



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

ABANICOS DE GROEBNER E IDEALES TÓRICOS

Trabajo Fin de Grado

presentado por

Fátima Fernández Antúnez

Director: María Cruz Fernández Fernández

Sevilla, Junio de 2016

ABSTRACT

The Groebner fan of a polynomial ideal was originally introduced by T. Mora and L. Robbiano in 1988. In this Bachelor's Degree Final Project we study the Groebner fan of a polynomial ideal, including the proof by Fukuda, Jensen and Thomas that it is a polyhedral complex consisting of polyhedral cones. Next, we will see a constructive proof of the existence of the state polytope of a homogeneous ideal, whose normal fan is the Grobner fan of such ideal. On the other hand, we will introduce toric ideals associated with integer matrices and regular triangulations of the latter. We will continue by studying the secondary fan of a toric ideal, whose maximal dimension cones correspond to regular triangulations of the associated matrix. Moreover, we will see that the Grobner fan of a toric ideal is a polyhedral subdivision of its secondary fan. Finally, we will focus on the existence of the secondary polytope of a homogeneous toric ideal, whose normal fan is the secondary fan. Regular triangulations of a matrix, the secondary fan of a toric ideal and its secondary polytope were originally introduced by Gelfand, Kapranov and Zelevinsky in 1989.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ideales iniciales	3
3. Abanico de Groebner	11
4. Politopo de estados	23
5. Ideales tóricos	31
6. Politopo secundario y abanico secundario	39
A. Cálculo de ideales tóricos	57
B. Cálculos en SAGE	63
B.1. Cálculo de bases de Groebner	63
B.2. Cálculo de abanico de Groebner	64
B.3. Cálculo de politopo secundario	65
C. Cálculos en Macaulay2	67
C.1. Cálculo de politopo de estados	67
C.2. Cálculo de ideales radicales de ideales iniciales de I_A	68
Bibliografía	70

CAPÍTULO 1

Introducción

Uno de los problemas clásicos en matemáticas es la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas en varias variables. A pesar de que podemos usar el método de eliminación de Gauss cuando las ecuaciones son lineales, este método no es válido en general si tratamos con ecuaciones polinomiales. Para reducir el problema a la resolución de ecuaciones polinómicas en una variable se usan las bases de Groebner en teoría de eliminación (ver [2]).

Bruno Buchberger (Austria, 1942) leyó su tesis en 1966, bajo la dirección del profesor Wolfgang Groebner. En ella, construyó el algoritmo que lleva su nombre, que permitía obtener una base de un ideal de polinomios, a la cual llamó Base de Groebner. Por esto, es considerado el padre de la teoría de las bases de Groebner. En las últimas décadas, se han encontrado numerosas aplicaciones de su algoritmo a las distintas ramas de la ciencia, como por ejemplo a la criptografía, la programación entera, la estadística y a la robótica entre otras.

En primer lugar, en el Capítulo 2 de esta memoria introduciremos los ideales iniciales, así como algunos resultados necesarios para su desarrollo teórico posterior. Si $n \geq 2$, existen infinitos órdenes monomiales en $k[x_1, \dots, x_n]$, sin embargo, probaremos que todo ideal de polinomios tiene un número finito de ideales iniciales. Como resultado, se tiene la existencia de una base de Groebner universal. Muchas de estas propiedades fueron ya estudiadas en la asignatura “Álgebra, Combinatoria y Computación” del Grado en Matemáticas, por lo que esta memoria de TFG se puede considerar como un texto en el que se profundiza en el tema principal del citado curso. Para la elaboración de este capítulo seguiremos las referencias [2] y [17].

A continuación, en el Capítulo 3, estudiaremos el abanico de Groebner de un ideal, introducido por T. Mora y L. Robbiano en 1988 [14]. Para el desarrollo de este capítulo seguiremos parte del artículo de Fukuda, Jensen y Thomas [6], en el que demuestran un resultado fundamental, que el abanico de Groebner de un ideal es un abanico, es decir, un complejo poliedral compuesto por conos. Los conos de dimensión máxima están en biyección con los ideales iniciales respecto de algún orden monomial.

Seguidamente, en el Capítulo 4, estudiaremos la existencia de un politopo llamado politopo de estados, en el caso de que el ideal sea homogéneo. Este politopo verifica que su abanico normal es el abanico de Groebner del ideal. Este estudio lo podemos encontrar en [17].

En el Capítulo 5 trabajaremos con un tipo de ideales, denominados ideales tóricos, que se definen a partir de una matriz de enteros, y que se caracterizan por ser primos y generados por binomios. Éstos han surgido debido a las numerosas conexiones descubiertas en las últimas décadas entre los ideales de anillos de polinomios y la geometría combinatoria. Además, probaremos que el grado de la variedad tórica proyectiva de un ideal tórico coincide con el volumen normalizado de la envolvente convexa de las columnas de la matriz que define a dicho ideal. Ambos conceptos, los abanicos de Groebner y los ideales tóricos, son los temas principales de esta memoria, que completamos con algunos ejemplos que hacen de este TFG un trabajo más intuitivo.

A continuación, en el Capítulo 6 consideraremos las triangulaciones regulares de la matriz que define al ideal tórico. Dichas triangulaciones se corresponden con los conos de dimensión máxima del llamado abanico secundario. Probaremos que el abanico de Groebner del ideal tórico refina a su abanico secundario. Estos resultados los encontramos en [17]. Además, estudiaremos la existencia del politopo secundario en el caso de un ideal tórico homogéneo, el cual verifica que su abanico normal coincide con el abanico secundario. Para este resultado seguiremos parte del artículo de Billera, Filliman y Sturmfels [1]. No obstante, las triangulaciones regulares de una matriz, así como el abanico secundario y el politopo secundario de un ideal tórico homogéneo fueron introducidos originalmente por Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [9].

Por último, hemos añadido una serie de apéndices que comprenden, por un lado dos algoritmos de cálculo para ideales tóricos, y por otro las operaciones que han sido necesarias para realizar los ejemplos de esta memoria. Los programas que han sido utilizados para realizar estos cálculos son Sage y Macaulay2.

CAPÍTULO 2

Ideales iniciales

En este capítulo presentamos, en primer lugar, nociones fundamentales de la Teoría de las Bases de Groebner, algunas de ellas estudiadas en la asignatura Álgebra, Combinatoria y Computación. Después, pasaremos a estudiar con detalle los ideales iniciales, así como los resultados básicos necesarios para el desarrollo teórico del trabajo. Este capítulo sigue en gran parte el capítulo 1 de [17] y el libro [2].

Fijado un cuerpo k y el anillo de polinomios $k[\mathbf{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$, denotamos los monomios en $k[\mathbf{x}]$ como $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, donde el exponente $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Se identifican los monomios en $k[\mathbf{x}]$ con los puntos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, donde \mathbf{N} es el conjunto de los enteros no negativos. Denotamos por $\mathbf{R}_{\geq 0}$ a los números reales no negativos.

Definición 2.1. *Un orden monomial \prec en $k[\mathbf{x}]$ es un orden \prec en \mathbf{N}^n que satisface:*

- 1. \prec es un orden total en \mathbf{N}^n , es decir, dados $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, sucede exactamente una de las tres cosas siguientes: $\alpha \prec \beta$, $\alpha = \beta$ ó $\alpha \succ \beta$.*
- 2. Si $\alpha \prec \beta$ y $\gamma \in \mathbf{N}^n$, entonces $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.*
- 3. En todo subconjunto no vacío de \mathbf{N}^n existe un elemento menor que todos los demás respecto a \prec .*

Suponiendo las dos primeras condiciones, la tercera es equivalente a:

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}, \alpha \succ 0.$$

Algunos ejemplos de órdenes monomiales son el orden lexicográfico, el orden lexicográfico graduado y el lexicográfico graduado inverso (ver [2, Sección 2]).

Definición 2.2. Sea un polinomio $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha} \in k[\mathbf{x}]$, se llama soporte de f al conjunto finito

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbf{N}^n : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

Definición 2.3. Fijado un orden monomial \prec , y dado un polinomio no nulo $f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha} \in k[\mathbf{x}]$, se define el término inicial de f , el cual se denota por $\text{in}_{\prec}(f)$, como

$$\text{in}_{\prec}(f) = c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha},$$

donde α es el máximo de $\text{supp}(f)$ respecto de \prec .

Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, se define el ideal inicial de I como el ideal monomial

$$\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(f) : f \in I \rangle.$$

Un monomio \mathbf{x}^{α} se dice estándar si $\mathbf{x}^{\alpha} \notin \text{in}_{\prec}(I)$. A partir de ahora, notaremos $\text{St}_{\prec}(I)$ al conjunto de los monomios estándar de I respecto al orden monomial \prec .

Definición 2.4. Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ y un orden monomial \prec , un conjunto finito $\mathfrak{G} \subset I$ es una base de Groebner de I respecto al orden \prec si

$$\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathfrak{G} \rangle.$$

\mathfrak{G} se denomina base de Groebner minimal de I si verifica que $\text{in}_{\prec}(g) \notin \langle \text{in}_{\prec}(g') : g' \in \mathfrak{G}, g' \neq g \rangle$, $\forall g \in \mathfrak{G}$. Es decir, $\mathfrak{G} \subseteq I$ es una base de Groebner minimal si y solamente si $\{\text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathfrak{G}\}$ es un sistema generador minimal de $\text{in}_{\prec}(I)$.

Se dice que \mathfrak{G} es una base de Groebner reducida si verifica las siguientes condiciones:

1. \mathfrak{G} es una base de Groebner minimal.
2. $\forall g \in \mathfrak{G}$, ningún monomio de $g - \text{in}_{\prec}(g)$ pertenece a $\text{in}_{\prec}(I)$.
3. El coeficiente líder de g es 1, $\forall g \in \mathfrak{G}$.

Observación 2.5. Una base de Groebner de un ideal de $k[\mathbf{x}]$ puede calcularse mediante el algoritmo de Buchberger (ver [2]).

Proposición 2.6. Si \mathfrak{G} es base de Groebner del ideal I , entonces $I = \langle \mathfrak{G} \rangle$.

Demostración. La demostración de esta proposición puede encontrarse en el Capítulo 2, Sección 5 de [2] (Corolario 6). \square

Corolario 2.7. *Sea \prec un orden monomial. Si $I \subseteq J \subseteq k[\mathbf{x}]$ son ideales tales que $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(J)$, entonces $I = J$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{G} \subseteq I$ base de Groebner de I respecto de \prec . Entonces

$$\langle in_{\prec}(g) : g \in \mathfrak{G} \rangle = in_{\prec}(I) = in_{\prec}(J).$$

Luego por la Definición 2.4, \mathfrak{G} es base de Groebner de J respecto \prec , y por tanto $J = \langle \mathfrak{G} \rangle = I$. \square

Proposición 2.8. *Sean $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ un ideal y $\pi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]/I$ la proyección natural. Entonces la imagen por π de $St_{\prec}(I)$ es una base del k -espacio vectorial $k[\mathbf{x}]/I$.*

Demostración. Sea \mathfrak{G} una base de Groebner de I . Veamos que $\pi(St_{\prec}(I))$ genera $k[\mathbf{x}]/I$: Sea $f \in k[\mathbf{x}]$ cualquiera. Por el algoritmo de la división ([2, Teorema 3, Sección 3, Capítulo 2]) se tiene que si r es el resto de dividir f por \mathfrak{G} se verifica

$$\forall \alpha \in \text{supp}(r), \forall g \in \mathfrak{G}, in_{\prec}(g) \nmid \mathbf{x}^{\alpha} \Rightarrow \mathbf{x}^{\alpha} \notin in_{\prec}(I) \Rightarrow \mathbf{x}^{\alpha} \in St_{\prec}(I).$$

Es decir, todo monomio de r es estándar y además r verifica que $\pi(f) = \pi(r)$. Por tanto, $\pi(St_{\prec}(I))$ genera $k[\mathbf{x}]/I$.

Veamos que $St_{\prec}(I)$ es k -linealmente independiente módulo I . Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Entonces existe $f \in I$, $f \neq 0$, tal que $\forall \alpha \in \text{supp}(f)$, $\mathbf{x}^{\alpha} \notin in_{\prec}(I)$, lo cual contradice el hecho de que si $f \in I \Rightarrow in_{\prec}(f) \in in_{\prec}(I)$. \square

Teorema 2.9. *Todo ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ tiene un número finito de ideales iniciales.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que el siguiente conjunto es infinito

$$\Sigma_0 = \{in_{\prec}(I) : \prec \text{ orden monomial}\}.$$

Consideremos $f_1 \in I$ no nulo. Como f_1 tiene un número finito de términos y cada $M \in \Sigma_0$ contiene uno de ellos, existe un término de f_1 , llamémosle m_1 , tal que $\Sigma_1 = \{M \in \Sigma_0 ; m_1 \in M\}$ es infinito.

Dado que existe $M' \in \Sigma_1$ tal que $\langle m_1 \rangle \subsetneq M'$, por la Proposición 2.8, los monomios estándar respecto a $\langle m_1 \rangle$ son linealmente dependientes módulo I . Por tanto, existe $f_2 \in I$ no nulo tal que ningún término de f_2 pertenece a $\langle m_1 \rangle$. Como f_2 tiene un número finito de términos y Σ_1 es infinito, existe m_2 , término de f_2 tal que $\Sigma_2 = \{M \in \Sigma_1 ; m_2 \in M\}$ es infinito. Luego existe

$$M'' \in \Sigma_0 ; \langle m_1 m_2 \rangle \subsetneq M''.$$

Reiterando este proceso construimos una cadena estrictamente creciente e infinita de ideales monomiales

$$\langle m_1 \rangle \subsetneq \langle m_1, m_2 \rangle \subsetneq \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \subsetneq \dots$$

Esto se contradice con el hecho de que $k[\mathbf{x}]$ es noetheriano. Por tanto Σ_0 es finito, demostrando así el enunciado. \square

Definición 2.10. *Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, un subconjunto finito $\mathcal{U} \subset I$ se llama base de Groebner universal si \mathcal{U} es base de Groebner de I respecto a todos los órdenes monomiales simultáneamente.*

Lema 2.11. *Sea un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$. Si \mathfrak{G}_1 y \mathfrak{G}_2 son bases de Groebner reducidas de I respecto de \prec_1 y \prec_2 respectivamente, y además $in_{\prec_1}(I) = in_{\prec_2}(I)$, entonces $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$.*

Demostración. Sea $g \in \mathfrak{G}_1 \Rightarrow in_{\prec_1}(g) \in in_{\prec_1}(I) = in_{\prec_2}(I)$. Dado que \mathfrak{G}_1 y \mathfrak{G}_2 son bases de Groebner minimales, $\{in_{\prec_1}(g) : g \in \mathfrak{G}_1\}$ y $\{in_{\prec_2}(g) : g \in \mathfrak{G}_2\}$ son sistemas generadores minimales del ideal inicial $in_{\prec_1}(I) = in_{\prec_2}(I)$ y, por tanto, son iguales (ya que $\forall g \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$, g es mónico). Así, existe $g' \in \mathfrak{G}_2$, $in_{\prec_1}(g) = in_{\prec_2}(g') \Rightarrow g - g' = h \in St_{\prec_1}(I) = St_{\prec_2}(I)$, y dado que $g - g' \in I$, tenemos que $g = g'$. Por lo tanto, $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$. \square

Corolario 2.12. *Todo ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ tiene una base de Groebner universal finita.*

Demostración. Por el Teorema 2.9, todo ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ tiene un número finito de ideales iniciales. Entonces por el Lema 2.11, existe solo un número finito de bases de Groebner reducidas para I . Su unión \mathcal{U} es finita, y además es una base de Groebner universal. \square

Definición 2.13. *Dado un vector $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbf{R}^n$ y un polinomio $f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$, se define la forma inicial de f respecto a ω , $in_{\omega}(f)$, como la suma de los términos $c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$ de f tales que $\omega \cdot \alpha$ es máxima con $\alpha \in \text{supp}(f)$.*

Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, se define el ideal inicial de I respecto a ω como

$$in_{\omega}(I) = \langle in_{\omega}(f) : f \in I \rangle.$$

En general, este ideal inicial no tiene por qué ser monomial, como se verá en el Ejemplo 2.15.

Lema 2.14 (Ejercicio 4, Capítulo 1 [17]). *Para todo $f, g \in k[\mathbf{x}]$,*

$$in_{\omega}(fg) = in_{\omega}(f) in_{\omega}(g). \quad (2.1)$$

Demostración. Sean $f = \sum_{\alpha \in \text{supp}(f)} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ y $g = \sum_{\beta \in \text{supp}(g)} b_\beta \mathbf{x}^\beta$.

Sean $c = \max \{\omega \cdot \alpha : \alpha \in \text{supp}(f)\}$ y $d = \max \{\omega \cdot \beta : \beta \in \text{supp}(g)\}$.

Tenemos que $in_\omega(f) = \sum_{\alpha \cdot \omega = c} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ e $in_\omega(g) = \sum_{\beta \cdot \omega = d} b_\beta \mathbf{x}^\beta$.

Es fácil ver que $\max \{\omega \cdot (\alpha + \beta) : \alpha \in \text{supp}(f), \beta \in \text{supp}(g)\} = c + d$, y como $in_\omega(f)$ e $in_\omega(g)$ son distintos de cero, tenemos que $in_\omega(f) in_\omega(g) \neq 0$. Entonces

$$in_\omega(f)in_\omega(g) = \sum_{\nu} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Lambda} a_\alpha b_\beta \right) \mathbf{x}^\nu = \sum_{\omega \nu = c+d} \left(\sum_{\alpha+\beta=\nu} a_\alpha b_\beta \right) \mathbf{x}^\nu = in_\omega(fg),$$

con $\Lambda = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n} : \alpha + \beta = \nu, \omega \cdot \alpha = c, \omega \cdot \beta = d\}$.

□

Ejemplo 2.15. Sean $f(x, y) = 4x^6y^2 + 5x^5y^3 - x^4 + 3x^2y^4 + x^2 + xy + y^3 + 7$ e $I = \langle f \rangle \subseteq \mathbf{Q}[x, y]$ ideal. Sea $\omega = (2, 1)$, entonces $in_\omega(I) = \langle x^6y^2 \rangle$ es ideal monomial. Si $\omega' = (1, 1)$, entonces $in_{\omega'}(I) = \langle 4x^6y^2 + 5x^5y^3 \rangle$ es ideal no monomial.

Definición 2.16. Dado $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ y un orden monomial arbitrario \prec , se define el orden \prec_ω de la siguiente forma:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n, \alpha \prec_\omega \beta \Leftrightarrow (\omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta) \vee (\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \wedge \alpha \prec \beta).$$

Observación 2.17. El orden \prec_ω verifica las condiciones 1) y 2) de la Definición 2.1 para cualquier $\omega \in \mathbf{R}^n$, pero solamente verifica 3) si tenemos que $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$.

Proposición 2.18. Para todo ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ se tiene que

$$in_{\prec}(in_\omega(I)) = in_{\prec_\omega}(I), \quad \forall \omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n.$$

Demostración. Dado que para todo $f \in k[\mathbf{x}]$ se tiene que $in_{\prec}(in_\omega(f)) = in_{\prec_\omega}(f)$, ambos ideales monomiales contienen los mismos monomios y por lo tanto son iguales. □

Corolario 2.19. Dado $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ y $\mathfrak{G} \subset I$ una base de Groebner de I respecto al orden monomial \prec_ω , entonces una base de Groebner de $in_\omega(I)$ respecto al orden monomial \prec es $\{in_\omega(g) : g \in \mathfrak{G}\}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{G} \subset I$ una base de Groebner de I respecto al orden monomial \prec_ω , entonces una base de $in_{\prec_\omega}(I) = in_{\prec}(in_\omega(I))$ es $\{in_{\prec_\omega}(g) : g \in \mathfrak{G}\} = \{in_{\prec}(in_\omega(g)) : g \in \mathfrak{G}\}$, por lo que $\{in_\omega(g) : g \in \mathfrak{G}\}$ es una base de Groebner de $in_\omega(I)$ respecto al orden monomial \prec . □

Corolario 2.20. Si $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ e $in_\omega(I)$ es monomial, entonces $in_\omega(I) = in_{\prec_\omega}(I)$.

Demostración. Dado que los ideales monomiales son invariantes respecto a tomar ideal inicial, entonces $in_\omega(I) = in_{\prec}(in_\omega(I)) = in_{\prec_\omega}(I)$. \square

Proposición 2.21. Para todo orden monomial \prec y para todo ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, existe $\omega \in \mathbf{N}^n$ tal que $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$.

Demostración. Sea $\mathfrak{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$ una base de Groebner reducida de I respecto \prec . Para fijar notación escribamos $g_i = c_{i0}\mathbf{x}^{\alpha_{i0}} + c_{i1}\mathbf{x}^{\alpha_{i1}} + \dots + c_{ij_i}\mathbf{x}^{\alpha_{ij_i}}$, donde $in_{\prec}(g_i) = c_{i0}\mathbf{x}^{\alpha_{i0}}$. Definamos $\mathcal{C}_{I,\prec}$ como el conjunto de los vectores $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ tales que $in_\omega(g_i) = c_{i0}\mathbf{x}^{\alpha_{i0}}$, $i = 1, \dots, r$, es decir,

$$\mathcal{C}_{I,\prec} = \{\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n : \omega \cdot (\alpha_{i0} - \alpha_{il}) > 0, i = 1, \dots, r, l = 1, \dots, j_i\}.$$

El conjunto $\mathcal{C}_{I,\prec}$ es no vacío, ya que de no ser así, por el Lema de Farkas para Programación lineal (ver [15, Corolario 7.1.f, sección 3, Capítulo 7]), el sistema alternativo

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{j_i} \lambda_{il} (\alpha_{i0} - \alpha_{il}) \leq 0$$

tendría solución $\lambda_{il} \in \mathbf{N}$ no trivial.

Luego por las propiedades 2) y 3) de la Definición 2.1 tenemos que

$$\prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{i0}})^{\lambda_{il}} \preceq \prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{il}})^{\lambda_{il}}.$$

Pero por otro lado, hemos impuesto que $in_{\prec}(g_i) = \mathbf{x}^{\alpha_{i0}} \Rightarrow \mathbf{x}^{\alpha_{i0}} \succ \mathbf{x}^{\alpha_{il}}$ y por lo tanto

$$\prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{i0}})^{\lambda_{il}} \succ \prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{il}})^{\lambda_{il}},$$

lo cual es una contradicción y podemos concluir que $\mathcal{C}_{I,\prec}$ es no vacío.

