



DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

**TESIS DOCTORAL**

**TÉCNICAS ESTADÍSTICAS ESPACIALES Y  
TEMPORALES PARA EL ANÁLISIS DE LA  
CONVERGENCIA**

Autor

**Miguel Ángel Pino Mejías**

Directora

**M<sup>a</sup> Dolores Cubiles de la Vega**

M<sup>a</sup> Dolores Cubiles de la Vega, Profesora Titular del Departamento de Estadística e Investigación Operativa, de la Universidad de Sevilla.

Certifica que la presente memoria titulada:

**TÉCNICAS ESTADÍSTICAS ESPACIALES Y TEMPORALES PARA EL ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA**

Ha sido realizada bajo mi dirección por:

**Miguel Angel Pino Mejías,**

Y constituye su tesis para optar al grado de Doctor

Y para que conste, en cumplimiento de la legalidad vigente y a los efectos que haya lugar, firmo el presente documento.

En Sevilla, 30 de septiembre de 2015

Fdo. Dra. D<sup>a</sup>. María Dolores Cubiles de la Vega

# Agradecimientos

Deseo iniciar la presente tesis de la manera que entiendo como más apropiada, expresando mis reconocimientos a las personas que me han apoyado durante un proceso tan duro y sacrificado como es el de la redacción de los contenidos que ahora se ponen a disposición del resto de la comunidad. El logro de este auténtico sueño, de esta ilusión que tan difícil ha sido de alcanzar, se fundamenta, como resulta evidente, en el esfuerzo, tesón y dedicación de la Directora de este proyecto, Mariló, docente de reconocido prestigio y magnífica tutora. Otras dos presencias familiares, la de Rafael y José Luis, han contribuido a profundizar en la complejidad de la materia y me han transmitido sabias recomendaciones que, en la medida de lo posible, he intentado incorporar a estas páginas. Los errores por omisión son responsabilidad mía. Sin ellos este estudio no se habría materializado.

También quiero hacer constar mi agradecimiento a Monika Bartkowska, investigadora en el *Institute for Economic Geography and GIScience (Vienna University of Economics and Business)* con quien contacté para solicitarle información sobre sus desarrollos en el ámbito del test log t de convergencia. Su respuesta, rápida y efectiva, me facilitó la compleja tarea asociada a la parametrización de los algoritmos empleados en este contexto.

Centrándome en un plano más personal, en esta sección tiene que figurar, forzosamente, la presencia de Carmina: sin su ayuda constante en el día, sin su sacrificio personal, sin su dedicación desinteresada a las personas que le hemos pedido apoyo (aunque éste lo ha brindado siempre de manera natural, sin necesidad de especificarlo), tampoco podríamos hablar de la realidad de este proyecto.

Me centro por último en las dos personas, Manuela y Pablo, que constituyen mi centro vital y quienes, con su mera presencia, me han animado día a día a continuar esforzándome, a desarrollar un bucle de mejora que espero se haya materializado en este trabajo. Con ellos todo cobra sentido y junto a ellos comparto la satisfacción por la tarea realizada.

En este instante en el que concluye la redacción de la tesis pienso en el mundo sobre el que he investigado, el de los hombres y mujeres que, como señala Anselin, existen realmente debajo de los números y de las estadísticas, y deseo un futuro pleno en convergencia, en el que cesen las desigualdades abismales y en el que mis seres queridos puedan vivir en paz y armonía.

Miguel Ángel Pino Mejías

Sevilla, 30 de septiembre de 2015

# Resumen

La presente tesis estudia los procesos de convergencia entre las economías, considerando las dos líneas principales de análisis que se han centrado históricamente en este fenómeno. En un primer gran bloque se procede a la revisión de los modelos econométricos clásicos, a la identificación de sus predicciones respecto a dichos procesos de crecimiento y al reconocimiento de los principales estudios empíricos realizados en este ámbito. En una segunda agrupación de contenidos, en consonancia con el desarrollo histórico de las investigaciones sobre la materia, se revisa el marco teórico que establece la econometría espacial y, de manera específica, se consideran distintas aproximaciones, de reciente aparición, orientadas a la identificación de agrupamientos derivados de los procesos de convergencia. Se incorporan diferentes análisis propios, basados en datos reales y focalizados en los estados y regiones europeas, que han supuesto: (i) la aplicación y, en su caso, desarrollo de las correspondientes herramientas estadísticas planteadas en los modelos teóricos que sustentaban cada estudio; y (ii) obtener inferencias respecto a la evolución de las economías consideradas. Se identifica como resultado colateral de este proceso la elaboración de rutinas informáticas en lenguaje R, que constituyen una aportación al enriquecimiento de este entorno de programación.

# Contenido

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>1. EL CRECIMIENTO ECONÓMICO Y SU RELACIÓN CON EL PROCESO DE CONVERGENCIA.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>1.2 Aproximaciones al concepto de crecimiento económico. Resultados empíricos globales.....</b>	<b>5</b>
<b>1.3 La consideración de la heterogeneidad en los estudios empíricos sobre crecimiento y convergencia .....</b>	<b>20</b>
1.3.1 Evolución mundial de la renta per cápita .....	20
1.3.2 Evolución europea de la renta per cápita .....	27
<b>1.4 Políticas de cohesión en la Eurozona .....</b>	<b>41</b>
<b>1.5 Estrategia Europa 2020.....</b>	<b>50</b>
<b>2. MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO E IMPLICACIONES EN LOS PROCESOS DE CONVERGENCIA .....</b>	<b>55</b>
<b>2.1 Introducción.....</b>	<b>55</b>
<b>2.2 Análisis de modelos de crecimiento económico .....</b>	<b>55</b>
<b>2.3 El Modelo de Ramsey.....</b>	<b>58</b>
<b>2.4 Modelo Harrod-Domar.....</b>	<b>65</b>
<b>2.5 Modelo Solow-Swan .....</b>	<b>70</b>
<b>2.6 Modelo Cass-Koopmans-Ramsey .....</b>	<b>80</b>
<b>2.7 Modelos de crecimiento endógeno .....</b>	<b>90</b>
2.7.1 Modelo AK .....	91
2.7.2 Modelo de bienes públicos .....	94
2.7.3 Modelo con aprendizaje por la práctica y desbordamiento de conocimiento .....	98
2.7.4 Modelo de acumulación de capital humano .....	102
2.7.5 Modelos de crecimiento con I+D.....	108

<b>3. LOS PROCESOS DE CONVERGENCIA SIN LA CONSIDERACIÓN DE EFECTOS ESPACIALES .....</b>	<b>121</b>
3.1 Introducción.....	121
3.2 Objetivos de la medida de la convergencia .....	121
3.3 Procesos de $\beta$ -convergencia.....	124
3.3.1 Descripción y relación con los modelos neoclásicos.....	124
3.3.2 Observaciones a la hipótesis de $\beta$ -convergencia.....	133
3.3.3 Condicionamiento de los estudios empíricos sobre $\beta$ -convergencia .....	147
3.3.4 Análisis empíricos generales de modelos de crecimiento y de procesos de $\beta$ -convergencia	150
3.4 Convergencia y <i>catching-up</i> tecnológico. Evidencias empíricas. ....	171
3.5 Convergencia estocástica .....	190
3.6 Procesos de $\sigma$ -convergencia.....	196
3.6.1 Descripción de las medidas de $\sigma$ -convergencia.....	196
3.6.2 Observaciones respecto a las medidas de $\sigma$ -convergencia. Consideración de las dinámicas de distribución. ....	212
3.6.3 Análisis empíricos de ámbito general de procesos de $\sigma$ -convergencia .....	215
3.7 Análisis de las distribuciones.....	219
3.8 Estudios empíricos en la Unión Europea.....	223
3.8.1 Diversos análisis existentes en la literatura .....	223
3.8.2 Estudio sobre $\sigma$ -convergencia en UE-28.....	232
<b>4. INFLUENCIA DE LOS EFECTOS ESPACIALES EN LOS PROCESOS DE CONVERGENCIA .....</b>	<b>241</b>
4.1 Introducción.....	241
4.2 El concepto de econometría espacial. ....	241
4.3 Tratamiento espacial de variables.....	252
4.3.1 La naturaleza de los datos espaciales. ....	252
4.3.2 Modelos econométricos espaciales.....	254
4.3.3 El fenómeno de autocorrelación espacial.....	261
4.3.4 La heterogeneidad espacial .....	269
4.4 Modelización espacial de $\beta$ -convergencia .....	273
4.5 Clubs de convergencia.....	278
4.5.1 Desarrollo teórico .....	278
4.5.2 Estudios empíricos .....	285
4.6 Cadenas de Markov.....	289
4.6.1 Descripción .....	289
4.6.2 Estudios empíricos .....	303

<b>4.7</b>	<b>Mixturas de modelos de regresión lineal.....</b>	<b>316</b>
4.7.1	Descripción .....	316
4.7.2	Estudios empíricos .....	320
<b>4.8</b>	<b>Modelos panel .....</b>	<b>326</b>
4.8.1	Modelos panel sin efectos espaciales.....	326
4.8.2	Modelos panel incluyendo efectos espaciales.....	328
<b>5.</b>	<b>CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE FUTURO.....</b>	<b>331</b>
5.1	Conclusiones .....	331
5.2	Líneas futuras de trabajo.....	332
	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>333</b>
	<b>ANEXOS .....</b>	<b>351</b>

## Lista de figuras

FIGURA 1.1. DISTRIBUCIÓN CONTINENTAL DE LA MUESTRA DE ÁMBITO MUNDIAL.....	21
FIGURA 1.2. ESTIMACIÓN DEL NÚCLEO DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD EN LA ECONOMÍA MUNDIAL EN LOS AÑOS 1960, 1980, 2000 y 2011.....	23
FIGURA 1.3. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN LA ECONOMÍA MUNDIAL EN EL AÑO 1960. ....	24
FIGURA 1.4. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN LA ECONOMÍA MUNDIAL EN EL AÑO 1980. ....	24
FIGURA 1.5. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN LA ECONOMÍA MUNDIAL EN EL AÑO 2000. ....	25
FIGURA 1.6. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN LA ECONOMÍA MUNDIAL EN EL AÑO 2011. ....	25
FIGURA 1.7. HISTOGRAMA DE LA RATIO DE CRECIMIENTO DEL PIB PER CÁPITA MUNDIAL DESDE 1960 HASTA 2011.....	27
FIGURA 1.8. TASAS DE CRECIMIENTO MEDIO DEL PIB PER CÁPITA (EU Y ECONOMÍA MUNDIAL) DESDE 1961 HASTA 2014. .	28
FIGURA 1.9. PIB PER CÁPITA EN EU-28 EN LOS AÑOS 2000, 2006 Y 2010.....	29
FIGURA 1.10. VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN EU-28, NIVEL NUTS 2, DURANTE EL PERÍODO 2000 A 2011.....	33
FIGURA 1.11. RELACIÓN ENTRE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN EU-28, NIVEL NUTS 2, DURANTE EL PERÍODO 2000 A 2011. ....	34
FIGURA 1.12. DIFERENCIAS REGIONALES EN PIB PER CÁPITA EN FUNCIÓN DE LA CLASIFICACIÓN NUTS 0, NUTS 1 Y NUTS 2. COMPARATIVA A NIVEL EU-27 Y EU-15. AÑO DE REALIZACIÓN: 2009. ....	35
FIGURA 1.13. ESTIMACIÓN DEL NÚCLEO DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD EN EU-28 EN LOS AÑOS 2000, 2006 Y 2011. ....	35
FIGURA 1.14. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA (EU-28) EN EL AÑO 2000.....	36
FIGURA 1.15. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA (EU-28) EN EL AÑO 2006.....	36
FIGURA 1.16. HISTOGRAMA DEL LOGARITMO DEL PIB PER CÁPITA EN PPA (EU-28) EN EL AÑO 2011.....	37
FIGURA 1.17. DISTRIBUCIÓN DE COMPONENTES REGIONALES DEL PIB PER CÁPITA SEGÚN EL MODELO DE MIXTURA EN EU-28. AÑO 2000.....	38
FIGURA 1.18. DISTRIBUCIÓN DE COMPONENTES REGIONALES DEL PIB PER CÁPITA SEGÚN EL MODELO DE MIXTURA EN EU-28. AÑO 2006.....	39
FIGURA 1.19. HISTOGRAMA DE LA RATIO DE CRECIMIENTO DEL PIB PER CÁPITA EN EU-28 DESDE 2000 HASTA 2011.....	40
FIGURA 1.20. DISTRIBUCIÓN DE COMPONENTES REGIONALES DE LA RATIO DE CRECIMIENTO DEL PIB PER CÁPITA SEGÚN EL MODELO DE MIXTURA EN EU-28. AÑOS 2000 A 2011.....	41
FIGURA 1.21. OBJETIVOS EUROPA 2020.....	52
FIGURA 1.22. OBJETIVOS EUROPA 2020. BÉLGICA.....	53
FIGURA 1.23. OBJETIVOS EUROPA 2020. ESLOVAQUIA.....	53
FIGURA 1.24. OBJETIVOS EUROPA 2020. ESPAÑA. ....	54
FIGURA 1.25. OBJETIVOS EUROPA 2020. GRECIA.....	54
FIGURA 2.1. MODELOS HISTÓRICOS DE CRECIMIENTO.....	57
FIGURA 2.2. REPRESENTACIÓN DEL RATIO DE UTILIDAD TOTAL DE RENTA INMERECEIDA.....	62
FIGURA 2.3. CURVAS DE DEMANDA DE CAPITAL Y TEMPORALES Y DEFINITIVAS DE OFERTA (SIN VARIACIONES DE CANTIDAD DE TRABAJO).....	64
FIGURA 2.4. REPRESENTACIÓN DE LA PRODUCCIÓN EN UNIDADES EFICIENTES SEGÚN EL MODELO HARROD-DOMAR. ....	67
FIGURA 2.5. EVOLUCIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO EN EL MODELO HARROD-DOMAR CON $s\alpha > (n + \delta + g)$ .....	68
FIGURA 2.6. EVOLUCIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO EN EL MODELO HARROD-DOMAR CON $s\alpha = (n + \delta + g)$ .....	69



FIGURA 2.7. EVOLUCIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO EN EL MODELO HARROD-DOMAR CON $s\alpha < n + \delta + g$ .	69
FIGURA 2.8. REPRESENTACIÓN DE LOS DOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO NEOCLÁSICO EN UNA SITUACIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE.	72
FIGURA 2.9. REPRESENTACIÓN DE LOS DOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO NEOCLÁSICO EN UNA SITUACIÓN CON UN PUNTO DE EQUILIBRIO INESTABLE.	73
FIGURA 2.10. REPRESENTACIÓN DE LOS DOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO NEOCLÁSICO EN UNA SITUACIÓN SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO.	73
FIGURA 2.11. RELACIÓN ENTRE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO Y EL RATIO DE AHORRO EN EL MODELO DE SOLOW.	77
FIGURA 2.12. CONDICIONES DEL ESTADO DE EQUILIBRIO EN UNA ECONOMÍA COBB-DOUGLAS.	78
FIGURA 2.13. CAMBIOS DE SIGNO DEL CONSUMO Y DEL CAPITAL EN EL PLANO DE FASES. MODELO CASS-KOOPMANS-RAMSEY.	86
FIGURA 2.14. DIAGRAMA DE FASES DEL MODELO CASS-KOOPMANS-RAMSEY.	86
FIGURA 3.1. REPRESENTACIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO EN EL MODELO NEOCLÁSICO.	125
FIGURA 3.2. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL EN EL MODELO NEOCLÁSICO	127
FIGURA 3.3. DINÁMICAS DE TRANSICIÓN EN EL MODELO BECKER ET AL. (1994).	136
FIGURA 3.4. REPRESENTACIÓN DE UN PROCESO DE B-CONVERGENCIA ABSOLUTA	144
FIGURA 3.5. REPRESENTACIÓN DE UN PROCESO DE B-CONVERGENCIA CONDICIONAL.	145
FIGURA 3.6. CAMBIOS EN LA DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA EN PROCESOS DE B-CONVERGENCIA CONDICIONAL: (i) CONVERGENCIA GLOBAL; (ii) DIVERGENCIA EN LA RENTA; (iii) CLUB DE CONVERGENCIA.	146
FIGURA 3.7. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SALTO TECNOLÓGICO.	174
FIGURA 3.8. FASES DEL PROCESO DE CATCHING-UP.	175
FIGURA 3.9. COMPORTAMIENTO TEÓRICO DE LA DISPERSIÓN DEL PRODUCTO PER CÁPITA.	198
FIGURA 3.10. EVOLUCIÓN DE ECONOMÍAS Y RELACIÓN ENTRE $\sigma$ -CONVERGENCIA Y $\beta$ -CONVERGENCIA.	199
FIGURA 3.11. EFECTO DE <i>MEAN PRESERVING SPREAD</i> EN LA CURVA DE LORENZ.	203
FIGURA 3.12. PROPIEDADES DE MEDIDAS DE DESIGUALDAD.	209
FIGURA 3.13. $\sigma$ -CONVERGENCIA: MODELO <i>LEAP-FROG</i> Y MODELO POLARIZADO.	213
FIGURA 3.14. COMPORTAMIENTOS DE $\beta$ -CONVERGENCIA Y $\Sigma$ -CONVERGENCIA	214
FIGURA 3.15. DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS ACUMULADAS CORRESPONDIENTE A EU-28 (NUTS 2). AÑOS 2000, 2006 Y 2011.	221
FIGURA 3.16. GRÁFICA DE SALTER DE LA DISPERSIÓN EN 2011 DE EU-28 (NUTS 2) FRENTE A 2000 COMO AÑO BASE.	222
FIGURA 3.17. EVOLUCIÓN DEL COEFICIENTE DE VARIACIÓN. AÑOS 2000 A 2011.	233
FIGURA 3.18. EVOLUCIÓN DEL COEFICIENTE GINI. AÑOS 2000 A 2011.	233
FIGURA 3.19. EVOLUCIÓN DE LOS ÍNDICES DE ATKINSON. AÑOS 2000 A 2011.	233
FIGURA 3.20. EVOLUCIÓN DEL ÍNDICE THEIL. AÑOS 2000 A 2011.	233
FIGURA 3.21. EVOLUCIÓN DE LA DESVIACIÓN LOGARÍTMICA MEDIA. AÑOS 2000 A 2011.	233
FIGURA 3.22. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS COMPONENTES DEL ÍNDICE GINI.	235
FIGURA 3.23. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS COMPONENTES DEL ÍNDICE THEIL.	236
FIGURA 3.24. DESCOMPOSICIÓN DEL ÍNDICE MLD.	236
FIGURA 3.25. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS COMPONENTES DEL ÍNDICE MLD.	237
FIGURA 4.1. TIPOLOGÍAS DE DATOS ESPACIALES.	257
FIGURA 4.2. MAPAS DE IMPACTOS EN BASE A LA MATRIZ <i>Wk10</i>	278
FIGURA 4.3. RESULTADOS DE CLUSTERING SEGÚN PIB PER CÁPITA EN REGIONES EUROPEAS (NUTS 2). EU-28. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.	288
FIGURA 4.4. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. DISTRIBUCIONES DE LAS CLASES CORRESPONDIENTES AL PIB PER CÁPITA EN EUROS CONSIDERANDO LAS MEDIAS EUROPEAS DE RENTAS. AÑO 2000.	306
FIGURA 4.5. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. DISTRIBUCIONES DE LAS CLASES CORRESPONDIENTES AL PIB PER CÁPITA EN EUROS CONSIDERANDO LAS MEDIAS EUROPEAS DE RENTAS. AÑO 2000.	307
FIGURA 4.6. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. DISTRIBUCIONES DE LAS CLASES CORRESPONDIENTES AL PIB PER CÁPITA EN EUROS CONSIDERANDO LA MEDIA DE LAS UNIDADES VECINAS. AÑO 2000.	310

FIGURA 4.7. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. DISTRIBUCIONES DE LAS CLASES CORRESPONDIENTES AL PIB PER CÁPITA EN EUROS CONSIDERANDO LA MEDIA DE LAS UNIDADES VECINAS. AÑO 2011.....	311
FIGURA 4.8. HISTOGRAMA DEL ESTADÍSTICO DE INDEPENDENCIA. ....	314
FIGURA 4.9. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE LA DENSIDAD PARA LA DISTRIBUCIÓN DEL PIB, SIN EFECTOS ESPACIALES .....	315
FIGURA 4.10. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE LA DENSIDAD PARA LA DISTRIBUCIÓN DEL PIB, CONSIDERANDO EFECTOS ESPACIALES. ....	315
FIGURA 4.11. CRITERIOS DE INFORMACIÓN EN EL ESTUDIO EMPÍRICO CON MODELOS DE MIXTURA. ....	322
FIGURA 4.12. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE COMPONENTES. IDENTIFICACIÓN DE FRECUENCIAS.....	322
FIGURA 4.13. RELACIÓN ENTRE EL Nº DE ITERACIONES Y EL DE COMPONENTES (M=2).....	323
FIGURA 4.14. RELACIÓN ENTRE EL Nº DE ITERACIONES Y EL DE COMPONENTES (M=3).....	323
FIGURA 4.15. RELACIÓN ENTRE EL Nº DE ITERACIONES Y EL DE COMPONENTES (M=4).....	324
FIGURA 4.16. RESULTADOS DE MIXTURAS CON DOS COMPONENTES. ....	324
FIGURA 4.17. RESULTADOS DE MIXTURAS CON TRES COMPONENTES. ....	324
FIGURA 4.18. RESULTADOS DE MIXTURAS CON CUATRO COMPONENTES. ....	325
FIGURA 4.19. MAPAS DE MIXTURAS, CON DOS, TRES Y CUATRO COMPONENTES. ....	326
FIGURA 4.20. MAPA DE CUANTILES (MODELO PANEL FIJO NO ESPACIAL) .....	328
FIGURA 4.21. REPRESENTACIÓN DE EFECTOS FIJOS (MODELO PANEL CON EFECTOS ESPACIALES). ....	330

## Lista de tablas

TABLA 1.1. LISTADO DE INDICADORES DE CONVERGENCIA REAL. ....	15
TABLA 1.2. CIRCUNSTANCIAS RELEVANTES EN LOS PROCESOS GLOBALES DE CRECIMIENTO A PARTIR DE 1945. ....	19
TABLA 1.3. PARÁMETROS RELATIVOS A LAS ESTIMACIONES DE MIXTURAS. ANÁLISIS MUNDIAL DEL PIB PER CÁPITA. ....	26
TABLA 1.4. VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN EU-28, DURANTE EL PERÍODO 1995 A 2013. ...	30
TABLA 1.5. RELACIÓN ENTRE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEL PIB PER CÁPITA EN PPA EN EU-28, DURANTE EL PERÍODO 1995 A 2013. ....	30
TABLA 1.6. RELACIÓN ENTRE NIVELES NUTS Y UMBRALES MÍNIMOS Y MÁXIMOS DE POBLACIÓN. ....	31
TABLA 1.7. DIVISIONES TERRITORIALES ESTADÍSTICAS DE LA UNIÓN EUROPEA. ....	32
TABLA 1.8. PARÁMETROS RELATIVOS A LAS ESTIMACIONES DE MIXTURAS. ANÁLISIS EU-28 DEL PIB PER CÁPITA. ....	37
TABLA 1.9. RESULTADOS DE INVESTIGACIONES SOBRE EL IMPACTO DE LOS FONDOS ESTRUCTURALES. ....	46
TABLA 2.1. EJEMPLOS DE FORMAS DE FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN AGREGADA Y SOLUCIONES ASOCIADAS EN EL MODELO DE SOLOW. ....	74
TABLA 2.2. MODIFICACIONES EN LA DINÁMICA DEL MODELO CASS-KOOPMANS-RAMSEY AL INTRODUCIR FUNCIONES DE GOBIERNO. ....	88
TABLA 2.3. DIAGRAMA DE FASES DEL MODELO AK. ....	94
TABLA 2.4. DIAGRAMA DE FASES DEL MODELO JONES Y MANUELLI (1990) PARA DOS FORMAS DISTINTAS DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN. ....	98
TABLA 2.5. DINÁMICAS DE TRANSICIÓN EN EL MODELO DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL HUMANO. ....	107
TABLA 2.6. FASES DEL PROCESO DE DECISIÓN EN EL SECTOR DE LA INVESTIGACIÓN. ....	118
TABLA 3.1. RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LOS ESTUDIOS EMPÍRICOS EN BARRO (1989). ....	157
TABLA 3.2. RELACIÓN ENTRE POLÍTICAS GUBERNAMENTALES Y CRECIMIENTO ECONÓMICO. ....	163
TABLA 3.3. MEDIDA DE LA $\beta$ -CONVERGENCIA EN LOS ESTADOS DE USA (1880-1988). ....	164
TABLA 3.4. REGRESIONES DE LA RENTA PERSONAL EN ESTADOS DE USA (1880-2000). ....	167
TABLA 3.5. MEDIDA DE LA RELACIÓN ENTRE MIGRACIÓN Y CONVERGENCIA EN LOS ESTADOS DE USA (1920-1990). ....	168
TABLA 3.6. REGRESIONES DE LA RENTA PERSONAL EN PREFECTURAS DE JAPÓN (1930-1990). ....	169
TABLA 3.7. MEDIDA DE LA RELACIÓN ENTRE MIGRACIÓN Y CONVERGENCIA EN LAS PREFECTURAS DE JAPÓN (1955-1990). ....	170
TABLA 3.8. ESTIMACIÓN DE LA DIFUSIÓN TECNOLÓGICA ENTRE REGIONES ESPAÑOLAS. ....	179
TABLA 3.9. FORMULACIÓN DE LOS PROCESOS DE CRECIMIENTO DE LA ECONOMÍA LÍDER Y DE CATCHING-UP TECNOLÓGICO DE LAS PERSEGUIDORAS. ....	184
TABLA 3.10. DEFINICIONES DE CONVERGENCIA Y DE TENDENCIAS COMUNES EN OUTPUT. ....	192
TABLA 3.11. PRINCIPALES RESULTADOS DE LOS ESTUDIOS EMPÍRICOS SOBRE CONVERGENCIA ESTOCÁSTICA. ....	195
TABLA 3.12. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA ENTRE REGIONES EUROPEAS. PERÍODO 1950 A 1990. ....	224
TABLA 3.13. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE INDIVIDUAL $\beta$ PARA CINCO PAÍSES EUROPEOS. ....	225
TABLA 3.14. REGRESIONES DE CRECIMIENTO DE LA RENTA ENTRE COUNTIES SUECOS (RENTAS AJUSTADAS Y NO AJUSTADAS AL PRECIO DE LAS VIVIENDAS). ....	228
TABLA 3.15. REGRESIONES DE CRECIMIENTO DE LA RENTA ENTRE COUNTIES SUECOS (PRESENCIA DEL SECTOR AGRÍCOLA Y DE LA MIGRACIÓN). ....	230
TABLA 3.16. ÍNDICES DE $\sigma$ -CONVERGENCIA ENTRE LAS REGIONES UE-28. DATOS AGREGADOS. ....	232

TABLA 3.17. DESCOMPOSICIÓN DEL ÍNDICE GINI. ....	234
TABLA 3.18. DESCOMPOSICIÓN DEL ÍNDICE THEIL.....	235
TABLA 3.19. CONTRIBUCIÓN NACIONAL AL ÍNDICE THEIL. AÑOS 2000 A 2011. ....	238
TABLA 3.20. CONTRIBUCIÓN NACIONAL AL COMPONENTE INTRAGRUPAL DEL ÍNDICE THEIL. AÑOS 2000 A 2011 .....	238
TABLA 4.1. PRINCIPALES FASES DE EVOLUCIÓN DE LA DISCIPLINA ECONOMETRICA ESPACIAL.....	247
TABLA 4.2. EJEMPLOS DE DESARROLLOS INFORMÁTICOS EXISTENTES EN EL AÑO 2006 PARA EL TRATAMIENTO DE APLICACIONES ESPACIALES. ....	250
TABLA 4.3. LÍNEAS PRINCIPALES DE INVESTIGACIÓN DE LA ECONOMETRÍA ESPACIAL. ....	252
TABLA 4.4. TIPOLOGÍAS DE DATOS ECONÓMICOS. ....	255
TABLA 4.5. MEDIDAS ALTERNATIVAS DE LA DISTANCIA EN CAMPOS ALEATORIOS. ....	259
TABLA 4.6. POSIBLES DISTRIBUCIONES EN EL ESPACIO DE LAS VARIABLES ALEATORIAS. ....	260
TABLA 4.7. CRITERIOS MÁS COMUNES DE VECINDAD .....	263
TABLA 4.8. MODELOS DE REGRESIÓN ESPACIAL Y MODELO DE ERROR HETEROCEDÁSTICO.....	271
TABLA 4.9. DESCRIPCIÓN DE MODELOS CON INESTABILIDAD PARAMÉTRICA CONTINUA .....	273
TABLA 4.10. MODELOS CONSIDERADOS EN LA MODELIZACIÓN ESPACIAL DE LA $\beta$ -CONVERGENCIA.....	274
TABLA 4.11. MODELOS ESPACIALES. MATRIZ DE PESOS ESPACIALES $W_4$ . ....	275
TABLA 4.12. MODELOS ESPACIALES. MATRIZ DE PESOS ESPACIALES $W_{k10}$ .....	275
TABLA 4.13. PASOS DEL ALGORITMO DE CLUSTERING DE PHILLIPS Y SUL (2007). ....	285
TABLA 4.14. VARIABLES EMPLEADAS EN EL MODELADO DE CONDICIONES INICIALES Y ESTRUCTURALES DE LAS ECONOMÍAS. ....	287
TABLA 4.15. RESULTADOS DE CLUSTERING SEGÚN GVA EN REGIONES EUROPEAS (9 PAÍSES). ....	287
TABLA 4.16. RESULTADOS DE CLUSTERING SEGÚN PIB PER CÁPITA EN REGIONES EUROPEAS (NUTS 2). EU-28.....	288
TABLA 4.17. ASOCIACIONES ESPACIALES SEGÚN EL ESTADÍSTICO LOCAL DEL MORAN.....	301
TABLA 4.18. ESTRUCTURA DE LA MATRIZ ESPACIAL DE MARKOV. CASO $k=3$ .....	302
TABLA 4.19. ESTUDIO MEDIANTE CADENAS DE MARKOV DEL PIB PER CÁPITA EN UE-27 Y UE-15. PERÍODO: 1995-2005. ....	304
TABLA 4.20. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. CUARTILES DEL PIB EN EL AÑO 2000. ....	305
TABLA 4.21. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. IDENTIFICACIÓN DE LAS CLASES EMPLEADAS CONSIDERANDO LAS MEDIAS EUROPEAS DE RENTAS. ....	305
TABLA 4.22. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. ÍNDICES DE ESTABILIDAD Y MOVILIDAD ASOCIADOS AL TRATAMIENTO RESPECTO A LAS MEDIAS EUROPEAS .....	308
TABLA 4.23. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. IDENTIFICACIÓN DE LAS CLASES EMPLEADAS EN EL MODELO CON RETARDO ESPACIAL.....	309
TABLA 4.24. ESTUDIO EMPÍRICO CON CADENAS DE MARKOV. ÍNDICES DE ESTABILIDAD Y MOVILIDAD ASOCIADOS AL TRATAMIENTO RESPECTO A LAS MEDIAS DE LAS REGIONES VECINAS. ....	312
TABLA 4.25. NÚMERO DE COMPONENTES NORMALES EN ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LA RENTA (SIN Y CON EFECTOS ESPACIALES).....	316
TABLA 4.26. RELACIONES ENTRE REGRESIONES Y ESTIMACIONES DE MODELOS DE CONVERGENCIA.....	317

## Notación de las principales variables empleadas en los modelos de crecimiento (capítulo 2)

$Y$ : output.

$K$ : stock de capital físico.

$L$ : trabajo.

$A$ : nivel de tecnología.

$H$ : stock de capital humano.

$s$ : fracción de renta invertida en capital.

$s_k$ : fracción de renta invertida en capital físico.

$s_h$ : fracción de renta invertida en capital humano.

$\varpi$ : gastos públicos en bienes y servicios.

$y$ : output por unidad de labor efectiva.

$k$ : capital por unidad de labor efectiva.

$c$ : tasa de consumo por unidad de labor efectiva.

$g$ : ratio de progreso tecnológico.

$n$ : tasa de crecimiento de la población.

$\theta$ : tasa de inclinación a la innovación

$\delta$ : tasa de depreciación.

$\rho$ : ratio de preferencia temporal.

$\lambda$ : velocidad de convergencia.



# Introducción

Los más de veinte años transcurridos desde la publicación de Quah (1993) no han modificado las preguntas clave con las que comienza el resumen no técnico de dicha investigación: ¿cuál es el elemento causal que subyace en las diferentes velocidades de crecimiento que experimentan los países? ¿Por qué permanecen estancadas ciertas regiones mientras otras progresan de manera destacada? ¿Muestran las naciones pobres una tendencia a alcanzar a las ricas, estimuladas por una relación que semeja ser gravitacional y que estimula el crecimiento cuanto más alejadas se encuentran del líder económico o tecnológico?

Estas preguntas señalan de manera directa a la esencia de la ciencia econométrica, como rama integradora de los conocimientos y herramientas estadísticas, por una parte, y de las nociones vinculadas a los sistemas económicos, por otra. En efecto, responder a las profundas cuestiones planteadas en Quah (1993) –y que se encuentran presentes en múltiples investigaciones previas– requiere una visión amplia y la incorporación de modelos mixtos, unificados mediante el lenguaje matemático a través de un planteamiento transversal y unificador.

No parece necesario, en principio, acudir a argumentos muy escudriñados para justificar el interés del estudio que recoge la presente tesis. Los análisis referidos a la proximidad o lejanía existente entre las unidades económicas (a su posible convergencia o divergencia), con independencia del nivel de agregación empleado, constituyen un elemento constante en los foros de investigación especializados, pero, sobre todo –de ahí su palpable aliciente– en los distintos ámbitos y medios de comunicación. Las consideraciones sobre la convergencia aparecen la mayoría de ocasiones de manera subrepticia, camufladas en discursos centrados en la diferenciación regional, en la necesidad de identificar nuevos marcos autonómicos y, sobre todo, reformular los mecanismos de financiación de las administraciones. Pero la cuestión básica de la convergencia (o, más bien, de la divergencia) se encuentra también (tristemente) presente en las terribles bolsas de pobreza, que afectan a economías estatales y que se encuentran diseminadas por el planeta o en la dura realidad de las unidades familiares en riesgo de exclusión social.

La crisis económica, de índole global, que nos afecta desde finales de la primera década del siglo XXI ha constituido un importante acicate para reactivar (si es que alguna vez estuvieron paralizados) los mecanismos de revisión y las investigaciones relativas a las medidas de disparidad entre las economías. Previamente, por centrarnos en el intervalo histórico que se inicia con el cambio de siglo, con motivo de la ampliación de la Unión Europea y la incorporación de nuevas naciones, se suceden los estudios sobre las desigualdades existentes entre estos aspirantes y los estados ya consolidados de la EU-15. Gluschenko (2012) destaca la proliferación de *miles* (sic) de investigaciones tras la aparición de las obras seminales de Barro y Sala-i-Martin, a principios de la década de los noventa, en las que se desarrollan estudios sobre  $\beta$ -convergencia. El autor citado advierte de una grave problemática que afecta a la mayoría de estos estudios y que se encuentra muy presente en las consideraciones previas que justifican el enfoque de nuestra tesis: los análisis se sustentan en incorrecciones conceptuales, en un tratamiento distorsionado de los planteamientos originales de determinados modelos,

como el neoclásico de Solow y Swan. ¿Predicen realmente estas teorías la convergencia en renta de las distintas unidades económicas? ¿Disminuyen incesantemente los intervalos existentes entre las naciones pobres y ricas? La información que descansa, oculta, entre los datos puede ser interpretada en un sentido u otro en función del ajuste que se desee alcanzar respecto al patrón teórico que sustenta la investigación.

Mientras se procede a la revisión final de este documento, la gravedad de la crisis griega, en pleno corazón de la Eurozona, continúa vigente y las preguntas de los analistas siguen centrándose en las causas del terrible colapso económico. El estudio de los indicadores de  $\sigma$ -convergencia ya alertaba del incremento de diferencias en renta, tanto a nivel estatal, respecto a las naciones vecinas, como en el propio contexto regional. Sin embargo, también se perciben situaciones análogas en otras localizaciones y no se han verificado tales consecuencias dramáticas. Por otra parte, el potencial para la explicación o de índole predictivo de estos índices resulta ciertamente reducido y no permite caracterizar problemas multidimensionales, tan complejos.

Un conocimiento en profundidad de los procesos de convergencia debería permitir, en principio, el diseño de adecuadas políticas de desarrollo regional. De hecho, las mediciones asociadas se identifican como un mecanismo de realimentación en el seno de los órganos rectores de la EU. Los resultados de la efectividad de los Fondos de Cohesión se establecen, necesariamente, en estos términos, a pesar de la existencia de desarrollos teóricos que descartan el potencial de la intervención pública en la aceleración de la convergencia.

Esta breve relación de planteamientos en los que nuestro fenómeno de estudio se encuentra presente, con destacada relevancia además, constituye, sobradamente, un conjunto de justificaciones sobre el que sustentar la tesis que se presenta y, en un segundo paso, contiene las semillas de las metas que se desean alcanzar con su redacción.

En efecto, los objetivos que se plantean con esta tesis se encuadran en dos grandes marcos de actuación: (i) en lo tocante al estudio económico se persigue una revisión en profundidad de los principales modelos de crecimiento desarrollados durante el siglo XX, identificando el tratamiento dinámico de las variables representativas y relacionando los resultados teóricos con su formulación en los procesos de convergencia y en la predicción de los correspondientes efectos, constatables empíricamente; y (ii) el análisis de los instrumentos estadísticos empleados en el examen de los procesos de convergencia, considerando, de manera destacada, los nuevos tratamientos de las relaciones geográficas entre las unidades económicas, basados en los desarrollos de la econometría espacial.

A nuestro juicio la interconexión entre ambas esferas de conocimiento debe desarrollarse en base a tratamientos empíricos más específicos, en los que se consideren las evoluciones y relaciones de determinadas variables proporcionadas por el desarrollo teórico de los modelos. En la actualidad esto constituye un serio problema, dada la ausencia de series temporales suficientemente amplias o con el deseable nivel de agregación para afrontar algunos de los estudios a priori más interesantes.

La metodología empleada en nuestra tesis responde a los esquemas habituales de los estudios econométricos: se ha procedido a la identificación de una amplia relación de investigaciones y



libros de texto y recopilatorios y a un posterior cribado y selección de los más relevantes en relación a las temáticas propuestas. El universo de estudio en este ámbito resulta muy amplio y esta tarea de discriminación se ha vuelto compleja, en tanto se incrementaban las posibles referencias de trabajo.

Por el contrario, la relación de repositorios, con bases de datos y hojas de cálculo conteniendo información económica de regiones y países, resulta muy limitada y básicamente se ha limitado a Eurostat y a Penn World Table para la consignación de un primer estudio sobre variables globales (dispuesto en el capítulo primero). El portal europeo presenta una restricción en los datos ofrecidos, debido a cambios en los procedimientos de tratamiento estadístico, por lo que la relación disponible se inicia en el año 1995. Esto limita el alcance de determinados desarrollos, en los que se requiere un horizonte temporal mucho más amplio.

Se ha empleado R como software de referencia en los desarrollos empíricos recogidos en los capítulos tercero y cuarto. En determinados análisis se ha trabajado también con el paquete MATLAB.

La tesis se estructura de manera general en los siguientes apartados:

Capítulo primero: se centra en una exposición de los aspectos significativos de las teorías de crecimiento y en su relación con las predicciones de convergencia. Se procede al desarrollo de dos análisis empíricos, centrados en las rentas mundiales y europeas, con horizontes temporales diferenciados, a fin de introducir determinados conceptos y considerar cuestiones a desarrollar en secciones posteriores.

Capítulo segundo: contiene una amplia revisión del *corpus* teórico asociado a los modelos de crecimiento. Se ha procurado acudir a las fuentes originales (de ahí que se haya optado por cierta diversidad en la nomenclatura de las variables, aunque en cada apartado se identifican claramente los distintos conceptos). La sección analiza aspectos específicos de índole económico, que permiten profundizar en relaciones dinámicas, determinantes en los procesos de crecimiento y convergencia.

Capítulo tercero: corresponde al desarrollo de los estudios clásicos en este ámbito, centrándose en los conceptos básicos de  $\beta$  y  $\sigma$ -convergencia, a los que se incorpora patrones muy relacionados, como convergencia estocástica o procesos de *catching-up* tecnológico. En este bloque se relacionan diferentes estudios empíricos, seleccionados por su interés o por constituir aproximaciones clásicas en el desarrollo posterior de la materia. En la sección final hemos incorporado un estudio sobre  $\sigma$ -convergencia en la Unión Europea, al ser el ámbito territorial que consideramos de manera específica en el estudio.

Capítulo cuarto: la última sección se destina a una revisión del tratamiento de los aspectos espaciales de cara a los análisis de convergencia. Se consideran para ello áreas de reciente investigación, que son tratadas en base a los correspondientes estudios empíricos: modelado de  $\beta$ -convergencia espacial, identificación de clusters, cadenas de Markov espaciales, modelos de mixturas y datos de panel.

Conclusiones: en el apartado final se relacionan los resultados más apreciables y significativos de los distintos estudios y se incorporan observaciones y valores respecto a líneas de trabajo futuras.

En todo el trabajo se ha considerado fundamental identificar claramente al autor o autores de los planteamientos propuestos, optándose por la reproducción literal en el idioma original de los mismos, cuando así se ha considerado oportuno (no se ha considerado la traducción al castellano, dado el interés de poder captar, directamente, determinados matices que se pierden en todo proceso de traslación).

---

# **1. El crecimiento económico y su relación con el proceso de convergencia**

---

## **1.1 Introducción**

El capítulo primero propone una revisión del tratamiento, tanto teórico como empírico, del crecimiento económico, un fenómeno íntimamente conectado con los procesos de convergencia. En la primera sección se revisan, bajo una perspectiva genérica, diversas aproximaciones al modelado de esta cuestión central de la literatura económica, identificando variables que podrán resultar significativas en nuestros posteriores estudios estadísticos e introduciendo algunos resultados, de carácter macroeconómico, que permiten vislumbrar los resultados y consideraciones conflictivas que se han ido produciendo a lo largo del tiempo. En contraposición al carácter teórico del primer apartado, el segundo se estructura en torno a dos estudios empíricos propios, en los que se considera la evolución de los niveles de renta bajo distintos enfoques. El primero de los análisis se centra en los cambios, en los últimos sesenta años, en las distribuciones del nivel nacional del Producto Interior Bruto (PIB) per cápita, considerando una muestra representativa que se extiende al ámbito mundial. El segundo estudio se restringe a la Unión Europea y, en concreto, plantea una primera aproximación a la importante problemática de la identificación de las desigualdades entre los Estados-miembros. En ambos casos la atención se focaliza en la relación existente entre el nivel de agregación y el carácter heterogéneo de cada conjunto estudiado. En el tercer apartado se revisan las políticas comunitarias relativas al fomento de la cohesión y, en definitiva, de la convergencia, que intentan reducir las disparidades identificadas entre las regiones (las unidades geográficas que se consideran en este tipo de actuaciones). Se realiza una doble consideración: por una parte, en relación a los grandes objetivos propuestos y sus correspondientes líneas de desarrollo; y, por otro lado, se ponderan los resultados obtenidos tras la aplicación de estos planteamientos. En este segundo contexto se revisan diferentes aproximaciones econométricas, que permiten, además, identificar herramientas de análisis en el ámbito clásico o en el espacial. El primer capítulo concluye con una revisión de los planteamientos centrales de la Estrategia Europa 2020, la política de crecimiento comunitaria durante la presente década. Se identifican los objetivos asociados a los cinco ejes del programa en diversos estados de la EU, que resultan característicos por el valor de sus rentas y por el período transcurrido desde la integración (Bélgica, Eslovaquia, España y Grecia). Estos datos se emplearán en posteriores estudios empíricos.

## **1.2 Aproximaciones al concepto de crecimiento económico. Resultados empíricos globales**

Una temática central, que se distingue y sobresale de manera indiscutible entre el extenso corpus que integra el pensamiento económico, es la concerniente a la cuestión del crecimiento. En una obra de absoluta referencia en la materia, Sala-i-Martin (1994: 46)

expresa: “Sin ningún género de dudas, la teoría del crecimiento económico es la rama de la economía de mayor importancia y la que debería ser objeto de mayor atención entre los investigadores económicos”. Esto se sustenta en la relevancia de la tasa de crecimiento: su valor, sostenido en el tiempo, termina generando las correspondientes diferencias en los niveles finales de la renta per cápita. Un simple cálculo aritmético demuestra que diferencias en un punto porcentual en este ratio, partiendo del mismo valor inicial, provocan, en el largo plazo, evoluciones significativamente diferenciadas de las economías<sup>1</sup>. Las disparidades se concretan en los niveles finales de renta per cápita y de bienestar social (variables cuyo alcance suele intercambiarse en este contexto). Bajo este planteamiento se reduce la importancia del corto plazo o de las posibles fluctuaciones y movimientos cíclicos alrededor de las tendencias; “el objetivo principal de nuestra investigación debería ser el descubrimiento de los factores que determinan la tasa de crecimiento a largo plazo y las políticas que los puedan afectar”, (Sala-i-Martin, 1994: 5).

En efecto, el interés por la materia ya aparece en obras de autores clásicos. Según una cita aportada por Warsh (2006: 68), Adam Smith identificaba “la paz, unos impuestos bajos y una administración tolerable de la justicia” como elementos necesarios para un rápido crecimiento económico; en su obra más destacada, *La riqueza de las naciones*, establece una relación indisociable entre el bienestar social y el crecimiento económico, al mismo tiempo que presenta conceptos fundamentales para posteriores desarrollos, como los rendimientos de escala y el papel de la especialización. David Ricardo analizó la cuestión del crecimiento, prediciendo su cese a causa de la escasez de recursos naturales (una idea que se retoma, bajo ciertos matices, al final de este apartado). Marx, por el contrario, considera el crecimiento continuado como elemento básico de sus postulados. Autores como Malthus, Ramsey, Schumpeter, Keynes... han centrado sus análisis en este fenómeno y en efectos básicos para su comprensión, como el papel del progreso tecnológico, el capital físico y humano o los enfoques competitivos.

