_{i=1}^j \Xi_i\right) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d\left(\xi(t), \bigcup_{i=j}^n \Xi_i\right) = 0 \quad (3.14)$$

y como hemos visto, por la manera con la que están ordenados los conjuntos en S , la única forma de que (3.14) sea cierto es que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0,$$

lo que muestra que $x \in \Xi_j$, pues ξ no puede ser solución homoclina. Así, llegamos a que $A_j \cap A_{j-1}^* \subset \Xi_j$.

Recíprocamente, si $x \in \Xi_j$, como Ξ_j es cerrado invariante, se sigue que $\omega(x) \subset \Xi_j$, por lo tanto, $\omega(x) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \Xi_i\right) = \emptyset$ y por esto $\omega(x) \cap A_{j-1} = \emptyset$, lo que implica que $x \in A_{j-1}^*$. Y como $\Xi_j \subset A_j$, concluimos que $x \in A_j$, completando la prueba y así terminando la demostración del teorema. ■

Para terminar esta sección vamos a probar la siguiente proposición, que nos ayudará para después poder unir la Descomposición de Morse dada en el teorema anterior con la función de Lyapunov de los pares atractor-repulsor correspondientes, como explicaremos en la próxima sección.

Proposición 3.4.4. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} . Entonces, cualquiera que sea la Descomposición de Morse $D := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ de \mathcal{A} , con $\Xi_j := A_j \cap A_{j-1}^*$ para $j = 1, 2, \dots, n$, tenemos*

$$\bigcup_{j=1}^n \Xi_j = \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_{j-1}^*), \quad (3.15)$$

donde

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathcal{A},$$

es la cadena de atractores locales y

$$\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \dots \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A}$$

la cadena de sus repulsores correspondientes.

Demostración

Hagamos esta demostración por doble inclusión.

En efecto, veamos primero que $\bigcup_{j=1}^n \Xi_j \subseteq \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_{j-1}^*)$.

Para ello, sea $x \in \bigcup_{j=1}^n \Xi_j$, entonces existe un $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in \Xi_{j_0} = A_{j_0} \cap A_{j_0-1}^*$. Con lo cual, $x \in A_{j_0} \subset A_{j_0+1} \subset A_{j_0+2} \subset \dots \subset A_n$ y $x \in A_{j_0-1}^* \subset A_{j_0-2}^* \subset A_{j_0-3}^* \subset \dots \subset A_0^*$, luego,

$$x \in \left(\bigcap_{j=j_0}^n A_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{j_0-1} A_j^* \right) \subset \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_{j-1}^*).$$

Recíprocamente, sean $x \in \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_{j-1}^*)$, $I := \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ y $J := \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ tales que $I \cup J = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ con $I \cap J = \emptyset$ y $x \in A_i$ para todo $i \in I$ y $x \in A_j^*$ para todo $j \in J$. Claramente, si $i := \min I$, necesariamente, $I = \{i, i+1, i+2, \dots, n\}$ y $J = \{0, 1, 2, \dots, i-1\}$, con lo cual $x \in A_i \cap A_{i-1}^* = \Xi_i$, por tanto $x \in \bigcup_{j=1}^n \Xi_j$.

Así terminamos la demostración de la proposición. ■

3.5. Equivalencia entre semigrupos gradiente y de tipo gradiente

Terminemos este capítulo estableciendo quizás el resultado principal de este trabajo, que consiste en probar la equivalencia entre los dos conceptos de sistemas dinámicos autónomos que hemos estudiado, es decir, de los sistemas gradiente y de los sistemas de tipo gradiente. El hecho que sorprende es que la función de Lyapunov se puede obtener como consecuencia de la dinámica del sistema, probando así la “rigidez” que posee la dinámica de los semigrupos gradiente. Este resultado es nuevo en la literatura (véanse [1–3]).

Teorema 3.5.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X , con atractor global \mathcal{A} y familia finita disjunta $S = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes aislados.*

Entonces, $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo gradiente generalizado respecto de S si y sólo si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es de tipo gradiente generalizado respecto de S . Además, la función de Lyapunov $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escogida de modo que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ se cumple que $V(x) = k$ siempre que $x \in \Xi_k$.

Demostración

Como hemos visto en la Proposición 2.2.2, todo semigrupo gradiente generalizado es de tipo gradiente generalizado respecto de la misma familia de invariantes, con lo cual sólo nos queda probar que todo semigrupo de tipo gradiente es efectivamente un semigrupo gradiente.

En efecto, supongamos que la familia S está reordenada de manera que, por el Teorema 3.4.3, $D := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ es una Descomposición de Morse para \mathcal{A} . Sean

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathcal{A},$$

es la cadena de atractores locales y

$$\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \cdots \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A}$$

la cadena de sus repulsores correspondientes de manera que para cada $j = 1, 2, \dots, n$

$$\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*.$$

Ahora, sea para cada $j = 1, 2, \dots, n$, $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Lyapunov asociada al par atractor-repulsor (A_j, A_{j-1}^*) según la Proposición 3.3.2 y definimos $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$V(x) := \sum_{j=0}^n f_j(x), x \in X.$$

Afirmamos que V así definida cumple todas las condiciones de la Definición 2.1.2.

(a) En primer lugar, es evidente que V es continua pues es suma de funciones continuas.

(b) También es obvio que V es decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$ porque es suma de funciones decrecientes a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$.

(c) Ahora, supongamos que $x \in X$ sea tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geq 0$. Entonces, como cada $f_j : x \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$, esto implica que tenemos que para cada $j = 1, 2, \dots, n$, $f_j(T(t)x) = f_j(x)$ para todo $t \geq 0$, y por lo tanto, la Proposición 3.3.2 nos dice que $x \in A_j \cup A_{j-1}^*$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Con lo cual, $x \in \bigcap_{j=1}^n (A_j \cup A_{j-1}^*)$ que por la Proposición 3.4.4 tenemos que $x \in \bigcup_{j=1}^n \Xi_j$. Concluyendo así la prueba de este apartado pues ya tenemos que $x \in \Xi_j$ para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(d) Finalmente, para probar esta propiedad fijemos un conjunto invariante cualquiera $\Xi_k \in S$ y un punto suyo x . Del hecho de que $\Xi_k = A_k \cap A_{k-1}^*$ resulta que

$$x \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n \text{ y } x \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \cdots \subset A_0^*,$$

de donde podemos afirmar, también por la Proposición 3.3.2 que $f_j(x) = 0$ si $j = k, k+1, k+2, \dots, n$ y $f_j(x) = 1$ si $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Por tanto,

$$V(x) = \sum_{j=0}^n f_j(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j(x) + \sum_{j=k}^n f_j(x) = k,$$

estableciendo así la propiedad (iv) y completando la equivalencia entre ambos conceptos. ■

De este teorema observemos que hemos probado que:

Corolario 3.5.2. *Siguiendo la notación del teorema tenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $T(\cdot)$ es un sistema tipo gradiente.
- Existe una Descomposición de Morse para el atractor global.
- $T(\cdot)$ es un sistema gradiente.

Capítulo 4

Niveles de energía

En este capítulo vamos a construir una nueva Descomposición de Morse del atractor de un semigrupo de tipo gradiente que nos va a ofrecer nuevas informaciones sobre el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema en el sentido de clasificar invariantes aislados que posean las mismas características dinámicas, mostrando un orden para la conectividad de las soluciones. Dicha descomposición va a estar basada en el concepto que hemos denominado como “niveles de energía”, que, aunque se pueden definir para conjuntos invariantes aislados cualesquiera, simplemente cambiando las notaciones, vamos a restringir al caso de un conjunto finito de puntos de equilibrio, y que a continuación presentamos.

4.1. Definición

Definición 4.1.1. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X poseyendo atractor global \mathcal{A} y un número finito de puntos de equilibrio $\mathcal{E} := \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*\}$. Entonces definimos:*

(a) *Dados u^* y w^* en \mathcal{E} escribimos $u^* \geq w^*$ si existe una solución global no constante $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ para $T(\cdot)$ que satisface*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi(t) = u^* \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = w^*.$$

(b) *Los conjuntos,*

$$\mathcal{M}_1 := \{u^* \in \mathcal{E} : \text{para todo } w^* \in \mathcal{E} \text{ con } u^* \geq w^* \text{ se tiene } u^* = w^*\},$$

$$\mathcal{M}_2 := \{u^* \in \mathcal{E} : \text{para todo } w^* \in \mathcal{E} \text{ con } u^* \geq w^* \text{ se tiene } w^* \in \mathcal{M}_1\},$$

Análogamente para todo k natural

$$\mathcal{M}_{k+1} := \{u^* \in \mathcal{E} : \text{para todo } w^* \in \mathcal{E} \text{ con } u^* \geq w^* \text{ se tiene } w^* \in \mathcal{M}_k\}.$$

Notemos que $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+1}$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$.

(c) En las condiciones de (2), para cada natural k definimos los **niveles de energía** de $\{T(t) : t \geq 0\}$ como

$$\mathcal{N}_1 := \mathcal{M}_1 \text{ y } \mathcal{N}_k := \mathcal{M}_k \setminus \mathcal{M}_{k-1} \text{ si } k \geq 2.$$

Observemos que debe existir un natural q de forma que $\mathcal{N}_k = \emptyset$ para $k > q$, es decir, $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_q$ siempre que $k > q$. Esto es así, pues en caso contrario estaríamos con una cantidad infinita de puntos de equilibrio.

Con lo cual, de ahora en adelante, consideraremos como niveles de energía, solamente los conjuntos (potencialmente no triviales) $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n$, donde

$$n := \min\{q \in \mathbb{N} : \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_q \text{ para todo } k > 0\}.$$

Otra observación importante a tener en cuenta es que generalmente es posible que un punto de equilibrio u^* no pertenezca a ninguno de los niveles de energía arriba definidos. Este hecho ocurre, por ejemplo, cuando el punto u^* figura en una estructura homoclina que posee más de un vértice. En efecto, sea $\{u_{l_1}^*, u_{l_2}^*, \dots, u_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ conjuntamente con $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : j = 1, 2, \dots, k$, con $k \geq 2$, una estructura homoclina en \mathcal{A} . Entonces con la notación ya introducida tenemos que, por ejemplo, $u_{l_1}^* \geq u_{l_2}^* \geq \dots \geq u_{l_k}^* \geq u_{l_1}^*$, por la definición de estructura homoclina.

Supongamos ahora que $u_{l_1}^* \in \mathcal{N}_1$, por la definición de \mathcal{N}_1 , tenemos que $u_{l_1}^* = u_{l_2}^*$, de igual forma pasaría con los demás vértices con lo cual llegaríamos a una contradicción con el hecho de que $k \geq 2$.

Si fuera $u_{l_1}^* \in \mathcal{N}_2$, tendríamos que $u_{l_2}^* \in \mathcal{N}_1$ implicando que como ya hemos visto antes todos los vértices serían iguales y contradiciendo que $k \geq 2$. Y así sucedería con cualquier nivel de energía; con lo cual, puede ocurrir que un punto de equilibrio no pertenezca a ninguno de los niveles de energía.

Finalmente, observemos, también, que si u^*, w^* son puntos de equilibrio distintos de un mismo nivel \mathcal{N}_i , entonces no puede ocurrir que $u^* \geq w^*$. Puesto que si ocurre para $i \geq 2$, por la definición de \mathcal{N}_i , tendríamos que $u^* \in \mathcal{M}_i$ y por la definición de \mathcal{M}_i , como $u^* \geq w^*$, tendríamos que $w^* \in \mathcal{M}_{i-1}$ pero esto contradice el hecho de que $w^* \in \mathcal{N}_i = \mathcal{M}_i \setminus \mathcal{M}_{i-1}$. El caso $i = 1$ es evidente.

4.2. Estructura de los niveles de energía

De las observaciones realizadas en la sección anterior nos surge la pregunta de intentar determinar cuáles son los semigrupos que tienen la propiedad de que su conjunto de puntos de equilibrio se escriba como la unión de sus niveles de energía. Por lo que hemos visto arriba, una condición necesaria para que un semigrupo tenga esta propiedad es que su atractor no posea estructuras homoclinas. Entonces, es natural, pensar que esta propiedad la verificarán los semigrupos de tipo gradiente y, de hecho, para estos semigrupos sus niveles de energía están bien definidos, que es el contenido del siguiente resultado.

Lema 4.2.1. *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo no lineal de tipo gradiente en un espacio métrico X , entonces todo $u^* \in \mathcal{E} = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*\}$ está en \mathcal{N}_i para algún $i = 1, 2, \dots, n$, donde $n \geq 1$ es el número máximo de niveles de energía no vacíos de $T(\cdot)$.*

Demostración

a. Veamos primero que \mathcal{N}_1 es no vacío; para ello supongamos que es vacío y lleguemos a un absurdo.

Fijemos $u_{l_1}^* \in \mathcal{E}$ cualquiera. Entonces, como $u_{l_1}^* \notin \mathcal{N}_1$, por la definición de dicho conjunto, tenemos que debe existir un $u_{l_2}^* \in \mathcal{E}$ tal que $u_{l_1}^* \geq u_{l_2}^*$ y $u_{l_1}^* \neq u_{l_2}^*$. Análogamente, para $u_{l_2}^*$ como tampoco pertenece a \mathcal{N}_1 , debe existir un $u_{l_3}^* \in \mathcal{E}$ tal que $u_{l_2}^* \geq u_{l_3}^*$ y $u_{l_2}^* \neq u_{l_3}^*$. Además, $u_{l_3}^* \neq u_{l_1}^*$ pues, si no, tendríamos la estructura homoclina $u_{l_1} \geq u_{l_2} \geq u_{l_1}$ contradiciendo la propiedad (G2) de un semigrupo de tipo gradiente.

Siguiendo este razonamiento un número finito de veces, pues \mathcal{E} es finito, tenemos que en la etapa final, o bien el punto $u_{l_k}^*$ que allí aparece, forma una estructura homoclina con alguno de los puntos de equilibrio anteriores, o bien el punto $u_{l_k}^*$ está en \mathcal{N}_1 . Pero ambas situaciones son imposibles pues $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente, y por tanto sin estructuras homoclina, y también porque estamos suponiendo que \mathcal{N}_1 es vacío. Con lo cual, hemos llegado a un absurdo y podemos afirmar que \mathcal{N}_1 es no vacío.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{N}_1$ ya hemos terminado la demostración del lema.

b. Pero si $\mathcal{E} \neq \mathcal{N}_1$, veamos que \mathcal{N}_2 es no vacío, para ello supongamos de nuevo que es vacío y lleguemos a una contradicción. Fijemos $u_{l_1}^* \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{N}_1$ cualquiera. Entonces, como $u_{l_1}^* \notin \mathcal{N}_2$, debe existir $u_{l_2}^* \in \mathcal{E}$ con $u_{l_1}^* \geq u_{l_2}^*$ y $u_{l_2}^* \notin \mathcal{N}_1$. Por la propiedad (G2) de un semigrupo de tipo gradiente tenemos que $u_{l_1}^* \neq u_{l_2}^*$. De la misma forma, para $u_{l_2}^*$, debe existir $u_{l_3}^* \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{N}_1$ con $u_{l_2}^* \geq u_{l_3}^*$ y por la propiedad (G2), $u_{l_3}^* \neq u_{l_2}^*$ y $u_{l_3}^* \neq u_{l_1}^*$. Continuando este razonamiento un número finito de veces tendremos que llegamos a una contradicción análoga a la que ocurrió en el caso de \mathcal{N}_1 . Con lo cual, podemos afirmar que \mathcal{N}_2 es no vacío.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2$ ya hemos terminado la prueba del lema.

c. Si esto no ocurre, entonces también tenemos que \mathcal{N}_3 es no vacío. Pues sino fuera vacío por reducción al absurdo, si tomamos $u_{l_1}^* \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = \mathcal{E} \setminus \mathcal{M}_2$ arbitrario, podemos, de forma semejante, repetir el argumento anterior y así llegaremos a una contradicción. Con lo cual, \mathcal{N}_3 es no vacío.

De nuevo, si $\mathcal{E} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3 = \mathcal{M}_3$ ya hemos terminado la prueba del lema.

d. Así repitiendo este argumento, deberemos terminar después de un número finito $n \in \{1, 2, \dots, p\}$ de pasos, pues el conjunto \mathcal{E} es finito, habiendo explorado todas las posibilidades para los elementos de \mathcal{E} y completando la demostración de lema.

■

Veamos ahora alguna de las propiedades que poseen los niveles de energía de los semigrupos de tipo gradiente.

Observemos en primer lugar que, cuando hemos probado el Lema 4.2.1, en particular, hemos demostrado que para un semigrupo de tipo gradiente su nivel de energía \mathcal{N}_1 es no vacío y, de hecho, está formado por todos los puntos de equilibrio que no posean soluciones globales saliendo de ellos. Más precisamente, tenemos:

Definición 4.2.2. *Un punto de equilibrio u^* de un semigrupo no lineal $\{T(t) : t \geq 0\}$ en un espacio métrico X se dice que es **asintóticamente estable**, cuando es posible encontrar $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x, u^*) < \epsilon$ tenemos que $T(t)x \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Lema 4.2.3. *Si $\{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo no lineal de tipo gradiente en un espacio métrico X , entonces todos sus puntos de equilibrio en \mathcal{N}_1 son asintóticamente estables. Además, si n es como en el Lema 4.2.1. y es mayor o igual que 2, dado $2 \leq i \leq n$, para cada $u^* \in \mathcal{N}_i$ existe $\delta = \delta(u^*) > 0$ tal que si $d(x, u^*) < \delta$, entonces, o bien*

$$d(T(t)x, u^*) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

o bien

$$d(T(t)x, \mathcal{M}_{i-1}) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración

Veamos primero que todo los puntos de \mathcal{N}_1 son asintóticamente estables.

En efecto, supongamos que existe un punto de equilibrio $u^* \in \mathcal{N}_1$ pero que no es asintóticamente estable. Entonces, para cada natural k se puede hallar $x_k \in X$ con $d(x_k, u^*) < \frac{1}{k}$ de manera que $T(t)x_k$ no converge a u^* cuando $t \rightarrow +\infty$.

Así como $T(\cdot)$ es de tipo gradiente, debemos tener que para cada k natural

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)x_k, \mathcal{E} \setminus \{u^*\}) = 0.$$

Con lo cual, para cada k natural podemos hallar $t_k > 0$ tal que

$$d(T(t)x_k, u^*) < \delta \text{ para } 0 \leq t < t_k \text{ y } d(T(t_k)x_k, u^*) = \delta,$$

con $\delta > 0$ tal que los δ -entornos de los puntos de \mathcal{E} son disjuntos entre sí.

En estas condiciones, debemos tener $t_k \rightarrow +\infty$, pues si $t_k \rightarrow t_0$ llegamos a la contradicción siguiente, $d(u^*, u^*) = d(T(t_0)u^*, u^*) = \delta$.

Definimos ahora, $\xi_k : [-t_k, +\infty) \rightarrow +\infty$ por $\xi_k(t) := T(t+t_k)x_k$. Del Lema 3.1.4 podemos deducir que $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión, que indicamos con la misma notación que la usada en la sucesión, que converge uniformemente sobre compactos de la recta real hacia una solución global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $T(\cdot)$.

Observemos que $\xi_k(t) \in \mathcal{O}_\delta(u^*)$ para todo $t < 0$ y todo $k \geq k(t)$, para un cierto $k(t) \in \mathbb{N}$; con lo cual, también tenemos que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(u^*)$ para todo $t < 0$ y, siendo $T(\cdot)$ de tipo gradiente, resulta que $\xi(t) \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Por otro lado, ξ es solución no constante porque $\xi(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k)x_k = x$ con $d(x, u^*) = \delta$. Como $u^* \in \mathcal{N}_1$, debemos tener que $\xi(t) \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow +\infty$; por lo tanto, ξ es una estructura homoclina para $T(\cdot)$, lo que contradice la propiedad (G2). Luego todo punto de

equilibrio de \mathcal{N}_1 es asintóticamente estable.

Ahora, supongamos que n sea mayor o igual que 2 y que $u^* \in \mathcal{N}_2$ es tal que nuestra afirmación no se verifica. Entonces, para cada natural k podemos encontrar $x_k \in X$ con $d(x_k, u^*) < \frac{1}{k}$ tal que $T(t)x_k$ no converge a u^* cuando $t \rightarrow +\infty$, y además,

$$d(T(t)x_k, \mathcal{N}_1) \geq \epsilon \text{ para cualquiera que sea } t \geq 0, \quad (4.1)$$

donde $\epsilon > 0$ es el de la estabilidad asintótica común a todos los elementos de \mathcal{N}_1 obtenida en el caso anterior. Análogamente a lo que hicimos antes y con la misma justificación, tenemos que para cada k existe $t_k > 0$ tal que $d(T(t)x_k, u^*) < \delta$ para $0 \leq t < t_k$ y $d(T(t_k)x_k, u^*) = \delta$, donde $\delta > 0$ es como antes pero ahora cumpliendo también que $\delta < \epsilon$.

