UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas

Máster Universitario en Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

LINEABILIDAD EN ESPACIOS DE SUCESIONES

Trabajo Fin de Máster

presentado por

Pablo José Gerlach Mena

Directores:

María del Carmen Calderón Moreno

José Antonio Prado Bassas

Sevilla, Junio de 2016

Índice general

Abstract

Historically, many mathematicians of all ages have been attracted and fascinated by the existence of large algebraic structures that satisfy certain properties that, a priori, contradict mathematical intuition. The aim of the present work is the study of the lineability of some families of sequences of functions with very specific characteristics.

This work is divided into four chapters. In the first one, so that reading is self-contained, we will make a brief review of basic notions and concepts of Mathematical Analysis, Measure Theory, Functional Analysis and Topology that we will use later.

In the second chapter we see different concepts of lineability and we study the relationships between them and some sufficient conditions that allow us to obtain one from other.

In the third chapter we focus on the algebraic study of two different sets. We show the lineability of both, serving us as help for the study of the lineability of other sets.

Finally, in the fourth chapter, we will finish looking for some algebraic structures in two other sets of sequences of functions.

The completion of this work has allowed to introduce us into a line of research that combines concepts from Functional Analysis, Topology and Linear Algebra. It is a booming field in recent decades, although its origins date back to the late nineteenth century.

The bibliography has been divided into two parts. First we highlight the *Main bibliography*, which has collected the references that have been handled with greater intensity to the performance of work. Furthermore, under the heading *Other references* we have included a collection of some of the most important papers in the literature, both classical and modern, and illustrate the importance that the study of nowhere continuous functions has purchased.

Resumen

Desde siempre, grandes matemáticos de todas las épocas se han sentido atraídos y fascinados por la existencia de grandes estructuras algebraicas que verifican ciertas propiedades que, a priori, contradicen la intuición matemática. El objetivo del presente Trabajo es el estudio de la lineabilidad de algunas familias de sucesiones de funciones con propiedades muy particulares.

Este trabajo se dividirá en cuatro capítulos. En el primero de ellos, con el fin de que la lectura sea autocontenida, realizaremos un breve repaso de las nociones y conceptos básicos del Análisis Matemático, Teoría de la Medida, Análisis Funcional y Topología que usaremos en los capítulos posteriores.

En el segundo Capítulo veremos los distintos conceptos de lineabilidad que utilizaremos. Para finalizar, estudiaremos las relaciones entre ellos y algunos resultados que nos permiten obtener unos a partir de otros.

En el Capítulo tercero nos centraremos en el estudio algebraico de dos conjuntos distintos. Demostraremos la lineabilidad de ambos, sirviéndonos de ayuda para el estudio de la lineabilidad de otros conjuntos.

Por último, en el cuarto Capítulo, finalizaremos la Memoria buscando algunas estructuras algebraicas dentro de otros dos conjuntos de sucesiones de funciones. Los resultados contenidos en este capítulo son originales.

La realización del presente trabajo nos ha permitido adentrarnos en una línea de investigación que conjuga conceptos propios del Análisis Funcional, la Topología o el Álgebra Lineal. Se trata de un campo en auge en las últimas décadas, aunque sus orígenes se remonten a finales del siglo XIX.

La bibliografía la hemos dividido en dos partes. En primer lugar destacamos la *Bibliografía fundamental*, en la que hemos recogido las referencias que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo. Por otro lado, bajo el epígrafe de *Otras referencias* hemos incluido una colección de algunos de los artículos más importantes en la literatura, tanto clásicos como modernos, y que ilustran la importancia que el estudio de las funciones continuas no derivables en ningún punto ha adquirido.

Introducción

Cuando se trabaja con funciones que verifican propiedades extrañas, en ocasiones resulta más sencillo ver que hay muchas de ellas, que comprobar las propiedades que cumplen, como es el caso de los conocidos como Monstruos de Weierstrass (funciones continuas pero no derivables en ningún punto). Es por ello que en las últimas décadas muchos matemáticos se han dedicado a la búsqueda de estructuras topológicas y/o algebraicas.

Los primeros fueron quizás Banach y Mazurkiewicz, quienes fueron capaces de explotar el Teorema de Categoría de Baire para demostrar la residualidad del conjunto de los Monstruos de Weierstrass.

En el presente Trabajo estudiaremos la lineabilidad de algunos conjuntos formados por sucesiones de funciones que verifican distintos tipos de convergencia pero no otros. Más concretamente, nos centraremos en aquellas sucesiones de funciones que convergen en medida pero no en casi todo, que convergen puntualmente pero no uniformemente y que convergen uniformemente pero no en norma L^1, haciendo un breve paso por las funciones sobreyectivas por doquier.

Para ello, partiremos de la definición y terminología acuñada por el matemático ruso Vladimir I. Gurariy, la cual ha ido refinándose con el paso de los años, y que se basa en la existencia de un espacio vectorial infinito Y contenido en el conjunto que queremos estudiar.

En este Trabajo haremos una recopilación de algunos resultados acerca de lo mencionado anteriormente. Pero no nos limitaremos a recopilar los resultados existentes, sino que modificaremos alguna demostración original y completaremos o mejoraremos otras tantas, con el objetivo de unificar la notación utilizada a lo largo del estudio de estos temas, finalizando con un último capítulo con resultados originales.

Comenzaremos viendo en el Capítulo 1 algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con Análisis Funcional, Teoría de la Medida o Topología, con el objetivo de facilitar la comprensión de los posteriores capítulos. Daremos diversos criterios de convergencia de sucesiones de funciones y hablaremos sobre espacios métricos, de Banach, de Fréchet y del Teorema de Categoría de Baire.

En el Capítulo 2 empezaremos introduciendo el concepto de lineabilidad dando la definición original acuñada por Gurariy, así como las mejoras posteriores debidas a Aron, Seoane, Bernal y otros. Veremos a lo largo del capítuo las relaciones que existen entre los distintos conceptos, así como una serie de resultados que nos permitirán obtener unos a partir de otros, siendo de gran utilidad debido a que nos proporcionarán una demostración constructiva que podremos emplear.

Una vez introducidos los conceptos de lineabilidad, en el Capítulo 3 consideraremos dos conjuntos, el de las funciones sobreyectivas por doquier y el de las sucesiones de funciones que convergen en medida pero no en casi todo, estudiando la lineabilidad de ambos.

Por último, en el Capítulo 4, abordaremos el problema del estudio del tamaño algebraico de dos nuevos conjuntos de sucesiones de funciones, el de aquéllas que convergen puntualmente pero no uniformemente y aquéllas que convergen uniformemente pero no en norma L^1, siendo estos resultados completamente originales.

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de que el presente Trabajo sea lo más autocontenido posible, en este Capítulo vamos a incluir algunos conceptos básicos con los que trabajaremos a lo largo del mismo, así como algunos resultados que nos serán de gran utilidad a la hora de desarrollar los capítulos posteriores. Aunque la mayoría de estos resultados son de sobra conocidos por un Graduado en Matemáticas, creemos que su inclusión aquí no es superflua y nos permitirá una lectura más dinámica del Trabajo. Comentemos también que en la Sección 1.3 procederemos a recordar definiciones de distintos tipos de convergencia de sucesiones de funciones así como las relaciones entre éstas. Dicha sección cobra especial importancia ya que establece, junto a la lineabilidad, las bases para el estudio realizado en los capítulos posteriores.

1.1. Espacios métricos

Recordemos brevemente algunos conceptos y propiedades fundamentales de los espacios métricos y normados.

Definición 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ se llama métrica o distancia en X si y sólo si para todo $x, y, z \in X$ se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

El par (X,d) *se llama espacio métrico.*

Definición 1.2. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Una aplicación* $|| \cdot || : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *se llama norma sobre* X *si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$*, siendo* θ *el elemento nulo de* X*,*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ *para todos* $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$*,*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$*.*

El par $(X, \|\cdot\|)$ *se llama espacio normado (sobre* $\mathbb{K}$*).*

Teorema 1.3. *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces* (X,d) *es un espacio métrico con respecto a la métrica*

$$d(x,y) := \|x - y\|, \quad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Todo espacio normado puede ser considerado por lo tanto de forma natural como un espacio métrico. En lo siguiente, cuando hablemos de espacios normados como espacios métricos consideraremos siempre la métrica inducida por la norma. En este sentido, todas las definiciones y propiedades de espacios métricos inducirán inmediatamente las correspondientes equivalentes en espacios normados.

1.2. Funciones medibles

Vamos a estar trabajando con un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ siendo X un conjunto no vacío, $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en X y μ una medida definida en $\mathcal{M}$.

Definición 1.4. *Si $0 < p < +\infty$ y si f es una función (real o compleja) medible en X, sea*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Definimos entonces el espacio $L^p(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones f medibles para las que $\|f\|_p < \infty$. Llamaremos a $\|f\|_p$ la norma L^p de f.

Para estudiar el caso $p = +\infty$ debemos trabajar un poco más. Supongamos que tenemos una función $F : X \longrightarrow [0, +\infty]$ medible. Definimos el conjunto

$$S := \{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ \mu(F^{-1}((\alpha, +\infty])) = 0\}.$$

Si $S = \emptyset$ hacemos $\beta = \infty$, mientras que si $S \neq \emptyset$ definiremos $\beta = \text{ínf}\, S$. Como tenemos que

$$F^{-1}((\beta, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F^{-1}\left(\left(\beta + \frac{1}{n}, +\infty \right] \right),$$

y debido a que la unión anterior es numerable y de conjuntos que medida nula, dicha unión también tiene medida nula, por lo que tenemos que $\beta \in S$. Al número β se le denomina supremo esencial de F.

Definición 1.5. *Sea f una función medible en X. Definimos $\|f\|_\infty$ como el supremo esencial de $|f|$ y el espacio $L^\infty(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones f medibles en X tales que $\|f\|_\infty < +\infty$.*

En ocasiones, los elementos de $L^\infty(\mu)$ se denominan también funciones medibles esencialmente acotadas en X. De hecho, las funciones de $L^\infty(\mu)$ son aquéllas que están acotadas salvo u conjunto de medida nula. Dentro de un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se define el siguiente concepto de convergencia.

Definición 1.6. *Sea $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge uniformemente en casi todo X (a una función f) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ en casi todo $x \in X$ (respecto de la medida μ).*

Observemos que la convergencia en casi todo es trivialmente lineal respecto de la suma y el producto por escalares. En cuanto a la unicidad del límite hay que entenderlo siempre salvo un conjunto de medida nula, es decir, si $(f_n)_n$ converge uniformemente en casi todo X hacia dos funciones f y g, entonces $f = g$ en casi todo X.

Por otra parte, la convergencia en casi todo es realmente la natural en el espacio $L^\infty(\mu)$.