Una revisión de la literatura generada muestra que el interés por la cuestión se retoma de manera especial a mediados de los años cincuenta del siglo XX, con la aparición de trabajos encuadrados dentro de la denominada economía neoclásica (nos referimos a las obras seminales de Solow y Swan). En el capítulo segundo de este trabajo se procede a una revisión, con un cierto grado de profundidad, tanto de los modelos de crecimiento que reflejan los condicionantes de estos planteamientos como de los que incorporan determinados componentes endógenos. En esta sección inicial se plantea, en base al recorrido histórico propuesto por Sala-i-Martin (1994), la identificación de aspectos relevantes que permitan identificar las causas del nuevo interés por el crecimiento económico.

Los desarrollos de Solow y Swan experimentan una revisión a través de los modelos de Cass y Koopmans, en los que se introduce un enfoque de optimización del comportamiento de los

---

<sup>1</sup> En el ejemplo propuesto por Sala-i-Martin (1994), se compara la evolución de dos países extremos, B, con una tasa de crecimiento del 0.75% y C, con el 2.75%, respecto a uno central, A, cuya tasa se sitúa en el 1.75% (se hace coincidir con el ratio medio de US en el período 1870-1990). En un plazo aproximado de cien años se comprueba que el PIB del país B al final del período es menos de la tercera parte del PIB de A en el mismo instante temporal. De manera simétrica, el PIB del país C al final del largo plazo representa tres veces el de A.

consumidores. Esto supone una mirada atrás, hacia la obra de Ramsey, desarrollada apenas un año antes de la Gran Depresión. Los planteamientos neoclásicos se enfocan decididamente hacia la verificación de procesos de convergencia debido al asume central de rendimientos decrecientes de escala de los factores productivos.

Como es sabido, los rendimientos a escala relacionan las variaciones de factores productivos con los correspondientes a los productos obtenidos. Resulta habitual considerar la función de producción agregada como  $Y = F(K, L)$ , con  $Y$  el producto nacional,  $K$  el capital y  $L$  la fuerza laboral. Esta función muestra rendimientos crecientes de escala (en  $K$  y  $L$ ) si, al aumentar los *stocks* de los dos factores en la misma proporción,  $\lambda > 1$ , el *output* aumenta en un porcentaje mayor:  $F(\lambda K, \lambda L) > F(K, L)$ . Del mismo modo, la función de producción presenta rendimientos constantes de escala si  $F(\lambda K, \lambda L) = F(K, L)$  y decrecientes cuando  $F(\lambda K, \lambda L) < F(K, L)$ . También resulta común considerar el caso en el que dicha función adopta una tipología Cobb-Douglas, con  $Y = AK^\alpha L^\theta$ . En tal caso se puede demostrar que  $F$  muestra rendimientos crecientes en  $K$  y  $L$  únicamente si  $\alpha + \theta > 1$ , constantes si  $\theta = 1 - \alpha$ , y decrecientes con  $\alpha + \theta < 1$ .  $F$  presenta rendimientos decrecientes en el capital si  $\alpha < 1$  y decrecientes en la fuerza laboral si  $\theta < 1$ .

Solow (1956: 67) asegura que *“Constant returns to scale seems the natural assumption to make in a theory of growth”*, pero señala que en un planteamiento de carestía, por ejemplo, la asociada a una economía con escasez de tierra<sup>2</sup>, la función de producción no mostraría este comportamiento y el modelo se asemejaría al propuesto por Ricardo, con retornos decrecientes de escala. O sea, la función de producción agregada que se asume en el modelo presenta rendimientos constantes a escala en capital físico (es importante este matiz) y en el trabajo, con rendimientos decrecientes de capital. Como señala De la Fuente (1996: 8): *“En la ausencia de progreso técnico, este supuesto implica que la productividad marginal del capital disminuirá con el stock acumulado, reduciendo tanto el incentivo a ahorrar como el impacto sobre el crecimiento del producto de un volumen dado de inversión”*.

Este mecanismo implica, por una parte, que se producirá la convergencia (término sobre el que profundizaremos en los capítulos posteriores) en rentas per cápita: países pobres se encontrarán más incentivados a ahorrar y su tasa de crecimiento será más elevada considerando el mismo ratio de inversión, por lo que crecerán más rápidamente que los ricos (en realidad esto se produciría sólo bajo ciertos condicionantes). Sin embargo, el gran problema de la consideración de los rendimientos decrecientes es que implica que el crecimiento a largo plazo resulta insostenible: como se acaba de indicar, la productividad marginal del capital disminuye con el stock, de modo que se reduce tanto el incentivo a ahorrar como la influencia en el crecimiento del producto bajo un determinado volumen de inversión. Existe un límite de capital que no se puede franquear, salvo que se introduzca el crecimiento tecnológico exógeno. Esto no modifica sustancialmente el proceso de convergencia, siempre y cuando se suponga que todos los países pueden acceder a los mismos niveles de conocimientos técnicos.

---

<sup>2</sup> Como bien señala el autor, la falta de tierra fértil no es una condición necesaria ni suficiente para que una determinada nación se encuentre subdesarrollada. El caso de Etiopía constituía un contraejemplo de esta situación en la década de los cincuenta, vigente, por desgracia, en la actualidad

Un elemento claramente relacionado con esta idea, que se estudia con posterioridad en este trabajo, procede de Abramovitz (1986) y se refiere a la consideración del posible fenómeno de acercamiento o *catching-up* tecnológico. Esto supone identificar la imitación a bajo coste, por parte de economías pobres, de desarrollos de países más avanzados, como un mecanismo de convergencia que permite aumentar su crecimiento y reducir en el tiempo el *gap* o salto existente.

Sala-i-Martin (1994) subraya que la incorporación del factor tecnológico exógeno y otras extensiones del modelo neoclásico supusieron, históricamente, un cambio de enfoque, de modo que los investigadores se centraron más en la formalidad de los desarrollos matemáticos que en su aplicación al ámbito real a través de los condicionantes empíricos, cuando éstos, en definitiva, sustentan la base teórica. Nuestro autor se muestra muy crítico con este período, sosteniendo que *“la pérdida del contacto con la realidad hizo que las llamadas teorías del desarrollo económico tomaran el relevo y se convirtieran en la rama que estudiaba el crecimiento económico a largo plazo desde un punto de vista aplicado”*, Sala-i-Martin (1994: 6). Las taxonomías existentes sobre los modelos de esta época se refieren, en general, a patrones diferenciados, como la teoría del desarrollo, el estructuralismo o la teoría de la dependencia, que comparten un interés común en analizar, con técnicas específicas, la situación de países en desarrollo o, directamente, empobrecidos. Escribano (2010: 21) destaca: *“La economía neoclásica y la del desarrollo se diferencian en su visión sobre el funcionamiento de los mercados: para los neoclásicos, los mercados en los países en desarrollo funcionan; para la economía del desarrollo, los mercados en los países pobres funcionan peor que en los países ricos”*. Del mismo modo, es una Escuela que rechaza, como se ha indicado, la monoeconomía (el estudio de distintos países con los mismos instrumentos, sin atender a su nivel de crecimiento) y acepta, al igual que el modelo neoclásico, los beneficios mutuos (para estados muy desarrollados y para los que lo están menos) del comercio y de los flujos internacionales en capital y trabajo: (i) una nación rica en capital (o en tecnología) obtiene tasas de retorno más elevadas al invertir en otra pobre, la cual, a su vez, obtiene provecho del acceso a dicho recurso; y (ii) en principio, un país rico, con escaso volumen de trabajo no cualificado, consigue mejoras a través del proceso migratorio de trabajadores de reducido nivel desde el estado pobre<sup>3</sup>.

Un economista de amplio prestigio y conocimiento como Sala-i-Martin considera, con razón, que la nueva senda de los estudios sobre el crecimiento suponía una profunda merma en la calidad de los contenidos matemáticos (aunque el componente empírico sí resulta de interés), lo que provocó que, en un plazo de unas dos décadas, los avances en esta teoría quedasen en dique seco. Sin embargo, esta situación de parálisis relativa se modifica a finales de los años ochenta: Sala-i-Martin (1994) lo atribuye a la obra de Romer (1986) y posteriores observaciones de Lucas (1988).

Van Ark y Crafts (1996) coincide en identificar el período de mediados de los ochenta como una época de resurgimiento del interés por la economía del crecimiento. Las razones que estos autores identifican son, principalmente, dos:

---

<sup>3</sup> Mientras se elabora esta revisión de teorías, la situación internacional muestra una realidad bien distinta en múltiples puntos del planeta, con mecanismos fuertemente represivos encaminados al control de estos flujos migratorios sur-norte, pobres-ricos.

- La preocupación, en el seno de las economías occidentales, por el rápido desarrollo, en términos de productividad, de las naciones asiáticas. Este hecho, combinando con un descenso, en paralelo, del crecimiento en Europa y en US, podía concretarse en un proceso genérico de *catching-up* tecnológico o, incluso, en el adelantamiento por parte de las economías de Asia.
- La aparición de nuevas ideas teóricas, que enriquecen los modelos previos en términos de endogeneización de la tecnología y de análisis de posibles estados múltiples de equilibrio.

Las investigaciones se centraban de nuevo en la problemática de la convergencia. En el ámbito específico del estudio de Van Ark y Crafts (1996) la cuestión central se enfocaba a la posible reducción de los saltos de nivel entre economías líderes y perseguidoras. También resultaba materia atractiva el tratamiento del capital, en su amplia acepción, como causa de las diferencias en términos de productividad.

De la Fuente (1996) reflexiona sobre el nuevo interés de los macroeconomistas en las teorías del crecimiento, identificando también el abandono de la anterior preocupación por los ciclos económicos que se produce en torno a mediados de la década de los ochenta. De nuevo se constatan dos factores básicos, resultando común a las ideas anteriores el segundo de ellos:

- El reconocimiento de la importancia de la tendencia frente al ciclo de cara a consideraciones sobre el bienestar a medio y largo plazo. Esta idea coincide con el planteamiento ya expuesto de Sala-i-Martin (1994), en su apuesta por la identificación de los factores que influyen en la tasa de crecimiento en un amplio período de tiempo y en las posibles políticas que pueden incidir en su modificación. Se trata de planteamientos razonables, como señala De la Fuente (1996), en contextos en los que la volatilidad de la renta es reducida, tal y como venía aconteciendo desde el inicio del período de reactivación de los estudios.
- Como también se ha comentado anteriormente, los modelos neoclásicos se encontraron con limitaciones en sus explicaciones teóricas, que debieron afrontar con la inclusión del crecimiento tecnológico exógeno. No obstante, esto no fue suficiente debido al mayor alcance de los resultados de los estudios empíricos. En efecto, al disponer de series más amplias y homogéneas de rentas nacionales, los investigadores pudieron identificar dos evidencias que contrastaban con las predicciones neoclásicas: (i) los ratios de desigualdad no mostraban tendencia a la disminución en el tiempo, sino al incremento; y (ii) la tendencia del crecimiento era creciente. Ambas realidades constituyen, de hecho, la base sobre la que se desarrollan los estudios citados de Romer (1986) y Lucas (1988).

Escribano (2004) hace referencia a un estudio de Temple (1999) para identificar nuevas evidencias empíricas sobre los procesos de crecimiento. Destacaremos: (i) constatación en los estudios realizados de ausencia de convergencia; (ii) confirmación del decrecimiento de los rendimientos de escala del capital físico; (iii) importancia de la estabilidad macroeconómica; (iv) máxima relevancia de los rendimientos de la educación, como se apreciará en la revisión de estudios empíricos en países de la OECD que se aportará en el capítulo tercero; y (v) los

rendimientos de la inversión en I+D también resultan fundamentales como factores de crecimiento.

La construcción del nuevo modelo de crecimiento endógeno se inicia, como se ha señalado, a finales de la década de los ochenta, y se consolida en años posteriores. Su denominación se asocia al hecho de no requerir la inclusión de variables exógenas (como la tecnología). De la Fuente (1996) resalta que los planteamientos iniciales consideran rendimientos constantes o crecientes de capital. Esto supone que se generan “tasas positivas de crecimiento, a base de eliminar los rendimientos decrecientes de escala a través de externalidades o de introducir capital humano”, Sala-i-Martin (1994: 6). Esto implica varias consecuencias:

- Si el rendimiento de la inversión es función creciente del stock acumulado de capital, se producirá crecimiento, con independencia del progreso tecnológico. Como los países ricos crecen más rápido que los pobres lo que se verificará es un incremento de las desigualdades. Se aprecia, por tanto, una discrepancia esencial con el resultado básico de convergencia de los modelos neoclásicos.
- Por otro lado, la existencia de externalidades puede justificar la intervención pública (un planteamiento descartado en el patrón neoclásico de equilibrio eficiente).
- Como bien señala Escribano (2004: 15), el modelo endógeno focaliza su atención en el capital humano, al considerar “la capacidad de absorción de los avances tecnológicos por parte de la mano de obra”. De este modo, el crecimiento no se considera limitado “por la disponibilidad de los factores de producción, pues la mano de obra, mediante la capacitación y la formación (que incluyen una mejor educación, salud y alimentación)” deja de estar sometida a la ley de los rendimientos decrecientes. En principio se puede crecer sin barreras.

A principios de los noventa se publican nuevos estudios que desarrollan diversos aspectos de los modelos endógenos, como Romer (1990) o Aghion y Howitt (1992), cuyos modelos se revisan en el capítulo segundo. Sala-i-Martin (1994) señala que esta nueva generación emplea un entorno de competencia imperfecta, de modo que las empresas generan tecnología de forma endógena, a partir de sus inversiones en I+D, y pueden adquirir posiciones de monopolio si inventan nuevos productos o mejoran las prestaciones de los ya existentes. El papel del gobierno vuelve a ser fundamental, ya que debe: (i) garantizar los derechos de propiedad intelectual y salvaguarda y explotación de patentes; (ii) regular el sector financiero, eliminando distorsiones; y (iii) mantener un marco legal estable. El análisis empírico de estos condicionantes también se realiza en el capítulo segundo.

De la Fuente (1996) se plantea una cuestión inmediata: ¿cuál de los dos modelos aporta una descripción más acertada de la realidad? La contraposición “convergencia – divergencia” que parece ofrecer cada teoría resulta excesivamente simple y, además, no corresponde a los planteamientos originales. Como se ha indicado al exponer sus características, el modelo neoclásico predice un crecimiento más rápido de los países pobres sólo bajo determinados asumes, que se analizarán posteriormente. Algo análogo sucede en el proceso de *catching-up* tecnológico: el retroceso relativo respecto a países frontera constituye un potencial de desarrollo, pero no implica su materialización, dado que existe una *capacidad social* (que se puede modelar de distintas maneras, aunque se encuentra íntimamente relacionada con el



nivel educativo y cualificación de los trabajadores) para absorber nuevos conocimientos e incorporarlos al proceso productivo. De la Fuente (2006: 10) enfatiza: “*la predicción de convergencia que emerge de los modelos neoclásicos y de catch-up es de carácter condicional*”. Los países tienden a aproximarse a lo que definiremos como *steady-state*. Sin embargo, existen condicionantes que afectan a la posición de ese estado estacionario.

Esta visión se concilia con escenarios en los que se verifica un incremento de la desigualdad internacional; bajo el enfoque neoclásico debería tratarse de un comportamiento transitorio, aunque esto es algo difícil de medir. En realidad, la discriminación de ambos modelos resulta muy compleja, dado que requiere el tratamiento de series muy amplias en el tiempo y el control del efecto de variables relevantes en la tasa de crecimiento, renta o desarrollo tecnológico. Como se verá en secciones posteriores, existen diversos enfoques de trabajo, aunque De la Fuente (1999) identifica dos líneas principales: (i) la estimación de la relación existente entre el crecimiento experimentado y la renta inicial, a nivel agregado, considerando las variables que se entiende resultan relevantes en el proceso; y (ii) realizar el mismo estudio, a nivel de datos regionales y omitiendo la presencia de estas variables relevantes o fundamentales. Este segundo enfoque considera que un porcentaje destacado de dichas variables son comunes a territorios de un mismo país: por ejemplo, política central, composición social, preferencias de los individuos... De este modo el investigador reduce la dificultad asociada a las variables señaladas: “*en parte por problemas de disponibilidad de datos y en parte porque tampoco estamos seguros de cuáles son los factores relevantes*”, De la Fuente (1999: 10). La segunda vía facilita, además, el contraste de las hipótesis de convergencia.

Al mismo tiempo que se revitalizaba el estudio del crecimiento a través de las teorías endógenas, la econometría espacial comenzaba la fase de *propulsión*, en término de Anselin (2010). Esta disciplina, híbrida entre la econometría clásica y la estadística espacial, nacida a finales de los setenta, experimentó un desarrollo singular, *explosivo*, a inicios de la década de los noventa, como se expondrá en el capítulo cuarto. ¿Resulta correcto atribuir la coincidencia temporal de estos dos fenómenos expansivos a una mera casualidad? Parece que no. Bajo nuestra opinión la causa común de este paralelismo se encuentra en las mejoras experimentadas en la tecnología informática durante el período de inflexión entre la década de los ochenta y los noventa. Como señala Florax y Van de Vlist (2003), la disponibilidad de un software, sencillo de utilizar, para el manejo de datos espaciales provocó, curiosamente, un efecto incremental en el progreso de los desarrollos teóricos de la econometría espacial. Esta sustancial mejora de las prestaciones de los equipos informáticos (en términos de programación y también de *hardware*) se refleja en el cambio percibido por Anselin y Rey (1991) respecto al interés en la comunidad de investigadores acerca de los temas espaciales y que contrasta con la preocupación por el abandono general de esta materia, presente en Anselin (1988). En apenas tres años se detectaba una permuta sustancial. Pero es que en apenas diez años los temas clásicos en el contexto espacial, como el tratamiento del error o el modelado *spatial-lag*, han sido ampliamente superados y las investigaciones se centran en análisis de riesgo, ampliación de test de especificación o en la identificación de tratamientos similares a los de raíces unitarias.

Una situación similar se produce en el ámbito del crecimiento: la posibilidad de trabajar con un volumen importante de datos, de estructurarlos y experimentar con ellos reactivó el interés de los investigadores. Sala-i-Martin (1994: 7) sostiene que *“los economistas modernos se han dejado guiar por los datos y las experiencias económicas reales de los diferentes países del mundo”*. En los dos campos citados, las experiencias empíricas y los trabajos teóricos han interactuado como nunca habían hecho en períodos anteriores, lo que se manifiesta en la cantidad y calidad de los trabajos generados desde principios de la década de los noventa.

La síntesis de la evolución histórica de los enfoques sobre el crecimiento que se ha mostrado (necesariamente de manera muy concisa) explica la variación de este concepto a lo largo del tiempo, de ahí el título que se ha asignado a este primer apartado. Mihut (2013) considera distintas aproximaciones al término, que se enriquecen con otras aportaciones:

- Howitt y Weil (2008: 231), en su obra técnica de consulta, define el crecimiento económico como *“measure of a positive change of GDP within an economy”*. Se trata de una relación muy intuitiva, que se focaliza en la renta como elemento mensurable del bienestar de las personas o, bajo otro enfoque, asociado a determinados condicionantes de la existencia. También interesa destacar la identificación del GDP (*Gross Domestic Product*) como variable idónea de medida; esta cuestión se retoma en la sección posterior.
- Schumpeter (1947) emplea, de manera indistinta, los términos crecimiento económico y desarrollo económico: en su obra el desarrollo se considera un cambio espontáneo y discontinuo respecto a un estado estacionario ya existente, lo que afecta a dicho equilibrio. A lo largo del tiempo estos efectos provocan cambios graduales, debido al incremento de la población y de la propia dinámica económica. Es cierto que en la literatura sobre la materia los dos términos señalados, desarrollo y crecimiento, suelen tratarse de manera indistinta; Mihut (2013) destaca algunos rasgos específicos, como que el primero se centra en rasgos estructurales dentro de la economía, en índices cualitativos (por ejemplo de pobreza) y con el objeto de identificar el uso de recursos no empleados por naciones subdesarrolladas, mientras que el análisis del crecimiento se enfoca a la identificación de los *outputs*, posee un carácter eminentemente cuantitativo, se asocia al empleo óptimo de recursos y al incremento gradual del PIB. La exploración de estas interesantes diferencias se aleja en exceso de los objetivos de nuestro estudio, por lo que se opta por la consideración e introducción de ideas de este ámbito cuando los resultados empíricos lo requieran.
- Por su parte, Kuznets (1955) no aporta específicamente una definición, pero sí resalta la importancia de un tratamiento cuantitativo del crecimiento. Su estudio se centra en las desigualdades de la distribución personal de la renta, en su evolución y en las posibles causas del comportamiento detectado. Interesa en especial la identificación de cinco especificaciones que deben ser consideradas a la hora de afrontar un estudio empírico en este contexto (y cuya vigencia se mantiene, en líneas generales, en las investigaciones actuales): (i) los valores de la renta se expresarán en términos de gasto familiar, ajustados como variables per cápita; (ii) la distribución analizada debe ser completa, extendida al conjunto de toda la población y no limitada a segmentos particulares de la misma; (iii) se prescindirá de valores extremos, es decir de individuos

en ciclos iniciales o de aprendizaje y de aquellos que se encuentran en proceso de jubilación; (iv) la renta personal se debe identificar de manera similar a la nacional, es decir, la que reciben directamente los sujetos, incluidos los términos en especie, antes y después de la aplicación de impuestos directos, excluyendo ganancias de capital; y (v) las unidades se agruparán según su nivel, tras la eliminación de componentes cíclicos y distorsiones transitorias. Un estudio clásico en este contexto corresponde al análisis de la distribución por quintiles de las distribuciones de renta familiares. Kuznets (1955) incluye un análisis de las rentas antes de impuestos en US, Inglaterra y Alemania a principios del siglo XX y los resultados sugieren un cierto desplazamiento hacia la igualdad, particularmente destacado desde el inicio de la década de los años veinte (en el estudio se diferencian los períodos afectados por las catástrofes bélicas). En principio, la consideración tanto de las tasas como de las políticas públicas debe mostrar mayores reducciones de la desigualdad en naciones desarrolladas. Estas disminuciones se encuentran acompañadas con crecimientos significativos de la renta real per cápita. Resulta muy interesante constatar que una clasificación por grupos de valores de rentas per cápita revela que los de menor nivel crecen con una ratio superior a la correspondiente a los de más alto nivel.

Las reflexiones sobre las causas y consecuencias de la profunda crisis originada en 2008 han propiciado la reactivación de un debate ya iniciado, como se ha visto, por David Ricardo, entre los siglos XVIII y XIX, respecto al posible cese del crecimiento debido a la carestía de recursos. Gadrey, Marcellesi y Barragué (2013) plantea una crítica a los planteamientos que consideran el crecimiento como la única vía de mejora del bienestar social, la solución a los problemas de desempleo, deuda pública, crisis ecológica, etc. Los autores sostienen que la huída hacia adelante que representa el *crecimiento por el crecimiento* repercute de forma dramática en los objetivos principales de la sociedad y otorga a este proceso la consideración del auténtico problema a afrontar. De ahí el título, revelador y directo, de la obra citada: adiós al crecimiento. La exposición de elementos críticos, sólidamente argumentada, constituye una teoría de desarrollo alternativo, cuya orientación y alcance se alejan de los aspectos generales de nuestro estudio, pero que ofrece algunos aspectos de interés en relación a determinados elementos.

Uno de ellos, por ejemplo, es la crítica de la consideración del PIB como una medida adecuada del bienestar de la población: debido al método de cálculo, este índice no tiene en cuenta variaciones de calidad ni condiciones sociales ni ecológicas. Por tanto: (i) *“Todo lo que puede producirse y venderse con un valor monetario agregado va a inflar el PIB y el crecimiento, independientemente del hecho de que ello se sume o no al bienestar individual y colectivo”*, Gadrey et al. (2013: 30); (ii) el PIB no considera elementos que contribuyen al bienestar, salvo los que se explotan con fines lucrativos; y (iii) del mismo modo, esta medida también es indiferente a desigualdades, pobreza, estabilidad, etc. La tesis de los autores se centra en mantener este indicador (y otros similares), pero con el conocimiento de su limitado campo de alcance.

Castro, Bermejo y Raya (1999) señala que, en efecto, la EU considera el PIB per cápita como principal indicador de resultados de cohesión o convergencia, pero menciona a otros autores, como, por ejemplo, Cordero (1992), que destacan la importancia de las distribuciones

productivas, de su eficiencia, existencia de infraestructuras, equipamientos sociales, etc. Cereijo, Turrión y Velázquez (2006) indica que la relevancia del PIB obedece directamente a la importancia concedida por los economistas a la eficiencia productiva. Sin embargo, hay dos aspectos interesantes a considerar en el análisis de esta relación: (i) *“dado un mismo nivel de renta, un mejor reparto de la misma podría permitir alcanzar mayores niveles de bienestar, como de hecho se manifiesta en el cálculo del Índice de Desarrollo Humano o en el indicador de objetivos del Milenio”*, según Cereijo et al. (2006: 11); y (ii) el crecimiento potencial, caracterizado a través de otras variables distintas, también constituye un indicador alternativo de la medida de bienestar. Estos autores plantean un conjunto de indicadores de convergencia real<sup>4</sup>, que complementan la información sobre la renta, y que recogen el enfoque planteado en (ii). En la siguiente tabla se representa un esquema de agrupación de las 57 variables propuestas:

A. Nivel de renta y crecimiento económico	
a) Nivel de renta y crecimiento económico presente	
i. Nivel y crecimiento de la renta	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. PIB per cápita</li> <li>2. Crecimiento real del PIB</li> <li>3. Productividad media del trabajo –nivel–.</li> <li>4. Crecimiento de la productividad media del trabajo.</li> <li>5. Productividad total de los factores –nivel–.</li> <li>6. Crecimiento de la productividad total de los factores.</li> </ol>
ii. Contenido tecnológico de la estructura productiva	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Contenido tecnológico de la estructura productiva:               <ol style="list-style-type: none"> <li>1.1. VAB en actividades manufactureras de IT alta.</li> <li>1.2. VAB en actividades manufactureras de IT media-alta.</li> <li>1.3. VAB en actividades manufactureras de IT media-baja.</li> <li>1.4. VAB en actividades manufactureras de IT baja.</li> </ol> </li> <li>2. Contenido tecnológico de los servicios de mercado:               <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1. VAB en servicios de mercado de alta tecnología intensivos en conocimiento.</li> <li>2.2. VAB en servicios de mercado intensivos en conocimientos.</li> <li>2.3. VAB en servicios de mercado financieros intensivos en conocimiento.</li> <li>2.4. VAB en otros servicios de mercado intensivos en conocimiento.</li> <li>2.5. VAB en servicios de mercado no intensivos en conocimiento.</li> </ol> </li> </ol>
iii. Sector exterior	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Saldo de la balanza por c/c y capital.</li> <li>2. Flujo de inversión extranjera directa recibida.</li> <li>3. Flujo de inversión directa al exterior.</li> <li>4. Importancia del stock de capital extranjero recibido.</li> <li>5. Importancia del stock de capital nacional emitido al exterior.</li> </ol>
b) Potencial de crecimiento	

<sup>4</sup> Esta visión supone considerar *“la convergencia como el crecimiento que permite acercar la renta entre países con distintos niveles de bienestar”*, Cereijo et al. (2006: 11).

i. Factores de crecimiento	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Capital físico: <ol style="list-style-type: none"> <li>1.1 Capital físico privado productivo.</li> <li>1.2 Capital físico público.</li> <li>1.3 Capital residencial.</li> <li>1.4 Índice sintético de infraestructuras del transporte.</li> </ol> </li> <li>2. Capital intangible: <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1 Capital tecnológico interior total. <ul style="list-style-type: none"> <li>– Capital tecnológico interior privado.</li> <li>– Capital tecnológico importado.</li> <li>– Spillovers tecnológicos transmitidos por el comercio.</li> <li>– Gastos en I+D total.</li> <li>– Gastos en I+D ejecutados por el sector privado</li> </ul> </li> <li>2.2 Capital humano: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Número medio de años de escolarización.</li> <li>– Gasto público en educación.</li> </ul> </li> </ol> </li> </ol>
ii. Nueva economía	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Host per cápita.</li> <li>2. Penetración de la banda ancha.</li> <li>3. Gasto en tecnologías de las comunicaciones.</li> <li>4. Usuarios de Internet.</li> </ol>
iii. Aspectos demográficos	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Crecimiento vegetativo de la población.</li> <li>2. Crecimiento total de la población.</li> <li>3. Tasas bruta de natalidad.</li> <li>4. Índice sintético de fecundidad.</li> <li>5. Población femenina en edad fértil.</li> <li>6. Tasa bruta de mortalidad.</li> <li>7. Esperanza de vida al nacer.</li> <li>8. Tasa bruta de migración neta.</li> <li>9. Edad de la población: <ol style="list-style-type: none"> <li>9.1 Edad media de la población.</li> <li>9.2 Edad mediana de la población.</li> <li>9.3 Índice de juventud de la población.</li> <li>9.4 Índice de envejecimiento de la población.</li> <li>9.5 Índice de envejecimiento elevado de la población.</li> <li>9.6 Índice de dependencia de la población.</li> <li>9.7 Índice de dependencia de ancianos de la población.</li> </ol> </li> </ol>
<b>B. Distribución de la renta</b>	
a) Mercado de trabajo	
<ol style="list-style-type: none"> <li>i. Tasa de empleo.</li> <li>ii. Tasa de actividad.</li> <li>iii. Tasa de ocupación.</li> <li>iv. Tasa estandarizada de paro.</li> </ol>	
b) Gastos en protección social	
<ol style="list-style-type: none"> <li>i. Gasto público en protección social.</li> <li>ii. Gasto público en sanidad.</li> </ol>	

Tabla 1.1. Listado de indicadores de convergencia real.

Fuente: Cereijo et al. (2006: 13)

Por otra parte, Gadrey et al. (2013) muestra, mediante un estudio empírico, que la correlación estadística existente entre el PIB per cápita y el grado de satisfacción relativo se caracteriza por un comportamiento decreciente, de modo que, a partir de una determinada cota, el aumento de la riqueza del país no se traduce en una mejora de la percepción del bienestar. Este comportamiento se reproduce al considerar indicadores del desarrollo humano como la esperanza de vida (en años) o la tasa de escolarización secundaria frente al PIB per cápita.

Un planteamiento que se considera de manera específica en nuestro estudio es el concerniente a la relación entre el nivel de emisiones de dióxido de carbono por habitante respecto al PIB per cápita. Este análisis es relevante debido a la repercusión de este gas en el

efecto invernadero y, por tanto, en el calentamiento global del planeta. En este caso, acudiendo a Gadrey et al. (2013) se verifica una correlación lineal muy fuerte ( $R^2 = 0.67$ ), que se debilita a partir de la cota PIB per cápita = 13,000 \$ en paridades de poder adquisitivo (*ppa*)<sup>5</sup> de 2004. También existe una correlación parecida entre la huella ecológica per cápita y el PIB per cápita. El problema es que el promedio de emisiones de los países ricos es muy superior, en torno a cinco veces, al umbral objetivo de 1.8 toneladas de CO<sub>2</sub> por habitante y año en el mundo. Según Gadrey et al. (2013: 54) *“desde 1970 se está produciendo una convergencia al alza, hacia la insostenibilidad”*.

Otra cuestión que se somete a juicio es la relación entre crecimiento y empleo. Los estudios clásicos consideran que siempre se estarán produciendo aumentos de productividad, actuando sobre la cantidad de producto o sobre el volumen de trabajo. Este planteamiento parece que requiere una revisión debido al propio agotamiento de los recursos y a las nuevas políticas de control en términos energéticos o medioambientales. De hecho, las series temporales con el incremento de la productividad horaria o el aumento anual del PIB muestran desde el año 1971, para los distintos países de la OCDE, una tendencia claramente negativa. Para Gadrey et al. (2013) la solución a un escenario con fuertes caídas de los aumentos de la productividad se encuentra en una reorientación del empleo, con la incorporación de aspectos sociales y ecológicos.

Resulta interesante comprobar que, de todos modos, la visión de lo que es el crecimiento varía entre países; esto se aprecia de manera significativa en el seno de la EU, que debería representar, en principio, una fuerte unión monetaria. Cereijo et al. (2006) identifica diversas visiones: (i) como comunidad general, se persigue la convergencia hacia USA, en su rol de líder mundial; (ii) los países que partían rezagados en la década de los ochenta, en el momento de su incorporación, intentan alcanzar el nivel de los más ricos; y (iii) los nuevos Estados miembros (países de la Europa del Este y del Centro) querrían, sin embargo, posicionarse en los niveles de los estados que, en el principio, se encontraban más retrasados.

Se cierra este apartado analizando, de manera muy sintética y bajo una orientación práctica, algunos aspectos adicionales relativos al crecimiento. Para ello se acude a un estudio clásico como Maddison (1994), que profundiza en la importante relación desigualdad – crecimiento, explícita a través de la medida de la denominada  $\sigma$ -convergencia, como se verá en el capítulo tercero. En concreto, el estudio parte de la constatación de la existencia de notables desigualdades, analizando datos desde 1820, y se centra en la cuestión esencial de por qué los países occidentales se han vuelto ricos mientras que los restantes se encuentran en la pobreza. Un análisis de esta envergadura debe considerar factores como la disponibilidad de recursos, las características del capital humano, el impacto tecnológico o los flujos internacionales de bienes y capital, entre otros, encuadrados en un contexto político y social. Este trabajo incluye una importante revisión de estos elementos, aunque se omiten en nuestra revisión al encontrarse referidos a temáticas más específicas.

Maddison (1994) emplea distintas fuentes (en general, las series históricas disponibles de cada país) para recopilar el PIB de una muestra que contiene 21 estados en el intervalo inicial,

---

<sup>5</sup> Este concepto, que se entiende conocido, tiene, de todos modos, su correspondiente tratamiento en el siguiente apartado.

referido a 1820, y que se amplía en el tiempo, debido a la accesibilidad a mayor número de referencias, hasta considerar un total de 43 países en el período final, correspondiente a 1989 (el conjunto final representaría tres cuartas partes de la población mundial). El estudio se discretiza en siete intervalos: 1820, 1870, 1890, 1913, 1950, 1973 y 1989. Su tratamiento previo posee cierta complejidad ya que requiere una transformación en *ppa*, a través de convertidores, como los proporcionados por Summers y Heston (1988), y su expresión en una moneda común (en este caso dólares estadounidenses de 1985); en lo referente a estados comunistas y países africanos se necesita, además, el empleo de estimaciones del PIB, dada la ausencia de datos oficiales.

Los resultados más significativos del análisis son:

- Entre 1820 y 1989 se produjo un significativo incremento de la renta real en todos los países, a excepción de África.
- Las ratios de crecimiento varían de manera muy destacada durante todo el horizonte temporal. La dispersión de las rentas también aumenta en cada intervalo, desde una relación en torno a 4:1 en 1820 hasta 39:1 en 1989 (ciertamente relevante). Esto implica la existencia de comportamientos no lineales ocultos.
- Entre 1913 y 1950 se verifica un incremento del salto entre el país líder y 30 de los 37 estados perseguidores. Esta tendencia se invierte a partir de la década de los cincuenta, con una reducción, a veces muy significativa, en el *gap* entre USA y 30 de los 42 países rezagados considerados en la muestra. Maddison (1994: 23) señala la evidencia de “*a good deal of «catch-up» within a global framework of «divergence»*”.
- En base al grado de homogeneidad se pueden identificar cinco grupos en la muestra:
  - Un núcleo central con 14 países capitalistas, que se caracteriza por las rentas más elevadas, con un crecimiento real del 30% desde 1820 hasta 1989 y más rápido a largo plazo. La dispersión interna se reduce desde 2.3:1 en el año inicial hasta 1.5:1 en el final.
  - Periferia de Europa, con siete estados (incluyendo España y Portugal), y con el segundo nivel más alto de rentas. Su crecimiento real fue del 9% y las diferencias no se han desplazado en exceso desde 1820, manteniéndose en torno a 1.5:1.
  - Latinoamérica, en el que se incluyen seis países, con un incremento de la renta media per cápita del 7%. También parece que la dispersión no ha variado en el tiempo, reflejando una relación 1.6:1.
  - Asia, con nueve estados, que se caracteriza por la reducida homogeneidad, como muestra un incremento de la dispersión muy relevante desde 1950, concretada en la ratio 27:1 en 1989. La presencia de Japón distorsiona los resultados, dado que su renta se encuentra por encima de la media del conjunto capitalista.
  - África, en la que se engloban siete países, muestra el nivel más bajo de renta, con un valor medio parecido al de los países del núcleo central capitalista a mediados del siglo XIX (de todos modos, se trata de datos a considerar con prudencia, debido a la dificultad en la obtención de los mismos). La dispersión en el año final corresponde a 12:1.

- La homogeneidad detectada parece confirmar la existencia de características institucionales o políticas que constituirían la base de la integración en uno u otro grupo.
- Las pautas de crecimiento en todo el horizonte no han sido regulares. Se experimenta una considerable aceleración del crecimiento real per cápita en el período 1950-1973, mucho más destacado en los países pobres. A partir de ese año (en el que se detecta la crisis del petróleo) la tendencia decae, excepto en Asia y África.
- El núcleo de países capitalistas incluye al líder en productividad y tecnología durante el período considerado<sup>6</sup>. El mayor nivel de productividad corresponde a Reino Unido: prácticamente se verifica en todo el siglo XIX, desde 1820 a 1890. A partir de ahí este privilegio pasa a USA, nación que representa, además, la frontera tecnológica. El resto de países actúan como perseguidores, de modo que la evolución de los mismos se encuentra fuertemente influenciada por el proceso de difusión tecnológica.
- El crecimiento de la población en Europa Occidental es reducido, dado el fenómeno compensatorio que implica la reducción de la mortalidad y, al mismo tiempo, el decremento de la tasa de natalidad. En Australia, Canadá y USA se experimenta un aumento más considerable de la población debido a los fenómenos migratorios y a la elevada ratio de natalidad; este último factor se reduce a lo largo del tiempo a niveles inferiores a las medias asiáticas, africanas o latinoamericanas. Los países periféricos muestran una evolución similar a la de los europeos occidentales. Asia es el grupo que muestra un crecimiento demográfico más destacado a partir de la mitad del siglo XX. Maddison (1994) indica que estas diferencias entre naciones ricas y pobres respecto a la evolución de la población poseen un impacto en el potencial de crecimiento per cápita sobre el que habría que profundizar.

En la Tabla 1.2 se resumen los condicionantes más significativos en el crecimiento, tras la II Guerra Mundial, de los cinco grupos identificados (no se indican las repercusiones específicas de la crisis posterior a 1973):

Grupo de países	Características del crecimiento
Núcleo de países capitalistas	La expansión de estos estados se debe fundamentalmente al fenómeno de <i>catching-up</i> tecnológico. El proceso de crecimiento se acompaña de políticas económicas tolerantes en USA y del abandono del colonialismo, que es reemplazado por ayudas al desarrollo. Al final del período de expansión la brecha entre países europeos y EU se reduce de manera considerable.
Periferia de Europa	La aceleración en el crecimiento también se asocia al <i>catching-up</i> tecnológico, aunque con resultados más satisfactorios, debido a que las economías partían de posiciones más rezagadas. Los estados periféricos se benefician de la proximidad del núcleo capitalista, en términos de exportación, retornos turísticos y ayudas comunitarias.
Latinoamérica	Los países de este ámbito permanecieron aislados de la economía mundial durante un largo período de tiempo tras la guerra. Aunque experimentan un cierto crecimiento, no se produce en niveles similares a los de Europa o Asia.

<sup>6</sup> En realidad, desde una perspectiva amplia, este hecho se constata en Occidente más atrás en el tiempo, desde el siglo XV.



Asia	Se destacan los siguientes aspectos: (i) acceso al poder de nuevas élites nacionales; (ii) incremento de las ratios de inversión y crecimiento del stock de capital; (iii) fomento del capital humano, con una reducción muy destacada de las diferencias en educación respecto al nivel europeo; (iv) el agotamiento salvaje de los recursos provocado por el colonialismo queda sustituido por la nueva entrada de capital extranjero y ayudas económicas; (v) se produce una importante activación del comercio internacional, asociada al crecimiento de los países capitalistas y a la reducción de las barreras fronterizas; (vi) en la mayoría de estados asiáticos los inputs de trabajo per-cápita son muy elevados; y (vii) como señalan determinados modelos de convergencia, estos países se desarrollan a mayor velocidad debido a que parten de niveles de productividad muy bajos y se encuentran a gran distancia de la frontera tecnológica.
África	El crecimiento de esta economía es el más reducido de todos los grupos, al igual que los indicadores de educación, salud e infraestructuras. La tasa de crecimiento de población, sin embargo, es muy elevada, situándose en la década de los noventa en torno a doce veces la de los países europeos del núcleo capitalista. La aparición de nuevas naciones-estado, bajo enfoques políticos que han generado climas de tensión, se ha concretado, desde el punto de vista económico, en distorsiones del mercado, aplicación de ratios de cambio artificiales y en daños a determinados sectores, como la agricultura.

Tabla 1.2. Circunstancias relevantes en los procesos globales de crecimiento a partir de 1945.

Fuente: elaboración propia a partir de Maddison (1994).

Mora (2002) destaca los siguientes aspectos específicos del crecimiento europeo en el último cuarto del siglo XX (una franja histórica que se revisará mediante diversos enfoques a lo largo del presente trabajo):

- El notable impacto de la crisis de 1973 obedece a tres factores, que se presentan de manera conjunta: (i) la corriente acelerada de inflación, asociada a una etapa previa muy amplia y caracterizada por un crecimiento económico prolongado en el tiempo; (ii) el colapso monetario tras los períodos de confrontación bélicos; y (iii) el conflicto petrolífero. La recesión podría haber sido más duradera de no haberse instaurado un cambio en política económica, que pasó a focalizarse en la lucha contra la inflación.
- Diez años más tarde se aprecia un cierto crecimiento, menos extenso en el tiempo, dado que a finales de los ochenta se detecta una nueva crisis, aunque con menor impacto.
- La etapa posterior, hasta principios del siglo XXI, se caracteriza por una tendencia general hacia el crecimiento, con ligeras fluctuaciones. Mora (2002) destaca que los procesos detectados de avance tecnológico pueden estar asociados a un cambio estructural. En nuestros días se considera todavía más la necesidad de que se produzcan dichos cambios y se abandonen determinados modelos de funcionamiento que impedirían retomar la senda del crecimiento, por ejemplo en la línea ya señalada por Gadrey et al. (2014), aunque las actuales constancias empíricas no parecen recoger resultados en este sentido.

La consideración de estudios como los expuestos proporciona a Mora (2002) la identificación de una relación de causas que influyen en el incremento significativo de la renta o, expresado de otro modo, en el crecimiento de las sociedades industrializadas: (i) el mayor porcentaje de población activa, con la irrupción de la mujer en el mercado laboral y con la entrada, en ciertos países y períodos temporales, de jóvenes en puestos de trabajo; (ii) un aumento de los esfuerzos (genéricos) en la mejora de la educación y de la capacitación de los profesionales; (iii) mayores niveles de stock de capital físico y de inversiones (considerando la enorme importancia de las infraestructuras y equipamientos para el crecimiento); (iv) cambios en la

estructura económica, como los asociados a la transformación de sociedades agrícolas en industriales o de servicios; (v) la liberalización comercial, en relación a sus efectos en la especialización económica y en el suministro de tecnologías; y (vi) el incremento del progreso técnico. Este listado abierto contiene aspectos que exigen todavía un análisis particularizado, que debe basarse en la incorporación y tratamiento de nuevas variables.

### **1.3 La consideración de la heterogeneidad en los estudios empíricos sobre crecimiento y convergencia**

En este apartado se procede al desarrollo de dos estudios empíricos propios con los que se persiguen distintos objetivos: (i) mostrar, en primer lugar, un análisis previo de datos econométricos y tratamiento del PIB en el marco de trabajos centrados en la determinación de la convergencia; (ii) introducir la cuestión central de la heterogeneidad de las unidades económicas consideradas; y (iii) constatar la vigencia de algunos aspectos cuantitativos, como los relacionados en la sección anterior. Estas ideas se abordan mediante la aplicación de modelos de mixtura.

#### **1.3.1 Evolución mundial de la renta per cápita**

La investigación inicial se centra en la evolución de la distribución mundial de la renta per cápita, considerando una muestra representativa de países. Para ello se ha procedido a una extracción de los datos disponibles desde 1950 en el repositorio *Penn World Table*, en la versión PWT 8.1 revisada por Feenstra, Inklaar y Timmer (2015). Se han seleccionado cuatro años, en base a la representatividad histórica y a la calidad de dichos datos: 1960, 1980, 2000 y 2011. La muestra considerada incluye en, su versión más amplia (la de 2011<sup>7</sup>), 167 países, distribuidos del siguiente modo: en África, 48 estados; en Asia, 44; en Europa, 40; en Norteamérica, 21; en Oceanía, 3; y en Sudamérica, 11. El valor agregado de la población es de 6,718 millones de habitantes y el PIB en ppa, expresado en miles de USA\$ de 2005, alcanza los 74,191,964\$. A fin de contrastar la idoneidad del conjunto empleado se comprueba en los datos aportados por World Bank. Population, total (2015) que el valor estimado de la población mundial en 2011 es de 7,007 millones, por lo que la muestra empleada representa, aproximadamente, el 96% del total de habitantes del planeta. Esta cuantificación también es muy próxima a los 6,987 millones facilitados por el PRB (2011).

En la Figura 1.1 se representan los aspectos relacionados con la población y la renta per cápita que caracterizan la representación por continentes de la muestra:

---

<sup>7</sup> A mayor distancia en el pasado se reduce el número de países para los que se dispone de información.