Por el mismo razonamiento que hemos hecho anteriormente, tenemos que $t_k \rightarrow +\infty$, y definiendo $\xi_k : [-t_k, +\infty) \rightarrow +\infty$ por $\xi_k(t) := T(t+t_k)x_k$, por el Lema 3.1.4, podemos deducir que $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión, que indicamos con la misma notación que la usada en la sucesión, que converge uniformemente sobre compactos de la recta real hacia una solución global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $T(\cdot)$.

Como $\xi_k(t) \in \mathcal{O}_\delta(u^*)$ para todo $t < 0$ y todo $k \geq k(t)$, para un cierto $k(t) \in \mathbb{N}$, tenemos que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(u^*)$ para todo $t < 0$ y, sabiendo que $T(\cdot)$ es de tipo gradiente, resulta que $\xi(t) \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Además, ξ es no constante, pues $\xi(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k)x_k = x$ con $d(x, u^*) = \delta$, y como $u^* \in \mathcal{N}_2$, por definición, tenemos que existe $\tau > 0$ de forma que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{N}_1)$ siempre que $t \geq \tau$. Y este hecho contradice (4.1), con lo cual nuestra afirmación es cierta por $i = 2$.

De la misma manera se prueban las afirmaciones correspondientes a los casos $3 \leq i \leq n$, recordando que, en la prueba de cada caso tomamos el menor de los radios de los entornos de los niveles obtenidos en las etapas anteriores satisfaciendo las correspondientes propiedades. ■

El lema precedente lo vamos a usar para probar el siguiente resultado, el cual es, simplemente, otra manera de interpretarlo.

Lema 4.2.4. Sean $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal de tipo gradiente en un espacio métrico X y $x \in X$ un punto cualquiera. Si $T(t)x \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y $u^* \in \mathcal{N}_i$ para algún $i = 1, 2, \dots, n$, entonces existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que, si $d(x, z) < \delta$ se tiene que

$$d(T(t)z, \mathcal{M}_i) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración

Observemos primero que, usando el lema anterior, es fácil hallar para cada $k = 1, 2, \dots, n$ un $\epsilon = \epsilon(k) > 0$ tal que si $w^* \in \mathcal{N}_k$ y $d(w, w^*) < \epsilon$ entonces $d(T(t)w, \mathcal{M}_k) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Supongamos que la conclusión del lema no es cierta, entonces podemos encontrar una sucesión $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en X con $x_j \rightarrow x$, si $j \rightarrow +\infty$, tal que

$$d(T(t)x_j, \mathcal{M}_i) \geq \epsilon \text{ cualesquiera que sean } t \geq 0 \text{ y } j \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

donde $\epsilon > 0$ es un $\epsilon(k)$ dado por el lema anterior.

Así, fijando $t \geq 0$ en (4.2) y haciendo $j \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$d(T(t)x, \mathcal{M}_i) \geq \epsilon \text{ para cualquier } t \geq 0.$$

Y de aquí, haciendo $t \rightarrow +\infty$ llegamos a que

$$d(u^* \mathcal{M}_i) \geq \epsilon.$$

Pero esto contradice el hecho de que $u^* \in \mathcal{N}_i$, con lo cual queda demostrado el lema. ■

Observemos que, si n es como en el Lema 4.2.1, entonces para todo $u^* \in \mathcal{N}_n$ no puede existir solución global acotada no constante $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ para $T(\cdot)$ con $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = u^*$. En efecto, esto es obvio para el caso $n = 1$, si $n \geq 2$ y ξ es una tal solución, como $T(\cdot)$ es de tipo gradiente, existe $w^* \in \mathcal{E}$ tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi(t) = w^*$. Del Lema 4.2.1. deducimos que $w^* \in \mathcal{N}_i$ para algún $1 \leq i \leq n$ y de la definición de los niveles de energía debemos tener que $u^* \in \mathcal{M}_{i-1}$, que evidentemente contradice el hecho de que $u^* \in \mathcal{N}_n$.

Mostremos que los niveles, como hemos definido, también constituyen una Descomposición de Morse para el atractor del semigrupo de tipo gradiente.

Teorema 4.2.5. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X con atractor global \mathcal{A} y siendo de tipo gradiente respecto del conjunto finito $\mathcal{E} = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*\}$ de puntos de equilibrio. Si $\mathcal{N} := (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n)$ es la n -upla formada por los niveles de energía de $T(\cdot)$, entonces \mathcal{N} define una Descomposición de Morse del atractor \mathcal{A} de $T(\cdot)$.*

Demostración

En esta demostración vamos a usar el Teorema 3.4.3. Para ello, observemos que, como $T(\cdot)$ es de tipo gradiente, no posee estructuras homoclinas y, por tanto, cada nivel \mathcal{N}_j es un conjunto invariante aislado, y por construcción de los propios conjuntos \mathcal{N} es una familia finita disjunta.

Con lo cual, \mathcal{N} es una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados, y como $T(\cdot)$ es un semigrupo de tipo gradiente respecto de \mathcal{E} , la pareja $(T(\cdot), \mathcal{N})$ hereda la propiedad (G1) de la Definición 3.1.1. Para ver que cumple también la propiedad (G2) de dicha definición, consideremos $\{\mathcal{N}_{l_1}, \mathcal{N}_{l_2}, \dots, \mathcal{N}_{l_k}\} \subset \mathcal{N}$ y $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ con } 1 \leq j \leq k\}$ de soluciones globales no constantes formando una estructura homoclina en \mathcal{A} . De las propiedades del semigrupo de tipo gradiente $(T(\cdot), \mathcal{E})$ podemos afirmar que para cada $j = 1, 2, \dots, k$ existe $u_{l_j}^* \in \mathcal{N}_{l_j}$ de forma que

$$u_{l_j}^* = \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_j(t) \text{ y } u_{l_{(j+1)}}^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_j(t).$$

Pero esto es una contradicción pues como, por la definición de estructura homoclina, $\mathcal{N}_{l_{k+1}} := \mathcal{N}_{l_1}$ tenemos que $u_{l_1}^*, u_{l_{(k+1)}}^* \in \mathcal{N}_{l_1}$ lo que el nivel \mathcal{N}_{l_k} debería ser más bajo que el nivel \mathcal{N}_{l_1} , por la definición de los niveles, completando así la prueba del teorema. ■

Para acabar este capítulo y con él, esta primera parte del trabajo, vamos a ver un corolario de este resultado, que tras toda la teoría de equivalencia entre los semigrupos de tipo gradiente y los semigrupos gradiente que hemos desarrollado en los capítulos anteriores, su demostración resulta evidente.

Corolario 4.2.6. *Sea $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X con atractor global \mathcal{A} de tipo gradiente respecto del conjunto finito $\mathcal{E} = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*\}$ de puntos de equilibrio. Si $\mathcal{N} := (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n)$ es la n -upla formada por los niveles de energía de $T(\cdot)$, entonces $(T(\cdot), \mathcal{N})$ es un semigrupo gradiente poseyendo una función de Lyapunov $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua a lo largo de soluciones de $T(\cdot)$ y que, además, cumple que $V(u^*) = k$ siempre que $u^* \in \mathcal{N}_k$, para todo $k = 1, 2, \dots, n$.*

Parte II

Estudio de sistemas Lotka-Volterra

Capítulo 5

Sistema Lotka-Volterra con dos especies

Para comenzar esta segunda parte del trabajo vamos a exponer en este capítulo un estudio sobre la existencia y unicidad de solución positiva y su comportamiento asintótico para el sistema

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - Au - Bv) \\ v' = v(\mu - Dv - Cu) \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \end{cases} \quad (5.1)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A, D > 0$, y $B, C \in \mathbb{R}$.

En concreto, nos vamos a centrar en el estudio de existencia, unicidad y comportamiento asintótico de la solución, en el caso competitivo, es decir, con $B, C > 0$, y en el caso cooperativo o mutualista, con $B, C < 0$.

Para comenzar este estudio, vamos a introducir un el concepto de la función de Kamke y sus propiedades, que nos ayudarán a probar la existencia y unicidad de solución para (6.1).

5.1. Función de Kamke

Antes de adentrarnos en la definición de dicha función, denotemos los siguientes límites para una función cualquiera $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \overline{D}^+ x(t) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \\ \overline{D}^- x(t) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \\ \underline{D}^+ x(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \\ \underline{D}^- x(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \end{aligned}$$

que se denominan, respectivamente, derivada superior a la derecha y a la izquierda, y derivada inferior a la derecha e izquierda.

Nosotros consideraremos funciones $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siendo I un intervalo cerrado en \mathbb{R} de la forma $[t_0, t_1]$, por lo que cabe notar

$$\overline{D}^+ x(t_0), \overline{D}^- x(t_1), \underline{D}^+ x(t_0), \underline{D}^- x(t_1).$$

Ahora sí, tras concretar la notación, podemos pasar a ver brevemente la definición y propiedades de la función de Kamke; si se quiere conocer más esta teoría ver [15].

Definición 5.1.1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, con n un número natural cualquiera, decimos que $v \leq u$ si se verifica que $v_i \leq u_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Análogamente, podemos definir las otras desigualdades entre vectores, tanto desigualdades estrictas como desigualdades en sentido amplio.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, con n un número natural cualquiera; decimos que f es una **función de Kamke en un conjunto** $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si satisface que fijado i , $1 \leq i \leq n$, y si tenemos $a, b \in S$ con $a_i = b_i, a_k \leq b_k$ con $k \neq i$; entonces f cumple que

$$f_i(a) \leq f_i(b).$$

Observemos que si $n = 1$ toda función es de Kamke en su conjunto de definición, pues si $n = 1$ entonces $i = 1$ con lo cual el punto a y el punto b son el mismo; y es obvio que tenemos $f(a) \leq f(b)$.

Para el caso $n = 2$, una función $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ es de Kamke si y sólo si f_1 es creciente en x_2 y f_2 es creciente en x_1 . Pues si usamos la definición, sabemos que para $1 \leq i \leq 2$, fijando $i = 1$, entonces, $a_1 = b_1$ y $a_2 \leq b_2$. Con lo cual, que se cumpla la definición de Kamke ($f_1(a_1, a_2) \leq f_1(b_1, b_2)$) equivale a que f_1 sea creciente en x_2 . De la misma forma, fijando $i = 2$, vemos que para que se cumpla la definición debe ocurrir que f_2 sea creciente en x_1 . Así queda visto que la equivalencia enunciada anteriormente es cierta.

Definición 5.1.2. Sea $f : D = [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $a, b \in \mathbb{R}$, decimos que f es una **función de Kamke** si para cada $t \in [a, b]$ fijo, se cumple que $f(t)$ es una función de Kamke en \mathbb{R}^n .

Teorema 5.1.3. Sean $f : D = [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de Kamke, con respecto a la segunda variable para cada valor fijo de la primera, y $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución continua de la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$ para $t \in [a, b]$.

1. Supongamos que existe $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que

$$\begin{cases} \overline{D}^- y(t) > f(t, y(t)) & t \in [a, b], \\ y(a) > x(a). \end{cases}$$

Entonces tenemos que $y(t) > x(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

2. Supongamos que existe $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que

$$\begin{cases} \underline{D}^- z(t) > f(t, z(t)) & t \in [a, b], \\ z(a) < x(a). \end{cases}$$

Entonces tenemos que $z(t) < x(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Demostración

Vamos a probar sólo la primera parte del teorema puesto que la segunda afirmación se demuestra de forma similiar a la primera.

Por tanto, veamos que efectivamente si existe una función $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua que satisface:

$$\begin{cases} \overline{D}^- y(t) > f(t, y(t)) & t \in [a, b], \\ y(a) > x(a). \end{cases}$$

Entonces tenemos que $y(t) > x(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Notemos que como $y(a) > x(a)$, por continuidad de las funciones x e y podemos afirmar que existe $\delta > 0$ tal que $y(t) > x(t)$ para todo $t \in [a, a + \delta]$.

Vamos a probarlo por reducción al absurdo; por ello supongamos que no se cumple que $y(t) > x(t)$ para todo $t \in [a, b]$; entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $y(t) > x(t)$ si $t \in [a, c)$ y además, $y(c) \geq x(c)$ con $y_i(c) = x_i(c)$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Por ser f una función de Kamke, aplicando la definición, sabemos que

$$f_i(c, y(c)) \geq f_i(c, x(c)),$$

pues $y(c) \geq x(c)$ con $y_i(c) = x_i(c)$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Por otro lado, tenemos que $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [a, b]$, con lo cual,

$$x'_i(c) = f_i(c, x(c)) \leq f_i(c, y(c)) < \overline{D}^- y_i(c).$$

Usando ahora la hipótesis de que $x_i(c) = y_i(c)$ resulta que,

$$\begin{aligned} \overline{D}^- y_i(c) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{y_i(c+h) - y_i(c)}{h} > x'_i(c) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{x_i(c+h) - x_i(c)}{h} \Rightarrow \\ \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{y_i(c+h) - y_i(c) + x_i(c) - x_i(c+h)}{h} &> 0 \Rightarrow \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{y_i(c+h) - x_i(c+h)}{h} > 0. \end{aligned}$$

Así, podemos afirmar que existe $\tilde{t} \in [a, c)$ tal que $y_i(\tilde{t}) < x_i(\tilde{t})$; hecho que contradice que $y(t) > x(t)$ si $t \in [a, c)$, como habíamos supuesto. Por lo tanto, queda demostrado el teorema. ■

Ahora veremos un teorema análogo al anterior, lo único que varía es que cambiamos las desigualdades estrictas por desigualdades en sentido amplio, y este nuevo teorema es el que se conoce como teorema de Kamke.

Antes del teorema de Kamke veamos una definición y un lema que nos ayudarán después a probarlo.

Definición 5.1.4. Sea $f : D = [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, consideremos la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$. Decimos que una solución $\vartheta(t)$ de esta ecuación, es una **solución maximal a la derecha de** $[a, b]$, si para cada $t_0 \in [a, b]$, toda solución x de la ecuación, tal que $x(t_0) \leq \vartheta(t_0)$ verifica que $x(t) \leq \vartheta(t)$ para todo $t > t_0, t \in [a, b]$.

Del mismo modo, decimos que $\vartheta(t)$, es una **solución minimal a la derecha de** $[a, b]$, si para cada $t_0 \in [a, b]$, toda solución x de la ecuación, tal que $x(t_0) > \vartheta(t_0)$ verifica que $x(t) \geq \vartheta(t)$ para todo $t > t_0, t \in [a, b]$.

Análogamente, podemos considerar el intervalo de extremos a y b , $-\infty \leq a \leq +\infty$, abierto o cerrado.

Lema 5.1.5. Sean $f : D = (a, b) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en D y de Kamke con respecto a la segunda variable para cada valor fijo de la primera, y un vector $\rho \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$, suficientemente pequeño. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos el problema

$$(P_k) \begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) + \frac{\rho}{k} \\ x(a) &= \nu^0 + \frac{\rho}{k} \end{cases}$$

Entonces, la solución ψ_k del problema (P_k) está bien definida en el intervalo $[a, b]$ y el problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(a) &= \nu^0 \end{cases}$$

posee una única $\vartheta(t)$ solución maximal a la derecha de $[a, b]$ para cada $(a, \nu^0) \in D$.

Además, cuando $k \rightarrow +\infty$ tenemos que $\psi_k(t) \rightarrow \vartheta(t)$ uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

La prueba de este lema nosotros no la haremos, se encuentra explicada en [11].

Teorema 5.1.6 (Kamke). Sean $f : D = (a, b) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en D y de Kamke con respecto a la segunda variable para cada valor fijo de la primera.

1. Sea $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución minimal a la derecha de la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$, en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que existe una función $y(t)$ continua en $[a, b]$ que satisface la inecuación diferencial,

$$\begin{cases} \overline{D} y(t) &\geq f(t, y(t)) \quad t \in (a, b), \\ y(a) &\geq \vartheta(a). \end{cases}$$

Entonces tenemos que $y(t) \geq \vartheta(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

2. Sea $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución maximal a la derecha de la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$, en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que existe una función $z(t)$ continua en $[a, b]$ que satisface la inecuación diferencial,

$$\begin{cases} D^- z(t) \leq f(t, z(t)) & t \in (a, b), \\ z(a) \leq \vartheta(a). \end{cases}$$

Entonces tenemos que $z(t) \leq \vartheta(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Demostración

De nuevo sólo vamos a demostrar un caso, puesto que el otro se prueba de forma similar.

Por variar, vamos a probar ahora la segunda afirmación; lo haremos también por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que

$$c = \sup_{t \in [a, b]} \{s \in [a, t] : z(s) \leq \vartheta(s)\} < b,$$

y veamos que llegaremos a un absurdo con lo cual tendremos que $c = b$, como queremos probar.

Como definimos en el Lema 5.1.5, podemos escoger un vector $\rho \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$, suficientemente pequeño, y sea ψ_k , para cada $k \in \mathbb{N}$, la solución del problema

$$(P_k) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) + \frac{\rho}{k} \\ x(c) = \vartheta(c) + \frac{\rho}{k} \end{cases}$$

en el intervalo $[c, c+h] \subset [a, b]$. Entonces, por dicho lema, tenemos que $\psi_k(t)$ están bien definidas en $[c, c+h]$ y además, convergen uniformemente a ϑ en $[c, c+h]$ cuando $k \rightarrow +\infty$.

Por el Teorema 5.1.3. resulta que $z(t) < \psi_k(t)$ en $t \in [c, c+h]$. Como ϑ es solución minimal, por la convergencia uniforme de ψ_k obtenemos que $z(t) \leq \vartheta(t)$ para todo $t \in [c, c+h]$; pero esto contradice la elección de c .

Con lo cual, lo que hemos supuesto es falso y queda demostrado el teorema. ■

5.2. Existencia y unicidad de solución

Una vez introducido el concepto de la función de Kamke vamos a estudiar la existencia y unicidad de solución para el sistema

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - Au - Bv) \equiv f_1(u, v) \\ v' = v(\mu - Dv - Cu) \equiv f_2(u, v) \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \geq (0, 0) \end{cases} \quad (5.2)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, A, D > 0$, y $B, C \in \mathbb{R}$.

Observemos que la condición inicial se puede comportar de la siguiente forma:

- Si $u_0 = v_0 = 0$, entonces la única solución de (5.2) es $(u, v) = (0, 0)$.

- Si $u_0 = 0$ y $v_0 > 0$, entonces la única solución de (5.2) es $u = 0$ y v solución de una ecuación logística, estudiada en el Anexo.
- Si $v_0 = 0$ y $u_0 > 0$, entonces la única solución de (5.2) es $v = 0$ y u solución de una ecuación logística, estudiada en el Anexo.
- Si $u_0, v_0 > 0$ entonces la solución del sistema (5.2) es positiva.

Proposición 5.2.1. *Sea el sistema Lotka-Volterra (5.2).*

- (a) *Si $B, C > 0$, entonces existe una única solución global en tiempo.*
- (b) *Si $B, C < 0$ y $BC < AD$, entonces existe una única solución global en tiempo.*
- (c) *Si $B, C < 0$ y $BC > AD$ y $\lambda, \mu > 0$, entonces la solución explota en tiempo finito.*

Demostración

En primer lugar, recordemos que por el Teorema de Picard sabemos que existe una única solución local en tiempo, pues f_1 y f_2 son regulares.

(a) Veamos primero lo que pasa en el caso competitivo. Para demostrar dicho resultado vamos a usar el teorema de Kamke; para ello acotaremos la solución del sistema (5.2) por la solución de un sistema que cumple las condiciones de Kamke.

Para acotar el sistema (5.2) usaremos un sistema de ecuaciones logísticas,

$$\begin{cases} U' = U(\lambda - AU) = f(U) \\ V' = V(\mu - DV) = g(V) \\ (U(0), V(0)) = (U_0, V_0) \end{cases} \quad (5.3)$$

con U_0, V_0 a elegir.

Como ambas ecuaciones son análogas, basta que probemos que la primera ecuación cumple el teorema de Kamke y ya tendremos que la segunda ecuación también lo cumple.