Sea $\omega \in \mathcal{C}_{I,\prec}$. Veamos ahora que se da la igualdad $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$. Dado que $in_{\prec}(g_i) = in_\omega(g_i)$, $\forall i = 1, \dots, r$, se tiene que

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g_i) : i = 1, \dots, r \rangle \subseteq in_\omega(I) \xrightarrow{\text{Prop. 2.18}}$$

$$\Rightarrow in_{\prec}(I) \subseteq in_{\prec_\omega}(I) \xrightarrow{\text{Prop. 2.8}} in_{\prec}(I) = in_{\prec_\omega}(I) = in_{\prec}(in_\omega(I)).$$

Por tanto, por el Corolario 2.7, tenemos que $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$. Como $\mathcal{C}_{I,\prec} \subseteq \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ es intersección no vacía de un abierto de \mathbf{R}^n con $\mathbf{R}_{\geq 0}^n$ y \mathbf{Q}^n es denso en \mathbf{R}^n , entonces $\mathcal{C}_{I,\prec} \cap \mathbf{Q}_{\geq 0}^n \neq \emptyset$. Dado $\omega' \in \mathcal{C}_{I,\prec} \cap \mathbf{Q}_{\geq 0}^n$, $\exists \lambda \in \mathbf{N}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\omega = \lambda\omega' \in \mathcal{C}_{I,\prec} \cap \mathbf{N}^n$. \square

Si $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ verifica $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$ para un orden monomial \prec , podemos identificar por ω dicho orden monomial para I .

Ejemplo 2.22. *Continuación del Ejemplo 2.15.*

Sea \prec el orden monomial lexicográfico y $\omega = (2, 1)$. Tenemos entonces que

$$in_{\prec}(I) = \langle x^6y^2 \rangle = in_\omega(I).$$

Ejemplo 2.23. *Sea el ideal $I = \langle x^2 + y^2 - 3x + y, x^2y - 2y^2 \rangle \subseteq \mathcal{Q}[x, y]$, \prec el orden monomial lexicográfico. Una base de Groebner de I respecto \prec es $\mathfrak{B}_{\prec}(I) =$*

$\{ \underline{x}^2 - 3x + y^2 + y, \underline{xy} - \frac{1}{3}y^3 - y^2, \underline{y}^5 + 6y^4 + 9y^3 - 18y^2 \}$, donde están subrayados los términos iniciales. Tomando $\omega = (3, 1)$ tenemos entonces que

$$in_\omega(I) = \langle x^2, xy, y^5 \rangle = in_{\prec}(I).$$

Definición 2.24. *Sea $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ un ideal. Se define la región de Groebner de I como el conjunto*

$$GR(I) = \{ \omega \in \mathbf{R}^n : \exists \omega' \geq 0, in_\omega(I) = in_{\omega'}(I) \}.$$

En el capítulo 3 veremos un ejemplo de cálculo de la región de Groebner, ya que su clausura coincide con la unión de los conos del abanico de Groebner.

Definición 2.25. *Sea $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha} \in k[\mathbf{x}]$. Se dice que f es homogéneo de grado ν respecto a la graduación dada por $deg(x_i) = d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, si $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i = \nu$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$ tal que $c_{\alpha} \neq 0$. Un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ se dice que es homogéneo respecto a la graduación anterior si tiene un conjunto de generadores formados por polinomios homogéneos.*

Lema 2.26. *Si $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ es un ideal homogéneo y $f = \sum_{\nu \geq 0} f_{\nu} \in k[\mathbf{x}]$ con f_{ν} homogéneo de grado ν , entonces*

$$f \in I \Leftrightarrow f_{\nu} \in I, \forall \nu.$$

Demostración. \Rightarrow | Supongamos que $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ con g_i , $i = 1, \dots, s$ generadores homogéneos de I . Como f pertenece a I tenemos que $f = \sum_{i=1}^s h_i g_i$ con $h_i \in k[\mathbf{x}]$ cualesquiera y $g_j \in I$ homogéneo de grado ν_j . Podemos expresar para cada j , $h_j = \sum_{\lambda \geq 0} h_{j\lambda}$ con $h_{j\lambda}$ componente homogénea de h_j de grado λ . Además, como $f = \sum_{\nu \geq 0} f_{\nu}$, se tiene que $\forall \nu$, $f_{\nu} = \sum_{\lambda + \nu_j = \nu} h_{j\lambda} g_j$, y por tanto, f_{ν}

pertenece a I para todo ν .

$$\Leftarrow \text{ Si } f_{\nu} \in I, \forall \nu \Rightarrow f = \sum_{\nu \geq 0} f_{\nu} \in I. \quad \square$$

Proposición 2.27. Si $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ es un ideal homogéneo respecto a la graduación dada por $\deg(x_i) = d_i > 0$, entonces $GR(I) = \mathbf{R}^n$.

Demostración. Para cualquier vector $\omega \in \mathbf{R}^n$, existe $\lambda > 0$ tal que $\omega' = \omega + \lambda(d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{R}_{>0}^n$, luego basta probar que $in_\omega(I) = in_{\omega'}(I)$. Si $f \in I$ es homogéneo respecto a la graduación dada en el enunciado tenemos que $in_\omega(f) = in_{\omega'}(f)$. Consideremos ahora un polinomio no homogéneo $f = \sum_\nu f_\nu \in I$, con f_ν polinomio homogéneo de grado ν , y por ser I un ideal homogéneo entonces tenemos que $f_\nu \in I$. Luego $in_\omega(f_\nu) = in_{\omega'}(f_\nu)$ para todo ν . En particular, dado que $in_\omega(f)$ es suma de $in_\omega(f_\nu)$ para algunos ν , $in_\omega(f) = in_{\omega'}(f)$. Por tanto $in_\omega(I) = in_{\omega'}(I)$. \square

Proposición 2.28. Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, $\omega, \omega' \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ y una constante $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, tenemos que

$$in_{\omega'}(in_\omega(I)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(I). \quad (2.2)$$

Demostración. Sea \mathfrak{G} una base de Groebner reducida de I respecto del orden $\prec_{\omega+\epsilon\omega'}$. Para cada $g \in \mathfrak{G}$ tenemos que $in_{\omega'}(in_\omega(g)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(g)$, ya que ϵ es suficientemente pequeño. Aplicando el Corolario 2.19 tenemos $in_{\omega+\epsilon\omega'}(I) \subseteq in_{\omega'}(in_\omega(I))$. Supongamos que la contención es estricta,

$$in_{\omega+\epsilon\omega'}(I) \subsetneq in_{\omega'}(in_\omega(I)) \stackrel{\text{Cor. 2.7}}{\Rightarrow} in_{\prec}(in_{\omega+\epsilon\omega'}(I)) \subsetneq in_{\prec}(in_{\omega'}(in_\omega(I))).$$

Definimos el orden monomial \prec' como sigue:

$$\alpha \prec' \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta, \\ \text{o bien} \\ \omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \text{ y } \omega' \cdot \alpha < \omega' \cdot \beta, \\ \text{o bien} \\ \omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta, \omega' \cdot \alpha = \omega' \cdot \beta \text{ y } \alpha \prec \beta. \end{cases}$$

Equivalentemente $\prec' = (\prec_{\omega'})_\omega$, por tanto, $in_{\prec}(in_{\omega'}(in_\omega(I))) = in_{\prec'}(I)$. Entonces tenemos que $in_{\prec}(in_{\omega+\epsilon\omega'}(I)) = in_{\prec_{\omega+\epsilon\omega'}}(I) \subsetneq in_{\prec}(in_{\omega'}(in_\omega(I))) = in_{\prec'}(I)$, lo cual es absurdo por la Proposición 2.8, y por tanto tenemos la igualdad. \square

Observación 2.29. Si no se tiene que $\omega \geq 0$, \prec_ω no es orden monomial por fallar en la condición 3) de la Definición 2.1. Lo mismo pasa para $\prec_{\omega+\epsilon\omega'}$.

Abanico de Groebner

En este capítulo introducimos el concepto de abanico de Groebner, para terminar demostrando que es un abanico. Empezamos recordando algunas definiciones básicas de geometría poliedral.

Definición 3.1. *Un poliedro es una intersección finita de semiespacios cerrados en \mathbf{R}^n , es decir*

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

donde A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$.

Se dice que un poliedro Q es un politopo si es acotado. Equivalentemente, un politopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces existen vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbf{R}^n$ tales que

$$P = \text{pos}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}) = \{\lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_m\mathbf{u}_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}_{\geq 0}\}.$$

Un poliedro de esta forma se denomina como poliedral.

Observación 3.2. *La definición de poliedro que hemos dado es en realidad la de poliedro convexo. Existe una definición de poliedro más general, la cual no incluimos porque no va a ser necesaria para este trabajo.*

Definición 3.3. *Sea P un poliedro en \mathbf{R}^n y $\omega \in \mathbf{R}^n$. Se llama cara de P respecto a ω al subconjunto de P donde se maximiza $\omega \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in P$, es decir,*

$$\text{face}_\omega(P) = \{\mathbf{u} \in P : \omega \cdot \mathbf{u} \geq \omega \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in P\}.$$

Definición 3.4. *Un complejo poliedral Δ es una colección finita de poliedros en \mathbf{R}^n tal que:*

1. Si $P \in \Delta$ y F es una cara de P , entonces $F \in \Delta$.
2. Si $P_1, P_2 \in \Delta$, entonces $P_1 \cap P_2$ es una cara de P_1 y de P_2 .

El soporte de un complejo poliedral Δ se define como $|\Delta| = \cup_{P \in \Delta} P$. Un complejo Δ constituido íntegramente por conos se denomina abanico. Un abanico Δ se dice completo si $|\Delta| = \mathbf{R}^n$.

Veamos un ejemplo de un abanico completo: el abanico normal de un poliedro.

Definición 3.5. Sea $P \subset \mathbf{R}^n$ un poliedro. Para cada cara F de P se define su cono normal como

$$\mathcal{N}_P(F) = \overline{\{\omega \in \mathbf{R}^n : \text{face}_\omega(P) = F\}}.$$

Si F y F' son caras de P , entonces F' es cara de F si y solo si $\mathcal{N}_P(F)$ es cara de $\mathcal{N}_P(F')$. Entonces el conjunto de conos normales $\mathcal{N}_P(F)$ para las caras de P es un abanico, que se denomina abanico normal de P y notaremos por $\mathcal{N}(P)$.

Observación 3.6. Si P es un politopo, su abanico normal es completo y sus conos están en biyección con las caras de P ,

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Caras de } P\} & \longleftrightarrow & \{\text{Conos de } \mathcal{N}(P)\} \\ F & \longmapsto & \mathcal{N}_P(F) \\ \text{face}_\omega(P) & \longleftarrow & C \end{array} \quad (3.1)$$

donde ω es cualquier vector en el interior relativo de C .

Definición 3.7. Fijado $I \subseteq k[\mathbf{x}]$, se define la siguiente relación de equivalencia en \mathbf{R}^n :

$$\omega \sim \gamma \Leftrightarrow \text{in}_\omega(I) = \text{in}_\gamma(I).$$

Se denota las clausuras de las clases de equivalencia por

$$C_{\prec}(I) = \overline{\{\gamma \in \mathbf{R}^n : \text{in}_\gamma(I) = \text{in}_{\prec}(I)\}} \text{ y } C_\omega(I) = \overline{\{\gamma \in \mathbf{R}^n : \text{in}_\gamma(I) = \text{in}_\omega(I)\}}, \forall \omega \in \mathbf{R}^n.$$

Observación 3.8. Por la Proposición 2.21 todo ideal inicial $\text{in}_{\prec}(I)$ es de la forma $\text{in}_\omega(I)$ para algún $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, entonces las clases de equivalencia $C_{\prec}(I)$ son de la forma $C_\omega(I)$ para algún $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Usando la Proposición 2.28 para $\omega' \in \mathbf{R}_{> 0}^n$, se deduce que, de hecho, $C_{\prec}(I) = C_\omega(I)$ para cierto $\omega \in \mathbf{R}_{> 0}^n$.

Observación 3.9. Si no se verifica que $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, entonces $C_\omega(I)$ no es necesariamente convexa. Veamos un contraejemplo.

Ejemplo 3.10. Sea el ideal $I = \langle x - 1, y - 1 \rangle \subseteq \mathcal{Q}[x, y]$. Es fácil ver que $\mathfrak{G} = \{x - 1, y - 1\}$ es la base de Groebner universal de I (basta usar el criterio de Buchberger [2, Teorema 6, Sección 6, Capítulo 2] respecto a un orden monomial arbitrario). Entonces tenemos que:

- $in_{\omega}(I) = \langle x - 1, y - 1 \rangle$ si $\omega = (0, 0)$.
- $in_{\omega}(I) = \langle x, y - 1 \rangle$ si $\omega_1 > 0$ y $\omega_2 = 0$.
- $in_{\omega}(I) = \langle x - 1, y \rangle$ si $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 > 0$.
- $in_{\omega}(I) = \langle x, y \rangle$ si $\omega_1, \omega_2 > 0$.
- $in_{\omega}(I) = \langle 1 \rangle$ si $\omega_1 < 0$ o $\omega_2 < 0$.

Por el razonamiento anterior, la clase de equivalencia de $\omega = (-1, 3)$ es la representada en azul en la Figura 3.1.

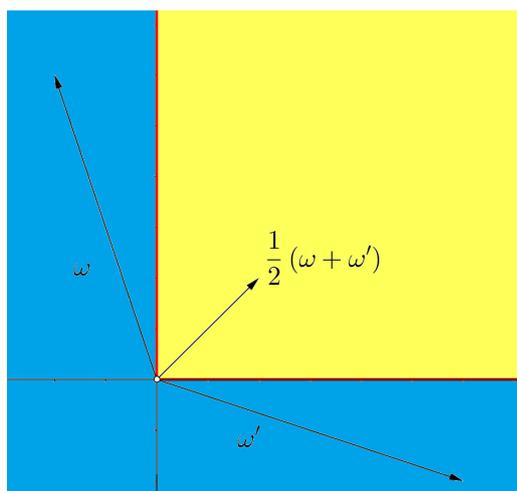


Figura 3.1: Clases de equivalencia de los vectores de peso.

Es claro que la clase de equivalencia de ω no es convexa. Por ejemplo, $\omega' = (3, -1)$ pertenece a dicha clase de equivalencia pero $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$ no pertenece.

Ahora pasamos a demostrar el teorema más importante de este capítulo, que dice que el abanico de Groebner es un abanico, es decir, un complejo poliedral formado por conos. Puesto que la prueba detallada en [17, Capítulo 2] utiliza que \prec_{ω} es orden monomial y para ello supone que $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, vamos a tomar la demostración realizada en [6], que es más general y no necesitamos suponer que el ideal de partida es homogéneo. Para la demostración necesitamos unos

resultados previos que nos ayuden. Empecemos con un resultado que demuestra que las clases de equivalencia son abiertas. A partir de ahora denotaremos $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ a la base de Groebner reducida del ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ respecto al orden monomial \prec .

Definición 3.11. Dado un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$ y un polinomio $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha} \in k[\mathbf{x}]$, de define el ω -grado de f como $\max\{\omega \cdot \alpha : \alpha \in \text{supp}(f)\}$.

Lema 3.12. Dado un orden monomial \prec , $\forall \omega \in \mathbf{R}^n$ se tiene

$$\text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\prec}(I) \Leftrightarrow \forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I), \text{in}_{\omega}(g) = \text{in}_{\prec}(g).$$

Demostración. \Rightarrow Dado $g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$, como $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ es una base de Groebner reducida, solo un término de g , $\text{in}_{\prec}(g)$, pertenece a $\text{in}_{\prec}(I) = \text{in}_{\omega}(I)$. El ideal inicial $\text{in}_{\prec}(I)$ es un ideal monomial, por lo que todos los términos de un elemento del ideal tienen que pertenecer al propio ideal. Como la parte inicial $\text{in}_{\omega}(g) \in \text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\prec}(I)$ y solo un término de g pertenece a $\text{in}_{\prec}(I)$, tenemos que $\text{in}_{\omega}(g) = \text{in}_{\prec}(g)$.

\Leftarrow Tenemos que demostrar que $\text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\prec}(I)$, donde $\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I) \rangle$. La inclusión \supseteq está clara ya que $\text{in}_{\prec}(g) = \text{in}_{\omega}(g) \in \text{in}_{\omega}(I)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Veamos la inclusión \subseteq . Como $\text{in}_{\omega}(I) = \langle \text{in}_{\omega}(f) : f \in I \rangle$, basta demostrar que $\text{in}_{\omega}(f) \in \text{in}_{\prec}(I)$, $\forall f \in I$. Dado que $f \in I$, aplicando el algoritmo de la división con la base $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ podemos escribir $f = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r}$, donde los $m_i \in k[\mathbf{x}]$ son monomios y $g_{i_j} \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. El algoritmo de la división nos garantiza que $\text{in}_{\prec}(f) \succeq m_j \text{in}_{\prec}(g_{i_j})$. Lo mismo pasa tomando parte inicial respecto a ω , ya que $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$, $\text{in}_{\omega}(g) = \text{in}_{\prec}(g)$ y además al aplicar el algoritmo de la división en cada paso, el ω -grado disminuye o se queda igual porque le restamos productos de monomios por elementos de $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ cuyo ω -grado aparece en f . Entonces tenemos que $\text{in}_{\omega}(f) = \sum_{j \in J} m_j \text{in}_{\omega}(g_{i_j})$, donde J es el subconjunto de índices j tales que $m_j \text{in}_{\omega}(g_{i_j})$ tiene el mismo ω -grado que $\text{in}_{\omega}(f)$. Como $\text{in}_{\omega}(g_{i_j}) = \text{in}_{\prec}(g_{i_j}) \in \text{in}_{\prec}(I)$, tenemos que $\text{in}_{\omega}(f) \in \text{in}_{\prec}(I)$. \square

Observación 3.13. Por el Lema 3.12, la clase de equivalencia de un vector $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ tal que $\text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\prec}(I)$ es relativamente abierta.

Corolario 3.14. Dado un orden monomial \prec y un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$, entonces

$$\omega \in C_{\prec}(I) \Leftrightarrow \forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I) : \text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega}(g)) = \text{in}_{\prec}(g).$$

Demostración. Por el Lema 3.12 tenemos que un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$ pertenece al interior relativo de $C_{\prec}(I)$ si y solo si $\text{in}_{\omega}(g) = \text{in}_{\prec}(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Estas igualdades describen un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales estrictas.

Relajando estas condiciones obtenemos la descripción de $C_{\prec}(I)$, cambiando las desigualdades estrictas por no estrictas. Este nuevo sistema viene dado por las ecuaciones $in_{\prec}(in_{\omega}(g)) = in_{\prec}(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. \square

Lema 3.15. *Todo polinomio $f \in in_{\omega}(I)$ se puede escribir de la forma $f = \sum_i in_{\omega}(c_i)$, donde $c_i \in I$ y todos los sumandos tienen diferentes ω -grados.*

Demostración. El ideal $in_{\omega}(I)$ está generado por polinomios homogéneos respecto a ω , por tanto, todas las componentes homogéneas respecto a ω de f pertenecen a $in_{\omega}(I)$. Sea h una de éstas componentes. Veamos que h es la parte inicial de un elemento de I respecto a ω . Podemos escribir $h = in_{\omega}(a_1) + \dots + in_{\omega}(a_s)$ para algunos polinomios $a_i \in I$, $\forall i = 1, \dots, s$. Como h es homogéneo respecto a ω podemos expresar $h = \sum_{j \in J} in_{\omega}(a_j)$, donde cada sumando tiene el mismo ω -grado. Entonces tenemos que $h = in_{\omega}\left(\sum_{j \in J}(a_j)\right)$. \square

Lema 3.16. *Sea un orden monomial \prec . Si $\omega \in C_{\prec}(I)$, entonces $in_{\prec}(in_{\omega}(I)) = in_{\prec}(I)$.*

Demostración. \supseteq Sea $g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Como $\omega \in C_{\prec}(I)$, por el Corolario 3.14 tenemos que $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_{\omega}(g))$, y por tanto,

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g) : g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I) \rangle \subseteq in_{\prec}(in_{\omega}(I)).$$

\subseteq Sabemos que $in_{\prec}(in_{\omega}(I))$ está generado por los términos iniciales de polinomios de la forma $in_{\omega}(f) \in in_{\omega}(I)$, $f \in I \setminus \{0\}$ respecto al orden monomial \prec . Sea $f \in in_{\omega}(I) \setminus \{0\}$, basta demostrar que $in_{\prec}(f) \in in_{\prec}(I)$ para

tener el resultado. Aplicando el Lema 3.15 escribimos $f = \sum_{i=1}^s in_{\omega}(c_i)$, donde

$c_i \in I$, $\forall i = 1, \dots, s$, e $in_{\omega}(c_i)$ son las componentes homogéneas respecto a ω de grados distintos y por tanto sus términos no se cancelan. Tomando parte inicial respecto a \prec tenemos que $in_{\prec}(f) = in_{\prec}(in_{\omega}(c_j))$, para algún j . Debemos probar ahora que $in_{\prec}(in_{\omega}(c_j)) \in in_{\prec}(I)$. Aplicando el algoritmo de la división con $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ podemos escribir

$$c_j = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r}, \quad (3.2)$$

con m_i términos monomiales en $k[\mathbf{x}]$ y $g_{i_j} \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Sea M el grado máximo de c_j respecto a ω . Mediante el algoritmo de la división hacemos c_j cero (ya que $c_j \in I$). En cada paso del algoritmo, el ω -grado desciende o se queda igual, ya que restamos los productos de monomios y elementos de $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$ cuyo ω -grado aparece en c_j . Usando el Corolario 3.14, vamos sustituyendo los términos de c_j que son iguales a $m_j in_{\prec}(g_{i_j})$ por $m_j(g - in_{\prec}(g_{i_j}))$, donde cada término tiene ω -grado menor o igual que el de $m_j in_{\prec}(g_{i_j})$. Estos términos son términos adicionales en la parte derecha de la ecuación (3.2). El algoritmo termina cuando

c_j es cero, i.e., cuando el c_j original es expresado como suma de términos homogéneos respecto a ω de grados menores o iguales a M . Por lo tanto tenemos $in_\omega(c_j) = \sum_{l \in L} in_\omega(m_l g_{i_l})$, para un conjunto L adecuado. El algoritmo de la división nos garantiza que los vectores de los exponentes de $in_\prec(m_j g_{i_j})$ son distintos para cada $j = 1, \dots, r$. Como $\omega \in C_\prec(I)$, por el Corolario 3.14 tenemos que $in_\prec(m_j g_{i_j}) = in_\prec(in_\omega(m_j g_{i_j}))$, $\forall j = 1, \dots, r$, y al menos uno de los términos con grado máximo respecto a \prec no puede cancelarse en la suma. Entonces $in_\prec(in_\omega(c_j)) = in_\prec(m_l g_{i_l})$ para algún l , y por tanto $in_\prec(in_\omega(c_j)) \in in_\prec(I)$. \square

El siguiente resultado generaliza el Corolario 2.19.