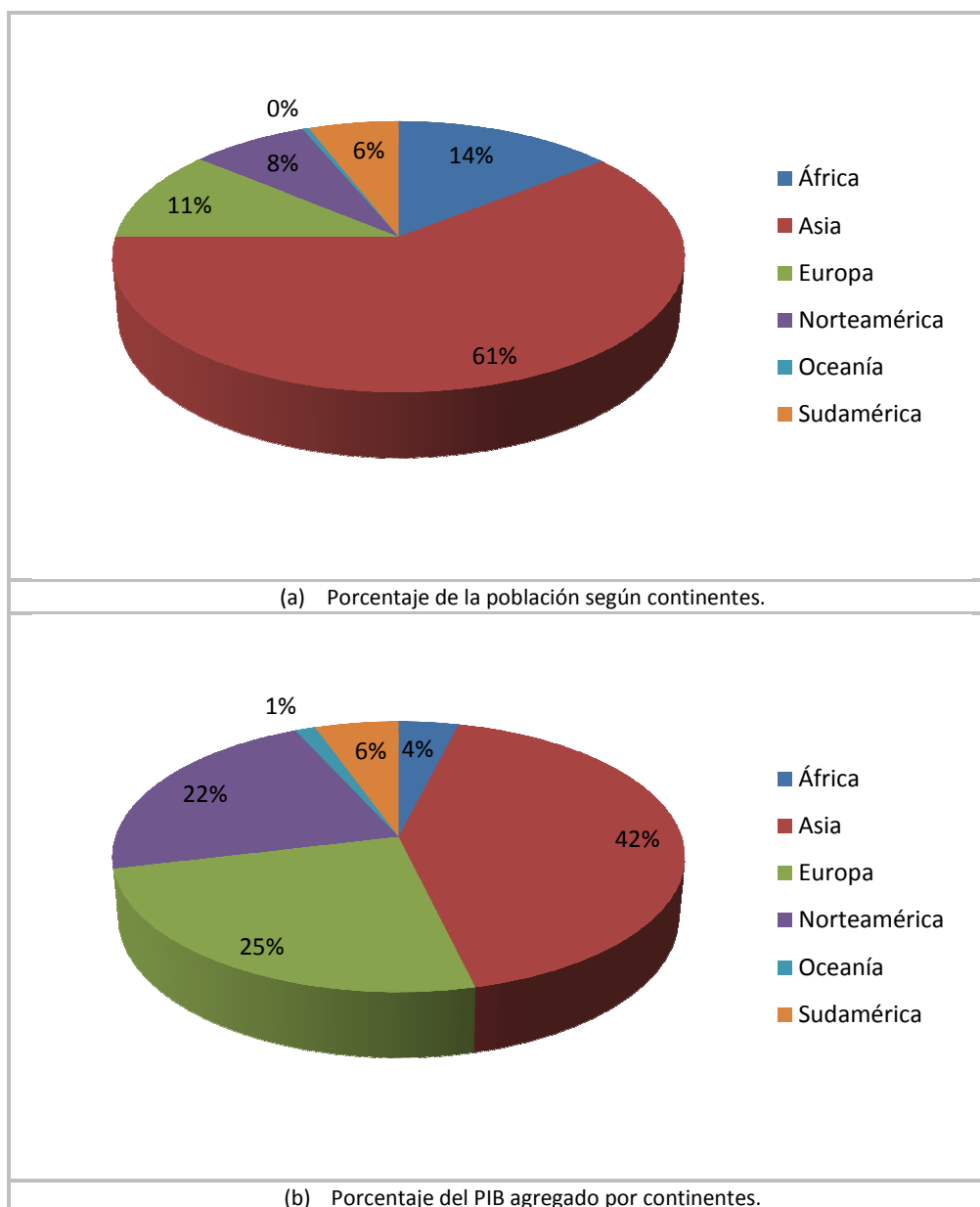


Figura 1.1. Distribución continental de la muestra de ámbito mundial.  
 Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

Como es conocido, el PIB se define como la diferencia entre los bienes y servicios producidos menos el valor de los requeridos para su obtención. Resulta interesante recordar que el término de renta que se emplea, por lo general, en nuestro estudio, es el PIB en términos de *paridad de poder adquisitivo* o *paridad de poder de compra*, dado que permite comparar los valores entre distintos países a través de un proceso de homogeneización; para ello se coteja el costo de un conjunto común de bienes y servicios entre las naciones correspondientes y se obtiene la tasa de cambio relativa. La confrontación entre valores del PIB per cápita aumenta si éstos se consideran directamente en euros, sin considerar dicho factor de cambio. Las diferencias entre países ricos y pobres resultan en tal caso menos dramáticas en términos de *ppa*. La formulación que emplea Cereijo et al. (2006) para el cálculo de esta variable en un

instante dado es:  $PIB(t)_{pc|ppa} = \frac{PIB(t)_n / PPA(t)}{POB(t)_{CN}}$ , con  $PIB_n$  el valor nominal en moneda

nacional,  $PPA$  la paridad de compra (por ejemplo, frente al dólar o al euro) y  $POB_{CN}$  la población según la Contabilidad Nacional.

Barro y Sala-i-Martin (2004) elabora un análisis de la evolución del PIB per cápita en ppa, comparando los niveles existentes en 1960 frente a los de 2000:

- El estudio inicial considera 113 países, con una desviación estándar de esta variable de 0.89. Los valores más elevados de la renta per cápita se localizaban en Suiza y USA y el más reducido correspondía a Tanzania; los países pobres se distribuían entre África y Asia, mientras que los ricos se identificaban con los integrantes de la OECD y algunos latinoamericanos, como Argentina y Venezuela. El histograma del PIB per cápita comprendía 16 clases o niveles.
- En 2000 la muestra se eleva a 150 países. La desviación estándar de la renta aumenta hasta 1.12, lo que revela un aumento del grado de dispersión (que se confirma al comparar los valores extremos del PIB per cápita). No existen variaciones respecto a los países más ricos (Suiza y USA) y al más pobre (Tanzania), aunque sí se detectan modificaciones en la ordenación según la renta de los estados intermedios. Los mayores niveles siguen ocupados por los países de la OECD, a los que se incorporan determinadas potencias del este asiático. El histograma del PIB parece revelar un cierto desplazamiento general hacia rentas más elevadas; los autores consideran en este caso 18 niveles.

La reflexión inicial sobre el grado de homogeneidad o heterogeneidad de la muestra se concreta, mediante la observación de este estudio previo, en la detección de grupos o *clusters* de países, que se caracterizarían por valores *próximos* (término un tanto ambiguo) de la renta per cápita. Fraley (2002: 1) recopila las cuestiones de índole práctica que suelen aparecer a la hora de afrontar estos análisis: “«How many clusters are there?», «Which clustering method should be used?» and «How should outliers be handled?»”. Las respuestas se establecen en su mayoría mediante procedimientos heurísticos: en este contexto se pueden destacar, por ejemplo, los métodos jerárquicos de aglomeración, los criterios sobre mínima distancia (considerando términos cuadráticos) o técnicas de reubicación, como el muy conocido algoritmo de  $k$ -medias. En planteamientos más simples se acude al conocimiento y experiencia del investigador en la materia, como suele resultar habitual en la representación convencional de histogramas.

El marco teórico empleado en el presente análisis se encuentra descrito en Fraley (2002) y responde a la complementariedad de dos aplicaciones basadas en modelos de mixtura normal multivariante, en los que las covarianzas se parametrizan mediante descomposición de autovalores: (i) el método de aglomeración jerárquica basado en la probabilidad de clasificación; y (ii) el algoritmo “expectativa-maximización” (EM) para la estimación de máxima verosimilitud. El modelo (i) suele proporcionar particiones adecuadas, incluso partiendo del desconocimiento de las características del grupo; por el contrario, EM requiere una correcta inicialización a fin de ajustar proporcionalmente el número de clusters. Esta segunda técnica se suele aplicar en dos fases: en el “paso E” se determina una previsión condicional en función del conjunto completo de probabilidades y en el “paso M” se determinan los parámetros que optimizan los resultados derivados de la primera etapa. Este método, y sus derivaciones, se

puede emplear en técnicas estadísticas multivariantes, como análisis discriminante y estimación multivariante de densidad (tal y como se aprecia en nuestro estudio empírico).

Utilizando la función *Mclust* de la librería *mclust* del software  $\mathcal{R}$  (Fraley y Raftery, 2002, Fraley, Raftery, Murphy y Scrucca, 2012) se obtiene el ajuste automático del modelo de mixtura de distribuciones normales univariantes que resulta más apropiado para la renta per cápita. Esta función recorre posibles valores para el número  $k$  de componentes entre 1 y 10, y considera para cada valor de  $k$  dos alternativas: varianzas iguales o distintas. Considerando los 20 modelos generados, el Criterio de Información Bayesiano conduce, en nuestro caso, a la configuración propuesta. Los parámetros del modelo de mixtura son estimados mediante el algoritmo EM, obteniendo de este modo estimadores de máxima verosimilitud de la probabilidad de cada componente, así como sus medias y desviaciones típicas.

En primer lugar se ha procedido a la estimación del núcleo de la función de densidad:

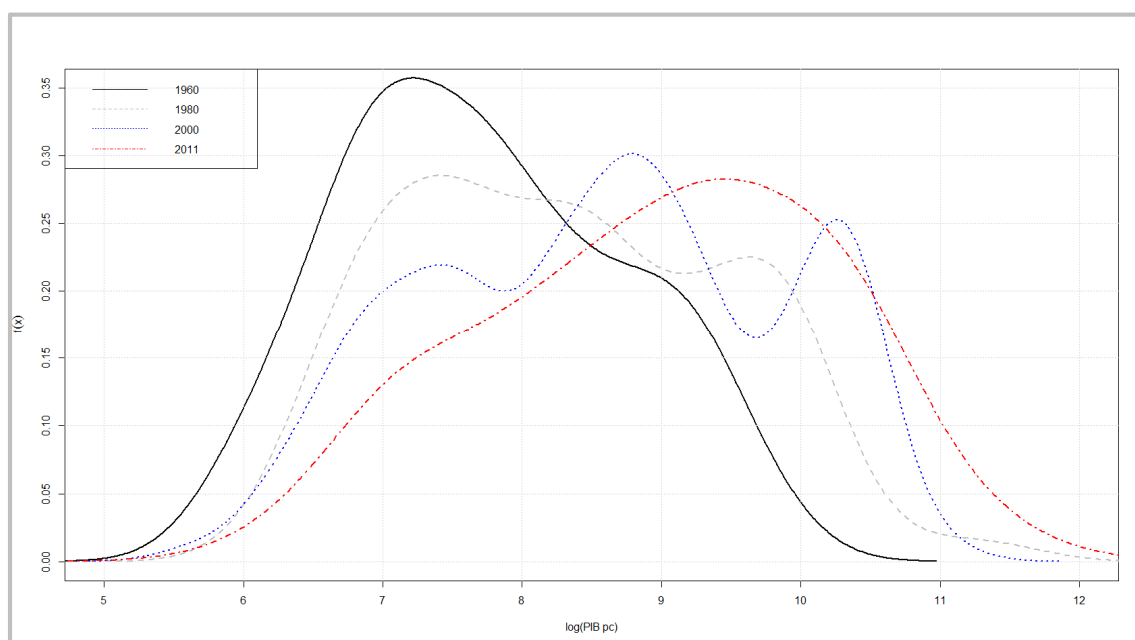


Figura 1.2. Estimación del núcleo de la función de densidad en la economía mundial en los años 1960, 1980, 2000 y 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

Se ha trabajado con el logaritmo de la renta, dada la mejora en fiabilidad de las estimaciones resultantes. La forma de las densidades sugiere mixturas de normales, de tamaño 2 en todos los años, salvo en 2000, que parece responder a tamaño 3.

En las gráficas siguientes se representa, sobre el histograma de la variable log, la densidad de la mixtura (en trazo continuo) y la densidad de cada Normal componente del modelo (en trazo discontinuo). En los anexos se relacionan los valores del PIB per cápita y de la clasificación de cada país según el modelo de mixtura.

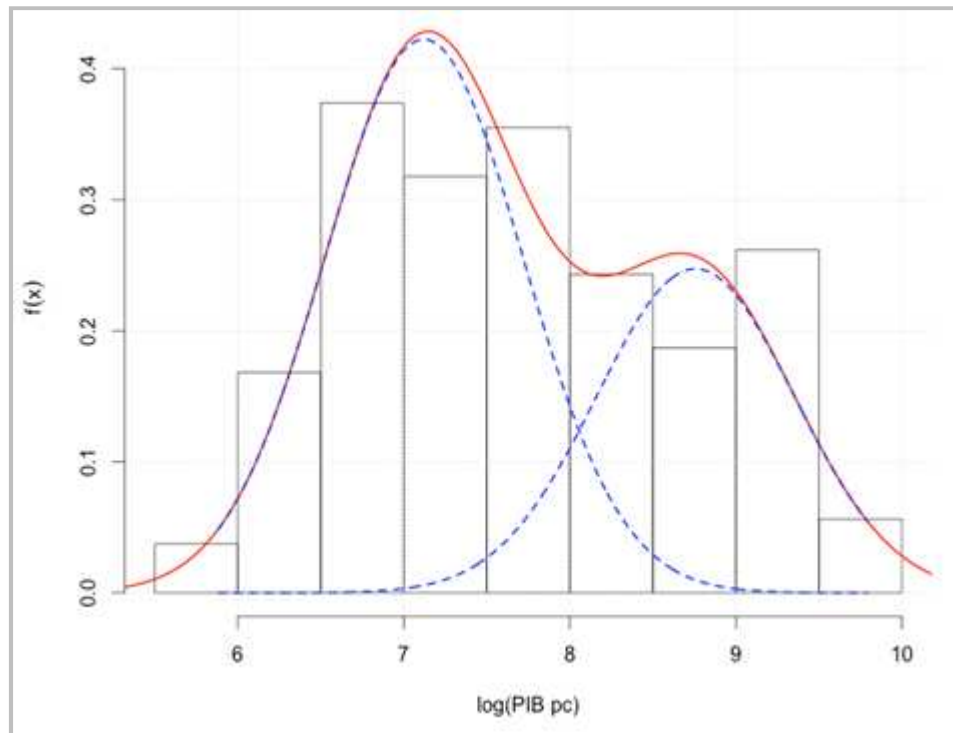


Figura 1.3. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en ppa en la economía mundial en el año 1960.  
Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

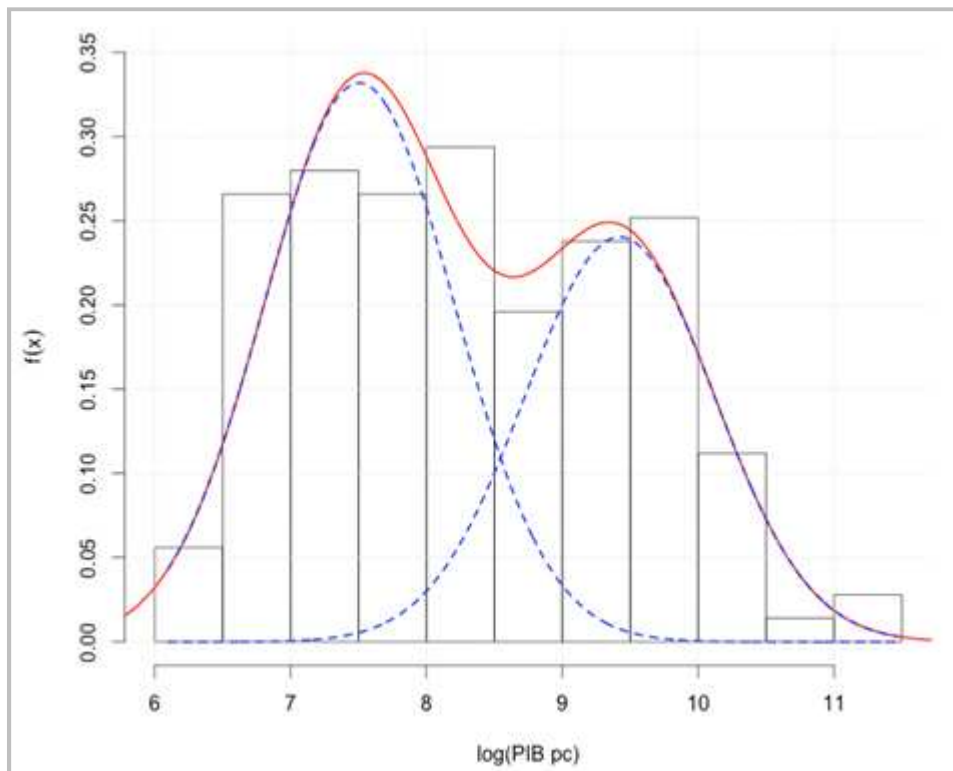


Figura 1.4. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en ppa en la economía mundial en el año 1980.  
Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

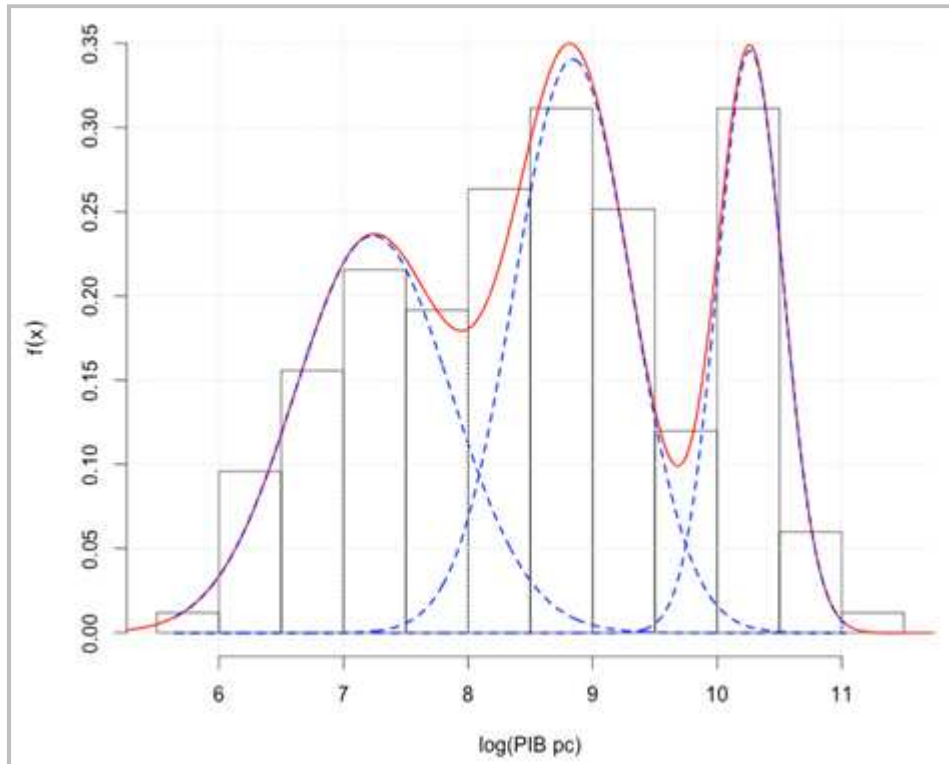


Figura 1.5. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en ppa en la economía mundial en el año 2000.  
Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

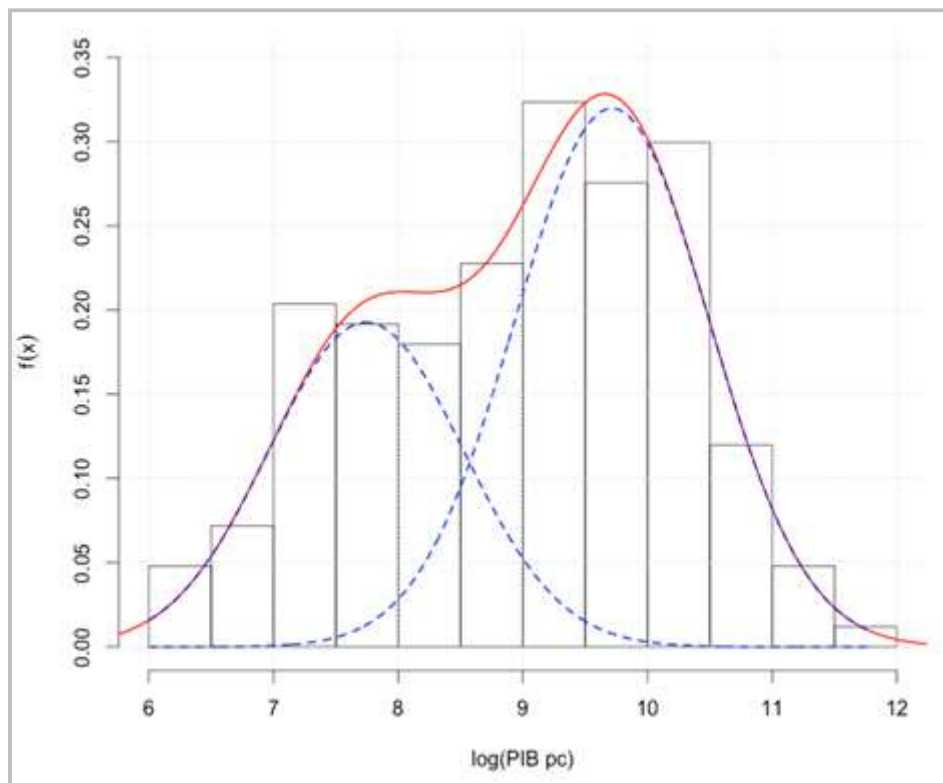


Figura 1.6. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en ppa en la economía mundial en el año 2011.  
Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

En la siguiente tabla se recogen los parámetros y estadísticos de las cuatro estimaciones de mixturas:

Año	Porcentajes de países en cada componente respecto al total	Valores medios según componente (en logaritmo)	Desviación típica
1960	[1]: 63% [2]: 37%	[1]: 7.12 [2]: 8.77	Valor único: 0.60
1980	[1]: 58% [2]: 42%	[1]: 7.51 [2]: 9.42	Valor único: 0.70
2000	[1]: 37% [2]: 40% [3]: 23%	[1]: 7.24 [2]: 8.84 [3]: 10.26	[1]: 0.63 [2]: 0.47 [3]: 0.26
2011	[1]: 37% [2]: 63%	[1]: 7.74 [2]: 9.71	Valor único: 0.78

Tabla 1.3. Parámetros relativos a las estimaciones de mixturas. Análisis mundial del PIB per cápita.

Fuente: elaboración propia.

Se observa una inversión de los porcentajes de países que conforman los *clusters* en el año inicial y final. Esto refleja cambios en la distribución hacia rentas superiores y un incremento de la dispersión, aunque no tan acentuado como en el estudio de Barro y Sala-i-Martin (2004). El año 2000 parece representar un instante del período de transición experimentado por determinadas economías, inicialmente pobres, que se desplazan hacia estados de mayor nivel.

De nuevo, ciertos países africanos, como Bostwana, Mali o Congo se caracterizan por las rentas per cápita más bajas a lo largo del tiempo. En el extremo opuesto, dos países europeos, Suiza y Luxemburgo, alternan la máxima riqueza con estados asiáticos, como Brunei o Catar (todos ellos caracterizados por tamaños reducidos de población).

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se representa el histograma de la ratio edia de crecimiento del PIB per cápita entre los años extremos que se consideran en el presente estudio. En este caso se obtiene una sola componente, con media 5.74 y desviación típica 0.82. Aplicando el test de Shapiro-Wilk,  $W = 0.9795$ , con un p-valor = 0.09658, por lo que se admite la hipótesis de normalidad.



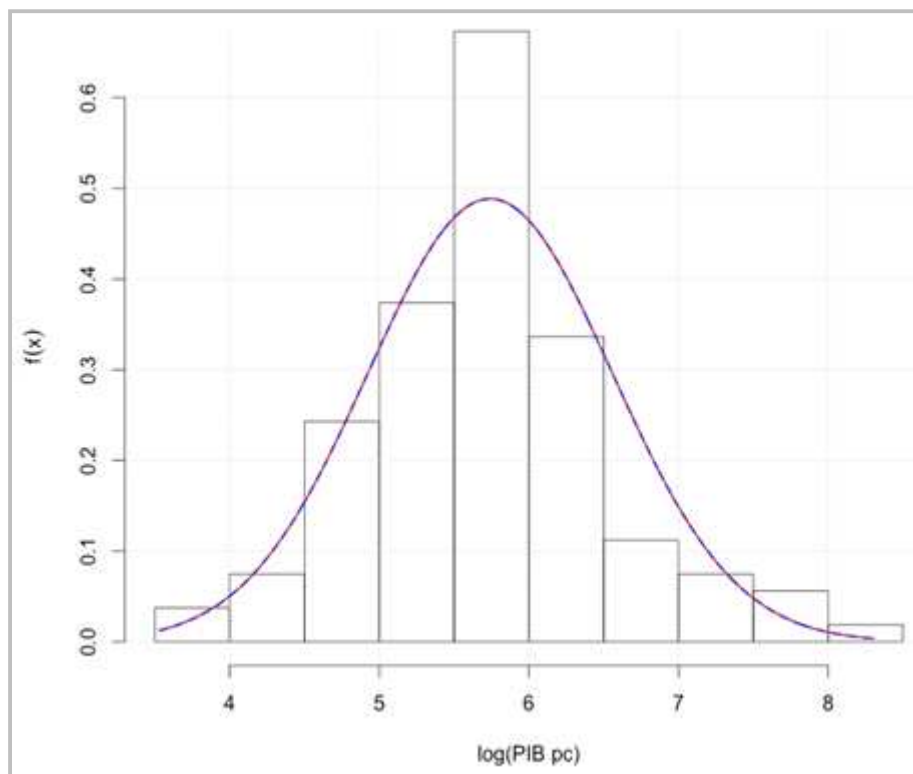


Figura 1.7. Histograma de la ratio de crecimiento del PIB per cápita mundial desde 1960 hasta 2011  
Fuente: elaboración propia a partir de Feenstra et al. (2015).

### 1.3.2 Evolución europea de la renta per cápita

El segundo estudio se centra en el ámbito habitual de los análisis que se realizarán en el presente estudio: los relativos a procesos de crecimiento y convergencia en el seno de la Unión Europea. El objeto es, como en el planteamiento anterior, revisar las variables empleadas y la influencia de los condicionantes de agregación en las posibles características de homogeneidad o heterogeneidad de las muestras.

En la siguiente figura se representan las tasas de crecimiento medio del PIB per cápita<sup>8</sup> correspondientes a la Unión Europea y a la economía mundial según los datos del Banco Mundial. La gráfica conjunta permite constatar una evolución muy similar, aunque la EU presenta extremos de crecimiento o decrecimiento más pronunciados.

<sup>8</sup> Esta tasa de crecimiento anual se expresa en valores porcentuales del PIB a precios constantes (2005\$ USA).

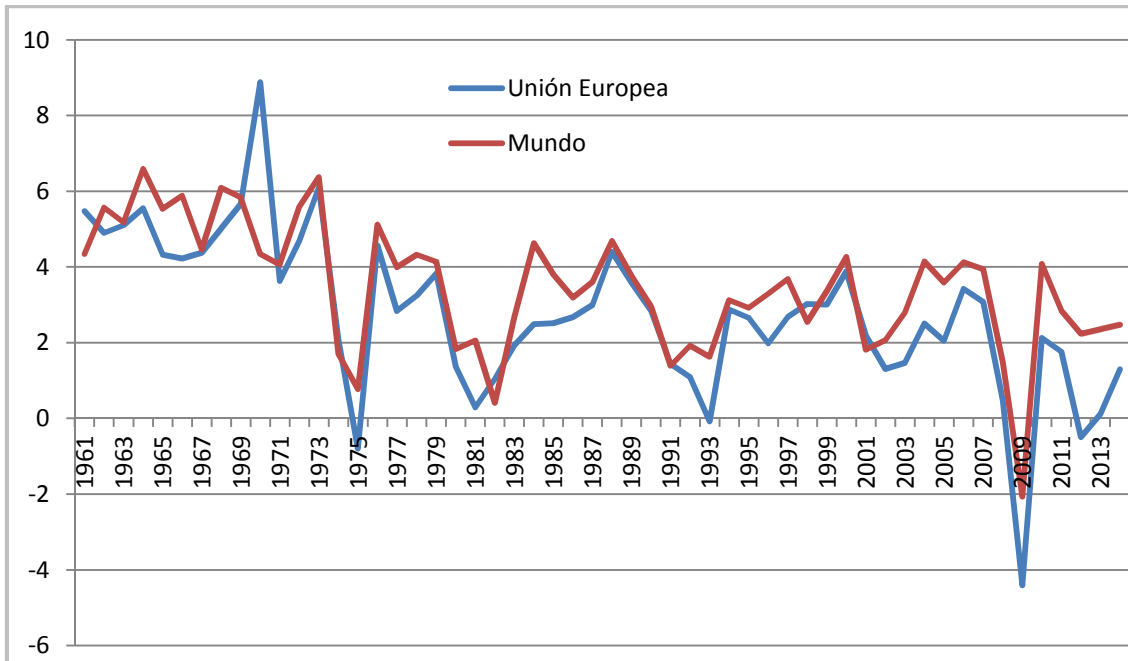


Figura 1.8. Tasas de crecimiento medio del PIB per cápita (EU y economía mundial) desde 1961 hasta 2014.

Fuente: elaboración propia a partir de World Bank. GDP, growth (2015).

A la hora de analizar el comportamiento de esta variable en el ámbito europeo, Vence (2014) diferencia en los últimos cuarenta años los siguientes sub-períodos, apreciables en la Figura 1.8:

- Hasta mediados de los setenta (en concreto hasta 1973) se desarrolla un extenso intervalo temporal con altas tasas de crecimiento.
- A partir de esa fecha, como consecuencia de la crisis del petróleo, sucede una etapa con fuertes oscilaciones cíclicas.
- Las décadas de los ochenta y de los noventa se caracterizan por: (i) un ritmo lento de crecimiento; y (ii) destacadas fluctuaciones en períodos de 4 a 5 años. El autor distingue tres ondas, de 8 a 11 años cada una: (i) expansión moderada en la segunda mitad de los ochenta; (ii) crisis en la primera mitad de los noventa; (iii) recuperación, desde 1995 hasta 2000, seguida de contracción durante los tres años siguientes. De 2004 a 2007 se asiste a una leve recuperación.
- A partir de 2007 se produce una gran recesión y el crecimiento se estanca. El año 2009 resulta sumamente crítico y se producen nuevos episodios de crisis en 2011 y 2012.

Estos resultados corresponden a una evolución media del crecimiento del PIB. Sin embargo, una de las tesis centrales del autor (con consecuencias en el diseño de las políticas, como se discutirá posteriormente) es que la Eurozona se caracteriza por una importante heterogeneidad. De este modo, por ejemplo, en la primera mitad de la década del dos mil se pueden detectar dos tendencias contrapuestas: las grandes economías, como Alemania, Francia u Holanda, se estancan, mientras que determinados países de la periferia, como España, Irlanda y algunas naciones del Este se expanden, como consecuencia de la burbuja inmobiliaria. Durante la profunda crisis posterior a 2007 los estados poderosos del primer grupo mantienen un cierto crecimiento, mientras que los demás padecen un terrible

estancamiento. El resultado de esta dualidad termina, finalmente, por ser negativo: la primera etapa de crecimiento resultó insostenible y acabó en una severa crisis de financiación; la resistencia de las economías desarrolladas en los intervalos más críticos se basa en planteamientos de máxima austeridad y en la atención a la demanda de bienes de naciones emergentes (asiáticas o latinoamericanas), lo que posee un recorrido muy corto en el tiempo. La disminución de esta demanda, una vez satisfechas las necesidades más acuciantes, ha supuesto un principio de recesión en la economía alemana a finales de 2012, lo que constituye una complicación más en el difícil proceso de recuperación.

Desde el punto de vista de los objetivos trazados en nuestro estudio resulta fundamental examinar los indicadores que confirman la existencia de heterogeneidad. En un primer planteamiento se procede a la revisión y actualización, con ciertas modificaciones, del estudio empírico que realiza Vence (2014) sobre los procesos de crecimiento en la EU; en un segundo análisis se aplica un tratamiento de mixturas, similar al desarrollado en el apartado anterior.

En la Figura 1.9 se procede a la representación del PIB per cápita<sup>9</sup>, tanto de la media como de los valores individuales, de los países europeos que integran la muestra (EU-28), en tres años específicos, 2000, 2006 y 2010 (de este modo se consideran los tres sub-períodos relevantes identificados en la primera década del dos mil). Se constata la disparidad de estos niveles de renta, a pesar del importante crecimiento de los países del Este (este fenómeno se estudiará con más detenimiento en el capítulo cuarto).

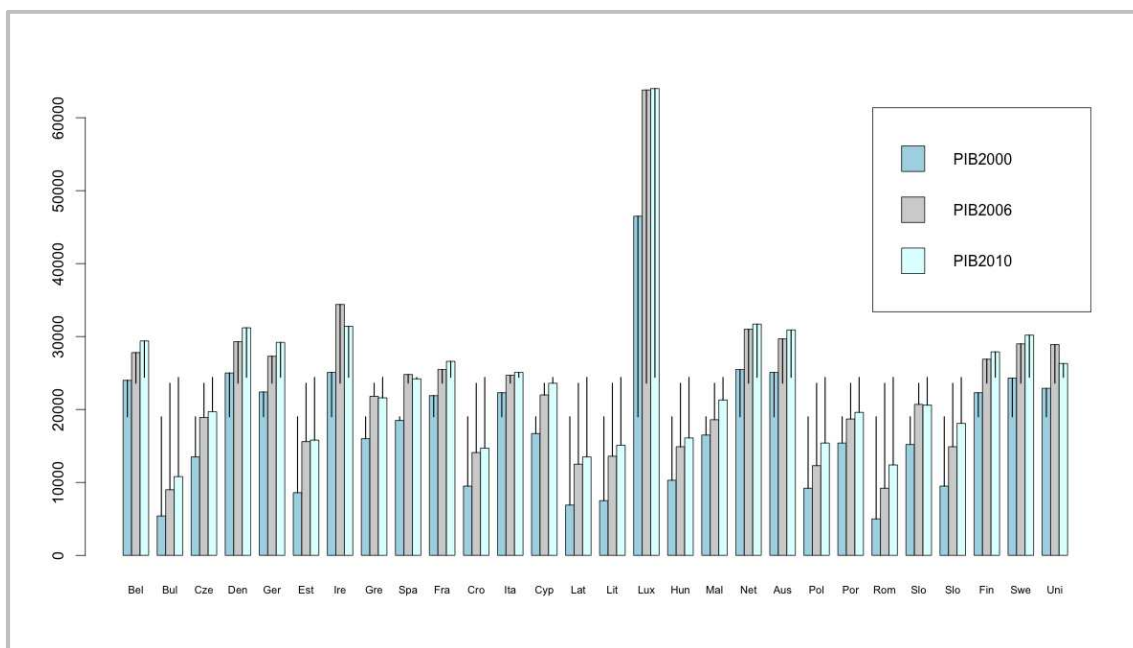


Figura 1.9. PIB per cápita en EU-28 en los años 2000, 2006 y 2010.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

<sup>9</sup> El segmento vertical en cada barra alcanza la media europea en ese año.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se representa, por una parte, la evolución de los valores máximo y mínimo del PIB per cápita en términos *ppa* y, en la siguiente, la relación entre estas dos variables. A partir del año 2000, en el que se alcanzó el máximo de esta ratio<sup>10</sup>, 9.30:1, correspondiente a Luxemburgo frente a Rumanía, la dispersión en la renta nacional ha disminuido. En 2012 se alcanza el mínimo del período considerado: 5.50:1, entre Luxemburgo y Bulgaria.

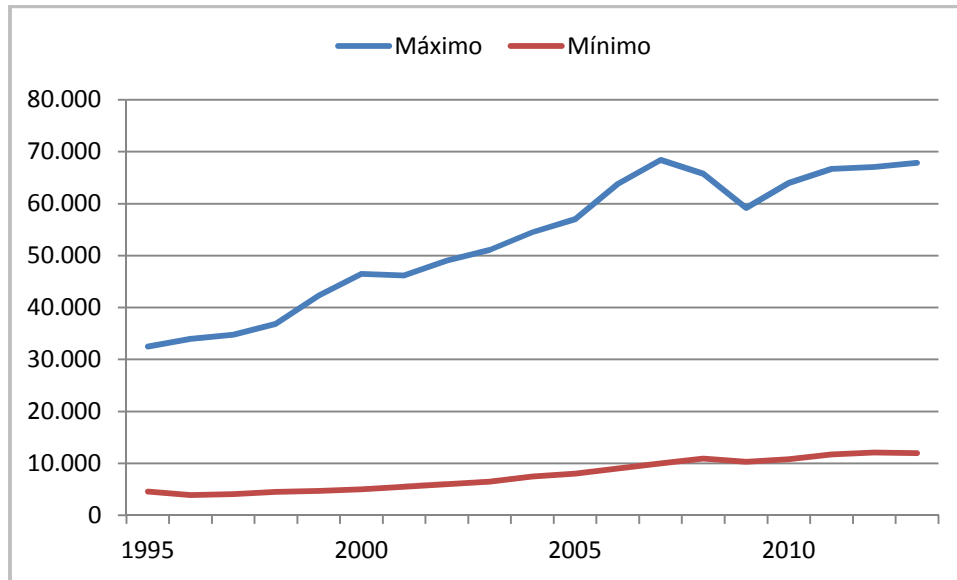


Tabla 1.4. Valores máximos y mínimos del PIB per cápita en *ppa* en EU-28, durante el período 1995 a 2013.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

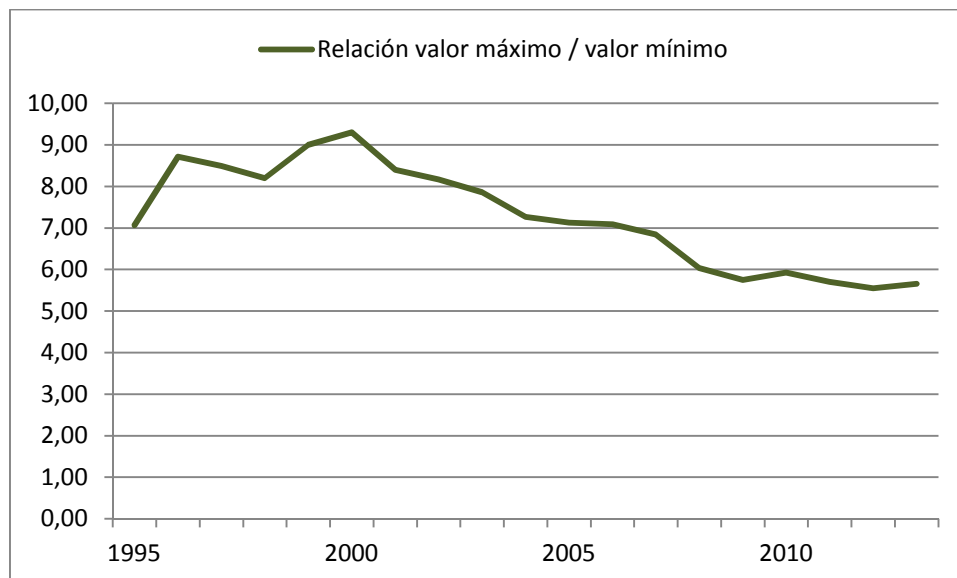


Tabla 1.5. Relación entre los valores máximos y mínimos del PIB per cápita en *ppa* en EU-28, durante el período 1995 a 2013

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

<sup>10</sup> Vence (2014) señala que las diferencias se triplican si se considera el euro como unidad de medida, sin tener en cuenta el efecto de la paridad del poder adquisitivo.

Fenómenos como la adopción del euro o la incorporación de nuevos países a la EU hasta conformar la distribución actual se encontrarían en la base de este comportamiento convergente, aunque las diferencias continúan siendo significativas.

El componente espacial en el estudio de las disparidades posee una destacada trascendencia, tal y como se podrá comprobar en el capítulo cuarto, en los estudios empíricos desarrollados en nuestro estudio. En este contexto la diferenciación entre regiones y países supone considerar de manera relevante el problema de la heterogeneidad y constituye un salto significativo, por ejemplo en términos de componentes explicativos de los modelos y en otras facetas que se irán revisando a lo largo de la investigación.

A pesar del uso y conocimiento extendido de las herramientas facilitadas por la EU a través de la oficina Eurostat, se propone una breve consideración sobre la metodología NUTS de desglose de las unidades territoriales: la *Nomenclature of Units for Territorial Statistics* fue desarrollada por dicho organismo para facilitar la elaboración y empleo de estadísticas regionales para la EU. Esto se enmarca dentro de un objeto genérico de desarrollo de un sistema común de transmisión de información de esta índole, considerando no solo el tratamiento de los datos sino aspectos como metodología, estructura, conceptos, etc.

El proceso de elaboración de la clasificación se inició en el año 1970, desarrollándose durante treinta años, hasta que adquiere el refrendo legal en el *Reglamento (CE) n° 1059/2003 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 26 de mayo de 2003, por el que se establece una nomenclatura común de unidades territoriales estadísticas (NUTS)*. Como señala el artículo dos, apartados segundo y tercero de este texto, la nomenclatura es jerárquica, de modo que cada Estado miembro se va subdividiendo en unidades territoriales del primer nivel, NUTS 1, cada una de las cuales se subdivide en unidades territoriales de NUTS 2, hasta llegar, a partir de éstas, a NUTS 3. Por su parte, el artículo tercero, en sus divisiones segunda y tercera, identifica las unidades administrativas como zonas geográficas con autoridad en este ámbito, señalando los umbrales de población (en número de personas) que delimitan su adscripción a un determinado nivel:

Nivel	Umbral mínimo	Umbral máximo
<b>NUTS 1</b>	3 millones	7 millones
<b>NUTS 2</b>	800,000	3 millones
<b>NUTS 3</b>	150,000	800,000

Tabla 1.6. Relación entre niveles NUTS y umbrales mínimos y máximos de población.

Fuente: Reglamento (CE) n° 1059/2003

En general, NUTS 1 se corresponde con las regiones más importantes del país. En España, por ejemplo, comprende siete ámbitos: Noroeste, Noreste, Comunidad de Madrid, Centro, Este, Sur y Canarias. El nivel NUTS 2 se encuentra constituido por los términos territoriales en los que se aplican las políticas regionales: en concreto se han utilizado para la identificación del destino de los Fondos Estructurales y de los análisis de cohesión (de ahí el interés en su tratamiento en el contexto de la convergencia). En nuestro país se identifica con las 17 Comunidades Autónomas a las que se suman las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla. Por último, NUTS 3 se asocia a pequeñas regiones, con tratamientos específicos de otras

prioridades. En el caso específico español se corresponde con 59 unidades, al considerar todas las provincias y las administraciones insulares.

Eurostat también desarrolla un sistema de Unidades Administrativas Locales (LAU) compatible con NUTS: de este modo, LAU 1, que sería equivalente a NUTS 4, no se desarrolla en todos los países (se emplea como un recurso cuando existen disparidades relevantes entre la organización administrativa ya existente y la que se introduce a través de Eurostat); y LAU 2 o NUTS 5, el nivel más básico, englobaría municipios o términos administrativos equivalentes.

En la siguiente tabla se relaciona el total de elementos estructurales descritos para cada uno de los 28 Estados-miembro de la Unión Europea en el período final de elaboración del presente trabajo:

Estado-miembro	Nivel NUTS 1	Nivel NUTS 2	Nivel NUTS 3	Nivel LAU 1	Nivel LAU 2
Alemania	16	38	402	1,481	12,066
Austria	3	9	35	-	2,357
Bélgica	3	11	44	-	589
Bulgaria	2	6	28	264	5,329
Chipre	1	1	1	6	615
Croacia	1	2	21	-	546
Dinamarca	1	5	11	99	2,143
Eslovaquia	1	4	8	79	2,928
Eslovenia	1	2	12	58	210
España	7	19	59	-	8,116
Estonia	1	1	5	15	226
Finlandia	2	5	19	70	336
Francia	9	27	101	3,785	36,680
Grecia	4	13	52	1,035	6,130
Hungría	3	7	20	174	3,154
Irlanda	1	2	8	34	3,441
Italia	5	21	110	-	8,094
Letonia	1	1	6	-	119
Lituania	1	1	10	60	518
Luxemburgo	1	1	1	13	116
Malta	1	1	2	6	68
Países Bajos	4	12	40	-	418
Polonia	6	16	72	379	2,479
Portugal	3	7	25	308	4,260
Reino Unido	12	40	173	380	10,310
República Checa	1	8	14	77	6,251
Rumanía	4	8	42	-	3,181
Suecia	3	8	21	-	290
<b>EU-28</b>	<b>98</b>	<b>276</b>	<b>1,342</b>		<b>120,970</b>

Tabla 1.7. Divisiones territoriales estadísticas de la Unión Europea.

Fuente: Eurostat. National Structures (sf).

Este sistema de clasificación ha recibido críticas por parte de ciertos investigadores. Boldrin y Canova (2001) se pregunta por el tamaño de las unidades sobre las que se investiga la convergencia. Por lógica, esta medida debe ser superior al de las familias e inferior a las dimensiones macroeconómicas de la economía mundial. Una extensión adecuada satisfaría una amplitud razonable respecto al tamaño de la población y la heterogeneidad necesaria en factores económicos. Sin embargo, en un contexto en el que destacan efectos de fuerzas centrífugas y centrípetas entre las regiones, efectos de congestión, notables costes asociados a

los transportes o fenómenos de aglomeración, las consideraciones sobre los sistemas de clasificación resultan todavía más críticos. Corrado, Martín y Weeks (2005) coincide con esta visión y cita a Boldrin y Canova (2001) para señalar que las divisiones NUTS 1, NUTS 2 y NUTS 3 no son ni suficientemente amplias ni heterogéneas para, por ejemplo, poder afirmar con rotundidad que la divergencia detectada en los estudios revela la existencia de procesos endógenos, de crecimiento acumulativo. La cuestión de la escala también afecta a las medidas empleadas en términos sectoriales o al considerar la agregación de la productividad.

Las disparidades entre valores máximos y mínimos de PIB per cápita se acentúan de manera considerable al tratar con regiones. Al considerar NUTS 1 Vence (2014) obtiene que la diferencia alcanza 1:8 en 2009 (llegando a 1:22 sin el factor de suavización de *ppa*).