Para ello, consideremos $(u, v) : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ solución de (5.2), como $B > 0$ es obvio que tenemos que $u' \leq f(u)$, y tomando $U_0 = u_0$ tenemos que $u(0) = U(0)$; con lo cual, por el Teorema 5.1.6. podemos afirmar que $u(t) \leq U(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

Como $C > 0$ y tomando $V_0 = v_0$, podemos deducir que $v(t) \leq V(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Así queda probado que existe una única solución global en tiempo para el caso competitivo.

(b) Ahora sean $B, C > 0$ y $BC < AD$, construyamos (M, N) , con M y N dos valores constantes suficientemente grandes de forma que

$$\begin{cases} M' \geq f_1(M, N) \\ V' \geq f_2(M, N) \\ (M, V) \geq (u_0, v_0) \end{cases} \quad (5.4)$$

Veamos que el par (M, N) cumple las hipótesis para aplicar el teorema de Kamke. Es fácil ver que como M, N son suficientemente grandes tenemos la propiedad de $M \geq u_0$ y $N \geq v_0$.

Para ver que se cumplen las otras dos, resolvemos el sistema de inecuaciones siguiente (pues $M', N' = 0$, ya que son constantes), teniendo en cuenta que tanto A como $AD - CB$ son mayores que 0 y también que C es menor que 0

$$\begin{cases} 0 \geq M\lambda - AM^2 - BMN \\ 0 \geq N\mu - DN^2 - CMN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq \lambda - AM - BN \\ 0 \geq \mu - DN - CM \end{cases}$$

Con lo cual tenemos que $M \geq \frac{\lambda - BN}{A}$ y que $0 \geq \mu - DN - CM$. Esta última desigualdad es suficiente que se cumpla para $M = \frac{\lambda - BN}{A}$, y así tenemos que

$$0 \geq \mu - DN - C\left(\frac{\lambda - BN}{A}\right) \Leftrightarrow N \geq \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}.$$

Y sustituyendo para la inecuación de M tenemos que es suficiente con

$$M \geq \frac{\lambda - B\frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}}{A} = \frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}.$$

Con lo cual, para el par (M, N) constantes cualesquieras que cumplan que

$$\begin{cases} M \geq \text{máx} \left\{ \frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, u_0 \right\} \\ N \geq \text{máx} \left\{ \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}, v_0 \right\} \end{cases}$$

por el teorema de Kamke tenemos que $M \geq u(t)$ y $N \geq v(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Así, queda demostrado que existe una única solución global en tiempo para el caso cooperativo con $AD - BC > 0$.

(c) Para este caso, usaremos también el teorema de Kamke, pero esta vez acotaremos inferiormente por una solución que explota en tiempo finito.

Consideremos una ecuación logística de la forma siguiente

$$\begin{cases} z' = az + bz^2, & a, b > 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Aplicaremos el teorema de Kamke a $(\rho_1 z, \rho_2 z)$, siendo z la solución de la ecuación logística anterior. Para ello debemos elegir $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ para que podamos aplicar el teorema.

Lo primero que debe ocurrir es que $\rho_1 z_0 \leq u_0$ y que $\rho_2 z_0 \leq v_0$.

Para ello, tomaremos como parámetros de la ecuación logística los siguientes valores,

$$a = \text{mín}\{\lambda, \mu\}, \quad z_0 = \text{mín} \left\{ u_0, \frac{u_0}{\rho_2} \right\}, \quad b = \text{mín}\{-A - B\rho_2, -D\rho_2 - C\} > 0.$$

Para poder aplicar el teorema necesitamos que

$$\begin{cases} (\rho_1 z)' \leq f_1(\rho_1 z, \rho_2 z) \\ (\rho_2 z)' \leq f_2(\rho_1 z, \rho_2 z) \end{cases}$$

Desarrollemos estas inecuaciones y determinemos qué condiciones deben cumplir ρ_1 y ρ_2 .

$$\begin{cases} \rho_1(az + bz^2) \leq \rho_1 z(\lambda - A\rho_1 z - B\rho_2 z) \\ \rho_2(az + bz^2) \leq \rho_1 z(\mu - C\rho_1 z - D\rho_2 z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bz \leq \lambda - A\rho_1 z - B\rho_2 z \\ a + bz \leq \mu - C\rho_1 z - D\rho_2 z \end{cases}$$

Como $a = \min\{\lambda, \mu\}$ y $b, z > 0$ es suficiente que se cumpla

$$\begin{cases} b \leq \lambda - A\rho_1 z - B\rho_2 z \\ b \leq \mu - C\rho_1 z - D\rho_2 z \end{cases}$$

Por lo tanto, nos queda comprobar que existe $b > 0$ que verifique las desigualdades anteriores, lo que equivale a

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda - A\rho_1 z - B\rho_2 z \\ 0 \leq \mu - C\rho_1 z - D\rho_2 z \end{cases} \Leftrightarrow \rho_2 > -\frac{A\rho_1}{B}; \rho_2 < -\frac{C\rho_1}{D}$$

Como $\frac{-A}{B} < \frac{-C}{D}$, entonces existe $\rho_2 > 0$ cumpliendo que $0 < \frac{-A}{B} < \rho_2 < \frac{-C}{D}$.

Y para ρ_1 sirve cualquier valor, con lo cual, podemos tomar $\rho_1 = 1$. Así hemos conseguido que $(z, \rho_2 z)$ cumpla las condiciones para aplicar el teorema de Kamke, y con esto tenemos que $(z, \rho_2 z) \leq (u, v)$. Pero como la solución (5.5) explota en tiempo finito (véase Anexo), podemos concluir que la solución de (5.5) explota en tiempo finito. ■

5.3. Puntos de equilibrio y estabilidad

A continuación vamos a pasar a estudiar cuáles son los puntos de equilibrio del sistema (5.2), y también vamos a estudiar la estabilidad local de estos puntos, para así después estudiar la estabilidad global.

Comencemos entonces por calcular los puntos de equilibrio y estudiar la estabilidad local de cada uno.

Lema 5.3.1. *Sea el sistema de Lotka-Volterra (5.2). Entonces se verifica que sus puntos de equilibrio son*

$$E_{00} = (0, 0); E_{10} = \left(\frac{\lambda}{A}, 0\right); E_{01} = \left(0, \frac{\mu}{D}\right); E_{11} = \left(\frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}\right).$$

Además, tanto para el caso competitivo, con $B, C > 0, BC < AD$, como para el caso cooperativo, con $B, C < 0, BC < AD$, podemos afirmar que

(a) Si $\lambda, \mu < 0$ entonces E_{00} es localmente estable.

(b) Si $\lambda > 0$ y $\mu < \lambda \frac{C}{A}$ entonces E_{10} es localmente estable.

(c) Si $\mu > 0$ y $\lambda < \mu \frac{B}{D}$ entonces E_{01} es localmente estable.

(d) Si $\mu > \lambda \frac{C}{A}$ y $\lambda > \mu \frac{B}{D}$ entonces E_{11} es localmente estable.

Demostración

Calculemos primero los puntos de equilibrio; para ello resolvemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0 \\ f_2(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(\lambda - Au - Bv) = 0 \\ v(\mu - Dv - Cu) = 0 \end{cases}$$

Si $u = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \frac{\mu}{D} \end{cases}$; si $v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\lambda}{A} \end{cases}$; por último, para el caso en que ninguna de las dos variables sean nulas, tenemos;

$$u = \frac{\lambda - Bv}{A}$$

que sustituyendo en la otra ecuación nos queda,

$$\mu - Dv - \frac{C\lambda - CBv}{A} = 0 \Leftrightarrow v = \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}.$$

Y resolviendo ahora en la ecuación de u tenemos

$$u = \frac{\lambda - B \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}}{A} = \frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}$$

Con lo cual, queda visto que efectivamente los puntos $E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}$ que hemos definido en el lema, son todos los puntos estacionarios del sistema (5.2).

Ahora veamos que bajo las condiciones ya enunciadas estos puntos son localmente estables. Para ello analizaremos los autovalores de la matriz jacobiana en cada punto E_{ij} , con $i, j = 0, 1$. La matriz es:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda - 2Au - Bv & -Bu \\ -Cv & \mu - Cu - 2Dv \end{pmatrix}.$$

Supongamos que estamos en el caso competitivo, es decir, que $A, B, C, D > 0$ y $BC < AD$.

(a) Estudiemos los autovalores de la matriz J en el punto E_{00} .

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como por hipótesis tenemos que λ y μ , autovalores de la matriz J , son dos números reales negativos; entonces podemos afirmar que para este caso E_{00} es localmente estable.

(b) Teniendo en cuenta que $\lambda > 0$ y que $\mu < \lambda \frac{C}{A}$, analicemos el signo de los autovalores de la matriz $J\left(\frac{\lambda}{A}, 0\right)$.

$$J\left(\frac{\lambda}{A}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{B\lambda}{A} \\ 0 & \mu - \frac{C\lambda}{A} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz es fácil ver que son $-\lambda$ y $\mu - \frac{C\lambda}{A}$ que por las hipótesis de este apartado sabemos que ambos son dos números reales negativos; con lo cual, E_{10} es localmente estable.

(c) Este caso podemos comprobar que es similar al anterior, pues teniendo en cuenta que ahora $\mu > 0$ y que $\lambda < \frac{B\mu}{D}$, resulta,

$$J\left(0, \frac{\mu}{D}\right) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{B\mu}{D} & 0 \\ -\frac{C\mu}{D} & -\mu \end{pmatrix}.$$

De nuevo, es fácil comprobar que los autovalores de la matriz, que son $\lambda - \frac{B\mu}{D}$ y $-\mu$, que gracias a las hipótesis de nuestro caso son dos números reales negativos, así que E_{01} es localmente estable.

(d) Finalmente comprobemos que en este caso también es cierta la afirmación del lema, por ello hallemos los autovalores de

$$A_4 = J\left(\frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}\right) = \begin{pmatrix} \frac{A(-D\lambda + B\mu)}{AD - BC} & \frac{B(-D\lambda + B\mu)}{AD - BC} \\ \frac{C(C\lambda - A\mu)}{AD - BC} & \frac{D(-A\mu + C\lambda)}{AD - BC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Au^* & -Bu^* \\ -Cv^* & -Dv^* \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}\right) = -(u^* \ v^*) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Esta vez para hallar los autovalores, debemos calcular el siguiente determinante

$$|\alpha Id - A_4| = \begin{vmatrix} \alpha + Au^* & Bu^* \\ Cv^* & \alpha + Dv^* \end{vmatrix}$$

Si calculamos este determinante vemos que resulta

$$(\alpha + Au^*)(\alpha + Dv^*) - BCu^*v^* = \alpha^2 + \alpha(Au^* + Dv^*) + (AD - BC)u^*v^* = 0$$

Es fácil observar que cada miembro de la ecuación anterior es positivo ya que $A, D, u^*, v^* > 0$ y $AD > BC$, (u^* y v^* son positivos gracias a las hipótesis de nuestro apartado), con lo cual, los autovalores de la matriz A_4 tienen parte real negativa, como necesitábamos. Así concluimos que también E_{11} es localmente estable y con ello acabamos la demostración del lema, pues el caso cooperativo está también demostrado, ya que no hemos usado en ninguna parte el signo de B y de C . ■

Ahora vamos a pasar a estudiar la estabilidad global de los puntos de equilibrio ya calculados en el Lema 5.3.1.

Recordemos que para que un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias pueda ser globalmente estable, debe ocurrir que dicho sistema no posea órbitas periódicas. Para ver que esto ocurre en el sistema (5.2) vamos a ver primero el teorema de Bendixson-Dulac (para profundizar más véase [11]).

Teorema 5.3.2 (Bendixson- Dulac). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, simplemente conexo y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación continua y diferenciable. Sea $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que*

$$\nabla \cdot [w(x)f(x)] \neq 0, \text{ para todo } x \in U.$$

Entonces el sistema $x'(t) = f(x)$ no tiene órbitas periódicas en U .

Para demostrar este teorema vamos a usar el teorema de la divergencia. Por ello antes de ver la demostración de este teorema vamos a recordar brevemente el teorema de la divergencia para funciones de \mathbb{R}^2 .

Teorema 5.3.3 (de Gauss o de la divergencia). *Sea Γ una curva simple, cerrada con vector normal exterior, η , que encierra una región U . Sean también, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuamente diferenciable, y $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Entonces se verifica que*

$$\int_{\Gamma} w(\eta \cdot f)dl = \int \int_U \nabla \cdot (wf)dx dy.$$

Veamos la demostración del Teorema 5.3.2

Demostración

Esta demostración la haremos por reducción al absurdo; por ello supongamos que existe una órbita cerrada periódica Γ contenida totalmente en U , y sea A el área encerrada por esta órbita periódica. Entonces por el teorema de la divergencia podemos afirmar que

$$\int_{\Gamma} w(\eta \cdot f)dl = \int \int_U \nabla \cdot (wf)dx dy$$

donde η es el vector normal exterior de la curva Γ .

Por hipótesis de nuestro teorema tenemos que $\nabla \cdot (wf)$ no puede ser nulo en A . Pero, por otra parte, sabemos que la integral de línea es nula ya que $f\eta = 0$ pues Γ es una trayectoria y por lo tanto tangente a f .

Así llegamos a un absurdo y queda probado el teorema. ■

Teorema 5.3.4. *El sistema de Lotka-Volterra (5.2) no tiene órbitas periódicas en \mathbb{R}_+^2 .*

Demostración

Para probar este teorema usaremos el resultado que acabamos de demostrar, por eso, consideremos $U = \mathbb{R}_+^2$ y la función $w = u^{\alpha-1}v^{\beta-1}$ con $\alpha, \beta \geq 0$, que ahora concretaremos para que w cumpla la hipótesis del Teorema 5.3.2. Calculemos la divergencia de wf ,

$$\begin{aligned} \nabla(w(f_1, f_2)) &= w_u f_1 + w(f_1)_u + w_v f_2 + w(f_2)_v = \\ &w[\alpha(\lambda - Au - Bv) + \beta(\mu - Dv - Cu) - Au - Dv] \end{aligned}$$

Luego si tomamos $\alpha = \beta = 0$ tenemos que $\nabla \cdot (wf) = w(-Au - Dv)$, que es negativo en U puesto que tanto u, v, w, A, D son números reales positivos. Con lo cual, queda demostrado este teorema. ■

Sigamos ahora estudiando la estabilidad global de nuestro sistema (5.2), para ello comenzaremos estudiando el caso competitivo.

Lema 5.3.5. *Sean $B, C > 0$ y $BC < AD$; entonces para todo $(u_0, v_0) > (0, 0)$ tenemos que*

(a) *Si $\lambda, \mu \leq 0$ entonces $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

(b) *Si $\lambda > 0$ y $\mu < \lambda \frac{C}{A}$ entonces $(u, v) \rightarrow \left(\frac{\lambda}{A}, 0\right)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

(c) *Si $\mu > 0$ y $\lambda < \mu \frac{B}{D}$ entonces $(u, v) \rightarrow \left(0, \frac{\mu}{D}\right)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

(d) *Si $\mu > \lambda \frac{C}{A}$ y $\lambda > \mu \frac{B}{D}$ entonces*

$$(u, v) \rightarrow \left(\frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}\right) \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración

Para mayor comodidad renombraremos las ecuaciones de (5.2) de la siguiente forma

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - Au - Bv) \equiv uh_1(u, v) \\ v' = v(\mu - Dv - Cu) \equiv vh_2(u, v) \end{cases} \quad (5.6)$$

(a) Comencemos probando la estabilidad global del punto E_{00} . Si seguimos el razonamiento que hicimos en la demostración de la Proposición 5.2.1 tenemos que la solución (u, v) del sistema (5.2) verifica que $u \leq U$ y $v \leq V$, siendo (U, V) soluciones de las ecuaciones logísticas

$$\begin{cases} U' = U(\lambda - AU) \\ V' = V(\mu - DV) \end{cases} \quad (5.7)$$

con $A, D > 0$ y $\lambda, \mu \leq 0$.

Como las soluciones de las ecuaciones logísticas (5.7) tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$, (ver en Anexo); entonces podemos afirmar que $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Así queda probado que E_{00} es globalmente estable.

(b) Pasemos a ver el caso en que $\lambda > 0$ y $\mu < \frac{\lambda C}{A}$. En este caso vamos a estudiar el signo de la derivada de u y de v y vemos el comportamiento.

$$\begin{cases} h_1(u, v) = 0 \\ h_2(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{\lambda - Au}{B} \equiv r_1 \\ v = \frac{\mu - Cu}{D} \equiv r_2 \end{cases}$$

Dibujamos estas dos rectas, teniendo en cuenta que $A, B, C, D > 0$; $AD > BC$ y que

$$\frac{\mu}{C} < \frac{\lambda}{A} \text{ y que } \frac{\mu}{D} < \frac{\lambda}{B}; \text{ (pues } \mu A < \lambda C \Rightarrow \mu AB < \lambda BC \Rightarrow \mu AB < \lambda AD \Rightarrow \mu B < \lambda D \text{)}.$$

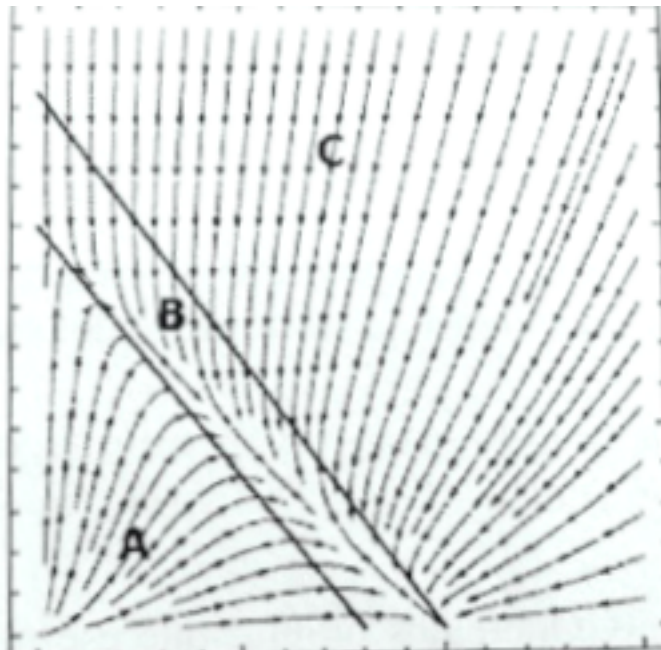


Figura 5.1: Estabilidad global del punto E_{10}

Podemos observar que hay tres regiones diferenciadas en las cuales tenemos,

- En la región A se cumple que $h_1(u, v), h_2(u, v) > 0$, con lo cual si hay solución en este recinto, dicha solución irá a la región B .
- En cambio, en la región B , $h_1(u, v) > 0; h_2(u, v) < 0$, con lo cual la solución que entra en B no sale de esta región y por tanto, irá al punto de equilibrio E_{10} , pues no hay órbitas periódicas.
- En esta región C pasa algo similar a la región A pues, aunque aquí $h_1(u, v), h_2(u, v) < 0$, si hay solución en este recinto tiene que ir a la región B .

Con lo cual, podemos concluir que para cualquier dato inicial $(u_0, v_0) > 0$ se cumple que $(u, v) \rightarrow \left(\frac{\lambda}{A}, 0\right)$; es decir, E_{10} es globalmente estable.

(c) Este caso se realiza de forma análoga al apartado (b), teniendo en cuenta que ahora,

$$\frac{\mu}{D} > \frac{\lambda}{B} \text{ y que } \frac{\mu}{C} > \frac{\lambda}{A}, \text{ (pues } \mu AD > \mu BC > \lambda DC \Rightarrow \mu A > \lambda C.)$$

Y de forma similar al caso anterior, concluimos que E_{01} es globalmente estable.

(d) De nuevo este caso lo hacemos como los anteriores, pero teniendo en cuenta que,

$$\frac{\mu}{C} > \frac{\lambda}{A} \text{ y que } \frac{\lambda}{B} > \frac{\mu}{D}.$$

Con lo cual, la gráfica que queda es la siguiente

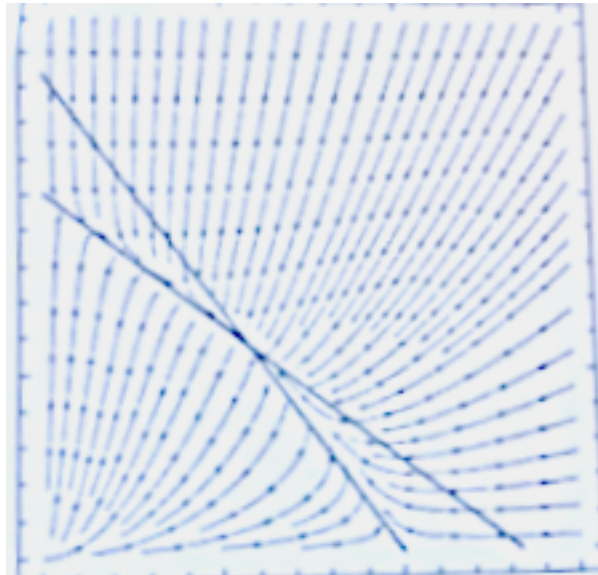


Figura 5.2: Estabilidad global del punto E_{11} .