Corolario 3.17. *Sea \prec un orden monomial. Si $\omega \in C_\prec(I)$, entonces*

$$\mathfrak{G}_\prec(in_\omega(I)) = \{in_\omega(g) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I)\}.$$

Demostración. Por el Corolario 3.14 tenemos que $\langle in_\prec(in_\omega(g)) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I) \rangle = \langle in_\prec(g) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I) \rangle = in_\prec(I)$. Por el Lema 3.16, $in_\prec(I) = in_\prec(in_\omega(I))$, por tanto, $in_\prec(in_\omega(I)) = \langle in_\prec(in_\omega(g)) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I) \rangle$. Se tiene entonces que $\{in_\omega(g) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I)\}$ es una base de Groebner de $in_\omega(I)$ respecto a \prec por la Definición 2.4. Además, es reducida ya que $\mathfrak{G}_\prec(I)$ lo es. \square

Proposición 3.18. *Sea un orden monomial \prec y un vector $\omega \in C_\prec(I)$. Para $\gamma \in \mathbf{R}^n$,*

$$in_\gamma(I) = in_\omega(I) \Leftrightarrow \forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I), in_\gamma(g) = in_\omega(g).$$

Demostración. \Leftarrow Como $in_\gamma(g) = in_\omega(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$, tenemos que $in_\prec(in_\gamma(g)) = in_\prec(in_\omega(g))$, $\forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$. Como $\omega \in C_\prec(I)$, por el Corolario 3.14 se cumple que $in_\prec(g) = in_\prec(in_\omega(g))$, $\forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$, y por tanto, $in_\prec(g) = in_\prec(in_\gamma(g))$, $\forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$ y $\gamma \in C_\prec(I)$ por el Corolario 3.14. Por el Corolario 3.17 tenemos que la base de Groebner $\mathfrak{G}_\prec(in_\gamma(I))$ es $\{in_\gamma(g) : g \in \mathfrak{G}_\prec(I)\}$. Ya que $in_\gamma(g) = in_\omega(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$ tenemos que la base obtenida anteriormente es también base de Groebner de $in_\omega(I)$, y por tanto aplicando la Proposición 2.6 tenemos que $in_\gamma(I) = in_\omega(I)$.

\Rightarrow Sea $g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$. Tenemos que demostrar que $in_\gamma(g) = in_\omega(g)$. Como la base es reducida, sólo un término de g , $in_\prec(g)$, está en $in_\prec(I)$. Probemos primero que $in_\prec(g)$ es un término de $in_\omega(g)$ y de $in_\gamma(g)$. El Corolario 3.14 nos dice que $in_\prec(g) = in_\prec(in_\omega(g))$. Aplicando el Lema 3.16 tenemos que $in_\prec(in_\gamma(g)) \in in_\prec(in_\gamma(I)) = in_\prec(in_\omega(I)) = in_\prec(I)$. Como solo un término de g pertenece a $in_\prec(I)$, tenemos que $in_\prec(in_\gamma(g)) = in_\prec(g)$. Si $in_\gamma(g) - in_\omega(g) \in in_\gamma(I) = in_\omega(I)$ no es cero llegamos a una contradicción ya que la diferencia no contiene términos de $in_\prec(I) = in_\prec(in_\omega(I))$. \square

Proposición 3.19. *Dado un orden monomial \prec y un vector $\omega \in C_{\prec}(I)$, la clase de equivalencia de ω es un cono poliedral relativamente abierto y convexo.*

Demostración. Cada $g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$ determina una ecuación $in_{\gamma}(g) = in_{\omega}(g)$, lo que equivale a un conjunto de vectores γ que satisfacen unas ciertas ecuaciones e inecuaciones lineales estrictas, como en el Ejemplo 3.28. Por tanto, la clase de equivalencia es un cono poliedral relativamente abierto y convexo. \square

Observación 3.20. *La clausura de una clase de equivalencia se obtiene sustituyendo las desigualdades estrictas anteriores por no estrictas. Esto podemos escribirlo de la siguiente forma para un vector $\omega \in C_{\prec}(I)$:*

$$\gamma \in C_{\omega}(I) \Leftrightarrow \forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I), in_{\omega}(in_{\gamma}(g)) = in_{\omega}(g). \quad (3.3)$$

Definición 3.21. *Se define el abanico de Groebner de un ideal $I \subseteq k[x]$ como el conjunto formado por los conos poliedrales $C_{\prec}(I)$ que cortan con el primer octante positivo, $\mathbf{R}_{\geq 0}^n$, y por las caras de dichos conos. Denotaremos al abanico de Groebner como $\overline{GF}(I)$.*

Lema 3.22. *Sea \prec un orden monomial. Si $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, entonces $\omega \in C_{\prec_{\omega}}(I)$.*

Demostración. Como $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, \prec_{ω} es un orden monomial, y entonces tenemos que $in_{\prec_{\omega}}(g) = in_{\prec_{\omega}}(in_{\omega}(g))$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec_{\omega}}(I)$. Luego aplicando el Corolario 3.14 con el orden monomial \prec_{ω} tenemos que $\omega \in C_{\prec_{\omega}}(I)$. \square

Proposición 3.23. *El interior relativo de un cono del abanico de Groebner de I es una clase de equivalencia respecto a la relación de equivalencia dada en la Definición 3.7.*

Demostración. Por la definición, todo cono del abanico de Groebner es cara de la clausura de una clase de equivalencia de un vector $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Dado un orden monomial arbitrario \prec' , definimos $\prec = \prec'_{\omega}$. Por el Lema 3.22 tenemos que $\omega \in C_{\prec}(I)$. Por (3.3) tenemos que $\forall \gamma \in C_{\omega}(I)$ se verifica que $in_{\omega}(in_{\gamma}(g)) = in_{\omega}(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Entonces, por la definición de $\prec = \prec'_{\omega}$, tenemos que $in_{\prec}(in_{\gamma}(g)) = in_{\prec}(g)$, $\forall g \in \mathfrak{G}_{\prec}(I)$. Luego por el Corolario 3.14 tenemos que $\forall \gamma \in C_{\omega}(I)$, $\gamma \in C_{\prec}(I)$ y por tanto $C_{\omega}(I) \subseteq C_{\prec}(I)$. Por (3.3), el conjunto cerrado $C_{\omega}(I)$ viene dado por un sistema de ecuaciones e inecuaciones no estrictas. El interior relativo de cualquier cara $C_{\omega}(I)$ se puede describir con este sistema de inecuaciones, cambiando algunas de inecuaciones no estrictas por estrictas, y haciendo el resto ecuaciones. Sea γ perteneciente al interior relativo de una cierta cara de $C_{\omega}(I)$, tenemos que $\gamma \in C_{\omega}(I) \subseteq C_{\prec}(I)$. Entonces, usando la Proposición 3.18, tenemos que para un vector $\gamma' \in \mathbf{R}^n$, $\gamma' \sim \gamma$ si y solo si éste satisface el sistema de inecuaciones anterior, y esto se tiene si y solo si γ' está en el interior relativo de la cara. \square

Corolario 3.24. *Sea C un cono del abanico de Groebner de I . Si $\omega \in C$, entonces para $\gamma \in \mathbf{R}^n$ se tiene que $\text{in}_\gamma(I) = \text{in}_\omega(I) \Rightarrow \gamma \in C$.*

Demostración. Tomemos ω en el interior relativo de alguna cara de C . Como dicha cara está en el abanico de Groebner, por la Proposición 3.23, γ está en el interior relativo de esa cara, y por tanto, en C . \square

Proposición 3.25. *Sean C_1 y C_2 dos conos del abanico de Groebner de I , entonces $C_1 \cap C_2$ es cara de C_1 y de C_2 .*

Demostración. Demostremos que $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 (análogamente se probaría que es cara de C_2). Primero veamos que $C_1 \cap C_2$ es unión de conos. Por el Corolario 3.24, C_1 y C_2 son uniones de clases de equivalencia. Además, si $\omega \in C_1 \cap C_2$, entonces por el Corolario 3.24, la clase de equivalencia de ω está tanto en C_1 como en C_2 , y por tanto, en $C_1 \cap C_2$. Entonces $C_1 \cap C_2$ es unión de clases de equivalencia, y por tanto, unión de conos.

Sea γ un vector que pertenece a la clase de equivalencia $E \subseteq C_1 \cap C_2$. Entonces γ pertenece al interior relativo de una cara de C_1 . Por la Proposición 3.23, el conjunto de vectores en el interior relativo de esta cara es exactamente E . De ahí que cada una de esas clases de equivalencia estén en el interior relativo de una cara de C_1 , y su clausura sea dicha cara.

Consideremos los \mathbf{R} -espacios vectoriales generados por los vectores de cada clase de equivalencia contenida en $C_1 \cap C_2$. Estos espacios vectoriales deben ser diferentes para cada cara de C_1 , ya que C_1 es un cono. Veamos que solo puede haber un cono de dimensión máxima. Si hubiera dos conos, entonces su envolvente convexa estaría en $C_1 \cap C_2$, y sería al menos de una dimensión más. Por tanto, no puede ser recubierto por un número finito de clases de equivalencia de dimensión menor. Esto es absurdo ya que $C_1 \cap C_2$ es unión de clases de equivalencia y hay un número finito de clases de equivalencia.

Sea E la clase de equivalencia de dimensión máxima en $C_1 \cap C_2$. Veamos que $\bar{E} = C_1 \cap C_2$. La inclusión \subseteq es evidente, ya que $C_1 \cap C_2$ es cerrado. Para probar la otra inclusión supongamos $\omega \in C_1 \cap C_2 \setminus \bar{E}$. Entonces $\text{conv}(\bar{E}, \omega) \setminus \bar{E}$ está en $C_1 \cap C_2$, y su dimensión es al menos la de E , lo cual es absurdo, ya que $\text{conv}(\bar{E}, \omega) \setminus \bar{E}$ no puede recubrirse con un número finito de clases de equivalencia de dimensión menor. Luego $\bar{E} = C_1 \cap C_2$ es cara de C_1 . \square

Teorema 3.26. *El abanico de Groebner de I es un abanico.*

Demostración. Por la Proposición 3.19 y el Lema 3.22 tenemos que el abanico de Groebner está formado por conos poliedrales. La primera condición de la Definición 3.4 se verifica por la propia definición de abanico de Groebner, y la segunda condición se tiene por la Proposición 3.25. Por tanto, el abanico de Groebner es un abanico. \square

Veamos ahora algunos ejemplos de abanicos de Groebner.

Ejemplo 3.27. *Continuación del Ejemplo 2.15. Vamos a calcular el abanico de Groebner de $I = \langle 4x^6y^2 + 5x^5y^3 - x^4 + 3x^2y^4 + x^2 + xy + y^3 + 7 \rangle = \langle f \rangle$.*

Para ello, primero calculamos la envolvente convexa de los puntos $\alpha_i \in \text{supp}(f)$, en este caso del conjunto de puntos

$$\{(6, 2), (5, 3), (4, 0), (2, 4), (2, 0), (1, 1), (0, 3), (0, 0)\}.$$

La Figura 3.3 representa el polígono de Newton P de f , (ver Definición 4.5) que es un hexágono.

Los vectores normales a los lados de P son

$$\{(1, 1), (1, 3), (-1, 2), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)\}.$$

En la Figura 3.2 representamos P junto con estos vectores.

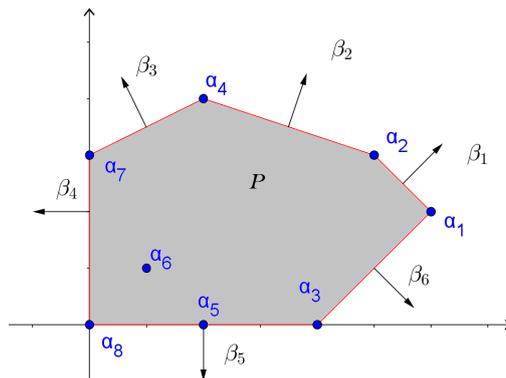


Figura 3.2: Vectores normales.

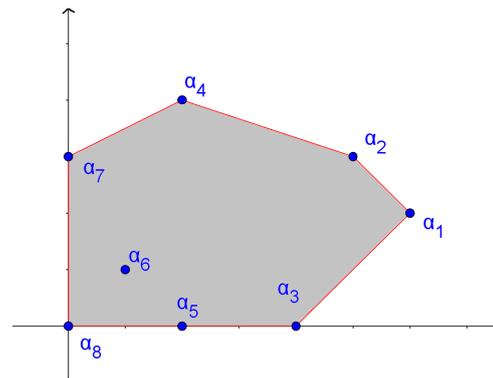


Figura 3.3: Polígono de Newton de f .

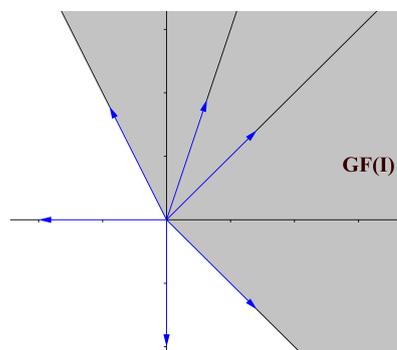


Figura 3.4: $GF(I)$.

En la Figura 3.4 está representado el abanico de Groebner de I . La región de Groebner de I es la región sombreada, es decir,

$$GR(I) = \{\omega \in \mathbf{R}^2 : \omega_1 + \omega_2 > 0, 2\omega_1 + \omega_2 > 0\}.$$

Ejemplo 3.28. Sea \prec el orden monomial lexicográfico y el ideal

$I_1 = \langle y^2x - z, z^2 - yx \rangle \subseteq \mathbf{Q}[x, y, z]$. Una base de Groebner de I_1 respecto a \prec es $\mathfrak{G}_{\prec}(I_1) = \{\underline{xy} - z^2, \underline{xz} - z^4, \underline{yz^2} - z\} = \{g_1, g_2, g_3\}$. Si tomamos $\omega = (4, 1, 1)$, tenemos que $in_{\omega}(I_1) = in_{\prec}(I_1) = \langle xy, xz, yz^2 \rangle$ y $C_{\omega}(I_1) = C_{\prec}(I_1)$. Por la Proposición 3.18, $in_{\gamma}(I_1) = in_{\omega}(I_1)$ si y solo si se satisface:

$$\begin{cases} in_{\gamma}(g_1) = xy \\ in_{\gamma}(g_2) = xz \\ in_{\gamma}(g_3) = yz^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 > 2\gamma_3 \\ \gamma_1 > 3\gamma_3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 > 0 \end{cases}$$

Haciendo no estrictas las desigualdades estrictas, tenemos la descripción de $C_{\prec}(I_1)$. Como se puede observar en la Figura 3.5, $GF(I_1)$ está formado por 4 conos cuyas bases de Groebner reducidas son:

- $\{xy - z^2, xz - z^4, yz^2 - z\}$ es base de Groebner reducida de I_1 respecto a $\omega = (4, 1, 1)$ y, por tanto, $in_{\omega}(I_1) = \langle xy, xz, yz^2 \rangle$.
- $\{z^4 - xz, xy - z^2, yz^2 - z\}$ es base de Groebner reducida de I_1 respecto a $\omega = (2, 1, 1)$ y, por tanto, $in_{\omega}(I_1) = \langle z^4, xy, yz^2 \rangle$.
- $\{y^2x - z, z^2 - yx\}$ es base de Groebner reducida de I_1 respecto a $\omega = (2, 2, 3)$ y, por tanto, $in_{\omega}(I_1) = \langle y^2x, z^2 \rangle$.
- $\{x^2y^4 - xy, z - xy^2\}$ es base de Groebner reducida de I_1 respecto a $\omega = (1, 1, 4)$ y, por tanto, $in_{\omega}(I_1) = \langle x^2y^4, z \rangle$.

Ejemplo 3.29. Sea \prec el orden monomial lexicográfico y el ideal

$I_2 = \langle x^2y - z, y^2z - x, z^2x - y \rangle \subseteq \mathbf{Q}[x, y, z]$. Una base de Groebner de I_2 respecto a \prec es $\mathfrak{G}_{\prec}(I_2) = \{\underline{x} - z^9, \underline{y} - z^{11}, \underline{z^{15}} - z\} = \{g_1, g_2, g_3\}$. Si tomamos $\omega = (12, 12, 1)$, tenemos que $in_{\omega}(I_2) = in_{\prec}(I_2) = \langle x, y, z^{15} \rangle$ y $C_{\omega}(I_2) = C_{\prec}(I_2)$. Por la Proposición 3.18, $in_{\gamma}(I_2) = in_{\omega}(I_2)$ si y solo si se satisface:

$$\begin{cases} in_{\gamma}(g_1) = x \\ in_{\gamma}(g_2) = y \\ in_{\gamma}(g_3) = z^{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 > 9\gamma_3 \\ \gamma_2 > 11\gamma_3 \\ \gamma_3 > 0 \end{cases}$$

Haciendo no estrictas las desigualdades estrictas, tenemos la descripción de $C_{\prec}(I_2)$.

Observación 3.30. El ideal que hemos tomado en el ejemplo anterior es invariante respecto a permutaciones cíclicas de las variables, y por tanto, su abanico de Groebner es invariante por giros de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ radianes respecto a la recta $\{x = y = z\}$.

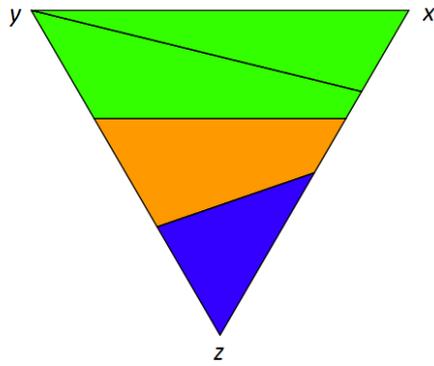


Figura 3.5: Intersección de $GF(I_1)$ con el hiperplano $x + y + z = 1$ y $\mathbf{R}_{\geq 0}^3$.

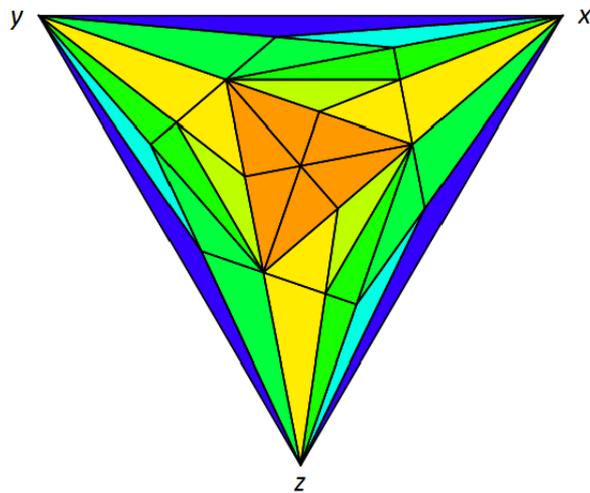


Figura 3.6: Intersección de $GF(I_2)$ con el hiperplano $x + y + z = 1$ y $\mathbf{R}_{\geq 0}^3$.

CAPÍTULO 4

Politopo de estados

La finalidad de este capítulo es el estudio del politopo de estados de un ideal de polinomios homogéneo, cuyo abanico normal es el abanico de Groebner del ideal. En particular, se tendrá una biyección entre sus vértices y los distintos ideales iniciales del ideal. Nos basamos principalmente en el capítulo 2 de [17].

Proposición 4.1. *Sea $P \subset \mathbf{R}^n$ un poliedro. Entonces, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene*

$$face_{\omega'}(face_{\omega}(P)) = face_{\omega+\epsilon\omega'}(P). \quad (4.1)$$

Demostración. Tenemos que

$$face_{\omega+\epsilon\omega'}(P) = \{\mathbf{u} \in P : (\omega + \epsilon\omega') \cdot \mathbf{u} \geq (\omega + \epsilon\omega') \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in P\}.$$

Un poliedro tiene un número finito de caras y podemos tomar ϵ suficientemente pequeño tal que para todo $\epsilon' \in (0, \epsilon)$ se verifique $face_{\omega+\epsilon'\omega'}(P) = face_{\omega+\epsilon\omega'}(P)$. Entonces tenemos que para todo $\mathbf{u} \in face_{\omega+\epsilon\omega'}(P)$, haciendo tender ϵ a 0, obtenemos que $\omega \cdot \mathbf{u} \geq \omega \cdot \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in P$, por lo que $face_{\omega+\epsilon\omega'}(P) \subseteq face_{\omega}(P)$. Además, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in face_{\omega}(P)$, entonces $\omega \cdot \mathbf{u} = \omega \cdot \mathbf{v}$. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} face_{\omega+\epsilon\omega'}(P) &= \{\mathbf{u} \in face_{\omega}(P) : \epsilon\omega' \cdot \mathbf{u} \geq \epsilon\omega' \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in face_{\omega}(P)\} = \\ &= \{\mathbf{u} \in face_{\omega}(P) : \omega' \cdot \mathbf{u} \geq \omega' \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in face_{\omega}(P)\} = face_{\omega'}(face_{\omega}(P)). \end{aligned}$$

□

Definición 4.2. La suma de Minkowski de dos poliedros P y Q se define como

$$P + Q = \{\mathbf{p} + \mathbf{q} : \mathbf{p} \in P, \mathbf{q} \in Q\}.$$

Se tiene que una cara de la suma de Minkowski de dos poliedros equivale a la suma de dos caras, cada una de ellas de un poliedro. Es decir,

$$face_{\omega}(P + Q) = face_{\omega}(P) + face_{\omega}(Q), \forall \omega \in \mathbf{R}^n. \quad (4.2)$$

Observemos que si \mathbf{v} es un vértice de $P + Q$, entonces existen unos únicos vértices \mathbf{p} de P y \mathbf{q} de Q tales que $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$.

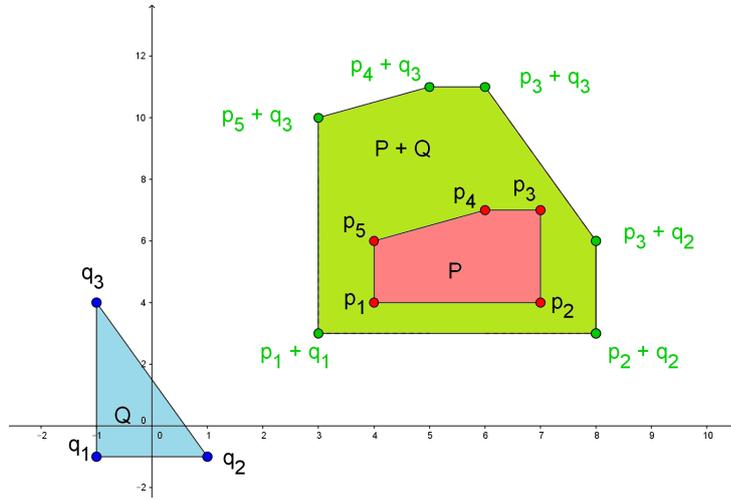


Figura 4.1: Suma de Minkowski de dos politopos convexos.

Todo poliedro P se puede expresar como $P = Q + C$, donde Q es un politopo y C un cono. El cono C es único y se llama cono de recesión de P (ver [15, Capítulo 8, sección 2]).

Definición 4.3. A todo polinomio $f \in k[\mathbf{x}]$ se le asocia el politopo de Newton dado por

$$New(f) = conv(supp(f)),$$

donde $conv(\Lambda)$ denota la envolvente convexa de un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbf{R}^n$.