En las siguientes dos figuras se desarrolla el tratamiento de la relación entre valores máximos y mínimos en las regiones NUTS 2, considerando PIB per cápita en *ppa* (las diferencias se vuelven a triplicar en términos absolutos):

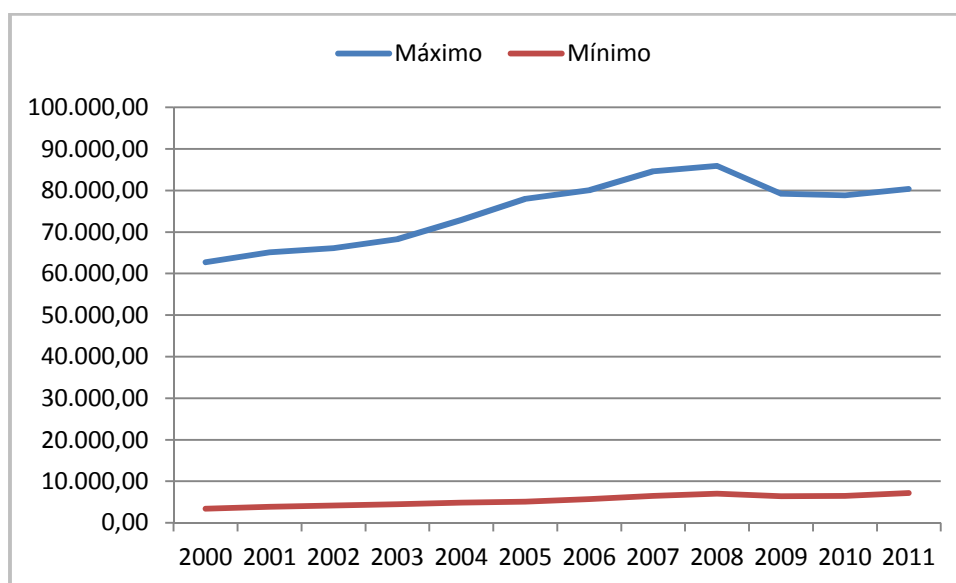


Figura 1.10. Valores máximos y mínimos del PIB per cápita en ppa en EU-28, nivel NUTS 2, durante el período 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

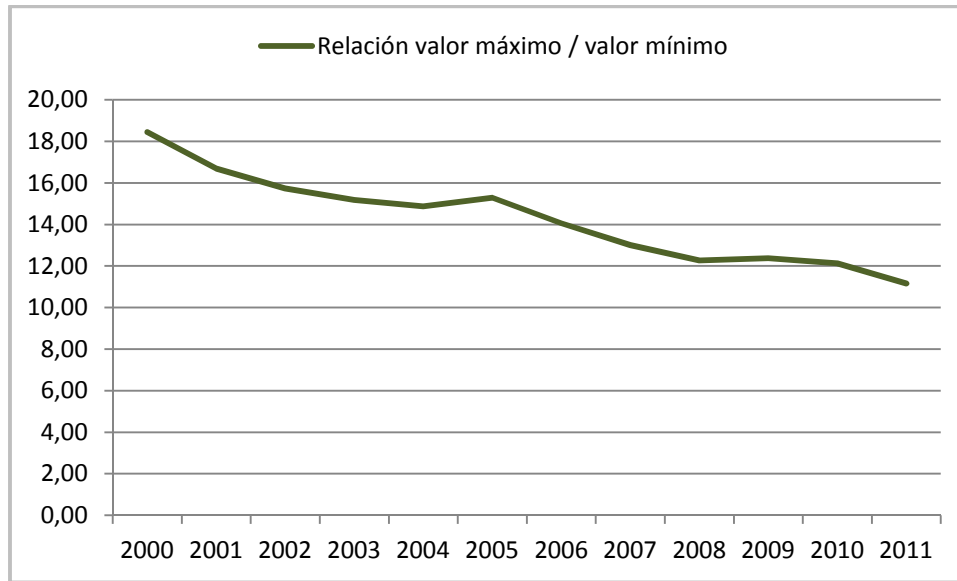


Figura 1.11. Relación entre los valores máximos y mínimos del PIB per cápita en ppa en EU-28, nivel NUTS 2, durante el período 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

La diferencia máxima se registra en el año 2000, 18.44:1, entre el centro de Londres y el nordeste de Rumanía. El comportamiento es decreciente durante toda la década. En 2011 la relación es 11.7:1. La unidad administrativa con mayor renta sigue siendo el centro de Londres, mientras que la de valor más reducido corresponde a una región de Bulgaria, *Severozapaden*.

Vence (2014) analiza el caso de la Unión Europea con los 15 Estados miembro incorporados hasta 1995 (EU-15) y descubre –como cabía esperar, dada la mayor homogeneidad que debe otorgar la estructura común– que los cocientes entre valores máximos y mínimos de la renta<sup>11</sup> son menores que en la agrupación que este autor estudia, EU-27. Sin embargo las diferencias siguen siendo significativas, sobre todo si se considera que el análisis se efectúa sobre un supuesto *mercado único*<sup>12</sup>. En la Figura 1.12 se reproducen estos resultados:

	EU-27	EU-15
<b>Países (NUTS 0)</b>		
Valor máximo (ppa)	62,500	62,500
Valor mínimo (ppa)	10,300	18,800
Relación máximo/mínimo	6,1	3,3
<b>Agrupaciones regionales (NUTS 1)</b>		
Valor máximo (ppa)	62,500	62,500
Valor mínimo (ppa)	7,600	15,500
Relación máximo/mínimo	8,2	4,0
<b>Regiones (NUTS 2)</b>		
Valor máximo (ppa)	78,000	78,000

<sup>11</sup> Existen algunas divergencias entre los datos facilitados por Vence (2014) y los que se obtienen en nuestro estudio, a nivel NUTS 2, aunque resultan poco significativas (se pueden comparar a través de la Figura 1.10).

<sup>12</sup> Según el autor, el ratio no suele exceder de 2 al comparar, dentro de un país europeo, la región más rica con la más pobre.



<b>Valor mínimo (ppa)</b>	6,400	12,400
<b>Relación máximo/mínimo</b>	12,2	6,3

Figura 1.12. Diferencias regionales en PIB per cápita en función de la clasificación NUTS 0, NUTS 1 y NUTS 2. Comparativa a nivel EU-27 y EU-15. Año de realización: 2009.

Fuente: Vence (2014: 33).

Se comprueba que las unidades más ricas corresponden, en todos los casos, a países de EU-15, mientras que las que poseen rentas más bajas se encuentran en los nuevos Estados-miembros.

Los análisis como el expuesto, centrados en las diferencias extremas de la renta, se encuentran limitados en el sentido de no poder proporcionar la cuantificación de la evolución de las distribuciones respecto al punto inicial. En el capítulo tercero se profundizará en el conocimiento del proceso a través de las dos medidas clásicas de convergencia, la referida al crecimiento más rápido de economías que parten de un estado más bajo de PIB per cápita ( $\beta$ -convergencia) y la que se centra en la posible reducción de la dispersión de esta variable en las diferentes regiones respecto a la media ( $\sigma$ -convergencia).

En el segundo estudio sobre la renta europea se aplica el modelo de mixtura. En esta ocasión se trabaja con los datos regionales del PIB per cápita en *ppa*, a nivel NUTS 2: el total de unidades analizadas se eleva a 267. La estimación del núcleo de la función de densidad en tres años significativos, 2000, 2006 y 2011, sugiere un ajuste de mixturas:

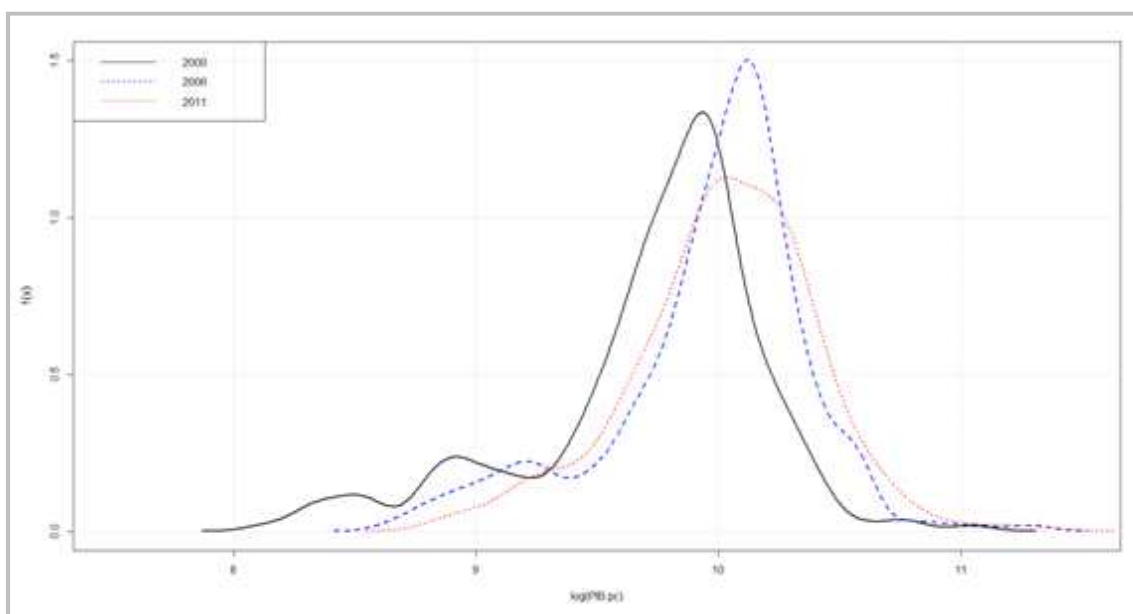


Figura 1.13. Estimación del núcleo de la función de densidad en EU-28 en los años 2000, 2006 y 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

En las siguientes figuras se representan los correspondientes histogramas de (logaritmos) de rentas para los tres años considerados (en el anexo se relacionan los datos con los que se ha trabajado y los componentes a los que pertenece cada región).

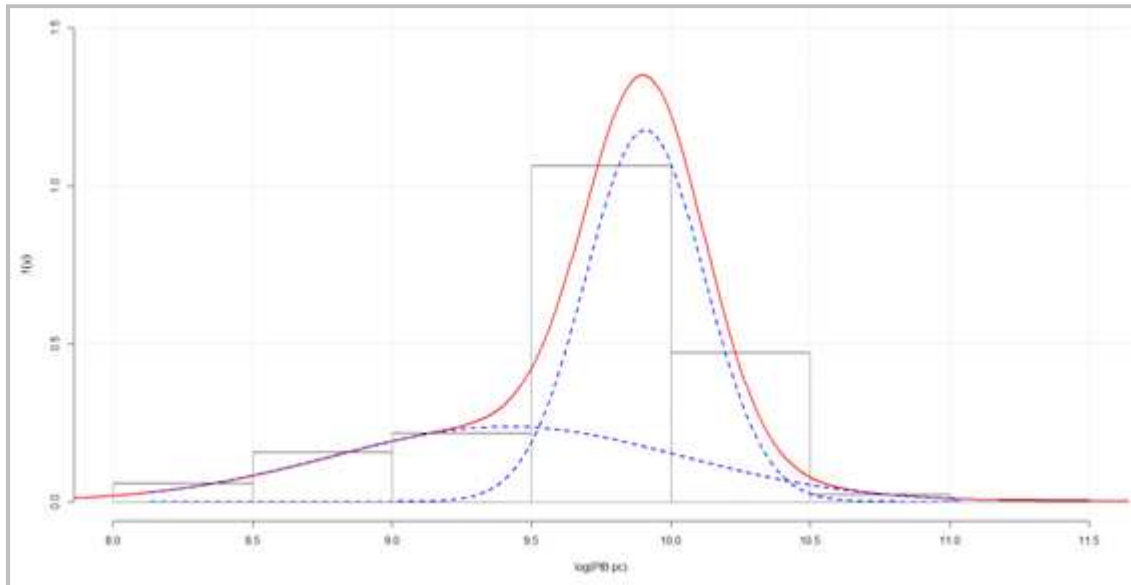


Figura 1.14. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en *ppa* (EU-28) en el año 2000.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

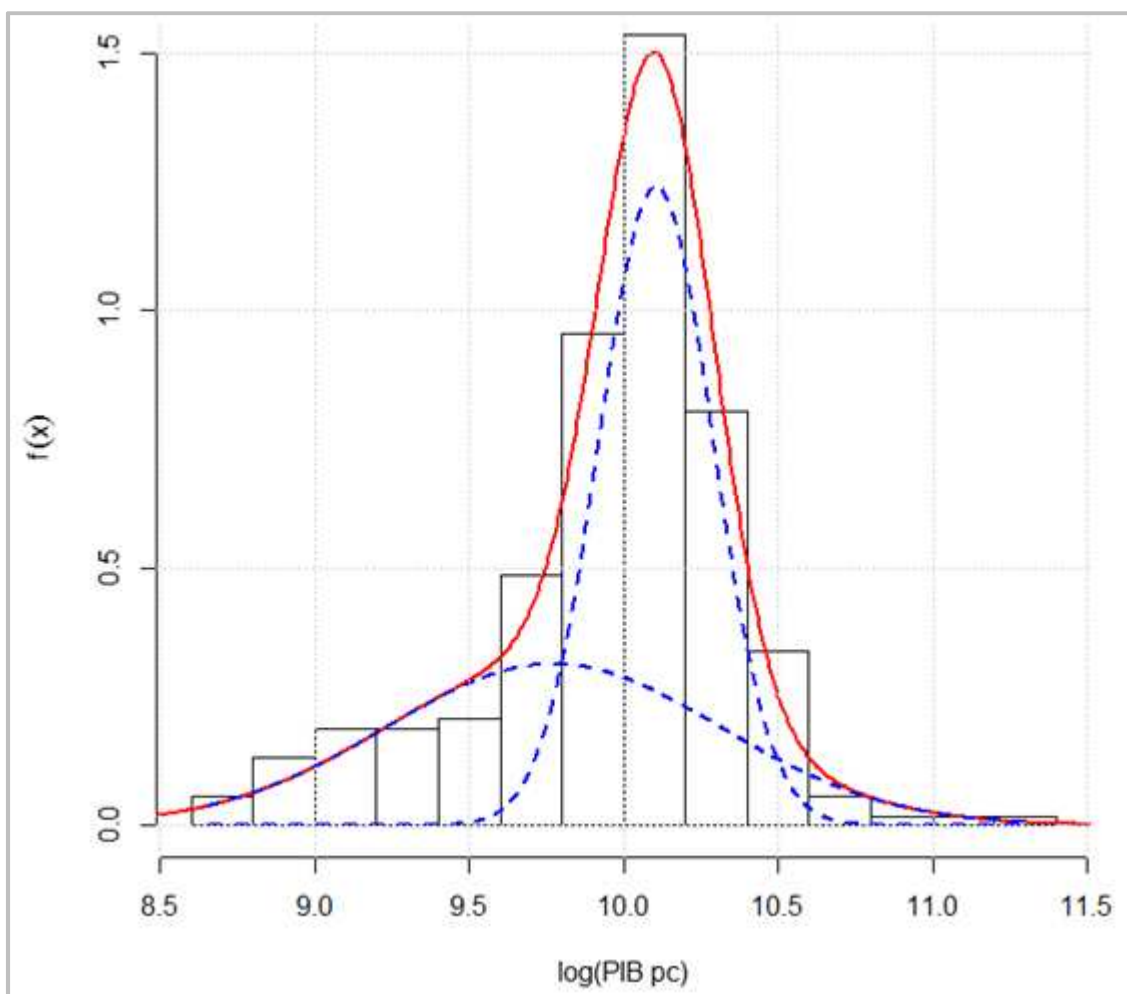


Figura 1.15. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en *ppa* (EU-28) en el año 2006.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

En 2011 la rutina Mclust identifica que el mejor modelo de mixturas corresponde a una sola componente. De este modo, la representación correspondiente es:

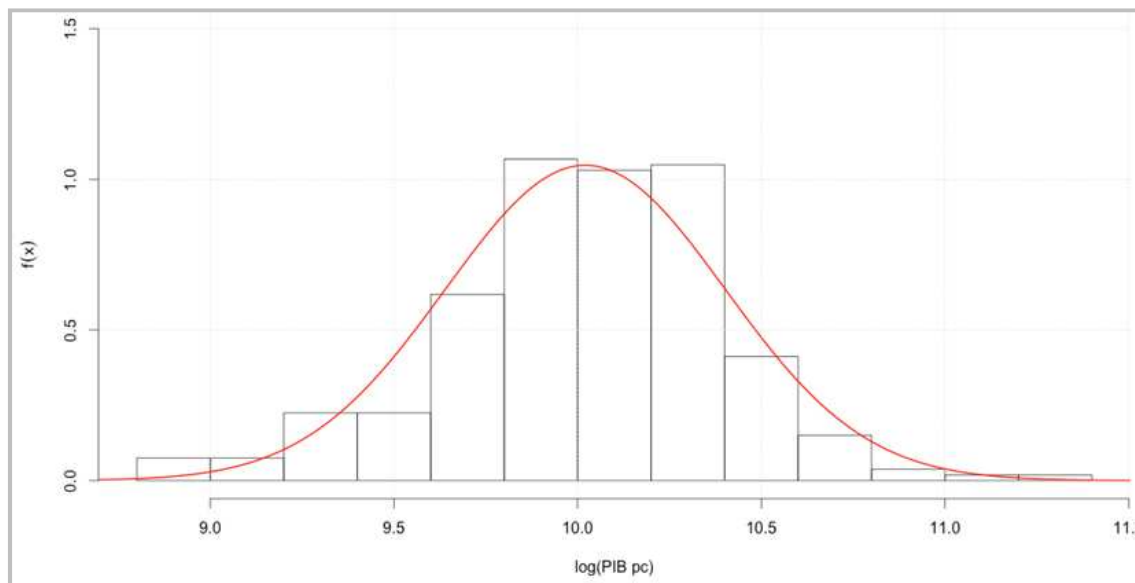


Figura 1.16. Histograma del logaritmo del PIB per cápita en ppa (EU-28) en el año 2011.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Los parámetros y estadísticos de las tres estimaciones de mixturas se presentan en la siguiente tabla:

Año	Porcentajes de regiones en cada componente respecto al total	Valores medios según componente (en logaritmo)	Desviación típica
2000	[1]: 37% [2]: 63%	[1]: 9.41 [2]: 9.90	[1]: 0.62 [2]: 0.22
2006	[1]: 42% [2]: 58%	[1]: 9.77 [2]: 10.10	[1]: 0.54 [2]: 0.18
2011	100%	Valor único: 10.02	Valor único: 0.38

Tabla 1.8. Parámetros relativos a las estimaciones de mixturas. Análisis EU-28 del PIB per cápita  
Fuente: elaboración propia

Se aprecia que los valores medios de las componentes son más similares que en el ámbito mundial, aunque las distribuciones muestran desviaciones muy diferenciadas: esto confirma las hipótesis de heterogeneidad planteadas al principio de este apartado. Seguidamente se representan las regiones asociadas a cada componente. En la leyenda se indica el valor medio del PIB ppa (o sea, la exponencial de las medias de la Tabla 1.8). Los valores cartográficos necesarios para la elaboración de este mapa proceden también del repositorio Eurostat.

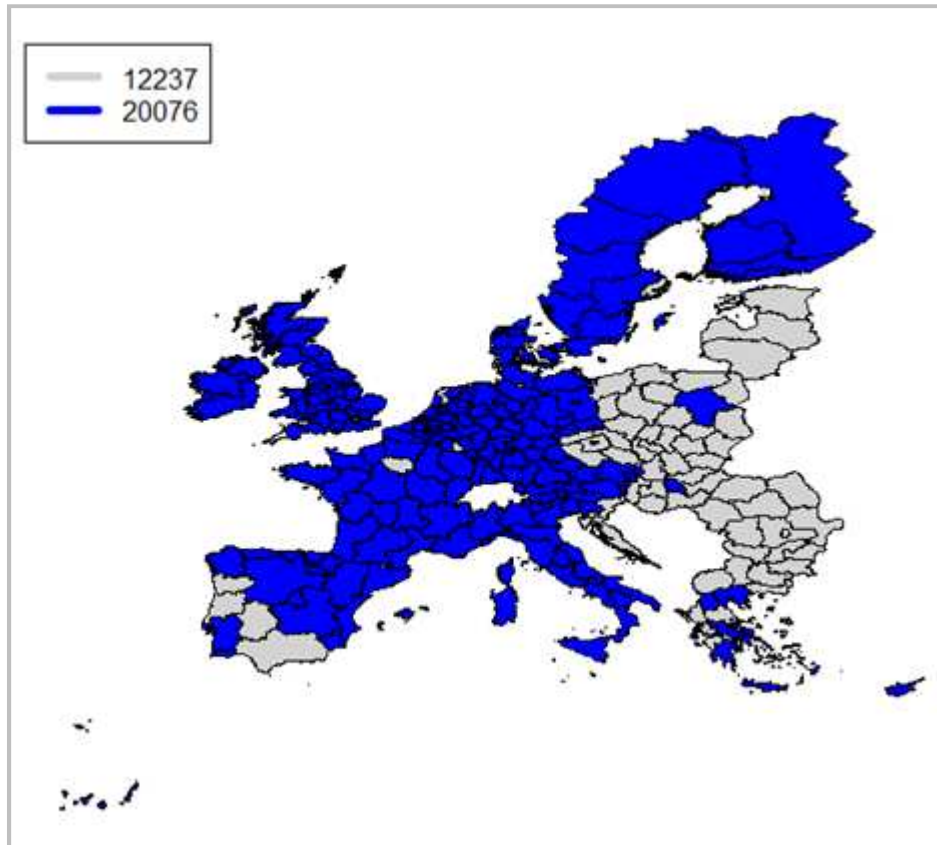


Figura 1.17. Distribución de componentes regionales del PIB per cápita según el modelo de mixtura en EU-28. Año 2000.

Fuente: elaboración propia.

La incorporación de nuevos países a la EU (con los procesos previos de ajustes económicos y sociales) provoca, seis años más tarde, una redistribución de dichos componentes.

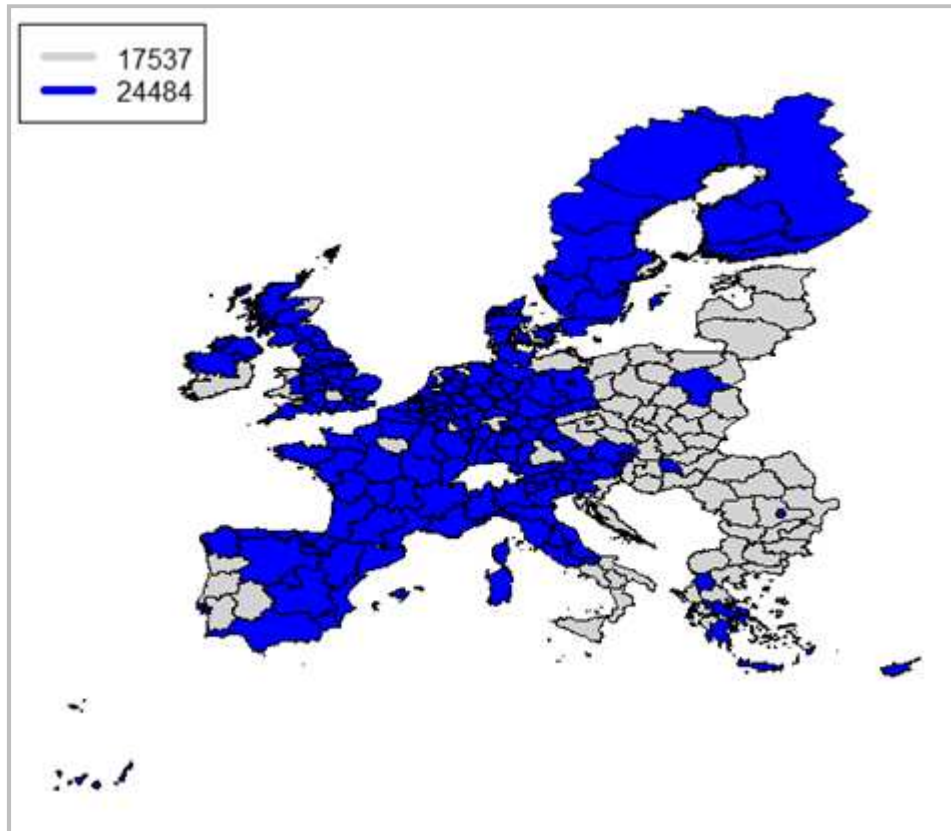


Figura 1.18. Distribución de componentes regionales del PIB per cápita según el modelo de mixtura en EU-28. Año 2006.

Fuente: elaboración propia.

Como se recoge en la Tabla 1.8 en 2011 sólo se aprecia una componente regional.

El histograma de la tasa de crecimiento permite identificar, de un modo análogo, dos componentes: la primera, con una distribución del 77%, media 4.83 y desviación típica 0.098; y la segunda, que representa el 23% de la muestra, con media 5.13 y mayor desviación típica, 0.22.

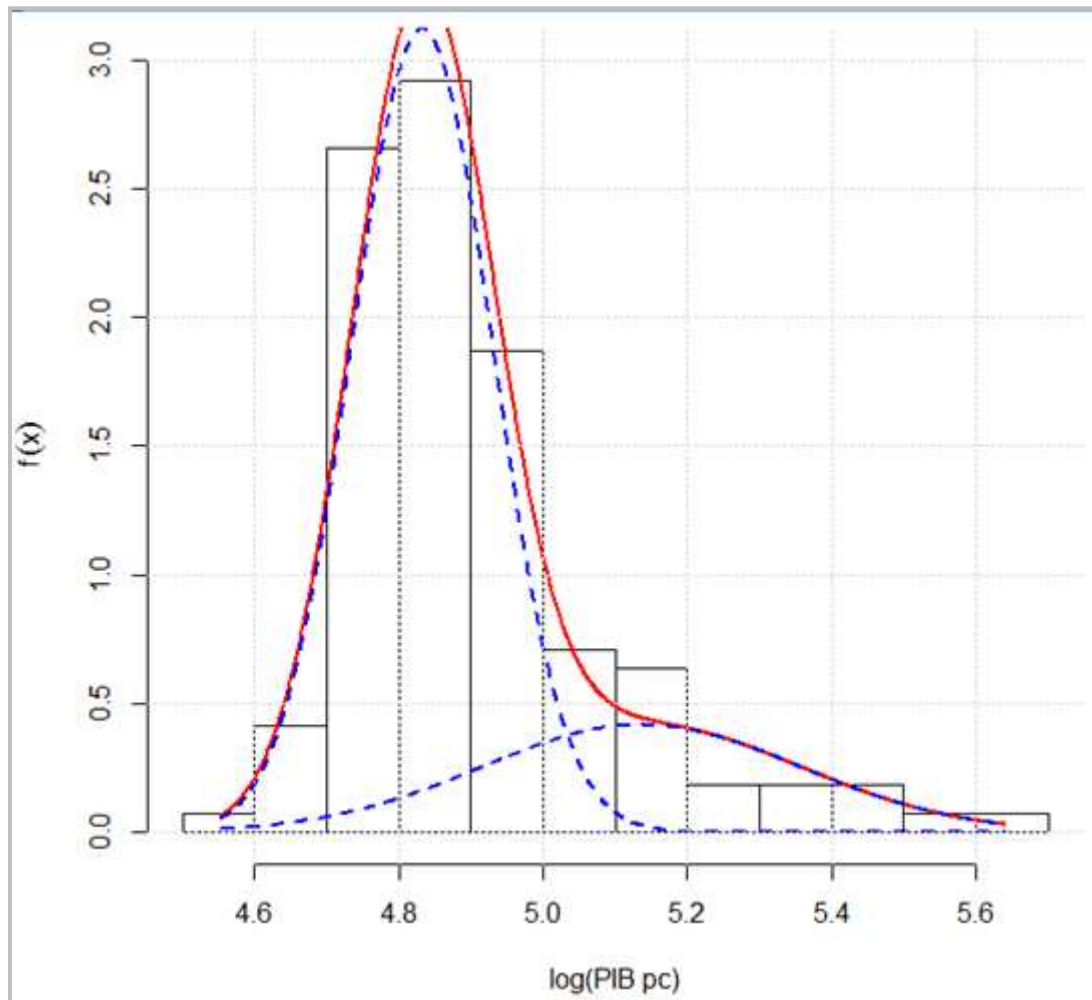


Figura 1.19. Histograma de la ratio de crecimiento del PIB per cápita en EU-28 desde 2000 hasta 2011.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

La representación sobre el mapa regional de las Normal componentes refuerza la idea de cambios asociados a la integración de los nuevos países en el seno de la EU (la leyenda representa, de nuevo, los valores exponenciales de las medias):

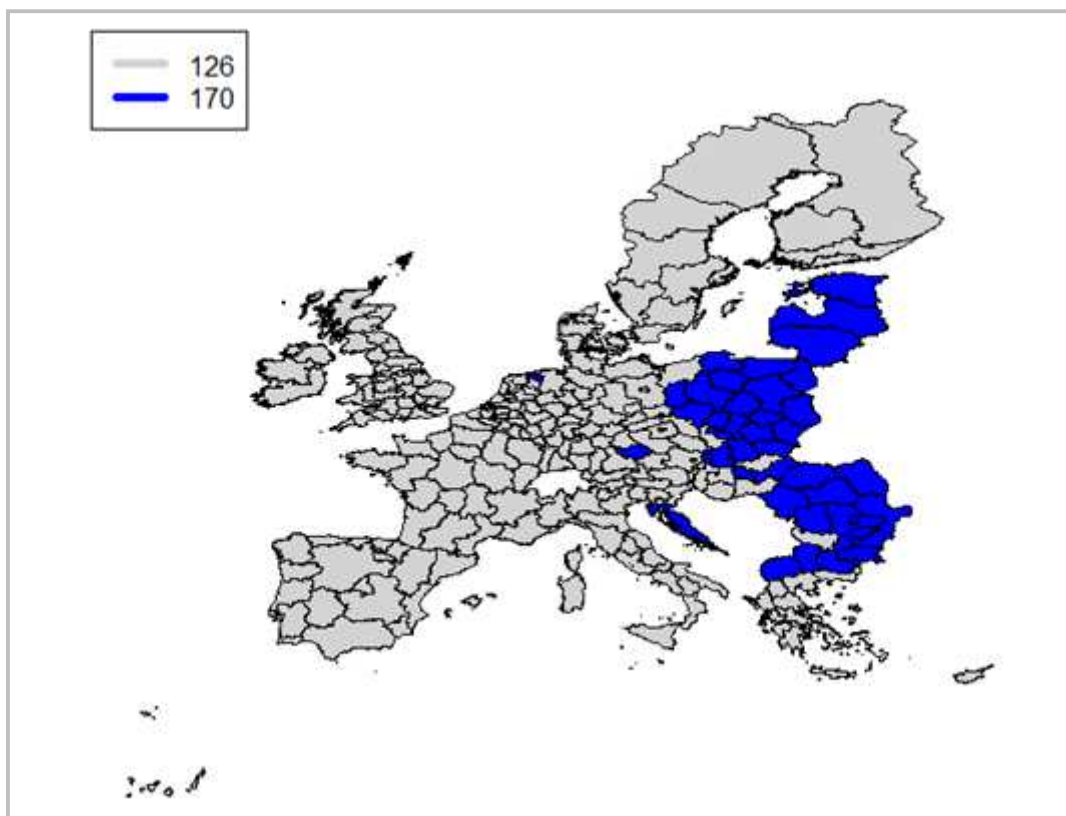


Figura 1.20. Distribución de componentes regionales de la ratio de crecimiento del PIB per cápita según el modelo de mixtura en EU-28. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia.

Estos primeros resultados se amplían en los tratamientos realizados en los capítulos tres y cuatro sobre los procesos de convergencia en la EU durante la primera década del siglo XXI.

## 1.4 Políticas de cohesión en la Eurozona

En el apartado anterior se subrayaba la destacada heterogeneidad de los países que integran la Eurozona en lo relativo a su comportamiento respecto al crecimiento. Vence (2014: 28) lo considera una característica fundamental, *“que aflora a pesar de la integración y que la hace difícilmente gobernable con políticas comunes de «talla única» y escasos recursos”*. En efecto, las comparativas en la evolución del cociente entre el valor máximo y mínimo del PIB per cápita durante los últimos veinte años, considerando distintos niveles de agregación territorial (NUTS 0 frente a NUTS 1 y/o NUTS 2) y diferenciando entre EU-15 y EU-27 o EU-28, permite constatar el incremento general de las diferencias a lo largo del tiempo. Otros estudios empíricos, basados en instrumentos más específicos, coinciden en las conclusiones. Todo ello implica cuestionar las políticas de cohesión regional. Según Vence (2014: 34) *“las fuerzas polarizadoras operaron con mucha más fuerza que las difusoras y redistribuidoras”*.

Los comportamientos divergentes confirman que no se están verificando los objetivos básicos de las políticas de cohesión europea, tanto en su dimensión económica como social (aunque ciertamente parece que se verifica una cierta tendencia a la disminución de las diferencias, que se revisará más adelante). El tratado constitutivo de la Comisión Europea recoge dichas

aspiraciones en diversas secciones. Así, la amplia declaración de intenciones que representa el artículo dos, respecto a lo que debe derivarse de la consolidación del mercado común y de una unión económica y monetaria, contiene referencias explícitas a la promoción de “*un desarrollo armonioso, equilibrado y sostenible*” en el seno de la Comunidad, “*un crecimiento sostenible y no inflacionista*”, la “*convergencia de los resultados económicos*” y al “*fortalecimiento de la cohesión económica y social*” (según términos del apartado *k*) del artículo 3.1.). Otros planteamientos, que los países integrantes equiparan con un nivel similar de importancia, corresponden al consecución de “*un alto nivel de empleo y de protección social*”, “*la igualdad entre el hombre y la mujer*”, “*un alto grado de competitividad*”, “*un alto nivel de protección y mejora de la calidad del medio ambiente*”, “*la elevación del nivel y de la calidad de vida*” y “*la solidaridad entre los Estados miembros*”.

El título XVII, que engloba los artículos 158 a 164, se centra específicamente en los aspectos de cohesión económica y social. Se identifican dos vías de actuación: (i) la reducción de las diferencias entre niveles regionales de desarrollo y (ii) la disminución del salto existente entre ámbitos territoriales menos y más favorecidos, con especial atención a las zonas agrícolas. Para la consecución de estos objetivos se plantean diversos instrumentos:

- La dotación de Fondos Estructurales. En el período 2000-2006, tal y como se recoge en el Tratado Constitutivo consolidado, correspondían al Fondo Europeo de Orientación y de Garantía Agrícola (FEOGA), sección Orientación, el Fondo Social Europeo (FSE, vigente en la actualidad bajo el nuevo enfoque de homogeneización) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER, también operativo en nuestros días). Para su promoción, desde 2014 hasta 2020, se identifican cinco Fondos Estructurales y de Inversión (Fondos ESI), que se desarrollan en un marco común, con objetivos complementarios en tres grandes ejes: (i) recuperación e incremento del crecimiento europeo; (ii) recuperación del empleo; y (iii) apoyo al desarrollo sostenible. Corresponden a las siguientes líneas de actuación, según lo establecido en los retos Europa 2020:
  - FEDER. Estos Fondos deben contribuir a todos los objetivos temáticos, aunque con una dedicación especial a las inversiones en el ámbito empresarial (infraestructuras, innovación, desarrollos, TICs...) y en la prestación de servicios a la ciudadanía (sanidad, educación, energía, calidad medioambiental...).
  - FSE. Se centra en cuatro grupos temáticos, también bajo un enfoque de integración de sus correspondientes desarrollos: (i) empleo y movilidad laboral; (ii) educación, competencias y aprendizaje permanente; (iii) promoción de la inclusión social y lucha contra la pobreza; y (iv) refuerzo de la capacidad administrativa.
  - Fondo de Cohesión. Sus objetivos se orientan hacia la mejora del medio ambiente y el desarrollo sostenible; no se aplicará en España en el período indicado.
  - Fondo Europeo Agrícola de Desarrollo Rural. Prioriza los siguientes objetivos: (i) el crecimiento inteligente, sostenible e integrador en los sectores agrícola, alimentario y forestal; (ii) transferencia de conocimientos e innovación; (iii) competitividad de la agricultura; (iv) gestión de los recursos naturales; (v) acción por el clima; y (vi) desarrollo integrador de las zonas rurales.



- Fondo Europeo Marítimo y de Pesca. A través de este instrumento se apoya la viabilidad y la competitividad de la pesca y la acuicultura, en un contexto de apoyo a la sostenibilidad medioambiental. Se destaca la promoción de la cohesión social y de la creación de empleo en comunidades muy vinculadas a la pesca.
- El Banco Europeo de Inversiones, entidad con un destacado historial desde su creación en 1958, cuya titularidad corresponde a los distintos Estados miembros y que aporta préstamos, financiación combinada con otras inversiones y asesoramiento para proyectos que se encuentren en línea con los objetivos de la EU.
- Otros instrumentos financieros: como indica Ministerio de Hacienda y Administraciones Públicas. Gobierno de España (sf), *“los instrumentos financieros se han empleado para realizar inversiones para los Fondos Estructurales desde el período de programación 1994-1999. Su relativa importancia ha aumentado durante (...) 2007-2013 y, en estos momentos (marzo de 2014), representan en torno a un 5% de los recursos totales del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER)”*. En este contexto se pueden distinguir:
  - Instrumentos financieros establecidos a nivel de la EU y gestionados por la Comisión, entre los que se incluyen mecanismos para el estímulo de préstamos de los bancos hacia las PYMEs.
  - Instrumentos financieros en el contexto nacional o regional, que se pueden ampliar a componentes transnacionales o inter-fronterizos. Son gestionados por la autoridad correspondiente de gestión o se encuentran bajo su responsabilidad.
  - Préstamos o garantías, concedidos directamente por las autoridades de gestión (con unos determinados condicionantes de reembolso).

Resulta evidente la necesidad de cuantificar los posibles avances de las políticas de cohesión, a fin de determinar su impacto y establecer mecanismos de corrección. Monfort (2008) indica que este objetivo genérico se ha concretado, desde el primer período de programación (1989 a 1993), en la medida de la convergencia de las regiones. Dado que los planteamientos se extienden a aspectos económicos y sociales, lo que habitualmente se considera, en el seguimiento por parte de los organismos responsables, es la convergencia de niveles regionales de PIB per cápita respecto a la media de los países miembros de la EU. Como señala el autor citado, la  $\sigma$ -convergencia, en cuanto referencia de la evolución de la dispersión, se ha convertido en uno de los instrumentos centrales para la medición de la efectividad de las políticas europeas de cohesión. Esto ha supuesto la generación de un corpus muy amplio de investigaciones, que ofrecen resultados tanto en un sentido como en el opuesto. Monfort (2008) subraya dos aspectos: (i) las relaciones causales entre cohesión y convergencia deben analizarse con prudencia, considerando los posibles mecanismos subyacentes; y (ii) aun así, resulta incuestionable la importancia de los resultados sobre la convergencia en los aspectos políticos de la cuestión.

Castro, Bermejo y Raya (1999) constituye un ejemplo de análisis de los efectos de las políticas de cohesión en una determinada economía, en este caso la andaluza. Los autores consideran para ello la repercusión de los Fondos Estructurales en el período 1989 a 1993, con cinco objetivos prioritarios identificados por el Reglamento 2052/85: (i) fomento del desarrollo y ajuste estructural; (ii) reconversión de regiones afectadas por el declive de la industria; (iii)

actuaciones contra el desempleo, tanto del paro de larga duración como del juvenil; (iv) mejoras para la adaptación de los trabajadores a las transformaciones de los sectores; y (v) impulso para la adaptación y desarrollo del sector agrario.

Podemos apreciar, comparando con la actual dotación, que las grandes líneas maestras continúan vigentes en el tiempo; debido a su enfoque, cada uno de los Fondos se centraba en un determinado ámbito. FEDER se orientaba hacia (i), (ii) y el aspecto de desarrollo de (v); FSE hacia (iii) y (iv); y FEOGA – Orientación hacia (v) en lo concerniente a la adaptación. Para la línea (i) se identificaban las denominadas regiones Objetivo nº 1, en las que el PIB per cápita se encontraba por debajo del 75% del promedio en la CE en los tres últimos años. En el caso de España, Andalucía se consideraba región Objetivo 1, junto a Asturias, Castilla y León, Castilla-La Mancha, Ceuta y Melilla, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia, Canarias y Murcia. También podemos constatar que estas políticas se desarrollaban, como en la actualidad, a nivel NUTS 2. Para ello se consideran los Marcos Comunitarios de Apoyo (MAC), que permiten concretar, en el contexto regional, las directrices genéricas, relacionando las inversiones a financiar con los Fondos Estructurales en un determinado período y estableciendo las correspondientes aportaciones de los Estados miembros en su ámbito.

Los autores se aproximan al análisis empírico considerando los criterios de la Comisión Europea para la evaluación de los Fondos, aunque advirtiendo de los problemas relativos a este tipo de estudios: existen múltiples instrumentos de ayuda, que se especifican a nivel nacional, regional y local, que, además, confluyen con procedencia independiente, por lo que resulta complejo determinar la parte directamente asociada a la financiación comunitaria. Trabajos preliminares, como Cuadrado y Suárez-Villa (1992), señalan que los efectos de los Fondos Estructurales pueden quedar contrarrestados por estas otras herramientas, como las PAC. Las regiones Objetivo nº 1 se encontraban obligadas a aportar una cofinanciación, que podía suponer un esfuerzo con insuficiente retorno para regiones muy desfavorecidas. Por su parte, la consideración teórica sobre la libre movilidad de los empleados, que identifica los desplazamientos hacia las ubicaciones donde se crea empleo como mecanismos de convergencia (se ampliará esta idea en el capítulo tercero) contrasta con la evidencia de los datos, que señalan un movimiento más limitado en el mercado de trabajo, con menor dependencia de gradientes de salario o de cualificación.

Desde un punto de vista metodológico, Castro et al. (1999) desarrolla un análisis *input-output* para centrar su estudio en los efectos de esta inversión de Fondos Estructurales en la producción, tanto en el valor añadido, como en el empleo: este enfoque se encontraba limitado por la ausencia de tablas condicionales de predicción de índole anual y, además, la información disponible de las actuaciones no se detallaba en el nivel territorial ni temporal más adecuado. A finales de la década de los noventa tampoco se disponía de series temporales suficientemente amplias, por ejemplo en relación a las particularidades de los MAC, que permitieran un análisis formalizado de las tendencias.

Considerando todas estas limitaciones, el trabajo citado aporta resultados de interés:

- La inversión de Fondos Estructurales en la Comunidad autónoma andaluza en el período identificado representó en torno al 30% del total público; una cifra altamente significativa (se debe considerar que el intervalo en cuestión incluye el año 1992, muy

destacado en dotaciones, sobre todo de infraestructura, para esta región). La distribución de los Fondos respecto a la inversión total se desglosa del siguiente modo: FEDER es el más importante, con una aportación del 68% (muy centrado en el equipamiento del terreno, partida en la que se incluían carreteras y el tren de alta velocidad); FSE el 23% (enseñanza e investigación); y FEOGA – Orientación el 9% restante (ayudas a empresas agrícolas).

- Los efectos de los Fondos actúan sin embargo sobre dos aspectos de orden cualitativo, cuyos efectos se percibirían en la década posterior, como elementos relevantes de la crisis de 2007:
  - Las inversiones inciden directamente en la especialización en la construcción, por lo que no llegan a repercutir en la mejora del entramado productivo. En términos de Castro et al. (1999: 242): *“la concentración de la inversión en obra pública reproduce y profundiza en Andalucía su estructura productiva desarticulada, dependiente de la construcción y consumidora de recursos naturales”*. De hecho, la infraestructura desarrollada en este período se orientaba más a las relaciones con el exterior, lo que podía propiciar una conducta de invasión a cargo de productores y productos extranjeros.
  - La ausencia de desarrollo del sector industrial (y también de servicios) repercute, en última instancia, en la dificultad de implementar políticas de éxito en la lucha contra el desempleo.
  - Finalmente, *“el crecimiento regional impulsado por los fondos produce desarrollo industrial y de servicios en las zonas más industrializadas del resto de España, reproduciendo y acentuando el esquema de dependencia productiva clásico de la economía andaluza”*, (Castro et al., 1999: 242). Los resultados positivos de las inversiones a través de los fondos comunitarios, respecto a la reducción de las desigualdades, quedan minorados por el impacto positivo en regiones más desarrolladas del propio país.

Estas conclusiones generales confirman que los efectos reales de las políticas de cohesión, a finales de la década de los ochenta y principios de los noventa, resultaban muy limitados o, prácticamente nulos, sobre los resultados de convergencia (de hecho, incluso podían encontrarse en contradicción con éstos).

Esposti y Bussoletti (2008) constituye un estudio más amplio en el tiempo y en el espacio sobre el impacto de las inversiones de Fondos Estructurales en regiones Objetivo nº 1. En el período durante el que se elaboró la investigación el número de estas unidades más desfavorecidas se elevaba a 50, representando un 20% de la población de la EU (en torno a 70 millones de habitantes). Las inversiones asociadas constituían entre un 20% a 25% del total de Fondos Estructurales, o sea, un 0.25% del PIB europeo. La amplitud de las diferencias entre estas regiones y las demás ha suscitado en el núcleo de los investigadores una destacada preocupación por la viabilidad del proceso de convergencia. Sin embargo, los resultados son muy variados: en el capítulo tercero se revisan estudios empíricos que señalan la presencia de  $\beta$ -convergencia condicional, otros que la rechazan de pleno, trabajos que difieren en la velocidad de los procesos o los que identifican la existencia de los denominados clubs de convergencia. Una fuente *oficial* como European Commission (2004) diferenciaba tres

períodos desde 1980 a 2000, señalando que en todos se producía  $\beta$ -convergencia condicional: (i) entre 1980 y 1988 la ratio de convergencia era del 0.5% para toda la EU; (ii) desde 1989 hasta 1993 esa ratio se elevaba hasta el 0.7% (en este período se inician las primeras actuaciones sobre las regiones Objetivo nº 1, observándose, según este informe, una tasa del 3.1% para dichos territorios); y (iii) en el último intervalo, 1994 a 2000, las ratios fueron 0.9% para la Comunidad al completo y 1.6% para las regiones más desfavorecidas.