Y de manera análoga a los casos anteriores, podemos concluir que E_{11} es globalmente estable.

Así terminamos el estudio de la estabilidad global para el caso competitivo. ■

A continuación, seguiremos con el estudio de la estabilidad global en el caso cooperativo, $B, C < 0$ y $AD > BC$.

Lema 5.3.6. Sean $B, C < 0$ y $BC < AD$, entonces para todo $(u_0, v_0) > (0, 0)$ tenemos que

(a) Si $\lambda, \mu \leq 0$ entonces $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

(b) Si $\lambda > 0$ y $\mu < \lambda \frac{C}{A}$ entonces $(u, v) \rightarrow \left(\frac{\lambda}{A}, 0\right)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

(c) Si $\mu > 0$ y $\lambda < \mu \frac{B}{D}$ entonces $(u, v) \rightarrow \left(0, \frac{\mu}{D}\right)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

(d) Si $\mu > \lambda \frac{C}{A}$ y $\lambda > \mu \frac{B}{D}$ entonces

$$(u, v) \rightarrow \left(\frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC}, \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC}\right) \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración

(a) Comencemos viendo que E_{00} es globalmente estable. Para ello supongamos que $0 \leq \lambda \leq \mu$, si no fuera así se razona de forma análoga cambiando λ por μ . En esta demostración usaremos el teorema de Kamke, por ello vamos a acotar el sistema de ecuaciones (5.2) de la siguiente manera,

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - Au - Bv) \leq u(\lambda - Au - Bv) \\ v' = v(\mu - Dv - Cu) \leq v(\lambda - Dv - Cu) \end{cases}$$

Y consideramos el sistema

$$\begin{cases} U' = U(\lambda - AU - BV) \\ V' = V(\lambda - DV - CU) \\ (U(0), V(0)) = (U_0, V_0) \end{cases} \quad (5.8)$$

Escogemos (U_0, V_0) de forma que $U_0 \geq u_0$ y que $V_0 = v_0$.

Probemos ahora que $V = kU$ es solución de (5.8) para un cierto valor real de k que vamos a calcular

$$\begin{aligned} \begin{cases} U' = U(\lambda - AU - BV) \\ V' = V(\lambda - DV - CU) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} U' = U(\lambda - AU - BkU) \\ kU' = kU(\lambda - DkU - CU) \end{cases} \Leftrightarrow \\ kU(\lambda - AU - BkU) &= kU(\lambda - DkU - CU) \Leftrightarrow k = \frac{A - C}{D - B} \end{aligned}$$

Con este valor de k y tomando $U_0 \geq u_0$ y $kU_0 \geq v_0$, por el teorema de Kamke tenemos que $(u, v) \geq (U, kU)$. Además, como

$$\begin{cases} U' = U \left(\lambda - \frac{AD - BC}{D - B} \right) \\ V' = V \left(\lambda - DV - C \frac{V}{k} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U' = U \left(\lambda - \frac{AD - BC}{D - B} \right) \\ V' = V \left(\lambda - \frac{AD - BC}{A - C} \right) \end{cases},$$

y éstas son ecuaciones logísticas con $a = \lambda < 0$ y $b = \frac{AD - BC}{D - B}, \frac{AD - BC}{A - C} > 0$, pues $A, D > 0, AD > BC$ y $C, B < 0$.

Con lo cual, (U, V) tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, (ver Anexo), y podemos concluir que $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Así queda probado que E_{00} es globalmente estable.

(b),(c),(d) Estos casos son similares al caso competitivo teniendo en cuenta que B, C ahora son negativos. ■

Veamos ahora la siguiente proposición, que es una consecuencia directa del Lema 6.3.1.

Proposición 5.3.7. Sean $B, C < 0, BC < AD, \mu > \lambda \frac{C}{A}$ y $\lambda > \mu \frac{B}{D}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ tenemos que

$$u \leq \frac{D\lambda - B\mu}{AD - BC} + \epsilon, v \leq \frac{A\mu - C\lambda}{AD - BC} + \epsilon,$$

donde (u, v) es solución de (5.2).

Con este lema damos por acabado nuestro estudio del sistema Lotka-Volterra en dimensión dos y pasamos ahora en el capítulo siguiente a estudiar el caso para sistemas en dimensión tres.

Capítulo 6

Sistemas Lotka-Volterra con tres especies

En este nuevo capítulo vamos a estudiar el comportamiento de los sistemas de tipo Lotka-Volterra con tres especies, en los que adicionalmente hay una especie polinizadora al sistema (5.2), es decir, hay una especie que está en relación de cooperación con las otras dos. En este caso estudiaremos dos fenómenos muy interesantes sobre el sistema completo.

El primer fenómeno que veremos es cómo estas especies polinizadoras contribuyen al incremento de la biodiversidad, que es lo que llamaremos Fenómeno 1; y para estudiarlo compararemos el comportamiento del sistema en dimensión dos con el de dimensión tres; de aquí que hayamos analizado dicho caso en el capítulo anterior.

El segundo fenómeno que estudiaremos es el que hemos denominado como Fenómeno 2, que consiste en que estas especies polinizadoras son las más vulnerables o débiles en cuanto a que tienden a extinguirse con mucha facilidad, (véase [23]) pero evita que las otras especies se extingan.

Para este capítulo, consideraremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_1' = u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3) \equiv f_1(u_1, u_2, u_3) \\ u_2' = u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3) \equiv f_2(u_1, u_2, u_3) \\ u_3' = u_3(\alpha_3 - u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2) \equiv f_3(u_1, u_2, u_3) \\ (u_1(0), u_2(0), u_3(0)) = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, 0 < \beta < 1, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ y suponemos que el dato inicial es positivo, $u_i^0 > 0$, con $i = 1, 2, 3$.

6.1. Existencia y unicidad

Comencemos este capítulo estudiando la existencia y unicidad de solución del sistema (6.1). Para ello vamos a empezar dando una condición necesaria y suficiente, en término de los parámetros del sistema, de existencia de solución para todo $t > 0$.

Teorema 6.1.1. *Supongamos que*

(a) *Estamos en un sistema en **régimen de cooperación débil**, es decir, que se cumple que*

$$\gamma_1\gamma_2 < \frac{1+\beta}{2},$$

entonces tenemos que existe una única solución positiva de (6.1) para todo $t > 0$.

(b) *En el caso en el que estemos en un **régimen de cooperación fuerte**, es decir, con*

$$\gamma_1\gamma_2 > \frac{1+\beta}{2},$$

entonces, si $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$ y $\alpha_3 > 0$, la única solución positiva de (6.1) explota en tiempo finito.

Antes de demostrar el teorema vamos a hacer una observación importante y es la siguiente: si el sistema (6.1) posee solución, dicha solución es positiva. Pues los planos $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ son invariantes para el sistema (6.1) y como las órbitas de las soluciones no se cortan, tenemos que si $u_0^i > 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ entonces la solución es siempre positiva.

Demostración

(a) Comencemos viendo el caso de la cooperación débil; en dicho caso, por el teorema de Picard sabemos que existe un única solución local para cada $t > 0$. Luego, lo que tenemos que ver es que dicha solución no explota en tiempo finito.

Sea (u_1, u_2, u_3) la solución local proporcionada por Picard para el sistema (6.1). Ahora consideremos $w := u_1 + u_2$ y supongamos que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ (si no razonamos de forma análoga cambiando α_2 por α_1).

$$w' = u_1' + u_2' = u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3) + u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3) \Rightarrow$$

$$w' \leq \alpha_2 w - u_1^2 - u_2^2 - 2\beta u_1 u_2 + \gamma_1 w u_3$$

Observemos que $-u_1^2 - u_2^2 - 2\beta u_1 u_2 \leq -\frac{1+\beta}{2}w^2$ (*). En efecto pues

$$\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}u_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}u_2\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\beta}{2}u_1^2 + \frac{1-\beta}{2}u_2^2 + (\beta-1)u_1u_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1+\beta}{2}\right)u_1^2 + \left(1 - \frac{1+\beta}{2}\right)u_2^2 + (2\beta - 1 - \beta)u_1u_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1+\beta}{2}u_1^2 - \frac{1+\beta}{2}u_2^2 - 2\frac{1+\beta}{2}u_1u_2 \geq -u_1^2 - u_2^2 - 2\beta u_1u_2 \Leftrightarrow -\frac{1+\beta}{2}w^2 \geq -u_1^2 - u_2^2 - 2\beta u_1u_2.$$

Lo que prueba (*)

Con lo cual, tenemos que

$$\begin{cases} w' \leq w \left(\alpha_2 - \frac{1+\beta}{2}w + \gamma_1 u_3 \right) \\ u_3' = u_3 (\alpha_3 - u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2) \end{cases}$$

Consideramos (p, q) solución de

$$\begin{cases} p' = p \left(\alpha_2 - \frac{1+\beta}{2}p + \gamma_1 q \right) \\ q' = q (\alpha_3 - q + \gamma_2 p) \end{cases}$$

con datos iniciales $p(0) = u_1^0 + u_2^0; q(0) = u_3^0$.

Por el teorema de Kamke tenemos que $(w, u) \leq (p, q)$ y por la Proposición 5.3.7, que la podemos aplicar gracias a que $\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1+\beta}{2}$, concluimos que p y q están acotadas, con lo cual, tanto u_1 , como u_2 , como u_3 están acotadas, pues u_1 y u_2 son soluciones positivas.

(b) Supongamos ahora que $\gamma_1 \gamma_2 > \frac{1+\beta}{2}$; entonces consideramos (w_1, w_2) solución de

$$\begin{cases} w_1' = w_1 \left(\alpha_1 - \frac{1+\beta}{2}w_1 + \gamma_1 w_2 \right) \\ w_2' = w_2 (\alpha_3 - w_2 + \gamma_2 w_1) \end{cases}$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces una solución de (6.1) es $\left(\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_1, w_2 \right)$, pues si sustituimos queda

$$\frac{1}{2}w_1' = \frac{1}{2}w_1 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}w_1 - \beta \frac{1}{2}w_1 + \gamma_1 w_2 \right) \Leftrightarrow w_1' = w_1 \left(\alpha_1 - \frac{1+\beta}{2}w_1 + \gamma_1 w_2 \right)$$

Pero por la Proposición 5.2.1 como $\gamma_1, \gamma_2 > 0; \gamma_1 \gamma_2 > \frac{1+\beta}{2}$ y $\alpha_1, \alpha_3 > 0$ tenemos que la solución (w_1, w_2) explota en tiempo finito; con lo cual, la solución del sistema (6.1) también explota en tiempo finito.

Así queda demostrado este teorema. ■

Para lo que queda de estudio del sistema (6.1) vamos a asumir que estamos en un régimen de cooperación débil, es decir, que tenemos

$$\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1+\beta}{2} (< 1) \text{ y que } 0 < \beta < \beta_0 < 1.$$

6.2. Puntos de equilibrio y estabilidad

Una vez vista la existencia y unicidad de solución, vamos a estudiar los puntos de equilibrio y su estabilidad tanto local como global. Pero antes de ver el modelo tridimensional, vamos a reescribir el Lema 5.3.6 para el sistema de competición que surge si en el modelo tridimensional $u_3 = 0$, es decir, para el sistema

$$\begin{cases} u'_1 = u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta_0 u_2) \\ u'_2 = u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta_0 u_1) \\ (u_1(0), u_2(0)) = (u_1^0, u_2^0) > 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Observemos que ahora la constante de competitividad entre u_1 y u_2 se ha modificado por una constante β_0 , que cumple que $0 < \beta < \beta_0 < 1$, pues, como ya dijimos en la introducción, sin la presencia de u_3 se incrementa la competitividad entre las otras dos especies (véase [25]).

Lema 6.2.1. *Supongamos que $0 < \beta < \beta_0 < 1$ y que $\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2} (< 1)$.*

(a) *Si $\alpha_1, \alpha_2 < 0$, entonces el punto $E_{00} := (0, 0)$ es globalmente estable.*

(b) *Si $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < \beta_0 \alpha_1$, entonces el punto $E_{10} := (\alpha_1, 0)$ es globalmente estable.*

(c) *Si $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 < \beta_0 \alpha_2$, entonces el punto $E_{01} := (0, \alpha_2)$ es globalmente estable.*

(d) *Si $\alpha_1 > \beta_0 \alpha_2$ y $\alpha_2 > \beta_0 \alpha_1$, entonces el punto $E_{11} := \left(\frac{\alpha_1 - \beta_0 \alpha_2}{1 - \beta_0^2}, \frac{\alpha_2 - \beta_0 \alpha_1}{1 - \beta_0^2} \right)$ es globalmente estable.*

Una vez reescrito el Lema 5.3.6 para el sistema (6.2), pasemos a calcular los puntos de equilibrio del sistema (6.1).

Lema 6.2.2. *Los puntos estacionarios o de equilibrio del sistema (6.1) son:*

$$\begin{aligned} E_{000} &= (0, 0, 0); E_{100} = (\alpha_1, 0, 0); E_{010} = (0, \alpha_2, 0); E_{001} = (0, 0, \alpha_3); \\ E_{110} &= \left(\frac{\alpha_1 + \beta \alpha_2}{1 - \beta^2}, \frac{\alpha_2 + \beta \alpha_1}{1 - \beta^2}, 0 \right); E_{011} = \left(0, \frac{\alpha_2 + \gamma_1 \alpha_3}{1 - \gamma_1 \gamma_2}, \frac{\alpha_3 + \gamma_2 \alpha_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \right); \\ E_{101} &= \left(\frac{\alpha_1 + \gamma_1 \alpha_3}{1 - \gamma_1 \gamma_2}, 0, \frac{\alpha_3 + \gamma_2 \alpha_1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \right); \\ E_{111} &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1(1 - \gamma_1 \gamma_2) + \alpha_2(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) + \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta)}{(1 - \beta)(1 + \beta - 2\gamma_1 \gamma_2)} \\ \frac{\alpha_2(1 - \gamma_1 \gamma_2) + \alpha_1(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) + \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta)}{(1 - \beta)(1 + \beta - 2\gamma_1 \gamma_2)} \\ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_2 + \alpha_3(1 + \beta)}{1 + \beta - 2\gamma_1 \gamma_2} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Demostración

Para ver los puntos de equilibrio simplemente tenemos que resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, u_3) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, u_3) = 0 \\ f_3(u_1, u_2, u_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(\alpha_1 - u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3) = 0 \\ u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3) = 0 \\ u_3(\alpha_3 - u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos,

- $u_1 = u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow E_{000} = (0, 0, 0)$.
- $u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = \alpha_1 \Rightarrow E_{100} = (\alpha_1, 0, 0)$.
- $u_1 = u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = \alpha_2 \Rightarrow E_{010} = (0, \alpha_2, 0)$.
- $u_1 = u_2 = 0 \Rightarrow u_3 = \alpha_3 \Rightarrow E_{001} = (0, 0, \alpha_3)$.
- $u_3 = 0$ (Sistema Lotka-Volterra de dimensión 2) $\Rightarrow E_{110} = \left(\frac{\alpha_1 + \beta\alpha_2}{1 - \beta^2}, \frac{\alpha_2 + \beta\alpha_1}{1 - \beta^2}, 0 \right)$.
- $u_1 = 0$ (Sistema Lotka-Volterra de dimensión 2) $\Rightarrow E_{011} = \left(0, \frac{\alpha_2 + \gamma_1\alpha_3}{1 - \gamma_1\gamma_2}, \frac{\alpha_3 + \gamma_2\alpha_2}{1 - \gamma_1\gamma_2} \right)$.
- $u_2 = 0$ (Sistema Lotka-Volterra de dimensión 2) $\Rightarrow E_{101} = \left(\frac{\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3}{1 - \gamma_1\gamma_2}, 0, \frac{\alpha_3 + \gamma_2\alpha_1}{1 - \gamma_1\gamma_2} \right)$.
- Por último, si $u_1, u_2, u_3 \neq 0$ tenemos que resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3 = 0 \\ \alpha_2 - u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3 = 0 \\ \alpha_3 - u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3 \\ u_2 = \alpha_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3 \\ u_3 = \alpha_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_2 = \alpha_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3 = \alpha_2 - \beta(\alpha_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3) + \gamma_1 u_3 \Leftrightarrow$$

$$u_2 = \frac{\alpha_2 - \beta\alpha_1 + \gamma_1(1 - \beta)u_3}{1 - \beta^2} \Rightarrow$$

$$u_3 = \alpha_3 + \gamma_2 \left(\alpha_1 - \beta \frac{\alpha_2 - \beta\alpha_1 + \gamma_1(1 - \beta)u_3}{1 - \beta^2} + \gamma_1 u_3 \right) + \gamma_2 \frac{\alpha_2 - \beta\alpha_1 + \gamma_1(1 - \beta)u_3}{1 - \beta^2}$$

Con lo cual, operando tenemos que

$$u_3 = \frac{(1 + \beta)\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_2}{1 + \beta - 2\gamma_1\gamma_2} \Rightarrow$$

Para u_1 y u_2 sustituimos el valor de u_3 y como resultado obtenemos el punto

$$E_{111} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1(1 - \gamma_1\gamma_2) + \alpha_2(\gamma_1\gamma_2 - \beta) + \alpha_3\gamma_1(1 - \beta)}{(1 - \beta)(1 + \beta - 2\gamma_1\gamma_2)} \\ \frac{\alpha_2(1 - \gamma_1\gamma_2) + \alpha_1(\gamma_1\gamma_2 - \beta) + \alpha_3\gamma_1(1 - \beta)}{(1 - \beta)(1 + \beta - 2\gamma_1\gamma_2)} \\ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_2 + \alpha_3(1 + \beta)}{1 + \beta - 2\gamma_1\gamma_2} \end{pmatrix}.$$

Acabando así el cálculo de los puntos de equilibrio del sistema (6.1). ■

Ahora vamos a estudiar quiénes son los autovalores de la matriz jacobiana correspondiente a los puntos de equilibrio del sistema (6.1), pues recordemos que un punto E es localmente estable si los autovalores de su matriz jacobiana tienen parte real negativa.

En realidad, sólo vamos a analizar con profundidad la estabilidad del punto E_{111} ya que es el caso en que habitan las tres especies.

Antes de continuar veamos cuál es la matriz jacobiana de (6.1) con respecto a las coordenadas (u_1, u_2, u_3) .

$$J(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2u_1 - \beta u_2 + \gamma_1 u_3 & -\beta u_1 & \gamma_1 u_1 \\ -\beta u_2 & \alpha_2 - 2u_2 - \beta u_1 + \gamma_1 u_3 & \gamma_1 u_2 \\ \gamma_2 u_3 & \gamma_2 u_3 & \alpha_3 - 2u_3 + \gamma_2 u_1 + \gamma_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

Ya conocida la matriz jacobiana, calculemos los autovalores de dicha matriz, aunque los del punto E_{111} lo haremos aparte.