Proposición 1.7. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sean $(f_n)_n$ funciones medibles en X. Son equivalentes:*

(a) $f_n \longrightarrow f$ *uniformemente en casi todo X $(n \to \infty)$.*

(b) $\|f_n - f\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ *$(n \to \infty)$.*

Demostración. Por lineabilidad podemos asumir $f \equiv 0$. Si $\|f_n\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n < \varepsilon$ y

$$\mu(\{x \in X \;:\; |f_n(x)| > \alpha_n\}) = 0.$$

En particular, $|f_n(x)| \leq \alpha_n < \varepsilon$ en casi todo X. El recíproco es análogo. □

En lo que sigue nos referiremos a la convergencia uniforme en casi todo también como convergencia en $\|\cdot\|_{L^\infty}$ o en norma L^∞.

1.3. Tipos de convergencia

A lo largo de nuestro trabajo estudiaremos distintos tipos de convergencia, y estaremos interesados en espacios de sucesiones de funciones donde se tienen unos tipos de convergencia y otros no. Recordamos en esta sección brevemente los distintos conceptos de convergencia que vamos a manejar. Aunque hablando de sucesiones de funciones se pueden dar muchas definiciones de convergencia distintas, nosotros nos vamos a centrar en tipos de convergencia relacionados con espacios de medida. Recordaremos primero los conceptos de sobra conocidos de convergencia puntual y uniforme.

Definición 1.8. *Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge puntualmente en X (a una función f) si para todo $x \in X$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

es decir, si para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in N$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Diremos que $(f_n)_n$ converge uniformemente en X (a una función f) si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$.

Es claro, por la misma definición, que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. El recíproco no es cierto, como nos muestra el siguiente ejemplo. Recordemos antes que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en X si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Ejemplo 1.9. Sean $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) las funciones dadas por $f_n(x) := \frac{x}{n}$. Es claro que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Sin embargo,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n} \geq 1,$$

por lo que no se tiene convergencia uniforme a la función nula en $\mathbb{R}$.

A partir de ahora en esta sección suponemos que estamos en un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. La convergencia anterior se puede debilitar un poco si no la pedimos en "todo" X.

Definición 1.10. *Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge puntualmente en casi todo X (a una función f) si para casi todo $x \in X$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Recordemos que la convergencia uniforme en casi todo X, también llamada convergencia en norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ya había sido introducido en la Sección 1.2 anterior como la convergencia natural del espacio $L^\infty(\mu)$. Observemos que, trivialmente, la convergencia puntual implica la convergencia puntual en casi todo X y que la convergencia uniforme en X implica la convergencia uniforme en casi todo X. Los recíprocos no son ciertos. De hecho, en la convergencia en casi todo solo tenemos unicidad del límite entendida "salvo conjuntos de medida nula". Es claro que la convergencia uniforme en casi todo implica la puntual en casi todo. El recíproco no es cierto, como nos mostrará el Ejemplo 1.16.

A continuación introduciremos los últimos tipos de convergencia que estudiaremos en esta sección.

Definición 1.11. *Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge casi uniformemente (a una función f) si para casi todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \varepsilon$ y tal que f_n converge uniformemente a f en $E^c = X\backslash E$.*

Definición 1.12. *Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge en norma $\|\cdot\|_{L^1}$ (a una función f) si*

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} = \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty).$$

Definición 1.13. *Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge en medida (a una función f) si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$\mu\left(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty).$$

Veamos qué relación hay entre estos tipos de convergencia.

Teorema 1.14. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Se verifican:*

(a) Si f_n converge a f uniformemente en casi todo X, entonces f_n converge a f casi uniformemente en X.

(b) Si f_n converge a f casi uniformemente en X, entonces f_n converge a f puntualmente en casi todo X.

Demostración.

(a) Tenemos que $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en casi todo si y sólo si para todo $\delta > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $\mu(B_n) = 0$ siendo $B_n := \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}$. Definamos

$$B := \bigcup_{n=N}^{\infty} B_n.$$

Tenemos entonces que $B \in \mathcal{M}$ y

$$\mu(B) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) = 0,$$

por lo que $\mu(B) = 0$.

Además, si $x \notin B$, entonces $x \notin B_n$ para todo $n \geq N$ y se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $E(:= B) \in \mathcal{M}$, tal que $\mu(E) = \mu(B) = 0 < \varepsilon$ y $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $X \setminus E$.

(b) Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ casi uniformemente en X. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \in \mathcal{M}$ con $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ y tal que $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $X \setminus E_n$. Consideremos los conjuntos

$$F_m := \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

y sea F el conjunto definido por

$$F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \limsup_{n \to \infty} E_n.$$

Usando la subaditividad numerable de la medida se tiene que

$$\mu(F_m) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

luego $\mu(F) \leq \mu(F_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se tiene que $\mu(F) = 0$.

Más aún, sabemos que

$$F^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n^c = \liminf_{n\to\infty} E_n^c.$$

Debido a que f_n converge uniformemente, y por lo tanto puntualmente, a f en cada E_n^c, se deduce que f_n converge puntualmente a f en F^c.

□

Los recíprocos de las implicaciones anteriores no son ciertos como nos muestran los siguientes ejemplos. Recordemos antes que dado un conjunto $A \subset X$, se define la función característica de A como

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Es claro que en un espacio de medida, χ_A es medible si y sólo si A es medible.

En los siguientes ejemplos vamos a considerar el espacio de medida dado por $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de los conjuntos de Borel y m es la medida de Lebesgue.

Ejemplo 1.15. Sea $(f_n)_n$ la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = \chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x)$. Claramente $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $E = \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$ con $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$. Así, $m(E) \leq \varepsilon$. Además, para todo $n \geq N$ se tiene que $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$, luego $f_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash E$ y cada $n \geq N$. Luego, $f_n \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}\backslash E$, y $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ casi uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R} \; : \; |f_n(x) - f(x)| = 1\} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \backslash \{0\},$$

por lo que $m(\{x \in \mathbb{R} \; : \; |f_n(x) - f(x)| = 1\}) > 0$. Luego, para todo $\varepsilon \in (0,1)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$m(\{x \in \mathbb{R} \; : \; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \geq m(\{x \in \mathbb{R} \; : \; |f_n(x) - f(x)| = 1\}) > 0,$$

luego $f_n \not\longrightarrow f$ uniformemente en casi todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.16. Sean $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ las funciones dadas por $f_n(x) := \frac{x}{n}\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) + \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Es claro que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, por lo que converge puntualmente a 0 en casi todo $\mathbb{R}$ al ser $\mathbb{Q}$ un conjunto de medida nula.

Sea ahora cualquier conjunto $E \in \mathcal{B}$ tal que $m(E) < +\infty$. Entonces $m(\mathbb{R} \setminus E) = +\infty$. En particular, $R \setminus E$ no está acotado y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus E} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus E} \frac{|x|}{n} \geq 1.$$

Luego f_n no tiende a 0 uniformente en $\mathbb{R}\setminus E$ y no se tiene la convergencia casi uniforme en $\mathbb{R}$ de la sucesión $(f_n)_n$.

Teorema 1.17. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Se verifican*

(a) Si f_n converge a f en norma L^1, entonces f_n converge a f en medida.

(b) Si f_n converge a f casi uniformemente en X, entonces f_n converge a f en medida.

Demostración.

(a) Fijado $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} 1 d\mu \\ &\leq \int_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} \frac{1}{\varepsilon}|f_n - f| d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f_n - f| d\mu \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\|f_n - f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Luego si $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ en norma L^1, tenemos que

$$\mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow (n \to \infty)$$

y la sucesión $(f_n)_n$ converge a f en medida.

(b) Supongamos ahora que f_n converge a f casi uniformemente en X. Fijado $\varepsilon > 0$, hay que probar que $\mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Para ello, tomamos $\delta > 0$; como $f_n \longrightarrow f$ casi uniformemente en X, existe $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $X \backslash E$. Luego para el $\varepsilon > 0$ fijado anteriormente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $x \in X \backslash E$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pero esto último implica, en particular, que $\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E$, luego

$$\mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(E) < \delta.$$

Así, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que

$$\mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta,$$

es decir

$$\mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty).$$

$\square$

Tampoco en este caso son ciertos los recíprocos de las implicaciones.

Ejemplo 1.18. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ y sea $f_n := n\chi_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es claro que $f_n \longrightarrow f(x) = 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $\mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$m\left(\{x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq m\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Luego $f_n \longleftarrow f$ $(n \to \infty)$ en medida.

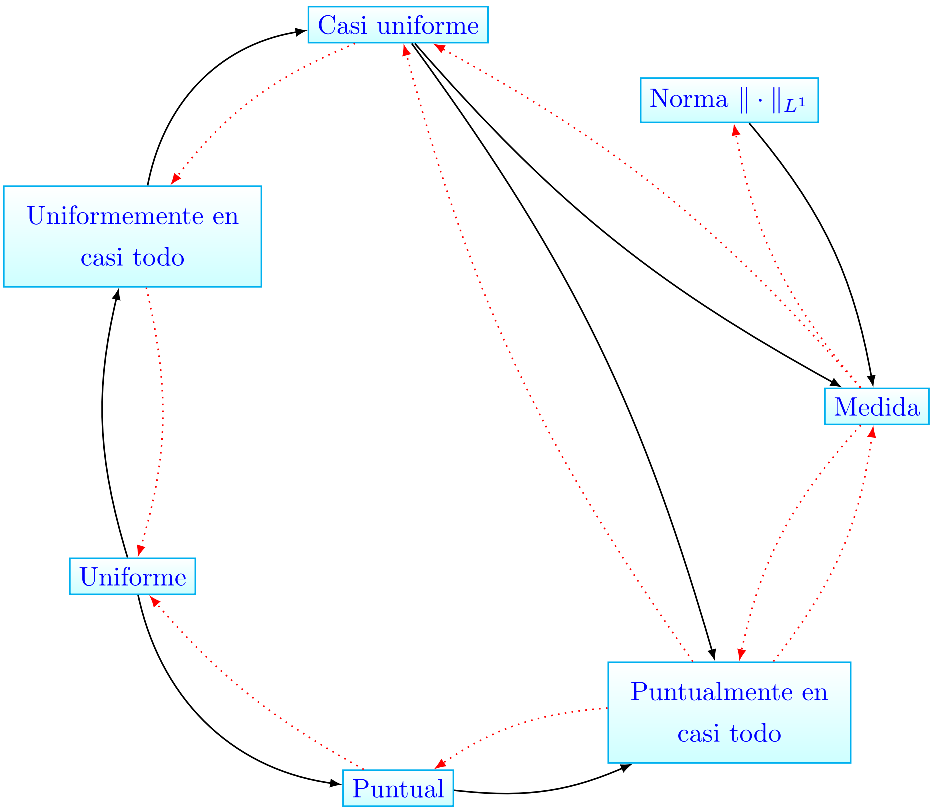
Sin embargo,

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm = n \cdot m\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = 1.$$

Por tanto, $f_n \not\longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ en norma L^1.