Estos últimos resultados, con independencia de su confrontación con otros estudios, no constituyen una prueba determinante de la influencia significativa de los Fondos Estructurales en el proceso de convergencia. En la siguiente tabla se resumen las conclusiones más significativas de estudios previos a 2008 sobre la influencia de los Fondos Estructurales, en los que se vuelven a apreciar resultados enfrentados:

Estudios	Resultados principales
<b>García-Solanes y María-Dolores (2001)</b>	El estudio, desarrollado a nivel nacional y regional, muestra un impacto significativo y positivo de los Fondos en el crecimiento. Según Dall'erba y Le Gallo (2008) las conclusiones pueden encontrarse sesgadas al emplear únicamente el nivel inicial de PIB per cápita y no tener en cuenta variables ocultas.
<b>Cappelen et al. (2003)</b>	Los resultados se basan en estimaciones sobre unidades NUTS 1 y 2 y muestran un impacto significativo. Sin embargo, se comprueba que los resultados son más eficientes en regiones con mejores capacidades de desarrollo (baja tasa de desempleo y con potencial en I+D). Por tanto, <i>"support is least efficient where it is most needed"</i> , Dall'erba y Le Gallo (2008: 224)
<b>Rodríguez-Pose y Fratesi (2004)</b>	Se centra exclusivamente en regiones Objetivo nº 1 y concluye que los retornos asociados a infraestructuras y desarrollo empresarial son poco significativos. Sólo se detectan efectos positivos, en términos medios, sobre el capital humano (educación).
<b>Puigcerver-Peñalver (2004)</b>	En el primer período de ayudas (1989-1993) los fondos beneficiaron el crecimiento de las regiones Objetivo nº 1, mientras que los destinados en el segundo intervalo (1994-1999) tuvieron escaso impacto o fue negativo.
<b>Beugelsdijk y Eijffinger (2005)</b>	Este trabajo detecta un importante impacto medio de las inversiones. Se advierte del riesgo en la asignación de los fondos, debido a la posibilidad de un uso ineficiente de los mismos.
<b>Dall'Erba (2005a)</b>	Se destacan dos inconvenientes institucionales asociados a la distribución de fondos: (i) las inversiones pueden ser desarrolladas por empresas no pertenecientes a la región beneficiaria, por lo que un porcentaje del valor añadido generado se desplaza a otro ámbito; y (ii) el principio de <i>adicionalidad</i> , que obliga a las economías a financiar parte de los proyectos, previene la presentación de propuestas inviables pero, al mismo tiempo, introduce un sesgo, dado que las ubicaciones más ricas pueden optar a mayores inversiones.
<b>Ederveen et al. (2006)</b>	Al igual que Cappelen et al. (2003) el estudio (centrado en EU-15 menos Alemania y Luxemburgo) concluye que los fondos resultan ineficientes a menos que se asignen a países <i>preparados</i> ; en este caso deben disponer de <i>buenas</i> instituciones. El impacto medido depende del tipo de convergencia que se esté analizando: cuanto más optimista sea la consideración empleada menos efectivos parecen los fondos.

Tabla 1.9. Resultados de investigaciones sobre el impacto de los Fondos Estructurales.

Fuente: elaboración propia a partir de Esposti y Bussoletti (2008) y Dall'erba y Le Gallo (2008).

Esposti y Bussoletti (2008) plantea en su estudio la estimación de un modelo de convergencia condicional, aplicando una técnica de panel dinámico de datos, considerando una tasa inicial de inversión determinada por factores políticos. El estudio se realiza sobre 206 regiones NUTS 2 (o sea, sobre EU-15), considerando el PIB per cápita en términos de ppa, desde 1989 hasta

2000 (los datos se obtienen del repositorio *Eurostat*). Por su parte, la información sobre los Fondos Estructurales invertidos en regiones Objetivo nº 1 procede de los dos programas desarrollados en el intervalo temporal: 1989 a 1993 y 1994 a 1999. Al igual que en el estudio anterior resulta necesario reconstruir la información, dado su estado primitivo de agregación; también se transforma en importes monetarios para su comparación directa entre estados.

La adopción del panel de datos implica que el modelo estimado de convergencia condicional corresponde al patrón de crecimiento neoclásico; en este caso los niveles de inversión en Fondos Estructurales<sup>13</sup> se identifican con las actuaciones políticas. Este modelo requiere, además, una serie de variables explicativas, difíciles de medir directamente y que se relacionan con elementos próximos, más sencillos de cuantificar: (i) el capital humano se determina como el porcentaje de estudiantes de nivel superior sobre el total de la población; (ii) las inversiones privadas y públicas en I+D se obtienen directamente de Eurostat, se expresan en unidades de trabajo y se transforman en cantidades en *ppa*; y (iii) se emplea un índice de inversión en infraestructura de transportes que se determina mediante la agregación de dos variables cuantificadas a nivel NUTS 3, el potencial de accesibilidad multimodal y la conectividad en horas de coche a terminales de transporte público.

El estudio requiere el empleo del método generalizado de momentos para estimar el parámetro  $\beta$ , dado que se presenta un problema de endogeneidad. La conclusión fundamental del mismo es que se detecta un impacto general positivo, aunque muy limitado, de los fondos destinados a regiones Objetivo nº 1; el significado estadístico y las magnitudes de estas influencias varían significativamente en función del estimador empleado. En algunos casos específicos estas aportaciones resultan contraproducentes, como es el caso de ciertas unidades territoriales más desfavorecidas de Alemania, Grecia y España. Se aprecia que se produce un crecimiento convergente, con ratios que oscilan entre 1.9 y 4.9% (lo habitual en la literatura sobre la cuestión).

Un estudio simultáneo en el tiempo, que también analiza el efecto de los Fondos Estructurales (de una manera más amplia) y la presencia de procesos de convergencia, es el correspondiente a Dall'erba y Le Gallo (2008). Los investigadores contemplan en este caso instrumentos de econometría espacial, considerando que los países no son entidades aisladas (una de las bases centrales de la disciplina, como se analizará en el capítulo cuarto). En referencia a la disparidad de las conclusiones de los trabajos sobre convergencia, se destaca la detección de una evidencia que parece aceptada por los expertos: la inversión en capital humano influye de manera más decisiva en la reducción de desigualdades entre regiones que, por ejemplo, el fomento y desarrollo de las infraestructuras.

El análisis empírico se centra en 145 regiones europeas (es una muestra más reducida que el caso anterior), en el período 1989-1999. Al igual que Esposti y Bussoletti (2008) se emplea el modelo básico de crecimiento neoclásico, aunque el planteamiento difiere al incorporar los efectos de desbordamiento o *spill-over* entre regiones (problemática que se analizará con

---

<sup>13</sup> En otros estudios, como Beugelsdijk y Eijffinger (2003), el planteamiento político se relaciona con las *tasas de crecimiento* de las inversiones, lo que puede generar, a juicio de los autores, mayor ruido estadístico. Aparte, esta investigación se realiza a nivel NUTS 0 en EU-15, lo que resulta, como se ha visto, menos apropiado.

mayor detalle en el capítulo tercero). Esta presencia puede provocar, como se comentó en el apartado anterior, un problema de endogeneidad en la estimación de los impactos.

La econometría espacial configura un ámbito de trabajo en el que es posible considerar, por una parte, las predicciones sobre convergencia de Solow-Swan respecto a regiones con características similares o los planteamientos de las teorías endógenas sobre las ratios de crecimiento a largo plazo; y, por otro lado, cruzar estos planteamiento con lo que dictan los modelos económicos geográficos. Por ejemplo, resulta razonable asumir que, bajo el primer punto de vista, las financiaciones de nuevas infraestructuras (se puede pensar en Fondos Estructurales invertidos en nuevas vías de transporte) pueden incrementar el producto marginal del capital privado y, por tanto, promover la acumulación del capital y el crecimiento. Sin embargo, la literatura geográfica señala que las infraestructuras de transporte no benefician necesariamente a la ubicación en la que se implementan. Dall'erba y Le Gallo (2008) mencionan estudios como Martin y Rogers (1995) o Vickerman (1996) en los que se confirma este extremo, destacando, en especial, que esta contradicción suele manifestarse cuando se utilizan como instrumentos de desarrollo. La cuestión no es baladí si se tiene en cuenta que el 30% de los Fondos Estructurales se emplea en este tipo de infraestructuras (en el caso de los Fondos de Cohesión el porcentaje se eleva hasta el 60%). Esto no quiere decir que dichas inversiones no resulten adecuadas: lo problemático es la posibilidad de un impacto muy limitado o nada efectivo en la reducción de diferencias inter-regionales. Como se expone en Dall'erba y Le Gallo (2008: 239): *“Since the majority of these [Estructural] funds finance transportation infrastructures, which induce industry relocation effects, their impact on regional development is not clear yet but surely needs to be seen in the light of the spillover effects that their spatial allocation implies”*.

En el modelo de  $\beta$ -convergencia empleado se considera el PIB per cápita como variable endógena, dado que las inversiones que reciben las regiones Objetivo nº 1 se corresponden de manera proporcional a la brecha o *gap* de desarrollo existente. La inclusión de los efectos espaciales se realiza mediante los estadísticos Getis-Ord, que muestran la presencia significativa de autocorrelación local espacial. Se detectan dos patrones clásicos en este contexto: el comportamiento de países centrales, en el *core*, frente al de estados periféricos. En este sentido, las dos conclusiones más relevantes de las estimaciones realizadas, respecto al objetivo inicial del estudio, son: (i) se verifica una convergencia mucho más rápida en el régimen periférico; y (ii) no se manifiesta un impacto significativo de los Fondos en los estados estacionarios alcanzados por los países.

Este análisis considera, además, las propiedades de difusión espacial del modelo, lo que permite distintas evaluaciones:

- Por un parte, se considera el impacto de la media de Fondos Estructurales distribuidos durante todo el período para todas las regiones (*equal shock*). En este caso la influencia sobre el crecimiento previsto no varía en exceso entre las unidades territoriales.
- Por otro lado, al considerar impactos proporcionales al valor real de los Fondos Estructurales como una ratio del PIB de cada región (*differentiated shock*) se comprueba –como cabía esperar– una mayor repercusión en los estados periféricos, al

ser los principales beneficiarios de los mismos. En el contexto portugués o griego (en este último caso de triste actualidad económica y social durante el proceso de redacción de este trabajo) las inversiones no han repercutido en las mejoras esperadas, lo que parece señalar que los esfuerzos en desarrollo local no están resultando útiles, al menos bajo esta orientación.

- Finalmente, al analizar los efectos de desbordamiento de una región sobre el crecimiento de otros, se detecta un proceso de difusión que parte únicamente de los países centrales (los que integran el *core*). Esto se debería a las mejores interconexiones entre los estados, lo que de nuevo suscita la reflexión sobre la necesidad de reconsiderar las políticas, introduciendo aspectos de inter-relación, más débiles en los estados periféricos.

Los resultados se deben considerar bajo una óptica de prudencia, dado que la propia formulación del modelo empleado puede afectar cualitativamente a los resultados obtenidos.

La importante cuestión del papel de las infraestructuras en el crecimiento económico regional, expuesta previamente, es abordada, en un contexto espacial completamente distinto, en Vergara-González, Mejía-Serván y Martínez-Lara (2010), al estudiar la convergencia en el Estado de México (el planteamiento se podría extrapolar al caso europeo, al estudiar las naciones más rezagadas). La hipótesis a confirmar es la importancia de la dotación del capital público respecto a las diferencias finales en el PIB per cápita asociado a los estados estacionarios. Se emplea para ello el análisis de componentes principales, procediéndose a la construcción de tres indicadores físicos de infraestructuras: (i) un indicador básico, que hace referencia al porcentaje de hogares con acceso a agua corriente y energía; (ii) otro social, referido a parámetros de educación y servicios sanitarios; y (iii) un indicador global, que engloba los dos anteriores.

El estudio empírico se extiende al período entre 1989 y 2004 para las ocho regiones y 63 municipios del estado mexicano. Los indicadores global y de infraestructura básica muestran pocos cambios en las dotaciones de infraestructuras: las que se encontraban en mejor situación en el año inicial continúan en la misma posición al final del intervalo (lo mismo sucede con las más desfavorecidas). En el caso de la infraestructura social el comportamiento es distinto en determinadas situaciones; se aprecia que el total de la población es un factor más relevante, lo que proporciona mayor dispersión y un incremento de disparidades regionales. Este estudio sí parece confirmar, con ciertas limitaciones, que el crecimiento económico se encontraría ligado a mejores dotaciones de infraestructuras públicas

Con independencia de las conclusiones alcanzadas por los distintos estudios revisados, existe una cuestión subyacente que se afronta de manera directa en Rodil, Rodríguez, Sánchez y Vence (2010): ¿son compatibles los objetivos de crecimiento, competitividad y cohesión? En teoría, la CE defiende la integración de estos tres aspectos: (i) la eliminación de barreras y la libre circulación aportarían ventajas competitivas a las empresas; (ii) la cohesión social y territorial fortalecería los vínculos de colaboración; y (iii) las economías europeas, unidas, tendrían mayor capacidad para competir con los estados líderes (US y Japón). Sin embargo, se ha comprobado cómo, por ejemplo, las políticas de cohesión, a pesar de su consideración como objetivos fundacionales, no han alcanzado los resultados esperados. El ámbito de la

competitividad se encuentra asociado a las políticas de I+D comunitarias, en concreto a los Programas Marco desarrollados en las últimas décadas. El problema, al igual que en el caso anterior, reside en que el fortalecimiento de estas variables posee un efecto recíproco, que puede suponer el incremento de las disparidades territoriales: las regiones de mayor nivel mejorarían sus infraestructuras y se volverían más competitivas, mientras que las más rezagadas no podrían optar, de manera tan plena, a dichos instrumentos.

## 1.5 Estrategia Europa 2020

La señal más evidente del incumplimiento de los objetivos previstos en relación a las problemáticas de cohesión corresponde al cambio de enfoque de las políticas comunitarias planteadas desde los órganos de gobierno de la EU. Este hecho se constata en el año 2000, con la aprobación de la Estrategia o Agenda de Lisboa, orientada hacia la implantación de una sociedad europea del conocimiento con alto potencial competitivo, que debía caracterizarse por elevadas tasas de empleo; un año después, en 2001, se adoptaba una visión más amplia, al incorporar la sostenibilidad como eje aglutinador de los elementos económicos, sociales y de protección del medio ambiente. Esto implicaba, según Secretaría de Estado de Investigación, Desarrollo e Innovación (sf): (i) el desarrollo de determinados mecanismos para poder acceder de manera libre a programas voluntarios en este contexto, tanto nacionales como desarrollados en cooperación; (ii) favorecer la inversión privada en I+D+i; (iii) potenciar la coordinación y medir resultados a través de indicadores precisos; (iv) impulsar la colaboración de universidades y centros de investigación, aproximando los entornos académicos y empresariales; y (v) eliminar dificultades en la movilidad de investigadores, centrando el foco en la atracción y retención del talento en Europa. La cuantificación de algunos de estos aspectos tuvo lugar en 2002, en el Consejo Europeo de Barcelona. Por ejemplo, se fijó para 2010 la consecución del 3% del PIB como gasto global en I+D de la EU o se acordó la revisión de resultados en innovación a través del Programa Marco.

A juicio de Rodil (2010) un análisis de los resultados también demuestra que estos importantes objetivos, tanto los cualitativos como los cuantitativos, quedaron muy lejos de alcanzarse. De hecho, en 2008, en una reunión de ministros de investigación celebrada en Eslovenia, se identifica la necesidad de incorporar elementos innovadores y educativos, así como la presencia activa de los ciudadanos, al Espacio Europeo de Investigación. Este planteamiento seminal se ha identificado como el Proceso de Liubliana y constituiría otro fundamento más de la Estrategia Europea 2020.

En Comisión Europea (2010), donde se presentan las bases y contenido de este programa, se identifica claramente la reorientación del proceso de crecimiento, profundizando en los planteamientos recogidos en los hitos ya expuestos: (i) un desarrollo económico asociado al conocimiento y a la innovación; (ii) la atención a la sostenibilidad, mediante un uso más eficaz de los recursos; y (iii) máximo fomento de un crecimiento integrador, que permita alcanzar elevadas ratios de empleo y alta cohesión social y territorial. Resulta importante recordar que estos planteamientos se expresan en un período de profunda crisis económica y financiera, lo que lleva al entonces Presidente de la CE a afirmar en el prefacio que *“es el momento de ser intrépido y ambicioso”*, a diferenciar actuaciones específicas en el corto plazo y centrar la atención en el trabajo de toda una década para *“volver a encontrar el rumbo y mantenerlo”*. El



documento identifica, además, las importantes carencias estructurales en el seno de la EU, que constituyen una justificación de las gravísimas consecuencias de la crisis (desplome en un 4% del PIB, como el acaecido en 2009, 10% de la población activa en desempleo, retroceso de niveles de producción industrial a valores de la década de los noventa, etc.):

- La inferior tasa media de crecimiento en Europa (constatada en una sección anterior), respecto a otros estados externos, obedece a diferencias organizativas, menores inversiones en I+D+i, uso ineficiente de tecnologías de la información y la comunicación o falta de dinamismo en el ámbito empresarial, entre otras causas.
- El mercado laboral también se caracteriza por severas limitaciones: el porcentaje de mujeres que trabajan (63%) sigue estando por debajo del correspondiente a los hombres (76%), con un elevado índice de desempleo de trabajadores con más de 55 años (54%) frente al 38% máximo que se registra en Estados Unidos y Japón, estados en los que se reconoce el potencial de la experiencia.
- Por otra parte, la curva de población activa ya ha comenzado a declinar como consecuencia de la jubilación de los individuos nacidos durante la expansión demográfica de los años sesenta. La tasa de incremento de mayores de 60 años se está situando en torno a los dos millones anuales, casi el doble que en 2007, lo que generará, a su vez, nuevas tensiones en el ámbito laboral.

Este complejo panorama requiere actuaciones genéricas en tres grandes frentes: (i) el fomento de la interconexión y unidad europeas: *“actuando juntos somos mucho más efectivos (...) En el mundo actual, ningún país puede solucionar por sí solo los problemas”*, Comisión Europea (2010: 10); (ii) la reparación de las finanzas mundiales; y (iii) la atención a los retos climáticos y a los recursos naturales. Todas estas cuestiones se abordan en el programa Europa 2020 mediante la identificación de cinco grandes objetivos, algunos de los cuales se subdividen en diferentes metas, que deben consumarse al llegar a dicho año. Los relativos a la media EU-28 se relacionan en la siguiente figura:

Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
Tasa de empleo	Debe alcanzar el 75% de la población activa entre 20 y 64 años.	En 2014: 69.2%
Investigación y desarrollo	Dedicación del 3% del PIB a I+D <sup>14</sup>	En 2012: 2.01%
Cambio climático y sostenibilidad energética <sup>15</sup>	Reducción en un 20% de las emisiones de gases de efecto invernadero respecto a los niveles existentes en 1990.	En 2012: 17.87%
	Aportación del 20% de energías renovables al consumo total energético.	En 2013: 15%

<sup>14</sup> Como se ha visto, el Consejo Europeo de Barcelona fijaba este objetivo para el año 2010, pero los efectos de la crisis han supuesto una revisión de los horizontes temporales.

<sup>15</sup> En términos de Comisión Europea (2010: 5): *“Debería alcanzarse el objetivo «20/20/20» en materia de clima y energía”*. Se recoge el deseo de alcanzar una reducción del 30% en las emisiones *“si se dan las condiciones para ello”*.

Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
	Aumento del 20% de eficiencia energética (esto equivale a una reducción hasta 1,483 Mtoe de consumo de energía primaria y 1,086 Mtoe de consumo de energía final).	Consumo de energía primaria en 2013: 1,566.5 Mtoe Consumo de energía final en 2013: 1,104.6 Mtoe
Educación	La tasa de abandono prematuro del sistema de educación debe ser inferior al 10%.	En 2013: 11.9%
	Mínimo del 40% de individuos entre 30 a 34 años con estudios completos de nivel terciario.	En 2013: 37.1%
Pobreza y exclusión social	El riesgo de pobreza y exclusión social debe afectar a 20 millones de personas menos a la conclusión de este período.	En 2013: 122,897 miles de personas en riesgo (24.5% del total)

Figura 1.21. Objetivos Europa 2020.

Fuente: Elaboración propia a partir de (i) Comisión Europea. Objetivos Europa 2020 (última actualización: 21/04/2015); (ii) European Commission. Energy Efficiency Directive y (iii) Eurostat.

Estos objetivos principales representan las tres características del crecimiento que persigue la CE: inteligente, sostenible e integrador. Todavía a nivel comunitario se distinguen siete iniciativas emblemáticas, enfocadas a aspectos específicos de cada uno de los temas expuestos:

- *Unión por la innovación*: se centra en la mejora de las condiciones de financiación de actividades de I+D+i.
- *Juventud en movimiento*: persigue un incremento de los resultados de los sistemas educativos y respecto a la integración de las personas más jóvenes en el mercado laboral.
- *Agenda digital para Europa*: se orienta a la constitución de un mercado digital para familias y empresas, que debe fundamentarse en redes de alta velocidad de internet.
- *Una Europa que utilice eficazmente los recursos*: apoya el cambio hacia economías con menores emisiones de carbono, incrementando el empleo de energías renovables, modernizando los sistemas de transporte o mejorando, en general, la eficiencia de los procesos.
- *Una política industrial para la era de la mundialización*: implicaría la mejora del entorno de las empresas en general y de las PYME en particular.
- *Agenda de las nuevas cualificaciones y empleos*: pretende la modernización del mercado laboral y el desarrollo autónomo de las capacidades de los trabajadores.
- *Plataforma europea contra la pobreza*: intenta garantizar la cohesión, de modo que las personas excluidas puedan integrarse dignamente en la sociedad.

En el momento de la redacción de este estudio algunas de las iniciativas expuestas se encuentran todavía en las fases iniciales de desarrollo, dada la amplitud y complejidad de los contenidos a desarrollar.

Los objetivos 2020 a nivel EU-28 se concretan en objetivos particulares de cada Estado miembro, lo que permite una medida individual y agregada de todo el proceso. La idea es considerar los resultados a conseguir como metas comunes, que se deben alcanzar

interconectando y potenciando actuaciones de índole nacional y del conjunto de la CEE. En las siguientes figuras se relacionan planteamientos específicos para determinados países, seleccionados para tener en cuenta la amplia disparidad de participantes.

Bélgica (es uno de los seis estados fundadores de la CEE; la constitución tuvo lugar en 1957).		
Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
Tasa de empleo	73.2% de la población activa.	En 2014: 67.3%
Investigación y desarrollo	3% del PIB a I+D	En 2011: 2.15%
Cambio climático y sostenibilidad energética	Reducción en un 15% de las emisiones.	En 2012 el nivel es del 82.56% respecto al de 1990.
	13% de energías renovables.	En 2013: 7.9%
	Consumo de energía primaria: 43.7 Mtoe	Consumo de energía primaria en 2013: 47.4 Mtoe
	Consumo de energía final: 32.5 Mtoe	Consumo de energía final en 2013: 34.8 Mtoe
Educación	Tasa de abandono prematuro < 9.5%.	En 2013: 11%
	47% mínimo de individuos con estudios completos de nivel terciario.	En 2013: 42.7%
Pobreza y exclusión social	Reducción de 380,000 personas en riesgo de pobreza y exclusión social.	En 2014: 2,339 miles de personas (21.2%)

Figura 1.22. Objetivos Europa 2020. Bélgica.

Fuente: Elaboración propia a partir de (i) Comisión Europea. Objetivos Europa 2020 (última actualización: 21/04/2015), (ii) European Commission. Energy Efficiency Directive y (iii) Eurostat.

Eslovaquia (se incorporó el 1 de mayo de 2004)		
Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
Tasa de empleo	72% de la población activa.	En 2014: 65.9%
Investigación y desarrollo	1.2% del PIB a I+D	En 2013: 0.83%
Cambio climático y sostenibilidad energética	Se admite un incremento del 13%.	En 2012 el nivel de emisiones era del 58.65% respecto al de 1990.
	14% de energías renovables	En 2013: 9.8%
	Consumo de energía primaria: 16.4 Mtoe	Consumo de energía primaria en 2013: 16.2 Mtoe
	Consumo de energía final: 9.0 Mtoe	Consumo de energía final en 2013: 10.9 Mtoe
Educación	Tasa de abandono prematuro < 6%.	En 2013: 6.4%
	40% mínimo de individuos con estudios completos de nivel terciario.	En 2013: 26.9%
Pobreza y exclusión social	Reducción de 170,000 personas en riesgo de pobreza y exclusión social.	En 2014: 960,000 personas (18.4%)

Figura 1.23. Objetivos Europa 2020. Eslovaquia.

Fuente: Elaboración propia a partir de (i) Comisión Europea. Objetivos Europa 2020 (última actualización: 21/04/2015), (ii) European Commission. Energy Efficiency Directive y (iii) Eurostat.

España (fecha de su incorporación a la CEE: 1986)		
Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
Tasa de empleo	74% de la población activa.	En 2014: 59.9%
Investigación y desarrollo	2% del PIB a I+D	En 2013: 1.24%
Cambio climático y sostenibilidad energética	Reducción en un 10% de las emisiones.	En 2012 el nivel de emisiones era del 122.48% respecto al de 1990.
	20% de energías renovables.	En 2013: 15.4%
	Consumo de energía primaria: 119.8 Mtoe	Consumo de energía primaria en 2013: 113.6 Mtoe
	Consumo de energía final: 80.1 Mtoe	Consumo de energía final en 2013: 81.1 Mtoe
Educación	Tasa de abandono prematuro < 15%.	En 2013: 23.6%

	44% mínimo de individuos con estudios completos de nivel terciario.	En 2013: 42.3%
Pobreza y exclusión social	Reducción entre 1,400.000 y 1,500.000 de personas en riesgo de pobreza y exclusión social.	En 2014: 13,402 miles de personas (29.2%)

Figura 1.24. Objetivos Europa 2020. España.

Fuente: Elaboración propia a partir de (i) Comisión Europea. Objetivos Europa 2020 (última actualización: 21/04/2015), (ii) European Commission. Energy Efficiency Directive y (iii) Eurostat.

Grecia (se incorporó en 1981)		
Variable considerada	Objetivo cuantificado	Últimos datos disponibles
Tasa de empleo	70% de la población activa.	En 2014: 53.3%
Investigación y desarrollo	1.21% del PIB a I+D	En 2013: 0.8%
Cambio climático y sostenibilidad energética	Reducción en un 4% de las emisiones.	En 2012 el nivel de emisiones era del 105.71% respecto al de 1990.
	18% de energías renovables.	En 2013: 15%
	Consumo de energía primaria: 24.7 Mtoe Consumo de energía final: 18.4 Mtoe	Consumo de energía primaria en 2013: 23.7 Mtoe Consumo de energía final en 2013: 15.3 Mtoe
Educación	Tasa de abandono prematuro < 9.7%.	En 2013: 10.1%
	32% mínimo de individuos con estudios completos de nivel terciario.	En 2013: 34.9%
Pobreza y exclusión social	Reducción de 450,000 personas en riesgo de pobreza y exclusión social.	En 2014: 3,885 miles de personas (36%)

Figura 1.25. Objetivos Europa 2020. Grecia

Fuente: Elaboración propia a partir de (i) Comisión Europea. Objetivos Europa 2020 (última actualización: 21/04/2015), (ii) European Commission. Energy Efficiency Directive y (iii) Eurostat.

---

## 2. Modelos de crecimiento económico e implicaciones en los procesos de convergencia

---

### 2.1 Introducción

Este capítulo se centra en la revisión de los principales modelos desarrollados durante el siglo XX para explicar y predecir el comportamiento económico. Se ha optado por una revisión en profundidad de los dos grandes esquemas presentes en este ámbito, la perspectiva neoclásica y la consideración endógena, a fin de identificar los numerosos aspectos relevantes en la concreción de los estudios sobre convergencia, tanto en el modelado de las regresiones como en la interpretación de las aplicaciones empíricas. Destacamos en este sentido la atención dedicada al tratamiento del capital humano y, en su caso, a los niveles tecnológicos o a los efectos en investigación y desarrollo, por parte de los diferentes investigadores, en línea con los ejes de trabajo que se plantean en nuestro estudio. En el caso específico de determinados modelos endógenos se ha procedido a la identificación de la naturaleza de las funciones de producción, a la determinación de las dinámicas de su comportamiento hacia los estados estacionarios y, en especial, a la identificación, en cuanto a relevancia, de las variables que influyen en las ratios de crecimiento.

### 2.2 Análisis de modelos de crecimiento económico

Durlauf y Quah (1999: 1) identifica tres elementos principales que motivan a los economistas para el estudio de los procesos de crecimiento: (i) la incidencia de desigualdades en las ratios agregadas de crecimiento, que conduce, en el largo plazo, a notables diferencias en el bienestar de los ciudadanos; (ii) la recompensa intelectual que se obtiene del análisis de las hipótesis teóricas y su confrontación con el alcance de los resultados experimentales; y (iii) las aportaciones de los nuevos análisis empíricos que, en términos literales, generan *“fresh stylized facts on growth with important implications for theory”*. En efecto, los conflictos entre la evidencia empírica (como fundamento en lo que proporciona la experiencia) y los modelos teóricos de crecimiento, en especial en la incidencia sobre las variables de ajuste, constituyen una vía de investigación de notable importancia, como revela la extensa literatura existente al respecto, con el nacimiento de las primeras corrientes de estudio en el siglo XVIII.

En general, como señala Mora (2002: 59), *“existe un elevado consenso a la hora de distinguir dos grandes líneas de análisis en los modelos de crecimiento”*: por una parte los modelos neoclásicos, asociados a los trabajos de Solow (1956) y Swan (1956), enriquecidos posteriormente por tratamientos “aumentados”, en los que se relajan ciertas hipótesis, consideradas como demasiado restrictivas (por ejemplo, Parente y Prescott, 1994); y, por otro lado, los modelos de crecimiento endógeno, iniciados por Romer (1986) y Lucas (1988). Estos dos enfoques plantean otro conflicto, dado que el modelo neoclásico predice (bajo ciertos

asumes) la evolución convergente de las rentas, mientras que una amplia literatura sobre crecimiento endógeno postula soluciones divergentes. Aunque útil para la clarificación de ciertos conceptos, esta dicotomía puede simplificar en exceso la visión del marco del trabajo en el que se han desarrollado los estudios. De la Fuente (1996), por ejemplo, es uno de los autores que critica este posicionamiento.

Existen otros aspectos a considerar que invitan a considerar el corpus teórico y empírico que se ha generado, históricamente, en este ámbito. En términos de Mihut (2013: 17), el gran alcance de la evolución en los modelos de crecimiento económico radica en que *“may be used in order to capture the characteristics of the main macroeconomic indicators that determine the development of the contemporary society, and even more importantly a landmark of the economic thinking”*.

Bajo este último planteamiento entendemos relevante la descripción de los diferentes patrones desarrollados, en especial desde mediados del siglo XX hasta nuestros días, resaltando los elementos dinámicos contemplados y focalizando la atención en el tratamiento de las ratios de crecimiento. Esto implica un análisis detenido de los condicionantes y asumes de cada modelo, so pena de inferir, con posterioridad, conclusiones erróneas en base a planteamientos de partida no contemplados o considerados de forma diferente en el razonamiento inicial de los autores. En capítulos posteriores se procederá al establecimiento de las conexiones internas entre los desarrollos previos y su particular tratamiento en el análisis de procesos de convergencia.

A fin de acotar el objeto de estudio, y a pesar de la inevitable pérdida de contenido en la correspondiente simplificación, se ha optado por esquematizar en la Figura 2.1 el proceso histórico experimentado por dichos modelos de crecimiento. En el último bloque, referido al planteamiento endógeno, se ha optado por indicar, con cierta cautela, únicamente dos trabajos, identificados por su relevancia en la literatura<sup>16</sup>, que se pueden considerar seminales en un desarrollo posterior ciertamente fructífero, que se referencia en base a los aspectos temáticos considerados.

---

<sup>16</sup> Sala-i-Martin (1994) o Barro y Sala-i-Martin (2004), entre otros.

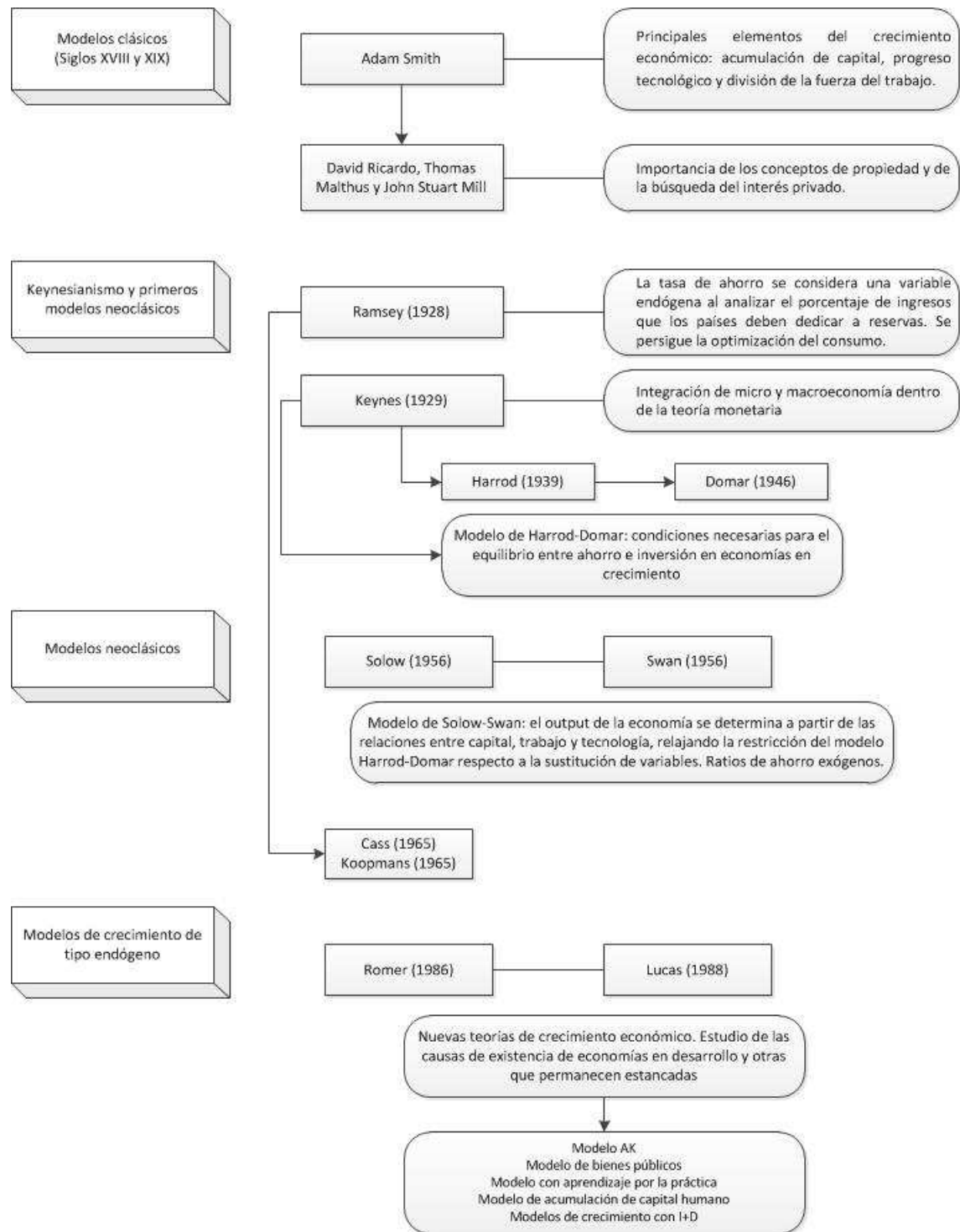


Figura 2.1. Modelos históricos de crecimiento.

Fuente: elaboración propia, a partir de Franco y Ramírez (2005), Mihut (2013) y Mora (2002)

En los siguientes apartados se analizan las características más relevantes de algunos de los modelos expuestos, identificando, en especial, las consecuencias que se derivan respecto de los procesos de convergencia o divergencia, a fin de establecer, con posterioridad, sus relaciones con los instrumentos de medida.

## 2.3 El Modelo de Ramsey

El trabajo seminal de Ramsey (1928) se centra en el modelado matemático de una teoría del ahorro, bajo determinadas hipótesis simplificadoras, a fin de identificar el porcentaje de renta que una nación debería salvaguardar. Franco (2005) y otros autores ponderan el potencial de este modelo, que establece, por ejemplo, las condiciones de óptimo de Ramsey, muy empleado en la literatura econométrica. La obra se adscribe a los patrones neoclásicos, que empezaron a desarrollarse en la segunda década del siglo XX, y el marco estructural fue retomado casi 40 años más tarde, en los estudios de Cass (1963) y Koopmans (1963), bajo el enfoque del control óptimo y como revisión de los trabajos de Solow (1956) y Swan (1956).

Ramsey (1928) plantea los siguientes supuestos de partida:

- La comunidad familiar se desarrolla de manera indefinida en el tiempo (el horizonte de optimización es infinito o, contemplado desde otra óptica, se analiza un modelo de elección intertemporal con un número infinito de períodos). Como señalan distintos autores, este horizonte ilimitado equivale a que las familias tienen un comportamiento, en principio, altruista, que quedará matizado al analizar la tasa de descuento.
- También se supone que no se producirán cambios en el disfrute de ocio o de capacidad de rechazo al trabajo. Los valores de estos posicionamientos ante el placer o ante el sacrificio que supone la realización de una tarea se pueden calcular de manera independiente y ser agregados con posterioridad. Los cambios tecnológicos se descartan en el estudio, al igual que en otros modelos neoclásicos (se trata de una cuestión de interés, que se retomará, periódicamente, en el estudio).
- Una cuestión central, como se ha adelantado, se refiere a las preferencias en el consumo. En la parte inicial de su trabajo, Ramsey (1928) mantiene un planteamiento ético, al considerar que las familias valoran el consumo propio por debajo del correspondiente a sus descendientes (un carácter plenamente altruista). En la sección segunda de su estudio se incorpora una ratio de descuento, que considera la disminución de la satisfacción del consumidor en el horizonte temporal.
- Se ignoran "*distribucional considerations, assuming, in fact, that the way in which consumption and labour are distributed between the members of the community depends solely on their total amounts*" (Ramsey, 1928: 542). Esta idea se concreta en el modelo de función de utilidad a considerar. Aparte, se rechazan las diferencias entre distintas categorías de bienes y de trabajo, lo que supone un tratamiento conjunto de capital, consumo y labor (como se ha indicado, los modelos *augmentados* revisarán este paradigma).
- Ramsey (1928) no ignora los efectos del comercio exterior: simplemente considera que las naciones extranjeras se encuentran en equilibrio estable, incluyendo las relaciones derivadas en la formulación de la producción y rechazando el efecto de un endeudamiento progresivo e imparable a lo largo del tiempo.
- Por último se asume una política continuada y coherente de ahorro entre generaciones, de modo que no se producirán despilfarros ni pérdidas desgraciadas en el futuro.



Considerando  $c(t)$  la ratio total de consumo,  $l(t)$  la ratio total de trabajo de la comunidad y  $k(t)$  el capital existente en un instante  $t$ , la renta se expresa como una función de las cantidades existentes de trabajo y capital:  $f(l, k)$ . El ahorro, por otro lado, se calcula como  $\frac{dk}{dt}$ . Como es sabido, la renta generada en una comunidad se destina al ahorro y al consumo:

$$\frac{dk}{dt} + c = f(l, k) \quad (2.1)$$

Denominando  $U(c)$  al ratio total de utilidad del ratio de consumo y  $V(l)$  al ratio total de inutilidad<sup>17</sup> del ratio de trabajo, sus correspondientes ratios marginales se obtienen derivando respecto a las respectivas variables:  $u(c) = \frac{dU(c)}{dc}$  y  $v(l) = \frac{dV(l)}{dl}$ .

El objetivo que se persigue es maximizar el ratio neto de disfrute  $U(c) - V(l)$ , sujeto a la restricción  $c = l + k$ . Es muy importante considerar en este punto que la diferencia planteada es función de  $k$ , incrementándose, en principio, cuando esta variable aumenta, “*since with more capital we can obtain more enjoyment*” (Ramsey, 1928: 544). En este contexto se debe considerar:

- (i) El incremento del ratio neto de disfrute se encuentra limitado por un valor económicamente obtenible, aunque no sea la cantidad máxima concebible. A partir de ese valor no es posible conseguir aumentos respectivos de renta u ocio.
- (ii) Por otro lado, descartado un incremento infinito del ratio neto de disfrute, su comportamiento corresponderá a una aproximación asintótica a un cierto límite finito, que puede coincidir o no con la cantidad máxima concebible. Este límite es el ratio económicamente obtenible aunque, en realidad y como es lógico, se trata de un término que no tiene por qué alcanzarse.

Ramsey (2008: 544) denomina a este ratio económicamente obtenible como “pequeña dicha” (“*short Bliss or B*”). La comunidad tendrá que salvaguardar la suficiente cantidad que permita alcanzar el *Bliss* tras un determinado tiempo o continuar aproximándose en el tiempo. En este sentido las familias se plantean el compromiso entre el máximo ahorro, lo que supone un acercamiento en el tiempo a la cota *Bliss*, y la pérdida de disfrute en el instante actual asociada a tomar esa decisión. Por tanto, parece lógico que la renta no se destinae por completo al ahorro.

La primera parte del modelo se concreta con otras dos ecuaciones:

$$v(l) = \frac{\partial f}{\partial l} u(c) \quad (2.2)$$

La inutilidad marginal del trabajo se corresponde en todo instante con el producto de la eficiencia marginal del trabajo por la utilidad marginal del consumo.

<sup>17</sup> Se emplea este término para hacer referencia a *disutility* (en la obra de Keynes, la prestación del trabajo a un empleador capitalista se percibe como un elemento contra-productivo desde el punto de vista del trabajador).

Por otro lado, el análisis del incremento infinitesimal del consumo permite identificar la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt}u(c(t)) = -\frac{\partial f}{\partial k} \cdot u(c(t)) \quad (2.3)$$

El término  $\frac{\partial f}{\partial k}$  es la ratio de interés que se gana por el hecho de postponer el consumo. Dicho consumo se incrementa continuamente a menos que dejen de actuar el efecto del ratio de interés o de su ratio marginal, lo que sucede al alcanzar el *Bliss*.

El sistema de ecuaciones (2.1) a (2.3) se resuelve mediante integración por partes y haciendo un cambio de variables. Suponiendo determinados comportamientos de las funciones con  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene finalmente:

$$\frac{dk}{dt} = f(l, k) - c = \frac{B - (U(c) - V(l))}{u(c)} \quad (2.4)$$

Se alcanza un resultado muy significativo: el ratio de ahorro multiplicado por la utilidad marginal del dinero debe ser igual a la cantidad que resta para que el ratio neto actual de disfrute alcance el ratio máximo posible. Se aprecia que esta relación de equivalencia es, en principio, independiente de la función de producción cuando, en realidad, el valor del *Bliss* viene determinado por esta función  $f(l, k)$ . También resulta paradójico que el importe a ahorrar, a partir de una renta dada, sea independiente del ratio de interés. La introducción en el modelo de una tasa de descuento  $\rho$  modifica este hecho, observándose que la proporción de ahorro se convierte en una función de  $\rho$  y  $\frac{\partial f}{\partial k}$ .

Ramsey (1928) subraya que estas primeras conclusiones se encuentran muy afectadas por algunas de las simplificaciones del modelo:

- Un posible incremento de la población podría animar, en consecuencia, a aumentar las cantidades destinadas al ahorro.
- Las mejoras tecnológicas, por el contrario, influirían en la reducción de dicho ahorro, aunque habría que tener en cuenta que el acceso a los nuevos medios requiere de una disposición de fondos previamente reservados.
- Por último, las guerras y otras catástrofes pueden destruir los ahorros acumulados (se trata de un comentario ciertamente profético respecto a una sociedad que sufriría, por ejemplo, apenas once años más tarde, los desastres de la Segunda Guerra Mundial).

En el siguiente apartado se supone que la renta es una función lineal del trabajo y el capital:

$$f(l, k) = wl + rk \quad (2.5)$$

La ratio de salarios,  $w$ , y la ratio de interés,  $r$ , se asume como constantes. Esta nueva simplificación permite representar las soluciones obtenidas, analizar el comportamiento de individuos, que viven una existencia finita, e introducir en el modelo una tasa de descuento sobre utilidades e inutilidades futuras.

La igualdad (2.5) supone que la renta consta de dos partes, bien diferenciadas:  $wl$ , renta ganada, y  $rk$ , renta inmerecida (Ramsey, 2008: 550).

A partir de (2.2):

$$v(l) = \frac{\partial f}{\partial l} u(c) = w \cdot u(c) \quad (2.6)$$

Esto significa que  $l$  se puede expresar en función de  $c$ ; empleamos para ello una variable auxiliar  $z = c - wl$ , que representa la diferencia entre consumo y renta ganada. Tenemos:

$$\tau(z) = u(c) = \frac{v(l)}{w} \quad (2.7)$$

$$T(z) = \int \tau(z) dz = \int u(c) dc - v(l) dl = U(c) - V(l) \quad (2.8)$$

Bajo este enfoque,  $T(z)$  se puede identificar como la utilidad total de la renta inmerecida y  $\tau(z)$  la utilidad marginal de dicha renta.

A partir de las igualdades anteriores:

$$rk - z = f(l, k) - c = \frac{B - T(z)}{\tau(z)} \quad (2.9)$$

Despejando:

$$B - T(z) = \frac{dT}{dz} (rk - z) \quad (2.10)$$

La representación de  $T(z)$  se realiza en la Figura 2.2, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Esta curva tiene una asíntota vertical en  $y = -\eta$ , con  $\eta$  “the greatest excess of earnings over consumption compatible with continued existence” (Ramsey, 1928: 550).
- A partir de la determinación del punto  $P(rk, B)$ , se traza la tangente a la curva  $T(z)$  y se obtiene el punto Q: su abcisa determina la distribución de renta inmerecida que debe ser gastada y qué parte debe ser ahorrada.