Lema 4.4. Se tiene que

$$New(fg) = New(f) + New(g).$$

Demostración. Basta con demostrar que ambos politopos tienen los mismos vértices. Primero observemos que la relación que existe entre los términos iniciales y las caras es

$$face_\omega(New(f)) = New(in_\omega(f)), \forall \omega \in \mathbf{R}^n. \quad (4.3)$$

Si $f = \mathbf{x}^\alpha$ y $g = \mathbf{x}^\beta$ son monomios, se verifica el resultado, ya que $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^\beta = \mathbf{x}^{\alpha+\beta}$.

Consideremos ahora un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$ suficientemente genérico, es decir, tal que $in_\omega(f)$ e $in_\omega(g)$ sean monomios. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} & face_\omega(New(fg)) \stackrel{(4.3)}{=} New(in_\omega(fg)) \stackrel{(2.1)}{=} New(in_\omega(f) in_\omega(g)) = \\ & = New(in_\omega(f)) + New(in_\omega(g)) \stackrel{(4.3)}{=} face_\omega(New(f)) + face_\omega(New(g)) \stackrel{(4.2)}{=} \\ & = face_\omega(New(f) + New(g)). \end{aligned}$$

Entonces ambos politopos tienen los mismos vértices, por lo que son iguales. \square

De ahora en adelante, supondremos que $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ es un ideal homogéneo respecto a la graduación positiva dada por $deg(x_i) = d_i > 0$. Entonces, para cualquier monomio, se tiene que su grado respecto a esta graduación es $deg(x^\alpha) = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$.

Definición 4.5. Denotaremos por I_d al espacio vectorial generado por los polinomios homogéneos de grado d en I . Sea M cualquier ideal monomial, denotaremos por $\sum M_d$ a la suma de todos los vectores $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tales que el monomio $\mathbf{x}^\alpha \in M$ tiene grado d . Se define el politopo de estados de I respecto a d como

$$State_d(I) = conv \left\{ \sum in_{\prec}(I)_d : \prec \text{ orden monomial} \right\}.$$

Sea D el grado máximo de los elementos de una base de Groebner universal de I . Se define el politopo de estados de I como la suma de Minkowski

$$State(I) = \sum_{d=1}^D State_d(I). \quad (4.4)$$

El politopo de estados satisface la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula (4.3).

Lema 4.6. Para todo $\omega \in \mathbf{R}^n$ se verifica

$$face_\omega(State_d(I)) = State_d(in_\omega(I)), \forall d = 1, \dots, D.$$

En consecuencia, $face_\omega(State(I)) = State(in_\omega(I))$.

Demostración. Vamos a probar primero el lema para el caso de que $\omega \in \mathbf{R}^n$ sea genérico, es decir, tal que $in_\omega(I)$ sea un ideal monomial y $face_\omega(State_d(I))$ un vértice. Denotamos por I_d al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado d en I . Sean $\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_m}$ todos los monomios de grado d y $r = dim_k(I_d) \leq m$. Sea \prec cualquier orden monomial tal que $in_\omega(I) = in_\prec(I)$ (el cual existe por la Proposición 2.21). Podemos suponer que $\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_r}$ son los monomios en $in_\prec(I)_d$. Como cada ideal inicial de un ideal monomial es el mismo ideal monomial, tenemos $State_d(in_\omega(I)) = \{\sum in_\prec(I)_d\} = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Puesto que $St_\prec(I)$ es una base módulo I y, además, I es homogéneo, existen polinomios de la forma

$$\mathbf{x}^{\alpha_i} - \sum_{j=r+1}^m c_{ij} \mathbf{x}^{\alpha_j} \in I_d, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Como $in_\prec(I) = in_\omega(I)$, en cada una de estas r ecuaciones el primer término es el que tiene mayor ω -grado, es decir, $\omega \cdot \alpha_i > \omega \cdot \alpha_j, \forall i = 1, \dots, r, \forall j = r+1, \dots, m$, con $c_{ij} \neq 0$. Por construcción de $State_d(I)$, el vértice $face_\omega(State_d(I))$ es de la forma $\sum in_{\prec'}(I)_d$ para algún orden monomial \prec' . Sean $\mathbf{x}^{\alpha_{j_1}}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_{j_r}}$ todos los monomios de grado d en $in_{\prec'}(I)$.

Si el lema no fuera cierto, entonces por la definición del operador $face_\omega(\cdot)$ tendríamos que $\omega \cdot (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_r}) > \omega \cdot (\alpha_1 + \dots + \alpha_r)$. Esto significaría que $\omega \cdot \left(\sum_{k \neq j_i} \alpha_k\right) < \omega \cdot \left(\sum_{k > r} \alpha_k\right)$ para las bases $B_1 = \{\mathbf{x}^{\alpha_k} : \mathbf{x}^{\alpha_k} \notin in_{\prec'}(I)\}$ y $B_2 = \{\mathbf{x}^{\alpha_k} : k > r\}$ de $(k[\mathbf{x}]/I)_d$.

Veamos que este resultado es falso. Para ello, vamos a transformar B_1 en B_2 construyendo bases intermedias para este espacio vectorial. Cada una de estas bases difiere de la anterior en un elemento, y además está formada por elementos de $B_1 \cup B_2$. Estas bases verifican que el producto escalar de la suma de sus elementos por ω disminuye en cada paso, obteniéndose así la contradicción que buscábamos.

Supongamos que hemos construido una base B a partir de B_1 . Sea \mathbf{x}^{α_k} un elemento de $B \setminus B_2$ (por tanto $k \leq r$), y sea $f = \mathbf{x}^{\alpha_k} - \sum_{j=r+1}^m c_{kj} \mathbf{x}^{\alpha_j}$ el elemento correspondiente de I_d . Sea $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}^{\alpha_j} : c_{kj} \neq 0\}$. El conjunto \mathcal{C} es linealmente independiente módulo I , ya que es un subconjunto de B_2 . Cada elemento \mathbf{x}^{α_j} de \mathcal{C} puede ser escrito como una combinación lineal de elementos de B . Si el elemento \mathbf{x}^{α_k} no apareciera en ninguna de estas combinaciones lineales, entonces el conjunto $\mathcal{C} \cup \{\mathbf{x}^{\alpha_k}\}$ sería un conjunto linealmente independiente, que no es el caso, ya que f describe una relación de dependencia lineal.

Entonces existe algún \mathbf{x}^{α_i} tal que $\mathbf{x}^{\alpha_i} = c\mathbf{x}^{\alpha_k} + \sum_{\mathbf{x}^{\alpha_j} \in B, j \neq k} b_j \mathbf{x}^{\alpha_j}$, con $c \neq 0$. Esto significa que $B' = B \setminus \{\mathbf{x}^{\alpha_k}\} \cup \{\mathbf{x}^{\alpha_i}\}$ genera el mismo espacio que B , y por tanto es también una base. Observemos que $\omega \cdot \left(\sum_{\mathbf{x}^{\alpha_j} \in B'} \alpha_j\right) < \omega \cdot \left(\sum_{\mathbf{x}^{\alpha_j} \in B} \alpha_j\right)$. Entonces, usando esta desigualdad a lo largo de todo el proceso de transformación de B_1 en B_2 , obtenemos que $\omega \cdot \left(\sum_{\mathbf{x}^{\alpha_k} \in B_1} \alpha_k\right) < \omega \cdot \left(\sum_{\mathbf{x}^{\alpha_k} \in B_2} \alpha_k\right)$. Hemos

llegado a una contradicción, y por tanto $face_\omega(State_d(I)) = State_d(in_\omega(I))$, para ω genérico.

Para probar el resultado en general veamos que ambos politopos tienen los mismos vértices y por tanto son el mismo. Para ello, tomemos $\omega' \in \mathbf{R}^n$ genérico y $\omega \in \mathbf{R}^n$ cualquiera. Entonces $\forall \epsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} face_{\omega'}(face_\omega(State_d(I))) &\stackrel{(4.1)}{=} face_{\omega+\epsilon\omega'}(State_d(I)) = State_d(in_{\omega+\epsilon\omega'}(I)) \stackrel{(2.2)}{=} \\ &= State_d(in_{\omega'}(in_\omega(I))) = face_{\omega'}(State_d(in_\omega(I))). \end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos

$$\begin{aligned} face_\omega(State(I)) &= face_\omega\left(\sum_{d=1}^D State_d(I)\right) \stackrel{(4.2)}{=} \sum_{d=1}^D face_\omega(State_d(I)) = \\ &= \sum_{d=1}^D State_d(in_\omega(I)) = State(in_\omega(I)). \end{aligned}$$

□

Corolario 4.7. Si \prec y \prec' son dos órdenes monomiales diferentes, entonces

$$in_\prec(I)_d = in_{\prec'}(I)_d \Leftrightarrow \sum in_\prec(I)_d = \sum in_{\prec'}(I)_d.$$

Demostración. \Leftarrow Supongamos que $in_\prec(I)_d \neq in_{\prec'}(I)_d$. Sean $\{\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_r}\}$ los monomios de grado d de $in_\prec(I)$, y $\{\mathbf{x}^{\alpha_{j_1}}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_{j_r}}\}$ los monomios de grado d de $in_{\prec'}(I)$. Tomemos $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ tal que $in_\prec(I) = in_\omega(I)$. Por la prueba del Lema 4.6 tenemos que $\omega \cdot (\alpha_1 + \dots + \alpha_r) < \omega \cdot (\alpha_{j_1} + \dots, \alpha_{j_r})$. Recordemos que $(\sum in_\prec(I))_d = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ y $(\sum in_{\prec'}(I))_d = \alpha_{j_1} + \dots, \alpha_{j_r}$. Luego tenemos que $(\sum in_\prec(I))_d \neq (\sum in_{\prec'}(I))_d$.

\Rightarrow Obvio. □

Teorema 4.8. Sea $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ ideal homogéneo. Entonces el abanico normal del politopo de estados, $\mathcal{N}(State(I))$, coincide con el abanico de Groebner de I , $GF(I)$.

Demostración. En la demostración del Teorema 3.26 se demostró que $GF(I)$ era un complejo poliedral. Todo complejo poliedral está determinado por las caras maximales del complejo. Entonces dos complejos poliedrales coinciden si y solo si coinciden sus caras maximales. Por tanto es suficiente para demostrar el resultado probar que los conos abiertos maximales de $GF(I)$ coincidan con los de $\mathcal{N}(State(I))$. Esto último equivale a demostrar $\forall \omega, \omega' \in \mathbf{R}^n$ genéricos,

$$in_\omega(I) = in_{\omega'}(I) \Leftrightarrow face_\omega(State(I)) = face_{\omega'}(State(I)). \quad (4.5)$$

Como I es homogéneo tenemos que $in_\omega(I) = in_{\omega'}(I) \Leftrightarrow in_\omega(I)_d = in_{\omega'}(I)_d$, $\forall d = 1, \dots, D$, con D el máximo de los grados de los generadores de una base de Groebner universal, como se define en (4.4). Por (4.2) tenemos que

$$face_\omega(State(I)) = \sum_{d=1}^D face_\omega(State_d(I)), \quad (4.6)$$

y para ω' el resultado es análogo. Como ω es genérico, para cada $d = 1, \dots, D$, $face_\omega(State_d(I))$ y $face_{\omega'}(State_d(I))$ son vértices, y lo mismo ocurre para ω' . Por la observación tras (4.2) tenemos que para dos vértices de $State(I)$ se verifica que $face_\omega(State(I)) = face_{\omega'}(State(I)) \stackrel{(4.6)}{\Leftrightarrow}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{d=1}^D face_\omega(State_d(I)) = \sum_{d=1}^D face_{\omega'}(State_d(I)) \stackrel{\text{Obs. tras (4.2)}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow face_\omega(State_d(I)) = face_{\omega'}(State_d(I)), \forall i = 1, \dots, D \stackrel{\text{Lema 4.6}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow State_d(in_\omega(I)) = State_d(in_{\omega'}(I)), \forall i = 1, \dots, D \stackrel{\text{Cor. 4.7}}{\Leftrightarrow} in_\omega(I) = in_{\omega'}(I) \end{aligned}$$

□

En general, se dirá que un politopo Q es un politopo de estados para un ideal I fijado si el abanico normal de Q coincide con el abanico de Groebner de dicho ideal.

Proposición 4.9. *Sea I un ideal homogéneo, $\mathfrak{G}_\prec(I)$ una base de Groebner reducida de I respecto al orden monomial \prec y $\omega \in C_\prec(I)$. Tenemos que*

$$C_\omega(I) = \mathcal{N}_Q(face_\omega(Q)), \quad Q = New \left(\prod_{g \in \mathfrak{G}_\prec(I)} g \right) = \sum_{g \in \mathfrak{G}_\prec(I)} New(g). \quad (4.7)$$

Demostración. Por la Definición 3.7, el interior relativo de $C_\omega(I)$ viene dado por la clase de equivalencia $\{\gamma \in \mathbf{R}^n : in_\gamma(I) = in_\omega(I)\}$. Por la Proposición 3.18 podemos reescribir el interior relativo de la clase de equivalencia de ω como $\{\gamma \in \mathbf{R}^n : in_\gamma(g) = in_\omega(g), \forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)\}$. Como cada $\omega' \in C_\omega(I)$ verifica que $in_{\omega'}(g) = in_\omega(g), \forall g \in \mathfrak{G}_\prec(I)$ por (4.3) tenemos que

$$face_\omega(New(g)) = New(in_\omega(g)) = New(in_{\omega'}(g)) = face_{\omega'}(New(g)).$$

Entonces dado que $Q = \sum_{g \in \mathfrak{G}_\prec(I)} New(g)$, usando (4.2) tenemos que $face_\omega(Q) = face_{\omega'}(Q)$, y por tanto, $\omega' \in \mathcal{N}_Q(face_\omega(Q))$ por la Definición 3.5 de cono normal. Luego $C_\omega(I)$ está contenido en $\mathcal{N}_Q(face_\omega(Q))$. El recíproco es análogo. □

Corolario 4.10. *Sea f un polinomio homogéneo y sea $I = \langle f \rangle$ ideal, entonces el politopo de Newton de I , $New(f)$, es un politopo de estados de I .*

Demostración. El conjunto unitario $\{f\}$ es una base de Groebner reducida de I respecto a cualquier orden monomial. Aplicando la fórmula (4.7) tenemos que para todo $\omega \in C_{\prec}(I)$ para cualquier orden monomial \prec :

$$C_{\omega}(I) = \mathcal{N}_{New(f)}(\text{face}_{\omega}(New(f))).$$

Por tanto, el abanico de Groebner está formado por los conos normales del politopo de Newton de f , entonces $New(f)$ es un politopo de estados de I . \square

De forma similar obtenemos:

Corolario 4.11. *Sea $\mathfrak{G} \subset I$ una base de Groebner universal. Si se tiene que \mathfrak{G} es una base de Groebner reducida de I respecto a todos los órdenes monomiales, entonces $\sum_{g \in \mathfrak{G}} New(g)$ es un politopo de estados de I .*

Veamos ahora un ejemplo de politopo de estados.

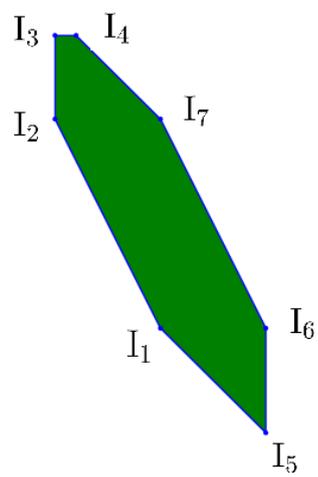
Ejemplo 4.12. *Sea $I = \langle x_1x_3 - x_2^2, x_1x_5 - x_2x_4, x_2x_5 - x_3x_4 \rangle \subseteq \mathcal{Q}[x_1, \dots, x_5]$. I tiene siete ideales iniciales:*

- $I_1 = \langle x_1x_3, x_1x_5, x_2x_5 \rangle,$
- $I_2 = \langle x_1x_5, x_2^2, x_2x_5 \rangle,$
- $I_3 = \langle x_1x_5^2, x_2^2, x_2x_4, x_2x_5 \rangle,$
- $I_4 = \langle x_2^2, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4^2 \rangle,$
- $I_5 = \langle x_1x_3, x_1x_5, x_3x_4 \rangle,$
- $I_6 = \langle x_1x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle,$
- $I_7 = \langle x_2^2, x_2x_4, x_3x_4 \rangle.$

El politopo de estados de I es

$$P = \text{conv}((13, 8, 8, 3, 13), (8, 18, 3, 3, 13), (4, 22, 3, 7, 9), (3, 22, 4, 9, 7), \\ (13, 3, 13, 8, 8), (8, 8, 13, 13, 3), (3, 18, 8, 13, 3)).$$

Todos los cálculos de este ejercicio se han realizado con Macaulay2 en SAGE y están explicados en la Sección C.2 del Apéndice C.

Figura 4.2: Polítopo de estados de I_A .

CAPÍTULO 5

Ideales tóricos

En esta sección estudiamos los ideales tóricos, así como sus propiedades básicas. Hacemos uso de los resultados encontrados en el capítulo 4 de [17].

Denotemos $k^* = k \setminus \{0\}$. Fijada una matriz $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \in \mathbf{Z}^{d \times n}$ de rango máximo, consideremos el homomorfismo de semigrupos

$$\pi : \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{Z}^d, \ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \mapsto \pi(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{a}_i = A\omega.$$

La imagen de π es el semigrupo

$$\pi(\mathbf{N}^n) = \mathbf{N}A = \{A\omega : \omega \in \mathbf{N}^n\} = \{\omega_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \omega_n \mathbf{a}_n : \omega_i \in \mathbf{N}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

La k -álgebra asociada a \mathbf{N}^n es el anillo $k[\mathbf{x}]$ y la de \mathbf{Z}^d es el anillo de polinomios de Laurent $k[\mathbf{t}^{\pm 1}] = k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$. La aplicación π induce el homomorfismo de k -álgebras:

$$\hat{\pi} : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{t}^{\pm 1}], \ x_i \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i} = t_1^{\mathbf{a}_i^1} t_2^{\mathbf{a}_i^2} \dots t_d^{\mathbf{a}_i^d}.$$

Definición 5.1. Se define el ideal tórico asociado a A como el núcleo del homomorfismo $\hat{\pi}$ y se denota por I_A .

Proposición 5.2. I_A es un ideal primo.

Demostración. Sabemos que por el primer teorema de isomorfía $k[\mathbf{x}]/\ker(\hat{\pi}) = k[\mathbf{x}]/I_A \cong \hat{\pi}(k[\mathbf{x}]) = k[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_2}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$, que es un dominio de integridad y por tanto tenemos que I_A es primo. \square

Definición 5.3. La variedad de ceros del ideal tórico I_A , notada por $\mathcal{V}(I_A)$, se llama variedad tórica afín asociada a A .

Observación 5.4. Esta definición de variedad tórica afín no coincide con la definición habitual en Geometría Algebraica, ([8, Sección 1.3, Capítulo 1]), ya que no pedimos que la variedad sea normal.

Corolario 5.5. Sea k un cuerpo infinito. La variedad tórica afín $\mathcal{V}(I_A) \subseteq \mathbf{A}_k^n$ es la clausura de Zariski del conjunto de puntos $\{(\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}) : t \in (k^*)^d\}$ y es irreducible.

Demostración. Por la definición de ideal tórico tenemos que $I_A = \ker(\hat{\pi}) = \{f \in k[\mathbf{x}] : f(\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}) = 0 \in k[t^{\pm 1}]\}$. Por ser k infinito tenemos que un polinomio de Laurent determina la función nula en $(k^*)^d$ si y solamente si es cero como polinomio de Laurent. Por tanto, denotando $W = \{(\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}) : \mathbf{t} \in (k^*)^d\}$ tenemos que $I_A = \mathcal{J}(W) = \{f \in k[\mathbf{x}] : f(\mathbf{p}) = 0, \forall \mathbf{p} \in W\}$ y, por tanto, $\mathcal{V}(I_A) = \mathcal{V}(\mathcal{J}(W))$, que es la clausura de Zariski de W . Así, $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I_A)) = \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{J}(W))) = \mathcal{J}(W) = I_A$ es primo, y entonces $\mathcal{V}(I_A)$ es irreducible ([7, Proposición 1, Sección 5, Capítulo 1]). \square

Lema 5.6. El ideal tórico I_A está generado como k -espacio vectorial por el conjunto de binomios

$$\{\mathbf{x}^\omega - \mathbf{x}^\gamma ; \omega, \gamma \in \mathbf{N}^n, \pi(\omega) = \pi(\gamma)\}.$$

Demostración. Es claro que el conjunto de binomios está contenido en I_A ya que dado un binomio de la forma $\mathbf{x}^\omega - \mathbf{x}^\gamma$ tal que $\pi(\omega) = \pi(\gamma) = a$, entonces $\hat{\pi}(\mathbf{x}^\omega) = \hat{\pi}(\mathbf{x}^\gamma)$ y por tanto $\mathbf{x}^\omega - \mathbf{x}^\gamma \in \ker(\hat{\pi}) = I_A$. Para demostrar que es un conjunto generador basta probar que dado un polinomio de I_A , este es combinación lineal de binomios de la forma anterior. Fijemos un orden monomial \prec en $k[\mathbf{x}]$ y sea $f \in I_A$. Supongamos que f no puede expresarse como combinación k -lineal de binomios. Escogemos f tal que $in_{\prec}(f) = \mathbf{x}^\omega$ es mínimo respecto al orden monomial \prec . Como $f \in I_A = \ker(\hat{\pi}) \Rightarrow f(\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}) = 0$. Entonces el término $\mathbf{t}^{\pi(\omega)} = \hat{\pi}(\mathbf{x}^\omega)$ debe cancelarse con otros términos en esa expresión, y por tanto debe haber al menos otro monomio $\mathbf{x}^\gamma \prec \mathbf{x}^\omega$ en f tal que $\pi(\gamma) = \pi(\omega)$. Considerando ahora el polinomio $f' = f - \mathbf{x}^\omega + \mathbf{x}^\gamma \in I_A$, el cual no puede expresarse como combinación lineal de binomios, observamos que $in_{\prec}(f') \prec in_{\prec}(f)$, lo cual es absurdo por la elección de f . Por tanto, todo elemento de I_A puede expresarse como combinación lineal de binomios, obteniendo así el resultado. \square

Proposición 5.7. La dimensión de Krull del anillo cociente $k[\mathbf{x}]/I_A$ es igual al rango de A .