Un contraejemplo para ver que la convergencia en medida no implica la convergencia casi uniforme se dará en Capítulo 3, Ejemplo 3.5. De hecho, entonces comprobaremos que la convergencia en medida ni siquiera implica la convergencia puntual en casi todo X.

Para terminar con esta sección mostraremos un diagrama que nos resume todas las relaciones entre los tipos de convergencia estudiados.



Mediante $\longrightarrow$ hemos representado las implicaciones directas y con $\dashrightarrow$ los recíprocos que no se tienen.

1.4. F-espacios y espacios de Fréchet

Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, en el que hay definida una topología tal que:

1. La aplicación suma, definida por

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

   es continua.

2. La aplicación producto por escalares, definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda,y) & \longmapsto & \lambda \cdot y \end{array}$$

   es continua.

Definición 1.19. *Sean X un espacio vectorial y d una distancia sobre X. Se dice que dicha distancia d es* invariante por traslaciones*, si para cualesquiera vectores $x, y, a \in X$ se verifica que $d(x,y) = d(x+a, y+a)$.*

Así, un espacio vectorial topológico X es un *F-espacio*, si existe una distancia d invariante por traslaciones cuya topología asociada es la topología de X y para la que X es completo.

Si X es un F-espacio y d la distancia que define la topología, denotaremos por

$$\|x\| := d(x,0),$$

de modo que

$$\|x-y\| = d(x,y),\ \ (x,y \in X).$$

La aplicación $\|\cdot\|$ se llamará *F-norma* sobre X y cumple las siguientes propiedades:

- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ si $|\lambda| \leq 1$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

Para ser norma, faltaría que

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

sin embargo, se puede demostrar que se cumple que

$$\|\lambda x\| \leq (1 + |\lambda|)\|x\|$$

con lo que es posible trabajar con ella, en la práctica, como si de una verdadera norma se tratase. En efecto, si $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$\|\lambda x\| \leq \|x\| \leq (1 + |\lambda|)\|x\|.$$

Supongamos que $|\lambda| > 1$ y sea $N \in \mathbb{N}$ la parte entera de λ; entonces es claro que $0 < |\lambda| - N \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \|(\lambda - N)x + Nx\| \leq \|(\lambda - N)x\| + \|Nx\| \leq \|x\| + N\|x\| \\ &= (1 + N)\|x\| \leq (1 + |\lambda|)\|x\|. \end{aligned}$$

Definición 1.20. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define una* seminorma *en X como una aplicación $p : X \to [0, +\infty)$ de forma que, para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene*

(a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

es decir, una "norma" para la que hay vectores $x \neq 0$ con $p(x) = 0$.

Un *espacio localmente convexo* es un espacio vectorial topológico que es Hausdorff y tal que el 0 posee una base de entornos formada por conjuntos convexos.

Un *espacio de Fréchet* es un F-espacio que es localmente convexo; es decir, un espacio localmente convexo cuya distancia invariante por traslaciones genera una topología para la que X es completo.

1.5. Categoría

Vamos a introducir los conceptos de categoría y residualidad que nos serán de gran utilidad a la hora de profundizar en el estudio de los espacios con los que trabajaremos.

Dado $A \subset X$, denotamos por $\overline{A}$ su clausura y por $\text{int}(A)$ su interior. Comenzaremos viendo un par de conceptos previos.

Definición 1.21. *Sea (X, d) un espacio metrico.*

1. *Un subconjunto $M \subset X$ se llama denso en X si $\overline{M} = X$.*
2. *Un subconjunto $M \subset X$ se llama denso en ninguna parte si int$(\overline{M}) = \emptyset$.*

Definición 1.22. *Sea (X, d) un espacio metrico y sea $M \subset X$.*

1. *M se dice de primera categoría si puede escribirse como unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X.*
2. *M se dice de segunda categoría si no es de primera categoría.*

Definición 1.23. *Decimos que un espacio topológico X es de Baire si todo subconjunto de X, abierto y no vacío, es de segunda categoría.*

Definición 1.24. *Si el espacio topológico X es de Baire, decimos que un subconjunto $A \subset X$ es residual si su complementario es de primera categoría.*

En este aspecto, podemos interpretar que los conjuntos residuales de un espacio de Baire X son topológicamente grandes.

Teorema 1.25 (Baire). *Todo conjunto abierto no vacío de un espacio métrico completo (X, d) es de segunda categoría. En particular, X es de Baire.*

Demostración. Sea $M \neq \emptyset$ un conjunto abierto. Por reducción al absurdo, supongamos que M no fuera de segunda categoría. Entonces, M sería de primera categoría, por lo que existiría una sucesión $\{M_n\}$ de subconjuntos de X tal que:

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \text{con} \qquad \text{int}(\overline{M}_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado un elemento $x_0 \in M$, existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset M$, donde $B(x, r)$ denota la bola abierta de centro x y radio r y $\overline{B}(x, r)$ a la bola cerrada.

Debido a que M_1 es denso en ninguna parte, existe una bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0/2)$ (por tanto $\overline{B}(x_1, r_1) \subset M$) tal que $\overline{B}(x_1, r_1) \cap M_1 = \emptyset$. De nuevo, debido a que M_2 es denso en ninguna parte, existe una bola cerrada $\overline{B}(x_2, r_2) \subset \overline{B}(x_1, r_1/2)$ con $\overline{B}(x_2, r_2) \cap M_2 = \emptyset$. Repitiendo este argumento inductivamente encontramos una sucesión de puntos $\{x_n\}$ y de radios $\{r_n\}$ (con $0 < r_n \leq r_0 2^{-n}$) tales que:

(i) $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset M \quad (n \in \mathbb{N})$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

(iii) $\overline{B}(x_n, r_n) \cap M_n = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N})$.

Por lo tanto, existe un único $\widetilde{x} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subset M$. Sin embargo, por construcción de las bolas $\overline{B}(x_n, r_n)$ tenemos que $\widetilde{x} \notin M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego en particular $\widetilde{x} \notin M$, lo cual es una contradicción. □

Corolario 1.26. *Si M es de primera categoría en un espacio métrico completo (M, d) entonces $X \backslash M$ es denso en X.*

Demostración. Sea $N := X \backslash M$, y supongamos que existe $a \in X \backslash \overline{N}$. Debido a que $\overline{N}$ es un conjunto cerrado, tenemos que $\operatorname{dist}(a, \overline{N}) > 0$. En consecuencia, existe una bola abierta $B(a, \varepsilon)$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap N = \emptyset$, es decir, $B(a, \varepsilon) \subset M$. Pero por el Teorema de Baire, $B(a, \varepsilon)$ es de segunda categoría, y por lo tanto también lo sería M, lo cual es una contradicción. □

1.6. Teorema de Hahn-Banach y dualidad

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados. Definimos

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{F : X \longrightarrow Y \ : \ F \ \text{ es lineal y continua}\}.$$

Dadas $F, G \in \mathcal{L}X, Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos

$$(F + G)(x) := F(x) + G(x), \qquad (\alpha F)(x) := \alpha F(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Con estas operaciones de suma y producto por escalares, dotamos de estructura vectorial a $\mathcal{L}(X,Y)$. Más aún, si $F \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X=1} \|F(x)\|_Y < +\infty$$

define una norma sobre $\mathcal{L}(X,Y)$, la cual recibe el nombre de norma operador de F, siendo así $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ un espacio normado, el cual es completo si Y también es completo.

En el caso en el que tomemos el espacio $Y = \mathbb{K}$ obtenemos $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$, el espacio dual de X, al cual denotaremos por X^*. Sus elementos $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ se llaman funcionales lineales sobre X. El espacio dual $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es siempre un espacio de Banach.

Teorema 1.27 (**Teorema de Hahn-Banach**)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sea $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(i) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, *para todo* $\alpha \geq 0$ *y todo* $x \in X$.

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, *para todos* $x, y \in X$.

Más aún, supongamos que X_0 es un subespacio vectorial de X y que $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X_0$. Entonces existe una aplicación lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_{|X_0} = f_0$ y $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.28 (**Teorema de Hahn-Banach en espacios normados**)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, X_0 un subespacio vectorial de X y $f_0 \in X_0^*$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f_{|X_0} = f_0$ y $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$.*

Capítulo 2

Lineabilidad: resultados generales

Grandes matemáticos de diversas épocas se han sentido atraídos y fascinados por la existencia de grandes estructuras algebraicas que verifican ciertas propiedades que, a priori, contradicen la intuición matemática. Un ejemplo claro de este hecho es la idea que se mantuvo hasta finales del siglo XIX, donde se creía que el carácter geométrico de la gráfica de una función caracterizaba el comportamiento analítico de la misma. Se tenía así la creencia de que no había funciones continuas que fuesen no derivables en una cantidad "grande" de puntos. En el año 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass demostró [18] la existencia de funciones continuas no derivables en ningún punto, proporcionando el primer ejemplo de lo que hoy en día se conocen como Monstruos de Weierstrass. Posteriormente, Gurariy, Aron, Seoane y otros [3, 11], probaron que existen espacios vectoriales de dimensión infinita de este tipo de funciones.

En las últimas décadas han sido muchos los matemáticos que han dedicado parte de su investigación a la búsqueda de la existencia de estructuras algebraicas. En muchas ocasiones, dar un ejemplo concreto de una función que verifica una propiedad particular es muy complicado, pero sorprendentemente, podemos obtener, a partir de esto, que existen muchas de éstas funciones.

Para poder obtener la existencia de ciertas estructuras algebraicas deberemos comenzar estudiando los conceptos acuñados por el matemático ruso Vladimir I. Gurariy [11, 12], los cuales presentamos a continuación.

Definición 2.1. *Dado un espacio vectorial topológico X, decimos que un subconjunto $M \subset X$ es lineable (respectivamente espaciable) en X si existe un espacio vectorial de dimensión infinita (respectivamente un espacio vectorial cerrado de dimensión infinita) Y tal que $Y \subset M \cup \{0\}$.*

Observemos que, aunque hablamos de lineabilidad de M, dicho conjunto no tiene por qué tener realmente una estructura vectorial. De hecho, el elemento neutro o nulo 0 ni tiene por qué, ni se puede esperar que pertenezca al conjunto M. Observemos que si un elemento cumple una propiedad "extraña", su opuesto también deberá, como ocurre con los Monstruos de Weierstrass, por ejemplo, pero entonces la función nula no es "extraña".