Proposición 6.2.3. *Para el sistema (6.1) con matriz jacobiana J tenemos que*

- (a) *Los autovalores de $J(E_{000})$ son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.*
- (b) *Los autovalores de $J(E_{100})$ son $-\alpha_1, \alpha_2 - \beta\alpha_1, \alpha_3 + \gamma_2\alpha_1$.*
- (c) *Los autovalores de $J(E_{010})$ son $-\alpha_2, \alpha_1 - \beta\alpha_2, \alpha_3 + \gamma_2\alpha_2$.*
- (d) *Los autovalores de $J(E_{001})$ son $\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3, \alpha_2 + \gamma_1\alpha_3, -\alpha_3$.*
- (e) *Si E_{011} tiene sus coordenadas no nulas positivas, entonces, $J(E_{011})$ tiene los tres autovalores reales, donde dos de ellos son negativos y el otro es de la forma*

$$\lambda_{011} = \frac{\alpha_1(1 - \gamma_1\gamma_2) + \alpha_2(\gamma_1\gamma_2 - \beta) + \alpha_3\gamma_1(1 - \beta)}{1 - \gamma_1\gamma_2}.$$

- (f) *Si E_{110} tiene sus coordenadas no nulas positivas, entonces, $J(E_{110})$ tiene los tres autovalores reales, donde dos de ellos son negativos y el otro es de la forma*

$$\lambda_{110} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_2 + \alpha_3(1 + \beta)}{1 + \beta}.$$

(g) Si E_{101} tiene sus coordenadas no nulas positivas, entonces, $J(E_{101})$ tiene los tres autovalores reales, donde dos de ellos son negativos y el otro es de la forma

$$\lambda_{101} = \frac{\alpha_2(1 - \gamma_1\gamma_2) + \alpha_1(\gamma_1\gamma_2 - \beta) + \alpha_3\gamma_1(1 - \beta)}{1 - \gamma_1\gamma_2}.$$

Demostración

(a) Al igual que calculamos los autovalores en el Lema 5.3.1, vamos a hacerlo en este caso. Por ello calculamos el siguiente determinante

$$|\lambda Id - J(E_{000})| = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = 0.$$

Por tanto, los autovalores son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(b) Del mismo modo vemos los autovalores de E_{100} son

$$|\lambda Id - J(E_{100})| = (\lambda + \alpha_1)(\lambda - (\alpha_2 - \beta\alpha_1))(\lambda - (\alpha_3 + \gamma_2\alpha_1)) = 0.$$

Por tanto, los autovalores son $-\alpha_1, \alpha_2 - \beta\alpha_1, \alpha_3 + \gamma_2\alpha_1$.

(c), (d) Se razonan igual que el apartado (b).

(e) Renombremos

$$E_{011} = (0, u_2^*, u_3^*) := \left(0, \frac{\alpha_2 + \gamma_1\alpha_3}{1 - \gamma_1\gamma_2}, \frac{\alpha_3 + \gamma_2\alpha_2}{1 - \gamma_1\gamma_2}\right).$$

Entonces, calculando el determinante tenemos que

$$|\lambda Id - J(E_{011})| = (\lambda - \alpha_1 + \beta u_2^* - \gamma_1 u_3^*)(\lambda^2 + \lambda(u_2^* + u_3^*) + (1 - \gamma_1\gamma_2)u_2^*u_3^*) = 0.$$

$$\lambda_{011} = \alpha_1 - \beta u_2^* + \gamma_1 u_3^* = \frac{\alpha_1(1 - \gamma_1\gamma_2) + \alpha_2(\gamma_1\gamma_2 - \beta) + \alpha_3\gamma_1(1 - \beta)}{1 - \gamma_1\gamma_2}.$$

Los otros dos autovalores salen de la siguiente ecuación $\lambda^2 + \lambda(u_2^* + u_3^*) + (1 - \gamma_1\gamma_2)u_2^*u_3^* = 0$, que ambos tienen parte real negativa pues $u_2^*, u_3^* > 0$ y $\gamma_1\gamma_2 < 1$. Por lo tanto, como todos los miembros son positivos, las raíces tienen parte real negativa.

Estos autovalores son reales pues

$$(u_2^* + u_3^*)^2 - 4(1 - \gamma_1\gamma_2)u_2^*u_3^* = (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2 - 2u_2^*u_3^* + 4\gamma_1\gamma_2u_2^*u_3^* = (u_2^* - u_3^*)^2 + 4\gamma_1\gamma_2u_2^*u_3^* \geq 0,$$

ya que $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ y estamos suponiendo que u_2^* y u_3^* son positivos.

Con lo cual, queda probado dicho apartado.

(f), (g) Estos casos se estudian igual que el apartado (e). ■

A continuación, tras estudiar los autovalores correspondientes a los puntos de equilibrio que tienen nula alguna de sus coordenadas, estudiaremos la estabilidad local del punto de equilibrio E_{111} .

En primer lugar, denotaremos $E_{111} = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ asumiendo que $u_i^* > 0, i = 1, 2, 3$; y calculamos el jacobiano en dicho punto,

$$J(E_{111}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2u_1^* - \beta u_2^* + \gamma_1 u_3^* & -\beta u_1^* & \gamma_1 u_1^* \\ -\beta u_2^* & \alpha_2 - 2u_2^* - \beta u_1^* + \gamma_1 u_3^* & \gamma_1 u_2^* \\ \gamma_2 u_3^* & \gamma_2 u_3^* & \alpha_3 - 2u_3^* + \gamma_2 u_1^* + \gamma_2 u_2^* \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$J(E_{111}) = \begin{pmatrix} -u_1^* & -\beta u_1^* & \gamma_1 u_1^* \\ -\beta u_2^* & -u_2^* & \gamma_1 u_2^* \\ \gamma_2 u_3^* & \gamma_2 u_3^* & -u_3^* \end{pmatrix} = -\text{diag}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)B,$$

donde B es la matriz siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & -\gamma_1 \\ \beta & 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -\gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, antes de seguir vamos a ver algunos resultados de análisis matricial que nos ayudarán a ver la estabilidad del punto E_{111} .

Definición 6.2.4. Una matriz $C = (c_{ij})_{n \times n}$, con $n \in \mathbb{N}$, es **débilmente diagonal dominante** si $|c_{ii}| > |c_{ij}|$ para $i = 1, 2, \dots, n$ con $i \neq j$.

La matriz C decimos que es **débilmente cuasi-diagonal dominante** si existe una matriz diagonal D , con los elementos de la diagonal positivos, tal que $D^{-1}CD$ es débilmente diagonal dominante.

El siguiente teorema, que se encuentra en [9], nos da una condición necesaria y suficiente que ilustra lo dicho en la definición anterior y nos lleva a un resultado importante para nuestro caso.

Teorema 6.2.5. Si $n \geq 2$ y C es una matriz, entonces C es débilmente cuasi-diagonal dominante si y sólo si, para cualquier conjunto de índices distintos, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$, tenemos que

$$|c_{i_1 i_2} c_{i_2 i_3} \cdots c_{i_{k-1} i_k} c_{i_k i_1}| \leq |c_{i_1 i_1} c_{i_2 i_2} \cdots c_{i_k i_k}|.$$

A consecuencia del teorema anterior podemos enunciar el siguiente resultado para el caso de tres especies.

Teorema 6.2.6. Sea $n = 3$ y B es una matriz con los elementos de la diagonal positivos tal que B es débilmente cuasi-diagonal dominante. Entonces, un punto de equilibrio del sistema (6.1) es estable si y sólo si

$$\det(B) > 0.$$

Aplicaremos este último teorema al estudio de la estabilidad del punto E_{111} .

Proposición 6.2.7. *Supongamos que las tres componentes de E_{111} son positivas. Entonces, si*

$$\gamma_1\gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2}$$

tenemos que el punto de equilibrio E_{111} es localmente estable.

Demostración

Para ver que el punto E_{111} es localmente estable vamos a usar el Teorema 6.2.6, para ello, veamos que se cumplen las hipótesis para aplicar dicho teorema.

Comencemos probando que la matriz B es débilmente cuasi-diagonal dominante. Como hemos visto en el Teorema 6.2.5 para que B sea débilmente cuasi-diagonal dominante tiene que ocurrir que

- $|b_{12}b_{21}| \leq |b_{11}b_{22}|$, que sustituyendo por los elementos de B queda $|\beta\beta| \leq 1$. Esta desigualdad se cumple pues $\beta < 1$.
- $|b_{13}b_{31}| \leq |b_{11}b_{33}|$, que sustituyendo por los elementos de B queda $|\gamma_1\gamma_2| \leq 1$, esta desigualdad se cumple pues $\gamma_1\gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2} < 1$.
- $|b_{23}b_{32}| \leq |b_{22}b_{33}|$, que sustituyendo por los elementos de B queda $|\gamma_1\gamma_2| \leq 1$, esta desigualdad se cumple pues por hipótesis $\gamma_1\gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2} < 1$.
- $|b_{12}b_{23}b_{31}| \leq |b_{11}b_{22}b_{33}|$ que sustituyendo por los elementos de B queda $|\beta\gamma_1\gamma_2| \leq 1$, esta desigualdad se cumple pues por hipótesis $\gamma_1\gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2} < 1$ y $\beta < 1$.

Con esto queda probado que la matriz B es débilmente cuasi-diagonal dominante. Sólo nos queda ver que el determinante de la matriz B es positivo.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & \beta & -\gamma_1 \\ \beta & 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -\gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\gamma_1\gamma_2\beta - 2\gamma_1\gamma_2 - \beta^2.$$

Veamos que efectivamente es positivo,

$$1 + 2\gamma_1\gamma_2\beta - 2\gamma_1\gamma_2 - \beta^2 > 0 \Leftrightarrow 2\gamma_1\gamma_2(\beta - 1) > \beta^2 - 1$$

Y como $\beta < 1$ equivale a

$$2\gamma_1\gamma_2 < \beta + 1.$$

Desigualdad cierta por hipótesis.

Con lo cual, la matriz B es débilmente cuasi-diagonal dominante, sus elementos de la diagonal son positivos y su determinante es positivo; por el Teorema 6.2.6 podemos concluir que el punto E_{111} es localmente estable. ■

Una vez estudiada la estabilidad local del punto E_{111} vamos a estudiar su estabilidad global.

Goh en [12] prueba un criterio general para la existencia de una función de Lyapunov n -dimensional para un modelo de Lotka-Volterra que puede ser aplicado para nuestro sistema mutualista de tres dimensiones. Realmente, los resultados de Goh consideran,

$$\frac{du_i}{dt} = u_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \right), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3)$$

con $C = (c_{ij})_{n \times n}$ y $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ su equilibrio no trivial positivo asociado, esto es,

$$Cu^* + r = 0,$$

donde $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Veamos algunos resultados para el sistema (6.3) y, para el caso particular de $n = 3$, vamos a demostrar que si se cumple que $\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2}$ entonces para cualquier dato inicial siempre hay un punto globalmente estable.

Definición 6.2.8. *Supongamos que C es una matriz real cuadrada, $n \times n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, decimos que $C \in S_w$ si existe una matriz diagonal positiva W tal que $WC + C^t W$ es definida negativa, es decir, $u^t (WC + C^t W) u < 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Teorema 6.2.9. *Si $C \in S_w$ entonces el sistema (6.3) posee un punto de equilibrio no negativo y globalmente estable u^**

Este resultado se puede ver demostrado en [27] y también se puede consultar en [26].

A continuación veremos que efectivamente el sistema (6.1) posee un punto de equilibrio globalmente estable para la cooperación débil y para cualquier dato inicial positivo. Nosotros sólo vemos este teorema en dimensión 3 aunque se puede probar también en dimensión n . Para dicha prueba se puede consultar [13].

En lo que queda de trabajo denotaremos por $\mathbb{R}_+^3 = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ y por $\mathbb{R}_0^3 = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Teorema 6.2.10. *Supongamos que*

$$\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2};$$

entonces el sistema (6.1) posee un punto de equilibrio, u^ , no negativo y globalmente estable en \mathbb{R}_+^3 ; es decir, para todo $u_0 \in \mathbb{R}_+^3$ tenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t; u_0) - u^*\| = 0.$$

Demostración

Como estamos en el sistema (6.1) tenemos que nuestra matriz C es:

$$C = -B = \begin{pmatrix} -1 & -\beta & \gamma_1 \\ -\beta & -1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar este teorema, vamos a probar que $C \in S_w$ y así por el teorema anterior ya tendremos probado el resultado.

Para esta prueba consideramos $W = \text{diag}(w_1, w_1, w_2)$ con $w_1, w_2 > 0$ y vamos a ver qué valores deben tomar w_1 y w_2 de forma que $WC + C^tW$ sea definida negativa.

Denotemos por \mathcal{C} a la matriz que resulta al sumar WC y C^tW , entonces

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -2w_1 & -2\beta w_1 & \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 \\ -2\beta w_1 & -2w_1 & \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 \\ \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 & \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 & -2w_2 \end{pmatrix}.$$

Nosotros queremos elegir $w_1, w_2 > 0$ tales que los autovalores de la matriz $\mathcal{C} = WC + C^tW$ sean negativos. Para ello, calculemos el polinomio característico de \mathcal{C}

$$p(\lambda) = |\mathcal{C} - \lambda Id| = |WC + C^tW - \lambda Id| = (-2w_1 - \lambda + 2w_1\beta) \cdot q(\lambda),$$

siendo $q(\lambda) = (-2w_1 - \lambda - 2w_1\beta)(-2w_2 - \lambda) - 2(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2)^2$.

Es fácil observar que los autovalores son:

$$\begin{cases} \lambda = -2w_1(\beta + 1) \\ \text{las raíces de } q(\lambda) \end{cases}$$

Como vemos para cualquier valor de $w_1, w_2 > 0$ tenemos que el primer autovalor, $\lambda = -2w_1(\beta + 1)$ es negativo. Con lo cual sólo tenemos que ver qué condiciones deben cumplir w_1, w_2 para que las raíces de $q(\lambda)$ sean negativas.

Para ello detonemos por $m(\lambda)$ al siguiente polinomio,

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} + R_1(w_1, w_2)\frac{\lambda}{2} + R_2(w_1, w_2)$$

donde

$$R_1(w_1, w_2) = w_1(1 + \beta) + w_2, \text{ y } R_2(w_1, w_2) = w_1 w_2(1 + \beta) - \frac{1}{2}(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2)^2,$$

de forma que $q(\lambda) = 4m(\lambda)$.

Como es un polinomio de segundo grado y teniendo en cuenta que $R_1(w_1, w_2) > 0$, entonces si $R_2(w_1, w_2)$ es mayor que cero tenemos que las raíces de $q(\lambda)$ son negativas.

Veamospor tanto qué deben cumplir w_1, w_2 para que $R_2(w_1, w_2)$ sea mayor que cero.

$$R_2(w_1, w_2) > 0 \Leftrightarrow 2w_1 w_2(1 + \beta) > (\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2)^2.$$

Esto es equivalente a que

$$0 > \gamma_1^2 w_1^2 + \gamma_2^2 w_2^2 + 2w_1 w_2 (\gamma_1 \gamma_2 - (1 + \beta)).$$

Como $w_1 > 0$ llegamos a que tenemos que hallar $w_1, w_2 > 0$ de forma que

$$0 > \gamma_2^2 \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 + 2 \frac{w_2}{w_1} (\gamma_1 \gamma_2 - (1 + \beta)) + \gamma_1^2.$$

Podemos observar que tenemos una parábola convexa, con lo cual si tiene las dos raíces reales, en el intervalo entre dichas raíces el polinomio es negativo. Luego veamos que efectivamente tiene dos raíces reales y así ya podremos hallar w_1 y w_2 de forma que $R_2(w_1, w_2)$ sea positivo.

Para que ambas raíces sean reales debe ocurrir que

$$4(\gamma_1 \gamma_2 - (1 + \beta))^2 - 4\gamma_2^2 \gamma_1^2 > 0 \Leftrightarrow \gamma_1^2 \gamma_2^2 < (\gamma_1 \gamma_2 - (1 + \beta))^2 \Leftrightarrow 0 > (1 + \beta)^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta)$$

Como por hipótesis tenemos que $\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2}$ entonces

$$(1 + \beta)^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta) < (1 + \beta)^2 - (1 + \beta)^2.$$

Luego queda probado que tiene dos raíces reales con lo cual para cualquier $\frac{w_2}{w_1}$ (con $w_1, w_2 > 0$) perteneciente al intervalo entre ambas raíces reales tenemos que la parábola es negativa y por tanto el polinomio $m(\lambda)$ tiene las dos raíces negativas y así la matriz \mathcal{C} es definida negativa.

Así podemos tomar, por ejemplo, $w_1 = 1$ y $w_2 = \frac{1 + \beta - \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2^2}$, que son mayores que 0 pues por hipótesis $\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2}$. Y con estos valores la matriz C pertenece a S_w como queríamos probar y con ello terminamos la prueba de este teorema. ■

Con esta demostración podemos apreciar que en general no es fácil probar que existe una matriz W tal que $WC + C^t W$ sea definida negativa.

Ahora, pasemos a ver cómo se construye la función de Lyapunov para un sistema Lotka-Volterra n -dimensional, para ello recordaremos primero el teorema de Lyapunov.

Teorema 6.2.11 (Lyapunov). *Sea u^* un punto de equilibrio para el sistema (6.3) y sea $V : \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en una bola cerrada tal que*

- $V(u^*) = 0$ y $V(u) > 0$ para todo $u \neq u^*$.
- Si $\|u\| \rightarrow +\infty$ entonces $V(u) \rightarrow +\infty$.

- $\dot{V}(u) < 0$ para todo $u \neq u^*$.

Entonces, u^* es globalmente asintóticamente estable; donde $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en \mathbb{R}^n y

$$\dot{V}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{dV}{du_i} u'_i \text{ para todo } (u_i)_{i=1}^n = u \in \mathbb{R}_0^n.$$

Teorema 6.2.12. *Supongamos que el equilibrio no trivial u^* del modelo (6.3) tiene todas sus coordenadas positivas y que la matriz $C \in S_w$. Entonces, el equilibrio u^* es globalmente estable.*

Demostración

Comencemos construyendo la función de Lyapunov para el sistema n -dimensional (6.3). Sea $V : \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(u_j - u_j^* - u_j^* \log \left(\frac{u_j}{u_j^*} \right) \right)$$

donde $\alpha_j > 0$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Veamos que cumple las hipótesis del teorema de Lyapunov,

- $V(u^*) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (u_j^* - u_j^* - u_j^* \log 1) = 0$. Ahora sigamos probando que $V(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}_+^n$ con $u \neq u^*$. Para esto estudiaremos la monotonía de V y así podremos deducir que es positiva.

$$\dot{V}(u) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(1 - \frac{u_j^*}{u_j} \right) u'_j = 0 \Leftrightarrow u_j = u_j^* \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Antes de u^* la función V es decreciente y después es creciente con lo cual, u^* es el mínimo absoluto de la función y como $V(u^*) = 0$, entonces podemos afirmar que $V(u) > 0$ para todo $u \neq u^*$.

- $V(u) \rightarrow +\infty$, si $\|u\| \rightarrow +\infty$, obvio por la definición de V .

- $$\dot{V}(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(1 - \frac{u_j^*}{u_j} \right) u'_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j (u_j - u_j^*) \left\{ \sum_{k=1}^n a_{jk} (u_k - u_k^*) \right\}.$$

O, lo que es lo mismo,

$$\dot{V}(u) = (u - u^*)^t W C (u - u^*) = \frac{1}{2} (u - u^*)^t (W C + C^t W) (u - u^*),$$

con $W = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Entonces, si $WC + C^tW$ es definida negativa, \dot{V} es definida negativa y con lo cual, por el teorema de Lyapunov, u^* es globalmente estable. ■

A continuación, vamos a enunciar un teorema que nos da una condición suficiente para que el punto E_{111} sea globalmente estable.

Corolario 6.2.13. *Supongamos que todas las componentes de E_{111} son positivas, entonces E_{111} es globalmente estable.*

La demostración de este corolario es inmediata debido al Teorema 6.2.12.

Ahora, vamos a estudiar la estabilidad global de alguno de los otros puntos de equilibrio, considerando que $\alpha_3 < 0$ y que $u_3 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Lema 6.2.14. *Supongamos que $u_3 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces*

- (a) *Si $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ entonces el punto E_{000} es globalmente estable.*
- (b) *Si $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < \beta\alpha_1$ entonces el punto E_{100} es globalmente estable.*
- (c) *Si $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 < \beta\alpha_2$ entonces el punto E_{010} es globalmente estable.*
- (d) *Si $\alpha_1 > \beta\alpha_2$ y $\alpha_2 > \beta\alpha_1$ entonces el punto E_{110} es globalmente estable.*

Demostración

Como $u_3 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$u_3 \leq \epsilon, \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Entonces,

$$u_1' \leq u_1(\alpha_1 + \gamma_1\epsilon - u_1 - \beta u_2); \quad u_2' \geq u_2(\alpha_2 - u_2 - \beta u_1).$$

Ahora, si denotamos por $(U_{\lambda,\mu}, V_{\lambda,\mu})$ a la solución del sistema Lotka-Volterra de dimensión dos, (5.2), tenemos que,

$$u_1 \leq U_{\alpha_1 + \gamma_1\epsilon, \alpha_2}, \text{ y } V_{\alpha_1 + \gamma_1\epsilon, \alpha_2} \leq u_2, \text{ para } t \text{ suficientemente grande.}$$

Recíprocamente, llegamos a que para t suficientemente grandes tenemos,

$$U_{\alpha_1, \alpha_2 + \gamma_1\epsilon} \leq u_1 \leq U_{\alpha_1 + \gamma_1\epsilon, \alpha_2}, \text{ y } V_{\alpha_1 + \gamma_1\epsilon, \alpha_2} \leq u_2 \leq V_{\alpha_1, \alpha_2 + \gamma_1\epsilon}.$$

Con lo cual, aplicando el Lema 5.3.5 podemos concluir la demostración. ■

6.3. Estudio de los Fenómenos 1 y 2

En esta sección vamos a estudiar la existencia de los puntos de equilibrio en función de los parámetros α_i para $i = 1, 2, 3$.

