



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA

**Formulaciones en el Análisis
Envolvente de Datos (DEA).
Resolución de casos prácticos.**

Autor:

Jaime Alberto Jaime

Tutor:

Pedro Luis Luque Calvo

21 de junio de 2016

Índice general

1	Introducción	7
2	Eficiencia y análisis envolvente de datos	9
2.1	Concepto de eficiencia	9
2.1.1	Eficiencia técnica	10
2.1.2	Eficiencia precio (o asignativa)	11
2.1.3	Eficiencia global (o económica)	12
2.2	Diferencia entre eficiencia (técnica) y productividad	13
2.3	Análisis envolvente de datos (DEA)	14
2.3.1	Concepto intuitivo de envolvente	14
2.3.2	La técnica DEA	23
2.3.3	Definición del conjunto de posibilidades de producción	24
2.4	Caracterización de los modelos DEA	25
2.4.1	Orientación del modelo	26
2.4.2	Tipología de los rendimientos a escala	27
3	Modelo DEA-CCR	29
3.1	Modelo DEA-CCR en forma fraccional	29
3.2	De forma fraccional a multiplicativa	31
3.2.1	Significado de los pesos	36
3.3	Modelo DEA-CCR en forma envolvente	38
3.3.1	Caracterización de la eficiencia y valores holguras	42
3.3.2	“Benchmarking” en DEA. Fijación de referencias para la mejora	44
3.4	Procedimiento alternativo de resolución. Método de dos etapas	47
3.5	Versión output orientado del modelo DEA-CCR	50
4	DEA en R	53
4.1	Modelo DEA-CCR input orientado en forma multiplicativa	54
4.1.1	Planteamiento del problema para todos los concesionarios	54

4.1.2	Resolución del modelo (LP_0) con R	56
4.1.2.1	Resolución del problema primal con Benchmarking	59
4.2	Modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente	60
4.2.1	Planteamiento del problema dual para los concesionarios B y C	60
4.2.2	Resolución del modelo (EP_0) con R	61
4.2.2.1	Resolución del problema dual con Benchmarking	65
4.3	Modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente: Método de dos etapas	67
4.3.1	Planteamiento del problema para los concesionarios A y B	67
4.3.2	Resolución del modelo (EP_0) por el método de dos etapas con R	68
4.4	Modelo DEA-CCR output orientado	71
4.4.1	Resolución del modelo DEA-CCR output orientado en forma multiplicativa	71
4.4.2	Resolución del modelo DEA-CCR output orientado en forma envolvente por el método de dos etapas	74
4.5	Función de resolución general	77
4.5.1	Funciones de cálculos	79
4.5.1.1	El DEA como sistema de evaluación de la eficiencia técnica de las organizaciones del sector público: Aplicación en los equipos de atención primaria	86

Bibliografía

Abstract

The goals we have scored in this project are to measure efficiency through data envelopment analysis (DEA) and in particular we have focused on the DEA-CCR model. And as implement second goal in free software R resolution DEA-CCR model in all its variants.

This project has been divided into 4 chapters which have a theoretical and practical approach.

The first chapter gives a short introduction of this project where a study and measurement of the efficiency of production units or service is done.

In Chapter 2, we give some basic concepts of efficiency and different types of evaluation. Furthermore, the theoretical foundations of the basic models of methodology are discussed, as is the DEA. This chapter aims to provide a simple and applicable overview of the most important concepts.

Chapter 3 is devoted to the DEA-CCR model named for being developed by Charnes, Cooper and Rhodes (1978). The model poses according to their orientation and is written in three different ways. In addition, throughout this chapter, it proposes an example application that eases the comprehension of the DEA.

In the fourth and final chapter, all the problems raised in Chapter 3 with the help of the R tool, a programming language and an implementation of free software are resolved. Finally, we solve a problem that has arisen in real life with the concepts that we have acquired during this project.

Resumen

Los objetivos que hemos marcado en este trabajo es medir la eficiencia a través del Análisis Envolvente de Datos (DEA) y en particular nos hemos centrado en el modelo DEA-CCR. Y como segundo objetivo implementar en el software libre R la resolución del modelo DEA-CCR en todas sus variantes.

Este trabajo se ha dividido en 4 capítulos los cuales tienen un enfoque teórico-práctico.

El primer capítulo, da una pequeña introducción del transcurso del presente trabajo donde se hace un estudio y medición de la eficiencia de unidades productivas o de servicio.

En el capítulo 2, damos unos conceptos básicos sobre la eficiencia y sus diferentes tipos de evaluación. Además, se exponen los fundamentos teóricos de los modelos básicos de una metodología, como es el análisis envolvente de datos (DEA). Este capítulo pretende ofrecer una visión sencilla y aplicable de los conceptos más importantes.

El capítulo 3 está dedicado al modelo DEA-CCR así denominado por haber sido desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (1978). El modelo se plantea según su orientación y se escribe de tres formas diferentes. Además, a lo largo de todo este capítulo, se plantea un ejemplo de aplicación que nos facilita la comprensión del DEA.

En el cuarto y último capítulo, se resuelven todos los problemas planteados en el capítulo 3 con la ayuda de la herramienta R, un lenguaje de programación y una implementación de software libre. Finalmente, resolvemos un problema que ha surgido en la vida real con los conceptos que hemos adquirido durante el trabajo.

Capítulo 1

Introducción

El concepto de eficiencia está relacionado con la economía de recursos. La eficiencia se define como la relación entre los resultados obtenidos (outputs) y los recursos utilizados (inputs). Dado que las empresas suelen producir múltiples outputs a partir de múltiples inputs, la eficiencia será en cualquier caso una magnitud multidimensional. Por ello, cabe preguntarse ¿cómo medir la eficiencia?

Este trabajo tiene un enfoque teórico-práctico. Por una parte se exponen los fundamentos teóricos de los modelos básicos de una metodología que permite contestar a la cuestión anterior, como es el análisis envolvente de datos (DEA). Por otra parte, para la evaluación de la eficiencia, se plantean ejercicios de aplicación de los conceptos que se van abordando.

En el capítulo 2, damos unos conceptos básicos sobre la eficiencia y sus diferentes tipos de evaluación: eficiencia técnica, eficiencia precio y eficiencia global. Se introduce que la evaluación de eficiencia se puede medir mediante problemas de optimización, en particular los modelos DEA. Estos se distinguen, básicamente, por la naturaleza de la medida de eficiencia, la orientación del modelo para calcularla y la tipología de los rendimientos a escala que caracterizan la frontera eficiente.

El capítulo 3 está dedicado al modelo DEA-CCR, así denominado por haber sido desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (1978)[7]. El modelo DEA-CCR proporciona medidas de eficiencia radiales, input u output orientadas y supone convexidad, fuerte eliminación gratuita de input y output y rendimientos constantes a escala.

El modelo DEA-CCR puede escribirse, en términos generales, de tres formas distintas: fraccional (cociente), multiplicativa y envolvente. Este trabajo describe cada una de éstas desde el punto de vista de un modelo input orientado, así como distintos métodos que pueden ser utilizados para obtener la solución óptima del modelo en forma envolvente.

En paralelo al desarrollo teórico, se introduce un sencillo ejemplo de aplicación, que es utilizado a lo largo de todo el capítulo con la intención de aclarar o matizar aquellas cuestiones metodológicas más relevantes. Además, plantearemos el modelo DEA-CCR desde una perspectiva Output, siendo aplicable, casi de forma directa, a estos modelos todo lo comentado para los modelos input orientados.

En el capítulo 4, veremos la resolución de los problemas planteados mediante la herramienta R [11], un lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico, programando una función que tenga como salida las soluciones de los problemas DEA-CCR según el método y su orientación. Además cuenta que se muestra su uso resolviendo los problemas planteados en el capítulo 3, y una aplicación real sobre el mundo sanitario.

Y para finalizar presentamos las conclusiones de este Trabajo de Fin de Grado.

Capítulo 2

Eficiencia y análisis envolvente de datos

2.1. Concepto de eficiencia

El Análisis Envolvente de Datos, DEA, surge como una extensión del trabajo de Farrell (1957) [10], quién proporciona una “medida satisfactoria de eficiencia productiva” que tiene en cuenta todos los inputs (recursos empleados) y muestra como puede ser calculada, ilustrando su método mediante una aplicación a la producción agrícola de Estados Unidos.

En su investigación, Farrell parte de un caso sencillo, el de una empresa que emplea dos inputs para la obtención de un único output, y establece, entre otros, los siguientes supuestos:

1. Las empresas operan bajo condiciones de rendimientos constantes a escala, esto es, que el incremento porcentual del output es igual al incremento porcentual experimentado por los inputs. Este supuesto permite que la tecnología de producción pueda ser representada mediante la isocuanta unidad, que identifica las distintas combinaciones de los dos factores que una empresa perfectamente eficiente podría usar para producir una unidad de output.
2. Isocuanta convexa hacia el origen y con pendiente no positiva, lo que indica que el incremento en el input por unidad de output de un factor implica eficiencia técnica más baja.
3. La función de producción eficiente es conocida.

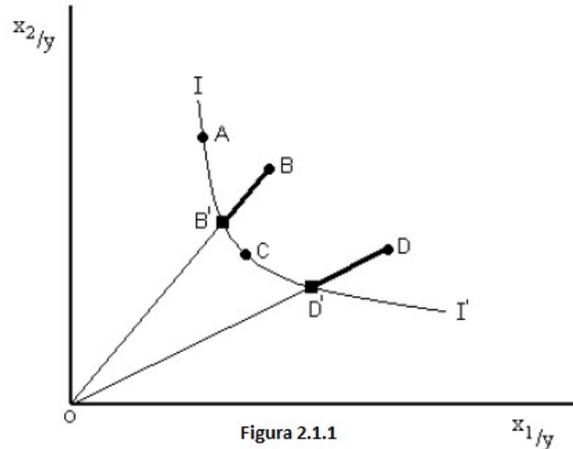
A partir de los supuestos anteriores, Farrell, haciendo uso de la curva isocuanta, comienza definiendo el concepto de eficiencia técnica, y continúa proporcionando una medida de

eficiencia que tome en cuenta el uso de los diversos factores en las mejores proporciones desde el punto de vista de los precios (eficiencia precio) para lo cual emplea una curva isocoste, que muestra todas las combinaciones de inputs que pueden adquirirse a un coste total dado. Una empresa perfectamente eficiente (eficiencia global) será aquella que presente eficiencia técnica y eficiencia precio.

Los conceptos de eficiencia técnica, eficiencia precio y eficiencia global introducidos por Farrell son desarrollados brevemente a continuación.

2.1.1. Eficiencia técnica

Consideremos cuatro unidades: A, B, C y D , cada una de las cuales obtiene un único output (y) empleando para ello dos inputs (x_1, x_2). En la Figura 2.1.1 cada punto (\bullet) representa las coordenadas del “plan de producción” ($x_1/y, x_2/y$) observado para cada una de las referidas unidades. La iscuanta unidad de las unidades eficientes viene representada por la curva II' , de tal modo que aquellas que se encuentran por encima de la misma resultan ineficientes.



Así, la eficiencia técnica, que pone de manifiesto la capacidad que tiene una unidad para obtener el máximo output a partir de un conjunto dado de inputs, se obtiene al comparar el valor observado de cada unidad con el valor óptimo que viene definido por la frontera de producción estimada (isocuantas de eficiencia).

Observando la Figura 2.1.1 puede verse que tanto la unidad B como la D son ineficientes técnicamente, puesto que ambas podrían reducir la cantidad de inputs consumidos y seguir produciendo una unidad de output. La ineficiencia de estas unidades vendrá dada por la

distancia $B'B$ y $D'D$, respectivamente. Por el contrario, las unidades A y C son técnicamente eficientes puesto que operan sobre la isocuenta eficiente.

Numéricamente puede obtenerse la puntuación de eficiencia (relativa) como la relación entre la longitud de la línea desde el origen hasta el punto proyectado sobre la isocuenta eficiente de la unidad considerada y la longitud de la línea que una el origen a la unidad considerada. Así, para B se tiene:

$$\text{Eficiencia Técnica de } B = ET_B = \frac{OB'}{OB}$$

Evidentemente, la eficiencia técnica así definida sólo puede tomar valores comprendidos entre cero y uno. Una puntuación cercana a cero debe entenderse como que la unidad que está siendo evaluada se encuentra muy lejos de la isocuenta eficiente y, en consecuencia, se trata de una unidad muy ineficiente técnicamente. Todo lo contrario sucede si la eficiencia técnica está próxima a uno. Finalmente, una eficiencia técnica de uno indica que la unidad se encuentra sobre la isocuenta eficiente, como es el caso de A y C .

De manera análoga a como se procedió con la unidad B , la eficiencia técnica para la unidad D vendrá dada por $ET_D = \frac{OD'}{OD}$.

2.1.2. Eficiencia precio (o asignativa)

La eficiencia precio (o asignativa) se refiere a la capacidad de la unidad para usar los distintos inputs en proporciones óptimas dados sus precios relativos. Siguiendo con el planteamiento del epígrafe anterior, en la Figura 2.1.2 se muestra la línea de isocoste PP' . La pendiente de la isocoste representa la relación entre los precios de los inputs x_1 y x_2 .

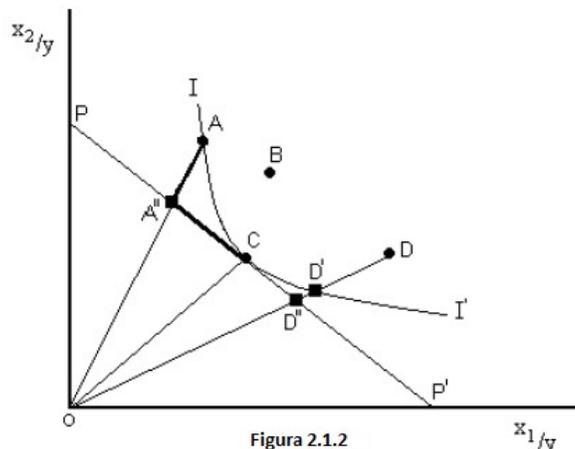


Figura 2.1.2

Las unidades A y C presentan eficiencia técnica puesto que operan sobre la isocuanta eficiente. Sin embargo, como puede observarse en la Figura 2.1.2, únicamente la unidad C resulta ser también eficiente en precios, en tanto que la unidad A debería reducir los costes totales en la distancia $A''A$ o, alternativamente, en la proporción $\left(\left[1 - \frac{OA''}{OA} \right] \cdot 100 \right)$, para ser eficiente en precio.

La puntuación de eficiencia precio (o asignativa) puede obtenerse como la relación entre la longitud de la línea desde el origen hasta el punto proyectado sobre la isocoste eficiente de la unidad considerada y la longitud de la línea que une el origen al punto proyectado sobre la isocuanta eficiente de la unidad considerada. Así, para la unidad A se tiene que la eficiencia precio vendrá dada por:

$$\text{Eficiencia Precio de } A = EP_A = \frac{OA''}{OA}$$

El indicador que se acaba de definir con objeto de proporcionar una medida de la eficiencia precio puede tomar valores comprendidos entre cero y uno, de manera que si la puntuación de eficiencia precio es distinta de uno se dice que la unidad considerada es ineficiente en precio.

2.1.3. Eficiencia global (o económica)

Para una unidad dada, la eficiencia global, también llamada eficiencia económica, se obtiene mediante el cociente entre la longitud de la línea que va desde el origen hasta el punto proyectado sobre la isocoste eficiente y la longitud de la línea que va desde el origen hasta el punto de la unidad considerada.

Así, la eficiencia global de la unidad D (véase Figura 2.1.2) vendrá dada por:

$$\text{Eficiencia Global de } D = EG_D = \frac{OD''}{OD}$$

Continuando con esta misma unidad, Farrell(1957) descompuso la eficiencia global de la siguiente forma:

$$EG_D = \frac{OD''}{OD} = \frac{OD'}{OD} \cdot \frac{OD''}{OD'}$$

es decir, la eficiencia global (EG) es igual al producto de la eficiencia técnica (ET), $\frac{OD'}{OD}$, y la eficiencia precio (EP), $\frac{OD''}{OD'}$, y como sucedía con éstas, su valor estará comprendido entre cero

y uno. Como puede comprobarse viendo la Figura 2.1.2, sólo la unidad C muestra eficiencia técnica y eficiencia precio siendo, en consecuencia, la única unidad globalmente eficiente.

2.2. Diferencia entre eficiencia (técnica) y productividad

Se ha visto como la eficiencia global puede ser descompuesta en eficiencia técnica y eficiencia precio. La mayor parte de los trabajos que recurren al Análisis Envolvente de Datos (DEA) como metodología de análisis se han centrado en la evaluación de la eficiencia técnica, siendo mucho más reducido el número de estudios que abordan la medición de la eficiencia asignativa, dada la dificultad adicional que supone el conocimiento de los precios de los inputs y outputs.

No obstante, antes de continuar, es conveniente diferenciar entre dos términos, productividad y eficiencia (técnica), habitualmente usados como sinónimos. Cuando se habla de productividad, normalmente se hace referencia al concepto de productividad media de un factor, es decir, al número de unidades de output producidas por cada unidad empleada del factor.

Supóngase un proceso productivo que emplea un único input en cantidad x para producir un único output en cantidad y . En la Figura 2.2 se han representado tres unidades (A, B y C) y la frontera de producción que representa el máximo output alcanzable para cada nivel de input, y refleja el estado actual de la tecnología en la industria (Coelli, Prasada Rao y Battese, 1998)[8].