En el presente Trabajo necesitaremos una definición más precisa y completa de la lineabilidad introducida por Gurariy. Esta definición recoge algunos conceptos que han utilizando diversos matemáticos en estos últimos años (ver [2])

Definición 2.2. *Sean X un espacio vectorial topológico y $M \subset X$ un subconjunto. Sea μ un número cardinal (finito o infinito).*

1. *Decimos que M es $\mu-$lineable (respectivamente $\mu-$espaciable) si $M \cup \{0\}$ contiene un espacio vectorial (respectivamente un espacio vectorial cerrado) Y de dimensión μ. En ocasiones, diremos simplemente que M es lineable o espaciable si el subespacio vectorial Y existente es de dimensión infinita.*

2. *Si el espacio vectorial Y anterior puede escogerse denso en X, diremos que M es $\mu-$denso-lineable.*

3. *Además, si el espacio vectorial Y cumple que dim$(Y) =$ dim(X), diremos que M es maximal-lineable, o maximal denso-lineable si además Y es denso en X.*

Observemos que, con esta nueva definición, Gurariy hacía referencia precisamente al concepto de $\aleph_0$-lineabilidad (donde $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$).

A continuación daremos algunas condiciones necesarias para obtener la lineabilidad densa a partir de un cierto conjunto ya lineable. Para ello, deberemos introducir el concepto de conjunto fuerte.

Definición 2.3. *Sea X un espacio vectorial. Sean A y B son subconjuntos de X. Decimos que A es más fuerte que B si $A + B \subset A$.*

Podemos destacar, por ejemplo, que el conjunto de las funciones continuas $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es más fuerte que el conjunto de los polinomios de coeficientes reales $\mathcal{P}$, o que el conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es más fuerte que $\mathbb{Q}$.

Observemos que si $0 \in A$, entonces en particular $B \subset A$. Pero esto no será así en la mayoría de los casos que trabajaremos. El siguiente resultado [3] nos proporciona una condición suficiente para poder traspasar la densidad entre dos conjuntos lineables.

Teorema 2.4. *Sea X un espacio vectorial topológico. Sean A y B dos subconjuntos de X, tales que A es lineable y B es denso lineable. Si A es más fuerte que B, entonces A es denso lineable en X.*

Demostración. Por la lineabilidad de los conjuntos A y B existen dos espacios vectoriales de dimensión infinita Y y Z tales que $Y \subset A\cup\{0\}$, $Z \subset B\cup\{0\}$, siendo, además, Z denso y de dimensión infinita en X. Al ser Y un espacio vectorial de dimensión infinita podemos encontrar una sucesión $(y_n)_n \subset Y$ de elementos independientes tales que $\|y_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La densidad de Z nos proporciona una sucesión $(z_n)_n \subseteq Z$ densa en X. Veamos que las trasladadas por las z_n de los y_n nos da nuestro espacio vectorial denso. Sea W el espacio vectorial generado por la sucesión $\left(\frac{1}{n}y_n + z_n\right)_n$, es decir,

$$W := \operatorname{span}\left\{\frac{1}{n}y_n + z_n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Veamos en primer lugar que $W \subset A \cup \{0\}$. En efecto, si tomamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$ números naturales distintos tenemos que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(\frac{1}{n_j}y_{n_j} + z_{n_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{n_j}y_{n_j} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j z_{n_j} := y_0 + z_0.$$

Por la independencia lineal de los y_n tenemos que $y_0 \in Y\setminus\{0\} \subset A$. Si $z_0 = 0$, $y_0 + z_0 \in Y \subset A$; por contra, si $z_0 \neq 0$, entonces $z_0 \in B$ y se tiene, $y_0 + z_0 \in A + B \subseteq A$ porque A es más fuerte que B.

Por último, obtenemos la densidad de W directamente de la construcción realizada, ya que el conjunto $\{z_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ había sido escogido denso en X, luego también lo es el conjunto $\left\{\frac{1}{n} y_n + z_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Para comprobarlo, fijemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\{z_n\}$ existe n_0 tal que $\|x - z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto

$$\left\|\frac{1}{n_0} y_{n_0} + z_{n_0} - x\right\| \leq \frac{1}{n_0}\|y_{n_0}\| + \|x - z_{n_0}\| = \frac{1}{n_0} + \|x - z_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos así que A es denso lineable en X. □

En la literatura el resultado anterior se presenta en diversas versiones. Nosotros vamos a destacar una en particular debido a que la usaremos en el Capítulo 3.

Lema 2.5. *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico metrizable. Sea $A \subset X$ maximal-lineable. Supongamos que existe un subconjunto $B \subset X$ denso-lineable tal que A es más fuerte que B y además $A \cap B = \emptyset$. Entonces A es maximal-denso-lineable en X.*

Demostración. La prueba es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que la maximalidad y el hecho de ser $A \cap B = \varnothing$ nos aseguran que $\dim(X) = \dim(Y) \leq \dim(W)$. Luego, $\dim(W) = \dim(X)$. □

A continuación veremos un resultado de Bernal de 2008 [2], el cual consiguió mejorar en 2010, y que nos permite obtener la lineabilidad densa bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.6 (Bernal). *Sea X un espacio vectorial topológico metrizable y separable. Sea Γ una familia de subespacios vectoriales de X tales que $\bigcap_{S \in \Gamma} S$ es denso en X. Entonces se verifica:*

(a) Si $\bigcap_{S \in \Gamma} (X \setminus S)$ es $\mu-$lineable, donde μ es un cardinal infinito, entonces contiene un subespacio vectorial denso de dimensión μ.

(b) En particular, si $\bigcap_{S\in\Gamma}(X\backslash S)$ *es lineable, entonces es denso-lineable. Además, si* $\bigcap_{S\in\Gamma}(X\backslash S)$ *es maximal-lineable, entonces es maximal-denso-lineable.*

Recordemos que, dado un espacio vectorial X y un subespacio vectorial propio $Y \subset X$, se define $\mathrm{codim}(Y)$ como la dimensión del complemento algebraico de Y en X.

Teorema 2.7. *Sea X un espacio vectorial topológico metrizable y separable e Y un subespacio vectorial de X. Si $X\backslash Y$ es lineable, entonces $X\backslash Y$ es denso lineable. En consecuencia, ambas propiedades de lineabilidad y lineabilidad-densa para $X\backslash Y$ son equivalentes si X tiene dimensión infinita.*

Demostración. Es evidente que $X\backslash Y$ es lineable si y sólo si Y tiene codimensión algebraica infinita. Las hipótesis del teorema implican que X tiene una base numerable de abiertos $(G_n)_n$. Como $X\backslash Y$ es lineable, en particular, $Y \subsetneq X$, por lo que $\mathrm{int}(Y) = \varnothing$, luego $X\backslash Y$ es denso. Eso significa que existe un $x_1 \in G_1\backslash Y$. Como $\mathrm{codim}(Y) = \infty$, tenemos que $\mathrm{span}\{Y \cup \{x_1\}\} \subsetneq X$. Entonces, se tiene de nuevo que $\mathrm{int}(\mathrm{span}\{Y \cup \{x_1\}\}) = \varnothing$. Luego, existe un nuevo $x_2 \in G_2\backslash(\mathrm{span}\{Y \cup \{x_1\}\})$. Siguiendo este procedimiento, construimos de forma recursiva una sucesión de vectores $(x_n)_n$ verificando que

$$x_n \in G_n\backslash(\mathrm{span}\{Y \cup \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, el conjunto formado por $(x_n)_n$ es denso. Si ahora definimos $M := \mathrm{span}\{(x_n)_n\}$ se tiene que M es un espacio vectorial denso y $M\backslash\{0\} \subset X\backslash Y$. □

Sin embargo, incluso en el caso de la no separabilidad se puede encontrar un resultado similar al anterior.

Teorema 2.8. *Sea X un F-espacio no separable e Y un subespacio vectorial cerrado separable de X. Entonces $X\backslash Y$ es maximal lineable.*

Demostración. Consideremos Z el espacio vectorial que es el complemento algebraico de Y, de modo que $Z\backslash\{0\} \subset X\backslash Y$. Observemos que

$$\dim(Y) \leq \mathfrak{c} \leq \dim(X) = \dim(Y) + \dim(Z).$$

Si $\dim(Z) \leq \aleph_0$ entonces Z sería separable. Pero como Y es separable, entonces $X = Y + Z$ sería separable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe ser $\dim(Z) \geq \mathfrak{c}$, pero como $\dim(Y) \leq \mathfrak{c}$, debe ser $\dim(Z) = \dim(X)$, que es lo que queríamos demostrar. □

Observemos que aquí juega un papel fundamental el suponer cierto como axioma la Hipótesis del Continuo.

El siguiente resultado nos muestra que siempre podemos encontrar espaciabilidad y/o densa-lineabilidad en cualquier espacio de Banach. Por contra, también nos muestra que no hay relación entre la densa-lineabilidad y la espaciabilidad.

Teorema 2.9 (Aron, García-Pacheco, Pérez-García, Seoane-Sepúlveda, 2009). *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional.*

(a) Existe un subconjunto $M \subset X$ tal que M es espaciable y denso, aunque no es denso-lineable.

(b) Existe un subconjunto $M \subset X$ tal que M es lineable y denso, pero no es espaciable. Si X es separable, entonces M puede escogerse también denso-lineable.

Demostración.

(a) Consideremos un subespacio propio cerrado cualquiera $Y \subset X$ de dimensión infinita. Denotemos por Z al complemento algebraico de Y en X, y sea $\mathcal{B}$ una base de Hammel de Z. Consideremos a continuación

$$M := Y + \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\},$$

donde por $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\}$ entendemos el espacio vectorial de las combinaciones racionales finitas sobre $\mathcal{B}$. Veamos que el conjunto M satisface las propiedades requeridas.

En primer lugar, M es espaciable pues, por construcción, $Y \subset M$. Por otro lado, como hemos tomado las combinaciones racionales, es decir, sobre $\mathbb{Q}$, se tiene que $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\}$ es denso en Z, por lo que $M = Y + \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\}$ es denso en $Y + Z = X$.

Para ver que M no es denso lineable razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un subespacio vectorial W de X denso y contenido en $M \cup \{0\} = M$. Sea $w \in W$. Entonces podemos expresar

$$w = y + q_1 b_1 + \ldots + q_n b_n,$$

donde $y \in Y$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$. Nuestro objetivo es demostrar que debe ser $q_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, pues en dicho caso tendremos que $W \subset Y$, por lo que no podrá ser denso, pues Y es cerrado en X. Supongamos que algún coeficiente $q_i \neq 0$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que es $q_1 \neq 0$. Entonces, como $\frac{\pi}{q_1} w \in W \subset M$, se tiene que

$$\frac{\pi}{q_1} w = y' + b',$$

siendo $y' \in Y$, y $b' \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\}$. Igualando ambas expresiones se tiene que

$$\frac{\pi}{q_1} w = \frac{\pi}{q_1} y + \frac{\pi}{q_1} q_1 b_1 + \ldots + \frac{\pi}{q_1} q_n b_n = y' + b',$$

lo cual sólo es posible si se verifican

$$y' = \frac{\pi}{q_1} y, \quad \text{y} \quad \pi b_1 + \frac{\pi}{q_2} b_2 \ldots + \frac{\pi}{q_1} q_n b_n = b'$$

(recordemos que $\mathcal{B}$ está en el complemento algebraico de Y).