En nuestro estudio estamos interesados en el valor de la renta a lo largo del tiempo (con la construcción anterior se determina el porcentaje a gastar de una renta dada). Para ello se parte de:

$$\frac{d}{dt} \tau(z) = -r\tau(z) \quad (2.11)$$

Integrando:

$$\tau(z) = Ae^{-rt} \quad (2.12)$$

Donde  $A = \tau(z_0)$  y  $z_0$  corresponde al valor de  $z$  en  $t = 0$ . En la Figura 2.2 **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se determina como la abcisa de  $Q$  para  $P(rk_0, B)$ . El tiempo invertido en la acumulación de un capital  $k$  a partir de un capital inicial  $k_0$  se obtiene como  $\frac{1}{r} \ln \frac{\tau(z_0)}{\tau(z)}$ .

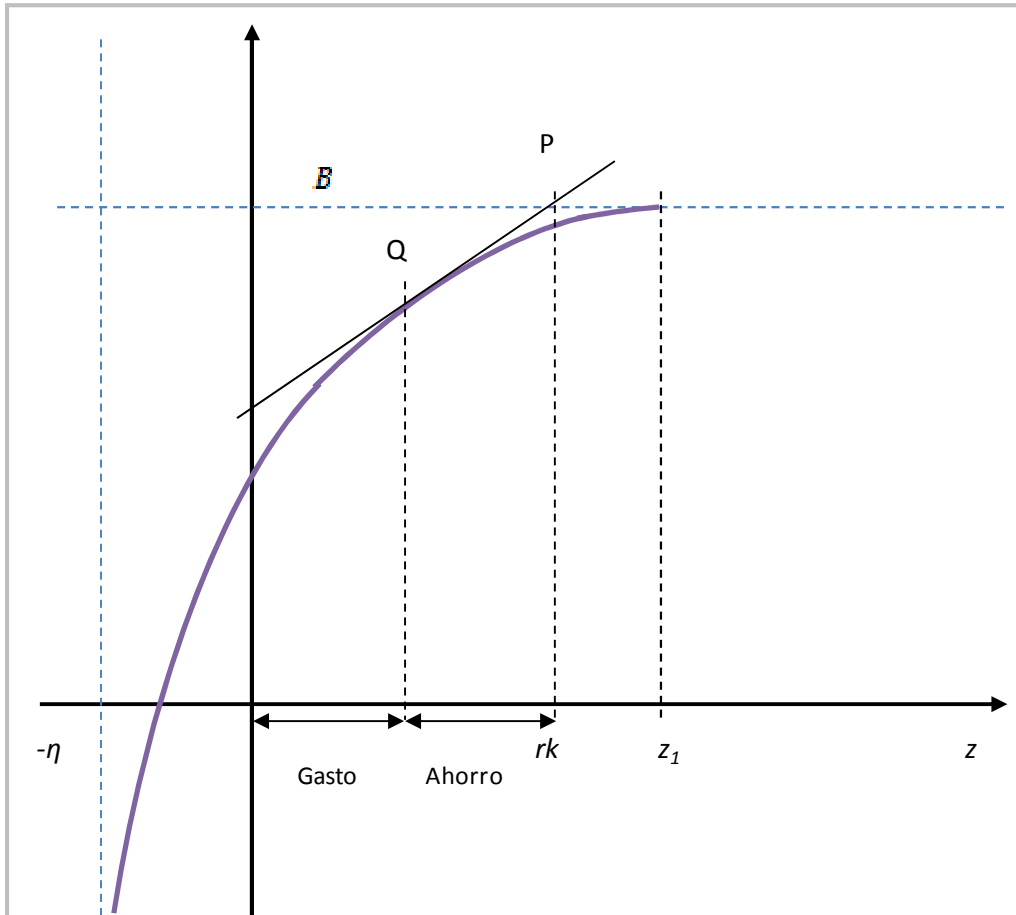


Figura 2.2. Representación del ratio de utilidad total de renta inmerecida.

Fuente: Ramsey (1928: 551)

En el caso de un individuo, que vive un tiempo finito,  $N$  años (en vez de una sociedad en general, en la que se maneja un período infinito), aplicando (2.4) a las nuevas hipótesis se obtiene:

$$rk - z = \frac{I - T(z)}{\tau(z)}$$

En este caso,  $I$  es una incógnita a determinar, inferior al valor  $B$ , ya que una persona que vive una existencia acotada ahorrará menos que en el caso infinito. Para obtener este valor es necesario identificar previamente la cantidad  $k_3$  que el individuo desea destinar a sus herederos. La determinación de las tangentes a emplear implica el uso de un resultado derivado de la ecuación (2.12):  $e^{rN} = \frac{\tau(z_0)}{\tau(z_3)}$

Los resultados presentados sufren modificaciones al incorporar la tasa de descuento: es decir, al considerar en las decisiones de los individuos el nivel de utilidad tanto en el momento actual como el asociado a la repercusión de las mismas dentro de una serie de períodos. Ello requiere descontar las utilidades a través de la tasa  $\rho$ , como se ha indicado.

Ramsey (1928) compara el valor de esta tasa de descuentos de utilidad,  $\rho$ , con el de la tasa de interés,  $r$ , planteando dos supuestos. Si  $\rho < r$ , las ecuaciones (2.1) y (2.2) no cambian, pero en (2.3) se obtiene (haciendo  $\frac{\partial f}{\partial k} = r$ ):

$$\frac{d}{dt}u(c) = -u(c)(r - \rho) \tag{2.13}$$

Por tanto,  $\tau(z) = u(c) = Ae^{-(r-\rho)t}$ .

Las nuevas ecuaciones obtenidas son similares a las anteriores, salvo por la necesidad de considerar un término de utilidad modificada, que exige considerar en la integración de las expresiones la potencia  $\frac{r}{r-\rho}$ . Esto implica que se acelera la disminución de la utilidad marginal y también se reduce la importancia de las rentas elevadas. En el caso  $\rho = 0$  se vuelve al modelo inicial.

Si, en el segundo supuesto,  $\rho > r$ , las mismas expresiones conducen a resultados muy distintos. La utilidad marginal de consumo crece en términos de  $\rho - r$ , de modo que el consumo se reduce hasta el nivel más básico de subsistencia.

La determinación del ratio de interés permite profundizar, definitivamente, en la dinámica del modelo. Ramsey (1928) plantea, para ello, tres escenarios:

- (i) Todos los individuos aplican la misma tasa de descuento de utilidad,  $\rho$ , tanto en ellos mismos como en su descendencia. En un estado de equilibrio no hay ahorro:  $\frac{dc}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$

Las tres ecuaciones principales del modelo quedan:

$$c = f(l, k) \tag{2.14}$$

$$v(l) = \frac{\partial f}{\partial l}u(c) \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \rho \tag{2.16}$$

En base a la última expresión, el ratio de interés, que es igual a la productividad marginal del capital, coincide con el ratio de descuento.

Supongamos que en el momento actual  $\frac{\partial f}{\partial k} > \rho$ . Eso implica que no hay equilibrio: se establecerán mecanismos de ahorro que permitirán alcanzar dicho equilibrio o, al menos, perseguirlo asintóticamente. En ese intervalo temporal el ratio de interés se determina mediante el ajuste clásico entre las curvas de la oferta y la demanda.

En la representación de la Figura 2.3 se incluye la curva de la demanda de capital  $r = \frac{\delta f}{\delta k}$ , la curva final de la oferta  $r = \rho$  y la curva temporal de la oferta  $k = k_0$ . La ratio de interés se obtiene de la intersección entre la curva de la demanda y la curva temporal de la oferta.

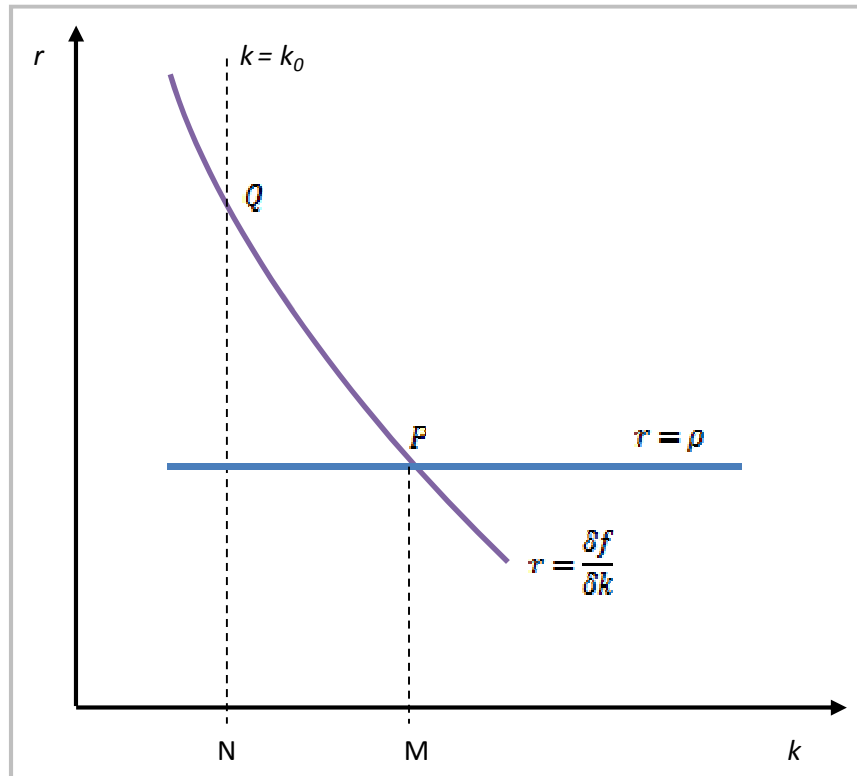


Figura 2.3. Curvas de demanda de capital y temporales y definitivas de oferta (sin variaciones de cantidad de trabajo).

Fuente: Ramsey (1928: 557)

La ratio de interés viene fijada de manera primordial por la demanda: la curva  $r = \rho$  marca el valor del ratio a medida que disminuye la diferencia entre los segmentos QN y PM mostrados en la Figura 2.3.

- (ii) En la práctica las personas aplican distintos ratios de utilidad futura y, de hecho, tampoco se encuentran tan interesadas en sus descendientes como en ellos mismos. Ramsey (1928) plantea, además, las siguientes simplificaciones:
- Los individuos se desprecupan por completo de sus herederos.
  - Cada persona mantiene a tantos hijos como resulte necesario para mantener la población, pero inicia su actividad laboral sin capital y la concluye del mismo modo; gasta sus ahorros en cada anualidad.
  - Durante su período de vida, las personas mantienen un ratio de descuento constante, aunque, como hemos indicado, este valor difiere entre unos y otros individuos.

Si  $\rho < r$ , el ahorro se llevará a cabo cuando la persona es joven, dado que se intensifican dos líneas de actuación: la garantía de unos fondos en la senectud y el mayor valor del dinero en el futuro. La evolución temporal corresponde a una

acumulación de capital y a su correspondiente gasto antes del fallecimiento. En el caso opuesto,  $\rho > r$ , los individuos se endeudarán en la juventud y devolverán los préstamos en una edad avanzada. A lo largo del tiempo irán naciendo personas en una de estas situaciones, de modo que se puede determinar una media de capital individual, que será positivo o negativo, en función de la franja vital, cuya agregación determina la curva total de oferta de capital. Las personas en las que se igualan ambos ratios ( $\rho = r$ ) no estarán, en principio, interesadas ni en ahorrar ni en pedir prestado.

- (iii) En el último caso se considera un período infinito de tiempo (las familias viven eternamente) y, como en (i), que todos los individuos aplican una tasa constante de descuento de utilidad, aunque, tal y como sucede en (ii), con variaciones de unas unidades a otras. Ramsey (1928) establece, para simplificar, que la cantidad de labor es constante, de modo que la renta total es función solo del capital:  $f(k)$ . La ratio de interés es, por tanto,  $f'(k)$ . Se supone que cada individuo puede alcanzar la utilidad máxima concebible con una renta finita  $c_1$ ; el límite inferior de renta con el que la persona puede subsistir es  $c_2$ .

Designamos como  $m(r)$  al conjunto de familias cuyo ratio de descuento es menor que  $r = f'(k)$ . Estas familias habrán alcanzado el *Bliss* o estarán todavía incrementando su gasto según  $\tau(z) = u(c) = Ae^{-(r-\rho)t}$ . La renta asociada es  $m(r) \cdot c_1$ . Si el conjunto de todas las familias es  $n$ , las restantes,  $n - m(r)$ , se encontrarán en el nivel de subsistencia. Por tanto, la renta total es:  $f(k) = m(r)c_1 + [n - m(r)]c_2 = nc_2 + m(r) \cdot (c_1 - c_2)$

Ramsey (1928) concluye que el equilibrio se alcanzaría en una sociedad con dos divisiones: los ahorradores, disfrutando del nivel *bliss*, y los individuos que carecen de previsión, en niveles de subsistencia.

## 2.4 Modelo Harrod-Domar.

Los trabajos de Harrod (1939) y Domar (1946) responden, como señala Hagemann (2009), al desarrollo de determinados planteamientos de Keynes (1929) y suponen, con independencia de la producción de Ramsey (1928), el inicio de las teorías contemporáneas sobre el crecimiento. En palabras de Franco y Ramírez (2005: 131) *“dichos autores [Harrod y Domar] establecieron un punto de referencia lógico que esbozó la situación evidenciada por la coyuntura económica de la época, la cual se reflejó en los desastres económicos ocasionados por la gran depresión de finales de la década de los veinte”*, en plena consonancia con los planteamientos de la obra de Keynes. Hagemann (2009: 67) lo expresa de este modo: *“Harrod as well as Domar aimed to extend Keynes’s analysis into the long run by considering under what conditions a growing economy could realize full-capacity utilization and full employment”*.

Franco y Ramírez (2005) considera que el modelo Harrod-Domar se basa en el planteamiento a corto plazo de Keynes y en su extrapolación a un amplio horizonte, por lo que dicho estudio se centra en las condiciones necesarias para que se establezca el equilibrio entre ahorro e inversión en economías en crecimiento, así como para mantener el pleno empleo en el

tiempo. Domar (1946: 138) señala: *“The idea that the preservation of full employment in a capitalist economy requires a growing income goes back (in one form or another) at least to Marx. It has been fully recognized in numerous studies (...) of the magnitude of gross national product needed to maintain full employment. (...) The labor force (man-hours worked) and its productivity are supposed to increase according to one formula or another, and if full employment is to be maintained, national income must grow at the combined rate”*. Precisamente el equilibrio viable sólo se alcanza en unos supuestos muy acotados, que requieren de relaciones en extremo ajustadas de las variables exógenas. A este respecto Hagemann (2009) señala que una condición necesaria para mantener el pleno empleo es la inversión anual de la suficiente cantidad ahorrada. Pero ello no es suficiente: se requiere un uso pleno de las capacidades de producción y, la premisa más compleja a verificar, que la acumulación de capital se encuentre en plena sincronización con el crecimiento de la fuerza laboral.

Domar (1949) profundiza en el problema de identificar el ratio de crecimiento en equilibrio al constatar que el sistema keynesiano carece de los instrumentos necesarios para su obtención. *“The problem of growth is entirely absent from it [Keynesian system] because of the explicit assumption that employment is a function of national income. (...) the system does not take into account the extremely essential, elementary, and well-known fact that investment also increases productive capacity”* (Domar, 1949: 139). Por tanto, todo proceso de inversión posee un carácter dual que debe considerarse en la determinación de la ratio de equilibrio en crecimiento: se incrementa la capacidad productiva de la sociedad y, además, se genera renta (en el modelo de Keynes solo se contempla la segunda opción).

Franco y Ramírez (2005) procede a la consideración del doble efecto de la variación en la tasa de inversión en el modelo Harrod-Domar. Por una parte se manifiesta un principio acelerador: como se ha indicado, existe una relación directa entre la variación de la producción y la variación de capital, que estos autores suponen que se mantiene constante. Hagemann (2009) señala que dicho efecto posee una repercusión a largo plazo y se manifiesta en el lado de la oferta. El análisis de la función de producción y la introducción de supuestos, como la constancia de las tasas de crecimiento de la población y de la eficiencia laboral o los rendimientos constantes a escala, permite obtener la evolución temporal de la producción en unidades eficientes ( $\hat{y} = \frac{Y}{AL}$ , con  $A$  la eficiencia laboral o nivel de tecnología y  $L$  la población existente;  $\hat{c}$  se parametriza del mismo modo):

$$\hat{y} = \begin{cases} \alpha \hat{c} & \forall \hat{c} \leq \hat{c}^p = \frac{\beta}{\alpha} \\ \beta & \forall \hat{c} > \hat{c}^p = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad (2.17)$$

En esta expresión  $\alpha$  y  $\beta$  son las constantes referidas al coeficiente técnico del capital y de trabajo efectivo, respectivamente, y  $\hat{c}^p$  es el nivel de capital en unidades eficientes que corresponde al uso pleno del capital y el trabajo efectivo (o, sea, sin capacidad ociosa de los recursos productivos).



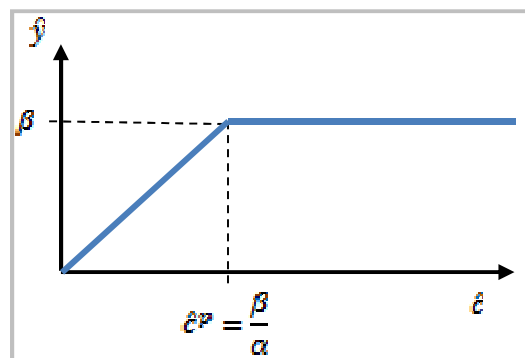


Figura 2.4. Representación de la producción en unidades eficientes según el modelo Harrod-Domar.  
Fuente: elaboración a partir de Franco y Ramírez (2005: 135)

Harrod (1939) distingue también un principio multiplicador: “*los agentes consumen (o ahorran) una proporción constante de su ingreso*”, Franco y Ramírez (2005: 136). Hagemann (2009) señala que este efecto se presenta en el lado del demanda, con resonancia en el corto plazo. En este apartado se consideran los siguientes ratios (además de  $\alpha$  y  $\beta$ , ya definidos):

- La fracción constante del ingreso que se destina al ahorro:  $s$ .
- La tasa constante de depreciación del capital:  $\delta$ .
- El ratio natural de crecimiento de la población:  $n$ .
- La tasa constante de crecimiento de la eficiencia laboral:  $g$ .

La determinación de la dinámica del modelo supone, en términos de Harrod (1939: 16), “*the marriage of the acceleration principle and the multiplier theory*”. Analizando la equivalencia entre inversión bruta e inversión neta más capital de reposición, se obtiene:  $\frac{dc}{dt} = sY - \delta c$ . Expresando las variables en unidades de trabajador eficiente y aplicando el correspondiente cálculo diferencial se determina la senda temporal del capital. En concreto resulta relevante la expresión del estado estacionario (Franco y Ramírez, 2005: 138):

$$\hat{c}^* = \frac{s\beta}{n + \delta + g} \tag{2.18}$$

Hagemann (2009: 71) lo define como “*a capital accumulation equilibrium in which investors would be satisfied because there is no underutilization of production capacities (full-capacity growth)*”. Este equilibrio simultáneo relaciona el crecimiento de todas las capacidades y del pleno empleo. Anticipando los resultados del estudio, citamos a Harrod (1939, 30): “*There is no inherent tendency for these two rates to coincide. Indeed, there is no unique warranted rate; the value of warranted rate depends upon the phase of the trade cycle and the level of activity*”.

El análisis resulta muy interesante en el contexto de nuestro estudio, al centrarse en la tasa de crecimiento de capital en unidades eficientes:  $\gamma_{\hat{c}} = \frac{d\hat{c}/dt}{\hat{c}}$ .

$$\gamma_{\hat{c}} = \begin{cases} s\alpha - (n + \delta + g), & \hat{c} \leq \hat{c}^p \\ \frac{s\beta}{\hat{c}} - (n + \delta + g), & \hat{c} > \hat{c}^p \end{cases} \quad (2.19)$$

Franco y Ramírez (2005: 139) señala que esta tasa de crecimiento tiene un valor constante para capitales eficientes que no alcanzan el de plena utilización y subraya el efecto en el mismo de las ratios consideradas: “En general, la tasa de crecimiento del capital eficiente de la economía Harrod-Domar, depende en forma negativa de la tasa de crecimiento de la población, la tasa de depreciación y la tasa de progreso tecnológico, y positivamente de la propensión marginal a ahorrar, el coeficiente técnico del capital y el coeficiente técnico del trabajo efectivo”.

En función de los valores de dichas ratios se identifican tres escenarios de crecimiento (en el análisis recogemos ciertas apreciaciones de Franco y Ramírez, 2005):

(i)  $s\alpha > (n + \delta + g)$

En este caso el sistema económico presenta un transición hacia un estado estacionario estable, en el que la tasa de crecimiento es nula. También es posible comprobar que los agentes continúan ahorrando, a pesar de la existencia de capital ocioso (un hecho incoherente con la práctica económica). Las variables del modelo, expresadas en relación per cápita, crecen según la tasa  $g$ .

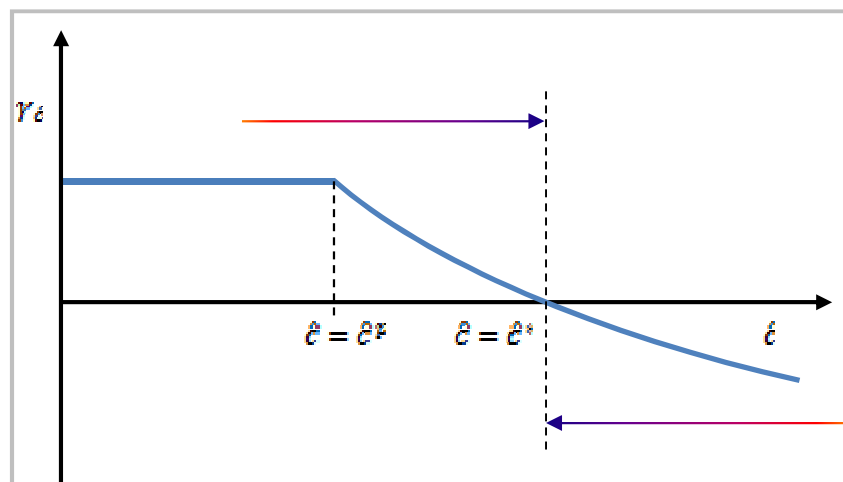


Figura 2.5. Evolución de la tasa de crecimiento en el modelo Harrod-Domar con  $s\alpha > (n + \delta + g)$ .

Fuente: elaboración a partir de Franco y Ramírez (2005)

(ii)  $s\alpha = (n + \delta + g)$

En el segundo supuesto, la evolución final de la economía depende del valor del nivel inicial del capital eficiente. Distinguimos dos situaciones:

- Si  $\hat{c}(0) \leq \hat{c}^p$ , el sistema económico no evolucionará (tasa nula de crecimiento), permaneciendo en el estado de partida. La producción queda limitada por el capital, de modo que no se satisfacen los recursos laborales (situación de desempleo). De nuevo aparece una paradoja: en una situación

como la expuesta no tendría sentido el mantenimiento de la tasa de natalidad, dado que no existen recursos para atender a los descendientes.

- Si  $\hat{c}(0) > \hat{c}^p$ , el sistema experimenta una tasa negativa de crecimiento hasta alcanzar el delicado estado estacionario, en el que hay plena utilización de factores y uso de recursos no ociosos.

El crecimiento per cápita de las variables sigue produciéndose con una tasa  $g$ .

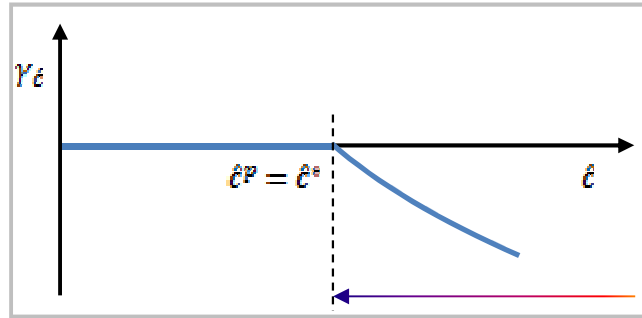


Figura 2.6. Evolución de la tasa de crecimiento en el modelo Harrod-Domar con  $s\alpha = (n + \delta + g)$ .  
Fuente: elaboración a partir de Franco y Ramírez (2005)

(iii)  $s\alpha < (n + \delta + g)$

En el último caso la tasa de crecimiento es siempre negativa. Según Franco y Ramírez (2005: 142) esto “conlleva a una situación en la cual no hay transición dinámica hacia un equilibrio racional, puesto que se genera una situación en la cual la economía converge a su desaparición”. Como se aprecia en la Figura 2.6, el modelo predice una transición hacia una situación en la que, de nuevo, la producción continúa limitada por el capital y en la que el desempleo seguiría un proceso de incremento continuo. La literatura econométrica constata la similitud de este estado con la desolación vivida durante el período de la Gran Depresión estadounidense.

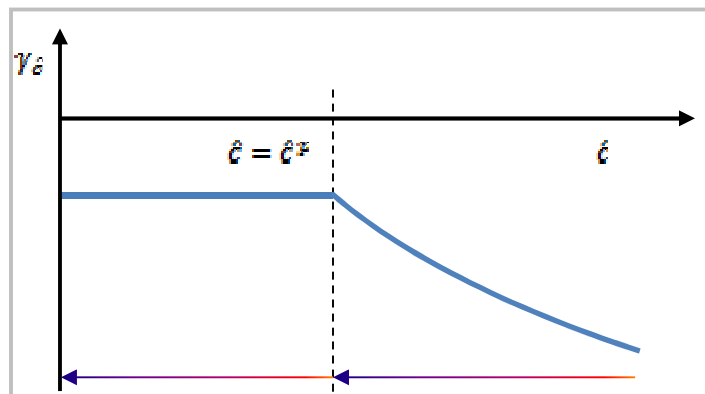


Figura 2.7. Evolución de la tasa de crecimiento en el modelo Harrod-Domar con  $s\alpha < (n + \delta + g)$ .  
Fuente: elaboración a partir de Franco y Ramírez (2005)

Se comprueba que la única situación “en la cual se llega a un equilibrio racionalmente viable desde el punto de vista económico” (Franco y Ramírez, 2005: 142) es la correspondiente a la equivalencia  $s\alpha = (n + \delta + g)$  y nivel de capital inicial superior al capital eficiente. Esto implica una igualdad exacta entre variables exógenas, en una proporción ciertamente ajustada, lo que revela la imposibilidad material de alcanzar dicho estado en una economía real.

## 2.5 Modelo Solow-Swan

La respuesta a los problemas existentes en el modelo Harrod-Domar, especialmente los asociados a su extrema inestabilidad, surge de las propuestas de Solow (1956) y Swan (1956), mediante la revisión de los planteamientos de partida y con la introducción de una función de producción neoclásica, en la que se admite la sustitución entre factores productivos. Solow (1956: 65) reflexiona sobre la trascendencia de los elementos que sustentan cada modelo: “A «crucial» assumption is one on which the conclusions do depend sensitively, and it is important that crucial assumptions be reasonably realistic”. Se aprecian significativas discrepancias entre lo que acontece en los mercados y el comportamiento pronosticado por el modelo Harrod-Domar, en especial a lo referente a la alternancia entre ciclos breves, de intenso desempeño laboral, frente a otros, muy prolongados en el tiempo, de desempleo generalizado. La inestabilidad estructural caracteriza a este prototipo: “even for the long run the economic system is at best balanced on a knife-edge of equilibrium growth” (Solow, 1956: 65).

El asume crucial más débil o “dubious”, en términos del propio Solow (1956: 65), del modelo Harrod-Domar se encuentra en la adopción de coeficientes fijos para la producción, lo que supone que “There is no possibility of substituting labor for capital in production”. En efecto, la función de producción de coeficientes fijos de Leontief, empleada por Harrod (1939) y Domar (1946), recoge que la relación entre el capital y el trabajo es complementaria, por lo que el aumento de uno de estos factores sin que el otro se incremente no repercute en una variación productiva (la elasticidad de sustitución entre los factores productivos es cero).

La relajación de las condiciones de “fixed proportions” transforma de manera radical el nuevo modelo neoclásico, hasta el extremo de que “the knife-edge notion of unstable balance seems to go with it” (Solow, 1956: 65). Hageman (2009: ) señala que esta exposición al filo de la navaja “implied that any deviation from growth equilibrium would cause cumulative processes to move farther away from equilibrium”. El modelo Solow-Swan, al menos en su primera aproximación, mantiene el resto de suposiciones de Harrod-Domar, a excepción de la ya señalada sobre la elasticidad de los factores, requiriendo un estudio específico de la fuerza laboral como elemento exógeno, así como de las implicaciones salariales en el proceso de ajuste.

De acuerdo a la exposición realizada se identifican las ecuaciones en las que se basa el modelo:

- La función de producción, que representa el nivel tecnológico disponible, depende de dos factores, capital (que es acumulable) y labor (no acumulable):  $Y = F(K, L)$ . Por otro lado, la inversión neta coincide con el ratio de ahorro (s continúa siendo una constante):  $\frac{dK}{dt} = sY$ . Igualando las dos expresiones:

$$\frac{dK}{dt} = sF(K, L) \quad (2.20)$$

- Solow (1956) plantea la posibilidad de cerrar el sistema con otras dos ecuaciones, referidas, respectivamente, a la demanda y oferta de trabajo:
  - (i) La productividad física marginal del trabajo es igual al ratio salarial.

(ii) El nivel de salario real se puede equiparar a un nivel convencional de subsistencia.

Al optar por reproducir el esquema de trabajo del modelo Harrod-Domar, se asume, en primer lugar, que se mantiene el pleno empleo:  $L(t) = L_0 e^{nt}$ . En esta ecuación, en ausencia de cambios tecnológicos,  $n$  coincide con el ratio natural de crecimiento de Harrod (Solow, 1956: 67).

Por tanto, podemos concluir:

$$\frac{dK}{dt} = sF(K, L_0 e^{nt}) \quad (2.21)$$

Esta ecuación central del modelo, que permite identificar la evolución en el tiempo del capital acumulado, considera, como se ha indicado, que todo el trabajo disponible se puede emplear. Al desconocer la forma exacta de la función sólo se pueden estudiar las características cualitativas y consistencia de las soluciones encontradas. Eso requiere tener en cuenta las condiciones que debe cumplir una función neoclásica: la principal es que muestre retornos constantes de escala en el producto, o sea, que verifique homogeneidad de primer grado. Con posterioridad a Solow (1956), Inada (1963) establece los tres condicionantes de las funciones neoclásicas:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0; \frac{\partial F}{\partial L} > 0; \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0; \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0; \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} > 0 \quad (2.22)$$

$$F(K, 0) = F(0, L) = 0 \quad (2.23)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty; \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \quad (2.24)$$

Los signos de las derivadas parciales indican que el Hessiano es definido negativo, por lo que las funciones son cóncavas. También se constata que no hay posibilidad de producir si no se dispone de cantidades de ambos factores. Novales et al (2009) señala que el aspecto más restrictivo de las condiciones expuestas radica en la existencia de retornos decrecientes de escala en cada uno de los factores.

La consideración de los retornos constantes de escala en la función de producción agregada permite simplificar el análisis del comportamiento de la función de producción. Para ello se introduce en el desarrollo el capital por unidad de labor efectiva,  $k$ , una variable central en el análisis de esta economía, que representa la relación entre el capital y la labor:  $k = \frac{K}{L}$ . Por tanto,  $K = kL = kL_0 e^{nt}$ . Al diferenciar y sustituir en (2.20) se obtiene “*the fundamental equation of neoclassical economic growth*” (Hageman, 2009:79):

$$\frac{dk}{dt} = sF(k, 1) - nk$$

Esta ecuación diferencial se expresa únicamente en términos de la ratio capital-labor. Solow (1956) interpreta la función  $F(k, 1)$  como el resultado total de la curva de producción cuando,

tomando una cantidad  $k$  de capital se emplea 1 unidad de labor. La ecuación en sí indica que la variación de la ratio capital-labor consta de dos términos, el primero referido al incremento de capital y el segundo al de labor.

En la figura nº 8 se representan estos dos términos, considerando las características genéricas de la función de producción. El punto de intersección,  $k^*$ , corresponde al cumplimiento de las igualdades:  $sF(k, 1) = nk$ ;  $\frac{dk}{dt} = 0$ .

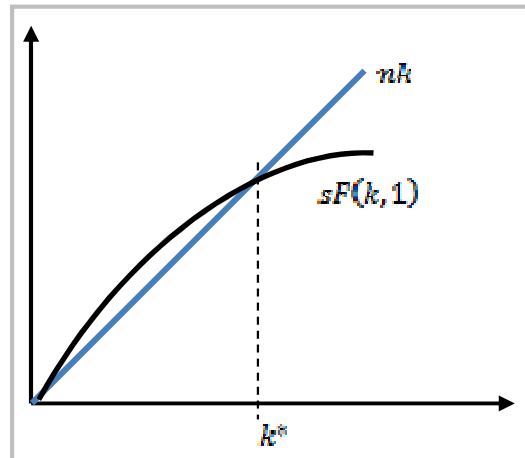


Figura 2.8. Representación de los dos términos de la ecuación fundamental del crecimiento económico neoclásico en una situación de equilibrio estable.

Fuente: Solow (1956: 70)

Resulta sencillo comprobar que este auténtico punto de equilibrio corresponde a una configuración estable:

- Una vez alcanzado, el capital y la labor crecerán a partir de entonces en proporción, de modo que la producción también se incrementará a una tasa  $n$ , manteniéndose constante el output per cápita de fuerza laboral.
- Si el sistema se encontrase en un estado  $k < k^*$ , se observa en la gráfica que  $sF(k, 1) > nk$ , por lo que  $\frac{dk}{dt} > 0$ . Por tanto, la variable crecerá hacia el punto de equilibrio. En este caso, el capital y el output experimentarán un crecimiento a mayor ritmo que el de la fuerza laboral, hasta alcanzar el punto  $k^*$ , donde las variaciones se mantienen indefinidamente parejas.
- En el caso  $k > k^*$  sucede todo lo contrario:  $\frac{dk}{dt} < 0$ , por lo que la variable decrece hacia el punto de equilibrio. La fuerza laboral crece con mayor velocidad que la del capital y producción.

A priori, si en el modelo no se impusieran condicionantes a la función de producción, serían posibles otras configuraciones, en las que la estabilidad no se mostrase tan robusta. Por ejemplo, en la figura nº 9 los puntos  $r_1$  y  $r_3$  son estables, mientras que  $r_2$  resulta inestable. El sistema puede alcanzar uno de los dos estados de equilibrio en función del intervalo de partida.

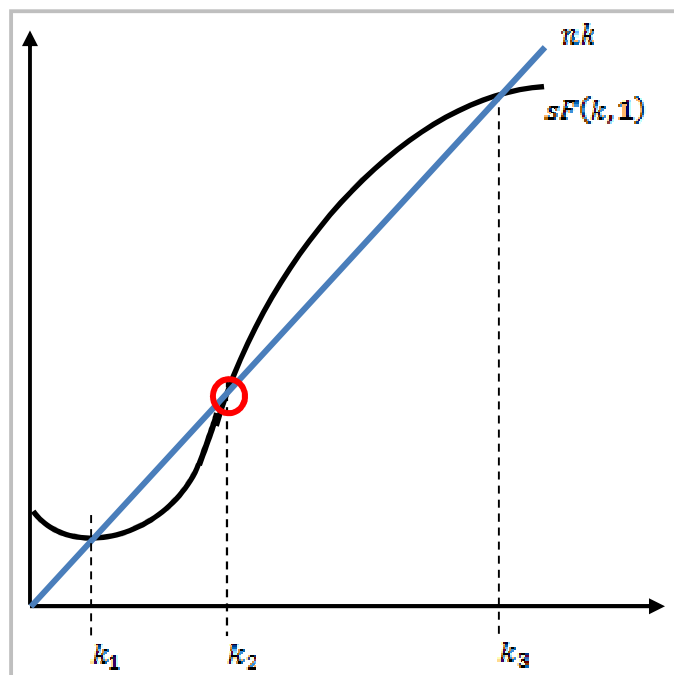


Figura 2.9. Representación de los dos términos de la ecuación fundamental del crecimiento económico neoclásico en una situación con un punto de equilibrio inestable.  
Fuente: Solow (1956: 71)

Solow (1956) advierte de la incongruencia de la curva representada, dado que representa, en la ordenada del origen, una cantidad de producción sin existencia de capital.

También es posible imaginar funciones en las que se cumpla la disminución de la productividad marginal y, sin embargo, se descarte el equilibrio porque la recta  $nk$  no llegue a intersectar con la curva.

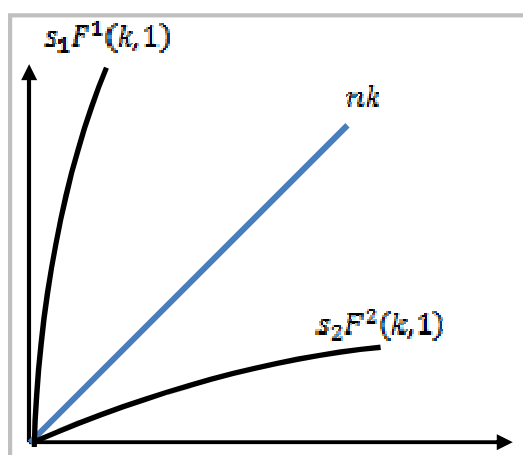


Figura 2.10. . Representación de los dos términos de la ecuación fundamental del crecimiento económico neoclásico en una situación sin puntos de equilibrio.  
Fuente: Solow (1956: 72)

El primer sistema representado es altamente productivo, con valores en extremo elevados de la ratio  $k$  y del output . Solow (1956) plantea, a modo de ejemplo,  $s_1F^1(k, 1) = nk + \sqrt{k}$ . En la segunda curva se muestra un sistema muy improductivo, en el que la situación de pleno

empleo afecta de manera severa a los ingresos per cápita. Una función con estas características sería, según Solow (1956),  $s_2 F^2(k, 1) = \frac{nk}{k+1}$ . En la siguiente tabla se recogen los resultados más significativos del estudio realizado por Solow (1956) sobre tres formulaciones diferentes de la forma de la función de producción agregada, que permiten obtener en cada caso una solución directa de la ecuación diferencial que gobierna el modelo:

Coeficientes fijos para la producción (modelo de Harrod-Domar)	
<p><math>Y = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right)</math></p> <p>El factor cuello de botella limita el output obtenido.</p> <p>Pauta de crecimiento:</p> $\frac{dk}{dt} = s \cdot \min\left(\frac{k}{a}, \frac{1}{b}\right) - nk$ <p>Si <math>\frac{k}{a} &lt; \frac{1}{b} \rightarrow \frac{dk}{dt} = \left(\frac{s}{a} - n\right)k</math></p> <p>Si <math>\frac{k}{a} \geq \frac{1}{b} \rightarrow \frac{dk}{dt} = \frac{s}{b} - nk</math></p>	
Función Cobb-Douglas	
<p><math>Y = K^\alpha L^{1-\alpha}</math></p> <p>Pauta de crecimiento:</p> $\frac{dk}{dt} = sk^\alpha nk$ <p>Acudiendo directamente a las variables sin transformar:</p> $\frac{dK}{dt} = sK^\alpha (L_0 e^{nt})^{1-\alpha}$ <p>Integrando:</p> $K(t) = \left[ K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{1}{b}}$ <p><math>K_0</math> es el stock inicial de capital; <math>b = 1 - \alpha</math></p>	
Función de producción con retornos constantes de escala (la diferencia más significativa con la función Cobb-Douglas es que resulta posible obtener output con un solo factor)	
<p>Formulación genérica: <math>Y = (aK^p + L^p)^{\frac{1}{p}}</math></p> <p>En el análisis específico se considera <math>p = \frac{1}{2}</math>:</p> $Y = (a\sqrt{K} + \sqrt{L})^2$ <p>Pauta de crecimiento:</p> $\frac{dk}{dt} = s(A\sqrt{k} + 1)(B\sqrt{k} + 1)$ <p><math>A = a - \sqrt{\frac{n}{s}}</math>; <math>B = a + \sqrt{\frac{n}{s}}</math></p> <p>Si <math>sa^2 &gt; n</math>, no hay equilibrio.</p> <p>Si <math>sa^2 &lt; n</math>, se produce equilibrio estable.</p>	

Tabla 2.1. Ejemplos de formas de función de producción agregada y soluciones asociadas en el modelo de Solow.

Fuente: Solow (1956).



El análisis de la evolución de las sendas temporales de la relación entre capital y labor conduce a un concepto de destacada importancia en una economía de crecimiento exógeno y en el objeto de nuestro estudio: el *steady-state* o estado estacionario. Novales et al (2009: 65) lo define como “*a vector of values for the rates of growth of the main variables (physical capital, output and consumption) in units of effective labor, that is ever reached, it can be maintained constant forever*”. En una aproximación inmediata, el *steady-state* se refiere a una situación de equilibrio en el largo plazo.

Para profundizar en las implicaciones de esta noción se requiere, al igual que en el estudio del modelo Harrod-Domar, identificar la ratio de crecimiento del capital. Novales et al (2009) generaliza la ecuación fundamental al considerar los siguientes supuestos (la mayoría ya incorporados en los patrones estudiados hasta el momento):

- Se considera una economía cerrada, sin gobierno, de modo que los ahorros e inversiones coinciden en cada período.
- Las empresas emplean capital físico y labor para obtener productos que pueden, a su vez, ser consumidos o almacenados como nuevo capital.
- No existen intercambios con el exterior ni hay consumo público: por tanto, el output solo puede emplearse en el consumo o como inversión.
- El capital físico se deprecia con una tasa constante  $\delta$ .
- La población crece de manera exponencial con una tasa  $n$ .
- Los precios y salarios son completamente flexibles, por lo que la economía siempre se encuentra en un estado de pleno empleo. De este modo, la fuerza laboral y la población coinciden en cada momento.
- Los ahorros agregados constituyen una proporción constante de la renta de cada período, determinada por la ratio  $s$ . Novales et al (2009) destaca que esto no debe ser considerado, a priori, un comportamiento optimizado. De hecho, tanto en el modelo Harrod-Domar como en Solow-Swan las decisiones incorporadas no se basan en criterios de optimalidad como sí sucede, por ejemplo, en Ramsey (1928) y posteriores modificaciones.
- Finalmente, se admite el crecimiento tecnológico exógeno, en forma de un factor de productividad  $\Gamma$ , que crece con un ratio constante  $\gamma$ .

En este contexto el cambio de variable recomendado es  $r = \frac{K}{\Gamma L}$ , que se identifica como el stock de capital por unidad de labor efectiva. Para simplificar la notación tomamos  $f(r) = F(\frac{K}{\Gamma L}, 1)$ . Considerando las relaciones expuestas entre inversión y ahorro, así como la homogeneidad en grado uno de la función  $F$ , se obtiene la generalización de (2.20) o ley de movimiento de la economía:

$$\frac{dr}{dt} = sf(r) - (n + \delta + \gamma)r \quad (2.25)$$

Esta ecuación revela que el stock de capital por unidad de labor efectiva se incrementa en los períodos en los que los ahorros per cápita superan a la depreciación total del capital.

El ratio de crecimiento del capital se obtiene como:

$$\gamma_r = \frac{dr/dt}{r} = s \frac{f(r)}{r} - (n + \delta + \gamma) \quad (2.26)$$

En el estado de equilibrio  $\gamma_r$  tiene que ser constante, lo que implica, en definitiva, que  $\frac{dr}{dt}$  se anula: o sea, el stock de capital por unidad de labor efectiva permanece sin cambios en el *steady-state*.

Novales et al (2009) relaciona las siguientes pautas de evolución:

- El stock de capital productivo por trabajador crece en el estado de equilibrio con un ratio  $\gamma$ .
- El capital y el output crecen al mismo ritmo: a razón cero cuando se expresan en unidades de labor efectiva, con la tasa  $\gamma$  cuando se referencian en unidades per cápita, y con el ratio  $n + \gamma$  en términos agregados.
- El consumo es proporcional a la renta, por lo que permanece constante en unidades de labor efectiva y crece a ritmo  $\gamma$  en términos per cápita.
- Dado que el estado de equilibrio se caracteriza por  $\frac{dr}{dt} = 0$ , se verifica que los niveles de estado de equilibrio de  $r$  ( $r_{ss}$ ) cumplen:  $sf(r_{ss}) - (n + \delta + \gamma)r_{ss} = 0$

La función de producción agregada asumida determina de manera notable las propiedades de la solución de esta ecuación, en términos de existencia, presencia de más de una raíz, influencia de parámetros estructurales, etc. En el caso de una tecnología de producción Cobb-Douglas, con  $Y = AK^\alpha(\Gamma L)^{1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , el estado de equilibrio queda caracterizado por:

$$sAr_{ss}^\alpha = (n + \delta + \gamma)r_{ss} \quad (2.27)$$

El valor del stock de capital por unidad de labor efectiva en el *steady-state* se obtiene, por tanto, como:

$$r_{ss} = \left( \frac{sA}{n + \delta + \gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2.28)$$

Esta cantidad será mayor si se incrementa el ratio de ahorro y/o la elasticidad del capital físico en la función de producción o, por el contrario, disminuye el de crecimiento de la población, el correspondiente a la depreciación del capital físico o la tasa de crecimiento de la productividad. Novales et al. (2009) profundiza en las causas que subyacen en la relación matemática del aumento de esta razón:

- La disposición de mayores ratios de ahorro permite acumular y disponer de más capital físico.
- Una mayor elasticidad del capital físico crea mayor incentivo para su acumulación.
- Una menor población implica menor necesidad de recursos de capital para los consumidores recién nacidos, que no hay que sustraer de los ya existentes.

- La reducción en el ratio de depreciación supone detraer menos recursos acumulados.

Un aspecto que parece paradójico en un primer análisis es que la dependencia de los niveles de los estados de equilibrio respecto al crecimiento tecnológico resulta negativa: eso es debido a que se trabaja con variables en términos de unidades eficientes de labor.