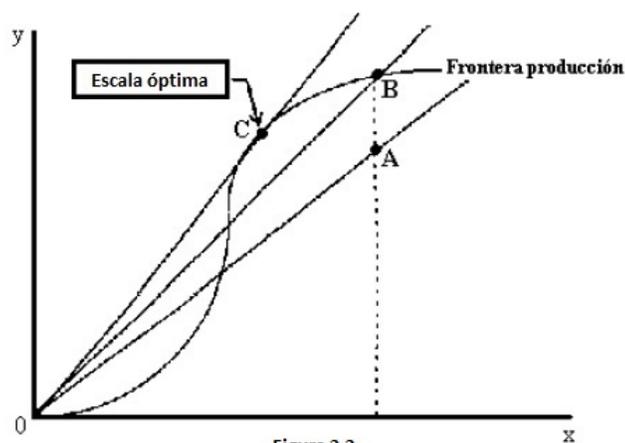


Figura 2.2

Según la ilustración anterior reproducida en la Figura 2.2, las unidades B y C son técnicamente eficientes puesto que operan sobre la frontera, en tanto que la A es ineficiente al situarse por debajo de ésta. Por otro lado, la productividad de una unidad, entendida como producto medio

(productividad media de un factor), se mide como la pendiente de la línea recta desde el origen hasta el punto que lo representa. Ahora la unidad A podría ganar eficiencia y productividad al moverse hacia el punto representado por la B , mientras que ésta última, técnicamente eficiente, podría ganar productividad si se moviese hacia el punto que representa a la unidad C , el de máxima productividad, el punto de escala óptima.

Puede decirse, como conclusión, que una empresa puede ser técnicamente eficiente pero todavía ser capaz de mejorar su productividad al explorar economías de escala.

2.3. Análisis envolvente de datos (DEA)

Farrell supuso que la frontera de producción era conocida. Sin embargo, en la práctica no es así y, por tanto, resulta necesario estimarla.

Con carácter general, los métodos de estimación para construir la frontera de producción pueden clasificarse, en función de que se requiera o no especificar una forma funcional que relacione los inputs con los outputs, en métodos paramétricos o no-paramétricos. A su vez, pueden emplearse métodos estadísticos o no para estimar la frontera que, en última instancia, puede ser especificada como estocástica (aleatoria) o determinista.

El Análisis Envolvente de Datos (DEA) es una técnica no-paramétrica, determinista, que recurre a la programación matemática.

2.3.1. Concepto intuitivo de envolvente

Para establecer el concepto de envolvente de una manera intuitiva planteamos tres casos.

- **Caso 1. Un Input y un Output.**

Partiendo de un conjunto de n unidades, cada una de las cuales produce un único output (y) usando un único input (x), puede obtenerse un indicador de eficiencia para cada una de las n unidades consideradas (cociente entre el output y el input) y realizar, a partir de las puntuaciones obtenidas, una clasificación de eficiencia. Así, la unidad más eficiente será aquella cuyo cociente sea mayor. Evidentemente también se podrá comparar las unidades y determinar la eficiencia relativa de éstas respecto de las calificadas como más eficientes.

Ejemplo 2.1. *Si las ventas (output) y la plantilla de trabajadores (input) de cuatro de las filiales de un gran grupo empresarial son:*

<i>Filial</i>	<i>Ventas (miles de euro)</i>	<i>Plantilla (nº de empleados)</i>
A	1.391.280	1.870
B	1.329.848	1.346
C	1.079.680	1.120
D	1.079.680	1.120

(2.1)

Una manera habitual de medir la eficiencia es a través de la productividad, es decir, ventas por empleados, beneficio por empleado, rentabilidad de la inversión, etc. Así, en nuestro caso, la filial D sería la más eficiente, puesto que la razón ventas por empleados es la más alta, $\frac{1.400.000}{1.120} = 1.250$.

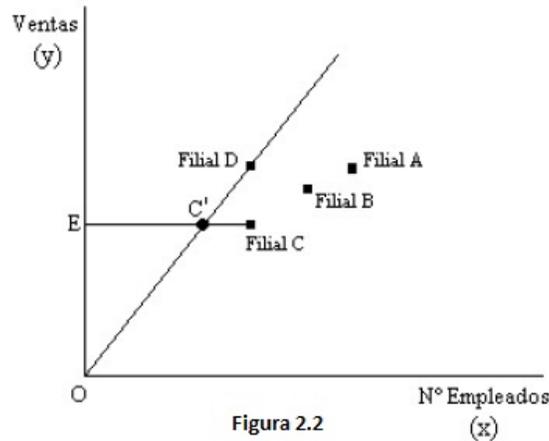
La eficiencia de cada una de las filiales podría ser evaluada en relación con la de la filial D, de tal forma que esta medida de eficiencia relativa tomaría valores entre 0 y 1, tal y como muestra la siguiente tabla:

<i>Filial</i>	<i>Ventas/Empleados</i>	<i>Evaluacion respecto Filial D</i>	<i>Eficiencia relativa</i>
A	744	744/1.250	0,5952
B	988	988/1.250	0,7904
C	964	964/1.250	0,7712
D	1.250	1.250/1.250	1

(2.2)

Análogamente, si se representan gráficamente los planes de producción de las unidades puede determinarse, de manera muy sencilla, cuáles son aquellas que muestran una mejor práctica y conforman, por tanto, la frontera eficiente. Seguidamente, la evaluación de las restantes unidades se efectúa respecto a la frontera definida, obteniéndose así una medida de eficiencia relativa.

Ejemplo 2.2. En la Figura 2.2 se ha representado los datos recogidos en la tabla (2.1) relativos a las cuatro filiales de un grupo empresarial.



La recta que parte del origen O y pasa por el punto que representa a la filial D constituye el mayor rendimiento que puede ser alcanzado, suponiendo rendimientos constantes a escala. Esta recta determina, en el caso que se está analizando, la frontera eficiente y, como se comentó anteriormente, la eficiencia (relativa) del resto de filiales vendrá dada por la desviación respecto a la misma.

Siguiendo con el ejemplo, y como puede verse en la Figura 2.2, la eficiencia técnica de la Filial C vendrá dada por:

$$\text{Eficiencia Técnica de } C = ET_C = \frac{EC'}{EC}$$

es decir, la eficiencia (relativa) técnica de la filial C se obtiene como el cociente entre la distancia (euclídea) entre EC' y la distancia EC ; pero para ellos es necesario determinar las coordenadas del punto C' . En la Figura 2.2 puede ver cómo las coordenadas de C' se corresponden con las de aquél punto en donde se intersectan las rectas que pasan por los puntos EC y OD , respectivamente; y que son:

- Recta que pasa por los puntos E y C : $y = 1.079.680$
- Recta que pasa por los puntos O y D : $y = 1.250x$

Por tanto, las coordenadas del punto C' son $(863, 744; 1.079.680)$. Así, la eficiencia técnica de la unidad evaluada será:

$$ET_C = \frac{EC'}{EC} = \frac{d(E, C')}{d(E, C)} = \frac{\sqrt{(863, 744 - 0)^2 + (1.079.680 - 1.079.680)^2}}{\sqrt{(1.120 - 0)^2 + (1.079.680 - 1.079.680)^2}} = \frac{863, 744}{1.120}$$

$$ET_c = \frac{EC'}{EC} = 0.7712 \text{ (o el } 77,12\% \text{)}$$

que como puede comprobar es, evidentemente, la misma que la reflejada en la tabla (2.2). Alternativamente, podría decirse que la ineficiencia técnica de la filial C es del 22,88 %.

Procediendo de forma análoga a como se ha hecho con la filial C se obtendrían las puntuaciones de eficiencia técnica para el resto de las filiales de este grupo empresarial.

■ **Caso 2. Un Input y dos Outputs.**

Supóngase que el conjunto de n unidades producen dos outputs (y_1, y_2) empleando un único input (x) . En este caso podría considerarse, para cada unidad, el output producido por unidad input, es decir, los cocientes: y_1/x , y_2/x . Ahora, la evaluación de la eficiencia resulta un poco más compleja, puesto que una unidad puede presentar el menos comportamiento en la relación y_1/x y no suceder lo mismo con la relación y_2/x , en la que el mejor rendimiento lo presenta una unidad distinta a aquella. Entonces, ¿cómo plantear la situación general del caso?, ¿cómo puede obtenerse la puntuación de eficiencia técnica de cada una de las n unidades consideradas? En la siguiente aplicación se abordan estas cuestiones.

Ejemplo 2.3. *Considérese que el propietario de 6 concesionarios de automóviles desea evaluar su eficiencia y que para ello decide recurrir a las siguientes variables:*

- *Output: Número mensual de vehículos vendidos (y_1) y Número de órdenes de trabajo recibidas mensuales en taller (y_2).*
- *Input: Número de empleados en el concesionario (x).*

Los datos (hipotéticos) de los que dispone son los reflejados en la siguiente tabla.

<i>Concesionario (unidad)</i>	<i>Nº Empleados (x)</i>	<i>Venta Vehículos (y_1)</i>	<i>Órdenes trabajo taller (y_2)</i>
A	10	15	40
B	14	28	42
C	16	24	48
D	16	40	16
E	10	35	30
F	20	40	30

(2.3)

Ahora, tal y como se ha comentado, pueden considerarse dos índices: Venta de vehículos por empleado (y_1/x) y Órdenes de trabajo por empleado (y_2/x). Los resultados obtenidos al generar estos índices son los que se muestran a continuación:

<i>Concesionario (unidad)</i>	<i>Venta Vehículos por empleados (y_1/x)</i>	<i>Órdenes trabajo taller por empleados (y_2/x)</i>
A	1,5	4
B	2	3
C	1,5	3
D	2,5	1
E	3,5	3
F	2	1,5

(2.4)

Como puede comprobarse en la tabla (2.4), el concesionario E es el que obtiene el mayor rendimiento en lo referente a ventas de vehículos por empleado pero no en lo relativo a órdenes de trabajo en taller por ejemplo. En este último aspecto el mejor desempeño corresponde al concesionario A.

En la Figura 2.3 se han representado los datos contenidos en la tabla anterior. El concesionario A es el más eficiente en la obtención del output y_2 , en tanto que el concesionario E lo es en el output y_1 .

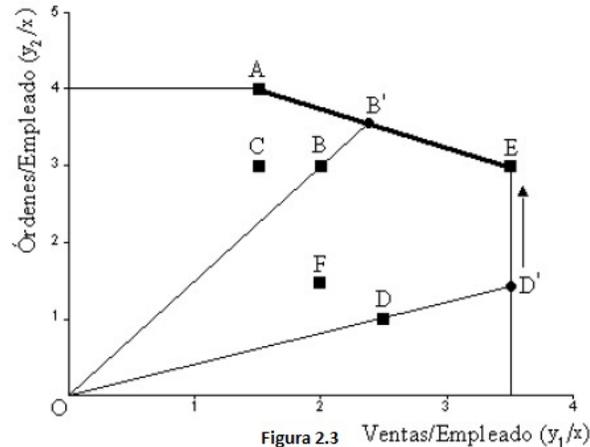


Figura 2.3

El segmento que une los concesionario A y E, y que representa puntos alcanzables, constituye la denominada frontera eficiente. Ningún concesionario, real o ficticio, situado sobre la frontera eficiente puede, dado el nivel de inputs (Número de empleados), mejorar uno de sus outputs sin empeorar el otro.

Los concesionarios A y E son eficientes técnicamente, es decir: $ET_A = 1$ y $ET_E = 1$.

En general, dibujando una línea quebrada que una todas las unidades eficientes y prolongándola de forma paralela a los ejes se obtiene la frontera de posibilidades de producción (FPP), es

decir, el límite entre los niveles de producción alcanzables e inalcanzables; por lo que no debe confundirse la FPP con la frontera eficiente; en el ejemplo determinada por los concesionarios A y E.

Los concesionarios (unidades) que permanecen por debajo de la frontera eficiente, que envuelve a aquellos, son calificados como concesionarios (unidades) ineficientes técnicamente. La puntuación de eficiencia (relativa) de estas unidades ineficientes puede obtenerse como la relación entre la longitud de la línea desde el origen hasta la unidad considerada y la longitud de la línea que une el origen con el punto proyectado sobre la frontera eficiente. Así, por ejemplo, en el caso del concesionario B se tendría (ver Figura 2.3):

$$\text{Eficiencia Técnica concesionario B} = ET_B = \frac{EB}{EB'}$$

Es decir, la eficiencia técnica del concesionario B es el cociente entre la distancia del punto O al punto B y la distancia del punto O al punto B'. Así, para calcular la eficiencia de B es necesario conocer las coordenadas del punto B', que se corresponderá con la intersección entre la recta que pasa por los puntos A y E y la recta que pasa por los puntos O y B.

-Recta que pasa por los puntos A y E: $y = 4,75 - 0,5x$

-Recta que pasa por los puntos O y B: $y = 1,5x$

En consecuencia, las coordenadas de B' serán (2,375; 3,5625) y la eficiencia técnica de B:

$$ET_B = \frac{OB}{OB'} = \frac{d(O, B)}{d(O, B')} = \frac{\sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2}}{\sqrt{(2,375-0)^2 + (3,5625-0)^2}} = 0,84210526 \approx 0,8421$$

La eficiencia del concesionario B es del 84,21 % o, alternativamente, la ineficiencia es del 15,79 %; lo que equivale a decir que el concesionario B, para ser eficiente debería incrementar, dado su número de empleados, un 15,79 % las ventas de vehículo y las órdenes de trabajo de taller. Operando de forma análoga a como se ha hecho con la unidad B, se obtendrían las puntuaciones de eficiencia técnica (relativa) del resto de concesionarios.

<i>Concesionario (unidad)</i>	<i>Eficiencia técnica (relativa) en %</i>
<i>A</i>	<i>100</i>
<i>B</i>	<i>84,21</i>
<i>C</i>	<i>78,95</i>
<i>D</i>	<i>71,43</i>
<i>E</i>	<i>100</i>
<i>F</i>	<i>57,14</i>

(2.5)

No obstante, y aunque esta cuestión será tratada en el capítulo 3, cabe destacar casos como los de las unidades *D* y *F*. Así, el concesionario *D*, para llegar a convertirse en un concesionario eficiente, debería incrementar sus niveles de output un 28,57%, dado que su eficiencia técnica se sitúa en el 71,43% (ver tabla (2.5)). Sin embargo, y como puede observar en la Figura 2.3, aún podría incrementar de forma adicional el número de órdenes de trabajo de taller (output y_2) en 25,6 órdenes aproximadamente. Esto es lo que se llamará Valor holgura.

■ Caso 3. Dos Inputs y un Output.

Finalmente, supóngase que un conjunto de n unidades obtiene, a partir de dos inputs (x_1, x_2) , un único output (y) . De forma similar a como se actuó en el caso anterior, ahora para cada unidad puede considerarse el input consumido por unidad de output, es decir, los cocientes: $x_1/y, x_2/y$. Nuevamente, las preguntas básicas que pueden formularse son: ¿cómo plantear la situación general del caso? y ¿cómo puede obtenerse la puntuación de eficiencia técnica de cada una de las n unidades consideradas? El siguiente ejemplo de aplicación trata de dar respuesta a las preguntas anteriores.

Ejemplo 2.4. *El propietario de los 6 concesionarios de automóviles al que se aludió en el ejemplo 2.3 desea evaluar nuevamente la eficiencia de los mismos, pero en esta ocasión considerando las variables:*

- *Input: Número de empleados (x_1) y Capital, aproximado a través de la Amortización (x_2).*
- *Output: Importe de ventas netas (y).*

Considerar que la información disponible acerca de las variables input/output a las que recurre el propietario para analizar la eficiencia de sus concesionarios es la siguiente:

Concesionario (unidad)	Nº Empleados (x_1)	Amortización (x_2)	Ventas netas (y)
A	10	7,5	15
B	14	15	20
C	16	11,2	16
D	16	12,5	25
E	10	18	30
F	20	7	28

(2.6)

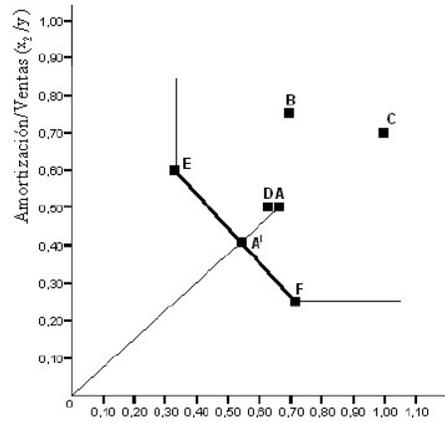
En esta situación, el propietario de los concesionarios puede considerar los índices: Número de empleados/Ventas netas (x_1/y) y Amortización/Ventas netas (x_2/y):

Concesionario (unidad)	Empleados/Ventas neta (x_1/y)	Amortización/Ventas neta (x_2/y)
A	0,666666667	0,5
B	0,7	0,75
C	1	0,7
D	0,64	0,5
E	0,333333333	0,6
F	0,714285714	0,25

(2.7)

A partir de la información contenida en la tabla (2.7), puede verse como el concesionario E es el que menos empleados utiliza para obtener una unidad de output, en tanto que el concesionario F es el que utiliza la menor cantidad de Capital (Amortización). Así pues, los concesionarios E y F serán los concesionarios calificados como eficientes.

En la Figura 2.4, en la que se han representado los datos recogidos en la tabla (2.7), se observa como la frontera eficiente viene determinada por el segmento EF. Ninguna unidad, real o ficticia, situada sobre la frontera eficiente puede disminuir el consumo de uno de sus inputs sin incrementar el del otro. La frontera de posibilidades de producción estará constituida por la frontera eficiente y las prolongaciones paralelas a los ejes.