Demostración. Como la k -álgebra $k[\mathbf{x}]/I_A \cong k[\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}]$ es un dominio de integridad se tiene que su dimensión de Krull coincide con el grado de trascendencia sobre k de su cuerpo de fracciones $\mathcal{Q}(k[\mathbf{x}]/I_A) \cong k[\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}]$ ([11, Teorema 1.8.A, Capítulo 1]). Entonces la dimensión de Krull es el máximo número de monomios \mathbf{t}^{a_i} algebraicamente independientes. El conjunto $\{\mathbf{t}^{a_{i_1}}, \dots, \mathbf{t}^{a_{i_r}}\}$ es algebraicamente independiente si y solo si no existe polinomio no nulo $f \in I_A \cap k[x_{i_1}, \dots, x_{i_r}]$. Por el Lema 5.6, ésto se verifica si y solo si $\nexists u \in \ker(A)$ tal que $\text{supp}(u) \subseteq \{i_1, \dots, i_r\}$. Luego el número máximo de monomios algebraicamente independientes es el rango de A y, por tanto, la dimensión de Krull es igual al rango de A . \square

Nota 5.8. *Todo vector $\omega \in \mathbf{Z}^n$ se puede expresar de forma única como $\omega = \omega^+ - \omega^-$, donde $\omega^+, \omega^- \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ cumplen que $\text{supp}(\omega^+) \cap \text{supp}(\omega^-) = \emptyset$, es decir, la coordenada i -ésima de ω^+ es ω_i si ésta es no negativa, y 0 en caso contrario. Entonces podemos expresar $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ como el conjunto*

$$\{\omega \in \mathbf{Z}^n : \pi(\omega^+) = \pi(\omega^-)\}.$$

Corolario 5.9.

$$I_A = \langle \mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \rangle.$$

Ejemplo 5.10. *Recordemos que el ideal del Ejemplo 4.12 es*

$I = \langle x_1x_3 - x_2^2, x_1x_5 - x_2x_4, x_2x_5 - x_3x_4 \rangle$. *Este ideal es el ideal tórico determinado por la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 5.11. *Si $A \in \mathbf{Z}^{d \times (d+1)}$ y tiene rango máximo, tenemos $\ker_{\mathbf{Z}}(A) = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}$ para cierto $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}^{d+1}$. Luego $I_A = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \rangle$ es un ideal principal, y por tanto su politopo de estados es la arista $\text{conv}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)$.*

Corolario 5.12. *Para cualquier orden monomial \prec , existe un conjunto finito $\mathfrak{G}_{\prec} \subset \ker(A)$ tal que el conjunto $\{\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \mathfrak{G}_{\prec}\}$ es la base de Groebner reducida de I_A respecto \prec .*

Demostración. Por la prueba constructiva del teorema de la base de Hilbert para $k[\mathbf{x}]$ ([2, Teorema 4, Sección 5, Capítulo 2]), I_A es finitamente generado por un subconjunto de $\{\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)\}$. Entonces podemos tomar como el conjunto finito de vectores $\mathfrak{G}_{\prec} \subset \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ el formado por los vectores ω correspondientes a los binomios $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ generadores de I_A . Al aplicar el algoritmo de Buchberger ([2, Teorema 2, Sección 7, Capítulo 2]) al conjunto generador de

I_A para la obtención de una base de Groebner reducida, tanto en el proceso de formación de los S-polinomios como en el proceso de reducción se preserva la estructura binomial del conjunto. Por tanto, cualquier polinomio resultante del algoritmo y, en especial la base de Groebner reducida, es un binomio que pertenece a $\left\{ \mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \right\}$. \square

Definición 5.13. Normalmente se identifica el vector ω con su binomio asociado $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ y viceversa. En particular, al conjunto de vectores \mathfrak{G}_{\prec} se le denomina base de Groebner reducida de A respecto al orden monomial \prec .

Definición 5.14. Se define la base de Groebner universal de un ideal tórico I_A como la unión de todas las bases de Groebner reducidas \mathfrak{G}_{\prec} de I_A para todo orden monomial \prec , y se denota por \mathcal{U}_A .

Observación 5.15. Por el Teorema 2.9 y el Corolario 5.12 se deduce que \mathcal{U}_A es un conjunto finito de binomios.

Definición 5.16. Un binomio $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} \in I_A$ se llama primitivo si no existe $\gamma \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ distinto de ω tal que $\mathbf{x}^{\gamma^+} - \mathbf{x}^{\gamma^-} \in I_A$ verificando que \mathbf{x}^{γ^+} divide a \mathbf{x}^{ω^+} y \mathbf{x}^{γ^-} a \mathbf{x}^{ω^-} . El conjunto de binomios primitivos de I_A se llama base de Graver de A y lo denotaremos por Gr_A .

Lema 5.17. Todo binomio $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} \in \mathcal{U}_A$ es primitivo.

Demostración. Fijado un orden monomial \prec , sea $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ cualquier binomio de la base de Groebner reducida \mathfrak{G}_{\prec} . Supongamos sin pérdida de generalidad que $\omega^+ \succ \omega^-$. Entonces \mathbf{x}^{ω^+} es un generador minimal de $in_{\prec}(I_A)$ y $\mathbf{x}^{\omega^-} \in St_{\prec}(I_A)$. Supongamos que $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ no es primitivo, entonces existe $\gamma \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ tal que \mathbf{x}^{γ^+} divide a \mathbf{x}^{ω^+} y \mathbf{x}^{γ^-} divide a \mathbf{x}^{ω^-} . Si $\gamma^+ \succ \gamma^-$ tenemos que \mathbf{x}^{ω^+} no es un generador minimal de $in_{\prec}(I_A)$, lo cual es una contradicción. Si $\gamma^+ \prec \gamma^-$ tenemos que $\mathbf{x}^{\omega^-} \notin St_{\prec}(I_A)$, ya que tendríamos que $\mathbf{x}^{\gamma^-} \in in_{\prec}(I_A)$, con \mathbf{x}^{γ^-} dividiendo a \mathbf{x}^{ω^-} , y por tanto \mathbf{x}^{ω^-} debe pertenecer a $in_{\prec}(I_A)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ es primitivo y tenemos el resultado. \square

Definición 5.18. Dado un vector ω denotaremos por $supp(\omega)$ el conjunto de índices cuyas coordenadas son no nulas. Un vector $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ se llama circuito si $supp(\omega)$ es minimal respecto a la inclusión y sus coordenadas son relativamente primas, es decir, un circuito es un binomio irreducible $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} \in I_A$ con soporte minimal. Al conjunto de los circuitos de I_A lo denotaremos por \mathcal{C}_A .

Proposición 5.19. Para toda matriz $A \in \mathbf{Z}^{d \times n}$ se tiene que $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{U}_A \subseteq Gr_A$.

Demostración. Por el Lema 5.17 tenemos la inclusión $\mathcal{U}_A \subseteq Gr_A$. Supongamos que $\exists \omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ tal que su binomio asociado $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ es un circuito que no pertenece a ninguna base de Groebner reducida de I_A . Fijemos un orden de eliminación \prec tal que $\{x_i : i \notin \text{supp}(\omega)\} \succ \{x_i : i \in \text{supp}(\omega)\}$ y $\mathbf{x}^{\omega^+} \succ \mathbf{x}^{\omega^-}$. Luego en particular, $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ no pertenece a la base de Groebner reducida de I respecto \prec , $\mathfrak{G}_{\prec}(I)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} \notin \mathfrak{G}_{\prec} &\Rightarrow \exists \gamma \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \setminus \{0, \omega\} \text{ tal que } \gamma^+ \succ \gamma^-, \mathbf{x}^{\gamma^+} \mid \mathbf{x}^{\omega^+} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{supp}(\gamma^+) \subseteq \text{supp}(\omega^+) \subseteq \text{supp}(\omega). \end{aligned}$$

Esta inclusión y la elección del orden de eliminación implica que $\text{supp}(\gamma^-) \subseteq \text{supp}(\omega)$, ya que de no ser así, se verifica por la elección del orden de eliminación que $\gamma^- \succ \gamma^+$. Entonces $\text{supp}(\gamma) \subseteq \text{supp}(\omega)$. Esto es absurdo ya que ω es un circuito, por tanto, tiene soporte minimal y $\omega \neq \gamma$. \square

Proposición 5.20. *Sea una submatriz B de A con el mismo número de filas y sea $k[B] = k[x_i : \mathbf{a}_i \text{ columna de } B]$, entonces:*

1. *El ideal tórico de B es $I_B = I_A \cap k[B]$.*
2. *La base de Groebner universal de B es $\mathcal{U}_B = \mathcal{U}_A \cap k[B]$.*
3. *Los circuitos de B son $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A \cap k[B]$.*
4. *La base de Graver de B es $Gr_B = Gr_A \cap k[B]$.*

Demostración. Denotemos $J = \{i : \mathbf{a}_i \in B\}$ y a r el cardinal de J .

1. Por el Corolario 5.9 tenemos que $I_B = I_A \cap k[B]$ si y solo si $\ker_{\mathbf{Z}}(B) = \ker_{\mathbf{Z}}(A) \cap \mathbf{Z}^J$, donde

$$\ker_{\mathbf{Z}}(B) = \{\omega \in \mathbf{Z}^J : B\omega = 0\},$$

$$\ker_{\mathbf{Z}}(A) = \{\omega \in \mathbf{Z}^n : A\omega = 0\} \text{ y}$$

$$\mathbf{Z}^J = \{\alpha \in \mathbf{Z}^n : \text{supp}(\alpha) \subset J\}.$$

Veamos la contención \supseteq : Sea $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \cap \mathbf{Z}^J$, por tanto $A\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{a}_i = 0$ y $\text{supp}(\omega) \subset J$. Entonces $\omega_i = 0, \forall i \notin J$, luego $A\omega = \sum_{i \in J} \omega_i \mathbf{a}_i = B\omega_J = 0$, donde $\omega_J = (\omega_i)_{i \in J} \in \mathbf{Z}^J$. Por tanto $\omega_J \in \ker_{\mathbf{Z}}(B)$.

Probemos ahora la contención \subseteq : Sea $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(B)$, entonces $0 = B\omega = \sum_{i \in J} \omega_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in J} \omega_i \mathbf{a}_i + \sum_{i \notin J} 0 \mathbf{a}_i$. Por tanto, $\text{supp}(\omega) \subset J$ y $A\omega = 0$, con lo que tenemos que $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \cap \mathbf{Z}^J$.

2. Por el Corolario 5.12 tenemos que para cualquier orden monomial \prec el conjunto $\mathfrak{G}_\prec \subset \ker_{\mathbf{Z}}(B) = \ker_{\mathbf{Z}}(A) \cap \mathbf{Z}^J$ verifica que $\{\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \mathfrak{G}_\prec\}$ es base de Groebner reducida de $I_B = I_A \cap k[B]$. En particular, $\mathfrak{G}_\prec \subset \ker_{\mathbf{Z}}(A)$, y $\text{supp}(\gamma) \subseteq J, \forall \gamma \in \mathfrak{G}_\prec$. Por tanto $\{\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \mathfrak{G}_\prec\}$ es base de Groebner reducida de $I_A \cap k[B]$. Entonces $\{\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-} : \omega \in \mathfrak{G}_\prec\} \subseteq \mathcal{U}_A \cap k[B]$, y su unión también. Por la unicidad de la base de Groebner universal tenemos que $\mathcal{U}_B = \mathcal{U}_A \cap k[B]$.
3. Este resultado se obtiene directamente del apartado 1 y de la Definición 5.18.
4. Este resultado se obtiene directamente del apartado 1 y de la Definición 5.16.

□

Lema 5.21. *El ideal I_A es homogéneo respecto a la graduación dada por $\deg(x_i) = d_i, i = 1, \dots, n$, si y solo si existe un vector $\gamma \in \mathbf{Q}^d$ tal que $a_i \cdot \gamma = d_i, \forall i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Un binomio $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ es homogéneo si y solo si $\sum_{i=1}^n d_i \omega_i = 0$. Por el Corolario 5.9, I_A es homogéneo si y solo $\mathbf{x}^{\omega^+} - \mathbf{x}^{\omega^-}$ es homogéneo, para todo $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$.

Consideremos la aplicación $\bar{\pi} : \mathbf{Q}^n \rightarrow \mathbf{Q}^d$ dada por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^t \rightarrow A\omega$. Entonces $\ker(\bar{\pi}) = \text{rowspan}_{\mathbf{Q}}(A)^\perp$, donde $\text{rowspan}_{\mathbf{Q}}(A)$ denota el \mathbf{Q} -espacio vectorial generado por las filas de A . Luego $(\ker(\bar{\pi}))^\perp = \{\alpha \in \mathbf{Q}^n : \alpha \cdot \gamma = 0, \forall \gamma \in \ker(\bar{\pi})\} = \text{rowspan}_{\mathbf{Q}}(A)$. Además para todo $\omega \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) = \ker(\bar{\pi}) \cap \mathbf{Z}^n$, $(d_1, \dots, d_n) \cdot \omega = \sum d_i \omega_i = 0$ si y solo si el vector $(d_1, \dots, d_n) \in \text{rowspan}_{\mathbf{Q}}(A) = (\ker(\bar{\pi}))^\perp$. Es decir, si $\exists \gamma \in \mathbf{Q}^n$ tal que $\gamma A = (d_1, \dots, d_n)$, o lo que equivale a que $\gamma \cdot \mathbf{a}_i = d_i, \forall i = 1, \dots, n$. □

El siguiente resultado es un caso particular del Lema anterior.

Corolario 5.22. *El ideal I_A es homogéneo respecto a la graduación dada por $\deg(x_1) = \dots = \deg(x_n) = 1$ si y solo si existe un vector $\gamma \in \mathbf{Q}^d$ tal que $a_i \cdot \gamma = 1, \forall i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Basta sustituir $(d_1, \dots, d_n) = (1, \dots, 1)$ en el Lema 5.21. □

El Corolario 5.22 dice en términos geométricos que I_A es homogéneo si y solo si las columnas de A están en un mismo hiperplano afín de \mathbf{R}^n que no pase por el origen. Supongamos a partir de ahora que I_A es homogéneo. Consideremos el

politopo $Q = \text{conv}(A)$. El polinomio normalizado de Ehrhart de Q es la función numérica

$$E_Q : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, r \mapsto E_Q(r) = \text{card}(\mathbf{Z}A \cap rQ).$$

Es conocido que $E_Q(t)$ es un polinomio de grado $q = \dim(Q) \leq d - 1$, (ver [16]). Entonces podemos escribir $E_Q(r) = \sum_{i=0}^q c_i/i! \cdot r^i$. El coeficiente líder c_q se denota por $\text{Vol}_{\mathbf{Z}A}(Q)$ y se llama volumen normalizado de Q . Si $q = d - 1$ entonces

$$\text{Vol}_{\mathbf{Z}A}(Q) = (d - 1)! \frac{\text{Vol}_{\text{rel}}(Q)}{[\mathbf{Z}^d : \mathbf{Z}A]} = \frac{d!}{[\mathbf{Z}^d : \mathbf{Z}A]} \text{Vol}(\text{conv}(A \cup \{\mathbf{0}\})),$$

donde $[\mathbf{Z}^d : \mathbf{Z}A]$ es el cardinal del grupo abeliano $\mathbf{Z}^d/\mathbf{Z}A$, $\text{Vol}_{\text{rel}}(Q)$ es el volumen euclídeo de Q relativo en el hiperplano que lo contiene y $\text{Vol}(P)$ es el volumen euclídeo de $P \subseteq \mathbf{R}^d$.

Teorema 5.23. *El grado de la variedad tórica proyectiva $\mathcal{V}(\mathbf{I}_A)$ es igual al volumen normalizado $\text{Vol}_{\mathbf{Z}A}(Q)$, con $Q = \text{conv}(A)$.*

Demostración. El grado de la variedad tórica proyectiva $\mathcal{V}(\mathbf{I}_A)$ es $q!$ veces el coeficiente líder del polinomio de Hilbert $H_A(r) \subseteq k[\mathbf{x}]/\mathbf{I}_A$. El polinomio de Hilbert se define como sigue: $H_A(r)$ es la dimensión del espacio vectorial formado por la componente homogénea de grado r de $k[\mathbf{x}]/\mathbf{I}_A = k[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$, para $r \gg 0$. Una base de este espacio vectorial viene dada por el conjunto de los monomios $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$ tales que pertenecen al semigrupo definido por A y $\gamma \cdot \mathbf{b} = r$, donde $\gamma \in \mathbf{Q}^d$ viene dado por el Corolario 5.22. Es decir, $H_A(r) = \text{card}(\mathbf{N}A \cap r \cdot Q)$. Esto implica que $H_A(r) \leq E_Q(r)$. Consideremos ahora el conjunto finito

$$C = \mathbf{Z}A \cap \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Fijamos $R > 0$ tal que cada $\mathbf{b} \in C$ pueda ser escrito como $\mathbf{b} = \pi(\mathbf{u})$, para algún $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{Z}^n$ con $u_i > -R$, $\forall i$. Para cualquier entero $r > nR$ consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}A \cap (r - nR) \cdot Q &\rightarrow \mathbf{N}A \cap r \cdot Q \\ \mathbf{b} &\mapsto \mathbf{b} + R(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para probar que esta aplicación está bien definida debemos expresar $\mathbf{b} + R(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n)$ como una combinación lineal entera no negativa de las columnas de A . Primero escribimos \mathbf{b} como combinación lineal racional no negativa de las columnas de A , con coeficientes λ_i , $i = 1, \dots, n$. Si algún $\lambda_i \geq 1$, entonces consideramos la descomposición $\bar{\lambda}_i + p_i$, donde $0 < \bar{\lambda}_i < 1$ y $p_i \in \mathbf{N}$. Repitiendo

este proceso, llegamos a expresar \mathbf{b} como suma de un elemento $\bar{\mathbf{b}}$ que pertenece a C y otro que pertenece a \mathbf{NA} . Ahora escribimos $\bar{\mathbf{b}} = \sum u_i \mathbf{a}_i$, donde $u_i > -R$. Añadiendo R veces la suma $(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n)$ a esta expresión de $\bar{\mathbf{b}}$, obtenemos el resultado deseado.

Claramente la aplicación (5.1) es inyectiva y por tanto

$$E_Q(r - nR) \leq H_A(r) \leq E_Q(r).$$

Esto prueba que los polinomios E_Q y H_A tienen el mismo grado y el mismo coeficiente, y esto completa la prueba. \square

En el Ejemplo 6.17 calcularemos el volumen normalizado de una matriz, y por tanto el grado del ideal tórico asociado.

Politopo secundario y abanico secundario

En este capítulo, introduciremos en primer lugar las triangulaciones regulares de una matriz $A \in \mathbf{Z}^{d \times n}$ de rango d y estudiaremos su relación con los ideales iniciales de los ideales tóricos. Veremos que el abanico de Groebner de un ideal tórico refina a su abanico secundario. A continuación, analizaremos la construcción del politopo secundario para ideales tóricos homogéneos.

Definición 6.1 (Definición 1.6, Capítulo 1, [13]). *El ideal de Stanley-Reisner de un complejo simplicial abstracto Δ con vértices en $\{1, 2, \dots, n\}$ es el ideal monomial $I_\Delta = \langle \prod_{i \in \sigma} x_i : \sigma \notin \Delta \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Notaremos $\mathfrak{p}_\sigma = \langle x_i : i \notin \sigma \rangle$, y $\bar{\sigma} = \{1, \dots, n\} \setminus \sigma$.*

Observación 6.2. *Se tiene que $\sigma \in \Delta$ si y solo si $\prod_{i \in \sigma} x_i \notin I_\Delta$.*

Teorema 6.3 (Teorema 1.7, Capítulo 1, [13]). *El ideal de Stanley-Reisner de un complejo simplicial Δ verifica*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathfrak{p}_\sigma.$$

Demostración. Un monomio $\prod_{i \in \tau} x_i$ pertenece a $\bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathfrak{p}_\sigma$ si y solo si τ tiene algún elemento en común con $\bar{\sigma}$ para todo $\sigma \in \Delta$. Equivalentemente, τ no está contenido en ninguna cara de Δ , es decir, $\tau \notin \Delta$. \square

Definición 6.4. *Dado un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ y un orden monomial \prec , se define el complejo inicial de I respecto a \prec , $\Delta_\prec(I)$, como el complejo simplicial de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ definido de la siguiente forma: Un subconjunto $F \subset \{1, 2, \dots, n\}$ es cara de $\Delta_\prec(I)$ si no existe $f \in I$ tal que F es el soporte del exponente de $\text{in}_\prec(f)$. Esto es equivalente a que el radical de $\text{in}_\prec(I)$ sea el ideal de Stanley-Reisner del complejo simplicial $\Delta_\prec(I)$.*

Ejemplo 6.5. Un ejemplo de ideal tórico principal es $I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_4]$, con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los ideales iniciales de I_A son $\langle x_1x_2 \rangle$ y $\langle x_3x_4 \rangle$. Los complejos iniciales correspondientes están representados en la Figura 6.1.

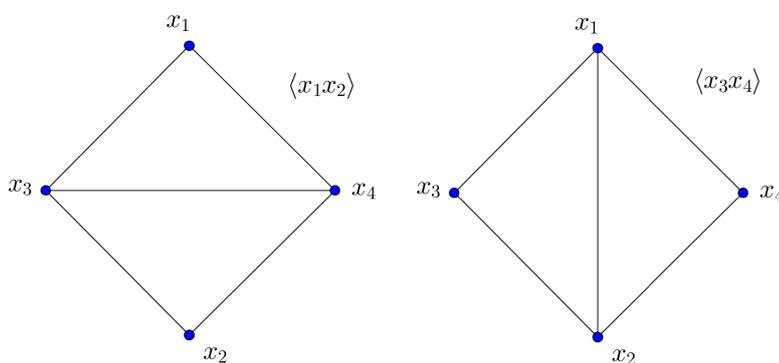


Figura 6.1: Los complejos iniciales de I_A .

Definición 6.6. Un abanico es simplicial si cada uno de sus conos maximales tiene un conjunto minimal de generadores linealmente independientes.

A partir de ahora identificaremos el conjunto de las columnas de A con el conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$. En particular, dado $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ notemos

$$pos(\sigma) = \left\{ \sum_{i \in \sigma} \lambda_i \mathbf{a}_i, : \lambda_i \in \mathbf{R}_{\geq 0} \forall i \in \sigma \right\}.$$

Supondremos a partir de ahora que existe un hiperplano afín que pasa por el origen y deja las columnas de A a un mismo lado, es decir, que $pos(A)$ es estrictamente convexo (no contiene espacios vectoriales triviales). Si la matriz A no tiene una columna de ceros, lo anterior es equivalente a que I_A sea homogéneo respecto a una multigraduación, por el Lema 5.21.

Definición 6.7. Una triangulación de A es un complejo simplicial abstracto Δ con vértices en $\{1, \dots, n\}$ tales que $\{pos(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ es un abanico simplicial con soporte $pos(A)$.

Por simplicidad, definiremos una triangulación dando únicamente sus símlices de dimensión máxima.

Ejemplo 6.8. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dos triangulaciones de A son

$$\Delta^1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\},$$

$$\Delta^2 = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}.$$

La Figura 6.2 muestra las dos triangulaciones anteriores en una sección transversal que contiene a las seis columnas de A .