A partir de los últimos resultados, está claro que la existencia y la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas (5.2) y (6.1) dependen de las siguientes rectas en el plano (α_1, α_2) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \equiv \alpha_2 = \beta_0 \alpha_1, \\ r_2 \equiv \alpha_2 = \frac{1}{\beta_0} \alpha_1, \\ r_3 \equiv \alpha_2(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) = -\alpha_1(1 - \gamma_1 \gamma_2) - \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta), \\ r_4 \equiv \alpha_2(1 - \gamma_1 \gamma_2) = -\alpha_1(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) - \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta), \\ r_5 \equiv \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_3 \frac{1 + \beta}{\gamma_2}, \\ r_6 \equiv \alpha_2 = \beta \alpha_1, \\ r_7 \equiv \alpha_2 = \frac{1}{\beta} \alpha_1. \end{array} \right.$$

Observemos que el punto E_{111} tiene todas sus coordenadas positivas si los puntos semi-triviales, es decir, los que tienen una componente nula, $E_{110}, E_{101}, E_{011}$, son inestables. Además, las componentes del punto E_{111} son positivas si

$$\begin{aligned} \alpha_2(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) + \alpha_1(1 - \gamma_1 \gamma_2) + \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta) &> 0, \\ \alpha_2(1 - \gamma_1 \gamma_2) + \alpha_1(\gamma_1 \gamma_2 - \beta) + \alpha_3 \gamma_1(1 - \beta) &> 0, \\ \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3 \frac{1 + \beta}{\gamma_2} &> 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Como vamos a analizar las rectas en el plano (α_1, α_2) , fijemos α_3 ; entonces la región definida por dichas ecuaciones depende del tamaño de $\gamma_1 \gamma_2$ con respecto a β . Así tenemos tres casos diferenciados

Caso $\beta > \gamma_1 \gamma_2$. En este caso las condiciones de (6.4) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \alpha_2 &< \alpha_1 \left(\frac{1 - \gamma_1 \gamma_2}{\beta - \gamma_1 \gamma_2} \right) + \alpha_3 \gamma_1 \left(\frac{1 - \beta}{\beta - \gamma_1 \gamma_2} \right), \\ \alpha_2 &> \alpha_1 \left(\frac{\beta - \gamma_1 \gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \right) - \alpha_3 \gamma_1 \left(\frac{1 - \beta}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \right), \\ \alpha_2 &> -\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{\gamma_2} (1 + \beta). \end{aligned}$$

Y observemos que

$$r_3 \cap r_4 = (-\alpha_3 \gamma_1, -\alpha_3 \gamma_1); \quad r_3 \cap r_5 = \left(-\frac{\beta \alpha_3}{\gamma_2}, -\frac{\alpha_3}{\gamma_2} \right); \quad r_4 \cap r_5 = \left(-\frac{\alpha_3}{\gamma_2}, -\frac{\beta \alpha_3}{\gamma_2} \right).$$

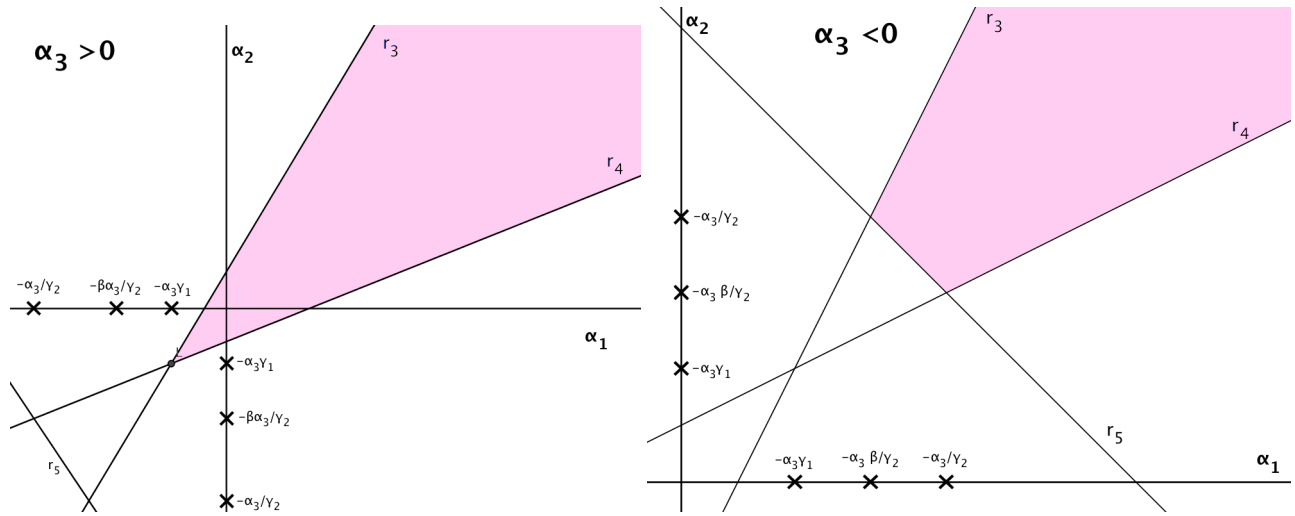


Figura 6.1: Regiones, en las que E_{111} tiene sus coordenadas positivas, para $\gamma_1\gamma_2 < \beta$ y $\alpha_3 > 0$ y $\alpha_3 < 0$, respectivamente.

No es difícil comprobar que la región en la que las coordenadas de E_{111} son positivas es no vacía, ver Figura 6.1. Observemos, también, que para el caso de $\alpha_3 > 0$ la recta r_5 no impone ninguna restricción.

Caso $\beta < \gamma_1\gamma_2$. En este caso las condiciones (6.4) son equivalentes a

$$\alpha_2 > -\alpha_1 \left(\frac{1 - \gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta} \right) - \alpha_3\gamma_1 \left(\frac{1 - \beta}{\gamma_1\gamma_2 - \beta} \right),$$

$$\alpha_2 > -\alpha_1 \left(\frac{\gamma_1\gamma_2 - \beta}{1 - \gamma_1\gamma_2} \right) - \alpha_3\gamma_1 \left(\frac{1 - \beta}{1 - \gamma_1\gamma_2} \right),$$

$$\alpha_2 > -\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{\gamma_2} (1 + \beta).$$

Con estas condiciones y dependiendo del signo de α_3 podemos dibujar las siguientes regiones en las que las coordenadas de E_{111} son positivas.

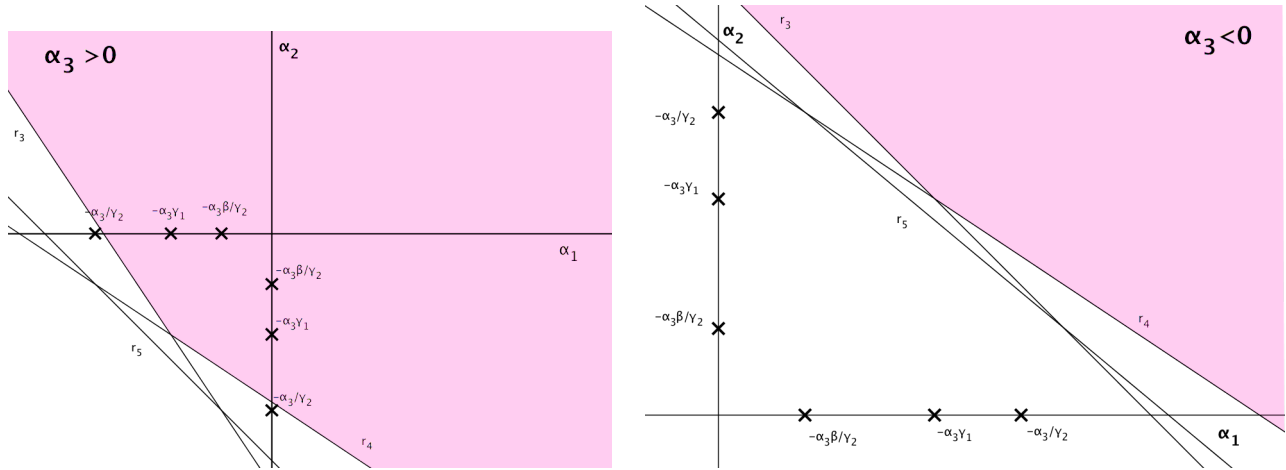


Figura 6.2: Regiones, en las que E_{111} tiene sus coordenadas positivas, para $\gamma_1\gamma_2 > \beta$ y $\alpha_3 > 0$ y $\alpha_3 < 0$, respectivamente.

Caso $\beta = \gamma_1\gamma_2$. Observemos que para este caso, las condiciones de (6.4) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> -\alpha_3\gamma_1, \\ \alpha_2 &> -\alpha_3\gamma_1, \\ \alpha_2 &> -\alpha_1 - \alpha_3 \frac{1 + \beta}{\gamma_2}. \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que la región en la que las coordenadas de E_{111} son positivas es no vacía, ver Figura 6.3 observemos que para el caso de $\alpha_3 > 0$ la recta r_5 no impone ninguna restricción.

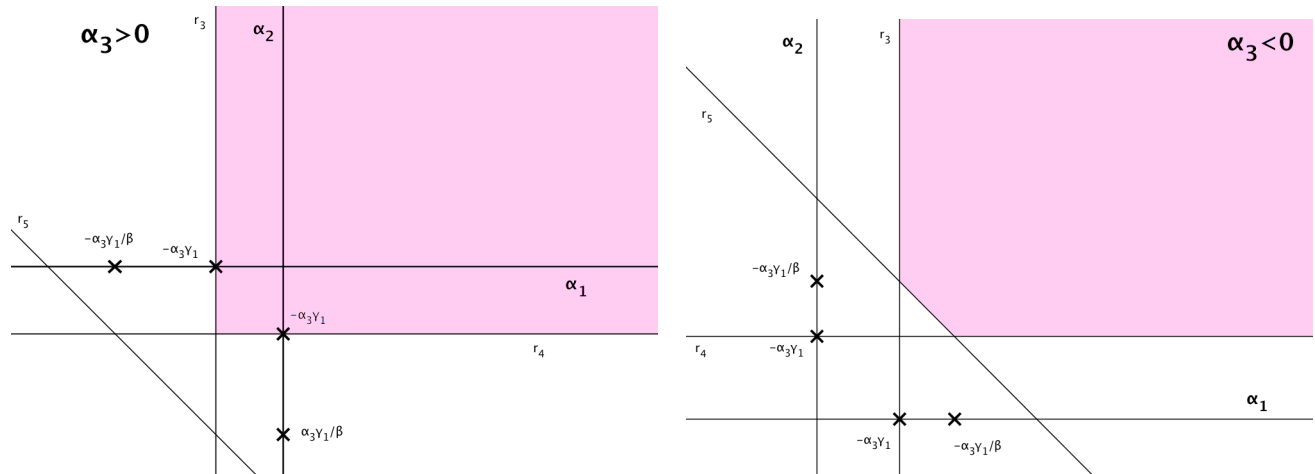


Figura 6.3: Regiones, en las que E_{111} tiene sus coordenadas positivas, para $\gamma_1\gamma_2 = \beta$ y $\alpha_3 > 0$ y $\alpha_3 < 0$, respectivamente.

Una vez estudiada la región en la que E_{111} tiene todas sus coordenadas positivas, vamos a analizar para el caso de $\gamma_1\gamma_2 < \beta$, los Fenómenos 1 y 2. Sólo estudiaremos este caso ya que para los otros dos casos se obtienen resultados similares.

FENÓMENO 1: INCREMENTO DE LA BIODIVERSIDAD.

Comencemos estudiando lo que en la Introducción hemos llamado como Fenómeno 1, es decir, veamos cómo la existencia de una tercera especie, que mantiene una relación de cooperación con las otras dos, hace que se incremente la biodiversidad, o lo que es lo mismo, la especie que coopera hace que especies que iban a la extinción debido a la competición entre ambas ahora no se extingan, se mantengan en la naturaleza.

Para el caso de $\alpha_3 > 0$ la biodiversidad es enriquecida, en el sentido que hay regiones en el sistema (6.2) donde una o ambas especies van a la extinción pero la presencia de u_3 en (6.1) hace que las especies se mantengan y en las regiones donde las dos especies compiten sin llegar a extinguirse hace que el número de habitantes de dichas poblaciones aumenten.

Para ilustrar este hecho veamos la Figura 6.4, en la que dibujamos las rectas r_1, r_2, r_3, r_4 , sabiendo que $\alpha_3 > 0$ y $\gamma_1\gamma_2 < \beta$.

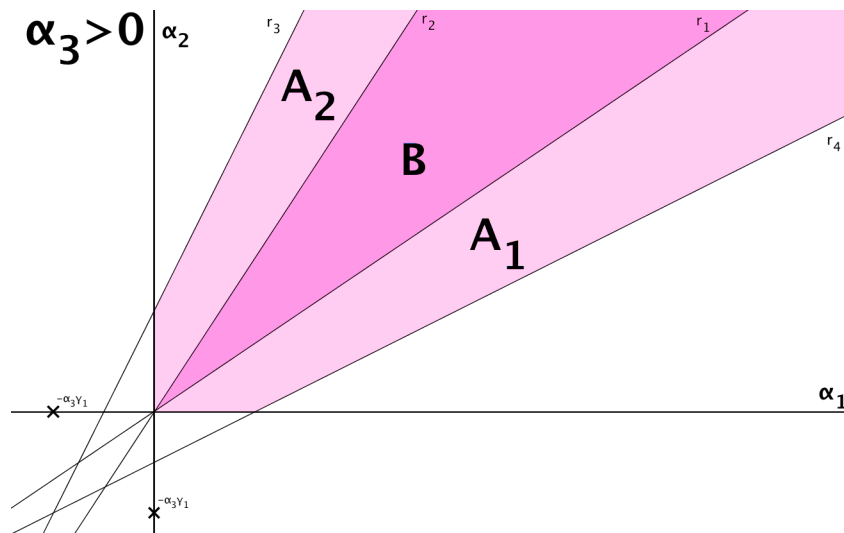


Figura 6.4: Regiones en el primer cuadrante de la coexistencia de las tres especies. El Fenómeno 1 se mantiene para el par (α_1, α_2) en la región A_1 y A_2 . En la región B la coexistencia de u_1 y u_2 se mantiene después de aparecer u_3 .

En esta figura, se observan tres regiones diferenciadas:

- (a) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_1$, entonces la solución de (6.2) va a E_{10} mientras que la solución de (6.1) va a E_{111} . Es decir, en esta región si no está u_3 una de las especies se extingue mientras que si u_3 está presente entonces las tres especies coexisten.
- (b) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_2$, entonces la solución de (6.2) va a E_{01} mientras que la solución de (6.1) va a E_{111} . Es decir, en esta región ocurre como en la anterior, si no está u_3 una de las especies se extingue mientras que si u_3 está presente entonces las tres especies coexisten.
- (c) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in B$, entonces la solución de (6.2) va a E_{11} y la solución de (6.1) va a E_{111} . Es decir, en esta región la presencia de u_3 no implica la coexistencia de las otras dos especies.

Ahora, con la siguientes figuras vamos a representar el comportamiento de la solución cuando $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_2$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in B$, respectivamente. En ambas figuras, nosotros hemos representado la solución de (6.2) y de (6.1), respectivamente.

Comencemos viendo lo que pasa en la región A_2 ,

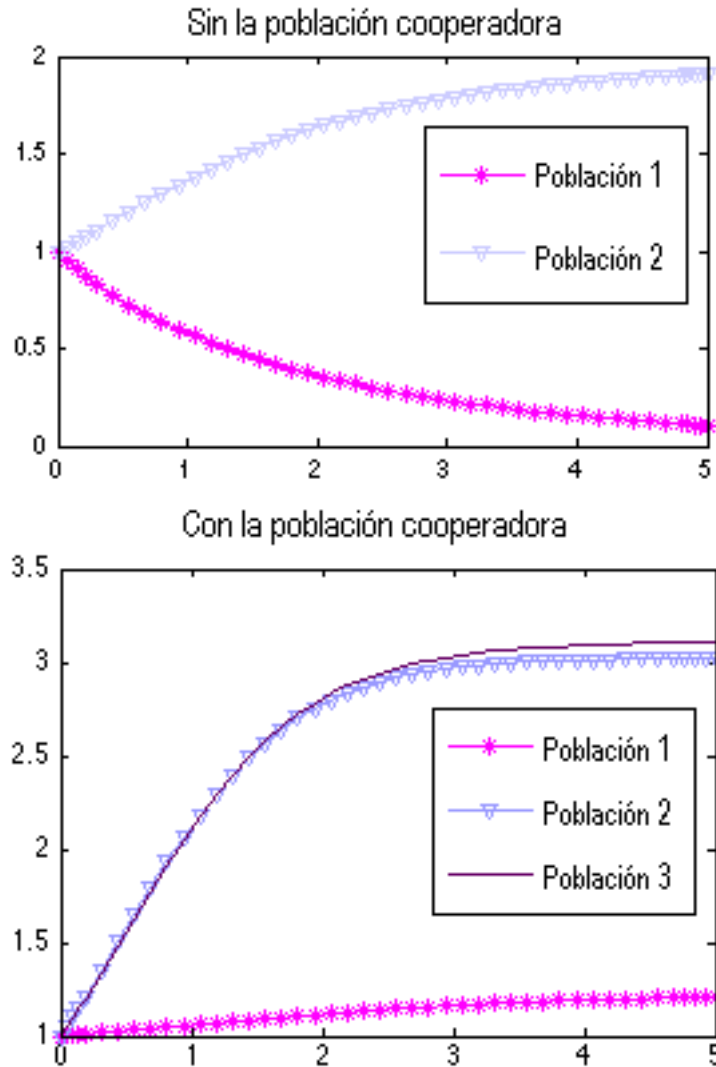


Figura 6.5: Simulación para la región A_2 con $\alpha_3 > 0$. Y con datos, $\beta_0 = \frac{2}{3}, \beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_1} = \frac{4}{9}, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = 1$; y datos iniciales $(1, 1)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente.

Es fácil apreciar con estas gráficas el Fenómeno 1 que antes describíamos, es decir, gracias a la aparición de la población 3 se mantiene la coexistencia entre la población 1 y la población 2.

Observemos que la región A_1 no la representaremos pues ocurre algo análogo a lo que ha ocurrido en la región A_2 . Por ello pasemos a representar lo que ocurre en la región B .