Figura 2.4 Empleados/Ventas (x_1/y)

De nuevo remarcar que todas aquellas unidades (concesionarios) situadas, en este caso, por encima de la frontera serán calificadas como unidades ineficientes (técnicamente); siendo éstas "envueltas" por la frontera eficiente.

Como se ha dicho, los concesionarios E y F son eficientes ($ET_E = 1$; $ET_F = 1$) pero ¿cuál es la puntuación de eficiencia (o de ineficiencia) del resto de concesionarios?

Tómese como ejemplo el concesionario A. La eficiencia técnica de A vendrá dada por:

$$ET_A = \frac{OA'}{OA} = \frac{d(O, A')}{d(O, A)}$$

Las coordenadas de A' serán las de la intersección entre la recta que pasa por E y F y la recta que pasa por los puntos O y A.

- Recta que pasa por los puntos E y F: $y = 1 - x$ - Recta que pasa por los puntos O y A: $y = 0,5x$

luego las coordenadas de A' son $(1/1,5; 0,5/1,5)$. Por tanto, la puntuación de eficiencia técnica del concesionario A será:

$$ET_A = \frac{d(O, A')}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{(1/1,5 - 0)^2 + (0,5/1,5 - 0)^2}}{\sqrt{(1 - 0)^2 + (0,5 - 0)^2}} = 0,66666 \approx 0,6667$$

es decir, para llegar a convertirse en eficiente, el concesionario A debería reducir, dado su volumen de Ventas netas, el consumo de factores productivos en torno a un 33,33%.

Operando de forma análoga a como se ha hecho con la unidad A, se obtendrían las puntuaciones de eficiencia técnica (relativa) del resto de concesionarios.

<i>Concesionario</i> <i>(unidad)</i>	<i>Eficiencia técnica</i> <i>(relativa) en %</i>
<i>A</i>	<i>66,67</i>
<i>B</i>	<i>68,97</i>
<i>C</i>	<i>58,82</i>
<i>D</i>	<i>90,91</i>
<i>E</i>	<i>100</i>
<i>F</i>	<i>100</i>

(2.8)

2.3.2. La técnica DEA

Evidentemente, los tres casos descritos anteriormente deben ser extendidos para tener en cuenta situaciones mucho más realistas puesto que, salvo muy raras excepciones, las unidades (empresa, personas, etc) objeto de análisis producirán varios outputs a partir de varios inputs. Llegado a este punto, debe quedar claro que la selección de las variables input/output es una cuestión de vital importancia a la hora de evaluar la eficiencia de un conjunto de unidades. Por tanto, decidir qué inputs y outputs son considerados en el análisis no es un tema de poca importancia.

La metodología DEA surge a raíz de la tesis doctoral de Rhodes (1978) [12] y puede considerarse como una extensión del trabajo de Farrell (1957) [10]. Básicamente, DEA es una técnica de programación matemática que permite la construcción de una superficie envolvente, frontera eficiente o función de producción empírica, a partir de los datos disponibles del conjunto de unidades objeto de estudio, de forma que las unidades que determinan la envolvente son denominadas unidades eficientes y aquellas que no pertenecen a la misma son consideradas unidades ineficientes. DEA permite la evaluación de la eficiencia relativa de cada una de las unidades.

Desde que fuera publicado en la revista *European Journal of Operational Research* por Charnes, Cooper y Rhodes en el año 1978 [7] el primer trabajo basado en DEA, el desarrollo de esta metodología, tanto en el ámbito teórico como en el de la aplicación empírica a problemas del mundo real, puede ser calificado como espectacular.

En principio los modelos DEA fueron empleados para evaluar la eficiencia relativa de organizaciones sin ánimo de lucro, con el tiempo, y dada la naturaleza interdisciplinaria de la metodología DEA, su uso se extendió rápidamente al análisis del rendimiento en organizaciones lucrativas. Así, pueden encontrarse multitud de trabajos en los más diversos ámbitos: sector

bancario, seguros, educación, hospitales, política, software, industria, agricultura, turismo, etc.

2.3.3. Definición del conjunto de posibilidades de producción

Siguiendo a Thanassoulis (2001) [17], la medida de la eficiencia de una unidad mediante la técnica DEA implica dos pasos básicos:

1. La construcción del conjunto de posibilidades de producción.
2. La estimación de la máxima expansión factible del output o de la máxima contracción de los inputs de la unidad dentro del conjuntos de posibilidades de producción.

Como se ha comentado anteriormente, no debe confundirse la frontera de posibilidades de producción con la frontera eficiente o de mejor práctica (observada). El interés ahora se centra en determinar, a partir de los datos observados, el conjunto de procesos productivos que se consideran factibles. En este sentido, la forma más fácil de describir los planes de producción factibles es enumerarlos, es decir, enumerar todas las combinaciones de factores y de productos tecnológicamente factibles. El conjunto de todas estas combinaciones se denomina conjunto de producción.

Así, el conjunto de posibilidades de producción puede definirse como el conjunto de procesos productivos tecnológicamente factibles. Puesto que la tecnología no es conocida, la construcción del conjunto de posibilidades de producción (CPP) se realizará a partir de las combinaciones input-output observadas, siendo necesario establecer ciertos supuestos en relación con aquella.

Supóngase un proceso productivo que emplea niveles de inputs $x \in \mathbb{R}_+^m$ para producir niveles output $y \in \mathbb{R}_+^s$.

Las características de $P = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}_+^m \text{ puede producir } y \in \mathbb{R}_+^s\}$, conjunto de procesos productivos que definen el CPP son:

1. Es tecnológicamente posible no producir nada, $(0, 0) \in P$.
2. Convexidad: si dos procesos productivos pertenecen al CPP, todas sus combinaciones lineales convexas también pertenecen al CPP. Es decir, si $(x, y), (x', y') \in P$, $\alpha \in [0, 1]$ entonces $\alpha(x, y) + (1 - \alpha)(x', y') \in P$.

3. Eliminación gratuita de inputs: la versión estricta de este supuesto establece que una unidad productiva es capaz de producir la misma cantidad de output utilizando una cantidad mayor de cualquier input. Es decir, es posible desechar el exceso de inputs a coste cero: si $(x, y) \in P$, $x' \geq x$ entonces $(x', y) \in P$. Su versión débil establece que es posible mantener el nivel de producción, siempre que se produce un incremento equiproporcional en la cantidad empleada de todos los inputs: si $(x, y) \in P$ entonces $(\alpha x, y) \in P$, $\alpha \geq 1$.
4. Eliminación gratuita de outputs: es posible producir una cantidad menor de cualquier output utilizando las mismas cantidades de input. Si $(x, y) \in P$, $y' \leq y$ entonces $(x, y') \in P$. La versión débil de esta propiedad establece que es posible reducir equiproporcionalmente todos los outputs, utilizando el mismo vector de inputs. Si $(x, y) \in P$ entonces $(x, y\alpha^{-1}) \in P$, $\alpha \geq 1$.
5. Rendimientos a escala constantes: es posible reescalar la actividad de cualquier proceso productivo perteneciente a P . Es decir, si $(x, y) \in P$ entonces $(\alpha x, \alpha y) \in P$, $\forall \alpha \geq 0$.

Los supuestos 1 y 2 equivalen a decir que la producción ineficiente es posible.

2.4. Caracterización de los modelos DEA

Los modelos DEA pueden ser clasificados en función de:

- a) El tipo de medida de eficiencia que proporcionan: modelos radiales y no radiales.
- b) La orientación del modelo: input orientado, output orientado o input-output orientado.
- c) La tipología de los rendimientos a escala que caracterizan la tecnología de producción, entendida ésta como la forma (procedimientos técnicos) en que los factores productivos (inputs) son combinados para obtener un conjunto de productos (outputs), de tal forma que esa combinación de factores puede caracterizarse por la existencia de rendimientos a escala: constantes o variables a escala.

En cuanto al primer aspecto, los modelos DEA que van a ser estudiados para evaluar la eficiencia, proporcionan medidas de eficiencia de tipo radial (proporcional). Por lo que respecta a las otras dos cuestiones, seguidamente son tratadas con mayor detalle.

2.4.1. Orientación del modelo

Siguiendo a Chanes, Cooper y Rhodes (1981)[6], la eficiencia puede ser caracterizada con relación a dos orientaciones (o direcciones) básicas, pudiendo hacer referencia a modelos:

1. Input orientados: buscan, dado el nivel de outputs, la máxima reducción proporcional en el vector de inputs mientras permanece en la frontera de posibilidades de producción. Una unidad no es eficiente si es posible disminuir cualquier input sin alterar sus outputs.
2. Output orientados: buscan, dado el nivel de inputs, el máximo incremento proporcional de los outputs permaneciendo dentro de la frontera de posibilidades de producción. En este sentido una unidad no puede ser caracterizada como eficiente si es posible incrementar cualquier output sin incrementar ningún input y sin disminuir ningún otro output.

Teniendo en cuenta las orientaciones definidas, una unidad será considerada eficiente si, y solo si, no es posible incrementar las cantidades de output manteniendo fijas las cantidades de inputs utilizadas ni es posible disminuir las cantidades de inputs empleadas sin alterar las cantidades de outputs obtenidas (Charnes, Cooper y Rhodes, 1981)[6].

En la Figura 2.4.1 se ha representado, bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala, el caso de un único input y un único output, y en ella puede verse como la unidad A es ineficiente técnicamente, se sitúa por debajo de la frontera.

Desde el punto de vista de un modelo input orientado, la unidad A podría reducir la cantidad de input x (los inputs son controlables) y seguir produciendo la misma cantidad de output y , es decir, la unidad A debería tomar como referencia la mejor práctica de la unidad A_1 . La eficiencia (técnica) de la unidad considerada vendría dada por: $ET_A = \frac{BA_1}{BA}$.

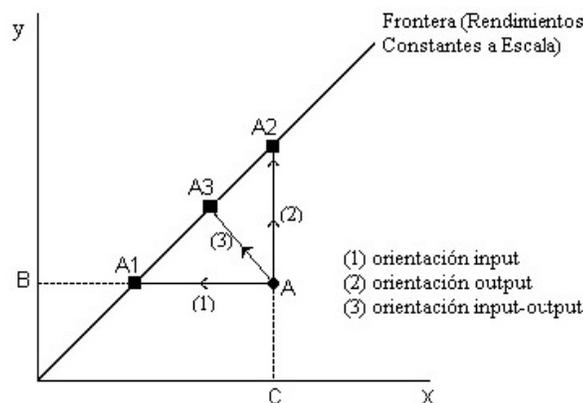


Figura 2.4.1

De igual forma, al considerar la evaluación de la eficiencia a través de modelos outputs orientados (los output son controlables), la unidad A sería calificada como ineficiente. Esta unidad podría, consumiendo la misma cantidad de input, producir una mayor cantidad de output. En este caso, la eficiencia de la unidad A vendría dada por el cociente $ET_A = \frac{CA}{CA_2}$.

Bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala, las medidas de eficiencia técnica input y output orientadas coinciden.

Como puede observarse en la Figura 2.4.1 cabe la posibilidad de considerar una tercera opción, correspondiente a los denominados modelos no orientados (también llamados input-output orientados), en los que tanto inputs como outputs son controlables, que buscan simultáneamente la reducción input y expansión output equiproporcional y que dan lugar a medidas de eficiencia “hiperbólica”. En este caso se mide la “distancia hacia la frontera a lo largo de la hipérbola que pasa por el proceso productivo” que representa a la unidad evaluada.

2.4.2. Tipología de los rendimientos a escala

Para evaluar la eficiencia de un conjunto de unidades es necesario identificar la tipología de los rendimientos a escala que caracteriza la tecnología de producción.

Los rendimientos a escala, que indican los incrementos de la producción que son resultado del incremento de todos los factores de producción en el mismo porcentaje, pueden ser constantes, crecientes o decrecientes:

1. Rendimientos constantes a escala: cuando el incremento porcentual del Output es igual al incremento porcentual de los recursos productivos.
2. Rendimientos crecientes a escala (o economías de escala): se dice que la tecnología exhibe este tipo de rendimientos cuando el incremento porcentual del output es mayor que el incremento porcentual de los factores.
3. Rendimientos decrecientes a escala (o deseconomías de escala): cuando el incremento porcentual del output es menor que el incremento porcentual de los inputs.

Matemáticamente, si $f(cX) = c^t f(X)$, $t = 1$ implica rendimientos constantes a escala, $t > 1$ rendimientos crecientes y $t < 1$ rendimientos decrecientes; donde $f(X)$ es la tecnología de producción, X es un vector de input y c un escalar.

Capítulo 3

Modelo DEA-CCR

Este capítulo trata de uno de los modelos más básicos del DEA, el modelo CCR, que fue propuesto inicialmente por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978 [7]. Además, introduciremos herramientas e ideas de uso común en el DEA y extenderemos los conceptos desarrollados en el capítulo 2. El modelo DEA-CCR proporciona medidas de eficiencia radiales, input u output orientadas y supone convexidad, fuerte eliminación gratuita de inputs y outputs y redimimientos constantes a escala.

3.1. Modelo DEA-CCR en forma fraccional

En DEA, la eficiencia técnica (relativa) de cada una de las unidades se define, extendiendo el concepto dado en el capítulo 2, como el cociente entre la suma ponderada de los outputs $\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}\right)$ y la suma ponderada de los inputs $\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}\right)$

El modelo DEA-CCR input orientado en términos de cociente sería:

$$\begin{aligned} (FP_0) \quad \max_{u,v} h_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\ \text{s.a.:} & \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ u_r, v_i &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde:

- Se consideran n unidades ($j = 1, 2, \dots, n$), cada una de las cuales utilizan los mismos inputs (en diferentes cantidades) para obtener los mismos outputs (en diferentes cantidades).
- x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$) representa las cantidades de input i ($i = 1, 2, \dots, m$) consumidos por la j -ésima unidad.
- x_{i0} representa la cantidad de input i consumido por la unidad que es evaluada, unidad₀.
- y_{rj} ($y_{rj} \geq 0$) representa las cantidades observadas de output r ($r = 1, 2, \dots, s$) producidos por la j -ésima unidad.
- u_r ($r = 1, 2, \dots, s$) y v_i ($i = 1, 2, \dots, m$) representa los pesos (o multiplicadores) de los outputs e inputs respectivamente.

El modelo FP_0 , problema no lineal, pretende obtener el conjunto óptimo de pesos (o multiplicadores) $\{u_r\}$ y $\{v_i\}$ que maximicen la eficiencia relativa, h_0 , de la unidad₀ definida como el cociente entre la suma ponderada de outputs y la suma ponderada de inputs, sujeto a la restricción de que ninguna unidad puede tener una puntuación de eficiencia mayor que uno usando estos mismos pesos.

Matemáticamente, la restricción no negativa de cada v_i no es suficiente para que la restricción de la fracción este bien definida y además, para evitar que una unidad sea incorrectamente caracterizada como eficiente al obtener en la solución óptima algún peso u_r y/o v_i el valor cero siendo, en consecuencia, el correspondiente input y/u output obviado en la determinación de la eficiencia. Para ello, sustituimos la condición de no-negatividad del modelo FP_0 por una condición de positividad estricta.

Ejemplo 3.1. *Considérese que un individuo desea evaluar la eficiencia (técnica o productiva) de 6 concesionarios de automóviles y que para ello dispone de información relativa a 2 inputs ($x_1 =$ Número de empleados y $x_2 =$ Depreciación del Inmovilizado, como variable proxy del Capital) y 2 outputs ($y_1 =$ Número de vehículos vendidos y $y_2 =$ Número de órdenes de trabajo recibidas en taller). Los valores observados para las citadas variables son:*

		Concesionarios (unidades)					
		A	B	C	D	E	F
Inputs	x_1	8	11	14	12	11	18
	x_2	8	15	12	13	18	20
Outputs	y_1	14	25	8	25	40	24
	y_2	20	42	30	8	22	30

(3.2)

De acuerdo con la forma fraccional del modelo DEA-CCR, la eficiencia del concesionario A vendría dada, según el problema representado en el modelo FP_0 , por:

$$\max_{u,v} h_A = \frac{u_1 y_{1A} + u_2 y_{2A}}{v_1 x_{1A} + v_2 x_{2A}}$$

$$\max_{u,v} h_A = \frac{14u_1 + 20u_2}{8v_1 + 8v_2}$$

s.a.:

s.a.:

$$\frac{u_1 y_{1A} + u_2 y_{2A}}{v_1 x_{1A} + v_2 x_{2A}} \leq 1$$

$$\frac{u_1 y_{1D} + u_2 y_{2D}}{v_1 x_{1D} + v_2 x_{2D}} \leq 1$$

$$\frac{14u_1 + 20u_2}{8v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{25u_1 + 8u_2}{12v_1 + 13v_2} \leq 1$$

$$\frac{u_1 y_{1B} + u_2 y_{2B}}{v_1 x_{1B} + v_2 x_{2B}} \leq 1$$

$$\frac{u_1 y_{1E} + u_2 y_{2E}}{v_1 x_{1E} + v_2 x_{2E}} \leq 1$$

$$\frac{25u_1 + 42u_2}{11v_1 + 15v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1 + 22u_2}{11v_1 + 18v_2} \leq 1$$

$$\frac{u_1 y_{1C} + u_2 y_{2C}}{v_1 x_{1C} + v_2 x_{2C}} \leq 1$$

$$\frac{u_1 y_{1F} + u_2 y_{2F}}{v_1 x_{1F} + v_2 x_{2F}} \leq 1$$

$$\frac{8u_1 + 30u_2}{14v_1 + 12v_2} \leq 1$$

$$\frac{24u_1 + 30u_2}{18v_1 + 20v_2} \leq 1$$

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \geq \varepsilon$$

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \geq \varepsilon$$

La solución del problema anterior proporcionará la puntuación de eficiencia del concesionario A, h_A^* , así como los valores óptimos de los pesos inputs y outputs ($u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*$) utilizados para maximizar su eficiencia.