De la segunda condición se deduce que

$$\pi b_1 + \frac{\pi}{q_2} b_2 + \ldots + \frac{\pi}{q_1} q_n b_n \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\},$$

pero como $b_1 \in \mathcal{B}$, esto último sólo es posible si $\pi \in \mathbb{Q}$, llegando así a una clara contradicción. Por tanto $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, y se tiene que $W \subset Y$, lo cual es de nuevo una contradicción, debido a que Y es un subespacio cerrado y propio, finalizando así la prueba.

(b) Denotemos mediante $\mathcal{B}$ a una base de Hamel arbitraria del espacio X. Como X es de dimensión infinita, podemos encontrar un conjunto numerable $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}$. Vamos a escribir

$$X = Y \oplus Z$$

donde $Y = \text{span}\{B\}$ y $Z = \text{span}\{\mathcal{B}\backslash B\}$, y sea

$$M = Y + \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\backslash B\}.$$

Veamos que M satisface, efectivamente, las propiedades requeridas.

Primero, debido a que $Y \subset M$, obtenemos que M es lineable. Además, la densidad se deduce del hecho de que $\text{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\backslash B\}$ es denso en Z, por lo que $M = Y + \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{B}\backslash B\}$ es denso en $Y + Z = X$.

Por último, supongamos por reducción al absurdo que M es espaciable. Entonces existiría W subespacio vectorial cerrado de X de dimensión infinita contenido en $M \cup \{0\} = M$. Entonces, razonando de forma análoga al apartado (a) obtendríamos que $W \subset Y$, lo cual es imposible debido a que la cardinalidad de cualquier base de Hamel de W es no numerable.

Observemos que, si X es separable, entonces podemos escoger el conjunto Y de modo que sea denso en X, por lo que obtendríamos que M es denso-lineable en lugar de solo lineable.

$\square$

En los resultados anteriores hemos visto cómo obtener la lineabilidad densa a partir de la lineabilidad de un conjunto, así como algunas relaciones entre los conceptos de lineabilidad y espaciabilidad. Por tanto, la pregunta natural que surge inmediatamente es ¿cómo obtenemos la lineabilidad de un conjunto?

Actualmente, el método más habitual es una estrategia constructiva. En ella, para obtener la lineabilidad de un conjunto de objetos con una propiedad particular, se busca una base adecuada con elementos de dicho conjunto. El espacio generado por dicha base será el candidato potencial

A pesar de ello, es cierto que no existen muchas más técnicas, siendo la mayoría de ellas constructivas. Existen algunas técnicas que nos garantizan la existencia de dicho espacio vectorial, aunque desgraciadamente, no son muy generales. Incluso hasta hace poco, para ciertos conjuntos no se han obtenido resultados de existencia que garanticen su lineabilidad.

Por otra parte también podemos preguntarnos qué ocurre con la espaciabilidad, es decir, si exigimos que el espacio vectorial que buscamos sea cerrado. En este caso, es más complicado obtener resultados explícitos que nos proporcionen criterios generales para obtener la espaciabilidad. Antes de ver algunos de estos criterios, necesitaremos de un lema previo.

Lema 2.10. *Si E es un espacio de Fréchet de dimensión infinita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de modo que la topología débil coincide con la topología de Fréchet, entonces E es isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.*

Demostración. Como la topología sobre E es la de Fréchet, entonces existe una base numerable de entornos del cero en E, por lo que debe existir una cantidad numerable de funcionales lineales que determinen a la topología débil. Eso significa que el espacio topológico dual E^* de E debe tener dimensión algebraica numerable. Sea $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$ una base algebraica de E^* y consideremos la aplicación $\pi : E \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por $\pi(y) = (\Phi_j(y))_{j\in\mathbb{N}}$. Es claro que es lineal, continua e inyectiva. Además es un homeomorfismo sobre su rango debido a que E está dotado de la topología débil. Por tanto, se tiene que $\pi(E)$ es completo y cerrado en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Por el Teorema de Hahn-Banach y la independencia lineal de los Φ_j, obtenemos que $\pi(E) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de donde se deduce que π es un isomorfismo. $\square$

Ya estamos en condiciones de enunciar los resultados conocidos sobre espaciabilidad.

Teorema 2.11 (Wilansky, Kalton). *Si X es un espacio de Fréchet e $Y \subset X$ es un subespacio lineal cerrado, entonces el complemento $X\backslash Y$ es espaciable si y sólo si Y tiene codimensión infinita.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Fréchet y que Y es un subespacio vectorial cerrado. Es inmediato que la espaciabilidad de $X\backslash Y$ implica que Y tiene codimensión infinita. Además, debido a que los subespacios vectoriales de dimensión finita siempre están complementados, tan solo debemos considerar la situación en la que tanto Y como el complemento $X\backslash Y$ son espacios de Fréchet de dimensión infinita.

Consideremos primero la situación en la que la topología de Y coincide con la topología débil de Y. En este caso, por el Lema 2.10, obtenemos que Y es isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. El Teorema de Hahn-Banach implica entonces que Y está complementado en X, y que el núcleo de la proyección es un subespacio cerrado contenido en $(X\backslash Y) \cup \{0\}$. De este modo obtenemos la espaciabilidad de $X\backslash Y$ en este caso.

Supongamos ahora que la topología de Y no es la misma que la topología débil. Debido a que la topología de Y tiene una base de entornos del cero formada por conjuntos convexos cerrados (por ejemplo, las bolas unitarias cerradas con la norma semicontinua), también tiene una base de entornos del cero formada por conjuntos débilmente cerrados ya que si A es un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo, entonces A es cerrado si y sólo si A es débilmente cerrado. Por esta nueva suposición, existe una red $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_\alpha \longrightarrow 0$ en la topología débil pero no en la topología de F-espacio. Por lo tanto, existe un entorno fuerte U del cero tal que $y_\alpha \notin U$ para todo α. Por un resultado de Kalton [13, Teorema 3.2], existe una sucesión básica $(y_n)_n$ en Y que está contenida en el complemento de U. Esta sucesión básica está acotada entonces lejos del cero. Aplicando estas consideraciones al cociente $X\backslash Y$, podemos concluir que $X\backslash Y$ contiene una sucesión básica $(x_n + Y)_n$. Debido a Kalton [13, Lema 4.3], tenemos que existe una sucesión $(t_n)_n \subset (0, +\infty)$ tal que $(y_n + t_n x_n)_n$ es una sucesión básica en X. Definimos a continuación

$$Z := \overline{\text{span}}\{y_n + t_n x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $x \in Z \cap Y$, entonces existen escalares λ_n con

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y_n + t_n x_n).$$

Considerando el cociente, tenemos que

$$0 = x + Y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y_n + t_n x_n),$$

por lo que debe ser $\lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x = 0$ y $Z \cap Y = \{0\}$. Luego, $Z \subset (X\backslash Y) \cup \{0\}$, lo cual prueba que $X\backslash Y$ es espaciable. $\square$

A partir del Teorema 2.11, los autores Kitson y Timoney consiguen el siguiente resultado que cierra el capítulo.

Teorema 2.12 (Kitson, Timoney, 2011). *Sea Z_n con $n \in \mathbb{N}$ una colección de espacios de Banach y X un espacio de Fréchet. Sean $T_n : Z_n \longrightarrow X$ aplicaciones lineales continuas e Y el subespacio vectorial generado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(Z_n)$. Si Y no es cerrado en X, entonces el complemento $X\setminus Y$ es espaciable.*

Capítulo 3

Lineabilidad de sucesiones de funciones: resultados conocidos

El objetivo del presente Capítulo es el estudio de resultados ya conocidos sobre lineabilidad de algunas familias de sucesiones de funciones. Hemos de decir que hasta el momento son pocos los resultados en este sentido, estando todos ellos recogidos en el artículo [1]. En la primera sección presentaremos la clase de las funciones medibles Lebesgue que son sobreyectivas por doquier (*everywhere surjective*, en inglés) y demostraremos su $\mathfrak{c}$-lineabilidad. Esto nos permitirá deducir la $\mathfrak{c}$-lineabilidad de las sucesiones de funciones medibles Lebesgue sobreyectivas por doquier y convergentes puntualmente a 0. En la segunda sección, consideraremos la familia de sucesiones de funciones medibles Lebesgue que convergen puntualmente a 0 pero no uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. El estudio de la lineabilidad de esta última familia nos permitirá seguir una metodología estándar para el estudio de la lineabilidad de otras familias de sucesiones de funciones que presentaremos en el Capítulo final.

3.1. Funciones sobreyectivas por doquier

Para comenzar, establezcamos el concepto de función sobreyectiva por doquier.

Definición 3.1. *Decimos que una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es sobreyectiva por doquier si* *verifica que* $f(I) = \mathbb{R}$ *para cualquier intervalo* $I \subset \mathbb{R}$

Observemos que, en el caso de las funciones sobreyectivas por doquier, lo máximo que debemos exigir para poder aplicar resultados de convergencia en espacios de sucesiones es la medibilidad (Lebesgue), ya que resulta imposible obtener la continuidad de dichas funciones (recordemos que una función continua sobre un compacto está acotada).

Denotaremos por $\mathcal{MES}$ (del inglés, *mesurable everywhere surjective*) a la clase de funciones medibles y sobreyectivas por doquier.

El resultado que veremos a continuación establece la $\mathfrak{c}$-lineabilidad de conjunto $\mathcal{MES}$. Esto puede parecer sorprendente, pues se sabe que el conjunto de las funciones de Jones (que son sobreyectivas por doquier, pero no medibles) es $2^{\mathfrak{c}}$-lineable (ver [9, 10]).

Teorema 3.2. *El conjunto* $\mathcal{MES}$ *es* $\mathfrak{c}$*-lineable.*

Demostración. Vamos a comenzar viendo cómo expresar ciertas funciones medibles y sobreyectivas por doquier de forma adecuada para nuestro propósito. Para ello, partimos de la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ compuesta por todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con extremos racionales, es decir, $I_n = (p_n, q_n) \subset \mathbb{R}$ con $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que el intervalo I_1 contiene un conjunto de tipo Cantor, llamémosle C_1. Entonces, $I_2 \backslash C_1$ también contiene un conjunto de tipo Cantor (ya que $I_2 \backslash C_1$ contiene a un intervalo), al cual denotaremos por C_2. De nuevo, $I_3 \backslash (C_1 \cup C_2)$ contiene un conjunto de tipo Cantor, al cual llamaremos C_3. Iterando este argumento, podemos construir una sucesión disjunta de conjuntos de tipo Cantor $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$C_n \subset I_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_k \right).$$

Como la cardinalidad los conjuntos de tipo Cantor coincide con la de $\mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar una biyección $\Phi_n : C_n \longrightarrow \mathbb{R}$. A continuación, definimos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} \Phi_n(x) & \text{si } x \in C_n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente f es sobreyectiva por doquier, ya que se obtiene de la sobreyectividad de cada Φ_n. En efecto, dado un intervalo arbitrario $I \subset \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \subset I$. Por lo tanto

$$f(I) \supset f(I_k) \supset f(C_k) = \Phi_k(C_k) = \mathbb{R}.$$

Sin embargo, la función f es cero en casi todo (respecto a la medida de Lebesgue), ya que es no nula en los conjuntos C_n, siendo

$$0 \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) = 0,$$

por lo que, en particular, f es también medible Lebesgue. Por lo tanto, $f \in \mathcal{MES}$, con lo cual hemos sido capaces de construir fácilmente una función medible y sobreyectiva por doquier, que usaremos más adelante.