Resulta interesante considerar la dependencia entre el nivel del estado de equilibrio y el valor del ratio de ahorro. A medida que esta constante aumenta, la curva  $sf(r)$  adquiere una forma más esbelta, de modo que el punto de intersección con la recta  $(n + \delta + \gamma)r$  se traslada hacia la derecha. Esto conlleva un incremento de la renta, inversión y consumo. La evolución referida se aprecia en la siguiente figura:

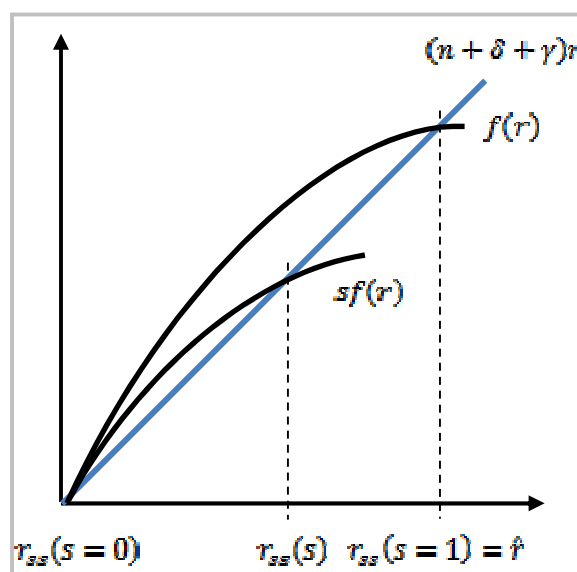


Figura 2.11. Relación entre los estados de equilibrio y el ratio de ahorro en el modelo de Solow.

Fuente: Novales et al. (2009: 67).

Este desplazamiento tiene un límite, dado que no es posible superar  $s = 1$ . En ese momento la curva  $sf(r)$  coincide con  $f(r)$  y la intersección alcanzada recibe el nombre de *estado de equilibrio de subsistencia*,  $\hat{r}$ , en el que se verifica:  $f(\hat{r}) = (n + \delta + \gamma)\hat{r}$ . En este punto se ha almacenado tanto capital físico que todos los recursos se destinan a reponer lo que se ha depreciado y en proporcionar a los nuevos trabajadores la misma cantidad que la que disponen los antiguos (según la hipótesis de pleno empleo). Por tanto no habría recursos disponibles para el consumo.

En la Figura 2.11 también se aprecia que para todo valor de  $s \in [0,1]$  existe un nivel de estado de equilibrio del capital por unidad de labor entre 0 y  $\hat{r}$ . No es posible plantear una situación con  $r_{ss} > \hat{r}$ , "since they would imply negative consumption" (Novales et al., 2009: 67).

Una economía que parte con un valor inicial  $r_0$  evoluciona hacia su estado de equilibrio con una tasa de crecimiento según (2.26). La tasa de cambio no es, por tanto, constante. Distinguiamos dos términos en dicho ratio:

- El primero,  $\frac{sf(r)}{r}$ , es una función decreciente, con límite infinito para  $r = 0$ , y que tiende a cero con  $r \rightarrow \infty$ .
- El segundo término representa una constante:  $n + \delta + \gamma$ .

El punto  $r_{ss}$ , en el que se igualan ambos miembros, verifica que  $\gamma_r = 0$ , por lo que se trata del *steady-state* de la economía. Como se aprecia en la siguiente figura,  $\gamma_r > 0$  para valores del capital por unidad de labor efectiva inferiores al estado de equilibrio y, por otro lado,  $\gamma_r < 0$ , para  $r$  superior a dicho estado. Por tanto, la *convergencia* es monótona hacia el *steady-state*, que representa un punto de estabilidad global.

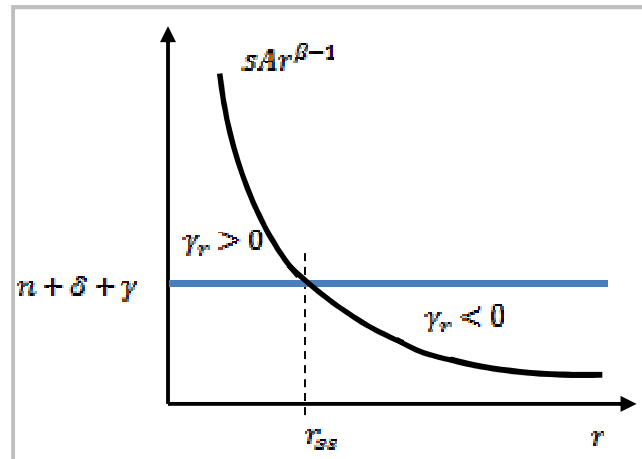


Figura 2.12. Condiciones del estado de equilibrio en una economía Cobb-Douglas.  
Fuente: Novales et al (2009: 68).

Derivando la expresión del ratio de crecimiento en relación a  $r$  se obtiene:

$$\frac{\partial \gamma_r}{\partial r} = s \frac{rf'(r) - f(r)}{r^2} \quad (2.29)$$

El numerador es el opuesto del producto marginal de la labor: por tanto,  $\frac{\partial \gamma_r}{\partial r} < 0$ .

Novales et al (2009) analiza la duración del proceso de transición hacia el estado de equilibrio, planteando el interés de analizar  $\frac{dr}{dt}$  en vez del ratio de crecimiento. El término diferencial se aproxima de manera lineal:

$$\frac{dr}{dt} \cong -(1 - \alpha_k(r_{ss}))(\delta + n + \gamma)(r - r_{ss}) \quad (2.30)$$

El término  $\alpha_k(r) = \frac{rf'(r)}{f(r)}$ . El numerador es menor que el denominador, por lo que  $\alpha_k(r) \in (0,1)$ . De (2.30) se observa que la variación de  $r$  depende negativamente de la distancia al *steady-state*. Se alcanza así una de las conclusiones más significativas del modelo neoclásico: el stock de capital por unidad de labor efectiva cambia de manera más rápida al principio, reduciéndose esta velocidad de modificación, de manera gradual, a medida que la economía se aproxima al equilibrio.

La solución analítica de (2.30) es:

$$r - r_{ss} = e^{-(1-\alpha_k(r_{ss}))(\delta+n+\gamma)}(r_0 - r_{ss}) = e^{-\mu t}(r_0 - r_{ss})$$

En este caso  $\mu = (1 - \alpha_k(r_{ss}))(\delta + n + \gamma)$ .

El modelo Solow-Swan se caracteriza por la estabilidad global, de modo que las economías se encuentran en el estado de equilibrio o en un proceso de convergencia hacia el mismo. En este segundo caso el ratio de evolución del output es:

$$\gamma_y = \frac{dy/dt}{y} = \alpha_k(r)\gamma_r \quad (2.31)$$

En la tecnología Cobb-Douglas,  $\alpha_k(r) = \alpha$ , constante, por lo que el comportamiento en el crecimiento del output es similar al del capital: en ambos casos estas magnitudes decrecen a medida que la economía se aproxima al equilibrio. Novales et al (2009) analiza el signo de las derivadas parciales de estos ratios e identifica las siguientes pautas:

- Si la economía parte de un capital inferior a  $r_{ss}$ , tanto  $r$  como  $y$  aumentarán, pero la tasa de crecimiento de la renta por unidad de labor efectiva y la del capital disminuirán a medida que se aproxime al steady-state.
- Por el contrario, si la economía se inicia con un capital superior a  $r_{ss}$ ,  $r$  e  $y$  disminuirán pero, curiosamente, no es posible hacer una afirmación sobre el comportamiento de  $\gamma_y$ . Una vez suficientemente cerca del estado de equilibrio,  $\gamma_y$  aumentará, mientras que el stock de capital decrece hacia  $r_{ss}$ . En realidad, en el caso de  $\gamma_y$  se trata de una tasa negativa de crecimiento: para un valor relativamente alto de  $r$ , la depreciación es muy alta y ni el ahorro ni las inversiones pueden reemplazar este deterioro e impedir, por tanto, el descenso del capital y del output.

En la sección 3.3.1 del estudio, dedicada a las medidas de convergencia, se retoman estos últimos resultados, que nos permitirán caracterizar conceptos como convergencia absoluta o condicional.

Una limitación del modelo analizado es que identifica  $K$  únicamente como capital físico, lo que provoca diferencias significativas en la comparación con datos empíricos. Sala-i-Martin (1994) señala que la participación del capital en este modelo neoclásico se estima en torno al 0.75, mientras que los resultados experimentales muestran un valor en torno al 0.3. Este autor cita a Mankiw et al (1992) y su contribución al modelo de Solow ampliado, en el que se incluyen tres factores de producción: por una parte el capital físico ( $K$ ) y, por otro, diferenciando sus características, el capital humano ( $H$ ) y el trabajo ( $L$ ). En el caso de una economía Cobb-Douglas:

$$Y = BK^\lambda H^\alpha L^{1-\lambda-\alpha} \quad (2.32)$$

Las variables relativas al capital, tanto físico como humano, se pueden acumular, con tasas de depreciación  $\delta_K$  y  $\delta_H$ . Suponiendo idénticos el producto marginal de los dos capitales, resulta

relativamente sencillo transformar este modelo en el clásico de Solow-Swan, de modo que  $Y = AK^\beta L^{1-\beta}$ , con  $A = B\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^\alpha$  y  $\beta = \lambda + \alpha$ . Este proceso permite determinar la velocidad de convergencia de la economía:  $(1 - \lambda - \alpha)(\delta + n)$ . Resulta posible comprobar que la introducción de capital no físico proporciona resultados estimados de velocidad de convergencia más acordes con los obtenidos en los estudios empíricos.

Por otra parte, Durlauf et al. (2001) amplía el enfoque del modelo Solow-Swan para tener en cuenta el efecto de la heterogeneidad específica de las naciones (cuestión que se analizará en profundidad en el capítulo 3 y 4). En coincidencia con otros estudios, como el ya citado de Mankiw et al. (1992), se valora el enorme potencial de dicho modelo para explicar resultados empíricos. Durlauf et al. (2001) destaca, en este sentido, dos aspectos: (i) el significado estadístico y los signos de los resultados experimentales coinciden con lo predicho teóricamente; (ii) dentro del margen asociado a la bondad de las medidas, el modelo Solow-Swan ofrece sustento a un 40% de las variaciones en ratios de crecimiento entre los países. Por todo ello, constituye un patrón sólido para desarrollar nuevos estudios: lo recomendable es incorporar constancias empíricas al modelo básico, a fin de mejorar la capacidad predictiva.

La modificación asociada a la heterogeneidad exige relajar una hipótesis central en la mayoría de estudios sobre el crecimiento: la uniformidad entre países de las funciones de producción agregada. Durlauf et al. (2001) subraya que Solow (1956) no considera las hipótesis de su modelo como propiedades universales, lo que contrasta con la orientación generalizada de los estudios sobre procesos de crecimiento a través de los países, en los que se asume una función idéntica de producción agregada (en general, de Cobb-Douglas). Las nuevas teorías sugieren la consideración de la heterogeneidad de parámetros. El modelo local generalizado considera un comportamiento según el modelo Solow-Swan en cada país, pero permitiendo una variación de sus variables concretas entre las naciones bajo estudio. Esta variación se establece en función de las rentas iniciales. Se trata de un enfoque que incorpora planteamientos muy similares a los de las nuevas teorías de crecimiento, en su esfuerzo por explicar las diferencias persistentes en el desarrollo entre países y detectadas en la revisión de los ratios de crecimiento. Azariadis y Drazen (1990: 503) sugiere explorar *“the alternative possibility that sustainable differences in per capita growth rates could appear even among economies with identical structures”*; en su estudio se demuestra la importancia de las condiciones iniciales (por ejemplo, de las medias en los niveles de capital humano) respecto a las bifurcaciones de pautas de crecimiento. Durlauf et al. (2001) encuentra que estas condiciones iniciales producen comportamientos que, cerca del *steady-state*, resultan similares a las planteadas con el modelo Solow-Swan. Debido a la relevancia de los condicionantes espaciales, concluiremos esta revisión en el apartado correspondiente del capítulo 4.

## 2.6 Modelo Cass-Koopmans-Ramsey

Una característica fundamental del modelo Solow-Swan reside en que el ratio de ahorro es exógeno y constante (lo cual supone el mismo tratamiento respecto al ratio de consumo). Éste y otros patrones con ratios de ahorro exógenos no consideran el impacto de los incentivos y penalizaciones en el comportamiento de la economía. Por el contrario, en el planteamiento inicial de Ramsey (1928), estudiado en la sección 2.3, se consideraba el caso de los individuos (o familias) que valoran y optimizan su consumo y ahorro en función de la utilidad, tanto

particular como de sus descendientes. Con posterioridad a los trabajos seminales de Solow (1956) y Swan (1956), Cass (1965) y Koopmans (1965) reelaboran el problema del ahorro óptimo, alcanzando, como señala Barro y Sala-i-Martin (2004), resultados muy significativos:

- Los estudios indican que el ratio de ahorro es una función del stock de capital per cápita, que evoluciona en base al crecimiento o disminución de la economía y que depende de ratios como el de interés o de tasas y subsidios.
- El valor medio del ratio de ahorro resulta fundamental para determinar los niveles de variables en el estado de equilibrio. La aplicación de condiciones para alcanzar el óptimo impide que se produzcan situaciones de sobre-ahorro como en ciertos resultados del modelo Solow-Swan.
- La relación entre la tasa de ahorro y el desarrollo económico repercute en la dinámica de las transiciones hacia el estado de equilibrio: de manera relevante afecta a la velocidad de convergencia. Se demuestra que si el ahorro aumenta en función del capital, la velocidad de convergencia es menor en el modelo Cass-Koopmans-Ramsey. De manera similar al modelo Solow-Swan, el crecimiento de las variables per cápita resulta más rápido a mayor distancia de la posición de equilibrio.
- Finalmente, es posible considerar el modelo Solow-Swan como un caso particular de Cass-Koopmans-Ramsey, de ahí que merezca la pena partir del primero para proceder, seguidamente, a la aplicación de los criterios de optimización.

Cass (1965) establece las premisas básicas en las que se desarrolla el estudio, similares a las consideradas en los patrones precedentes:

- Se emplean dos factores homogéneos, bienes de capital ( $K$ ) y labor ( $L$ ), para obtener una salida homogénea ( $Y$ ), donde todas las variables son temporal-dependientes. Esta producción se consigue a través de una planificación centralizada, que tiene en cuenta las posibilidades de actuación técnicamente eficientes. La función de producción muestra retornos constantes de escala, productividades marginales positivas y un ratio marginal decreciente de sustitución. En nuestro estudio empleamos la variable  $r = K/L$  representando el stock de capital por unidad de labor efectiva.
- La fuerza laboral y la población crecen de manera exógena con un ratio positivo  $n$ . La autoridad emanante de la planificación central y las características de la función de producción garantizan el mantenimiento de las condiciones de pleno empleo.
- El output generado constituye la única vía de entrada de nuevos bienes: puede ser consumido inmediatamente o pasar a formar parte del stock de capital, donde se deprecia con un ratio positivo  $\delta$ .
- En el instante cero es posible planificar cualquier senda de crecimiento que satisfaga las condiciones iniciales (capital – labor), siempre que verifique: (i) las condiciones de la función de productividad agregada; (ii) la relación de igualdad entre el consumo actual per cápita,  $c(t)$ , más la inversión actual bruta per cápita,  $z(t)$ , por un lado, y la producción,  $y(t)$ , por otro ; y (iii) la ley de movimiento de la economía, (2.20). Lo deseable, en cualquier caso, será seleccionar la senda óptima factible respecto al criterio de maximizar el bienestar social.

Cass (1965) identifica este concepto de bienestar social como la habilidad de la economía para proporcionar bienes de consumo a lo largo del tiempo. Koopmans (1965: 226) analiza el concepto de criterio de optimización, destacando que “*the most basic notion is that of a preference ordering of growth paths*”. En ambos casos se destaca la idoneidad de emplear una función continua de preferencia o un índice de utilidad, cuya formulación genérica sería:  $U = \sum_{t=1}^{\infty} x^{t-1} u(x_t)$ . Koopmans interpreta esta expresión como una suma discontinua de futuras utilidades asociadas a períodos unitarios ( $t = 1, 2, \dots$ ) con un factor  $x$  de descuento en cada período.

Cass (1965) cuantifica el bienestar en cualquier instante temporal como un índice de utilidad del consumo actual per cápita,  $U(c(t))$ , ponderado por la población actual en el momento,  $L(t) = e^{nt}$  (se normaliza el número de individuos adultos en el instante inicial a 1). Este índice verifica que su derivada primera es positiva y su derivada segunda negativa para  $c > 0$ . Además,  $\lim_{c \rightarrow 0} U'(c) = \infty$ ; esto garantiza que no se producirá un consumo per cápita excesivamente bajo o, bajo otra perspectiva, que una senda óptima no especificará en ningún momento un nivel nulo de consumo per cápita.

El índice de utilidad no varía en el tiempo. Sin embargo, como se destacó en el análisis del modelo inicial de Ramsey, el bienestar asociado a un consumo en el momento actual no es el mismo que el postergado a un período posterior. Por ese motivo, la planificación tiene en cuenta que las obligaciones en el presente o respecto a generaciones cercanas en el tiempo son mucho más fuertes que las asociadas a descendientes muy alejados. Cass (1965) incorpora el descuento asociado al bienestar futuro introduciendo un ratio positivo,  $\rho$ , mayor que la tasa de crecimiento de la fuerza laboral,  $n$ . En el modelo inicial de Ramsey se imponía  $\rho = 0$ , al no resultar defensible, desde un punto de vista ético, descontar utilidades de futuras generaciones.

Siguiendo a Barro y Sala-i-Martin (2004), la utilidad total que cada familia desea maximizar se expresa del siguiente modo:

$$U = \int_0^{\infty} u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt \quad (2.33)$$

La función  $u(c)$  relaciona el flujo de utilidad por persona con la cantidad consumida per cápita. El modelo asume los siguientes supuestos respecto a este término:

- La función  $u(c)$  de nuevo es incremental en  $c$  ( $u'(c) > 0$ ) y cóncava ( $u''(c) < 0$ ). El supuesto de concavidad suaviza el comportamiento del consumo en el tiempo, lo que coincide con una apreciación empírica: las familias prefieren un patrón temporal uniforme frente a comportamientos con picos elevados en unos períodos y muy reducidos en otros. También se asume que la función verifica las condiciones de Inada (1963): (2.22) a (2.24).
- El producto  $u(c) \cdot L(t) = u(c) \cdot e^{nt}$  representa la extensión de las utilidades a todos los miembros familiares vivos en el instante  $t$ .
- La siguiente multiplicación, por el término  $e^{-\rho t}$ , supone la inclusión de la preferencia temporal (como se ha indicado, las utilidades son menos valoradas cuanto más tarde



se perciben). La condición  $\rho > n$ , citada con anterioridad, considera el efecto de la disminución de la utilidad marginal de los padres respecto al número de hijos.

La optimización de la utilidad total se encuentra sujeta a una restricción en el presupuesto familiar:  $\frac{da}{dt} = w + ia - c - na$ . El término  $a(t)$  representa los recursos netos familiares por persona, expresados en términos reales. Pueden referirse a derechos de posesión de capital o a préstamos (los importes negativos corresponden a deudas). Las dos formas de recursos son sustitutivas perfectas y pagan la misma tasa,  $i(t)$ , que es un valor dado. El ratio salarial corresponde a  $w(t)$ , expresado en unidades de servicios laborales.

Barro y Sala-i-Martin (2004) introduce una restricción del mercado sobre el importe total de préstamos, de modo que el valor actual de los recursos debe ser asintóticamente no negativo:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ a(t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t [r(v) - n] dv \right] \right\} \geq 0$ . Esto significa que en el largo plazo la deuda familiar por persona no puede crecer a mayor velocidad que  $r(t) - n$ .

El problema de optimización requiere, por tanto, maximizar (2.33), sujeto a las dos limitaciones señaladas. Barro y Sala-i-Martin (2004) señala que la condición de consumo,  $c(t) \geq 0$  también resulta de aplicación, aunque no se activa durante el proceso de resolución.

El procedimiento matemático de obtención del óptimo implica el cálculo del Hamiltoniano de (2.33) y su posterior derivación respecto a  $c$ . Se alcanzan las siguientes condiciones de primer orden:

- El consumo se maximiza, a igualdad del resto de variables, en cada período de tiempo.
- El stock de capital se acumula de manera eficiente, según las expresiones obtenidas al derivar la función Hamiltoniana respecto al consumo y a los recursos:  $v = u'(c)e^{-(\rho-n)t}$  y  $\frac{dv}{dt} = -(r - n)v$ . Esta variable,  $v(t)$ , o precio sombra, representa el valor de un incremento de la renta recibida en el instante  $t$  en unidades de utilidades del instante cero.
- También debe cumplirse la condición de transversalidad, que garantiza a los agentes de optimización que los recursos no tendrán valor al final del horizonte de planificación:  $\lim_{t \rightarrow \infty} [v(t) \cdot a(t)] = 0$ .

La comparación de los términos  $v(t)$  y  $\frac{dv}{dt}$  permite deducir la ecuación de Euler, que representa la condición básica para elegir el consumo a lo largo del tiempo:  $i = \rho - \left[ \frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} \right] \cdot \frac{dc}{dt}$ . Esto significa que las familias eligen un consumo que permite igualar la tasa  $i$  de retorno con la tasa  $\rho$  de preferencia temporal más el ratio de decrecimiento de la utilidad marginal de consumo,  $u'$ , asociado al crecimiento del consumo per cápita,  $c$ .

El análisis de la convergencia de la economía requiere identificar el estado de equilibrio en el que  $r$  y  $\frac{dc}{dt}$  son constantes: esto supone que la elasticidad de la utilidad marginal,  $\left[ \frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} \right]$ , debe ser constante asintóticamente. Resulta habitual asumir la siguiente formulación, que recibe el nombre de función de utilidad CIES (*constant intertemporal elasticity of substitution*):

$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}$ , con  $\theta > 0$ . A mayor valor de  $\theta$  se incrementa la aversión al riesgo de las familias y en menor medida están dispuestas a aceptar desviaciones de patrones uniformes de consumo y ahorro. Con  $\theta \rightarrow 0$ , la función de utilidad se aproxima a la forma lineal  $u(c) = c - 1$ , lo que significa mayor indiferencia respecto al momento de consumir.

Simplificando las expresiones anteriores, se obtiene:

$$\frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta}(i - \rho) \quad (2.34)$$

Por tanto, “the relation between  $i$  and  $\rho$  determines whether households choose a pattern of per capita consumption that rises over time, stays constant, or falls over time” (Barro y Sala-i-Martin, 2004: 91). Valores elevados de  $\theta$  suponen un menor grado de reacción de la variación  $\frac{dc/dt}{c}$  respecto a la diferencia entre  $i$  y  $\rho$ .

El modelo que se está analizando considera una economía descentralizada, en la que existen familias y empresas competitivas. Una vez estudiado el comportamiento de los consumidores, las consideraciones se centran en las sociedades que, como señala Barro y Sala-i-Martin (2004), producen los bienes, pagan los salarios y realizan pagos de renta sobre los capitales dispuestos. La función de producción tecnológica se expresa como  $Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)]$ , donde la nueva variable,  $A(t)$ , representa el nivel de tecnología, creciente en el tiempo con un ratio  $x$ . Lo habitual es expresar  $A(t) = e^{xt}$ , normalizando el nivel inicial de tecnología a uno. Tal y como se considera en secciones anteriores,  $Y(t)$  muestra retornos constantes de escala y cada input tiene productos marginales positivos y decrecientes. La formulación  $Y(t) = F[K(t), L(t) \cdot A(t)]$ , que es un modelo con “Labor-Augmenting Technological Progress”, garantiza que existe un estado de equilibrio en un contexto de progreso tecnológico (Barro y Sala-i-Martin, 2004: 54-55). Se plantea un cambio de variables:  $\hat{L} \equiv L(t) \cdot A(t)$ . De este modo los elementos del modelo se establecen en cantidades por unidad de labor efectiva:  $\hat{y} \equiv \frac{Y}{\hat{L}}$ ;  $\hat{r} \equiv \frac{K}{\hat{L}}$ . Por tanto la función de producción se reescribe como  $\hat{y} = f(\hat{r})$ .

El problema de optimización de las empresas en este contexto se centra en maximizar el beneficio de cada período sin considerar los resultados de otros. El beneficio se expresa, según Barro y Sala-i-Martin (2004) como:  $\pi = \hat{L} \cdot [f(\hat{r}) - (i + \delta) \cdot \hat{r} - w e^{-xt}]$ . Si los términos  $i$ ,  $w$  y  $\hat{L}$  están fijados, la expresión que optimiza el beneficio es  $f'(r) = i + \delta$ . En un mercado en completo equilibrio  $w = [f(\hat{r}) - \hat{r} \cdot f'(\hat{r})]e^{xt}$ .

La interacción entre los comportamientos de las familias y las empresas competitivas permite determinar la estructura de este mercado. Las ecuaciones que gobiernan el sistema y que se concretan en las pautas temporales de  $\hat{r}$  y  $\hat{c} \equiv \frac{c}{L} = c e^{-xt}$ , son:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = f(\hat{r}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{r} \quad (2.35)$$

$$\frac{d\hat{c}/dt}{\hat{c}} = \frac{dc/dt}{c} - x = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\hat{r}) - \delta - \rho - \theta x] \quad (2.36)$$

Además, hay que considerar la condición inicial  $\hat{r}(0)$  y la condición de transversalidad.

En el *steady-state* los ratios de crecimiento de  $\hat{r}$  y  $\hat{c}$  ( $\gamma_{\hat{r}}$  y  $\gamma_{\hat{c}}$ ) son nulos, como en el modelo Solow-Swan. Los valores de equilibrio de  $\hat{r}$  y  $\hat{c}$  se obtienen igualando sus derivadas temporales a cero. En la Figura 2.14 se muestra el diagrama de fases del modelo. Se distinguen cuatro regiones en el espacio, correspondientes a las restricciones  $\frac{d\hat{c}/dt}{\hat{c}} = 0$  y  $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$ .

La curva  $\hat{c} = f(\hat{r}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{r}$  corresponde a pares de puntos  $(\hat{r}, \hat{c})$  que satisfacen  $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$ . El valor máximo se produce cuando  $f'(\hat{r}) = x + n + \delta$ , o lo que es equivalente, cuando el ratio de interés,  $f'(\hat{r}) - \delta$ , coincide con el ratio de crecimiento en el estado de equilibrio del output,  $x + n$ . El valor de  $\hat{r}$  en el que se verifica esta igualdad corresponde al nivel de la regla de oro,  $\hat{r}_{gold}$ , en el que se registra un máximo de  $\hat{c}$  en el estado de equilibrio.

En la línea vertical  $\hat{r}^*$ , asociada al cumplimiento de la igualdad  $\frac{d\hat{c}/dt}{\hat{c}} = 0$ , con independencia del valor de  $\hat{c}$ , se verifica que  $f'(\hat{r}) - \delta$  coincide con el ratio efectivo de descuento,  $\rho + \theta x$ .

Los valores del estado de equilibrio  $(\hat{r}^*, \hat{c}^*)$  corresponden a la intersección entre la línea vertical y la curva  $\hat{c}$ . El valor de  $\hat{r}^*$  se obtiene de imponer  $\frac{d\hat{c}}{dt} = 0$  en (2.36), lo que equivale a resolver  $f'(\hat{r}^*) = \delta + \rho + \theta x$ . A partir de aquí se deduce  $\hat{c}^* = \hat{y}^* - (x + n + \delta)r^*$ .

El valor de  $\hat{r}_{gold}$  se encuentra a la derecha de  $\hat{r}^*$  siempre que se cumpla la condición de transversalidad. Esto implica que no se producirá un exceso ineficiente de ahorro, como podía acontecer en el modelo de Solow-Swan al imponer un ratio de ahorro arbitrario.

Barro y Sala-i-Martin (2004) destaca que los ratios de crecimiento del estado de equilibrio no dependen de los parámetros que describen la función de producción ni de los parámetros de preferencias,  $\theta$  y  $\rho$ . Una tendencia incremental al ahorro supone una reducción de  $\theta$  o  $\rho$ , y desplaza la curva  $\frac{d\hat{c}/dt}{\hat{c}} = 0$  hacia la derecha, sin modificar  $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$ . Estos cambios provocan un incremento de los valores de equilibrio,  $(\hat{r}^*, \hat{c}^*)$  que, a su vez, se traducen en un aumento de  $\hat{y}^*$ . Desplazamientos superiores de la función de producción o una disminución de la tasa de depreciación poseen el mismo efecto. Por el contrario, un incremento en el valor de  $x$ , al afectar el término  $\rho + \theta x$ , se concreta en reducciones de los valores de equilibrio. El aumento de  $n$  se traduce también en una disminución de  $(\hat{r}^*, \hat{c}^*)$ , salvo que  $\rho$  se mantenga fijo.

En la siguiente figura se representan los cambios de signo del consumo y del capital en el plano de fases, lo que permite la elaboración definitiva del diagrama:



- La intersección de la línea vertical  $\frac{d\hat{c}}{dt} = 0$  con la curva  $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$ . Supondremos que el ratio inicial es menor que el capital de equilibrio:  $\hat{r}_0 < \hat{r}^*$ . En tal caso pueden darse tres situaciones en función del valor del ratio inicial de consumo:
  - Si  $\hat{c}_0$  es tal como se muestra en la figura, la economía verifica todas las condiciones de primer orden, incluida la de transversalidad, y alcanza el punto de equilibrio  $(\hat{r}^*, \hat{c}^*)$ .
  - Cuando se parte de una ordenada superior,  $\hat{c}_0'$ , el ratio inicial de ahorro es demasiado bajo para la economía y sigue la senda mostrada, cruzando la curva  $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$  y alcanzando el eje vertical, con  $\hat{r} = 0$ . El desarrollo de este proceso supone que no se cumplen las condiciones de primer orden, por lo que los recorridos que parten de esta zona no llegan al *steady-state*.
  - Por otro lado, si la ordenada inicial,  $\hat{c}_0''$ , es inferior a  $\hat{c}_0$ , el ratio inicial de ahorro es demasiado alto para mantenerse en la senda inicial y el recorrido, tras cruzar la línea  $\frac{d\hat{c}}{dt} = 0$ , concluye en  $\hat{r}^{**} = 0$ , por encima de  $\hat{r}^*$  y  $\hat{r}_{gold}$ . En este caso se incumple la condición de transversalidad, por lo que las familias se encuentran en una situación de sobre-ahorro. De nuevo, las sendas no alcanzan el equilibrio.

Barro y Sala-i-Martin (2004) plantea una aproximación log-linealizada de  $\hat{y}(t)$  en las proximidades del estado de equilibrio, que permite la cuantificación de la velocidad de convergencia,  $\beta$ , en este modelo. Este resultado ofrece una formulación cerrada de dicho coeficiente, pero sólo resulta válido en la vecindad del *steady-state*:

$$2\beta = \left\{ \zeta^2 + 4 \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\theta} \right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \cdot \left[ \frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha} - (n + x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} - \zeta \quad (2.37)$$

Donde  $\zeta = \rho - n - (1 - \theta) \cdot x > 0$ . Como se aprecia,  $\beta$  depende de los parámetros tecnológicos y de las preferencias. Una disminución del ratio de ahorro a medida que  $\hat{r}$  aumenta supone un incremento de la velocidad de convergencia. Por el contrario, un alto valor de  $\theta$  contrarresta este efecto y supone una reducción de  $\beta$ . Si el término  $\rho$  aumenta, el ratio de ahorro tiende a disminuir, aunque con una influencia relativamente poco significativa en la tasa de preferencia temporal  $\rho + \theta$ . Los parámetros  $\delta$  y  $x$  influyen positivamente en  $\beta$ ; por último, la influencia de  $n$  es ambigua, aunque no suele resultar significativa en los rangos de interés.

La log-linealización de  $\hat{y}(t)$  permite determinar el crecimiento medio del ratio de output per cápita, considerando el intervalo  $[0, T \geq 0]$ :

$$\frac{1}{T} \log \frac{y(T)}{y(0)} = x + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \log \frac{\hat{y}^*}{\hat{y}(0)} \quad (2.38)$$

Esta ecuación señala que el crecimiento medio depende de manera negativa del ratio entre  $\hat{y}(0)$  e  $\hat{y}^*$ . El modelo señala, de este modo, hacia la convergencia condicional, en vez de la absoluta. Del mismo, el crecimiento disminuye a medida que  $T$  aumenta; para valores muy

elevados, el ratio de crecimiento en el estado de equilibrio,  $x$ , domina las relaciones, dado que el segundo sumando tiende a cero.

La expresión de  $\beta$  se simplifica de manera destacada si el ratio de ahorro es constante, obteniéndose la misma ecuación que en el modelo Solow-Swan:  $\beta^* = (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta)$ .

En Barro y Sala-i-Martin (2004) se introducen ampliaciones del modelo Cass-Koopmans-Ramsey, incorporando factores como el gasto público, comercio exterior o la acotación de períodos temporales. En la siguiente tabla se resumen los aspectos más significativos de la introducción de las funciones de gobierno:

La influencia del gobierno se concreta en la compra de bienes y servicios a las empresas en la cantidad  $G$  y en la transferencia de pagos a las familias por un importe agregado. Por otro lado, se financia con impuestos sobre los salarios ( $\tau_w$ ), rentas privadas ( $\tau_a$ ), consumo ( $\tau_c$ ) y beneficios empresariales ( $\tau_f$ ). Denominando  $\hat{g} = \frac{G}{L}$ , las nuevas ecuaciones correspondientes a la evolución de  $\hat{r}$  y  $\hat{c}$  son:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = f(\hat{r}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{r} - \hat{g}$$

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = \frac{1}{\theta} \{ (1 - \tau_a) \cdot (1 - \tau_f) \cdot [f'(\hat{r}) - \delta] - \rho - \theta x \}$$

Ni las tasas ni las transferencias afectan directamente a las restricciones de los recursos económicos (evolución de  $\hat{r}$ ). Por otro lado, el término  $[f'(\hat{r}) - \delta]$  queda atenuado por el efecto de las tasas de rentas privadas y beneficios.

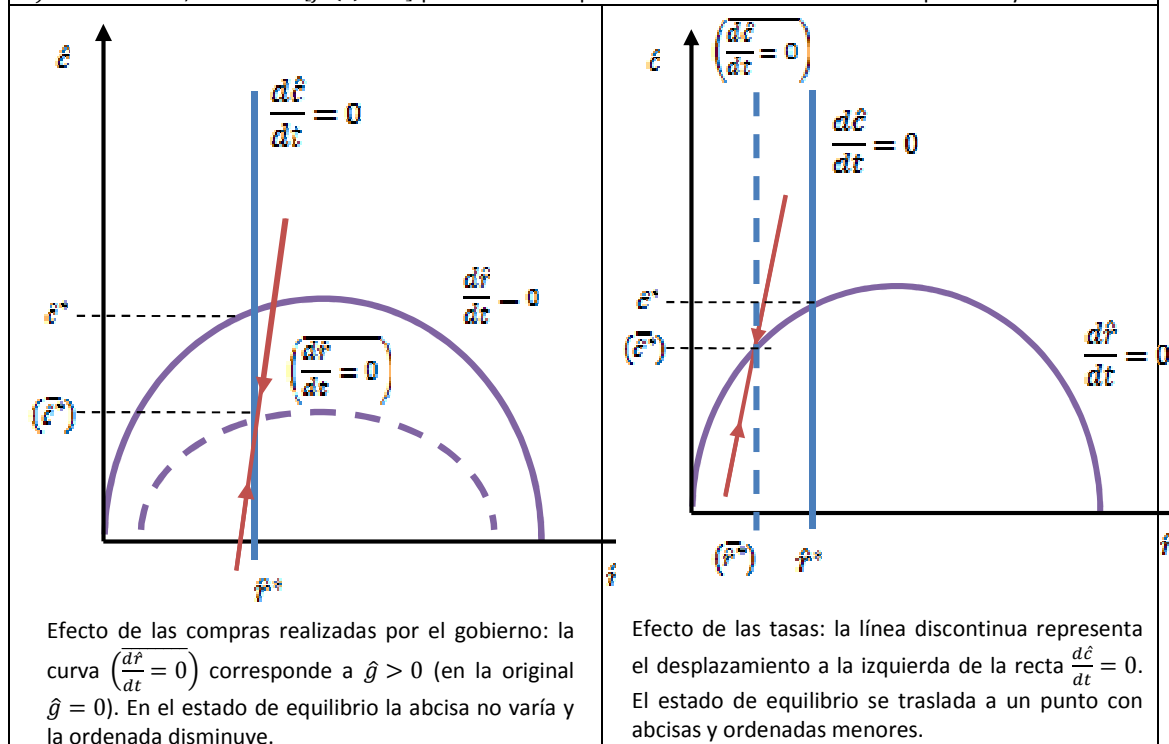


Tabla 2.2. Modificaciones en la dinámica del modelo Cass-Koopmans-Ramsey al introducir funciones de gobierno.

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004).

Los modelos de crecimiento neoclásico pronostican una velocidad de convergencia mayor que la que se deduce de los datos experimentales. Una manera de ajustar los patrones consiste en introducir costes asociados a las inversiones brutas (expresadas a través de la variable  $I$ ). De este modo, el coste de la inversión se relaciona mediante una función  $\phi$  creciente:  $I \cdot [1 + \phi(I/K)]$ , quedando el *cash-flow neto* de las empresas como:  $F(K, L) - wL - I \cdot [1 + \phi(I/K)]$ . El estado de equilibrio asociado a un mercado en el que el interés está dado de

manera exógena vuelve a tener naturaleza de “silla de montar”. En el caso de economías de países pobres, con accesos a mercados de crédito mundiales, la teoría pronostica que se caracterizarán por altos valores de capital instalado (en términos de precio sombra o unidades de output actual) y elevado ratio de stock de capital. Las velocidades de convergencia son finitas en este contexto.

El modelo Cass-Koopmans-Ramsey también puede ampliarse para incluir economías abiertas: el análisis se centra en un país  $i$ , considerando el resto como extranjeros. Si las rentas por persona corresponden a  $a_i$  y el capital por persona a  $r_i$ , la diferencia entre estos términos representa derechos o compromisos (en función del signo) respecto a las economías exteriores. Siguiendo a Barro y Sala-i-Martin (2004), la expresión final a la que se alcanza para expresar los cambios en rentas por trabajador efectivo es:  $\frac{d\hat{a}_i}{dt} = f(\hat{r}_i) - (i + \delta_i) \cdot (\hat{r}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i$ . Cuando  $\hat{r}_i = \hat{a}_i$  la economía es cerrada y la ecuación coincide con la deducida para el modelo básico.

En el análisis del equilibrio mundial se suele introducir un factor de limitación en el préstamo internacional, de modo que puede existir una deuda externa, positiva, pero sin superar la cantidad de capital físico existente. Estos modelos deben contemplar los posicionamientos temporales de los países, por lo que resulta adecuado considerar como variables los ratios efectivos de preferencia en el tiempo:  $\rho_i + \theta_i x$ . Resulta posible demostrar que las economías con esta configuración se aproximan muy lentamente al estado de equilibrio, con una acumulación gradual de capital humano.

Un elemento característico en el estudio inicial de Ramsey es considerar la planificación familiar en un horizonte infinito. Los patrones se modifican al introducir la probabilidad de que una dinastía “muera” en un momento determinado; esto no implica necesariamente la desaparición física de personas, sino que puede deberse a una ausencia de descendientes o a la falta de un mecanismo de transferencia de rentas entre generaciones. Si  $p$  es la probabilidad de muerte por unidad de tiempo, una familia o individuo nacida en el instante  $j$  estará viva en  $t \geq j$  con probabilidad  $e^{-p \cdot (t-j)}$ . El tamaño de una población nacida en el instante  $t$  es  $(p + n) \cdot e^{nt}$ . El término  $p \cdot e^{nt}$  representa las unidades que reemplazan a los que mueren y  $n \cdot e^{nt}$  los que proporcionan crecimiento neto. Las familias o individuos maximizan su utilidad esperada, considerando la limitación presupuestaria y la cantidad inicial de renta. En un modelo infinito se daba como cierto que estas rentas se transferían de manera automática a los descendientes. Cuando este planteamiento desaparece hay que considerar si las cantidades llegan a los hijos a través de herencias involuntarias o si se transfieren de manera general a la sociedad. Una cuestión muy importante aparece a la hora de considerar deudas de familias o individuos en los que concluye la dinastía y que, por tanto, no pasan a los descendientes. Esto exige considerar un riesgo asociado a los préstamos, por lo que el ratio de interés será superior en este nuevo escenario.

Barro y Sala-i-Martin (2004) diferencian su análisis entre economías cerradas y abiertas. En el primer caso se verifica la efectividad del ratio de preferencia temporal, que permite alcanzar un valor superior del producto marginal del capital. El ratio de interés en el *steady-state* es mayor que en la economía con horizonte infinito. Por otro lado, el consumo por trabajador

efectivo es menor. En el contexto de economías abiertas, los valores de  $\hat{c}$  y  $\hat{a}$  en el estado de equilibrio son positivos y finitos, lo que no sucedía cuando el planteamiento temporal se extendía al infinito. De todos modos, resulta necesario introducir restricciones al crédito para impedir que los ratios de convergencia de  $\hat{r}_i$  e  $\hat{y}_i$  tiendan a infinito.

En las conclusiones de este estudio se destacan los problemas más significativos de las aproximaciones presentadas:

- Según el modelo, la compra de bienes por parte del gobierno eliminaría el consumo privado y la imposición de tasas al capital provocaría el desplome de la formación de capital.
- La introducción de costes para la inversión aporta soluciones finitas respecto a la velocidad de convergencia del capital y output. Sin embargo, los resultados obtenidos no coinciden con los bajos ratios que se observan en la realidad, ni explican los comportamientos del consumo en las economías abiertas.
- La extensión del modelo a este tipo de economías ofrece velocidades de convergencia infinitas y polariza el consumo en el país con más grado de paciencia. Algunos de estos inconvenientes se reducen al considerar la restricción en los préstamos.
- La combinación de un marco temporal finito con mercados de crédito imperfectos ofrece una segmentación entre países restringidos en la posibilidad de pedir préstamos y otros sin esta limitación. Los primeros presentan velocidades de convergencia finitas, aunque los segundos continúan con el resultado anómalo de tasas infinitas. Este último problema puede afrontarse con la introducción de costes en la inversión.

## 2.7 Modelos de crecimiento endógeno

Mihut (2013) señala que, tras la publicación de los trabajos basados en las hipótesis neoclásicas, los análisis realizados en la década de los setenta se focalizan en dos aspectos principales: por una parte la búsqueda de marcos estructurales basados en el avance de las teorías econométricas y estadísticas y, por otro lado, en la investigación de los procesos de recesión, asociados a la rigidez del marco económico y a los problemas existentes en las interacciones internacionales. De un modo también muy genérico, la década de los ochenta se centra en el papel intervencionista del estado en aspectos clave como la interconexión entre factores internos y externos en el proceso de crecimiento. El final de este período y la llegada de los noventa contempla la aparición de los modelos de crecimiento endógeno (aunque las primeras aproximaciones datan de Arrow, 1962), sobre todo a través de las aportaciones de Romer (1986) y Lucas (1988), que estudian las medidas de instrumentación del capital y presentan la I+D como factor esencial del incremento de la productividad.

Los dos grandes problemas que presentan los modelos neoclásicos corresponden a la hipótesis de exogeneidad en el progreso técnico y al comportamiento en rendimientos decrecientes de los factores productivos. Romer (1986: 1002), al referirse al modelo Cass-Koopmans-Ramsey, señala: *“The rate of return on investment and the rate of growth of per capita output are expected to be decreasing functions of the level of the per capita capital stock. Over time, wage rates and capital-labor ratios across different countries are expected to converge.*



*Consequently, initial conditions or current disturbances have no long-run effect on the level of output and consumption*". Cuando no existen cambios tecnológicos, los patrones neoclásicos indican que el output per cápita converge a estados de equilibrio en los que no pueden darse crecimientos per cápita<sup>18</sup>.

Por el contrario, los modelos endógenos, en los que, como señala Barro y Sala-i-Martin (2004), se elimina esta tendencia a largo plazo del capital para experimentar rendimientos decrecientes, predicen una situación final en la que se experimenta un crecimiento sostenido y en la que no existe convergencia a un estado estacionario.

En esta sección analizaremos distintos enfoques para construir teorías con las características indicadas, centrando el análisis en los aspectos directamente relacionados con la estabilidad y convergencia de los distintos modelos.

### 2.7.1 Modelo AK

Sala-i-Martin (1994) cita aportaciones previas de otros autores en el desarrollo de patrones lineales, pero considera a Rebelo (1991: 77) como responsable de la *"introducción del modelo lineal a la nueva literatura de crecimiento endógeno"*.

El modelo AK se caracteriza porque la función de producción posee, de manera simultánea, rendimientos constantes de escala y rendimientos constantes de capital, siendo lineal en este único factor de producción:

$$Y = F(K, L) = AK \quad (2.39)$$

$A$  es una constante exógena -la productividad marginal del capital- y  $K$  el stock agregado de capital, considerado en el sentido más amplio posible, incluyendo conocimiento, infraestructura, cualificación... (de este modo la hipótesis poco realista de considerar rendimientos constantes de escala resulta más asumible). Esta función de producción incumple los asumes referidos a los rendimientos decrecientes de escala en los modelos de crecimiento neoclásico y considerados en las restricciones de Inada (1963), (2.22) a (2.24). En especial, el factor clave de esta vulneración reside, como destaca Barro y Sala-i-Martin (2004), en que se incumple:  $\lim_{r \rightarrow \infty} f'(r) = 0$ .

Respecto al factor  $L$ , se considera que la población está compuesta por consumidores idénticos, dueños de los input de producción, que viven un período infinito de tiempo. El número de individuos,  $N$ , crece con una tasa exógena  $n$ , de modo que  $N = N_0 e^{nt}$ . No se consideran diferencias entre población y oferta laboral, dado que existe un equilibrio permanente en este mercado:  $L = N$ . Se acude, como en secciones anteriores, a la expresión de las variables en términos por trabajador, dividiendo por  $L$ .