El mismo procedimiento debería seguirse con los restantes 5 concesionarios para evaluar su eficiencia.

3.2. De forma fraccional a multiplicativa

Ahora vamos a reemplazar el modelo en forma fraccional (FP_0) por uno lineal (LP_0), seleccionando la solución (μ, δ) para que $\sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} = 1$ (input virtual normalizado a la unidad).

Realizando dicho cambio de variable en el modelo (FP_0), se obtiene el problema lineal equivalente, el cual puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 (LP_0) \quad & \underset{\mu, \delta}{\text{máx}} \quad w_0 = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \delta_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \mu_r, \delta_i \geq \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\mu_r = t u_r$, $\delta_i = t v_i$, $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}$ y $\varepsilon > 0$.

La solución del problema dado por el modelo anterior, que de nuevo debe ser resuelto para cada una de las unidades consideradas, determinará los valores óptimos de los pesos μ_r y δ_i , es decir, μ_r^* y δ_i^* . Además, debe tenerse en cuenta que cualquier múltiplo de estos valores será óptimo en el modelo (FP_0).

Si definimos:

- Y como una matriz de outputs de orden $(s \times n)$.

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

- y_0 representa el vector de outputs de la unidad que está siendo evaluada.
- X es una matriz de inputs de orden $(m \times n)$.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

- x_0 representa el vector de inputs de la unidad que está siendo evaluada.
- μ es el vector $(s \times 1)$ de pesos outputs y δ es el vector $(m \times 1)$ de pesos inputs.

El modelo (LP_0) puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{aligned}
 (LP_0) \quad & \underset{\mu, \delta}{\text{máx}} w_0 = \mu^t y_0 \\
 & \text{s.a:} \\
 & \delta^t x_0 = 1 \\
 & \mu^t Y - \delta^t X \leq 0 \\
 & \mu^t, \delta^t \geq I\varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *El problema fraccional (FP_0) es equivalente al problema lineal (LP_0) .*

Demostración. Bajo el supuesto de positividad estricta de v y $X > 0$, el denominador $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}$ de la restricción de (FP_0) es positivo para cada j . Entonces se obtiene $\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \delta_i x_{ij} \leq 0$

multiplicando ambos miembros de la restricción $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1$ por $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}$. A continuación,

recordando que un número fraccionario es invariante bajo la multiplicación del numerador y denominador por el mismo número distinto de cero, se establece el denominador de h_0 igual a 1, moverlo a una restricción, como se hace en $\sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} = 1$, y maximizar el numerador, así como indica (LP_0) . Deje que la selección óptima de (LP_0) sea $(\delta = \delta^*, \mu = \mu^*)$ y el valor objetivo óptimo w_0^* . La solución (δ^*, μ^*) es óptimo también de (FP_0) , ya que la transformación anterior es reversible bajo los supuestos anteriores. (FP_0) y (LP_0) entonces tienen el mismo valor objetivo óptimo w_0^* . \square

Observamos también que las medidas de eficiencia que hemos presentado son “unidades invariantes”, es decir, que son independientes de las unidades de medida utilizadas. Expresado en forma precisa tenemos:

Teorema 3.2 (Invariancia de unidades). *Los valores óptimos de máximo $w_0 = w_0^*$ en la función objetivo de (FP_0) y (LP_0) son independientes de las unidades en las que las entradas y salidas se miden siempre que estas unidades sean las mismas para cada unidad.*

Demostración. Sea w_0^*, μ^*, δ^* óptimo de (FP_0) . Ahora cambia la y_{rj} y x_{ij} por $\rho_r y_{rj}$ y $\gamma_i x_{ij}$ para algunas opciones de $\rho_r, \gamma_i > 0$. Pero entonces la elección $\mu'_r = \mu^* / \rho_r$ y $\delta'_i = \delta^* / \gamma_i$ tenemos

la solución al problema transformado con $w'_0 = w_0^*$. Una solución óptima para el problema transformado debe por lo tanto tener $w_0'^* \geq w_0^*$. Ahora supongamos que podemos tener $w_0'^* > w_0^*$. Entonces, sin embargo, $\mu_r = \mu'_r \rho_r$ y $\delta_i = \delta'_i \gamma_i$ satisface las restricciones originales, por lo que contradice la suposición de optimalidad asumido por w_0^* bajo estas restricciones. La única posibilidad restante es $w_0'^* = w_0^*$. Esto demuestra la invarianza reclamada por $\max_{u,v} h_0$. El teorema 3.1 demostró la equivalencia de (LP_0) a (FP_0) y por lo tanto debe tener el mismo resultado, por lo que el teorema queda demostrado. \square

Ejemplo 3.2. Siguiendo con el ejemplo de los concesionarios ($n = 6$, $s = 2$, $m = 2$) introducido en el ejemplo 3.1, los datos disponibles de las variables inputs y outputs pueden expresarse en términos matriciales de la siguiente forma:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 14 & 25 & 8 & 25 & 40 & 24 \\ 20 & 42 & 30 & 8 & 22 & 30 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 & 12 & 11 & 18 \\ 8 & 15 & 12 & 13 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

Si se desea evaluar la eficiencia del concesionario A (unidad₀), el problema a resolver, expresado en forma matricial, puede escribirse como:

$$\max_{\mu, \delta} w_A = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1A} \\ y_{2A} \end{pmatrix}$$

s. a.:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1A} & y_{1B} & y_{1C} & y_{1D} & y_{1E} & y_{1F} \\ y_{2A} & y_{2B} & y_{2C} & y_{2D} & y_{2E} & y_{2F} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1A} & x_{1B} & x_{1C} & x_{1D} & x_{1E} & x_{1F} \\ x_{2A} & x_{2B} & x_{2C} & x_{2D} & x_{2E} & x_{2F} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\mu^t, \delta^t \geq I\varepsilon$$

sustituyendo:

$$\max_{\mu, \delta} w_A = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix}$$

s. a.:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 25 & 8 & 25 & 40 & 24 \\ 20 & 42 & 30 & 8 & 22 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 & 12 & 11 & 18 \\ 8 & 15 & 12 & 13 & 18 & 20 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\mu^t, \delta^t \geq I\varepsilon$$

es decir:

$$\max_{\mu, \delta} w_A = 14\mu_1 + 20\mu_2$$

s.a.:

$$8\delta_1 + 8\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Definición 3.1 (CCR-eficiencia). *La unidad₀ es CCR-eficiente (o eficiente) si $w_0^* = 1$ y existe al menos un solución óptima (μ^*, δ^*) , con $\mu^* > 0$ y $\delta^* > 0$.*

En caso contrario, la unidad₀ es CCR-ineficiente.

Por tanto, CCR-eficiencia significa que o $w_0^* < 1$ o $w_0^* = 1$ y al menos un elemento de (μ^*, δ^*) es cero para toda solución óptima de (LP_0) .

Ahora observemos el caso donde la unidad₀ tiene $w_0^* < 1$ (CCR-ineficiente). Entonces debe haber al menos una restricción (o unidad) de $\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \delta_i x_{ij} \leq 0$ para el cual el peso (μ^*, δ^*) produce la igualdad de dicha restricción, en caso contrario w_0^* podría ser ampliada. Sea el conjunto dado por

$$E'_0 = \left\{ j : \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} = \sum_{i=1}^m \delta_i x_{ij} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

El subconjunto E_0 de E'_0 , compuesto por las unidades eficientes, es llamado conjunto de referencia de la unidad evaluada, unidad₀, siendo la existencia de estas unidades eficientes las que fuerzan a la unidad₀ a ser ineficiente.

3.2.1. Significado de los pesos

Definición 3.2 (Input virtual y output virtual). *En DEA, se le llama input virtual a la suma ponderada de los inputs, dada por: $\sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0}$. Y análogamente, se le llama output virtual*

a la suma ponderada de los *Outputs*, dada por: $\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}$.

De hecho, en la forma fraccional del modelo (FP_0), la eficiencia suele definirse como el cociente entre el output virtual y el input virtual.

En la forma multiplicativa (LP_0), el input virtual se encuentra normalizado a la unidad, es decir, $\sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} = 1$, mientras que el output virtual es igual a la puntuación de eficiencia, es decir, $\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} = w_0$. Para la unidad evaluada, los valores de los inputs y outputs virtuales expresan información sobre la importancia que una unidad atribuye a determinados inputs y outputs al objeto de obtener su máxima puntuación de eficiencia.

En consecuencia, es posible determinar la importancia (contribución) de cada input ($\delta_i^* x_{i0}$) respecto del total ($\sum_{i=1}^m \delta_i^* x_{i0} = 1$) así como la contribución de cada output ($\mu_r^* y_{r0}$) a la puntuación de eficiencia ($\sum_{r=1}^s \mu_r^* y_{r0} = w_0^*$). Estos resultados proporcionan indicación de la medida en que las variables input y output han sido usadas en la determinación de la eficiencia, jugando un papel como medida de la sensibilidad de las puntuaciones de eficiencia.

Las cuestiones referentes a la contribución de cada input/output en la evaluación de la eficiencia así como importancia relativa de los mismo son estudiadas con más detalles en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *La resolución en el problema dado en el modelo del ejemplo 3.2 para el concesionario A proporcionará los valores óptimos de los pesos inputs y outputs (μ^*, δ^*) que maximizan la función objetivo, que será su puntuación de eficiencia, w_A^* . En el capítulo 4 se encuentran planteados los modelos para los restantes concesionarios así como una descripción de cómo resolver, para el concesionario A, dicho modelo mediante la herramienta R. En la siguiente tabla se facilitan los resultados de cada uno de los concesionarios:*

		<i>Concesionarios (unidades)</i>					
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
	<i>Eficiencia</i>						
	w_0^*	0,9916	1	0,8929	0,8654	1	0,6515
<i>Pesos</i>	μ_1^*	0,0471	ϵ	ϵ	0,0346	0,0250	0,0188
<i>Outputs</i>	μ_2^*	0,0166	0,0238	0,0298	ϵ	ϵ	0,0066
<i>Pesos</i>	δ_1^*	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
<i>Inputs</i>	δ_2^*	0,125	0,0667	0,0833	0,0769	0,0556	0,0500

(3.6)

Los valores μ_1^* y μ_2^* son un indicador de la contribución relativa del correspondiente output al valor de la eficiencia técnica global de la unidad evaluada. A partir de los resultados mostrados en la tabla anterior, puede determinarse la contribución input/output para cada concesionario.

Contribución input/output (%)						
	Concesionarios (unidades)					
	A	B	C	D	E	F
output 1 $\frac{\mu_1^* y_{10}}{\sum_{r=1}^2 \mu_r^* y_{r0}} \cdot 100$	66,5328	0	0	100	100	69,4376
output 2 $\frac{\mu_2^* y_{20}}{\sum_{r=1}^2 \mu_r^* y_{r0}} \cdot 100$	33,4672	100	100	0	0	30,5623
Input 1 $\frac{\delta_1^* x_{10}}{\sum_{i=1}^2 \delta_i^* x_{i0}} \cdot 100$	0	0	0	0	0	0
Input 2 $\frac{\delta_2^* x_{20}}{\sum_{i=1}^2 \delta_i^* x_{i0}} \cdot 100$	100	100	100	100	100	100

(3.7)

Así, y considerando los resultados obtenidos para el concesionario A, que son mostrados en la tabla anterior, puede decirse que una reducción en el consumo del input 2 tiene un mayor efecto en la eficiencia de este concesionario que una reducción en el uso del input 1.

En general, a una unidad le resultará ventajoso asignar al input 2 un peso $\frac{\delta_2^*}{\delta_1^*}$ veces mayor que el peso del input 1 al objeto de maximizar la puntuación de eficiencia, esto es, el cociente entre el output y el input virtual.

3.3. Modelo DEA-CCR en forma envolvente

Asociado a cada problema lineal existe otro problema de programación lineal denominado problema dual (PD), que posee importantes propiedades y relaciones notables con respecto al problema lineal original, problema que para diferencia del dual se denomina entonces como problema primal (PP).

El problema dual tiene tantas variables como restricciones y tantas restricciones como variables tiene el problema primal.

La principal ventaja que tiene el problema dual es que puede ser utilizado para determinar la solución del problema primal.

Si se asocia la variable θ con la restricción que normaliza el input virtual y las variables duales λ a las otras restricciones. El dual asociado al modelo DEA-CCR input orientado primal (EP_0), al cual nos vamos a referir como un modelo en forma envolvente, viene dado por:

$$\begin{aligned}
 (EP_0) \quad & \underset{\theta, \lambda}{\text{mín}} z_0 = \theta \\
 & \text{s.a:} \\
 & Y\lambda \geq y_0 \\
 & \theta x_0 - X\lambda \geq 0 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde:

- λ es el vector $(n \times 1)$ de pesos o intensidades, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Así, λ_j es la intensidad de la unidad _{j} .
- θ denota la puntuación de eficiencia (técnica) de la unidad₀.

De nuevo, el problema dado por el modelo (EP_0) debe ser resuelto para cada una de las n unidades.

El problema lineal DEA-CCR primal input orientado (LP_0) tiene $n + 1$ restricciones y el problema lineal DEA-CCR dual input orientado (EP_0) tiene $s + m$ restricciones. Por tanto, como el número de unidades suele ser mucho mayor que el número total de inputs y outputs, es más conveniente resolver el problema del modelo DEA-CCR dual.

Ejemplo 3.4. *En el ejemplo 3.2 se obtuvo el siguiente problema para el concesionario A, que se considerará como el problema primal.*

$$\max_{\mu, \delta} w_A = 14\mu_1 + 20\mu_2$$

s.a:

$$8\delta_1 + 8\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Como el problema anterior presenta 7 restricciones (sin contar las restricciones de positividad) y 4 variables $(\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2)$, el problema dual asociado tendrá 7 variables $(\theta, \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F)$ y 4 restricciones. El modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente para el concesionario A será:

$$\min_{\theta, \lambda} z_A = 1\theta + 0\lambda_A + 0\lambda_B + 0\lambda_C + 0\lambda_D + 0\lambda_E + 0\lambda_F$$

s.a:

$$0\theta + 14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F \geq 14$$

$$0\theta + 20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F \geq 20$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F \geq 0$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F \geq 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0$$

θ libre

Operando obtenemos:

$$\min_{\theta, \lambda} z_A = \theta$$

s.a:

$$14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F \geq 14$$

$$20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F \geq 20$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F \geq 0$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F \geq 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0$$

θ libre

El modelo anterior puede expresarse en forma matricial como:

$$\min_{\theta, \lambda} z_A = \theta$$

s.a:

$$\begin{bmatrix} 14 & 25 & 8 & 25 & 40 & 24 \\ 20 & 42 & 30 & 8 & 22 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \\ \lambda_E \\ \lambda_F \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\theta \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 & 12 & 11 & 18 \\ 8 & 15 & 12 & 13 & 18 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \\ \lambda_E \\ \lambda_F \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0$$

θ libre

Para obtener la puntuación de la eficiencia del concesionario A deberá resolverse el problema anterior y problemas similares para calcular la eficiencia de los restantes concesionarios.

3.3.1. Caracterización de la eficiencia y valores holguras

Si la solución del problema dado por el modelo (EP_0) resulta ser $\theta^* = 1$ entonces la unidad que está siendo evaluada es eficiente, de acuerdo a la definición de Farrell (1957) [10], en relación con las otras unidades, puesto que no es posible encontrar ninguna unidad o combinación lineal de unidades que obtenga al menos el output de la unidad₀ utilizando menos factores. En caso contrario la unidad es ineficiente, es decir, si $\theta^* < 1$ es posible obtener, a partir de los valores λ_j^* obtenidos en la resolución del modelo (EP_0) una combinación de unidades que “funcione mejor” que la unidad que ha sido evaluada.

Tal y como está definido, el problema planteado en el modelo (EP_0) es resuelto en una única etapa, de forma que las variables de holgura s_r^+ (variable de holgura output) y s_i^- (variable de holgura input) son obtenidas de forma residual. Por tanto es posible que no se satisfaga la condición de eficiencia de Pareto-Koopmans, más restrictiva que la anterior condición de eficiencia de Farrell, según la cual una unidad es eficiente si y solo si $\theta^* = 1$ y todas las holguras son cero, en caso contrario la unidad es calificada como ineficiente.

Así, si en el óptimo resultara que $s_r^{+*} > 0$ esto significaría que sería posible incrementar el output r de la unidad₀ en la cantidad dada por esa holgura, con lo que la unidad₀ debería producir output r en la cantidad $(y_r + s_r^{+*})$ en lugar de en la cantidad observada y_r . Análogamente, si se obtuviese una holgura input tal que $s_i^{-*} > 0$ esto indicaría que el input i de la unidad evaluada podría ser reducido en la cantidad dada por s_i^{-*} , de tal forma que el input i debería ser usado en la cantidad $(x_i - s_i^{-*})$ en lugar de en la cantidad x_i .