A continuación vamos a construir un espacio vectorial que nos será de gran utilidad para obtener la lineabilidad buscada. Consideremos primero para ello

$$\Lambda := \text{span}\{\varphi_\alpha \;:\; \alpha > 0\},$$

donde $\varphi_\alpha(x) := e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$. Veamos en primer lugar que las funciones φ_α, para $\alpha > 0$, son linealmente independientes. Para ello supongamos que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ no todos nulos y números reales positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p > 0$ tales que

$$c_1\varphi_{\alpha_1}(x) + c_2\varphi_{\alpha_2}(x) + \ldots + c_p\varphi_{\alpha_p}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \geq 2$, $c_p \neq 0$ y $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$. Pero entonces,

$$\lim_{x\to+\infty} \big(c_1\varphi_{\alpha_1}(x) + c_2\varphi_{\alpha_2}(x) + \ldots + c_p\varphi_{\alpha_p}(x)\big) = \text{sgn}(c_p)\cdot\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_p > 0, \\ -\infty & \text{si } c_p < 0, \end{cases}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe ser $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$ tal y como queríamos demostrar.

Debido a que las funciones φ_α son linealmente independientes y a que $\alpha \in (0, +\infty)$, concluimos que Λ es un espacio vectorial $\mathfrak{c}$-dimensional. Observemos que si tomamos los escalares c_i y α_i con $i = 1, 2, \ldots, p$ como antes, entonces cada miembro no nulo de la forma

$$g = \sum_{i=1}^{p} c_i \varphi_{\alpha_i} \in \Lambda$$

es continuo y sobreyectivo, donde esto último se deduce de la continuidad y del hecho de que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_p > 0, \\ -\infty & \text{si } c_p < 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } c_p > 0, \\ +\infty & \text{si } c_p < 0. \end{cases}$$

Ya estamos en condiciones de abordar la lineabilidad de $\mathcal{MES}$. Sea

$$M := \{g \circ f \ : \ g \in \Lambda\}.$$

Como Λ es un espacio vectorial, es claro que M también lo es. Además, debido a que las funciones f son medibles y que los elementos de Λ son continuos, los miembros de M son medibles. Veamos que también son sobreyectivas por doquier. Para ello, fijemos un $h \in M \backslash \{0\}$; entonces existen un número finito de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ con $c_p \neq 0$ y números reales positivos $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ tales que podemos expresar $h = g \circ f$, donde

$$g = c_1 \varphi_{\alpha_1} + c_2 \varphi_{\alpha_2} + \ldots + c_p \varphi_{\alpha_p}.$$

Si fijamos un intervalo no degenerado $I \subset \mathbb{R}$ tenemos que $f(I) = \mathbb{R}$, por ser $f \in \mathcal{MES}$, luego

$$h(I) = g\left(f(I)\right) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

lo cual nos dice que, efectivamente, h es sobreyectiva por doquier. Así, $M \backslash \{0\} \subset \mathcal{MES}$.

Acabamos de ver la lineabilidad de $\mathcal{MES}$, pero para obtener la $\mathfrak{c}$-lineabilidad hay que comprobar que las funciones $\{\varphi_\alpha \circ f \ : \ \alpha > 0\}$ son linealmente independientes. Supongamos por reducción al absurdo que son linealmente dependientes, es decir, que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ con $c_p \neq 0$ y números reales positivos $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 = c_1(\varphi_1 \circ f)(x) + c_2(\varphi_2 \circ f)(x) + \ldots + c_p(\varphi_{\alpha_p} \circ f)(x).$$

Pero para cada $i = 1, \ldots, p$ y cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $(\varphi_{\alpha_i} \circ f)(x) = \varphi_{\alpha_i}(f(x))$, luego

$$c_1\varphi_{\alpha_1}(f(x)) + c_2\varphi_{\alpha_2}(f(x)) + \ldots + c_p\varphi_{\alpha_p}(f(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pero como f es una función sobreyectiva por doquier, la igualdad anterior se tiene también con $x \in \mathbb{R}$ en lugar de $f(x) \in \mathbb{R}$, es decir

$$0 = c_1\varphi_{\alpha_1}(x) + c_2\varphi_{\alpha_2}(x) + \ldots + c_p\varphi_{\alpha_p}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y al ser las funciones φ_{α_i} con $i = 1, 2, \ldots, p$ linealmente independientes, se tiene que $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$, lo cual es una contradicción, por lo que deben ser las funciones $\varphi_\alpha \circ f$ linealmente independientes tal y como queríamos demostrar. Con ello finaliza la prueba de que M es un espacio vectorial de dimensión $\mathfrak{c}$, siendo así el espacio $\mathcal{MES}$ $\mathfrak{c}$-lineable. □

Como consecuencia de este resultado, podemos estudiar, por primera vez a lo largo del Trabajo, la lineabilidad de un conjunto de sucesiones de funciones. En concreto, la familia de sucesiones de funciones de $\mathcal{MES}$ tales que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $\mathbb{R}$.

Corolario 3.3. *La familia de las sucesiones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles Lebesgue, sobreyectiva por doquier y tales que f_n converge puntualmente a cero, es $\mathfrak{c}$-lineable.*

Demostración. Sea M el subespacio vectorial de $\mathcal{MES} \cup \{0\}$ contruido en el teorema anterior. Para cada $h \in M$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $H_{n,h}(x) := \frac{1}{n}h(x)$ y sea $\widetilde{M} := \{(H_{n,h})_n \ : \ h \in M\}$.

Es claro que $\widetilde{M}$ es un subespacio vectorial de la familia de sucesiones de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que $\dim(\widetilde{M}) = \dim(M) = \mathfrak{c}$ y que $H_{n,h}(x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ para cada

$x \in \mathbb{R}$. Además, para cada $h \neq 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $H_{n,h} \in \mathcal{MES}$ (pues $h \in \mathcal{MES}$ y esta propiedad se mantiene por producto de escalares no nulos).

Así pues, $\widetilde{M}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{c}$-dimensional de sucesiones de funciones de $\mathcal{MES}$ que convergen puntualmente a 0. $\square$

3.2. Convergencia en medida vs Convergencia en casi todo

En esta Sección vamos a ver que la convergencia en medida y la convergencia puntual en casi todo no están relacionadas. A continuación estudiamos la lineabilidad del espacio de sucesiones de funciones que convergen en medida a la función idénticamente nula pero que no convergen puntualmente en casi todo.

Consideraremos m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel. En nuestro caso vamos a restringirnos al intervalo $[0,1]$, el cual tiene medida de Lebesgue finita $m([0,1]) = 1$. Denotemos por L_0 al espacio de las (clases) de funciones medibles Lebesgue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, donde recordamos que dos funciones f y g se identifican ($f \sim g$) si coinciden en casi todo $[0,1]$. De este modo observamos que los conceptos de convergencia puntual en casi todo y de convergencia en medida resultan bastante naturales para ser estudiados. Más aún, la convergencia en medida tiene muy buenas propiedades, debido a que puede ser descrita mediante una métrica o distancia natural en L_0.

Lema 3.4. *Sea $\rho : L_0 \times L_0 \longrightarrow [0,+\infty)$ la métrica dada por*

$$\rho(f,g) = \int_{[0,1]} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Se verifica que $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ si y sólo si $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ en medida.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$I_n := \int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f = 0$. Por lo tanto, basta demostrar que $I_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, se tiene $m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$.

Vamos a usar en la demostración el hecho de que la función $p : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) := \frac{x}{x+1}$ es creciente, y que para todo $\varepsilon > 0$ podemos escribir

$$I_n = \int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx = \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx + \int_{\{|f_n| < \varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx.$$

Si partimos de que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ en medida, por definición $m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Por tanto

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &\leq \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} 1 dx + \int_{|f_n| < \varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} dx \\ &= m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \longrightarrow \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

es decir, $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} I_n \leq \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Recíprocamente, si $I_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx &\geq \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx \\ &\geq \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} dx = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Luego

$$0 \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq I_n \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty),$$

por lo que, efectivamente, $m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ para cada $\varepsilon > 0$. □

Bajo la topología generada por ρ, el espacio L_0 se convierte en un espacio vectorial topológico completo metrizable. Sea S el conjunto de las funciones simples y medibles, es decir,

$$S := \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \ : \ A_i \in \mathcal{B}, \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Se tiene que S es un subespacio vectorial denso de L_0. Más aún, el conjunto $S_0(\subset S)$ formado por las combinaciones finitas con coeficientes racionales de funciones características de intervalos de extremos racionales también es denso en L_0 y, como es numerable, se tiene que L_0 es separable.

Sabemos que la convergencia casi uniforme implica la convergencia en medida. Sin embargo, si rebajamos la convergencia casi uniforme a la convergencia puntual en casi todo, es rápido encontrar ejemplos de que ésta no implica la convergencia en medida, por ejemplo $(\chi_{[n,n+1]})_n$. En efecto, hay convergencia puntual pues fijado $x \in \mathbb{R}$ la sucesión toma el valor 0 a partir de un n_0 (concretamente, la parte entera de x más 1); por otra parte, cada función toma el valor 1 en un conjunto de medida 1, luego no puede haber convergencia en medida.

El recíproco no es tan sencillo. De hecho se conoce que la convergencia en medida de una sucesión $(f_n)_n$ a una cierta función f implica que existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ convergente a f puntualmente en casi todo [16, Theorem 21.9]. Pero, en general, esta subsucesión no tiene por qué ser la sucesión completa (f_n). De hecho, la llamada sucesión del telegrafista (en inglés, *Typewriter Sequence*) nos proporciona el ejemplo buscado.