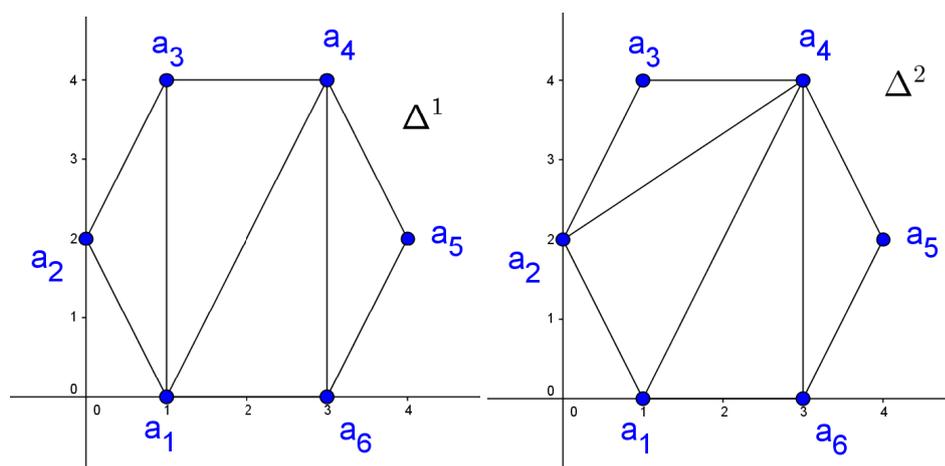


Figura 6.2: Dos triangulaciones regulares de A .

Definición 6.9. Dado un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$ suficientemente genérico, se define la triangulación Δ_ω de A de la siguiente forma:

Un subconjunto $F = \{i_1, \dots, i_r\}$ es cara de Δ_ω si existe un vector $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbf{R}^d$ tal que verifica las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j$ si $j \in F$ y
2. $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} < \omega_j$ si $j \notin F$.

Definición 6.10. Una triangulación Δ de A se llama regular si existe $\omega \in \mathbf{R}^n$ tal que $\Delta = \Delta_\omega$.

Ejemplo 6.11. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y consideremos la triangulación

$$\Delta = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\},$$

representada en la Figura 6.3.

Veamos que esta triangulación de A no es regular. Para ello supongamos lo contrario. Es decir, $\exists \omega \in \mathbf{R}^6$ tal que $\Delta = \Delta_\omega$. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \in \mathbf{R}^3$ tales que verifican la Definición 6.9 para las caras $\{1, 2, 5\}, \{2, 3, 6\}$ y $\{1, 3, 4\}$ de Δ respectivamente. Consideremos las siguientes relaciones lineales de dependencia:

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_4 + 4\mathbf{a}_5 = 0,$$

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 - 4\mathbf{a}_5 + 4\mathbf{a}_6 = 0,$$

$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_6 + 4\mathbf{a}_4 = 0.$$

Multiplicando escalarmente cada una de estas igualdades por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ y \mathbf{c}_3 respectivamente obtenemos las inecuaciones

$$\omega_1 - \omega_2 - 4\omega_4 + 4\omega_5 < 0,$$

$$\omega_2 - \omega_3 - 4\omega_5 + 4\omega_6 < 0,$$

$$\omega_3 - \omega_1 - 4\omega_6 + 4\omega_4 < 0.$$

Pero sumando estas tres inecuaciones obtenemos que $0 < 0$, lo cual es una contradicción y por tanto, Δ no es una triangulación regular.

Ejemplo 6.12. Continuación del Ejemplo 6.8.

La triangulación Δ^1 es una triangulación regular de A , ya que $\Delta^1 = \Delta_{(2,4,0,2,6,5)}$. Para cada cara de Δ^1 tenemos que resolver un sistema lineal de igualdades y desigualdades estrictas. Para $F = \{1, 2, 3\}$ tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_3 = 2 \\ 2c_2 + c_3 = 4 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 + c_3 < 2 \\ 4c_1 + 2c_2 + c_3 < 6 \\ 3c_1 + c_3 < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{c} = \left(-3, -\frac{1}{2}, 5 \right).$$

Para $F = \{1, 3, 4\}$ tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_3 = 2 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 + c_3 = 2 \\ 2c_2 + c_3 < 4 \\ 4c_1 + 2c_2 + c_3 < 6 \\ 3c_1 + c_3 < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{c} = \left(1, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

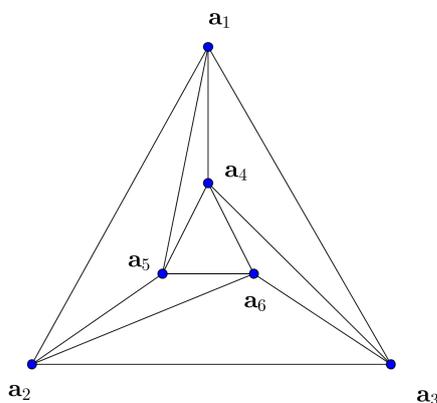


Figura 6.3: Triangulación no regular.

Análogamente para las caras $\{1, 4, 6\}$ y $\{4, 5, 6\}$ tenemos que se verifican las condiciones de la Definición 6.9.

Con el mismo procedimiento podemos comprobar que la triangulación Δ^2 es una triangulación regular de A , ya que $\Delta^2 = \Delta_{(1,0,2,3,6,4)}$.

Algoritmo 6.13. Podemos construir geoméricamente la triangulación regular Δ_ω de la siguiente forma:

1. Usando las coordenadas del vector de peso ω como “alturas”, consideramos la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}.$$

2. Las caras inferiores del cono $\text{pos}(\tilde{A}) \subseteq \mathbf{R}^{d+1}$ forman un complejo poliedral de dimensión d llamado menor envolvente convexa. Consideramos que una cara es inferior si su vector normal tiene la última coordenada negativa.
3. Δ_ω es la proyección de dicho complejo poliedral sobre las primeras d coordenadas.

Demostración. Hay que probar que si $F \subseteq \{1, \dots, n\}$, F es cara de Δ_ω si y solo si $\text{pos}((\mathbf{a}_i, \omega_i) : i \in F)$ es cara inferior de $\text{pos}(\tilde{A})$. Veamos primero que si $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^d$ es un vector de la Definición 6.9, entonces $(\mathbf{c}, -1) \in \mathbf{R}^{d+1}$ es un vector normal a la cara correspondiente de $\text{pos}(\tilde{A})$. Por ser F cara de Δ_ω tenemos que $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j$ para $j \in F$, y $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} < \omega_j$ para $j \notin F$. La cara correspondiente a $\text{pos}(\tilde{A})$ contiene puntos de la forma $\sum_{i \in F} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \omega_i)$, luego

$$\sum_{i \in F} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \omega_i) \cdot (\mathbf{c}, -1) = \sum_{i \in F} \lambda_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} - \sum_{i \in F} \lambda_i \omega_i = \sum_{i \in F} \lambda_i \omega_i - \sum_{i \in F} \lambda_i \omega_i = 0.$$

Además, para todo $j \notin F$, $(\mathbf{a}_j, \omega_j) \cdot (\mathbf{c}, -1) = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} - \omega_j < 0$. Por tanto, $(\mathbf{c}, -1)$ es un vector normal a la cara correspondiente de $\text{pos}(\tilde{A})$.

Veamos ahora la implicación contraria. Si $(\mathbf{c}, -1)$ es el vector normal a la cara de $\text{pos}(\tilde{A})$ descrita como $\{\sum_{i \in F} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \omega_i) : \lambda_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}\}$, veamos que F es cara de Δ_ω :

$$0 = \sum_{i \in F} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \omega_i) \cdot (\mathbf{c}, -1) = \sum_{i \in F} \lambda_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} - \sum_{i \in F} \lambda_i \omega_i \Rightarrow \sum_{i \in F} \lambda_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} = \sum_{i \in F} \lambda_i \omega_i, \forall \lambda_i.$$

Luego se verifica que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} = \omega_i$ para $i \in F$. Además tenemos que

$$\forall i \notin F, (\mathbf{a}_i, \omega_i) \cdot (\mathbf{c}, -1) < 0 \Rightarrow \forall i \notin F, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} - \omega_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin F, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} < \omega_i.$$

Por tanto F es cara de Δ_ω . \square

Teorema 6.14. *Una triangulación regular de A es un complejo inicial del ideal tórico I_A respecto de algún orden monomial \prec . Sea $\omega \in \mathbf{R}^n$ tal que $\text{in}_\prec(I_A) = \text{in}_\omega(I_A)$ para algún orden monomial \prec , entonces $\Delta_\prec(I_A) = \Delta_\omega$.*

Demostración. Para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$ consideramos el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{u} \cdot \omega \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b} \\ & \mathbf{u} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n \end{aligned} \quad (6.1)$$

Su problema dual es

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} \leq \omega_1 \\ & \vdots \\ & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{c} \leq \omega_n \\ & \mathbf{c} \in \mathbf{R}^d \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para cada $F \subseteq \{1, \dots, n\}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. F es cara de Δ_ω .
2. Existe \mathbf{c} solución factible de (6.2) tal que $F = \{j \in \{1, \dots, n\} : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j\}$.
3. Existe $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ tal que existe \mathbf{c} solución óptima de (6.2) que verifica $F = \{j : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j\}$.
4. Existe $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ tal que existe $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ solución óptima de (6.1) con $\text{supp}(\mathbf{u}) = F$.
5. Existe $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ tal que existe $\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n$ solución óptima de (6.1) con $\text{supp}(\mathbf{u}) = F$.

6. Existe $\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n$ tal que $F = \text{supp}(\mathbf{u})$ y además toda potencia de $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ pertenece a $St_{\prec}(I_A)$.

7. F es cara de $\Delta_{\prec}(I_A)$.

1 \Leftrightarrow 2 | Esta equivalencia se tiene por la Definición 6.9 de Δ_{ω} .

2 \Leftrightarrow 3 | Cualquier solución factible \mathbf{c} de (6.2) pertenece al interior relativo de una cara F' del poliedro P , que es la región factible de (6.2). Por tanto si elegimos $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ tal que $F' = \text{face}_{\mathbf{b}}(P)$ tenemos que \mathbf{c} es solución óptima.

3 \Leftrightarrow 4 | Por un lado (6.1) tiene solución óptima si y solo si (6.2) tiene solución óptima. Además se verifica la condición $F = \{j : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j\}$ si y solo si $F = \text{supp}(\mathbf{u})$ por el Teorema de Holgura Complementaria ([15, Sección 7.9, Capítulo 7]). Por (36) de la referencia, para todo $i \in F = \{j : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j\}$ existe $\mathbf{u}^i \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ solución óptima de (6.1) tal que $i \in \text{supp}(\mathbf{u}) \subseteq F$. Entonces $\mathbf{u} = \frac{1}{\text{card}(F)} \sum_{i \in F} \mathbf{u}^i$ es otra solución óptima de (6.1) y $\text{supp}(\mathbf{u}) = F$.

Sea ahora $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ solución óptima de (6.1) con $\text{supp}(\mathbf{u}) = F$. Para todo $j \notin F$ con $u_j = 0$, existe \mathbf{c}^j solución óptima de (6.2) tal que $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c}^j < \omega_j$. Además para todo \mathbf{c} solución óptima de (6.2), se verifica que $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j, \forall j \in F$. Entonces $\mathbf{c} = \frac{1}{n - \text{card}(F)} \sum_{j \notin F} \mathbf{c}^j$ es otra solución óptima de (6.2) y $F = \{j : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j\}$.

4 \Leftrightarrow 5 | Una solución óptima se alcanza en un vértice de la región factible. Esta región viene dada por un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros, por tanto, dicha solución óptima \mathbf{u} de (6.1) tiene coordenadas racionales. Así, reemplazando \mathbf{b} por un múltiplo entero adecuado podemos suponer que existe una solución óptima $\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n$.

5 \Leftrightarrow 6 | Esta equivalencia se tiene porque para cualquier \mathbf{u} solución óptima de (6.1), \mathbf{u} minimiza la función $\omega \cdot \mathbf{u}$. Entonces para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbf{N}^n$ tal que $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ se tiene que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_A$ y su parte inicial respecto ω no puede ser $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$, y por tanto $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es estándar. Además, para cualquier solución óptima \mathbf{u} se tiene que $\lambda\mathbf{u}$ es solución del problema para $\lambda\mathbf{b}$. Por tanto $\mathbf{x}^{\lambda\mathbf{u}}$ también es estándar. Y al contrario, si $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es estándar, entonces \mathbf{u} es solución de (6.2).

6 \Leftrightarrow 7 | Esta última equivalencia se tiene por la Definición 6.4 de $\Delta_{\prec}(I_A)$. □

Corolario 6.15. Sea $\omega \in \mathbf{R}^n$ genérico, el ideal radical del ideal inicial $in_\omega(I_A)$ es el ideal de Stanley-Reisner del complejo simplicial Δ_ω . Es decir,

$$\sqrt{in_\omega(I_A)} = \left\langle \prod_{i \in \sigma} x_i : \sigma \text{ no es cara de } \Delta_\omega \right\rangle = \bigcap_{\sigma \in \Delta_\omega} \langle x_i : i \notin \sigma \rangle.$$

Demostración. Por el Teorema 6.14 tenemos $in_\omega(I) = in_{\prec}(I_A)$ para algún orden monomial \prec , y por tanto $\Delta_{\prec}(I_A) = \Delta_\omega$. Entonces el ideal radical de $in_{\prec}(I_A)$ es el ideal de Stanley-Reisner de $in_{\prec}(I_A)$ por la Definición 6.4, obteniendo así la primera igualdad. La segunda igualdad se tiene por el Teorema 6.3. \square

Ejemplo 6.16. Sea $I_A = \langle x_1x_3 - x_2^2 \rangle \subseteq k[x_1, x_2, x_3]$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los ideales iniciales de I_A son:

- $I_1 = \langle x_1x_3 \rangle$,
- $I_2 = \langle x_2^2 \rangle$.

Los radicales de los ideales iniciales anteriores son:

- $\sqrt{I_1} = \langle x_1x_3 \rangle$,
- $\sqrt{I_2} = \langle x_2 \rangle$.

Aplicando el Corolario 6.15 tenemos que las triangulaciones regulares de A corresponden una a una con los radicales de los ideales iniciales de I_A . En la Figura 6.4 están representadas las triangulaciones regulares de A enumeradas con el número del ideal radical a la que corresponde.

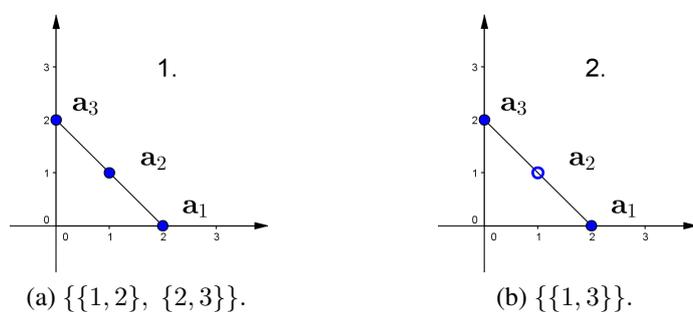


Figura 6.4: Triangulaciones regulares de A .

Ejemplo 6.17. Recordemos que el ideal del Ejemplo 4.12 es el ideal tórico I_A determinado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos las triangulaciones regulares de A aplicando el Corolario 6.15. Todos los cálculos de este ejercicio se han realizado con Macaulay2 en SAGE y están explicados en la Sección C.2 del Apéndice C. Recordemos que los ideales iniciales de I_A son:

1. $I_1 = \langle x_1x_3, x_1x_5, x_2x_5 \rangle,$
2. $I_2 = \langle x_1x_5, x_2^2, x_2x_5 \rangle,$
3. $I_3 = \langle x_1x_5^2, x_2^2, x_2x_4, x_2x_5 \rangle,$
4. $I_4 = \langle x_2^2, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4^2 \rangle,$
5. $I_5 = \langle x_1x_3, x_1x_5, x_3x_4 \rangle,$
6. $I_6 = \langle x_1x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle,$
7. $I_7 = \langle x_2^2, x_2x_4, x_3x_4 \rangle.$

Ahora calculamos el radical de cada ideal inicial:

1. $\sqrt{I_1} = \langle x_2x_5, x_1x_5, x_1x_3 \rangle,$
2. $\sqrt{I_2} = \sqrt{I_3} = \langle x_2, x_1x_5 \rangle,$
3. $\sqrt{I_4} = \sqrt{I_7} = \langle x_2, x_3x_4 \rangle,$
4. $\sqrt{I_5} = \langle x_1x_3, x_3x_4, x_1x_5 \rangle,$
5. $\sqrt{I_6} = \langle x_1x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle.$

Aplicando el Corolario 6.15 vemos que todas las triangulaciones regulares de A corresponden una a una con los radicales de los ideales iniciales de I_A . En la Figura 6.5 están representadas las triangulaciones regulares de A enumeradas con el número del ideal radical al que corresponde.

Calculemos ahora el volumen normalizado de la matriz A . Para ello usaremos la triangulación $\Delta_5 = \{\{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$ (ver 5ª triangulación de la Figura 6.5). Sean $\sigma = \{1, 4, 5\}$ y A_σ la submatriz formada por las columnas indexadas por σ . Entonces el volumen normalizado de A_σ es 1, que es el valor absoluto de su determinante. Lo mismo sucede para los otros dos símplices de Δ_5 , por tanto el volumen normalizado de A es 3.

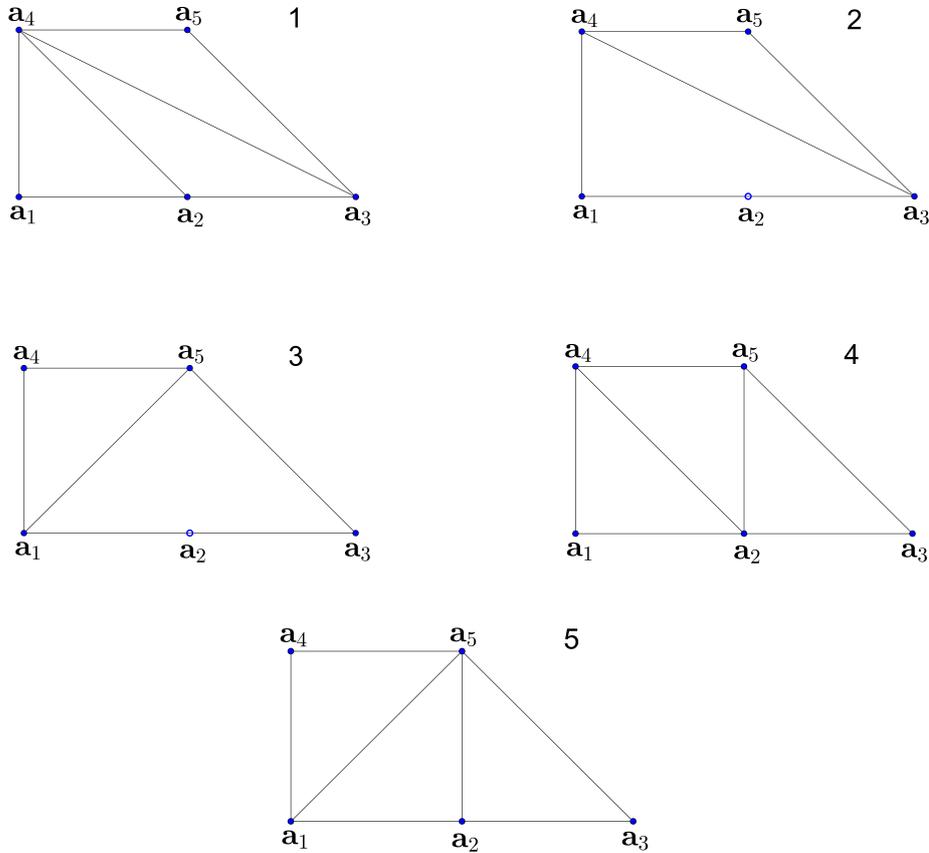


Figura 6.5: Triangulaciones regulares de A .

Nota 6.18. Debido al Teorema 5.23 y a que el grado de un ideal homogéneo es invariante al tomar parte inicial se tiene que si I_A es un ideal tórico homogéneo, el grado de cualquier ideal inicial $in_{\prec}(I_A)$ respecto a un orden monomial \prec es igual al volumen normalizado $Vol_{\mathbb{Z}^n}(Q)$, donde $Q = conv(A)$.

Proposición 6.19 (Ejercicio 1, Capítulo 8, [17]). Sea \mathcal{L} un subgrupo de \mathbb{Z}^n isomorfo a \mathbb{Z}^n y consideremos el ideal

$$I_{\mathcal{L}} = \langle x^{u^+} - x^{u^-} : u \in \mathcal{L} \rangle.$$

Entonces la dimensión de $k[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{L}}$ como k -espacio vectorial es igual al cardinal de \mathbb{Z}^n/\mathcal{L} , denotado por $[\mathbb{Z}^n : \mathcal{L}]$.

Demostración. Fijemos un orden monomial \prec y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : St_{\prec}(I_{\mathcal{L}}) &\longrightarrow \mathbb{Z}^n/\mathcal{L} \\ \mathbf{x}^u &\mapsto [\mathbf{u}] \end{aligned}$$

ϕ es inyectiva:

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}] \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{u}-\mathbf{w}^+} \cdot (\mathbf{x}^{\mathbf{w}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{w}^-}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_{\mathcal{L}}.$$

Entonces $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$, ya que de no ser así, o bien $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$, o bien $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in in_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$ y ninguna de estas dos opciones puede darse por ser $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}, \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in St_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$.

Veamos que ϕ es sobreyectiva: Dado $\xi \in \mathbf{Z}^n/\mathcal{L}$, basta tomar el representante \mathbf{u} de ξ que sea menor respecto al orden \prec . Entonces $[\mathbf{u}] = \xi$ y veamos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in St_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$ por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin St_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$, entonces existe $f \in I_{\mathcal{L}}$ tal que $in_{\prec}(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Observemos que f no es un monomio pues $I_{\mathcal{L}}$ no contiene monomios. Si no fuera así, $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in I_{\mathcal{L}}$, por lo que $\mathcal{V}(I_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}})$ pero $\mathbf{1} \in \mathcal{V}(I_{\mathcal{L}})$ y $\mathbf{1} \notin \mathcal{V}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}})$. Luego $I_{\mathcal{L}}$ no contiene monomios. Podemos suponer que todos los términos de f son de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{w}}$ con $[\mathbf{w}] = [\mathbf{u}]$ ya que $I_{\mathcal{L}}$ es homogéneo respecto a la $(\mathbf{Z}^n/\mathcal{L})$ -graduación dada por $deg(x_i) = \mathbf{e}_i + \mathcal{L}$. Sea $c_{\mathbf{w}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}} \neq \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ uno de estos términos, entonces $[\mathbf{w}] = [\mathbf{u}]$ y $u \succ w$, lo cual no puede ser por la elección de \mathbf{u} . Por tanto, $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in St_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$.

Entonces el cardinal $[\mathbf{Z}^d : \mathcal{L}]$ es igual al cardinal de $St_{\prec}(I_{\mathcal{L}})$, que coincide con la dimensión de $k[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{L}}$ como k -espacio vectorial por la Proposición 2.8. \square

Definición 6.20 (Sección 3, [4]). *Sea $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ un ideal. Los ideales primos asociados a I son los radicales de los ideales que aparecen en una descomposición primaria irredundante de I .*

Sea $\mathfrak{p} \subseteq k[\mathbf{x}]$ un ideal primo asociado a I , se define la multiplicidad de \mathfrak{p} en I , notada $mult_I(\mathfrak{p})$, como la longitud del mayor ideal con longitud finita en el anillo $k[\mathbf{x}]_{\mathfrak{p}}/Ik[\mathbf{x}]_{\mathfrak{p}}$.