En la Figura 3.3.1 donde se consideran dos inputs (x_1, x_2) y un output (y), se pretende reflejar la situación descrita en el párrafo anterior.

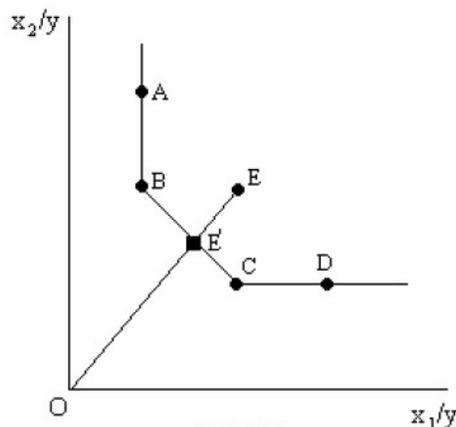


Figura 3.3.1

Las unidades etiquetadas como A, B, C y D son eficientes técnicamente según la condición de

eficiencia Farrell, puesto que su puntuación de eficiencia θ^* es igual a uno. La unidad E es ineficiente ($\theta^* < 1$).

Sin embargo, sólo las unidades B y C son eficientes técnicamente según la condición de Pareto-Koopmans, ya que tanto la unidad A como la unidad D presentan holguras input, la primera en el input x_2 y la segunda en el input x_1 , que indicarán en cuánto las unidades A y D deberían reducir el consumo de dichos inputs. Ninguna unidad presenta holgura output.

Ejemplo 3.5. *En el ejemplo 3.4 se escribió el modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente para el concesionario A (modelo (3.9)). En el capítulo 4 puede consultarse, para los restantes concesionarios, los problemas duales que deberían resolverse al objeto de proceder a evaluar la eficiencia de cada uno de ellos. En el mismo capítulo 4 también se encuentra un posible procedimiento de cálculo de la eficiencia del concesionario A, a partir del modelo (EP_0) , usando la herramienta R. En la siguiente tabla se facilita un resumen de los principales resultados obtenidos para el conjuntos de los 6 concesionarios analizados.*

	<i>Concesionarios (unidades)</i>					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>Eficiencia</i>	0,9916	1	0,8929	0,8654	1	0,6515
λ_A^*	0	0	0	0	0	0
λ_B^*	0,4354	1	0,7143	0	0	0,5947
λ_C^*	0	0	0	0	0	0
λ_D^*	0	0	0	0	0	0
λ_E^*	0,0779	0	0	0,625	1	0,2283
λ_F^*	0	0	0	0	0	0
<i>Holgura input x_1</i>	2,2867	0	4,6429	3,5096	0	2,6740
<i>Holgura input x_2</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Holgura output y_1</i>	0	0	9,8571	0	0	0
<i>Holgura output y_2</i>	0	0	0	5,7500	0	0

(3.10)

Vemos que evidentemente las puntuaciones de eficiencia coinciden con aquellas obtenidas con el modelo DEA-CCR input orientado en forma multiplicativa.

Satisfaciendo las condiciones de eficiencia de Pareto-Koopmans, los concesionarios B y E son los únicos eficientes técnicamente.

Los concesionarios A, C, D y F son ineficientes. Así, el concesionario A, para llegar a ser eficiente, debería reducir el consumo de inputs, dado los outputs que obtiene, un 0.84 % (reducción radial), y adicionalmente (movimiento holgura) el input x_1 en 2,2867 unidades.

Algo similar le sucede al concesionario F. Los concesionarios C y D presentan tanto holgura en el input x_1 como holgura en uno de los outputs; de tal forma que para llegar a ser eficientes estos dos últimos concesionarios no es suficiente que reduzcan el uso de recursos, deben al mismo tiempo expandir el output (en el tipo y cantidad que presenta holgura).

3.3.2. “Benchmarking” en DEA. Fijación de referencias para la mejora

Debe recordarse que, según el modelo DEA empleado, puede obtenerse para toda unidad ineficiente un punto de proyección (\hat{x}_0, \hat{y}_0) sobre la frontera eficiente que represente a una unidad (real o virtual) eficiente que, en un modelo input orientado, consuma, como mucho, la proporción θ de los inputs de la unidad evaluada y produzca, al menos, la misma cantidad de outputs.

La unidad o unidades implicada/s en la construcción de la referida unidad (real o ficticia) eficiente constituirán el conjunto de referencia de la unidad evaluada y calificada como ineficiente. Este conjunto de referencia estará formado por todas aquellas unidades que en la solución del problema (EP_0) obtengan unas intensidades $\lambda_j^* > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

A partir del modelo (EP_0) , el punto de proyección, que es una combinación lineal de los puntos observados, vendrá dado por $(\hat{x}_0 = \lambda^* X, \hat{y}_0 = \lambda^* Y)$.

Volviendo a la figura 3.3.1, la unidad E es claramente ineficiente. En este caso, el punto de proyección sobre la frontera eficiente determinará la dirección de mejora, presumiblemente la más accesible, a emprender por la unidad E. La proyección, la unidad ficticia (o virtual) E', resultará de una combinación entre las unidades B y C en proporciones dadas por los valores óptimos de las intensidades λ_j^* ($j=B,C$) obtenidos a partir de la resolución, para la unidad E, del problema del modelo (EP_0) .

Las coordenadas de la proyección sobre la frontera eficiente representarán los valores inputs y outputs objetivo para la unidad ineficiente, es decir, los niveles input y output que convertirían en eficiente caso de alcanzarlos. Así pues, la comparación entre los valores observados para la unidad evaluada y los valores objetivo fijados permite establecer la cuantía, en términos absolutos o relativos (porcentajes de mejora potencial), de la reducción input y/o incremento output que ésta debería tratar de promover para convertirse en eficiente.

Por otra parte, si x_0 representa el vector de inputs de la unidad que está siendo evaluada, y θ su puntuación de eficiencia técnica, entonces $(1 - \theta)x_0$ indicará la cantidad en que deberían reducirse radialmente (proporcionalmente) todos los inputs de la unidad evaluada para que

fuese eficiente. La diferencia entre los valores input objetivo y la reducción radial indicará la cuantía en que adicionalmente la unidad evaluada debe reducirse sus inputs como consecuencia del movimiento holgura.

Por tanto, la mejora potencial de una unidad puede ser descompuesta en mejora proporcional, derivada de la reducción radial, y mejora holgura, derivada de la reducción holgura.

Ejemplo 3.6. *Para cada concesionario ineficiente (A, C, D y F) es posible construir una unidad (real o ficticia) situada sobre la frontera eficiente. Tal unidad es construida a partir de uno o más concesionarios eficientes, denominado conjunto de referencia; concretamente por aquel/aquellos que en la evaluación del concesionario ineficiente han obtenido valores λ_j^* ($j=A,B,C,D,E,F$). Las coordenadas de la proyección sobre la frontera representará el plan de proyección (valores objetivos) que convertiría al concesionario ineficiente en eficiente.*

Así, en la tabla (3.11) se muestra, a partir de la información contenida en la tabla (3.10), el conjunto de referencia y la intensidad con la que cada concesionario eficiente (benchmark) que lo forma interviene en la construcción, para cada concesionario ineficiente, de la respectiva unidad (real o ficticia) eficiente. En la tabla (3.11) se facilita esta información:

<i>Concesionario ineficiente</i>	<i>Conjunto de referencia</i>	
	<i>B</i>	<i>E</i>
A	$\lambda_B^* = 0,4354$	$\lambda_E^* = 0,0779$
C	$\lambda_B^* = 0,7143$	–
D	–	$\lambda_E^* = 0,6250$
F	$\lambda_B^* = 0,5947$	$\lambda_E^* = 0,2283$

(3.11)

Ahora, es posible determinar el plan de producción objetivo de cada concesionario ineficiente. Por ejemplo, para el concesionario A se tendrá:

Valores objetivo input:

$$\hat{x}_{1A} = \lambda_B^* x_{1B} + \lambda_E^* x_{1E} = 0,4354 \cdot 11 + 0,0779 \cdot 11 = 5,6463$$

$$\hat{x}_{2A} = \lambda_B^* x_{2B} + \lambda_E^* x_{2E} = 0,4354 \cdot 15 + 0,0779 \cdot 18 = 7,9332$$

Valores objetivo output:

$$\hat{y}_{1A} = \lambda_B^* y_{1B} + \lambda_E^* y_{1E} = 0,4354 \cdot 25 + 0,0779 \cdot 40 = 14$$

$$\hat{y}_{2A} = \lambda_B^* y_{2B} + \lambda_E^* y_{2E} = 0,4354 \cdot 42 + 0,0779 \cdot 22 = 20$$

En la tabla (3.12) se recogen los valores objetivo para cada concesionario ineficiente, así como los valores inicialmente observados para cada uno de ellos.

<i>Concesionario ineficiente</i>	<i>Valores objetivo</i>				<i>Valores observados</i>			
	<i>Input</i>		<i>Output</i>		<i>Input</i>		<i>Output</i>	
	x_1	x_2	y_1	y_2	x_1	x_2	y_1	y_2
A	5,6463	7,9332	14	20	8	8	14	20
C	7,8573	10,7145	17,8575	30	14	12	8	30
D	6,875	11,25	25	13,75	12	13	25	8
F	9,053	13,0299	24	30	18	20	24	30

(3.12)

Al comparar los valores objetivo y observados es posible determinar la mejora (reducción input y/o incremento output) que debería experimentar cada concesionario ineficiente para convertirse en eficiente, así como distinguir qué parte de dicha mejora se debe a un movimiento radial (derivada de la puntuación de eficiencia obtenida) y un movimiento holgura (derivado del desplazamiento a través de la propia frontera). Estos resultados se muestran en la siguiente tabla.

	<i>Mejora potencial</i>				<i>M. radial</i>		<i>M. holgura</i>			
	<i>Input</i>		<i>Output</i>		<i>Input</i>		<i>Input</i>		<i>Output</i>	
	x_1	x_2	y_1	y_2	x_1	x_2	x_1	x_2	y_1	y_2
A	-2,3540	-0,0673	0	0	-0,0673	-0,0673	-2,2867	-	-	-
C	-6,1429	-1,2857	9,8571	0	-1,5	-1,2857	-4,6429	-	9,8571	-
D	-5,125	-1,75	0	5,75	-1,6154	-1,75	-3,5096	-	-	5,7500
F	-8,9469	-6,9699	0	0	-6,2729	-6,9699	-2,6740	-	-	-

(3.13)

Es decir, el porcentaje de mejora potencial a experimentar por los concesionarios A, C, D y E, que son los calificados como ineficientes será:

<i>Concesionario ineficiente</i>	<i>Mejora potencial(%)</i>			
	<i>Input</i>		<i>Output</i>	
	x_1	x_2	y_1	y_2
A	-29,42 %	-0,84 %	0,00 %	0,00 %
C	-43,88 %	-10,71 %	123,21 %	0,00 %
D	-42,71 %	-13,46 %	0,00 %	71,88 %
F	-49,71 %	-34,85 %	0,00 %	0,00 %

(3.14)

Asimismo, es posible obtener los porcentajes en que cada una de las benchmark del conjunto de referencia de una empresa ineficiente contribuye a los valores objetivo de éstas. Esta información resulta de utilidad, puesto que a través de dichos porcentajes se pone de manifiesto la mayor o menos importancia que en cada variable input y output representa la benchmark para la unidad ineficiente.

El porcentaje de contribución de la unidad eficiente k a los valores objetivo del output r de una unidad ineficiente ($PC_{k,r}$) vendrá dado por:

$$PC_{k,r} = \frac{\lambda_k^* y_{rk}}{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_{rj}} \cdot 100 \quad (3.15)$$

en tanto que el porcentaje de contribución de la unidad eficiente k a los valores objetivo del input i de una unidad ineficiente ($PC_{k,i}$) será:

$$PC_{k,i} = \frac{\lambda_k^* y_{ik}}{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_{ij}} \cdot 100 \quad (3.16)$$

3.4. Procedimiento alternativo de resolución. Método de dos etapas

El problema dado por el modelo (EP_0), que es resuelto en una única etapa, busca, para la unidad evaluada, la máxima reducción input, obteniéndose los valores holgura de manera residual. Sin embargo, mediante este método de resolución, según Coelli, Prasada Rao y Battese (1998)[8], “no siempre se identifican todas las holguras”.

Para determinar todas las posibles holguras input y output, Ali y Seiford (1993)[1] sugieren la resolución de una segunda etapa, cuyo objetivo es maximizar la suma de las holguras input y output manteniendo el valor óptimo de θ logrado en la primera etapa, problema que coincide con el modelo (EP_0).

Por tanto, este método de resolución implica la resolución de dos problemas para cada unidad.

- **Primera etapa:** El objetivo de este primer paso es determinar el valor óptimo de θ , es decir, la máxima reducción proporcional que tendría que producirse en los inputs de la unidad objetivo de estudio.

$$\begin{aligned}
(\text{EP}_0) \quad & \underset{\theta, \lambda}{\text{mín}} \theta \\
& \text{s.a:} \\
& Y\lambda \geq y_0 \\
& \theta x_0 - X\lambda \geq 0 \\
& \lambda \geq 0 \\
& \theta \text{ libre}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

- **Segunda etapa:** A partir del óptimo θ^* obtenido en la etapa 1 se ajustan los inputs ($\theta^* x_0$) y se procede a maximizar las holguras inputs y outputs para mover radialmente el punto proyectado en la etapa 1, que satisface la condición de eficiencia de Farrell (1957)[10], a un punto sobre la envolvente eficiente que satisfaga la condición de optimalidad de Pareto-Koopmans.

$$\begin{aligned}
& \underset{\lambda, s^+, s^-}{\text{mín}} -(Is^+ + Is^-) \\
& \text{s.a:} \\
& Y\lambda = y_0 + s^+ \\
& X\lambda = \theta^* x_0 - s^- \\
& \lambda, s^+, s^- \geq 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde:

1. Is^+ es el vector de holguras output: $Is^+ = \sum_{r=1}^s s_r^+$.
2. Is^- es el vector de holguras input: $Is^- = \sum_{i=1}^m s_i^-$.

En el capítulo 4 puede consultarse cómo ejecutar el modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente en dos etapas (modelos (3.17) y (3.18)) utilizando R. En cualquier caso, es frecuente formular los problemas dados por los modelos (3.17) y (3.18) en un único modelo, como el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda, s^+, s^-} \quad & z_0 = \theta - \varepsilon(Is^+ + Is^-) \\ \text{s.a:} \quad & \\ & Y\lambda = y_0 + s^+ \\ & X\lambda = \theta x_0 - s^- \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

θ libre

Ejemplo 3.7. *En el capítulo 4 se muestra cómo resolver el modelo (3.19) para el concesionario A usando R. Procedimiento de manera similar con el resto de concesionarios se evaluaría su eficiencia. En la siguiente tabla se recogen los resultados obtenidos.*

	<i>Concesionarios (unidades)</i>					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>Eficiencia</i>	0,9916	1	0,8929	0,8654	1	0,6515
<i>C. Referencia</i>	<i>B y E</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>B y E</i>
λ_A^*	0	0	0	0	0	0
λ_B^*	0,4354	1	0,7143	0	0	0,5947
λ_C^*	0	0	0	0	0	0
λ_D^*	0	0	0	0	0	0
λ_E^*	0,0779	0	0	0,625	1	0,2283
λ_F^*	0	0	0	0	0	0
s_1^-	2,2867	0	4,6429	3,5096	0	2,6740
s_2^-	0	0	0	0	0	0
s_1^+	0	0	9,8571	0	0	0
s_2^+	0	0	0	5,7500	0	0

(3.20)

En este caso, y como fácilmente puede comprobarse, los resultados mostrados en la tabla anterior coinciden con aquellos obtenidos mediante el procedimiento de resolución en una etapa (3.10).

3.5. Versión output orientado del modelo DEA-CCR

Hasta el momento se ha tratado el modelo DEA-CCR input orientado. Un cambio en la orientación de un modelo prácticamente equivale a invertir el cociente entre output virtual y el input virtual. Así, el modelo DEA-CCR output orientado en forma de cociente, expresado matricialmente, vendría dado por el problema:

$$\begin{aligned}
 \min_{u,v} \quad & h_0 = \frac{v^t x_0}{u^t y_0} \\
 \text{s.a:} \quad & \\
 & \frac{v^t X}{u^t Y} \geq 1 \\
 & u^t, v^t \geq I\varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

El anterior puede ser fácilmente convertido, utilizando las transformaciones de Charnes y Cooper (1962)[5], en un problema lineal, que se le conoce como modelo DEA-CCR output orientado en forma multiplicativa:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mu,\delta} \quad & w_0 = \delta^t x_0 \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \mu^t y_0 = 1 \\
 & \delta^t X - \mu^t Y \geq 0 \\
 & \mu^t, \delta^t \geq I\varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

El problema dual asociado al problema del modelo (3.22), conocido como modelo DEA-CCR output orientado envolvente, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \underset{\varphi, \lambda, s^+, s^-}{\text{máx}} \quad z_0 = \varphi + \varepsilon(Is^+ + Is^-) \\
& \text{s.a:} \\
& \varphi y_0 - \lambda Y + s^+ = 0 \\
& \lambda X + s^- = x_0 \\
& \lambda, s^+, s^- \geq 0 \\
& \varphi \text{ libre}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Al comparar el problema del modelo (3.23) con el equivalente input orientado del modelo (3.19) puede observarse como la diferencia básica entre uno y otro es que, mientras que en el modelo input orientado se pretende determinar la máxima reducción radial que debería producirse en los inputs de la unidad analizada, en el modelo output orientado el objetivo es maximizar el aumento proporcional en los outputs que podría ser logrado por la unidad evaluada, dado sus niveles de inputs.