Ejemplo 3.5. Consideramos las funciones $T_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$T_n := \chi_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]},$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ los enteros no negativos j y k vienen únivocamente determinados por $n = 2^k + j$ con $0 \leq j < 2^k$. Observemos que $T_1 = \chi_{[0,1]}$, $T_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $T_3 = [1/2, 1]$, $T_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $T_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $T_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $T_7 = \chi_{[3/4,1]}$, etc. Veamos que $T_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ en medida pero, para cada punto $x_0 \in [0,1]$, la sucesión $\{T_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

Para ver la convergencia en medida debemos comprobar que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in [0,1] \ : \ |T_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Observemos que

$$|T_n(x)| = T_n(x) = \chi_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}(x),$$

por lo que, para un ε suficientemente pequeño ($\varepsilon < 1$), tenemos que

$$\{x \in [0,1] \ : \ |T_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right].$$

Pero si $n \to \infty$ entonces también $k \to \infty$, por lo que

$$m\left(\{x \in [0,1] \ : \ |T_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}\right) = m\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tan sólo resta ver que no se puede conseguir la convergencia puntual en casi todo $[0,1]$. Para ello, fijemos $x_0 \in [0,1]$ y estudiamos la convergencia de la sucesión $(T_n(x_0))_n$. Observemos que, fijado $k \in \mathbb{N}$, el punto x_0 estará en 1 (a lo más 2) intervalos de la familia finita $\left\{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \ : \ j = 0, 2, \ldots, 2^k - 1\right\}$. Luego, por definición de T_n, tenemos que $(T_n(x_0))_n$ toma infinitas veces el valor 1 e infinitas veces el valor 0 y no se tiene la convergencia puntual para ningún $x_0 \in [0,1]$.

Con el objetivo de tratar de abordar la lineabilidad de este fenómeno debemos estudiar el problema en el marco adecuado. Consideremos para ello el espacio $L_0^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de funciones $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles, junto con la topología producto. Debido a que el espacio L_0 es metrizable y separable, obtenemos que el espacio $L_0^{\mathbb{N}}$ es también un espacio vectorial topológico separable metrizable y completo, lo cual de nuevo, gracias al Teorema de Baire, nos dice que $\dim(L_0^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$. Más aún, el conjunto

$$L_{00} := \{\Phi = (f_n) \in L_0^{\mathbb{N}} \ : \ \exists N = N(\Phi) \in \mathbb{N} \mid f_n = 0 \ \forall n \geq N\}$$

es denso en el espacio producto.

Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado de lineabilidad.

Teorema 3.6. *La familia de sucesiones $(f_n) \in L_0^{\mathbb{N}}$ tales que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ en medida pero (f_n) no converge puntualmente en casi todo $[0,1]$ es maximal denso-lineable en $L_0^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} := \left\{(f_n)_n \in L_o^{\mathbb{N}} : \ f_n \longrightarrow 0 \text{ en medida, } f_n \not\longrightarrow 0 \text{ puntualmente en casi todo } [0,1]\right\}.$$

Por el Ejemplo 3.5, se tiene que la sucesión del Telegrafista $(T_n)_n \in \mathcal{A}$.

Vamos a extender cada función T_n a $\mathbb{R}$ definiendo $T_n(x) = 0$ para $x \notin [0,1]$. Consideremos ahora para cada $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ la sucesión dada por

$$T_{n,t}(x) := T_n(2(x-t)) = \chi_{\left[\frac{j}{2^{k+1}}+t, \frac{j+1}{2^{k+1}}+t\right]}.$$

Lo que hemos hecho es comprimir la sucesión del Telegrafista al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ para después desplazarla hacia delante según $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. En concreto, $T_{1,t} = \chi_{[t,1/2+t]}$, $T_{2,t} = \chi_{[t,1/4+t]}$, $T_{3,t} = [1/4+t, 1/2+t]$, $T_{4,t} = \chi_{[t,1/8+t]}$, $T_{5,t} = \chi_{[1/8+t,1/4+t]}$, $T_{6,t} = \chi_{[1/4+t,3/8+t]}$, $T_{7,t} = \chi_{[3/8+t,1/2+t]}$, etc. De esta forma, es claro que $(T_{n,t})_n \in L_0^{\mathbb{N}}$ y que $T_{n,t} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ en medida para cada $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Consideremos el espacio vectorial

$$M = \operatorname{span}\left\{ (T_{n,t})_{n\in\mathbb{N}} \ : \ t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\},$$

el cual será nuestro candidato para demostrar la lineabilidad de $\mathcal{A}$. Comencemos viendo la independencia lineal de las sucesiones $(T_{n,t})_n$. Por reducción al absurdo, supongamos que fuesen linealmente dependientes, es decir, que existan $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < \frac{1}{2}$ y escalares $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ con $c_s \neq 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$c_1 T_{n,t_1} + c_2 T_{n,t_2} + \ldots + c_s T_{n,t_s} = 0, \quad \text{en casi todo } [0,1].$$

En particular, para $n = 1$ tendríamos que

$$c_1 T_{1,t_1}(x) + c_2 T_{1,t_2}(x) + \ldots + c_s T_{1,t_s}(x) = 0 \text{ en casi todo } [0,1],$$

lo cual equivale a decir que

$$c_1 \chi_{\left[t_1, t_1+\frac{1}{2}\right]}(x) + c_2 \chi_{\left[t_2, t_2+\frac{1}{2}\right]}(x) + \ldots + c_s \chi_{\left[t_s, t_s+\frac{1}{2}\right]}(x) = 0 \text{ en casi todo } [0,1].$$

Pero entonces podemos encontrar $x \in \left(\text{máx}\left\{t_s, t_{s-1} + \frac{1}{2}\right\}, t_s + \frac{1}{2}\right]$ tal que, al sustituir en la igualdad anterior, se obtiene

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_{s-1} \cdot 0 + c_s \cdot 1 = c_s = 0,$$

lo que contradice el hecho de haber escogido $c_s \neq 0$, con lo que finalizamos la prueba de la independencia lineal y obtenemos, además, que $\dim(M) = \mathfrak{c}$.

Por otro lado, debido a que L_0 es un espacio vectorial topológico considerado con la topología de la convergencia en medida, tenemos entonces que cada miembro de

$$(F_n)_n := (c_1 T_{n,t_1} + c_2 T_{n,t_2} + \ldots + c_s T_{n,t_s}) \in M$$

es una sucesión que tiende a 0 en medida, pues cada sucesión $(T_{n,t})_n$ lo es.

A continuación veremos que nuestras sucesiones así descritas no tienden puntualmente a 0 en casi todo $[0,1]$. Para ello, fijemos $(F_n)_n \in M$. Como hemos dicho anteriormente,

$$(F_n)_n := (c_1 T_{n,t_1} + c_2 T_{n,t_2} + c_s T_{n,t_s})$$

con $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < \frac{1}{2}$, $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ y $c_s \neq 0$. De nuevo, para casi todo $x \in \left(\text{máx}\left\{t_s, t_{s-1} + \frac{1}{2}\right\}, t_s + \frac{1}{2}\right]$ tenemos que

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j T_{n,t_j}(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j T_n(2(x - t_j)) = c_s T_n(2(x - t_s)).$$

Como $c_s \neq 0$ y la sucesión $(T_n(y))_n$ no converge para cada casi todo $y \in (\text{máx}\{0, 2(t_{s-1} - t_s) + 1\}, 1] \subset [0,1]$, deducimos que, para casi todo $x \in \left(\text{máx}\left\{t_s, t_{s-1} + \frac{1}{2}\right\}, t_s + \frac{1}{2}\right]$, la sucesión $(F_n(x))_n$ no es convergente. Luego $F_n(x) \not\to 0$ $(n \to \infty)$ en casi todo $[0,1]$. Esto termina de demostrar que $M \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A}$ es efectivamente $\mathfrak{c}$-lineable.

Por último, consideremos los conjuntos $X = L_0^{\mathbb{N}}$, $B = L_{00}$ y $A = \mathcal{A}$. Tenemos trivialmente que A es más fuerte que B y que B es denso lineable (en realidad es un subespacio vectorial denso). Además, hemos probado ya que A es maximal-lineable, y como $A \cap B = \varnothing$ (ya que las sucesiones de B son puntualmente convergentes a 0), aplicando el Lema 2.5 obtenemos que $A = \mathcal{A}$ es maximal-denso-lineable. $\square$

Capítulo 4

Otras convergencias y lineabilidad

En este último capítulo vamos a considerar dos familias de sucesiones de funciones, aquellas que convergen puntualmente a cero pero no uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, y aquellas que convergen uniformemente en $[0, +\infty)$ pero no en norma $\| \cdot \|_{L^1}$. Abordaremos nuevamente el problema de encontrar en dichas familias un subespacio vectorial M, viendo qué podemos afirmar acerca de su dimensión. En el primer caso seremos capaces de proporcionar un resultado análogo al obtenido para la sucesión del telegrafista.

Queremos resaltar que no existen muchos resultados sobre lineabilidad en familias de sucesiones de funciones aparte de los presentados en el capítulo anterior y que los resultados que veremos a continuación son completamente originales.

4.1. Convergencia puntual vs Convergencia uniforme

En la Sección 1.3 vimos la definición de convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones de funciones. Es obvio que la segunda implica la primera, pero no al revés como nos muestra el Ejemplo 1.9. No es difícil dar otros contraejemplos distintos de éste, incluso con sucesiones de funciones simples.

Ejemplo 4.1. Sean $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ las funciones definidas como

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x).$$

Por ser $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$, se tiene que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $[0,1]$. Por otra parte

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Luego, $f_n \not\longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $[0,1]$.

Observemos que las funciones f_n anteriores son funciones simples tales que la siguiente intersección es vacía:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right] = \varnothing.$$

Esto es en realidad un resultado general. De hecho, es posible caracterizar la convergencia de dichas funciones.

Proposición 4.2. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de números reales tales que o bien converge a 0 o bien existe $M > 0$ tal que $|\alpha_n| > M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $E_n \in \mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}$ y sea $f_n = \alpha_n \chi_{E_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Se verifica:*

(a) f_n converge puntualmente a cero si y sólo si $\alpha_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ ó $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} E_m = \varnothing$.

(b) f_n converge uniformemente a cero si y sólo si $\alpha_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$.

Demostración.

(a) Supongamos que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en X. Si $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} E_m = \varnothing$, ya estaría demostrado. Supongamos entonces que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} E_m \neq \varnothing$ y sea x un elemento de dicha intersección. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ con $m_n \geq n$ tal que $x \in E_{m_n}$. Entonces

$$|\alpha_{m_n}| = |f_{m_n}(x)| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty),$$

entonces, por la hipótesis sobre $(\alpha_n)_n$ la sucesión completa debe ser convergente a 0.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha_n \to 0$ ó que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} E_m = \varnothing$. Para cada $x \in X$,

$$|f_n(x)| = |\alpha_n| \chi_{E_n}(x) \leq |\alpha_n|.$$

Si $\alpha_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$, entonces $f_n(x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} E_m = \varnothing$, entonces, dado $x \in X$, sólo puede estar en una cantidad finita de conjuntos E_n. Por tanto $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ salvo, a lo más, una cantidad finita de naturales y se tiene la convergencia a 0 de $(f_n(x))_n$.