Observación 6.21. *Si $\mathfrak{p} \subseteq k[\mathbf{x}]$ es un primo minimal de I , es decir, un primo asociado a I tal que la dimensión de Krull de $k[\mathbf{x}]/\mathfrak{p}$ y de $k[\mathbf{x}]/I$ coinciden, entonces $mult_I(\mathfrak{p})$ es igual a la longitud de $k[\mathbf{x}]_{\mathfrak{p}}/Ik[\mathbf{x}]_{\mathfrak{p}}$.*

Teorema 6.22. *Sea σ cualquier $(d-1)$ -símplice de una triangulación regular $\Delta_{\prec}(I_A)$ para un orden monomial \prec . La multiplicidad del ideal primo $\langle x_i : i \notin \sigma \rangle$ en $in_{\prec}(I_A)$ es igual al volumen normalizado de σ .*

Demostración. Notaremos $k[x_i : i \notin \sigma] = k[x_{\bar{\sigma}}]$. La multiplicidad $mult_{in_{\prec}(I_A)}(\langle x_i : i \notin \sigma \rangle) = M$ puede calcularse de la siguiente forma:

Sea $\phi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_{\bar{\sigma}}]$ el homomorfismo de k -álgebras sobreyectivo dado por $\phi(x_j) = 1$ para $j \in \sigma$ y $\phi(x_i) = x_i$ para $i \notin \sigma$.

Como al localizar $k[\mathbf{x}]/in_{\prec}(I_A)$ respecto a \mathfrak{p}_{σ} hacemos invertibles de las variables indexadas por $\bar{\sigma}$ y además $in_{\prec}(I_A)$ es monomial, tenemos que

$$M = mult_{in_{\prec}(I_A)}(\mathfrak{p}_{\sigma}) = mult_{\phi(in_{\prec}(I_A))}(\phi(\mathfrak{p}_{\sigma})).$$

Como $\phi(\text{in}_{\prec}(\mathbb{I}_A))$ es un ideal de dimensión 0 y $\phi(\mathfrak{p}_\sigma)$ -primario, tenemos que M es igual a la dimensión de $k[\mathbf{x}_{\bar{\sigma}}]/\phi(\text{in}_{\prec}(\mathbb{I}_A))$ como k -espacio vectorial ([3, Corolario 2.5, Sección 2, Capítulo 4]).

Denotemos por \mathcal{L} la imagen de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ por el homomorfismo $\mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^{n-d}$ tal que selecciona las coordenadas que no pertenecen a σ . Tenemos que

$$\phi(\mathbb{I}_A) = \left\langle \prod_{i \notin \sigma} x_i^{\mathbf{u}^+} - \prod_{i \notin \sigma} x_i^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \in \ker_{\mathbf{Z}}(A) \right\rangle = \mathbb{I}_{\mathcal{L}}. \quad (6.3)$$

Y además:

$$\begin{aligned} \phi(\text{in}_{\prec}(\mathbb{I}_A)) &= \phi\left(\left\langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} : \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \in \ker_{\mathbf{Z}}(A), \mathbf{u}^+ \succ \mathbf{u}^- \right\rangle\right) = \\ &= \left\langle \prod_{i \notin \sigma} x_i^{\mathbf{u}^+} : \mathbf{u} \in \ker_{\mathbf{Z}}(A), \mathbf{u}^+ \succ \mathbf{u}^- \right\rangle. \end{aligned}$$

De la Definición 6.9 se tiene que el orden monomial \prec puede ser representado para \mathbb{I}_A por un vector de peso $\omega \in \mathbf{R}^n$ tal que $\omega_j = 0$ para $j \in \sigma$ y $\omega_i > 0$ para $i \notin \sigma$. Entonces tenemos que

$$\text{in}_{\omega}(\phi(\mathbb{I}_A)) = \left\langle \prod_{i \notin \sigma} x_i^{\mathbf{u}^+} : \mathbf{u} \in \ker_{\mathbf{Z}}(A), \omega \mathbf{u}^+ > \omega \mathbf{u}^- \right\rangle.$$

Como hemos elegido ω tal que representa al orden monomial \prec para \mathbb{I}_A tenemos que $\phi(\text{in}_{\prec}(\mathbb{I}_A)) = \text{in}_{\omega}(\phi(\mathbb{I}_A))$. Luego $M = \dim_k(k[\mathbf{x}_{\bar{\sigma}}]/\phi(\text{in}_{\prec}(\mathbb{I}_A))) = \dim_k(k[\mathbf{x}_{\bar{\sigma}}]/\phi(\mathbb{I}_A)) = \dim_k(k[\mathbf{x}_{\bar{\sigma}}]/\mathbb{I}_{\mathcal{L}})$.

Para calcular el volumen normalizado de $(d-1)$ -símplices suponemos por simplicar que A verifica $\mathbf{Z}^d = \mathbf{Z}A$. Entonces $\text{Vol}_{\mathbf{Z}A}(\sigma) = |\det(A_{\sigma})|$, el menor de tamaño $d \times d$ con las columnas de A que pertenecen a σ . Sea B cualquier matriz de enteros de tamaño $n \times (n-d)$ cuyas columnas forman una \mathbf{Z} -base de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$.

Denotemos $\mathbf{Z}^{\bar{\sigma}}$ al grupo formado por $n-d$ copias de \mathbf{Z} indexadas por $\bar{\sigma}$, $B_{\bar{\sigma}}$ a la submatriz de B formada por las filas indexadas por $\bar{\sigma}$, y A_{σ} la submatriz de A formada por las columnas indexadas por σ . Es fácil comprobar que el siguiente homomorfismo es un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned} \chi : \mathbf{Z}^{n-d}/\mathcal{L} &\rightarrow \mathbf{Z}^d/A_{\sigma}\mathbf{Z}^d \\ \overline{(b_i)_{i \notin \sigma}} &\mapsto \overline{\sum_{i \notin \sigma} b_i \mathbf{a}_i}, \end{aligned}$$

donde $(b_i)_{i \notin \sigma}$ es el vector de coordenadas b_i tales que $i \notin \sigma$. Entonces se verifica que $[\mathbf{Z}^{n-d} : \mathcal{L}] = [\mathbf{Z}^d : A_{\sigma}\mathbf{Z}^d]$, y por tanto, $[\mathbf{Z}^{n-d} : \mathcal{L}] = |\det(B_{\bar{\sigma}})| = |\det(A_{\sigma})| = \text{Vol}_{\mathbf{Z}^d}(\sigma)$. Luego $\text{Vol}_{\mathbf{Z}^d}(\sigma) = [\mathbf{Z}^{n-d} : \mathcal{L}]$, y por la Proposición 6.19 tenemos que $\text{Vol}_{\mathbf{Z}^d}(\sigma)$ es igual a la dimensión de $k[x_i : i \notin \sigma]/\mathbb{I}_{\mathcal{L}}$, la cual es igual a M . Por tanto, $\text{Vol}_{\mathbf{Z}^d}(\sigma) = M$. \square

Definición 6.23. Una triangulación Δ de A es unimodular si $\text{Vol}_{\mathbf{Z}A}(\sigma) = 1$ para todo símplice maximal $\sigma \in \Delta$. La matriz A se dice unimodular si todas sus triangulaciones son unimodulares.

Corolario 6.24. El ideal inicial $\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es radical si y solo si la triangulación correspondiente $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es unimodular.

Demostración. Si $\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es radical entonces la multiplicidad de sus ideales primos asociados es uno, y por el Teorema 6.22 se tiene que el volumen normalizado de todo $(d-1)$ -símplice es uno, por tanto, $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es unimodular.

Probemos la otra implicación. Supongamos que $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es unimodular pero $\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ no es radical. Elegimos un monomio estándar $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ tal que $\mathbf{x}^{2\mathbf{u}} \in \text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$. Sea $\mathbf{b} = \pi(\mathbf{u})$ y $\sigma \in \Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ un $(d-1)$ -símplice con $\mathbf{b} \in \text{pos}(\sigma)$. Por la Definición 6.9 podemos representar el orden monomial \prec por el vector de peso $\omega \in \mathbf{R}^n$ tal que $\omega_j = 0$ para $j \in \sigma$ y $\omega_i > 0$ para $i \notin \sigma$. Entonces existe una única solución racional $(\lambda_i)_{i \in \sigma}$ del sistema $\sum_{i \in \sigma} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$. Dado que $\mathbf{b} \in \text{pos}(\sigma)$, entonces $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in \sigma$, y como $\text{Vol}(\sigma) = 1$ el cardinal $[\mathbf{Z}A : \mathbf{Z}\{\mathbf{a}_i : i \in \sigma\}]$ es uno y tenemos que los λ_i son enteros para todo $i \in \sigma$. Puesto que $\sum_{i \in \sigma} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b} = \pi(\mathbf{u})$ tenemos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \prod_{i \in \sigma} x_i^{\lambda_i} \in \mathbf{I}_A$ y además $\prod_{i \in \sigma} x_i^{\lambda_i}$ tiene ω -grado cero por la elección de ω . Entonces $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \prod_{i \in \sigma} x_i^{\lambda_i}$ ya que de no ser así $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ y esto no puede ser por la elección de $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Luego $\mathbf{x}^{2\mathbf{u}} = \prod_{i \in \sigma} x_i^{2\lambda_i}$. Por el Corolario 6.15 tenemos que $\sqrt{\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)}$ es el ideal de Stanley-Reisner de $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$, y si $\prod_{i \in \sigma} x_i^{2\lambda_i} \in \sqrt{\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)}$ entonces σ no sería cara de $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$, lo cual contradice la elección de σ . Por tanto $\mathbf{x}^{2\mathbf{u}} = \prod_{i \in \sigma} x_i^{2\lambda_i} \notin \sqrt{\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)}$, y esto contradice la elección de $\mathbf{x}^{2\mathbf{u}} \in \text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A) \subseteq \sqrt{\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)}$. Luego si $\Delta_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es unimodular, entonces $\text{in}_{\prec}(\mathbf{I}_A)$ es radical. \square

Observación 6.25. Por el Corolario 6.24 tenemos que una matriz A es unimodular si y solo si todos los ideales iniciales del ideal tórico \mathbf{I}_A son radicales.

Definición 6.26. A cada triangulación regular Δ de A le podemos asociar un cono poliedral C_{Δ} definido como el conjunto

$$C_{\Delta} = \overline{\{\omega \in \mathbf{R}^n : \Delta_{\omega} = \Delta\}},$$

llamado cono secundario de A asociado a Δ . La colección de las clausuras de dichos conos junto con sus caras forman un abanico poliedral que llamaremos abanico secundario y denotaremos por $\mathcal{F}(A)$.

Observación 6.27. Está bien definido C_{Δ} como cono poliedral ya que para todo $\sigma \in \Delta = \Delta_{\omega}$ de dimensión máxima se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{c}A_{\sigma} &= \omega_{\sigma} \Rightarrow \mathbf{c} = \omega_{\sigma}A_{\sigma}^{-1} \\ \mathbf{c}A_{\bar{\sigma}} &< \omega_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \omega_{\sigma}A_{\bar{\sigma}}A_{\sigma}^{-1} < \omega_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \omega_{\sigma}A_{\bar{\sigma}}A_{\sigma}^{-1} - \omega_{\bar{\sigma}} < 0, \end{aligned}$$

luego dada un triangulación regular Δ , el interior relativo de C_Δ está descrito por un sistema de inecuaciones estrictas. Por tanto, C_Δ es un cono poliedral.

Definición 6.28. Diremos que un abanico Σ refina a otro abanico Σ' si cada cono de Σ' es unión de conos de Σ .

Teorema 6.29. El abanico de Groebner del ideal tórico I_A refina al abanico secundario $\mathcal{F}(A)$. Si A es unimodular, los dos abanicos coinciden.

Demostración. Por el Teorema 6.14 tenemos que $in_\omega(I_A) = in_{\omega'}(I_A)$ implica que $\Delta_\omega = \Delta_{\omega'}$. Por tanto, cada cono en el abanico de Groebner de I_A está contenido en algún cono secundario. Como el abanico de Groebner es completo por ser I_A homogéneo respecto de una graduación positiva, la primera afirmación es cierta. Si A es unimodular, por la Observación 6.25 tenemos que todos los ideales iniciales de I_A son radicales. Entonces por el Teorema 6.3 las triangulaciones regulares de A y los ideales iniciales de I_A están en correspondencia biyectiva. Por tanto, el abanico de Groebner de I_A coincide con el abanico secundario $\mathcal{F}(A)$. \square

Al igual que los ideales iniciales de un ideal tórico I_A se corresponden con los vértices de su politopo de estados, hay otro politopo cuyos vértices se corresponden con las triangulaciones regulares de A . La existencia de dicho politopo y la biyección entre sus vértices y las triangulaciones regulares de A se encuentran en la sección 2 de [1]. Supongamos a partir de ahora que I_A es homogéneo respecto a la graduación estándar dada por $deg(x_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

Definición 6.30. El vector GKZ de una triangulación Δ de A es el vector

$$\phi_\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\tau \in \Delta} vol(\tau) \right) \mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n,$$

donde \mathbf{e}_i es el i -ésimo vector de la base estándar de \mathbf{R}^n .

Definición 6.31. Un politopo secundario de A es cualquier politopo tal que su abanico normal es igual al abanico secundario $\mathcal{F}(A)$ de A .

Teorema 6.32. El politopo

$$\Sigma(A) = \text{conv}(\{-\phi_\Delta : \Delta \text{ es triangulación de } A\})$$

es un politopo secundario de A . Además, los vértices de $\Sigma(A)$ son precisamente los vectores $-\phi_\Delta$ con Δ triangulación regular de A .

Demostración. Para probar que $\Sigma(A)$ es un politopo secundario de A vamos a probar que su abanico normal $\mathcal{N}(\Sigma(A))$ es igual a $\mathcal{F}(A)$, abanico secundario de A . Veamos que para cada triangulación regular Δ de A , $-\phi_\Delta$ es un vértice de $\Sigma(A)$ y el cono secundario C_Δ está contenido en $\mathcal{N}_{\Sigma(A)}(-\phi_\Delta)$, cono normal a $-\phi_\Delta$ respecto a $\Sigma(A)$. Esto probará el resultado que buscamos ya que $\mathcal{F}(A)$ es completo.

Dada una triangulación Δ de A y un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$, consideremos la única función lineal a trozos $g_{\omega,\Delta}$ con dominio $P = \text{conv}(A)$, dada por $g_{\omega,\Delta}(\mathbf{a}_i) = \omega_i$ para cada vértice \mathbf{a}_i de Δ , que sea una función lineal afín en cada símplice de Δ . Cuando $\Delta = \Delta_\omega$, el grafo de $g_{\omega,\Delta}$ es la menor envolvente convexa de $P^\omega = \text{conv}(\tilde{A})$, con \tilde{A} definida como en el Algoritmo 6.13.

Sea Δ una triangulación regular de A y sea ω perteneciente al interior relativo de C_Δ . Entonces $\Delta = \Delta_\omega$ y $g_{\omega,\Delta}$ es una función lineal a trozos convexa cuyo grafo contiene o está por debajo de los puntos (\mathbf{a}_i, ω_i) para $i = 1, \dots, n$. Esto implica que

$$g_{\omega,\Delta}(\mathbf{x}) \leq g_{\omega,\Delta'}(\mathbf{x}) \quad (6.4)$$

para todo punto $\mathbf{x} \in P = \text{conv}(A)$, existiendo para cualquier otra triangulación Δ' de A distinta a Δ al menos un punto $\mathbf{x} = \mathbf{a}_i \in \text{vert}(\Delta') \setminus \text{vert}(\Delta)$ para el que se da la desigualdad estricta en (6.4). Por tanto

$$\int_{\mathbf{x} \in P} g_{\omega,\Delta}(\mathbf{x}) \, dx < \int_{\mathbf{x} \in P} g_{\omega,\Delta'}(\mathbf{x}) \, dx \quad (6.5)$$

para toda triangulación Δ' de A distinta a Δ . Evaluando la integral de la izquierda tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x} \in P} g_{\omega,\Delta}(\mathbf{x}) \, dx &= \sum_{\tau \in \Delta} \int_{\mathbf{x} \in \text{conv}(\tau)} g_{\omega,\Delta}(\mathbf{x}) \, dx \\ &= \sum_{\tau \in \Delta} \text{vol}(\tau) \cdot (\text{baricentro de } \text{conv}(g_{\omega,\Delta}(\mathbf{a}_i) : i \in \tau)) \\ &= \sum_{\tau \in \Delta} \text{vol}(\tau) \cdot \frac{1}{d} \sum_{i \in \tau} g_{\omega,\Delta}(\mathbf{a}_i) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \omega_i \sum_{i \in \tau \in \Delta} \text{vol}(\tau) = \frac{1}{d} \omega \cdot \phi_\Delta, \end{aligned}$$

donde $\text{conv}(\tau) = \text{conv}(\{\mathbf{a}_i : i \in \tau\})$. Ya que la misma fórmula se obtiene para Δ' , la fórmula (6.5) implica que $\omega \cdot (-\phi_\Delta) > \omega \cdot (-\phi_{\Delta'})$ para toda triangulación Δ' de A distinta a Δ . Y esto equivale a que $-\phi_\Delta$ es vértice de $\Sigma(A)$ y a que $\text{face}_\omega(\Sigma(A)) = \{-\phi_\Delta\}$. En particular, $\omega \in \mathcal{N}_{\Sigma(A)}(-\phi_\Delta)$, luego $C_\Delta \subseteq \mathcal{N}_{\Sigma(A)}(-\phi_\Delta)$. \square

Corolario 6.33. *Los vértices de $\Sigma(A)$ están en correspondencia biyectiva con las triangulaciones regulares A .*

Demostración. La aplicación Ψ dada por $\Psi(\Delta) = -\phi_\Delta$ está bien definida ya que por la demostración del Teorema 6.32 si Δ es regular, entonces $-\phi_\Delta$ es vértice de $\Sigma(A)$. Ψ es sobreyectiva ya que si ϕ es un vértice de $\Sigma(A)$, entonces existe $\omega \in \mathbf{R}^n$ tal que $\text{face}_\omega(\Sigma(A)) = \{\phi\}$. Luego por la prueba del Teorema 6.32 tenemos que $\phi = -\phi_{\Delta_\omega}$. Veamos que además Ψ es inyectiva. Dadas dos triangulaciones regulares de A , $\Delta = \Delta_\omega$ y Δ' , por la prueba del Teorema 6.32 tenemos que $\omega \cdot (-\phi_\Delta) > \omega \cdot (-\phi_{\Delta'})$ y por tanto $\phi_\Delta \neq \phi_{\Delta'}$. \square

Observación 6.34. *Hemos definido el politopo secundario como el opuesto del dado en [1]. Esto es debido a que la definición de cono normal utilizada en este trabajo, que es la usada en [17], es la opuesta a la utilizada en [1].*

Nota 6.35. *El Teorema 6.29 se puede reescribir en términos del politopo secundario como sigue: El politopo secundario $\Sigma(A)$ es un sumando de Minkowski del politopo de estados $\text{State}(\mathbb{I}_A)$.*

Veamos un ejemplo de politopo secundario.

Ejemplo 6.36 (Continuación de Ejemplos 4.12 y 6.17). *Los cálculos de este ejercicio los realizaremos con SAGE y están detallados en la sección B.3 del Apéndice B. Recordemos que las triangulaciones regulares de A son:*

- $\Delta_1 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$
- $\Delta_2 = \{\{1, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$
- $\Delta_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$
- $\Delta_4 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$
- $\Delta_5 = \{\{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$

Calculamos ahora para cada triangulación su vector GKZ, ϕ_Δ , los cuales son los opuestos a los vértices del politopo secundario de \mathbb{I}_A :

- $\phi_{\Delta_1} = (1, 2, 2, 3, 1)$
- $\phi_{\Delta_2} = (2, 0, 3, 3, 1)$
- $\phi_{\Delta_3} = (3, 0, 2, 1, 3)$
- $\phi_{\Delta_4} = (1, 3, 1, 2, 2)$

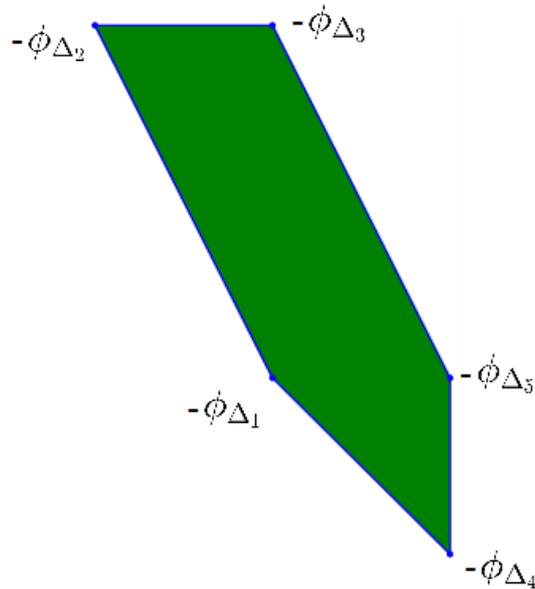


Figura 6.6: Politopo de secundario de I_A .

- $\phi_{\Delta_5} = (2, 2, 1, 1, 3)$

Por tanto, $\Sigma(A) = \text{conv}(-\phi_{\Delta_1}, \dots, \phi_{\Delta_5})$ es el representado en la Figura 6.6.

Comparando la Figura 6.6 con la Figura 4.2, es fácil comprobar que se verifica el Teorema 6.29 y la Observación 6.34.

Observación 6.37. Observemos que aunque el abanico secundario del ejemplo anterior está en \mathbf{R}^5 hemos obtenido una representación en dos dimensiones de su politopo de estados. En general tenemos que si I_A es homogéneo, todos los conos de su abanico secundario (resp. de su abanico de Groebner) contienen al espacio vectorial generado por las filas de A . Por tanto, su politopo secundario (resp. su politopo de estados) debe estar contenido en un espacio lineal afín de dimensión $n - d$ ortogonal al anterior.

Cálculo de ideales tóricos

En esta sección abordamos los aspectos computacionales del cálculo de ideales tóricos. Presentamos dos algoritmos para la obtención de una base de Groebner para dichos ideales, encontrados en los capítulos 4 y 12 de [17].

Algoritmo A.1 (Conti-Traverso). *Dada una matriz A , calculemos una base de Groebner reducida del ideal tórico I_A .*

Primero introducimos $n+d+1$ variables las cuales denotaremos por $t_0, t_1, \dots, t_d, x_1, \dots, x_n$ y fijamos un orden de eliminación, \prec , que verifique que $\{t_i\} \succ \{x_j\}$.

Entrada: $A = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n)$.

Salida: \mathfrak{G} base de Groebner reducida de I_A .

1. Definimos $I = \langle t_0 t_1 \cdots t_d - 1, x_1 \cdot t^{\mathbf{a}_1^-} - t^{\mathbf{a}_1^+}, \dots, x_n \cdot t^{\mathbf{a}_n^-} - t^{\mathbf{a}_n^+} \rangle$.