La resolución del modelo (3.23) que se efectúa según el procedimiento de dos etapas, dará una solución óptima $(\varphi^*, s^{+*}, s^{-*})$, de tal forma que $\varphi^* \geq 1$. Así, cuanto mayor sea φ^* más ineficiente será la unidad evaluada. Una unidad será calificada como técnicamente eficiente si y solo si $\varphi^* = 1$ y todas las holguras son nulas ($s^{+*} = 0, s^{-*} = 0$). En caso contrario la unidad será ineficiente.

La eficiencia técnica output de la unidad evaluada será igual a $1/\varphi^*$.

Se constata, lo indicado por Coelli, Prasada Rao y Battese (1998)[8] : “Los modelos input orientados y output orientados estiman la misma frontera y por tanto, por definición, el mismo conjunto de unidades eficientes. Sólo las medidas de eficiencia asociadas a las unidades ineficientes pueden diferir entre los modelos”.

Capítulo 4

DEA en R

Este capítulo trata de cómo introducir el modelo CCR del DEA en un lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico, llamado R [11] .

R es una implementación de software libre del lenguaje S. Se trata de uno de los lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística.

Fue desarrollado inicialmente por Robert Gentleman y Ross Ihaka del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland en 1993. Sin embargo, si se remonta a sus bases iniciales, puede decirse que inició en los Bell Laboratories de AT&T y ahora Alcatel-Lucent en Nueva Jersey con el lenguaje S. Éste último, un sistema para el análisis de datos desarrollado por John Chambers, Rick Becker, y colaboradores diferentes desde finales de 1970. Los diseñadores iniciales, Gentleman y Ihaka, combinaron las fortalezas de dos lenguajes existentes, S y Scheme. En sus propias palabras: “El lenguaje resultante es muy similar en apariencia a S, pero en el uso de fondo y la semántica es derivado desde Scheme”. El resultado se llamó R “en parte al reconocimiento de la influencia de S y en parte para hacer gala de sus propios logros”.

R proporciona un amplio abanico de herramientas estadísticas (modelos lineales y no lineales, tests estadísticos, análisis de series temporales, algoritmos de clasificación y agrupamiento, etc.) y gráficas.

Al igual que S, se trata de un lenguaje de programación, lo que permite que los usuarios lo extiendan definiendo sus propias funciones. De hecho, gran parte de las funciones de R están escritas en el mismo R.

Además, R es un programa totalmente gratuito y forma parte de un proyecto colaborativo y abierto. Sus usuarios pueden publicar paquetes que extienden su configuración básica.

4.1. Modelo DEA-CCR input orientado en forma multiplicativa

En el capítulo 3 hemos definido el modelo DEA-CCR input orientado en forma multiplicativa (3.3) y el planteamiento del problema para el concesionario A.

En este punto, vamos a plantear el problema para todos los concesionarios y lo vamos a resolver con la herramienta R [11] .

4.1.1. Planteamiento del problema para todos los concesionarios

Teniendo en cuenta el modelo (LP₀) (3.3), los problemas que vamos a resolver son los siguientes:

Concesionario A

$$\max_{\mu, \delta} w_A = 14\mu_1 + 20\mu_2$$

s.a:

$$8\delta_1 + 8\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Concesionario B

$$\max_{\mu, \delta} w_B = 25\mu_1 + 42\mu_2$$

s.a:

$$11\delta_1 + 15\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Concesionario C

$$\max_{\mu, \delta} w_C = 8\mu_1 + 30\mu_2$$

s.a:

$$14\delta_1 + 12\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Concesionario E

$$\max_{\mu, \delta} w_E = 40\mu_1 + 22\mu_2$$

s.a:

$$11\delta_1 + 18\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Concesionario D

$$\max_{\mu, \delta} w_D = 25\mu_1 + 8\mu_2$$

s.a:

$$12\delta_1 + 13\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Concesionario F

$$\max_{\mu, \delta} w_F = 24\mu_1 + 30\mu_2$$

s.a:

$$18\delta_1 + 20\delta_2 = 1$$

$$14\mu_1 + 20\mu_2 - (8\delta_1 + 8\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 42\mu_2 - (11\delta_1 + 15\delta_2) \leq 0$$

$$8\mu_1 + 30\mu_2 - (14\delta_1 + 12\delta_2) \leq 0$$

$$25\mu_1 + 8\mu_2 - (12\delta_1 + 13\delta_2) \leq 0$$

$$40\mu_1 + 22\mu_2 - (11\delta_1 + 18\delta_2) \leq 0$$

$$24\mu_1 + 30\mu_2 - (18\delta_1 + 20\delta_2) \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \geq \varepsilon$$

Puede observarse cómo los modelos para evaluar la eficiencia de los distintos concesionarios son similares, las diferencias entre ellos son:

1. La función objetivo.
2. La restricción que normaliza los inputs.

4.1.2. Resolución del modelo (LP_0) con R

Para resolver los problemas lineales con la herramienta R [11] nos vamos a ayudar de la librería lpSolve [3] .

```
library(lpSolve)
```

Para ello, definimos una función donde le introducimos los datos del problema de optimización y donde utilizamos la función lp de la librería lpSolve [3] .

```
func_dea_primal = function(unidad0,datos_entradas,datos_salidas,epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  # Coeficientes de la función objetivo
  coef.fobj = c(rep(0,m),Y[,unidad0])
  # Coeficientes de la restricción de normalidad
  mat1 = c(X[,unidad0],rep(0,s))
  # Matriz de coeficientes de las restricciones restantes
  mat2 = cbind(-t(X),t(Y))
  # Matriz de coeficientes de las restricciones de las variables
  mat3 = diag(rep(1,m+s))
  # Matriz de coeficientes de todas la restricciones
  coef.mat = rbind(mat1,mat2,mat3)
  # Coeficientes del segundo miembro de las restricciones
  coef.b = c(1,rep(0,n),rep(epsilon,m+s))
  # Desigualdades e igualdades de las restricciones
  rest.tipo = c("=",rep("<=",n),rep(">=",m+s))
  # Función de resolución del problema
  sol.primal = lp(direction = "max",
                  objective.in = coef.fobj,
                  const.mat = coef.mat,
                  const.dir = rest.tipo,
                  const.rhs = coef.b,
                  compute.sens = TRUE)
```

```

# Solución óptima
sol.primal$solution
# Valor óptimo
val.opt.primal<-sol.primal$objval
sol.primal<- c(val.opt.primal,sol.primal$solution)
return(sol.primal)
}
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Ejemplo de cómo usar la función para el concesionario A
solucion.primal_A=func_dea_primal(1,X,Y)
solucion.primal_A

```

```
## [1] 0.99159292 0.00000000 0.12500000 0.04712389 0.01659292
```

Nos devuelve un vector en el cual en el primer elemento se encuentra la eficiencia y los restantes son los valores de los pesos inputs y outputs de la unidad evaluada A.

A continuación, vamos a definir una función para obtener una matriz que contiene los valores de la eficiencia y pesos de cada unidad:

```

func_dea_primal_completo = function(datos_entradas,datos_salidas,
                                   epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas

```

```

s = dim(Y)[1] # num. salidas
sol.primal.comp = func_dea_primal(1,X,Y)
for (i in 2:n) {
  primal_t = func_dea_primal(i,X,Y)
  sol.primal.comp = cbind(sol.primal.comp,primal_t)
}
rownames(sol.primal.comp) = c("Eficiencia",paste("delta_",c(1:m),sep=""),
                             paste("mu_",c(1:s),sep=""))
colnames(sol.primal.comp) = paste("U",c(1:n),sep="")
return(sol.primal.comp)
}
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
             20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Uso de la función
solucion.primal = func_dea_primal_completo(X,Y)
solucion.primal<-round(solucion.primal,4)
solucion.primal

```

```

##           U1      U2      U3      U4      U5      U6
## Eficiencia 0.9916 1.0000 0.8929 0.8654 1.0000 0.6515
## delta_1    0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
## delta_2    0.1250 0.0667 0.0833 0.0769 0.0556 0.0500
## mu_1       0.0471 0.0000 0.0000 0.0346 0.0250 0.0188
## mu_2       0.0166 0.0238 0.0298 0.0000 0.0000 0.0066

```

Ahora, nos devuelve una matriz cuya primera columnas es el vector calculado anteriormente para la unidad A y las columnas restantes son vectores de la misma forma pero para las

demás unidades. Es decir, cada columna representa a cada unidad.

4.1.2.1. Resolución del problema primal con Benchmarking

Además, también podemos resolver los problemas DEA con la función `dea` de la librería Benchmarking [4].

```
library(Benchmarking)

n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Función de resolución DEA
e_crs <- dea(t(X),t(Y), RTS="crs", ORIENTATION="in",SLACK=TRUE, DUAL=TRUE)
# Eficiencia
Eficiencia<-eff(e_crs)
# Pesos
pesos.in<-e_crs$ux # Pesos inputs
pesos.out<-e_crs$vy # Pesos Outputs
pesos<-cbind(pesos.in,pesos.out)
pesos<-t(round(pesos,4))
rownames(pesos)<-c(paste("delta_",c(1:m),sep=""),
                 paste("mu_",c(1:s),sep=""))
colnames(pesos)<-paste("U",c(1:n),sep="")
# Eficiencia y Pesos
sol.primal.dea<-rbind(Eficiencia,pesos)
sol.primal.dea<-round(sol.primal.dea,4)
sol.primal.dea
```

```
##           U1      U2      U3      U4      U5      U6
## Eficiencia 0.9916 1.0000 0.8929 0.8654 1.0000 0.6515
## delta_1    0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
## delta_2    0.1250 0.0667 0.0833 0.0769 0.0556 0.0500
## mu_1       0.0471 0.0000 0.0000 0.0346 0.0250 0.0188
## mu_2       0.0166 0.0238 0.0298 0.0000 0.0000 0.0066
```

```
# Verificación de que las dos soluciones son las mismas
solucion.primal==sol.primal.dea
```

```
##           U1      U2      U3      U4      U5      U6
## Eficiencia TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## delta_1    TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## delta_2    TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## mu_1       TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## mu_2       TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
```

Vemos que los datos obtenidos son exactamente los que recogimos para obtener la tabla (3.6) del capítulo 3.

4.2. Modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente

En el capítulo 3 hemos definido el modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente (3.8) y un planteamiento del problema para el concesionario A.

En este punto, vamos a plantear el problema para todos los concesionarios y lo vamos a resolver con la herramienta R [11] .

4.2.1. Planteamiento del problema dual para los concesionarios B y C

Teniendo en cuenta el modelo (EP_0) (3.8), los problemas que vamos a resolver son los siguientes:

Concesionario B

$$\min_{\theta, \lambda} z_B = \theta$$

s.a:

$$14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F \geq 25$$

$$20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F \geq 42$$

$$11\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F \geq 0$$

$$15\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F \geq 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0$$

 θ libre**Concesionario C**

$$\min_{\theta, \lambda} z_A = \theta$$

s.a:

$$14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F \geq 8$$

$$20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F \geq 30$$

$$14\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F \geq 0$$

$$12\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F \geq 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0$$

 θ libre

Los problemas duales para los concesionarios restantes se plantean de manera similar con la diferencia de los terminos independientes de las dos primeras restricciones y los coeficientes de θ .

4.2.2. Resolución del modelo (EP₀) con R

De forma análoga, vamos a resolver el problema dual para cada concesionario con la ayuda de la función `lp` de la librería `lpSolve` [3] .

```
library(lpSolve)
```

Las soluciones del este problema las vamos a obtener mediante el problema primal asociado, ya que lpSolve sólo toma las variables mayores e iguales que cero, y en este caso tenemos una variable libre θ .

A continuación, vamos a definir una función que resuelve el problema del modelo en forma envolvente.

Para ello, tenemos que tener en cuenta que la función lp de la librería lpSolve [3] resuelve problemas con las variables mayores e iguales que cero. Por lo tanto, como el modelo en forma envolvente tiene una variable libre, tenemos que usar el siguiente “truco” de programación matemática:

Definir $x = x_1 - x_2$, donde $x_1, x_2 \geq 0$. Es decir, definir dos variables auxiliares x_1 y x_2 no negativas, y sustituir donde aparezca la variable libre x , por la diferencia de las variables x_1 y x_2 : $(x_1 - x_2)$.

Luego en nuestro modelo tendríamos las variables $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ en vez de $\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dicho esto, la función se define como:

```
func_dea_dual = function(unidad0,datos_entradas,datos_salidas,epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  # Datos auxiliares
  coef.fobj = c(1,-1,rep(0,n))
  mat1 = cbind(rep(0,m),rep(0,m),Y)
  mat2 = cbind(X[,unidad0],-X[,unidad0],-X)
  coef.mat = rbind(mat1,mat2)
  coef.b = c(Y[,unidad0],rep(0,m))
  rest.tipo = rep(">=",m+s)
  # Uso de la función lp
  sol.dual = lp(direction = "min",
               objective.in = coef.fobj,
               const.mat = coef.mat,
               const.dir = rest.tipo,
               const.rhs = coef.b,
               compute.sens = TRUE)
```

```

sol.dual$solution
# convierto las dos variables theta1, theta2, en una sola:
# theta=theta1-theta2
sol.dual_final = c(sol.dual$solution[1]-sol.dual$solution[2],
                  sol.dual$solution[3:length(sol.dual$solution)])
# Cálculo de variables holguras
mat1_2=cbind(rep(0,m),Y)
mat2_2 =cbind(X[,unidad0],-X)
coef.mat_2=rbind(mat1_2,mat2_2)
sol.holg=t((coef.mat_2*%sol.dual_final))-coef.b
sol.holg=round(sol.holg,4)
sol.holg=c(sol.holg[(s+1):(m+s)],sol.holg[1:s])
# Solución final
sol.dual_final=c(sol.dual_final,sol.holg)
return(sol.dual_final)
}
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Ejemplo de cómo usar la función para el concesionario A
solucion.dual_A=func_dea_dual(1,X,Y)
solucion.dual_A

## [1] 0.99159292 0.00000000 0.43539823 0.00000000 0.00000000 0.07787611
## [7] 0.00000000 2.28670000 0.00000000 0.00000000 0.00000000

```

Aquí, obtenemos un vector en el cual su primer elemento es la eficiencia y los restantes son los pesos en el dual y las holguras de la unidad evaluada A.

Ahora definimos una función que nos resuelva el problema de todas las unidades.

```
func_dea_dual_completo = function(datos_entradas,datos_salidas,
                                epsilon=0) {

  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  sol.dual.comp = func_dea_dual(1,X,Y)
  for (i in 2:n) {
    primal_t = func_dea_dual(i,X,Y)
    sol.dual.comp = cbind(sol.dual.comp,primal_t)
  }
  rownames(sol.dual.comp) = c("Eficiencia",
                              paste("lambda_U",c(1:n),sep=""),
                              paste("Holgura input x_",c(1:m),sep=""),
                              paste("Holgura output y_",c(1:s),sep=""))
  colnames(sol.dual.comp) = paste("U",c(1:n),sep="")
  return(sol.dual.comp)
}

n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Uso de la función
solucion.dual = func_dea_dual_completo(X,Y)
solucion.dual<-round(solucion.dual,4)
solucion.dual
```

```
##           U1 U2      U3      U4 U5      U6
## Eficiencia      0.9916  1 0.8929 0.8654  1 0.6515
## lambda_U1      0.0000  0 0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U2      0.4354  1 0.7143 0.0000  0 0.5947
## lambda_U3      0.0000  0 0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U4      0.0000  0 0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U5      0.0779  0 0.0000 0.6250  1 0.2283
## lambda_U6      0.0000  0 0.0000 0.0000  0 0.0000
## Holgura input x_1 2.2867  0 4.6429 3.5096  0 2.6740
## Holgura input x_2 0.0000  0 0.0000 0.0000  0 0.0000
## Holgura output y_1 0.0000  0 9.8571 0.0000  0 0.0000
## Holgura output y_2 0.0000  0 0.0000 5.7500  0 0.0000
```

Ahora, obtenemos una matriz cuyas columnas son el vector mencionado anteriormente para el problema dual para cada unidad.

4.2.2.1. Resolución del problema dual con Benchmarking

Además, también podemos resolver los problemas DEA dual con la función `dea` de la librería Benchmarking [4].

```
library(Benchmarking)
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
e_crs <- dea(t(X),t(Y), RTS="crs", ORIENTATION="in",SLACK=TRUE, DUAL=TRUE)
Eficiencia<-eff(e_crs) # Eficiencia
pesos.dual<-e_crs$lambda # Pesos en el dual
holg.in<-e_crs$sx # Variables de holgura inputs
holg.out<-e_crs$sy # Variables de holgura outpus
var.dual<-cbind(Eficiencia,pesos.dual,holg.in,holg.out)
var.dual<-round(var.dual,4)
sol.dual.dea<-t(var.dual)
```

```
rownames(sol.dual.dea)<-c("Eficiencia",
                        paste("lambda_U",c(1:n),sep=""),
                        paste("Holgura input x_",c(1:m),sep=""),
                        paste("Holgura output y_",c(1:s),sep=""))
colnames(sol.dual.dea)<- paste("U",c(1:n),sep="")
sol.dual.dea
```

```
##              U1 U2    U3    U4 U5    U6
## Eficiencia    0.9916 1 0.8929 0.8654 1 0.6515
## lambda_U1     0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U2     0.4354 1 0.7143 0.0000 0 0.5947
## lambda_U3     0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U4     0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U5     0.0779 0 0.0000 0.6250 1 0.2283
## lambda_U6     0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## Holgura input x_1 2.2867 0 4.6429 3.5096 0 2.6740
## Holgura input x_2 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## Holgura output y_1 0.0000 0 9.8571 0.0000 0 0.0000
## Holgura output y_2 0.0000 0 0.0000 5.7500 0 0.0000
```

Para verificar que las soluciones por los dos métodos anteriores son iguales tenemos:

```
solucion.dual==sol.dual.dea
```

```
##              U1  U2  U3  U4  U5  U6
## Eficiencia    TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U1     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U2     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U3     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U4     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U5     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## lambda_U6     TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## Holgura input x_1 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## Holgura input x_2 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## Holgura output y_1 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
## Holgura output y_2 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
```

Además, vemos que los datos obtenidos son exactamente los que recogimos para obtener la tabla (3.10) del capítulo 3.