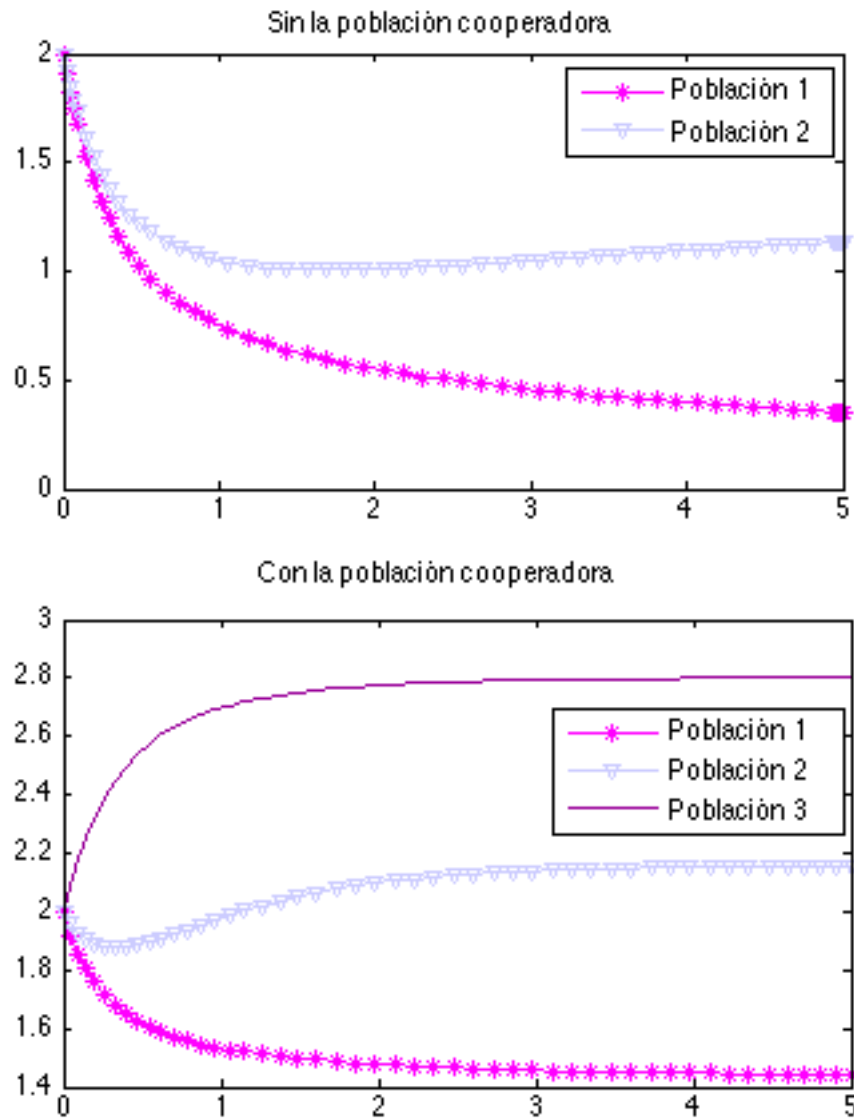


Figura 6.6: Simulación para la región B con $\alpha_3 > 0$. Y con datos, $\beta_0 = \frac{2}{3}, \beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_1} = \frac{4}{9}, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 1,4, \alpha_1 = 1$; y datos iniciales $(2, 2)$ y $(2, 2, 2)$, respectivamente.

En este caso, se observa que aunque las dos especies coexisten pese a que la población 3 no esté presente, es fácil ver que, en el segundo caso gracias a la presencia de dicha población, el tamaño de las otras dos poblaciones es considerablemente mayor al que tendrían si la población 3 no estuviera presente. Es decir, aquí el Fenómeno 1 lo entendemos como el aumento de la biodiversidad gracias a la existencia de una tercera especie que coopera con las otras dos.

Ahora, pasemos a estudiar el Fenómeno 1 para el caso en que $\alpha_3 < 0$.

En este caso ocurre una cosa similar a lo que ocurre con el caso de $\alpha_3 > 0$; lo único que las regiones A_1 , A_2 y B cambian pues ahora la recta r_5 sí condiciona el signo de las coordenadas del punto E_{111} .

Así, veamos las regiones para este caso y después comparemos lo que pasa en cada región con y sin la presencia de la especie cooperadora.

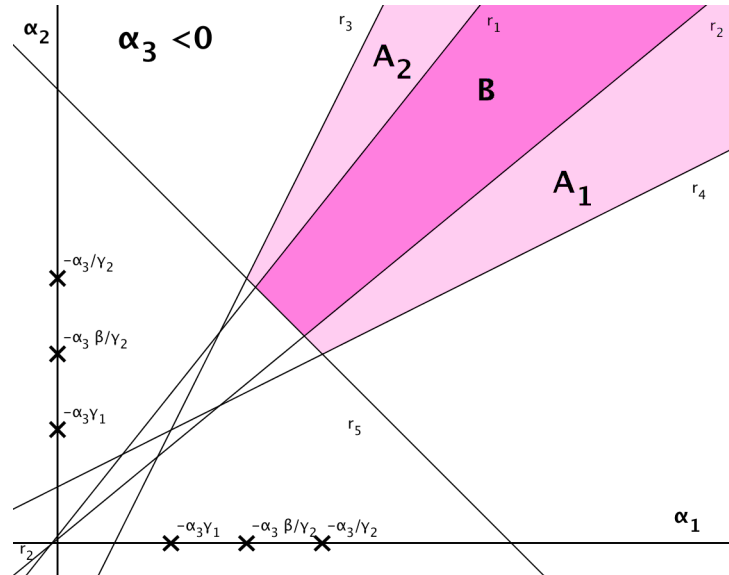


Figura 6.7: Regiones en el primer cuadrante de la coexistencia de las tres especies. El Fenómeno 1 se mantiene para el par (α_1, α_2) en la región A_1 y A_2 . En la región B la coexistencia de u_1 y u_2 se mantiene después de aparecer u_3 .

De nuevo, observamos que tenemos tres regiones diferenciadas, de hecho, las nombramos igual que antes pues en cada una de ellas ocurre lo que sucedía para el caso de $\alpha_3 > 0$.

Ahora veamos que el comportamiento de la solución en la región A_2 .

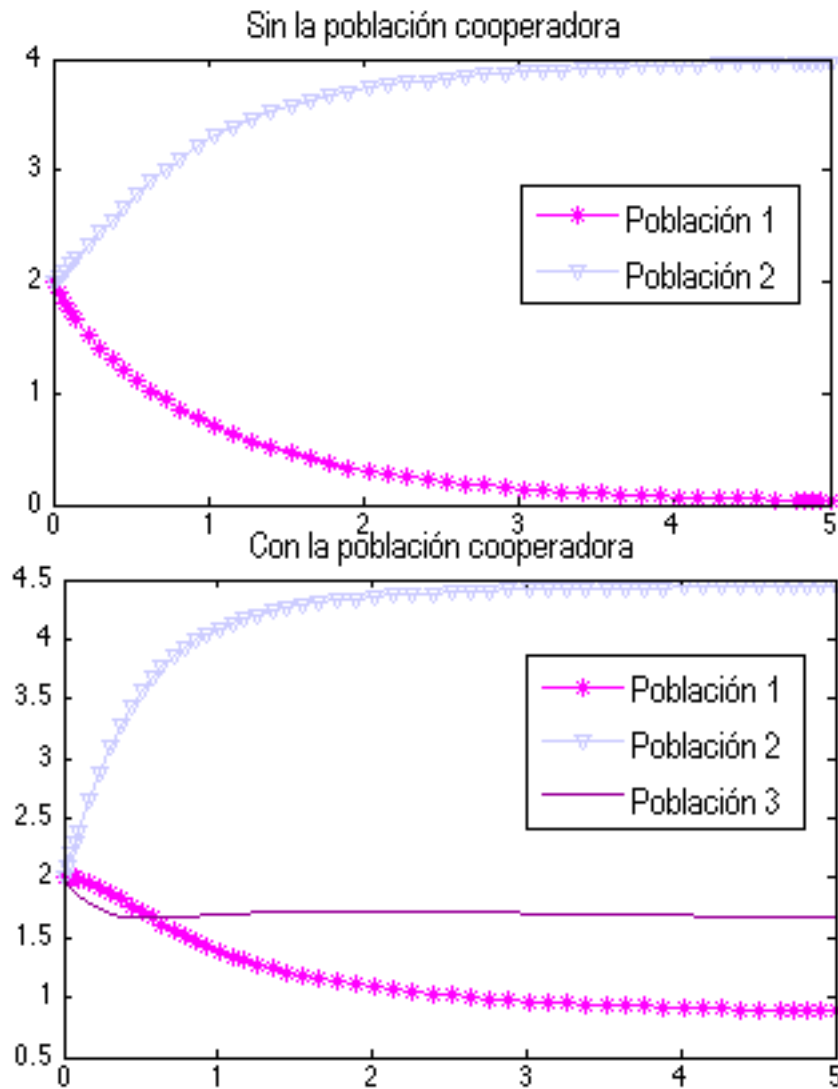


Figura 6.8: Simulación para la región A_2 con $\alpha_3 < 0$. Y con datos, $\beta_0 = \frac{2}{3}, \beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_1} = \frac{4}{9}, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -2, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = 1$; y datos iniciales $(2, 2)$ y $(2, 2, 2)$, respectivamente.

Con estas gráficas hemos terminado de ilustrar el Fenómeno 1 para el caso $\alpha_3 < 0$, que como hemos observado sucede algo parecido a lo que pasaba cuando $\alpha_3 > 0$. Así pasamos a estudiar ahora lo que en la Introducción denominábamos Fenómeno 2.

FENÓMENO 2: VULNERABILIDAD DE LA ESPECIE COOPERADORA.

Este fenómeno consiste en estudiar la vulnerabilidad de la especie cooperadora, es decir, la presencia de esta especie en el sistema puede hacer que una especie que iba a extinguirse ya no se extinga pero la especie cooperadora se extinga.

En este caso sólo vamos a considerar lo que sucede para $\alpha_3 < 0$.

Por ello comencemos viendo la siguiente figura, en la que hemos ilustrado las zonas de vulnerabilidad de u_3 .

Para ello representaremos las rectas críticas r_1, r_2, r_5, r_6 y r_7 .

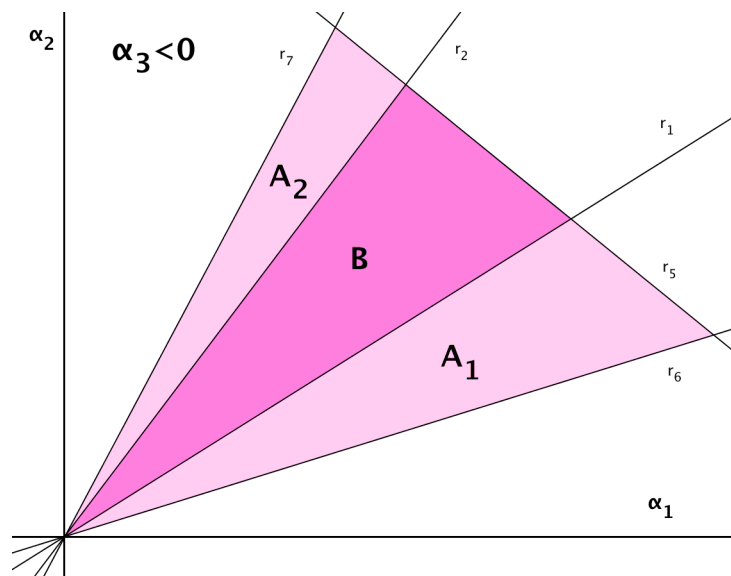


Figura 6.9: Regiones de vulnerabilidad de u_3 para el par (α_1, α_2) . En las regiones A_1 y A_2 el Fenómeno 2 se mantiene para $\alpha_3 < 0$, y en la región B las especies u_1 y u_2 se mantienen después de la aparición de u_3 incluso cuando u_3 va a la extinción.

En esta figura, se observan tres regiones diferenciadas:

- (a) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_1$, entonces la solución de (6.2) va a E_{10} mientras que la solución de (6.1) va a E_{110} . Es decir, en esta región si no está u_3 una de las especies se extingue mientras que si u_3 está presente entonces ninguna de estas dos especies se extingue sino que la que se extingue es u_3 .
- (b) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in A_2$, entonces la solución de (6.2) va a E_{01} mientras que la solución de (6.1) va a E_{110} . Es decir, en esta región ocurre como en la anterior, si no está u_3 una de las especies se extingue mientras que si u_3 está presente entonces ninguna de estas dos especies se extingue sino que la que se extingue es u_3 .
- (c) Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in B$, entonces la solución de (6.2) va a E_{11} y la solución de (6.1) va a E_{110} .

Es decir, en esta región la coexistencia de u_1 y u_2 se mantiene tras la aparición de u_3 incluso cuando u_3 es empujada a la extinción.

Pasemos a estudiar el comportamiento de las soluciones con y sin la presencia de u_3 en la región A_2 y B , para así ilustrar el Fenómeno 2.

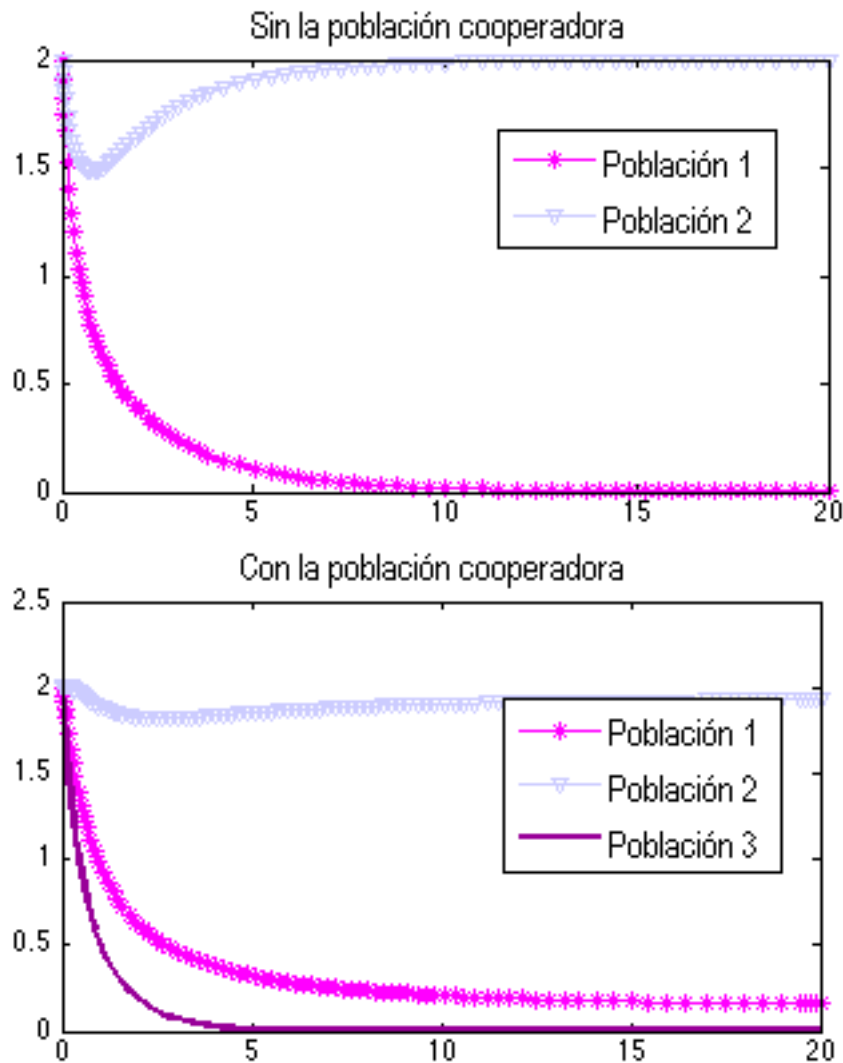


Figura 6.10: Simulación para la región A_2 con $\alpha_3 < 0$. Y con datos, $\beta_0 = \frac{2}{3}, \beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_1} = \frac{4}{9}, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -2, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = 1$; y datos iniciales $(2, 2)$ y $(2, 2, 2)$, respectivamente.

Observemos que en este caso, como ya habíamos dicho, la presencia de la población 3, hace que la población 1 que iba a la extinción, ahora no se extinga pero la población 3 sí.

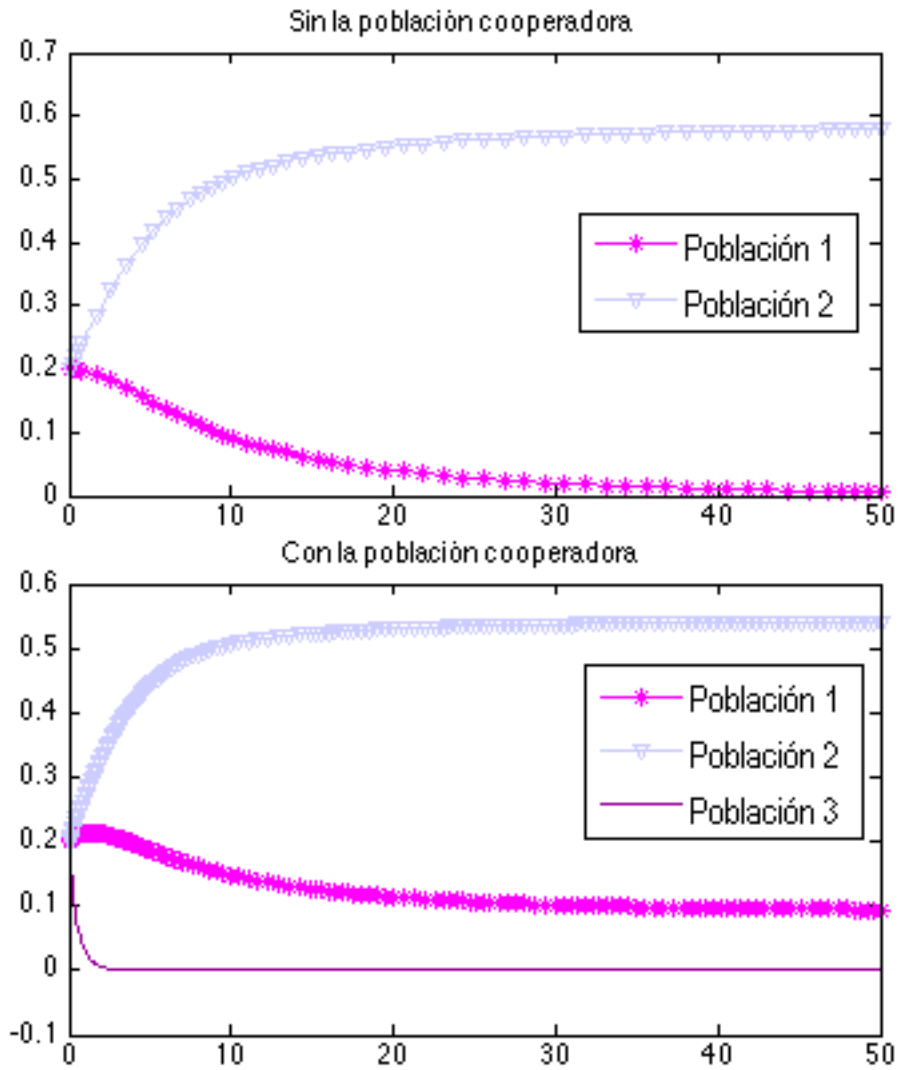


Figura 6.11: Simulación para la región B con $\alpha_3 < 0$. Y con datos, $\beta_0 = \frac{2}{3}, \beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma_1} = \frac{4}{9}, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -2, \alpha_2 = \frac{7}{12}, \alpha_1 = \frac{1}{3}$; y datos iniciales $(0, 2, 0, 2)$ y $(0, 2, 0, 2, 0, 2)$, respectivamente.

Con estas gráficas damos por terminado el estudio de estos dos fenómenos, dando paso así al estudio de atractores para el sistema (6.1).

6.4. Descomposición de Morse del atractor del sistema mutualista

En esta sección vamos a describir la estructura geométrica del atractor global para el sistema (6.1). En particular, mostraremos que la Descomposición de Morse del atractor viene dada por el conjunto $\mathcal{E} := \{E_{000}, E_{100}, E_{010}, E_{001}, E_{110}, E_{101}, E_{011}, E_{111}\}$, dibujando así una red compleja de nodos y conexiones entre dichos puntos. Por lo tanto, el atractor puede ser entendido como una nueva red compleja y dinámica formada por redes que contienen todos los posibles comportamientos de la solución para tiempos grandes. En particular, el atractor global contiene toda la información abstracta relacionada con los escenarios futuros de biodiversidad.

Recordemos que para el desarrollo de toda esta parte seguimos suponiendo que estamos en el caso de la cooperación débil, es decir,

$$\gamma_1\gamma_2 < \frac{1 + \beta}{2}.$$

Observemos que efectivamente existe un atractor global para dicho sistema, pues por el Teorema 6.2.10 la solución global converge a algún punto estacionario cuando $t \rightarrow +\infty$ sea cual sea el dato inicial. Y por lo tanto existe un atractor global para el sistema (6.1).

El resultado principal de esta parte consiste en probar que el sistema (6.1) es un sistema gradiente. Para ello, veremos que existe una Descomposición de Morse en el atractor global \mathcal{A} del sistema (6.1) y que con esta descomposición el sistema es de tipo gradiente. Y por último, gracias al Teorema 3.5.1 del Capítulo 3, tendremos que el sistema (6.1) es un sistema gradiente.

Por cuestiones de facilidad a la hora del desarrollo teórico de esta parte, denotaremos por u_i^* , para $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, a los puntos de equilibrio del sistema (6.1), es decir, en lo que queda el conjunto de los puntos estacionarios será $\mathcal{E} = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_8^*\}$.