2. Calculamos la base de Groebner reducida de I respecto a \prec , \mathfrak{G}_\prec .

3. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\prec \cap k[\mathbf{x}]$.

Demostración. Este algoritmo es la aplicación a nuestro caso particular del Teorema 2 de la sección 3.3 de [2], el cual calcula las ecuaciones de la clausura de Zariski de un conjunto de puntos parametrizado racionalmente. \square

Este algoritmo es bastante lento ya que el algoritmo de Buchberger es muy sensible al número de variables involucradas, luego es mejor usar un algoritmo que opere estrictamente en $k[\mathbf{x}]$ en vez de en el anillo de polinomios auxiliar $k[t_0, \dots, t_d, x_1, \dots, x_n]$.

Para describir uno de los algoritmos más rápidos en el cálculo de ideales tóricos introduciremos los siguientes resultados.

Definición A.2. *Sea un polinomio $f \in k[\mathbf{x}]$ y un ideal $J \subset k[\mathbf{x}]$. Llamaremos ideales cocientes a los siguientes ideales de $k[\mathbf{x}]$:*

$$\begin{aligned}(J : f) &= \{g \in k[\mathbf{x}] : fg \in J\}, \\ (J : f^\infty) &= \{g \in k[\mathbf{x}] : f^r g \in J \text{ para algún } r \in \mathbf{N}\}.\end{aligned}$$

Una fórmula básica de los ideales cocientes es

$$(I : fg) = ((I : f) : g).$$

El método general para calcular bases de Groebner de los ideales cocientes se puede encontrar en la Sección 4 del Capítulo 4 de [2]. Pero si J es un ideal homogéneo y $f = x_n$ se obtiene el siguiente resultado.

Lema A.3. *Fijado \prec el orden lexicográfico graduado inverso con $x_1 > \dots > x_n$, y sea $\mathfrak{G}_\prec(J)$ la base de Groebner reducida del ideal homogéneo $J \subset k[\mathbf{x}]$. Entonces el conjunto*

$$\mathfrak{G}' = \{f \in \mathfrak{G}_\prec(J) : x_n \nmid f\} \cup \{f/x_n : f \in \mathfrak{G}_\prec(J) \text{ y } x_n \mid f\}$$

es una base de Groebner de $(J : x_n)$. Una base de Groebner de $(J : x_n^\infty)$ se obtiene dividiendo cada elemento $f \in \mathfrak{G}_\prec(J)$ por la mayor potencia de x_n que divide a f .

Demostración. Vamos a probar que \mathfrak{G}' es una base de Groebner para $(J : x_n)$, la prueba de la obtención de la base de Groebner para $(J : x_n^\infty)$ es análoga. Sea $g \in (J : x_n)$, entonces $in_\prec(x_n g) = x_n in_\prec(g)$ es divisible por $in_\prec(f)$ para algún $f \in \mathfrak{G}_\prec(J)$. Por la elección del orden monomial y dado que f es homogéneo tenemos que $x_n \mid f$ si y solo si $x_n \mid in_\prec(f)$. En este caso tenemos que f/x_n pertenece a \mathfrak{G}' e $in_\prec(f/x_n) \mid in_\prec(g)$. Si $x_n \nmid f$, entonces f pertenece a \mathfrak{G}' e $in_\prec(f) \mid in_\prec(g)$. Es decir, $in_\prec(g)$ pertenece al ideal generado por los términos iniciales de los elementos de \mathfrak{G}' . \square

Nota A.4. *El Lema A.3 puede adaptarse al caso en el que el ideal J es homogéneo respecto a una graduación positiva dada por $\deg(x_i) = d_i > 0$. Basta cambiar el orden monomial escogido por el orden lexicográfico inverso \mathbf{d} -graduado con $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$. Iterando el cálculo de la base de Groebner n veces respecto a los diferentes ordenes lexicográficos graduados inversos, es decir, aplicando el Lema A.3 respecto a cada variable en cada iteración, calculamos una base de Groebner del ideal cociente*

$$(J : (x_1 x_2 \cdots x_n)^\infty) = (((\cdots ((J : x_1^\infty) : x_2^\infty) \cdots) : x_n^\infty).$$

Este ideal consiste en todos los polinomios $f \in k[\mathbf{x}]$ tales que $fm \in J$ para algún monomio m .

A partir de ahora supondremos que la matriz $A \in \mathbf{N}^{d \times n}$ es de rango d y no tiene columnas nulas, por lo que el ideal tórico I_A es homogéneo respecto a una graduación positiva y su región de Groebner es \mathbf{R}^n .

Definición A.5. A cualquier subconjunto \mathcal{C} de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ le asociamos el ideal

$$J_{\mathcal{C}} = \left\langle \mathbf{x}^{\mathbf{v}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}^-} : \mathbf{v} \in \mathcal{C} \right\rangle.$$

Claramente este ideal es también homogéneo respecto a la misma graduación que I_A , ya que $J_{\mathcal{C}} \subseteq I_A$.

Lema A.6. Un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ de cardinal $n - d$ es una \mathbf{Z} -base de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ si y solo si

$$(J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty}) = I_A.$$

Demostración. [12, Lema 3.3.1, capítulo 3]

\Rightarrow Supongamos que \mathcal{C} es una \mathbf{Z} -base de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ y probemos que $(J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty}) = I_A$. Claramente $J_{\mathcal{C}} \subseteq I_A$. Supongamos que $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_r\}$. Sea $\mathbf{u} \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$, entonces $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ para algunos $\lambda_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \dots, r$. Por simplificar supondremos que $\lambda_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, \dots, r$ (en otro caso bastaría reemplazar c_i por $-c_i$ para cada $\lambda_i < 0$). Esto implica que

$$\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+}}{\mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}} - 1 = \prod_{i=1}^r \left(\frac{\mathbf{x}^{c_i^+}}{\mathbf{x}^{c_i^-}} \right)^{\lambda_i} - 1.$$

Quitando denominadores tenemos que

$$\left(\prod_{i=1}^r (\mathbf{x}^{c_i^-})^{\lambda_i} \right) (\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \left(\prod_{i=1}^r (\mathbf{x}^{c_i^+})^{\lambda_i} - \prod_{i=1}^r (\mathbf{x}^{c_i^-})^{\lambda_i} \right).$$

Si demostramos que el lado derecho de esta ecuación pertenece a $J_{\mathcal{C}}$ tendremos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in (J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty})$. Observemos que si $\mathbf{x}^{\mathbf{p}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{p}^-}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{q}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{q}^-}$ pertenecen a un ideal, entonces $\mathbf{x}^{\mathbf{q}^+}(\mathbf{x}^{\mathbf{p}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{p}^-}) + \mathbf{x}^{\mathbf{p}^-}(\mathbf{x}^{\mathbf{q}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{q}^-}) = \mathbf{x}^{\mathbf{q}^+} \mathbf{x}^{\mathbf{p}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{p}^-} \mathbf{x}^{\mathbf{q}^-}$ pertenece al ideal. Aplicando este argumento a $\{\mathbf{x}^{c_i^+} - \mathbf{x}^{c_i^-} : i = 1, \dots, r\} \subseteq J_{\mathcal{C}}$ tenemos que $\prod_{i=1}^r (\mathbf{x}^{c_i^+})^{\lambda_i} - \prod_{i=1}^r (\mathbf{x}^{c_i^-})^{\lambda_i}$ pertenece a $J_{\mathcal{C}}$, y por tanto, $(J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty}) = I_A$.

\Leftarrow Supongamos que $(J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty}) = I_A$. Tenemos que probar ahora que si $\mathbf{u} \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$, entonces $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ para algunos $\lambda_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \dots, r$. Como $\mathbf{u} \in \ker_{\mathbf{Z}}(A)$ tenemos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in I_A = (J_{\mathcal{C}} : (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\infty})$. Entonces existe $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^n$ tal que $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}) \in J_{\mathcal{C}}$. Lo cual demuestra que $\mathbf{u} = (\mathbf{a} + \mathbf{u}^+) - (\mathbf{a} + \mathbf{u}^-)$ es una combinación lineal entera de vectores de \mathcal{C} . \square

Algoritmo A.7 (Hoşten-Sturmfels). *Dada una matriz A , calculemos una base de Groebner reducida del ideal tórico I_A .*

Entrada: $A = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n)$.

Salida: \mathfrak{G} base de Groebner reducida de I_A .

1. Calculamos la \mathbf{Z} -base \mathcal{C} de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$.
2. (Opcional) Reemplazamos \mathcal{C} por otra base \mathcal{C}_{red} que sea reducida en el sentido Lovász ([15, Sección 6.2, Capítulo 6]).
3. Definimos el ideal $J_0 = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{red} \rangle$.
4. Para $i = 1, \dots, n$: Calculamos el ideal $J_i = \langle (J_{i-1} : x_i^\infty) \rangle$ usando el Lema A.3.
5. Calcula la base de Groebner reducida de $J_n = I_A$ respecto al orden deseado.

Demostración. La prueba de la corrección de este algoritmo se debe al Lema A.6. Para el cálculo de la base de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ se puede usar el algoritmo de cálculo de la forma normal de Hermite ([15, Sección 5.3, Capítulo 5]). \square

Veamos como ejemplo una implementación del algoritmo Conti-Traverso en Macaulay2 y luego mostraremos una implementación del algoritmo Hoşten-Sturmfels encontrada en [5], aunque ligeramente modificada.

Algoritmo Conti-Traverso:

```

CTAlg = (A) -> (
-- Introducir la matriz por filas como lista
--  {{ * }, ..., { * }}
-- Devuelve una base de Groebner de  $I_A$ 
n := #A_0;
d := #A;
R := QQ[t_0..t_d, x_1..x_n,
        MonomialOrder=>Eliminate(d+1)];
J := ideal (append(
  apply(n, j ->(
    h = x_(j+1);
    g = 1_R;
    scan(d, i->(
      if A_i_j < 0
      then h = h*(t_(i+1))^( -A_i_j)
      else g = g*(t_(i+1))^( A_i_j)));
    h - g)),
  product(toList (t_0..t_d))-1));
IG := selectInSubring(1, gens gb J);

```

```

S := QQ[x_1..x_n, Degrees =>transpose A];
I := ideal (substitute(IG, S));
gens I)

```

El comando `Eliminate(d+1)` nos define un orden por bloques, uno para las $d+1$ primeras variables y otro bloque para el resto de variables, utilizando en ambos el orden lexicográfico inverso graduado. El comando `selectInSubring(i, M)` nos devuelve una matriz en el mismo anillo de polinomios en el que está definida M , la cual contiene los elementos de M que no dependen de las variables que pertenecen al i -ésimo bloque del orden monomial definido en el anillo de polinomios. Por tanto, cuando el algoritmo llega al sexto paso, aún esta trabajando en el anillo auxiliar $k[t_0, t_1, \dots, t_d, x_1, \dots, x_n]$. Para definir el ideal tórico en $k[x_1, \dots, x_n]$ utilizamos el comando `substitute(IG, S)` el cual nos devuelve el ideal I definido en el anillo de polinomios S y generado por los polinomios de IG . Con el comando `ideal(M)` definimos el ideal generado por los polinomios de las entradas de M . Finalmente para obtener una base de Groebner de I_A usamos el comando `gens I`.

Algoritmo Hoşten-Sturmfels:

```

needsPackage "FourTiTwo";
HSA1g = (A) ->(
-- Introducir la matriz por filas
--  {{ * }, ..., { * }}
-- Devuelve una base de Groebner de  $I_A$ 
n := #(A_0);
R = QQ[x_1..x_n, Degrees=>transpose A];
B := transpose LLL syz matrix A;
J := toBinomial(B, R);
scan(gens R, r ->J = saturate(J, r));
gens gb J)

```

Para calcular una \mathbf{Z} -base de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$ utilizamos el comando `syz(A)`, el comando `LLL` aplicado a la salida de `syz(A)` nos calcula una \mathbf{Z} -base reducida de $\ker_{\mathbf{Z}}(A)$. A continuación con el comando `toBinomial(B, R)` se define el ideal generado por los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in R$, $\forall \mathbf{u} \in B$ donde \mathbf{u} varía entre las filas de B . Después, se calcula el ideal $I_A = (J : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ aplicando sucesivamente n saturaciones con el comando `saturate(J, r)` respecto a x_i en cada iteración. Finalmente para obtener una base de Groebner de I_A usamos el comando `gens gb J`.

Cálculos en SAGE

B.1. Cálculo de bases de Groebner

Veamos los comandos básicos para calcular bases de Groebner de un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ en SAGE. Primero definimos el anillo de polinomios en el que vamos a trabajar con el orden monomial usado con el comando `PolynomialRing()`. El orden por defecto es el orden lexicográfico inverso graduado, si queremos usar otro orden diferente hay que mencionarlo cuando definimos el anillo de polinomios. Después definimos el ideal al que le vamos a calcular la base de Groebner con el comando `ideal()`. Y por último calculamos la base de Groebner con el comando `groebner_basis()`. Los comandos para los órdenes más usados son:

- Lexicográfico: `'lex'`
- Lexicográfico graduado: `'deglex'`
- Lexicográfico inverso graduado: `'degrevlex'`
- Para definir órdenes monomiales ω -graduados:
`TermOrder('wdeglex', ω)`

Calculos del Ejemplo 2.23:

```
sage: R.<x,y>= PolynomialRing(QQ, 2, order='lex')
sage: I=R.ideal([x^2+y^2-3*x+y, x^2*y-2*y^2])
sage: I.groebner_basis()
```

```
[x^2-3*x+y^2+y, x*y-1/3*y^3-y^2, y^5+6*y^4+9*y^3
- 18*y^2]
```

B.2. Cálculo de abanico de Groebner

Veamos los comandos básicos para calcular el abanico de Groebner de un ideal $I \subseteq k[\mathbf{x}]$ en SAGE. Primero definimos el anillo de polinomios en el que vamos a trabajar con el orden monomial usado como en el ejemplo anterior (ya que en el ejemplo calculamos una base de Groebner del ideal respecto a ese orden). Después definimos el ideal al que le vamos a calcular el abanico de Groebner y calculamos una base de Groebner. A continuación calculamos su abanico de Groebner con el comando `groebner_fan()`. Para obtener la intersección del abanico de Groebner con el hiperplano $x + y + z = 1$ y $\mathbf{R}_{\geq 0}^n$ usamos el comando `render()`. Para quitar los ejes de la representación usamos el comando `D.axes(false)`.

Cálculos del Ejemplo 3.28:

```
sage: R.<x,y,z>= PolynomialRing(QQ,3,order='lex')
sage: I=R.ideal([y^2*x-z, z^2-y*x])
sage: I.groebner_basis()
sage: G =I.groebner_fan()
sage: D=G.render()
sage: D.axes(false)
sage: D
```

```
[x*y - z^2, x*z - z^4, y*z^2 - z]
```

Gráfico 2d

Cálculo de una base de Groebner reducida y un vector de peso para cada cono.

```
sage: G.weight_vectors()
sage: G.reduced_groebner_bases()

[(4, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 3), (1, 1, 4)]

[[y*z^2 - z, x*z - z^4, x*y - z^2],
[-x*z + z^4, y*z^2 - z, x*y - z^2],
[-x*y + z^2, x*y^2 - z],
[-x*y^2 + z, x^2*y^4 - x*y]]
```

Hemos comprobado con SAGE que la lista de vectores y la de bases reducidas para cada cono están ordenadas correctamente.

Cálculos del Ejemplo 3.29:

```
sage: R.<x,y,z,w>= PolynomialRing(QQ,4,order='lex')
sage: I=R.ideal([x^2*y-z,y^2*z-x,z^2*x-y])
sage: I.groebner_basis()
sage: G =I.groebner_fan()
sage: D=G.render()
sage: D.axes(false)
sage: D
```

```
[x - z^9, y - z^11, z^15 - z]
```

Gráfico 2d

B.3. Cálculo de politopo secundario

Cálculos del Ejemplo 6.36:

Cálculo de las triangulaciones regulares de A , teniendo en cuenta que SAGE empieza a contar en 0.

```
sage: p = PointConfiguration([[1,0,0],[1,1,0],
                             [1,2,0],[1,0,1],[1,1,1]])
sage: k=list(p.triangulations())
sage: k
[(<0,1,3>, <1,2,3>, <2,3,4>),
 (<0,1,3>, <1,2,4>, <1,3,4>),
 (<0,2,3>, <2,3,4>), (<0,2,4>, <0,3,4>),
 (<0,1,4>, <0,3,4>, <1,2,4>)]
```

Cálculo de los vectores GKZ:

```

sage: L=[]
      for i in range (0,len(k)):
          L=L+[k[i].gkz_phi()]
sage: L
[(1, 2, 2, 3, 1), (1, 3, 1, 2, 2), (2, 0, 3, 3, 1),
(3, 0, 2, 1, 3), (2, 2, 1, 1, 3)]

```

Representación del politopo secundario:

```

sage: h = PointConfiguration([[ -1, -2, -2, -3, -1],
                             [-1, -3, -1, -2, -2], [-2, -0, -3, -3, -1],
                             [-3, -0, -2, -1, -3], [-2, -2, -1, -1, -3]])
sage: H=h.convex_hull()
sage: H.plot(axes=False)

```

Gráfico 2d

Realicemos la comprobación de que el politopo secundario H es un sumando de Minkowski del politopo de estados P calculado en la sección C.1 del Apéndice C.

```

sage: P = Polyhedron(vertices = [[13, 8, 8, 3, 13],
                                 [8, 18, 3, 3, 13], [4, 22, 3, 7, 9],
                                 [3, 22, 4, 9, 7], [13, 3, 13, 8, 8],
                                 [8, 8, 13, 13, 3], [3, 18, 8, 13, 3]])
sage: H = Polyhedron(vertices = [[ -1, -2, -2, -3, -1],
                                 [-1, -3, -1, -2, -2], [-2, -0, -3, -3, -1],
                                 [-3, -0, -2, -1, -3], [-2, -2, -1, -1, -3]])
sage: P.is_Minkowski_summand(H)

```

True

Cálculos en Macaulay2

Para el cálculo de ideales tóricos con Macaulay2 utilizaremos dos comandos básicos ambos incluidos en el paquete FourTiTwo de dicho programa. Primero calculamos los exponentes de un conjunto de generadores minimales del ideal tórico I_A con el comando `toricMarkov(A)`. A continuación construimos I_A con el comando `toBinomial(M,R)`, el cual nos define el ideal generado por los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$, $\forall \mathbf{u} \in M$ en el anillo de polinomios R .

C.1. Cálculo de politopo de estados

Cálculos del Ejemplo 4.12:

```
Macaulay2, version 1.9
with packages:ConwayPolynomials, Elimination,
              IntegralClosure, LLLBases, PrimaryDecomposition,
              ReesAlgebra, TangentCone
i1 : A = matrix"1,1,1,1,1;0,1,2,0,1;0,0,0,1,1";
              3      5
o1 : Matrix ZZ <--- ZZ

i2 : needsPackage "FourTiTwo";
i3 : R=QQ[x_1..x_5];
i4 : M = toricMarkov(A);
              3      5
o4 : Matrix ZZ <--- ZZ
```

```

i5 : I = toBinomial(M,R);
o5 : Ideal of R
i6 : needsPackage "StatePolytope";
i7 : statePolytope(I)
o7 : Lista de vértices del politopo de estados

```

C.2. Cálculo de ideales radicales de ideales iniciales de I_A

Cálculos del Ejemplo 6.17:

```

Macaulay2, version 1.9
with packages:ConwayPolynomials, Elimination,
              IntegralClosure, LLLBases, PrimaryDecomposition,
              ReesAlgebra, TangentCone
i1 : A = matrix"1,1,1,1,1;0,1,2,0,1;0,0,0,1,1";
           3           5
o1 : Matrix ZZ <--- ZZ

i2 : needsPackage "FourTiTwo";
i3 : R=QQ[x_1..x_5];
i4 : M = toricMarkov(A);
           3           5
o4 : Matrix ZZ <--- ZZ
i5 : I = toBinomial(M,R);
o5 : Ideal of R
i6 : needsPackage "gfanInterface";
i7 : (M,G) = gfan I;
i8 : M
o8 : Lista de ideales iniciales
i9 : radM = apply(#M, i ->radical ideal M#i)
o9 : Lista de ideales radicales

```

Cálculos del Ejemplo 6.16:

```

Macaulay2, version 1.9
with packages:ConwayPolynomials, Elimination,

```

C.2. CÁLCULO DE IDEALES RADICALES DE IDEALES INICIALES DE I_A

```
IntegralClosure, LLLBases, PrimaryDecomposition,
ReesAlgebra, TangentCone
i1 : A = matrix"1,1,1;2,1,0;0,1,2";
           3      3
o1 : Matrix ZZ <--- ZZ

i2 : needsPackage "FourTiTwo";
i3 : R=QQ[x_1..x_3];
i4 : M = toricMarkov(A);
           1      3
o4 : Matrix ZZ <--- ZZ
i5 : I = toBinomial(M,R);
o5 : Ideal of R
i6 : needsPackage "gfanInterface";
i7 : (M,G) = gfan I;
i8 : M
o8 : Lista de ideales iniciales
i9 : radM = apply(#M, i ->radical ideal M#i)
o9 : Lista de ideales radicales
```

Bibliografía

- [1] Billera, L.J., Filliman, P., and Sturmfels, Constructions and complexity of secondary polytopes, *Advances in Mathematics*, Vol 83, 155-179, (1990).
- [2] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer, New York, 1992.
- [3] Cox, D., Little, J., O'shea, D., *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.
- [4] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1994.
- [5] Eisenbud, D., Grayson, D.R., Stillman, M., Sturmfels, B., *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay2*, Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 8, Springer, 2000.
- [6] Fukuda, K., Jensen, A.N. y Thomas, R.R., Computing Gröbner fans, *Mathematics of computation*, Vol. 76 (260), 2189-2212, 2007.
- [7] Fulton, W., *Curvas algebraicas*, Editorial Reverté, (1971).
- [8] Fulton, W., *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.
- [9] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., and Zelevinsky, A. V., *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, *Mathematics Theory & Applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1994.
- [10] Grayson, D. R. and Stillman, M. E., *Macaulay 2*, a software system for research in algebraic geometry, Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [11] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

- [12] Maclagan, D., Thomas, R., Faridi, S., Gold, L., Jayanthan, A.V., Khetan, A., Puthenpurakal, T., Computational algebra and combinatorics of toric ideals, in: R.V. Gurjar, et al. (Eds.), Commutative Algebra and Combinatorics, in: Ramanujan Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 4, Ramanujan Mathematical Society, 2007.
- [13] Miller, E., Sturmfels, B., Combinatorial Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.
- [14] Mora, T., Robbiano, L., The Gobner fan of an ideal, J Symbolic Computation, vol 6, 183-208, 1988.
- [15] Schrijver, A., Theory of Linear and Integer Programming, Wiley Interscience, Chichester, 1986.
- [16] Stanley, R., Enumerative Combinatorics, Wadsworth & Brooks, Monterey, CA, 1986.
- [17] Sturmfels, B., Grobner Bases and Convex Polytopes, University Lecture Series, Volume 8, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1996.