4.3. Modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente: Método de dos etapas

En el capítulo 3 hemos definido el modelo DEA-CCR input orientado en forma envolvente por el método de dos etapas (3.19) y un planteamiento del problema para el concesionario A.

En este punto, vamos a plantear el problema para todos los concesionarios y lo vamos a resolver con la herramienta R [11] .

4.3.1. Planteamiento del problema para los concesionarios A y B

Ahora vamos a plantear los problemas del modelo por el método de dos etapas:

Concesionario A

$$\min_{\theta, \lambda} z_A = \theta - \varepsilon(s_1^+ + s_2^+ + s_1^- + s_2^-)$$

s.a:

$$14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F - s_1^+ = 14$$

$$20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F - s_2^+ = 20$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F - s_1^- = 0$$

$$8\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F - s_2^- = 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F, s_1^+, s_2^+, s_1^-, s_2^- \geq 0$$

θ libre

Concesionario B

$$\min_{\theta, \lambda} z_B = \theta - \varepsilon(s_1^+ + s_2^+ + s_1^- + s_2^-)$$

s.a:

$$14\lambda_A + 25\lambda_B + 8\lambda_C + 25\lambda_D + 40\lambda_E + 24\lambda_F - s_1^+ = 25$$

$$20\lambda_A + 42\lambda_B + 30\lambda_C + 8\lambda_D + 22\lambda_E + 30\lambda_F - s_2^+ = 42$$

$$11\theta - 8\lambda_A - 11\lambda_B - 14\lambda_C - 12\lambda_D - 11\lambda_E - 18\lambda_F - s_1^- = 0$$

$$15\theta - 8\lambda_A - 15\lambda_B - 12\lambda_C - 13\lambda_D - 18\lambda_E - 20\lambda_F - s_2^- = 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F, s_1^+, s_2^+, s_1^-, s_2^- \geq 0$$

θ libre

Los problemas duales obtenidos por el método de dos etapas de los demás concesionarios se obtienen similarmente, con la diferencia de los términos independientes de las dos primeras restricciones y los coeficientes de θ .

4.3.2. Resolución del modelo (EP₀) por el método de dos etapas con R

De nuevo, en la resolución del modelo en forma envolvente por el método de dos etapas se utilizará la función lp de la librería lpSolve [3] .

```
library(lpSolve)
```

A continuación, vamos a definir una función que resuelve el problema del modelo en forma envolvente por el método de dos etapas.

Para ello, con el mismo procedimiento que en el caso de resolución del modelo en forma envolvente en una etapa, tenemos que tener en cuenta que la función lp de la librería lpSolve [3] resuelve problemas con las variables mayores e iguales que cero. Por lo tanto, como el modelo en forma envolvente por el método de dos etapas tiene de nuevo una variable libre, tenemos que usar el “truco” mencionado anteriormente de programación matemática.

Luego en nuestro modelo tendríamos las variables $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \dots, \lambda_n, s_1^+, \dots, s_s^+, s_1^-, \dots, s_m^-$ en vez de $\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n, s_1^+, \dots, s_s^+, s_1^-, \dots, s_m^-$.

Dicho esto, la función se define como:

```

func_dea_m2e = function(unidad0,datos_entradas,datos_salidas,
                        epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  # Datos auxiliares
  coef.fobj = c(1,-1,rep(0,n),rep(-epsilon,m+s))
  mat1 = cbind(rep(0,s),rep(0,s),Y,-diag(s),matrix(rep(0,s*m),ncol=m))
  mat2 = cbind(X[,unidad0],-X[,unidad0],-X,
               matrix(rep(0,m*s),ncol=s),-diag(m))
  coef.mat = rbind(mat1,mat2)
  coef.b = c(Y[,unidad0],rep(0,m))
  rest.tipo = rep("=",m+s)
  sol.m2e = lp(direction = "min",
               objective.in = coef.fobj,
               const.mat = coef.mat,
               const.dir = rest.tipo,
               const.rhs = coef.b,
               compute.sens = TRUE)
  sol.m2e$solution
  # Convierto las dos variables theta1, theta2,
  # en una sola: theta=theta1-theta2
  solm2e_final = c(sol.m2e$solution[1]-sol.m2e$solution[2],
                  sol.m2e$solution[3:length(sol.m2e$solution)])
  return(solm2e_final)
}
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,

```

```

      20,42,30,8,22,30),
      nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
solucion.m2e=func_dea_m2e(1,X,Y)
solucion.m2e<-round(solucion.m2e,4)
solucion.m2e

```

```

## [1] 0.9916 0.0000 0.4354 0.0000 0.0000 0.0779 0.0000 0.0000 0.0000 2.2867
## [11] 0.0000

```

Y la función para resolver todos los problemas se obtendría:

```

func_dea_m2e_completo = function(datos_entradas,datos_salidas,
                                epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  sol.m2e.comp = func_dea_m2e(1,X,Y)
  for (i in 2:n) {
    m2e_t = func_dea_m2e(i,X,Y)
    sol.m2e.comp = cbind(sol.m2e.comp,m2e_t)
  }
  rownames(sol.m2e.comp) = c("Eficiencia",
                             paste("lambda_U",c(1:n),sep=""),
                             paste("s+",c(1:s),sep=""),
                             paste("s-",c(1:m),sep=""))
  colnames(sol.m2e.comp) = paste("U",c(1:n),sep="")
  return(sol.m2e.comp)
}
# Uso de la función
solucion.m2e = func_dea_m2e_completo(X,Y)
solucion.m2e<-round(solucion.m2e,4)
solucion.m2e

```

```

##           U1 U2      U3      U4 U5      U6

```

```
## Eficiencia 0.9916 1 0.8929 0.8654 1 0.6515
## lambda_U1 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U2 0.4354 1 0.7143 0.0000 0 0.5947
## lambda_U3 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U4 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## lambda_U5 0.0779 0 0.0000 0.6250 1 0.2283
## lambda_U6 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
## s+_1 0.0000 0 9.8571 0.0000 0 0.0000
## s+_2 0.0000 0 0.0000 5.7500 0 0.0000
## s-_1 2.2867 0 4.6429 3.5096 0 2.6740
## s-_2 0.0000 0 0.0000 0.0000 0 0.0000
```

Además, Vemos que los datos obtenidos son exactamente los recogidos para obtener la tabla (3.20) del capítulo 3.

4.4. Modelo DEA-CCR output orientado

Hasta el momento se ha resuelto el modelo DEA-CCR input orientado. Como un cambio en la orientación de un modelo prácticamente equivale a invertir el cociente entre output virtual y el input virtual, la resolución será similar a las del modelo DEA-CCR input orientado.

Como hemos visto en el capítulo 3 las soluciones del modelo en forma envolvente en una etapa son las mismas que las del método de dos etapas. Por ello, sólo vamos a ver la resolución por el método de dos etapas además de la del modelo en forma multiplicativa.

4.4.1. Resolución del modelo DEA-CCR output orientado en forma multiplicativa

Teniendo el modelo (3.22) la resolución sería:

```
library(lpSolve)
```

```
# Resolución para una unidad
func_dea_primal_out = function(unidad0,datos_entradas,
                               datos_salidas,epsilon=0){
```

```

X = datos_entradas
Y = datos_salidas
n = dim(X)[2] # unidades
m = dim(X)[1] # num. entradas
s = dim(Y)[1] # num. salidas
# Coeficientes de la función objetivo
coef.fobj = c(X[,unidad0],rep(0,s))
# Coeficientes de la restricción de normalidad
mat1 = c(rep(0,m),Y[,unidad0])
# Matriz de coeficientes de las restricciones restantes
mat2 = cbind(t(X),-t(Y))
# Matriz de coeficientes de las restricciones de las variables
mat3 = diag(rep(1,m+s))
# Matriz de coeficientes de todas la restricciones
coef.mat = rbind(mat1,mat2,mat3)
# Coeficientes del segundo miembro de las restricciones
coef.b = c(1,rep(0,n),rep(epsilon,m+s))
# Desigualdades e igualdades de las restricciones
rest.tipo = c("=",rep(">=",n),rep(">=",m+s))
# Función de resolución del problema
sol.primal = lp(direction = "min",
               objective.in = coef.fobj,
               const.mat = coef.mat,
               const.dir = rest.tipo,
               const.rhs = coef.b,
               compute.sens = TRUE)

# Solución óptima
sol.primal$solution
# Valor óptimo
val.opt.primal<-sol.primal$objval
sol.primal<- c(val.opt.primal,1/val.opt.primal,sol.primal$solution)
return(sol.primal)
}

# Ejemplo para el conserionario A
n = 6 # unidades

```

```

m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
             20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
func_dea_primal_out(1,X,Y)

```

```
## [1] 1.00847836 0.99159292 0.00000000 0.12605979 0.04752343 0.01673360
```

Nos devuelve un vector cuyo primer elemento es el valor óptimo, el segundo elemento es la eficiencia y los restantes son los pesos en el primal de la unidad evaluada A.

La función que resuelve el modelo para todas las unidades sería:

```

# Resolución para todas las unidades
func_dea_primal_out_completo = function(datos_entradas,datos_salidas,
                                         epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  sol.primal.out.comp = func_dea_primal_out(1,X,Y)
  for (i in 2:n) {
    primal.out_t = func_dea_primal_out(i,X,Y)
    sol.primal.out.comp = cbind(sol.primal.out.comp,primal.out_t)
  }
  rownames(sol.primal.out.comp)=c("w0*", "Eficiencia",
                                  paste("delta_",c(1:m),sep=""),
                                  paste("mu_",c(1:s),sep=""))
  colnames(sol.primal.out.comp) = paste("U",c(1:n),sep="")
}

```

```

return(sol.primal.out.comp)
}
# Ejemplo para todos los concesionarios
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
# Matriz de inputs
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
# Matriz de outputs
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
             20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Uso de la función
solucion.primal.out = func_dea_primal_out_completo(X,Y)
solucion.primal.out<-round(solucion.primal.out,4)
solucion.primal.out

```

```

##           U1      U2      U3      U4      U5      U6
## w0*       1.0085 1.0000 1.1200 1.1556 1.0000 1.5349
## Eficiencia 0.9916 1.0000 0.8929 0.8654 1.0000 0.6515
## delta_1   0.0000 0.0909 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
## delta_2   0.1261 0.0000 0.0933 0.0889 0.0556 0.0767
## mu_1      0.0475 0.0000 0.0000 0.0400 0.0250 0.0289
## mu_2      0.0167 0.0238 0.0333 0.0000 0.0000 0.0102

```

Ahora, nos devuelve una matriz en la que cada columna contiene el vector de soluciones de cada unidad.

4.4.2. Resolución del modelo DEA-CCR output orientado en forma envolvente por el método de dos etapas

Teniendo el modelo (3.23) la resolución sería:

```

library(lpSolve)

func_dea_m2e_out = function(unidad0,datos_entradas,datos_salidas,
                             epsilon=0) {

  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  # Datos auxiliares
  coef.fobj = c(1,-1,rep(0,n),rep(-epsilon,m+s))
  mat1=cbind(Y[,unidad0],-Y[,unidad0],-Y,diag(s),matrix(rep(0,s*m),ncol=m))
  mat2 = cbind(rep(0,m),rep(0,m),X,matrix(rep(0,m*s),ncol=s),diag(m))
  coef.mat = rbind(mat1,mat2)
  coef.b = c(rep(0,s),X[,unidad0])
  rest.tipo = rep("=",m+s)

  sol.m2e = lp(direction = "max",
               objective.in = coef.fobj,
               const.mat = coef.mat,
               const.dir = rest.tipo,
               const.rhs = coef.b,
               compute.sens = TRUE)

  sol.m2e$solution
  # convierto las dos variables theta1, theta2, en una sola:
  # theta=theta1-theta2
  solm2e_final = c(sol.m2e$solution[1]-sol.m2e$solution[2],
                  sol.m2e$solution[3:length(sol.m2e$solution)])
  # Poner en el segundo elemento la eficiencia
  solm2e_final = c(solm2e_final[1],1/solm2e_final[1],
                  solm2e_final[2:length(solm2e_final)])
  return(solm2e_final)
}

# Ejemplo para el concesionario A
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas

```

```
s = 2 # num. salidas
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
          nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
          nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
solucion.m2e.out_A=func_dea_m2e_out(1,X,Y)
```

Nos devuelve un vector cuyo primer elemento es el valor óptimo, el segundo elemento es la eficiencia y los restantes son los pesos del dual de la unidad evaluada A.

La función que resuelve el modelo para todas las unidades sería:

```
# Resolución para todos los concesionarios
func_dea_m2e_out_completo = function(datos_entradas,datos_salidas,
                                     epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  n = dim(X)[2] # unidades
  m = dim(X)[1] # num. entradas
  s = dim(Y)[1] # num. salidas
  sol.m2e.out.comp = func_dea_m2e_out(1,X,Y)
  for (i in 2:n) {
    m2e.out_t = func_dea_m2e_out(i,X,Y)
    sol.m2e.out.comp = cbind(sol.m2e.out.comp,m2e.out_t)
  }
  rownames(sol.m2e.out.comp) = c("phi^*", "Eficiencia",
                                paste("lambda_U",c(1:n),sep=""),
                                paste("s+",c(1:s),sep=""),
                                paste("s-",c(1:m),sep=""))
  colnames(sol.m2e.out.comp) = paste("U",c(1:n),sep="")
  return(sol.m2e.out.comp)
}
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
```

```

X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
            8,15,12,13,18,20),
          nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
            20,42,30,8,22,30),
          nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
# Uso de la función
solucion.m2e.out = func_dea_m2e_out_completo(X,Y)
solucion.m2e.out<-round(solucion.m2e.out,4)
solucion.m2e.out

```

```

##           U1 U2      U3      U4 U5      U6
## phi^*      1.0085  1  1.1200 1.1556  1 1.5349
## Eficiencia 0.9916  1  0.8929 0.8654  1 0.6515
## lambda_U1  0.0000  0  0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U2  0.4391  1  0.8000 0.0000  0 0.9128
## lambda_U3  0.0000  0  0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U4  0.0000  0  0.0000 0.0000  0 0.0000
## lambda_U5  0.0785  0  0.0000 0.7222  1 0.3504
## lambda_U6  0.0000  0  0.0000 0.0000  0 0.0000
## s+_1       0.0000  0 11.0400 0.0000  0 0.0000
## s+_2       0.0000  0  0.0000 6.6444  0 0.0000
## s-_1       2.3061  0  5.2000 4.0556  0 4.1043
## s-_2       0.0000  0  0.0000 0.0000  0 0.0000

```

Ahora, nos devuelve una matriz en la que cada columna contiene el vector de soluciones de cada unidad.

4.5. Función de resolución general

Vamos a definir una función que nos resuelve y nos devuelve las soluciones de cualquier problema dependiendo de su orientación y método de resolución.

Hay que tener en cuenta que usamos todas las funciones definidas anteriormente.

```

funcion_general = function(datos_entradas,datos_salidas,
                           METODO="m2e",ORIENTACION,epsilon=0) {
  X = datos_entradas
  Y = datos_salidas
  if (METODO=="primal" & ORIENTACION=="in")
    {return(func_dea_primal_completo(X,Y))
    }
  if (METODO=="envolvente" & ORIENTACION=="in")
    {return(func_dea_dual_completo(X,Y))
    }
  if (METODO=="m2e" & ORIENTACION=="in")
    {return(func_dea_m2e_completo(X,Y))
    }
  if (METODO=="primal" & ORIENTACION=="out")
    {return(func_dea_primal__out_completo(X,Y))
    }
  if (METODO=="m2e" & ORIENTACION=="out")
    {return(func_dea_m2e_out_completo(X,Y))
    }
}

```

Para aclarar su uso tenemos en cuenta los siguientes ejemplos:

```

n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
             20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
solucion.primal.in=funcion_general(X,Y,METODO = "primal",ORIENTACION = "in")
solucion.primal=round(solucion.primal.in,4)
knitr::kable(solucion.primal)

```

	U1	U2	U3	U4	U5	U6
Eficiencia	0.9916	1.0000	0.8929	0.8654	1.0000	0.6515
delta_1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
delta_2	0.1250	0.0667	0.0833	0.0769	0.0556	0.0500
mu_1	0.0471	0.0000	0.0000	0.0346	0.0250	0.0188
mu_2	0.0166	0.0238	0.0298	0.0000	0.0000	0.0066

```

solucion.m2e.out=funcion_general(X,Y,METODO = "m2e",ORIENTACION = "out")
solucion.m2e=round(solucion.m2e.out,4)
knitr::kable(solucion.m2e)

```

	U1	U2	U3	U4	U5	U6
phi^*	1.0085	1	1.1200	1.1556	1	1.5349
Eficiencia	0.9916	1	0.8929	0.8654	1	0.6515
lambda_U1	0.0000	0	0.0000	0.0000	0	0.0000
lambda_U2	0.4391	1	0.8000	0.0000	0	0.9128
lambda_U3	0.0000	0	0.0000	0.0000	0	0.0000
lambda_U4	0.0000	0	0.0000	0.0000	0	0.0000
lambda_U5	0.0785	0	0.0000	0.7222	1	0.3504
lambda_U6	0.0000	0	0.0000	0.0000	0	0.0000
s+_1	0.0000	0	11.0400	0.0000	0	0.0000
s+_2	0.0000	0	0.0000	6.6444	0	0.0000
s-_1	2.3061	0	5.2000	4.0556	0	4.1043
s-_2	0.0000	0	0.0000	0.0000	0	0.0000

4.5.1. Funciones de cálculos

Vamos a programar algunas funciones en las cuales las salidas van a ser todo tipo de resultados que hemos reflejado en el capítulo 3.