Teorema 6.4.1. *Sea $\mathcal{E} = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_8^*\}$, el conjunto formado por los puntos de equilibrio de (6.1). Entonces \mathcal{E} define una Descomposición de Morse para el atractor global \mathcal{A} de (6.1).*

Como consecuencia, el sistema (6.1) es un sistema gradiente. En particular, dado $z \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$ existe $i < j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t; z) - u_j^*\| = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t; z) - u_i^*\| = 0.$$

Con la demostración de este teorema, no sólo vamos a ver que el sistema es un sistema gradiente, sino que también vamos a construir la estructura de su atractor global. Además, este algoritmo de construcción del atractor global se puede extrapolar al caso n -dimensional como se puede ver en [13].

Demostración

Lo primero que vamos a hacer va a ser construir una Descomposición de Morse para el atractor y así tendremos que el semigrupo es de tipo gradiente, por el Corolario 3.5.2.

Supongamos que todas las coordenadas de E_{111} sean positivas, es decir, que E_{111} es el punto globalmente estable que nos da el Teorema 6.1.1. Si no fuera así, la construcción de la Descomposición de Morse comenzaría a partir de donde aparece el punto globalmente estable.

Para obtener una Descomposición de Morse para el atractor global \mathcal{A} vamos a construir una sucesión creciente de atractores locales

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_7 \subset A_8 = \mathcal{A}$$

y su respectiva cadena decreciente de repulsores complementarios

$$\emptyset = A_8 \subset A_7^* \subset \cdots \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A},$$

de forma que

$$u_j^* = A_j \cap A_{j-1}^*, \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, 8\}.$$

Luego construyamos dicha sucesión de atractores locales.

El atractor, $A_1 = \{E_{111}\}$ es el primer atractor local y su repulsor complementario es la unión cerrada de los planos XZ, YZ, XY .

Consideramos E_{110} que es el atractor local en el plano abierto XY . Entonces,

$$A_2 = A_1 \cup W^u(E_{110}),$$

y su repulsor complementario A_2^* es la unión cerrada de los planos XZ, YZ .

Ahora consideramos E_{101} , es decir, el atractor local en el plano XZ . Entonces

$$A_3 = A_2 \cup W^u(E_{101})$$

y su repulsor complementario A_3^* el plano cerrado YZ .

En el siguiente paso tomamos E_{011} que es el atractor local en el plano YZ . Entonces

$$A_4 = A_3 \cup W^u(E_{011})$$

y entonces su repulsor complementario A_4^* es la unión cerrada de los semiejes OX, OY, OZ .

Ahora tomamos E_{100} , atractor local en el semieje abierto OX ,

$$A_5 = A_4 \cup W^u(E_{100})$$

y su repulsor complementario A_5^* la unión cerrada de los semiejes OY, OZ .

Para E_{010} , que es el atractor local en el semieje abierto OY , podemos definir

$$A_6 = A_5 \cup W^u(E_{010})$$

y A_6^* la unión cerrada del semieje OZ .

Por último, tomamos E_{001} que es el atractor local del semieje OZ y definimos

$$A_7 = A_6 \cup W^u(E_{001})$$

y $A_7^* = E_{000}$ su repulsor complementario.

Finalmente, $A_8 = \mathcal{A}$.

Observemos que A_m^* es un conjunto invariante, que no se intersecta con $\bigcup_{k=1}^m A_k$ y contiene al resto de puntos estacionarios que no están en $\bigcup_{k=1}^m A_k$, para $m \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Por lo tanto, hemos construido una Descomposición de Morse para el atractor global \mathcal{A} , y tenemos que el sistema (6.1) es un sistema tipo gradiente y, por el teorema de equivalencia ya probado en el Capítulo 3, tenemos que el sistema (6.1) es un sistema gradiente.

■

Este modelo simplificado nos permite describir con detalle la dependencia de las redes de atractores con respecto a los parámetros, mostrándonos que, en particular, fijar la red de coexistencia de las tres especies, corresponde con el mayor y más complejo conjunto de posibles configuraciones posibles futuras; dando las diferentes arquitecturas del atractor global descrita para el equilibrio y la orientación de sus conexiones, como muestra la Figura 6.12.

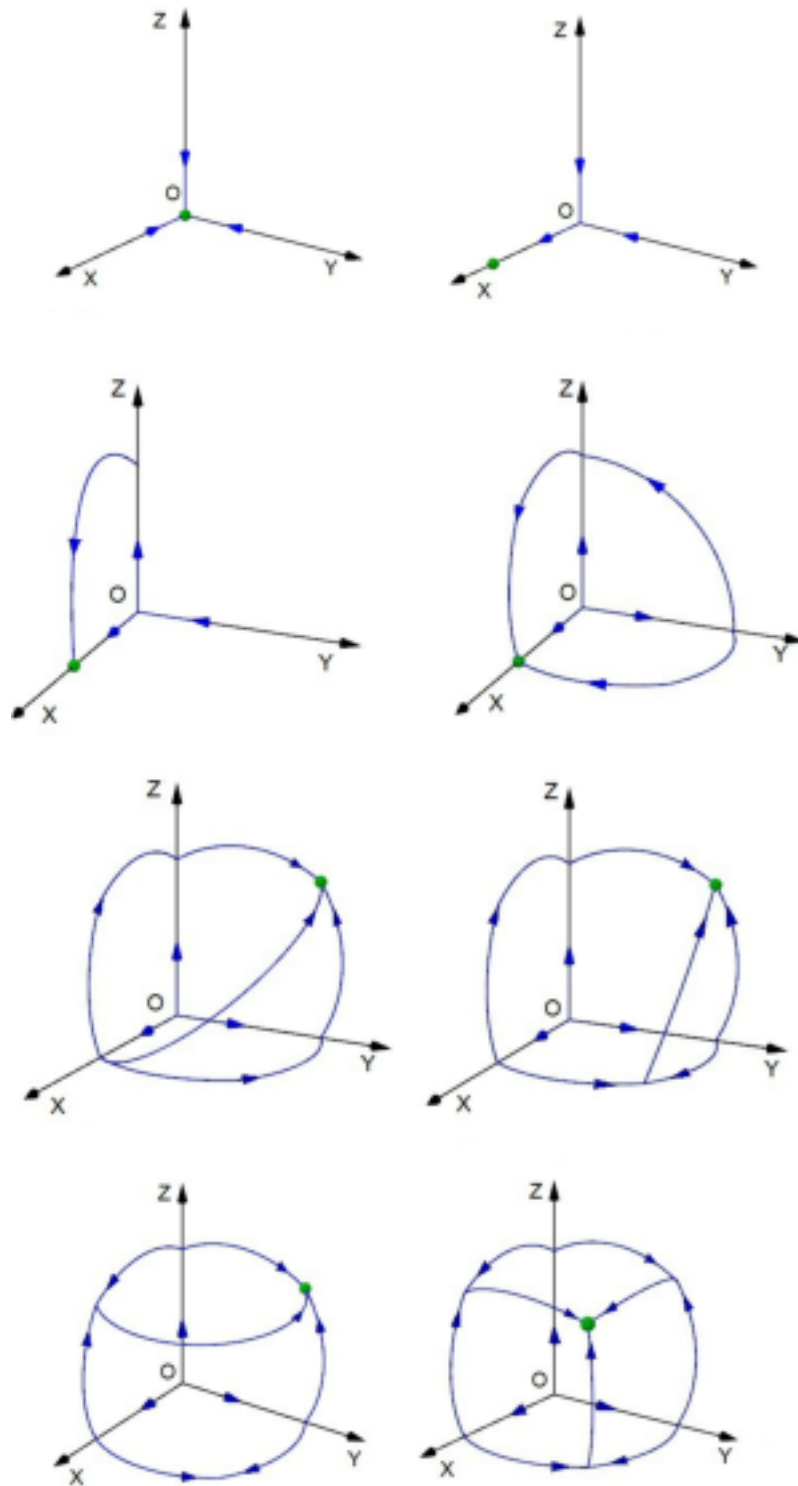


Figura 6.12: Atractor global para el caso tridimensional según los valores de los parámetros. Cada red muestra el de los diferentes puntos de equilibrio globalmente estable. Observemos que todos los conjuntos posibles de atractores se corresponden con la misma caracterización fenomenológica dada por los tres nodos, u_1, u_2, u_3 .

Ya para acabar vamos a mostrar los diferentes niveles de energía para el sistema (6.1).

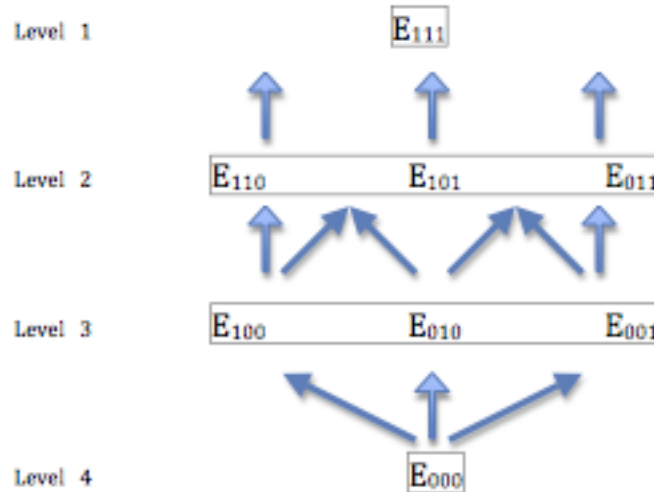


Figura 6.13: Organización de los puntos de equilibrio en el atractor global por los niveles de energía. El nivel superior muestra la energía mínima (dada por la función de Lyapunov) atrayendo a toda solución estrictamente positiva. Las flechas azules muestran las direcciones de la solución cuando el tiempo avanza. El segundo nivel es alcanzado si E_{111} no existe y alguno de los puntos $E_{110}, E_{101}, E_{011}$ existe. El tercer nivel sólo se alcanza si ninguno de los puntos de equilibrio de los niveles superiores están presentes. Por último, el punto E_{000} es globalmente asintóticamente estable si y sólo si los puntos estacionarios de los niveles superiores no existen.

Conclusiones

En este trabajo hemos establecido la equivalencia entre las dos nociones de semigrupos estudiados, o sea, la equivalencia entre los conceptos de semigrupos gradiente y de tipo gradiente.

Un hecho importante que hemos presentado con detalle es el uso de la Teoría de Morse para demostrar dicha equivalencia, que era nuestro objetivo principal en la primera parte. El hecho de unir la Teoría de Morse a la teoría de los semigrupos de tipo gradiente, lo que se concretó básicamente en el Lema 3.4.2, ha sido lo que nos ha permitido establecer el resultado de equivalencia contenido en el Teorema 3.5.1, por medio del Teorema 3.4.3 junto con la Proposición 3.3.2.

También hemos introducido un nuevo concepto dinámico para la descripción de los atractores globales, el de niveles de energía (véase la Definición 4.1.1), que muestra de una manera organizada los puntos de equilibrio de un sistema autónomo que poseen propiedades dinámicas semejantes, uniendo aquellos puntos de equilibrio de un sistema que poseen propiedades dinámicas análogas.

Una característica importante que poseen los niveles de energía es que introducen un orden total en el conjunto de los puntos de equilibrio o, en otras palabras, proporciona condiciones dinámicas capaces de relacionar todos los puntos de equilibrio de un sistema de tipo gradiente, según muestra el Lema 4.2.1.

Debemos destacar que todos los conceptos estudiados en la Parte I, a pesar de su carácter abstracto, tienen su aplicación en el campo de las EDP's y de las EDO's, que es el hecho que motivó todo su desarrollo. Es decir, la aplicación de los resultados obtenidos en esta parte se abre al vasto campo de fenómenos modelados por ecuaciones diferenciales, que de manera breve es lo que intentamos abordar en la Parte II.

En la Parte II de este trabajo hemos estudiado las redes mutualistas en tres dimensiones y las hemos comparado con los sistemas competitivos de dos especies.

En esta segunda parte es sorprendente ver cómo la Naturaleza no se rige únicamente por leyes de competición entre especies. La capacidad que tienen las especies más vulnerables de aumentar la biodiversidad aún cuando son empujadas a la extinción son un hecho claro de la grandeza y la fuerza de lo pequeño y de lo débil en la vida de los seres vivos. Hemos querido dar evidencia matemática de estos hechos mediante el análisis de los Fenómenos 1 y 2.

También hemos sido capaces de aplicar la teoría de los sistemas dinámicos para hallar el atractor global del sistema cooperativo tridimensional y poder observar la dependencia de la estabilidad de los puntos de equilibrio con respecto a los parámetros del sistema. Tras un estudio de la estabilidad local y global de los puntos de equilibrio, hemos podido describir

en detalle la estructura del atractor global. Por último, hemos representado gráficamente los distintos niveles de energía que nos ayudan a ver las conexiones entre los diversos puntos de equilibrio del sistema.

El estudio de la estructura del atractor global para el caso de n especies ha sido hecho en [13]. Es decir, lo expresado en el Capítulo 6 es extendible a sistemas reales en Ecología.

Como cuestiones que todavía no hemos estudiado y algunas aún no tienen respuesta, están las extensiones de algunos de los resultados descritos. Por mencionar algunas, podemos preguntarnos qué pasa cuando el sistema dinámico no es autónomo, ¿se sigue teniendo la equivalencia entre semigrupos gradiente y de tipo gradiente? O ¿qué pasa si un sistema de tipo gradiente posee una Descomposición de Morse con una familia infinita numerable de conjuntos?, ¿También tenemos la existencia de una función de Lyapunov? . Obsérvese que estas extensiones no son triviales, pues en muchos argumentos por contradicción que hemos desarrollado la hipótesis de finitud de la familia de conjuntos invariantes ha sido fundamental para obtener el absurdo, véase, por mencionar un ejemplo, la demostración del Lema 3.4.2. También nos podemos plantear el estudio de la dependencia de la estructura del atractor con respecto a los parametros del sistema, que normalmente es desconocida.

Algunas de estas preguntas están resueltas, sobre todo las relacionadas con los sistemas dinámicos no autónomos (véase [1]) aunque muchas otras aún siguen sin resolverse.

Con estas preguntas finalizamos la escritura de este trabajo, aunque como vemos el campo de estudio sigue abierto y con preguntas por resolver.

Anexo: Ecuación Logística

En esta parte del trabajo vamos a describir la ecuación logística, puesto que en el desarrollo de la segunda parte de este trabajo hemos usado algunos resultados y propiedades de este tipo de ecuación.

Por ello, consideremos la ecuación logística

$$\begin{cases} u' = u(a - bu), & a \in \mathbb{R}, b \neq 0 \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Dicha ecuación es de tipo Bernoulli y se puede resolver explícitamente mediante el cambio de variables $z = \frac{1}{u}$ y así resulta que la solución de (6.5)

$$u(t) = \frac{e^{at}}{\frac{b}{a}(e^{at} - 1) + \frac{1}{u_0}}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

siempre que $a \neq 0$ y para el caso de $a = 0$ tenemos que

$$u(t) = \frac{1}{bt + \frac{1}{u_0}}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Proposición 6.4.2. *Para la solución u , ya calculada, del sistema (6.5) se verifica que*

(a) *Si $b > 0, a > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{a}{b}$.*

(b) *Si $b > 0, a \leq 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$.*

(c) *Si $b < 0$ entonces existe $0 < t^* < +\infty$ tal que*

▪ *Si $a \geq 0$, entonces la solución explota en tiempo finito, es decir, $\lim_{t \rightarrow t^*} u(t) = +\infty$.*

▪ *Si $a < 0$ y $u_0 > \frac{a}{b}$, entonces la solución explota en tiempo finito, es decir, $\lim_{t \rightarrow t^*} u(t) = +\infty$.*

▪ *Si $a < 0$ y $u_0 \leq \frac{a}{b}$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$.*

Demostración

(a),(b) Estos casos son obvios, pues sólo hay que calcular directamente dichos límites.

(c) Supongamos primero que $a > 0$ y $b < 0$, entonces es obvio que el denominador se anula en el punto

$$t^* = \frac{\log\left(1 - \frac{a}{bu_0}\right)}{a},$$

que es un número real finito pues $a, u_0 > 0$ y $b < 0$.

Con lo cual, es obvio que para este caso la solución explota en el tiempo t^* ; y para el caso de $a = 0$ es también sencillo ver que la solución explota en el tiempo $t^* = \frac{-b}{u_0}$.

Ahora analicemos el caso de $a, b < 0$ y $u_0 > \frac{a}{b}$. Aquí el denominador se anula en el punto

$$t^* = \frac{\log\left(1 - \frac{a}{bu_0}\right)}{a}$$

que en este caso es un número real finito pues $a, b < 0$ y $u_0 > \frac{a}{b}$.

Y por último, en el caso de $a, b < 0$ y $u_0 \leq \frac{a}{b}$ la solución no explota porque el denominador no se anula y su límite es 0, pues $e^{at} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

■

Bibliografía

- [1] E. R. Aragão-Costa, *Descomposición de Morse para sistemas gradiente en dimensión infinita*, Tesis doctoral, Univ. Sevilla (2012).
- [2] E. R. Aragão-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho and J. A. Langa, *Continuity of Lyapunov functions and of energy level for a generalized gradient system*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 39 (2012), 57-82.
- [3] E. R. Aragão-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho and J. A. Langa, *Stability of gradient semigroup under perturbation*, *Nonlinearity* 24 (2011), 2009-2117.
- [4] J. Bascompte, P. Jordano, C. J. Melián, J. M. Olesen, *The nested assembly of plant-animal mutualistic networks*, *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 100 (2003), 9383-9387.
- [5] J. Bascompte, P. Jordano, J. M. Olesen, *Asymmetric coevolutionary networks facilitate biodiversity maintenance*, *Science* 312 (2006), 431-433.
- [6] J. Bascompte, P. Jordano, *The structure of plant-animal mutualistic networks: the architecture of biodiversity*, *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 38 (2007), 567-593.
- [7] U. Bastolla, M. A. Fortuna, A. Pascual-García, A. Ferrera, B. Luque, J. Bascompte, *The architecture of mutualistic networks minimize competition and increase biodiversity*, *Nature*, 458 (2009), 1018-1020.
- [8] A. N. Carvalho, J. A. Langa, *An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation*, *J. Differential Equations* 246 (2009), 2646-2668.
- [9] C. E. Clark, T. G. Hallam, *The community matrix in three species community models*, *J. Math. Biology*, 16 (1982) 25-31.
- [10] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 38. American Mathematical Society (2002).
- [11] P. Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of non-linear differential equations*, Cambridge University Press (1994).
- [12] B. S. Goh, *Stability in models of mutualism*, *The American Naturalist*, 111 (1977), 135-143.

-
- [13] G. Guerrero, J. A. Langa, A. Suárez, *Architecture of attractor determines dynamics on mutualistic complex networks*, preprint.
- [14] G. Guerrero, J. A. Langa, A. Suárez, *Biodiversity and vulnerability in a 3D mutualistic system*, DCDS Series A, 34 (2014), 4107-4126.
- [15] M. de Guzman, *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*, Alhambra University (1987).
- [16] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs Number 25 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).
- [17] M. Hurley, *Chain recurrence, semiflows and gradients*, J. Dyn. Diff. Equations 7 (1995), 437-456.
- [18] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolutions equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [19] D. E. Norton, *The fundamental theorem of dynamical system*, Comment. Math, Univ. Carolinae 36 (3) (1995), 586-597.
- [20] M. Patrao, Luiz A. B. San Martin, *Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups*, J. Dyn. Diff. Equations 19 (1) (2007), 155-180.
- [21] M. Patrao, *Morse Decomposition of semiflows on topological spaces*, J. Dyn. Diff. Equations 19 (1) (2007), 181-198.
- [22] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1988; second edition 1996).
- [23] S. Saavedra, D. B. Stouffer, B. Uzzi, J. Bascompte, *Strong contributors to network persistence are the most vulnerable to extinction*, Nature, 478 (2011), 233-235.
- [24] H. L. Smith, *Competing subcommunities of mutualists and generalized Kamke theorem*, SIAM J. Appl. Math., 46 (1986), 856-874.
- [25] G. Sugihara, H. Ye, *Cooperative network dynamics*, Nature (News and View), 458 (2009), 979-980.
- [26] Y. Takeuchi, *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific Publishing Co Pte. Ltd. Singapore. 1996, 401-415.
- [27] Y. Takeuchi, N. Adachi, *The existence of globally stable equilibria of ecosystems of a generalized Volterra type*, J. Math. Biol. 10 (1980), 401-415.
- [28] Y. Wang, H. Wu, *Dynamics of a cooperation-competition model for the WWW market*, Physica A, 339 (2004), 609-620.