(b) Supongamos que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ uniformemente en X. Si $\alpha_n \not\longrightarrow 0$, entonces existe $M > 0$ tal que $|\alpha_n| > M > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon = \frac{M}{2} > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ es $|f_n(x)| < \frac{M}{2}$ para todo $x \in X$. Pero entonces, por definición de $f_n(x)$, tenemos que $f_n \equiv 0$ para todo $n \geq m$. Pero como $\alpha_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debe ser $E_n = \varnothing$ para todo $n \geq m$ lo que es imposible por hipótesis.

El recíproco es inmediato porque si $\alpha_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ y para todo $x \in X$ es $|f_n(x)| < \alpha_n$.

□

Aunque el resultado anterior ya nos proporciona numerosas sucesiones de funciones con convergencia puntual pero no uniforme, la pregunta natural que surge es saber cuántas hay, y a qué nos referimos exáctamente al hablar de cantidad. En este aspecto, trataremos de ver si existe una buena estructura algebraica que soporte a este tipo de funciones, es decir, estamos interesados en demostrar su lineabilidad. Para este tipo de funciones, seremos capaces de ver un resultado muy similar al visto en el Capítulo anterior para la familia de sucesiones de funciones que convergían en medida pero no es casi todo.

Teorema 4.3. *La familia de las sucesiones $(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}}$ tales que $f_n \longrightarrow 0$ ($n \to \infty$) puntualmente en $[0,1]$ pero $(f_n)_n$ no converge uniformemente en $[0,1]$, es maximal denso-lineable en $L_0^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \{(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}} :\ f_n \longrightarrow 0 \text{ puntualmente en } [0,1],\ f_n \not\longrightarrow 0 \text{ uniformemente en } [0,1]\}.$$

Consideremos las funciones del Ejemplo 4.1, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) dadas por

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x).$$

Sabemos que la sucesión $(f_n)_n \in \mathcal{A}$. Podemos extender cada f_n a todo $\mathbb{R}$ definiendo $f_n(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in (0, 1/2)$ vamos a comprimir y trasladar las funciones f_n. Definimos las funciones $f_{n,t} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_{n,t}(x) = \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(2(x-t)) = \chi_{\left[\frac{1}{2(n+1)}+t, \frac{1}{2n}+t\right]}(x).$$

Veamos que para cada $t \in (0,1/2)$ la sucesión $(f_{n,t})_n$ converge puntualmente a 0 en $[0,1]$. Para $x \in [0,t]$ es trivial porque $f_{n,t}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in (t,1]$, basta tener en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + t\right) = t < x$$

para obtener que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ es $f_{n,t}(x) = 0$.

Vamos a tomar ahora el espacio vectorial

$$M := \operatorname{span}\{(f_{n,t})_n :\ t \in (0,1/2)\}.$$

Comenzaremos demostrando la independencia lineal de las sucesiones $(f_{n,t})_n$ con $0 < t < 1/2$. Por reducción al absurdo, supongamos que fuesen linealmente dependientes. Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < 1/2$ y escalares $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ con $c_s \neq 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene la igualdad

$$c_1 f_{n,t_1}(x) + c_2 f_{n,t_2}(x) + \ldots + c_s f_{n,t_s}(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Sin embargo, si tomamos $x \in I_s := \left(\text{máx}\left\{\frac{1}{2(n+1)} + t_s, \frac{1}{2n} + t_{s-1}\right\}, \frac{1}{2n} + t_s\right]$ obtenemos que

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_s \cdot 1 = c_s = 0,$$

contradiciendo el hecho de haber tomado $c_s \neq 0$. Esto prueba la independencia lineal de las sucesiones de funciones, y además $\dim(M) = \mathfrak{c}$.

Veamos ahora que $M \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}$. Para ello, fijemos cualquier sucesión $(G_n)_n \in M$. Podemos escribir $G_n = c_1 f_{n,t_1} + c_2 f_{n,t_2} + \ldots + c_s f_{n,t_s}$ $(n \in \mathbb{N})$ donde $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < 1/2$ y $c_1, c_2, \ldots, c_s$ escalares no nulos. Por la linealidad de la convergencia puntual, tenemos que $G_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $[0, 1]$. Veamos que la convergencia no es uniforme. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{[0,1]} |G_n(x)| \geq \sup_{I_s} |G_n(x)| = \sup_{I_s} |c_s f_{n,t_s}(x)| = |c_s| > 0.$$

Esto prueba que $M \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A}$ es $\mathfrak{c}$-lineable.

Por último, si consideramos los conjuntos $X = L_0^{\mathbb{N}}$, $B = L_{00}$ y $A = \mathcal{A}$, aplicando el Lema 2.5 obtenemos que $\mathcal{A}$ es maximal-denso-lineable. $\square$

4.2. Convergencia uniforme vs Convergencia $\|\cdot\|_{L^1}$

Para finalizar este capítulo y el trabajo, hemos querido estudiar sucesiones de funciones medibles que convergen a 0 uniformemente en un conjunto X pero que no convergen en norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Observemos que estos dos modos de convergencia no tienen relación entre sí.

Si consideramos la sucesión de funciones $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ dada por

$$f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}(x),$$

tenemos un ejemplo de sucesión de funciones que converge uniformemente a 0 pero no en norma L^1. En efecto, como $f :_n (x) \leq \frac{1}{n}$ para cada $x \geq 0$, se tiene la convergencia uniforme. Por otro lado,

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_{[0,+\infty)]} |f_n(x)| dx = \int_0^n \frac{1}{n} dx = 1,$$

muestra que no ha convergencia en norma L^1.

Recíprocamente, la sucesión $((1-nx)\chi_{[0,1/n]}(x))_n$ es un ejemplo trivial de sucesión convergente a 0 en norma L^1, pero no uniformemente.

Veamos que podemos dar una estructura lineal al conjunto de sucesiones uniformemente convergentes a 0 pero no en norma L^1.

Teorema 4.4. *La familia de sucesiones $(f_n)_n \in L_0([0,+\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que $f_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $[0,+\infty)$ pero no en norma L^1 es lineable.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} := \{(f_n)_n \in L_0[0,+\infty)^{\mathbb{N}} : \ f_n \longrightarrow 0 \ (n \to \infty) \text{ unif. en } [0,+\infty), \ \|f_n\|_{L^1} \not\longrightarrow 0\}.$$

Vamos a dividir el intervalo $[0,+\infty)$ en infinitas sucesiones de intervalos disjuntos entre sí salvo, a lo más, en los extremos. Para cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $M = 1,\dots,N$, sea

$$I_{N,M} := \left[\sum_{j=1}^{N-1} j(N-j) + \frac{M(M-1)}{2}, \sum_{j=1}^{N-1} j(N-j) + \frac{M(M+1)}{2}\right].$$

Concretamente, $I_{1,1} = [0,1]$, $I_{2,1} = [1,2]$, $I_{2,2} = [2,4]$, $I_{3,1} = [4,5]$, $I_{3,2} = [5,7]$, $I_{3,3} = [7,10]$, etc. Observemos que para cada $M \in \mathbb{N}$, los intervalos $I_{N,M}$ son todos de longitud exactamente M y claramente son todos disjuntos 2 a 2 salvo en los extremos de los intervalos consecutivos.

Para cada $k,n \in \mathbb{N}$, sea $f_{k,n} := \frac{1}{n}\chi_{I_{k+n-1,n}}$. En concreto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_{1,n} = \frac{1}{n}\chi_{I_{n,n}}$, $f_{2,n} = \frac{1}{n}\chi_{I_{n+1,n}}$, $f_{3,n} = \frac{1}{n}\chi_{I_{n+2,n}}$, etc.

Sea $M := \operatorname{span}\{(f_{k,n})_n : \ k \in \mathbb{N}\}$. Por ser los soportes de todas las funciones $f_{k,n}$ disjuntos 2 a 2 (salvo, a lo más, en los extremos), es inmediato que las sucesiones son linealmente independiente y M es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Por construcción, para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_{k,n})_n$ es uniformemente convergente a 0 en $[0,+\infty)$, pero no en norma L^1. De hecho, $\|f_{n,k}\|_{L^1} = 1$ para todo $k,n \in \mathbb{N}$. Por linealidad, tendremos convergencia uniforme de cualquier sucesión de M y, además, no tendremos convergencia en norma L^1 porque

$$\|c_1 f_{n,k_1} + \cdots + c_s f_{n,k_s}\|_{L^1} = |c_1| + \cdots + |c_s| \neq 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $M \subset \mathcal{A}$ y tenemos que $\mathcal{A}$ es lineable. □

Para finalizar, observemos que a diferencia de la Sección anterior y el Capítulo 3, en este caso no hemos estudiado la lineabilidad densa. Esto es debido a que ahora estamos trabajando en el conjunto $[0, +\infty)$, el cual no es compacto, como ocurría con el intervalo $[0, 1]$, por lo que el espacio $L_0[0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ no es metrizable y no podemos aplicar los resultados conocidos. El estudio de la lineabilidad densa y la búsqueda de herramientas que lo hagan posible queda como problema abierto para continuar el presente trabajo.

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] G. Araújo, L. Bernal-González , G. A. Muñóz-Fernández, J. A. Prado-Bassas y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in sequence and function spaces*, ArXiV http://arxiv.org/abs/1507.04477.

[2] R. M. Aron, L. Bernal-González , D. M. Pellegrino y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The search for linearity in mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2015.

[3] R. M. Aron, F. J. García-Pacheco , D. Pérez-García y J. B. Seoane-Sepúlveda, *On dense lineability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Topology **48** (2009) 149-156.

[4] L. Bernal-González, *Dense-lineability in spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, (2008), no. 9, 3163-3169.

[5] L. Bernal-González y M. Ordóñez-Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3997–4025.

[6] L. Bernal-González, D. Pellegrino y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2013), 71–130.

[7] P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñóz-Fernández y J. B. Seoane-Sepúlveda, *On Weierstrass' Monsters and lineability*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **20** (2013), 577–585.

Otras Referencias

[8] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174-179.

[9] J. L. Gámez-Merino, *Large algebraic structures inside the set of surjective functions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **18**, (2011), no. 2, 297-300.

[10] J. L. Gámez-Merino, G. A. Muñóz-Fernández, V. M. Sánchez y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sierpinsky-Zygmund functions and other problems on lineability*, Proc. Amer. Soc. **138** (2010), no. 11, 3863-3876.

[11] V. I. Gurariy. *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971-973 (Russian).

[12] V. I. Gurariy. *Linear spaces composed of everywhere nondifferentiable functions*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **44** (1991), no. 5, 13-16 (Russian).

[13] N. J. Kalton, *Basic sequences in F-spaces and their applications*, Proc. Edinb. Math. Soc. **(2) 19** (1974/1975), 151-167.

[14] D. Kitson and R. M. Timoney *Operator ranges and spaceability*,J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), no. 2, 680-686.

[15] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. **3** (1931), 92-94.

[16] O. A. Nielsen, *An introduction to integration and measure theory*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997. A Wiley-Interscience Publication.

[17] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1980.

[18] K. Weierstrass, *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872.