- Función cuya salida es la contribución input/output.

```

# Contribución input/output (para el primal)
funcion_contribucion = function(soluciones){
  cont.out=NULL
  for (i in 1:s) {
    mu=soluciones[(m+2):(m+1+s),]
    cont.out=rbind(cont.out,(mu[i,]*Y[i,]/soluciones[1,]*100))
  }
  cont.out

  delta=soluciones[2:(m+1),]
  sumdel=NULL
  for (i in 1:n) {
    sumdel=c(sumdel,delta[,i]%*%X[,i])
  }
  sumdel
  cont.in=NULL
  for (j in 1:m) {
    cont.in=rbind(cont.in,(delta[j,]*X[j,]/sumdel*100))
  }
  cont.in
  contribucion=rbind(cont.out,cont.in)
  rownames(contribucion)=c(paste("Output",c(1:s),sep=" "),
                           paste("Input",c(1:m),sep=" "))
  return(contribucion)
}
soluciones=funcion_general(X,Y,METODO = "primal",ORIENTACION = "in")
contribucion=funcion_contribucion(soluciones)
contribucion

```

```

##           U1  U2  U3  U4  U5           U6
## Output 1  66.5328  0  0 100 100  69.43765
## Output 2  33.4672 100 100  0  0  30.56235
## Input 1   0.0000  0  0  0  0  0.00000
## Input 2  100.0000 100 100 100 100 100.00000

```

Estos datos son los reflejados en la tabla (3.7) del capítulo 3.

- Función cuya salida son los valores objetivo.

```
# Calculo de valores objetivo
funcion_val_objetivos= function(soluciones){
  ## Valores objetivos inputs
  valores.objetivos.in=NULL
  for (i in 1:m) {
    valores.objetivos.in=cbind(valores.objetivos.in,
                               t(X[i,]%%(soluciones[2:(n+1),])))
  }
  valores.objetivos.in
  colnames(valores.objetivos.in)=paste("x",c(1:m),sep="")
  ## Valores obetivos output
  valores.objetivos.out=NULL
  for (i in 1:s) {
    valores.objetivos.out=cbind(valores.objetivos.out,
                                t(Y[i,]%%(soluciones[2:(n+1),])))
  }
  colnames(valores.objetivos.out)=paste("y",c(1:s),sep="")
  valores.objetivos=cbind(valores.objetivos.in,valores.objetivos.out)
}
```

- Función cuya salida es la mejora potencial.

```
# Mejora potencial
funcion_potencial = function (soluciones){
  return(mejora.pontencial=
         round(funcion_val_objetivos(soluciones)-cbind(t(X),t(Y)),4))
}
```

- Función cuya salida es la mejora potencial en %.

```
# Mejora Potencial %
func_mejora_potencial=function(soluciones){
  mejora.potencial.por=
  round(funcion_val_objetivos(soluciones)/(cbind(t(X),t(Y)))*100-100,2)
}
```

- Función cuya salidas son las referencias, las unidades eficientes, los números de veces referenciados, el porcentaje de las unidades eficientes, el número de unidades eficientes, los valores del movimiento radial, mejora potencial y mejora potencial en %.

```

func_calculos = function(datos_inputs,datos_outputs,
                          soluciones,orientacion="in"){
  X=datos_inputs
  Y=datos_outputs
  m=dim(X)[1]
  n=dim(X)[2]
  s=dim(Y)[1]
  if (orientacion=="in") {
    filef=1
    filas = 2:(n+1)
  } else {
    filef=2
    filas = 3:(n+2)
  }
  # Unidades
  unidades=colnames(soluciones)
  # Unidades Eficientes
  un.eficientes=which(round(soluciones[filef,],4)==1)
  # Referencias
  l_referentes = vector("list",n)
  for (i in 1:n) {
    l_referentes[[i]] = unidades[which(soluciones[filas,i]>0)]
  }
  # Número de referenciados
  numveces_referenciado = rowSums(soluciones[filas,]>0)
  #Porcentaje de las unidades eficientes
  porcentaje.ef=100*(length(un.eficientes)/n)
  # Movimiento Radial para inputs
  efi=soluciones[filef,]
  mov.radial=NULL
  for (i in 1:n) {
    mov.radial= rbind(mov.radial,(1-efi[i])*X[,i])
  }
}

```

```

}
mov.radial=-round(mov.radial,4)
colnames(mov.radial)=paste("x",c(1:m),sep="")
rownames(mov.radial)=paste("U",c(1:n),sep="")
# Salidas
salida = list()
salida$l_referentes = l_referentes
salida$numveces_referenciado = numveces_referenciado
salida$un.eficientes=un.eficientes
salida$numero.eficientes=length(un.eficientes)
salida$porcentaje.ef= porcentaje.ef
salida$valores.objetivos=funcion_val_objetivos(soluciones)
salida$mov.radial=mov.radial
salida$mejora.potencial=funcion_potencial(soluciones)
salida$mejora.potencial.por=func_mejora_potencial(soluciones)
return(salida)
}

```

A continuación, tenemos un ejemplo del uso de la función de cálculos.

```

# Ejemplo de uso de la función
n = 6 # unidades
m = 2 # num. entradas
s = 2 # num. salidas
X = matrix(c(8,11,14,12,11,18,
             8,15,12,13,18,20),
           nrow=m,ncol=n,byrow=TRUE)
Y = matrix(c(14,25,8,25,40,24,
             20,42,30,8,22,30),
           nrow=s,ncol=n,byrow=TRUE)
#Ejemplos
soluciones=funcion_general(X,Y,METODO = "m2e",ORIENTACION = "in")
sal=func_calculos(X,Y,soluciones)
sal$l_referentes

```

```
## [[1]]
```

```
## [1] "U2" "U5"  
##  
## [[2]]  
## [1] "U2"  
##  
## [[3]]  
## [1] "U2"  
##  
## [[4]]  
## [1] "U5"  
##  
## [[5]]  
## [1] "U5"  
##  
## [[6]]  
## [1] "U2" "U5"
```

```
sal$numveces_referenciado
```

```
## lambda_U1 lambda_U2 lambda_U3 lambda_U4 lambda_U5 lambda_U6  
##          0          4          0          0          4          0
```

```
sal$porcentaje.ef
```

```
## [1] 33.33333
```

```
sal$numero.eficientes
```

```
## [1] 2
```

```
sal$un.eficientes
```

```
## U2 U5  
##  2  5
```

```
sal$valores.objetivos
```

```
##           x1           x2           y1           y2
## U1  5.646018  7.932743 14.00000 20.00
## U2 11.000000 15.000000 25.00000 42.00
## U3  7.857143 10.714286 17.85714 30.00
## U4  6.875000 11.250000 25.00000 13.75
## U5 11.000000 18.000000 40.00000 22.00
## U6  9.053097 13.030088 24.00000 30.00
```

Estos datos son los reflejados en la tabla (3.12) del capítulo 3.

```
sal$mov.radial
```

```
##           x1           x2
## U1 -0.0673 -0.0673
## U2  0.0000  0.0000
## U3 -1.5000 -1.2857
## U4 -1.6154 -1.7500
## U5  0.0000  0.0000
## U6 -6.2729 -6.9699
```

Estos datos son los reflejados en la tabla (3.13) del capítulo 3.

```
sal$mejora.potencial
```

```
##           x1           x2           y1           y2
## U1 -2.3540 -0.0673 0.0000 0.00
## U2  0.0000  0.0000 0.0000 0.00
## U3 -6.1429 -1.2857 9.8571 0.00
## U4 -5.1250 -1.7500 0.0000 5.75
## U5  0.0000  0.0000 0.0000 0.00
## U6 -8.9469 -6.9699 0.0000 0.00
```

Estos datos son los reflejados en la tabla (3.13) del capítulo 3.

```
sal$mejora.potencial.por
```

```
##      x1      x2      y1      y2
## U1 -29.42 -0.84   0.00   0.00
## U2  0.00   0.00   0.00   0.00
## U3 -43.88 -10.71 123.21   0.00
## U4 -42.71 -13.46   0.00  71.88
## U5  0.00   0.00   0.00   0.00
## U6 -49.71 -34.85   0.00   0.00
```

Estos datos son los reflejados en la tabla (3.14) del capítulo 3.

4.5.1.1. El DEA como sistema de evaluación de la eficiencia técnica de las organizaciones del sector público: Aplicación en los equipos de atención primaria

El objetivo es la aplicación de la técnica del DEA como herramienta de gran utilidad para medir la eficiencia de los equipos de atención primaria del Servicio Navarro de Salud.

Se han recogido datos de 48 poblaciones diferentes por Salomé Goñi de la revista española de financiación y contabilidad [14].

Los inputs seleccionados son el personal sanitario, el personal no sanitario, los gastos de farmacia y el número de derivaciones a laboratorio, relativizados también en función de la población a la que sirve cada centro. Y los outputs son el número de consultas totales, el número de consultas programadas, el tiempo de consultas como variable de calidad y la población.

Estos datos se recogen en una tabla escrita en un fichero en formato csv. Aquí tenemos las 6 primeras filas de los datos inputs y las 6 primeras filas de los datos outputs.

```
XInput <- read.csv("XInput.csv", sep=";")
knitr::kable(head(XInput,6))
```

	FARM	PERSAN	RES	DERL
191141243		13	4	2198
116628609		9	2	1723

	FARM	PERSAN	RES	DERL
125816763		11	2	1851
56761193		7	1	1393
118742989		13	3	1737
159537122		14	3	2083

```
Youtput <- read.csv2("Youtput.csv")
knitr::kable(head(Youtput,6))
```

DEMAN	PROG	MINCON	POB
75770	17777	6.25	8862
60577	9176	9.93	6045
66311	8418	8.34	6986
26726	4377	7.13	4494
67061	9890	5.93	8311
49271	12767	7.00	8644

Haciendo un estudio de la misma forma que en el ejemplo de los 6 concesionarios con el modelo input orientado en forma envolvente por el método de dos etapas obtenemos los siguientes resultados:

```
X=t(XInput)
Y=t(Youtput)
real=funcion_general(X,Y,METODO = "m2e",ORIENTACION = "in")
m=dim(X)[1]
n=dim(X)[2]
s=dim(Y)[1]
sal=func_calculos(X,Y,real)
```

- Los datos de la eficiencia de cada unidad:

```
(eficiencia=real[1,])
```

##	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7
----	----	----	----	----	----	----	----

```
## 0.8696585 0.9917486 0.9057113 1.0000000 0.9708195 0.8059960 0.7875178
##      U8      U9      U10      U11      U12      U13      U14
## 1.0000000 0.7921035 1.0000000 0.8829699 1.0000000 0.9472458 1.0000000
##      U15      U16      U17      U18      U19      U20      U21
## 1.0000000 0.9051109 0.7471019 1.0000000 1.0000000 0.8854444 0.9257185
##      U22      U23      U24      U25      U26      U27      U28
## 0.9429657 1.0000000 0.9205624 0.7082391 0.9351527 1.0000000 1.0000000
##      U29      U30      U31      U32      U33      U34      U35
## 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 0.9974753 0.9361420
##      U36      U37      U38      U39      U40      U41      U42
## 0.8941699 1.0000000 1.0000000 0.8730204 0.9392374 0.9323417 0.9196193
##      U43      U44      U45      U46      U47      U48
## 1.0000000 0.9405045 0.9422650 1.0000000 1.0000000 1.0000000
```

- Las unidades eficientes:

```
sal$un.eficientes
```

```
##  U4  U8 U10 U12 U14 U15 U18 U19 U23 U27 U28 U29 U30 U31 U32 U33 U37 U38
##  4   8  10  12  14  15  18  19  23  27  28  29  30  31  32  33  37  38
## U43 U46 U47 U48
##  43  46  47  48
```

- Numero total de unidades eficientes:

```
sal$numero.eficientes
```

```
## [1] 22
```

- Porcentaje de eficiencia:

```
sal$porcentaje.ef
```

```
## [1] 45.83333
```

Como ya hemos visto con el otro ejemplo podemos calcular más datos necesarios para el estudio de la eficiencia, como las variables objetivo, el movimiento radial, la mejora potencial, las referencias y el número de veces referenciados.

Conclusiones

El resultado de este Trabajo de Fin de Grado es especialmente reconfortable cuando después de muchas horas revisando libros, documentos y revistas especializadas, he conseguido elaborar este trabajo que profundiza en el análisis envolvente de datos (DEA) como herramienta para medir la eficiencia.

Este trabajo me ha servido también para conocer mejor cómo se realiza un proyecto de investigación, los pasos que se llevan a cabo y la forma correcta de realizarlo, experiencia esencial para un futuro investigador.

Este documento escrito ha sido realizado con la ayuda de Rmarkdown [2] y RStudio [13] que me ha dado la facilidad para incluir el código elaborado con la herramienta R [11].

Lo más interesante de este trabajo ha sido poder dar un enfoque teórico-práctico a los problemas propuestos para facilitar su comprensión. Y poder resolver dichos problemas con el lenguaje de programación R.

Después de haber realizado este trabajo he mejorado mis conocimientos sobre el DEA y como línea futura de estudio me gustaría conocer el modelo DEA-BCC, así denominado por haber sido desarrollado por Banker, Charnes y Cooper (1989).

Ahora, tras esta experiencia tengo más claro que antes cómo enfocar mi futuro.

Por último, dar las gracias a todas aquellas personas que me han prestado su dedicación a lo largo de estos cuatro años de estudios universitarios. Gracias a ellos, la elaboración de este proyecto ha sido mucho más fácil.

Entre ellas, y en primer lugar, a Pedro Luque, mi tutor del Trabajo de Fin de Grado, por su dedicación y paciencia.

Seguidamente a mis familiares, porque sin ellos esto no hubiese sido posible. Su ayuda y su apoyo moral han sido primordiales durante esta etapa.

Y para finalizar, a todos mis amigos, que han hecho que estos 4 años sean menos duros de lo que podrían haber sido.

Bibliografía

- [1] Ali, A. and Seiford, L. 1993. *The mathematical programming approach to efficiency analysis en harold o. fried, c.A. knox lovell y shelton s. schmidt, editors*. The Measurement of Productive Efficiency: Techniques; Applications. Oxford. Oxford University Press.
- [2] Allaire, J., Cheng, J., Xie, Y., McPherson, J., Chang, W., Allen, J., Wickham, H., Atkins, A. and Hyndman, R. 2016. *Rmarkdown: Dynamic documents for r*.
- [3] Berkelaar, M. and others 2015. *LpSolve: Interface to 'lp_solve' v. 5.5 to solve linear/Integer programs*.
- [4] Bogetoft, P. and Otto, L. 2015. *Benchmarking with dEA and sFA*.
- [5] Charnes, A. and Cooper, W. 1962. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*. 9, 3/4 (1962), 181–185.
- [6] Charnes, A., Cooper, W. and Rhodes, E. 1981. Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through. *Management Science*. 27, 6 (1981), 668–697.
- [7] Charnes, A., Cooper, W. and Rhodes, E. 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*. 2, (1978), 429–444.
- [8] Coelli, T., Prasada Rao, D. and Battese, G. 1998. *An intro to efficiency and productivity analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [9] Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K. 2000. *Data envelopment analysis*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht.
- [10] Farrell, M. 1957. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 120, 3 (1957), 253–290.
- [11] R Core Team 2016. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing.
- [12] Rhodes, E. 1978. *Data envelopment analysis and approaches for measuring the efficiency*
-

of decision-making units with an application to program follow-through in u.S. education. Ph. D. dissertation, School of Urban; Public Affairs, Carnegie-Mellon University.

[13] RStudio Team 2015. *RStudio: Integrated development environment for r.* RStudio, Inc.

[14] Salomé Goñiz, L. 1998. El análisis envolvente de datos como sistema de evaluación de la eficiencia técnica de las organizaciones del sector público: Aplicación en los equipos de atención primaria. *Revista Española de financiación y contabilidad.* 17, 97 (1998), 979–1004–185.

[15] Shott, T. and Lim, D.-J. 2015. *TFDEA: Technology forecasting using dEA (data envelopment analysis).*

[16] Simm, J. and Besstremyannaya, G. 2016. *RDEA: Robust data envelopment analysis (dEA) for r.*

[17] Thanassoulis, E. 2001. *Introduction to the theory and application of data envelopment analysis. a foundation text with integrated software.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[18] Vivente, C.S. and Blasco, O.M.B. 2006. *Evaluación de la eficiencia mediante el análisis envolvente de datos.* Universidad de Valencia.