Retomando la idea previa sobre el concepto amplio de capital, es posible considerar también el trabajo como una tipología de éste. Sala-i-Martin (1994: 17) destaca que *"lo que importa*

<sup>18</sup> Novales et al. (2009) puntualiza que en presencia de cambios en la tecnología, las variables per cápita sí crecen en el estado de equilibrio en modelos exógenos, pero no se registran incrementos cuando estas variables se expresan en unidades de labor eficiente.

realmente para la producción no es el número de personas (trabajo en bruto), sino la cantidad de trabajo corregido por la calidad". Esto supone la introducción en el modelo del capital humano, de modo que si esta función se comporta de manera similar al capital físico, resulta coherente englobar ambas en una función genérica de  $K^{19}$ .

Plantaremos el equilibrio del modelo, considerando una economía cerrada y sin gobierno, y analizando, por separado, el comportamiento de las familias y sociedades. Las primeras maximizan una función de utilidad en un horizonte infinito, similar a la considerada en el estudio del modelo Cass-Koopmans-Ramsey:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \cdot \left[ \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] dt \quad (2.40)$$

La obtención del óptimo se encuentra sujeta a la restricción de recursos:  $\frac{da}{dt} = (i-n) \cdot a + w - c$ . En este modelo  $a = r$  y el producto marginal del trabajo es nulo, por lo que  $w = 0$ .

En el caso de las empresas, el máximo beneficio se obtiene igualando el producto marginal del capital con el precio de las rentas:  $R = i + \delta$ . Dadas las características de función de producción,  $R = A$ , por lo que  $i = A - \delta$ .

A fin de identificar el equilibrio de nuevo se ajustan los comportamientos de las familias y las empresas. Las condiciones para obtener el óptimo conducen a  $\frac{dc/dt}{c} \equiv \gamma_c = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho)$ . Barro y Sala-i-Martin (2004) destaca que el crecimiento del consumo no depende del stock del capital por persona,  $r$ , un resultado, cuanto menos, llamativo. Esto es debido a que no existen rendimientos decrecientes del capital ni se consideran en el modelo otros factores, como los costes de ajuste. Resulta evidente que se verifican tasas positivas de consumo si  $A > \delta + \rho$ . Sala-i-Martin (1994) sugiere reescribir esta ecuación del siguiente modo:

$$\gamma_c \theta + \rho = A - \delta$$

El término de la izquierda es el beneficio obtenido del consumo y el de la derecha el rendimiento de la inversión. "El beneficio del consumo depende de la tasa de descuento (que refleja el hecho de que los individuos prefieren consumir cuanto antes mejor) y de la tasa de crecimiento, que se tiene en cuenta para lograr un consumo lo más liso posible" (Sala-i-Martin, 1994: 79). El rendimiento de la inversión se reduce a la productividad neta marginal del capital y, como se ha indicado, se trata de un término independiente del stock de capital.

Si  $c(0)$  es el consumo per cápita en el instante inicial, la senda temporal del consumo per cápita se determina como:

<sup>19</sup> Sala-i-Martin (1994) analiza esta relación mediante una función de producción Cobb-Douglas, con dos factores de producción,  $K$ , capital físico, y  $H$ , capital humano:  $Y = BK^{\beta}H^{1-\beta}$ , con  $0 < \beta < 1$  y  $B$  una constante asociada al nivel de tecnología. Se supone que los dos factores pueden acumularse, destinando recursos al consumo, lo que implica que son sustitutos perfectos. Imponiendo que las tasas de rendimiento se corresponden con la productividad marginal neta y que los dos ratios de depreciación son idénticos se concluye finalmente que la función de producción se puede expresar como  $Y = AK$ , con  $A \equiv B \left[ \frac{1-\beta}{\beta} \right]^{1-\beta}$ . Es decir, existe una relación unívoca entre los dos factores.

$$c(t) = c(0) \cdot e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t} \quad (2.41)$$

Al estudiar el modelo Cass-Koopmans-Ramsey se obtenía la ecuación diferencial que gobierna la evolución del capital per cápita:  $\frac{dr}{dt} = f(r) - c - (n + \delta)r$ . En el modelo AK se determina una expresión similar, en la que  $f(r) = Ar$ . De este modo es posible calcular la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\frac{dr/dt}{r} \equiv \gamma_r = A - \frac{c}{r} - (\delta + n) \quad (2.42)$$

Partiendo del valor constante que muestra  $\gamma_r$  en el estado de equilibrio es posible concluir que las tasas de crecimiento en dicho estado del consumo, capital y producción per cápita son iguales:

$$\gamma^* = \gamma_c^* = \gamma_r^* = \gamma_y^* = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho) \quad (2.43)$$

Esto significa que el modelo carece de transición dinámica: las variables  $c(t)$ ,  $r(t)$ ,  $y(t)$  parten de unos valores iniciales, relacionados entre sí ( $c(0)$  e  $y(0)$  se obtienen del producto de  $r(0)$  por unas determinadas constantes) y luego crecen con la tasa recogida en (2.43).

En la Figura 2.14 se representa el diagrama de fase del modelo AK. Al considerar  $A > \delta + \rho$  el crecimiento del consumo es siempre positivo; no existe la curva  $\frac{dc}{dt} = 0$ , por lo que el espacio queda dividido únicamente en dos regiones. La senda  $\frac{dr}{dt} = 0$  corresponde a una línea que parte del origen con una pendiente  $A - \delta - n$ . El equilibrio vuelve a ser de naturaleza "silla de montar" y se representa por una recta con pendiente menor que la asociada a  $\frac{dr}{dt} = 0$ . Para un valor inicial  $r(0)$  por encima de la recta de equilibrio, el sistema evoluciona hacia el eje vertical, quebrantando la condición de Euler. Por el contrario, si el valor inicial se encuentra por debajo, se vulnera la condición de transversalidad. Como señala Barro y Sala-i-Martin (2004) la única pauta que verifica todas las condiciones de primer orden corresponde al equilibrio, en la que se cumple en todo punto la constancia de la ratio  $\frac{c}{k}$ .

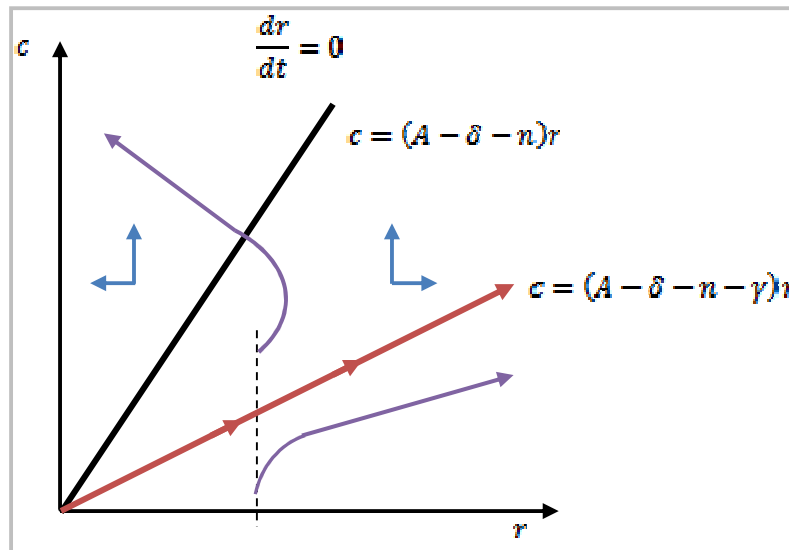


Tabla 2.3. Diagrama de fases del modelo AK  
Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004: 209)

Sala-i-Martin (1994: 81) destaca que “a diferencia del modelo neoclásico, este modelo [AK] no predice la convergencia de las economías (ni absoluta ni condicional)”. Esta idea se deriva de la igualdad de las tasas de crecimiento en el estado estacionario y la completa independencia de las rentas. Suponiendo que los parámetros característicos del modelo,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $\delta$  y  $n$  son idénticos entre los países y que solo se diferencian por los parámetros de productividad, resulta evidente, a partir de la expresión  $\gamma^* = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho)$ , que países en los que el ratio de crecimiento sea bajo continuarán indefinidamente en esa situación.

### 2.7.2 Modelo de bienes públicos

La introducción del gasto público en el modelo AK implica modificaciones en la productividad marginal del capital, asociadas a la elección de los servicios públicos asumidos por el gobierno, que repercuten en el ratio de crecimiento de la economía a largo plazo. Barro (1990: S103) extiende los planteamientos considerados en el apartado anterior “to include tax-financed government services that affect production or utility. Growth and saving rates fall with an increase in utility-type expenditures; the two rates rise initially with productive government expenditures but subsequently decline”. Esta aportación supone que la producción depende del capital privado,  $K$ , y de un factor de producción proporcionado por el sector público, que denotaremos como  $G$ .

En un principio “I consider initially the role of public services as an input to private production. It is this productive role that creates a potentially positive linkage between government and growth” Barro (1990: S106). También se asume que estos servicios públicos no se encuentran sujetos a fenómenos de congestión, caso de infraestructuras de transporte o contribuciones generales al bien de la sociedad. Sala-i-Martin (1994) considera que “no existe ninguna razón para que no pueda tratarse de un bien público puro de consumo no rival” e, incluso, considerar el impacto de la congestión. Estos planteamientos provocan ciertas modificaciones, en general poco sustanciales, del modelo.

Partiendo de las hipótesis iniciales de Barro (1990), y considerando  $G$  como un bien puramente público, la función de producción toma la forma:

$$Y_i = AK_i^\alpha G^{1-\alpha} \quad (2.44)$$

Esta expresión es válida para cada empresa  $i$  suponiendo, además, que la naturaleza de la función de producción corresponde a un patrón Cobb-Douglas ( $0 < \alpha < 1$ ). Barro y Sala-i-Martin (2004) consideran  $L_i$  y  $K_i$  como inputs privados, aunque asumiendo que la fuerza laboral agregada,  $L$ , es constante. De este modo,  $Y_i = AL_i^{1-\alpha} K_i^\alpha G^{1-\alpha}$ . La función de producción muestra rendimientos constantes de escala de manera agregada, pero con rendimientos decrecientes de cada uno de los factores, por lo que la economía es capaz de crecer de manera endógena.

Se supone que el gobierno financia sus compras de bienes y servicios mediante impuestos sobre la renta neta de los individuos, sin que se permita la existencia de déficit público. Es decir, se sigue una política de presupuesto equilibrado, de modo que se incrementa el tipo de gravamen de manera proporcional cada período, mediante una tasa  $\tau$ . De este modo, el sector público se encuentra sometido a la siguiente restricción:  $g = \tau y = \tau A r^\alpha g^{1-\alpha}$ . Esto supone:  $g = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot r$ . Novales et al. (2009) subraya que los gastos públicos se acumulan a lo largo del tiempo porque resultan proporcionales al capital privado, que es una variable acumulativa; además, se destaca que la función de producción puede expresarse con una formulación similar del modelo AK:  $y = (\tau^{1-\alpha} A)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot r$ . Esto anticipa los resultados referentes a la dinámica final del modelo de bienes públicos.

Aplicando los procedimientos de optimización considerados en apartados anteriores, se obtiene que el ratio de crecimiento del consumo,  $\gamma_c$ , es constante en el tiempo, dado que el gravamen,  $\tau$ , no varía. Resulta sencillo deducir que el consumo es siempre proporcional al capital, por lo que  $r$  también crece de manera permanente con un ratio constante. Dada la relación mostrada entre  $g$  y  $r$ , el primer factor experimenta la misma forma de evolución. Por último, la producción también crece según la tasa  $\gamma^* = \gamma_c^* = \gamma_r^* = \gamma_g^* = \gamma_y^*$ . Es decir, tal y como se indicaba en el párrafo anterior, este modelo es similar al AK en cuanto no presenta tampoco ninguna forma de transición dinámica.

Sala-i-Martin (1994) explica este comportamiento señalando que cuando un individuo decide comprar una unidad de capital el ingreso nacional aumenta en la cantidad equivalente a la productividad marginal del capital. Ese incremento del ingreso se transforma en aumento de las arcas públicas a través del impuesto sobre la renta, lo que permite que se produzca una elevación del gasto en dicho sector. Esta cadena relaciona el aumento del factor  $r$  con el de  $g$ , de modo que ambos crecen al mismo ritmo. Desde un punto de vista matemático el input público parece otro factor que es posible acumular, de ahí que la forma final del modelo se asemeje al AK.

Resulta muy interesante considerar la relación entre el ratio de crecimiento económico y el tipo impositivo aplicado. La restricción del gasto público implica que este gravamen debe ser igual a la presencia del sector público en la producción:  $\tau = \frac{g}{y}$ . Sala-i-Martin (1994) analiza la

relación entre el tamaño del gobierno y la tasa de crecimiento. Se consideran dos casos extremos:

- Si  $\tau = 0$ , la productividad marginal del capital después de impuestos también es nula, por lo que la tasa de crecimiento es negativa. En esta situación el estado no puede proporcionar bienes públicos y el rendimiento de la inversión privada es cero.
- Si  $\tau = 1$ , el estado proporciona una cantidad muy elevada de bienes públicos, por lo que el capital privado se vuelve productivo en extremo. Sin embargo, un tipo impositivo del 100% supone que el estado recupera toda la producción, por lo que el rendimiento neto tras impuestos y, en consecuencia, la tasa de crecimiento, vuelve a ser negativo.

Es posible demostrar que entre estos dos valores se encuentra el máximo de la tasa de crecimiento, en concreto, para el valor  $\tau^* = 1 - \alpha$ . *“La participación del producto provisto por el Estado debe ser igual a la participación que viene determinada por la tecnología”*, Sala-i-Martin (1994: 92).

El análisis del fenómeno de congestión supone considerar la reducción de disfrute de los demás ciudadanos asociada a la mejora que experimenta el individuo que hace uso del servicio público. En Barro y Sala-i-Martin (1992c) se modela este fenómeno considerando la siguiente función de producción para la empresa  $i$ :

$$Y_i = AK_i \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right)$$

Se verifica  $f' > 0$  y  $f'' < 0$ . La congestión supone que un incremento en el output agregado,  $Y$ , para un valor  $G$  dado, disminuye los servicios públicos disponibles para cada productor, por lo que también se reduce el término  $K_i$ . Otra forma de alcanzar la misma conclusión es asumir que  $G$  tiene que aumentar en relación al capital agregado,  $K$ , a fin de poder incrementar la cantidad de servicios. Si el ratio de crecimiento de  $G$  coincide con el de  $Y$ , el cociente  $\frac{G}{Y}$  permanece constante y, como destaca Barro y Sala-i-Martin (2004), los retornos constantes en  $K_i$  implican que la economía generará crecimiento endógeno.

Resulta de interés la consideración de modelos endógenos que experimentan dinámicas de transición, dado que en la mayoría no se presenta esta evolución. Novales et al. (2009) analizan el patrón convexo propuesto por Jones y Manuelli (1990), en el que el producto marginal del capital no converge a cero cuando los niveles de input tienden a infinito.

El modelo se apoya en las premisas básicas de Solow (1956), aunque considera una tecnología  $AK$  que se combina con otra en la que se exhiben retornos constantes de escala respecto al capital y el trabajo:  $Y = AK + G(K, L)$ . La tecnología  $G(K, L)$  verifica las propiedades de las funciones neoclásicas, pero la función de producción incumple con uno de los estándares de Inada, dado que el producto marginal del capital converge a la constante positiva  $A$ , distinta de cero.

En la siguiente tabla se describen las características más significativas de la evolución de este modelo, considerando dos formas funcionales distintas de  $Y$ .

$G(K, L)$  con naturaleza Cobb-Douglas:  $Y = AK + BK^\alpha L^{1-\alpha}$ , con  $A > 0, B > 0, 0 < \alpha < 1$

La función de producción se puede expresar en términos per cápita:  $y = Ar + Br^\alpha$ .

El estado de equilibrio resulta similar al del modelo AK:

$$\gamma^* = \gamma_c^* = \gamma_r^* = \gamma_y^* = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$$

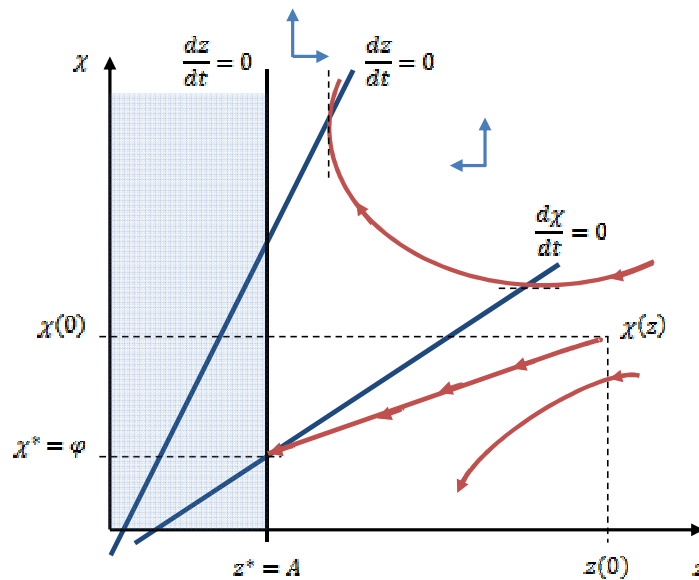
La elaboración del diagrama de fases en el espacio  $(r, c)$  no funciona correctamente porque estas variables crecen constantemente si  $\gamma^* > 0$ . Se recomienda un cambio de variables:  $z \equiv \frac{f(r)}{r}$ , producto medio del capital;  $\chi \equiv \frac{c}{r}$ , ratio de consumo respecto al stock de capital. El sistema dinámico se expresa en términos de las variables transformadas:

$$\frac{dz}{dt} = -(1 - \alpha) \cdot (z - A) \cdot (z - \chi - n - \delta)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \chi \cdot \left[ (\chi - \varphi) - \frac{\theta - \alpha}{\theta} \cdot (z - A) \right]$$

El término  $\varphi \equiv (A - \delta) \cdot \frac{\theta - 1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n$ . La condición de transversalidad requiere que  $\varphi > 0$ . Esto implica que la utilidad es finita cuando  $c$  crece con el ratio  $\gamma^*$ .

Si  $\theta > \alpha$  la pendiente de la curva  $\frac{d\chi}{dt} = 0$  es una curva menor que 1 y positiva. Hay dos curvas que verifican  $\frac{dz}{dt} = 0$  y la intersección con la línea vertical corresponde a un valor de  $\chi$  superior al del estado de equilibrio. El único estado de equilibrio corresponde al punto en el que la recta  $\frac{d\chi}{dt} = 0$  intercede con la línea vertical  $z = A$ .



Función de producción con elasticidad constante de sustitución:  $Y = B \cdot \{a \cdot (bK)^\psi + (1 - a) \cdot [(1 - b) \cdot L]^\psi\}^{\frac{1}{\psi}}$ , con  $0 < \alpha < 1, 0 < b < 1, 0 < \psi < 1$ .

La elasticidad de sustitución es  $\frac{1}{1-\psi} > 0$ .

Las ecuaciones dinámicas en términos de las variables transformadas son:

$$\frac{dz/dt}{z} = \left[ \left( \frac{z}{A} \right)^{-\psi} - 1 \right] \cdot (z - \chi - n - \delta)$$

$$\frac{d\chi/dt}{\chi} = \frac{A}{\theta} \cdot \left[ \left( \frac{z}{A} \right)^{-\psi} - 1 \right] - (z - A) + (\chi - \varphi)$$

$A \equiv Bba^{1/\psi}$ ;  $\varphi$  coincide con la expresión anterior. De nuevo se requiere  $\varphi > 0$  para verificar la condición de transversalidad.

En la elaboración del diagrama de fases se asume  $\theta > 1 - \varphi$ . La curva  $\frac{d\chi}{dt} = 0$  tiene forma de U invertida. El estado de equilibrio corresponde a la intersección entre esta curva y la vertical  $z = A$ . La economía se inicia en un punto en el que  $z(0)$  es superior al valor en el equilibrio, por lo que la transición se realiza mediante un decrecimiento monótono de  $z$  y  $\chi$ .

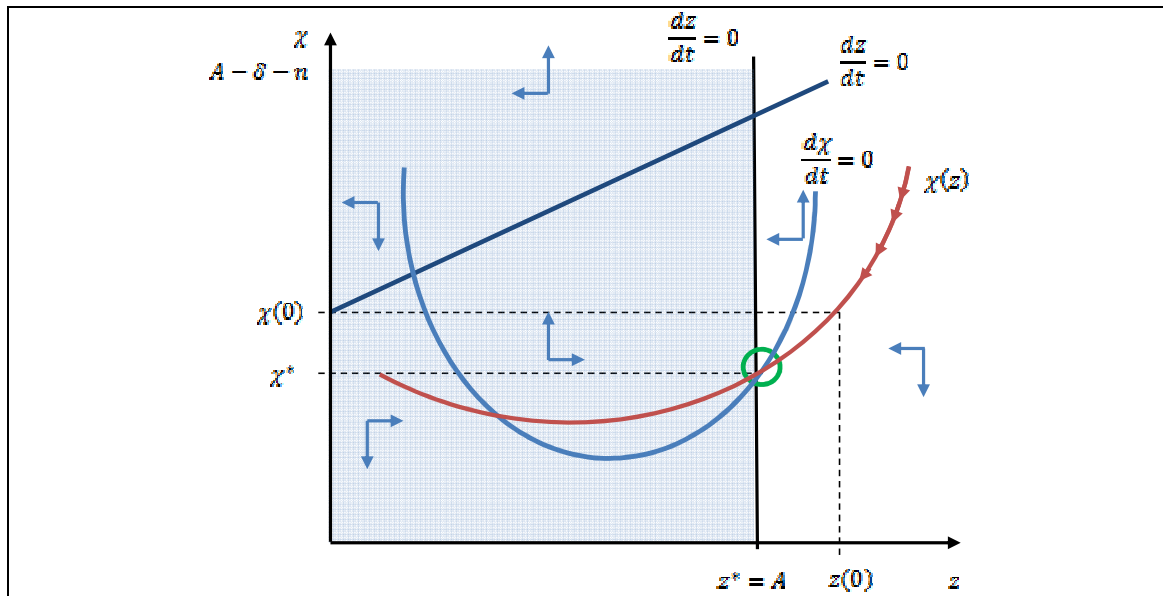


Tabla 2.4. Diagrama de fases del modelo Jones y Manuelli (1990) para dos formas distintas de la función de producción

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004)

### 2.7.3 Modelo con aprendizaje por la práctica y desbordamiento de conocimiento

Romer (1986: 1002) presenta una modificación sustancial en los modelos de crecimiento endógeno al postular un patrón en el que *“growth rates can be increasing over time, the effects of small disturbances can be amplified by the actions of private agents, and large countries may always grow faster than small countries”*. Los modelos habituales en este contexto se caracterizan por la ausencia de retornos constantes de escala en factores acumulativos. En este sentido, la aportación central de Romer (1986), basada, como veremos, en investigaciones de autores anteriores, consiste en introducir la creación del conocimiento como un producto complementario de la inversión, lo que altera el comportamiento del retorno de los factores.

En el modelo con aprendizaje se alcanza el equilibrio tecnológico endógeno. El largo plazo está controlado de manera principal por la acumulación del conocimiento, lo que permite optimizar el beneficio mediante la consideración de las oportunidades que pueden surgir en el futuro. De este modo, el aspecto esencial del capital se desplaza de su componente físico y se centra en un intangible como el conocimiento. Romer (1986: 1003) destaca tres elementos fundamentales de su modelo de crecimiento:

- Existencia de externalidades: en efecto, la creación de conocimiento por parte de una empresa producirá efectos positivos en las restantes, dado que se difundirá tarde o temprano, con independencia de las fórmulas de protección empleadas (patentes o similares). La presencia de externalidades garantiza que se alcance el equilibrio.
- La tecnología de investigación, que permite crear nuevo conocimiento, muestra retornos decrecientes: incrementar en una determinada tasa los inputs en investigación no garantiza un aumento proporcional del conocimiento generado. Esto



asegura que el consumo y la utilidad crecen con una tasa adecuada, no demasiado rápida.

- La producción de bienes de consumo a partir del stock de conocimiento muestra retornos crecientes de escala. En concreto, este capital intangible puede exhibir un producto marginal creciente (lo que supone, efectivamente, un contraste con los modelos en los que el capital experimenta una productividad marginal decreciente). Romer (1986) identifica este aspecto como esencial en los resultados ofrecidos por el modelo.

Diferentes autores, como Arrow (1962), Frankel (1962), Uzawa (1965), Levhari (1966a, 1966b), Sheshinski (1967), Chipman (1970), Griliches (1979), el propio Romer (1986) o Lucas (1988) han trabajado en el análisis de las problemáticas asociadas a estos modelos y, en especial, en los aspectos relevantes del desbordamiento del conocimiento. Sala-i-Martin (1994) destaca que una conclusión significativa de los estudios de Arrow es que se puede probar, de manera concluyente, que existe una relación estrecha entre la experiencia acumulada y los aumentos de productividad. Por su parte, esta experiencia se puede determinar en función de la inversión acumulada, o sea, del stock de capital. Precisamente la expresión aprendizaje por la práctica (*“learning by doing”*), con la que se identifica este modelo, procede de Arrow (1962). *“Avoiding the issues of specialization and the division of labor, Arrow argued that increasing returns arise because new knowledge is discovered as investment and production take place. The increasing returns were external to individual firms because such knowledge became publicly known”* (Romer, 1986: 1005).

El problema del modelo de Arrow (1962) y las correspondientes modificaciones planteadas por Levhari (1966a, 1966b) y Sheshinski (1967) es que el output –función del capital y del trabajo– muestra retornos creciente de escala, mientras que el producto marginal del capital es decreciente dada una oferta fija de empleo. Por tanto, según Romer (1986), el ratio de crecimiento del output se encuentra limitado por el ratio de crecimiento de la fuerza laboral. Esto conlleva a resultados que se contradicen con la experiencia como, por ejemplo, que el ratio de crecimiento del consumo per cápita debe anularse en una economía en la que el crecimiento de la población resulte ser cero.

El nuevo modelo con aprendizaje parte de los planteados por Arrow y por Cass-Koopmans-Ramsey, asumiendo que el conocimiento es un bien capital con producto marginal creciente. Se considera, por tanto, una función de producción neoclásica, con tecnología incremental del trabajo:

$$Y_i = F(K_i, A_i L_i) \quad (2.45)$$

Esta expresión corresponde a una empresa  $i$ , de modo que  $K_i$  y  $L_i$  representan, como en los casos anteriores, capital y trabajo, y  $A_i$  constituye el índice de conocimiento disponible de dicha empresa. La tecnología es un factor incremental del trabajo si existe un estado de equilibrio cuando  $A_i$  crece con una tasa constante. También se supone que  $L$  permanece constante.

Barro y Sala-i-Martin (2004) ha detectado dos asumes referentes al crecimiento de la productividad, que introducen Romer (1986) y otros investigadores: (i) un incremento en el stock de capital de una empresa supone un aumento en paralelo de su stock de conocimiento (tal y como había señalado Arrow en sus estudios); (ii) el conocimiento de cada empresa es un bien público, disponible para otras a coste cero, lo que supone que  $\frac{dA_i}{dt} \propto \frac{dK}{dt}$ . La aplicación de estas dos hipótesis permite formular la función de producción como:

$$Y_i = F(K_i, KL_i) \quad (2.46)$$

Esta ecuación es homogénea de grado uno en  $K_i$  y  $K$  para un valor dado de  $L_i$ . Por ese motivo, se producen retornos constantes de capital en el nivel social, es decir, cuando  $K_i$  y  $K$  se expanden para un valor dado de  $L_i$ . Barro y Sala-i-Martin (2004: 214) señala que *“this constancy of the social returns to capital will yield endogenous growth”*. La expansión por valor  $K_i$  de cada empresa o productor supone un incremento correspondiente de  $K$ , lo que proporciona un beneficio desbordante (*knowledge spillovers*), que incrementa, a su vez, los resultados en el output del resto de sociedades. Sala-i-Martin (1994: 96) subraya que *“el aprendizaje por la práctica junto con el efecto desbordamiento ha permitido transformar un modelo que en principio parecía neoclásico en un modelo AK de crecimiento endógeno”*.

Resulta interesante cuestionar el sentido y alcance de los dos asumes que permiten plantear la expresión (2.46). Algunos autores ya habían avanzado, previamente, en el enfoque del aprendizaje por la práctica. Cannon (2000) y Barro y Sala-i-Martin (2004) destacan las aportaciones de Frankel (1962), prácticamente ignoradas durante treinta años, en las que se analiza en profundidad la primera hipótesis para señalar el carácter agregado de los stocks de capital empleados por cada empresa. Por otra parte, la versión de Griliches (1979) de la función de producción enfatiza la importancia de la inversión en I+D para conseguir la expansión del conocimiento. Lucas (1988: 15) se centra en el conocimiento como un elemento creado y transmitido por el capital humano: *“We want a formalism that leads us to think about individual decisions to acquire knowledge, and about the consequences of these decisions for productivity. (...) For the moment, however, I simply want to impose the terminological convention that 'technology' - its level and rate of change - will be used to refer to something common to all countries, something 'pure' or 'disembodied', something whose determinants are outside the bounds of our current inquiry”*.

Las cuestiones relativas al *spillover* poseen mayor trascendencia. Parece excesivo omitir la existencia de mecanismos de prevención respecto a la custodia de las ideas generadas por las empresas. Un enfoque más realista supondría considerar que los descubrimientos e innovaciones se filtran de una manera gradual, hasta alcanzar una plena difusión en el tiempo de los contenidos novedosos. El modelado de este patrón de comportamiento requiere, sin embargo, introducir el cambio tecnológico, ya sea a través de la expansión en la variedad de productos o con la incorporación de aspectos schumpeterianos. En el caso que estamos analizando se mantiene que los descubrimientos (efectuados de manera accidental) pasan a ser de común conocimiento de manera inmediata y, además, los *spillover* actúan a nivel global (sería posible particularizar el desborde en ámbitos concretos, como determinadas industrias,

regiones específicas, etc. Como veremos, esta idea resulta de gran importancia al considerar los efectos de escala).

Asumiendo de nuevo que la economía es cerrada y que las familias, con existencia infinita, maximizan su función de utilidad de la manera analizada en secciones anteriores, podemos obtener el ratio de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c \equiv \frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f(L) - L \cdot f'(L) - \delta - \rho] \quad (2.47)$$

La tasa es constante, al igual que sucedía en el modelo AK, dado que  $L$  también lo es (aunque su presencia en la ecuación provoca un efecto colateral que se analizará más adelante). Por otra parte, a partir de las condiciones de primer orden se llega a:  $\frac{dr}{dt} = f(L) \cdot r - c - \delta r$ . Estos resultados permiten concluir que el modelo no presenta dinámicas de transición. Las tasas de crecimiento son constantes e iguales a (2.47) en todo momento:  $\gamma^* = \gamma_c^* = \gamma_r^* = \gamma_y^*$ .

Barro y Sala-i-Martin (2004) analiza si las salidas obtenidas cumplen con el óptimo de Pareto. Para ello se compara la solución descentralizada (la que ofrece el análisis del propio sistema) con la correspondiente a un planificador central social. Este planificador maximiza la función de utilidad  $U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} dt$ , sujeto a la evolución en la acumulación de  $r$  mostrada en el párrafo anterior. A diferencia de una sociedad individual, este planteamiento supone la consideración de las contribuciones de todas las empresas a la economía, de modo que se introduce en el sistema el propio fenómeno de los desbordamientos.

Realizando las operaciones de optimización se obtiene que el ratio de crecimiento del consumo para el planificador es  $\frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f(L) - \delta - \rho]$ . Esto supone considerar únicamente el producto medio del capital e ignorar el producto marginal del capital. La solución descentralizada ofrece una tasa de crecimiento inferior a la de las familias, dado que éstas no internalizan el *spillover* y no tienen en cuenta que la inversión de una unidad adicional de capital repercute en el volumen agregado de conocimientos. Por tanto, se incrementa el output general. Sala-i-Martin (1994) propone dos maneras de alcanzar la solución del planificador social: introducir una desgravación a la inversión, financiada con un impuesto de suma fija, o imponer un subsidio a la producción, con una financiación similar. Al asumir que la tecnología de las empresas depende únicamente de su stock agregado de capital y que éstas no consideran internamente el efecto del desbordamiento, se mantiene el asume implícito de economía en competición perfecta, pero el equilibrio alcanzado no corresponde al óptimo de Pareto. Cuando la función de producción tiene una naturaleza Cobb-Douglas, su expresión para la empresa  $i$  es:  $Y_i = A \cdot (K_i)^\alpha \cdot (KL_i)^{1-\alpha}$ , con  $0 < \alpha < 1$ . En este caso, el ratio descentralizado de crecimiento del consumo es  $\frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (A\alpha L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$ , mientras que para el planificador social se concreta en:  $\frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (AL^{1-\alpha} - \delta - \rho)$ . Dado que  $\alpha < 1$  comprobamos que, en efecto, la tasa descentralizada es inferior a la del planificador. Para

alcanzar el óptimo social se puede introducir un gravamen por  $1 - \alpha$  o establecer un subsidio a la producción por un ratio  $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ .

Al observar las tasas de crecimiento del consumo se comprueba la relación directa con el tamaño de la población de la economía. Este fenómeno recibe el nombre de efecto de escala: una expansión de la fuerza agregada de labor incrementa los ratios de crecimiento tanto en el caso descentralizado como en el correspondiente al planificador. La identificación entre fuerza laboral de un país y su población supone predecir que a mayor tamaño mayor crecimiento, correlación descartada por numerosos estudios experimentales<sup>20</sup>. Sala-i-Martin (1994: 98) destaca que *“una posible explicación tras el fracaso empírico de la hipótesis de los efectos de escala es que la unidad relevante no es un país”*. Un análisis detallado del modelo revela que el área a considerar debería ser aquella en la que se desborde el conocimiento en cuestión, por lo que las unidades políticas no coincidirían con las unidades económicas importantes. Kremer (1993) sostiene, por ejemplo, que la escala adecuada sería la población mundial, dado que esta variable sí se encuentra correlacionada positivamente con el crecimiento de la productividad. En otros contextos es posible que la transmisión de conocimientos se circunscriba a regiones muy concretas y reducidas, de ahí la dificultad que enfatiza Barro y Sala-i-Martin (2004) respecto al testado de modelos con datos macroeconómicos.

El efecto de escala también afecta al modelo debido a que si se considera un incremento constante de la población en el tiempo, la tasa de crecimiento del consumo también aumentará de manera indefinida, por lo que no se podrá mantener un estado estacionario. De ahí que en las hipótesis previas se considere un valor de  $L$  constante.

Una manera de eliminar los inconvenientes del efecto de escala es considerar que el término  $A_i$  no depende del stock de capital, sino del ratio capital-labor medio:  $\frac{K}{L}$ . Como señala Barro y Sala-i-Martin (2004), esta idea puede justificarse al pensar en el beneficio de las interacciones individuales de conocimiento, frente a un planteamiento acumulado, más general. Al realizar el cambio  $A_i = \frac{K}{L}$  en las expresiones anteriores se comprueba que el producto medio del capital y el producto marginal medio del capital dejan de depender del factor población.

#### 2.7.4 Modelo de acumulación de capital humano

Al estudiar el modelo AK y sus posibles modificaciones, se asumía que el capital físico y humano eran similares, en cuanto se producían con la misma tecnología y también se acumulaban de manera análoga. Esta simplificación permitía considerar el crecimiento endógeno en un único sector. La consideración del capital de una manera amplia, incluyendo ambos tipos, se concretaba en retornos constantes asintóticamente, que garantizaban un crecimiento per cápita en el largo plazo sin incluir en el modelo el progreso tecnológico como elemento exógeno.

Sin embargo, *“el capital físico y el humano son bienes con unas propiedades enteramente diferenciadas”* (Sala-i-Martin, 1994: 104). Si el análisis se centra, por ejemplo, en el proceso de educación asociado al capital humano resulta evidente que éste requiere más recursos que

<sup>20</sup> Sala-i-Martin (1994) recomienda consultar Backus et al. (1992) y Kremer (1993).

para la producción de capital físico: la obtención de nueva capital humano resulta mucho más intensiva y requiere un esfuerzo propio, frente a las transacciones que es posible realizar con el capital físico.

Uzawa (1965) parte del modelo planteado por Solow (1956) y Swan (1956), pero establece la economía en base a dos sectores, en los que el crecimiento es endógeno. En uno se consideran los dos factores clásicos de producción, que se combinan para producir el output (a su vez, se puede consumir o transformar en capital físico): stock de capital,  $K(t)$ , y cantidad de trabajo empleado en la producción de material,  $L_P(t)$ . Todos los cambios tecnológicos se incluyen en el factor laboral a través de un término de eficiencia,  $A(t)$ , independiente de la cantidad de capital empleado. De este modo  $Y = F[K(t), A(t)L_P(t)]$ . En el otro sector se considera que el trabajo es el único input de la educación: de este modo, el ratio de mejora de la eficiencia laboral,  $\frac{dA(t)/dt}{A(t)}$ , queda determinado por el ratio  $\frac{L_E(t)}{L(t)}$ , donde  $L_E(t)$  es la cantidad de trabajo en el sector educacional y  $L(t)$  el total de fuerza laboral.

Por su parte, Lucas (1988) analiza en primer lugar los modelos neoclásicos en un estudio sobre el crecimiento de USA en el siglo XX, detectando una serie de inconsistencias. Se propone a continuación dos adaptaciones de estos modelos estándar para considerar los efectos de la acumulación de capital humano: en la sección anterior se ha estudiado el patrón de aprendizaje por la práctica, sobre el que el autor realiza diferentes aportaciones; el segundo modelo se centra en el proceso de acumulación a través de la instrucción. Para ello, previamente, se analiza el concepto de capital humano: Lucas (1998: 18) lo identifica como un nivel general de habilidad, *“so that a worker with human capital  $h(t)$  is the productive equivalent of two workers with  $\frac{1}{2}h(t)$  each, or a half-time worker with  $2h(t)$ ”*. La introducción de este concepto en el modelo supone considerar tanto la manera en la que los niveles de capital humano afectan a la productividad como el modo en que la asignación del tiempo a los trabajadores afecta a dicho capital (se asume un planteamiento clásico en este contexto referente a la relación existente entre la distribución temporal a diferentes tareas y la productividad obtenida).

Siguiendo la notación de Sala-i-Martin (1994), se identifica  $u$  como la fracción de tiempo que los empleados trabajan en la obtención del output, como  $h$  la medida de la cualificación media de los trabajadores y  $L$  el tamaño de la población. Por tanto, el trabajo total efectivo (ajustado en función de su calidad) empleado en el sector de bienes finales es  $uhL$ . Unificando las ideas expuestas, la función de producción propuesta por Uzawa (1965) puede expresarse como:

$$Y = AK^\alpha(uhL)^{1-\alpha} \quad (2.48)$$

Se trata de una función con rendimientos constantes de escala respecto de los dos factores.

Lucas (1988) introduce el efecto de las posibles externalidades en el modelo. Por una parte, existe el efecto interno del capital humano, asociado a su propia productividad y, por otro lado, el efecto o externalidad externa, vinculado al hecho de que *“la gente es más productiva cuando está rodeada de individuos inteligentes y productivos”* (Sala-i-Martin, 1994: 104). Si se

supone que hay  $N$  trabajadores, con niveles de habilidad  $h$ , entre 0 e infinito, es posible determinar el capital humano medio de la fuerza de trabajo como:

$$h_a^\psi = \frac{\int_0^\infty hN(h)dh}{\int_0^\infty N(h)dh} \quad (2.49)$$

Al introducir este elemento la función de producción queda:

$$Y = AK^\alpha [uhL]^{(1-\alpha)} h_a^\psi \quad (2.50)$$

La restricción de recursos de la economía supone que  $Y = C + I_K + I_H$ , con  $I_K$  e  $I_H$  las inversiones brutas en capital físico y humano. La pauta temporal de estos capitales viene dada por:  $\frac{dK}{dt} = I_K - \delta_k K$  y  $\frac{dH}{dt} = I_H - \delta_h K$ , siendo  $\delta_k$  la tasa de depreciación del capital físico y  $\delta_h$  la asociada al capital humano. Esta expresión se puede escribir en términos per cápita:  $\frac{dr}{dt} = Ar^\beta [uh]^{(1-\beta)} h_a^\psi - c - (\delta_k + n)r$ .

La producción del capital humano (o sea, la educación) se modela considerando esta variable como único factor de producción, mostrando rendimientos constantes de escala. El aumento neto del stock de capital humano per cápita es igual a la producción de capital humano menos la depreciación:  $\frac{dh}{dt} = \phi h(1-u) - (\delta_h + n)h$ . Sala-i-Martin (1994) profundiza en esta expresión al señalar que se podría considerar una tecnología del sector educativo que utilizara tanto capital físico como humano:  $Br_e^\eta h_e^{1-\eta}$ . Si el sector de la educación es más intensivo en capital humano que el de bienes finales debe cumplirse  $\eta < \alpha$ . En el caso extremo (el que se plantea en el modelo)  $\eta = 0 < \alpha$ . Al final de este apartado se amplía este supuesto.

El cálculo del máximo de la función de utilidad intertemporal, sujeto a las restricciones asociadas a las ecuaciones  $\frac{dr}{dt}$  y  $\frac{dh}{dt}$ , permite obtener la curva del consumo,  $c$ , y la correspondiente a la fracción del tiempo,  $u$ , en cada sector. La construcción de la función hamiltoniana implica incluir un precio implícito de la inversión en capital físico y otro en capital humano.

Con objeto de simplificar, se asume que las tasas de depreciación de capital son iguales:  $\delta = \delta_k = \delta_h$ . De este modo, siguiendo los cálculos de Sala-i-Martin (1994), se obtienen las ecuaciones dinámicas del consumo y del capital:

$$\gamma_c \equiv \frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} (\alpha Ar^{-(1-\alpha)} u^{(1-\alpha)} h^{(1+\psi-\alpha)} - \rho - \delta) \quad (2.51)$$

$$\gamma_r \equiv \frac{dr/dt}{r} = Ar^{-(1-\alpha)} u^{(1-\alpha)} h^{(1+\psi-\alpha)} - \frac{c}{r} - (\delta + n) \quad (2.52)$$

A partir de estas expresiones es posible demostrar la igualdad de las tasas de crecimiento en el estado de equilibrio del consumo, del capital y del output:  $\gamma_c^* = \gamma_r^* = \gamma_y^* = \frac{(\phi - \rho - \delta)(1 - \alpha + \psi)}{\theta(1 - \alpha + \psi) - \psi}$ .

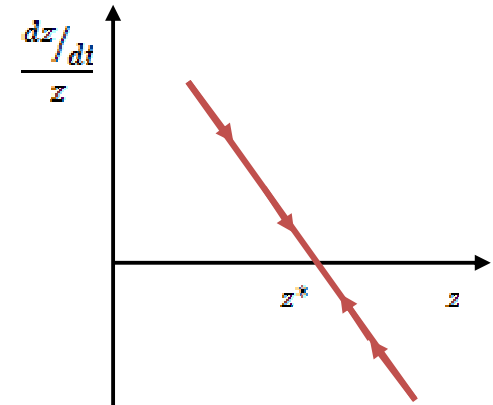
Con  $\psi = 0$  (ausencia de externalidades) el último cociente se simplifica:  $\gamma^* = \frac{\phi - \rho - \delta}{\theta}$ . Esta identidad es similar a las del modelo AK, con la presencia de  $\phi$  como productividad central del modelo (la relativa al sector educativo) frente a  $A$  (productividad de los bienes finales).

Por su parte, la tasa de crecimiento de  $u$  en el estado estacionario es cero, mientras que la del capital humano se puede expresar en relación a la del capital físico:

$$\gamma_h^* = \frac{1 - \alpha}{1 + \psi - \alpha} \gamma_r^* \tag{2.53}$$

Se comprueba que, en ausencia de externalidades,  $\gamma_h^* = \gamma_r^*$ . Con  $\psi \neq 0$ , la tasa de crecimiento en el estado estacionario del capital humano es menor que la del físico.

En este modelo, a diferencia de los anteriores, sí existe un período de transición, es decir, la economía no se encuentra siempre en estado estacionario. La presencia de externalidades complica de manera destacada esta dinámica, que empezó a analizarse en profundidad en publicaciones posteriores a Lucas (1986). Según Barro y Sala-i-Martin (2004), el estudio se simplifica si las especificaciones del sistema se expresan en variables que permanecerán constantes en el estado de equilibrio. Por ello se sugieren los siguientes ratios:  $\omega \equiv \frac{K}{H}$ ;  $\chi \equiv \frac{C}{K}$ ;  $z = Au^{1-\alpha} \omega^{-(1-\alpha)}$ . En la siguiente tabla se representan las dinámicas de los términos más relevantes del modelo:

<p>Evolución del producto medio bruto del capital físico (<math>z</math>): se trata de un comportamiento estable, dado que con <math>z &lt; z^*</math> el ratio de crecimiento es positivo y <math>z</math> aumenta hasta el estado de equilibrio. En el caso <math>z &gt; z^*</math> sucede lo contrario.</p>	
<p>En las restantes secciones se asume que <math>\alpha &lt; \theta</math><sup>21</sup></p>	

<sup>21</sup> Dado que  $\alpha \leq 1$  y normalmente se considera  $\theta > 1$ , esta restricción se verificará con muy alta probabilidad en los modelos.

<p>Dinámica de <math>\chi</math>: la sección estable tiene pendiente (de valor menor que 1) en ascenso. Se puede demostrar que <math>\chi</math> aumenta para puntos por encima de <math>\frac{d\chi}{dt} = 0</math> y disminuye en el caso opuesto. O sea, corresponde a una ubicación inestable.</p>	
<p>Dinámica de <math>u</math>: la senda del equilibrio hacia el punto de silla se expresa como <math>u(\chi)</math>. Se comprueba que si <math>u(0)</math> se encuentra a la izquierda de la de la curva <math>\frac{du}{dt} = 0</math>, la variable diverge en el tiempo desde <math>u^*</math>.</p>	
<p>Evolución de la curva de función política: relaciona los valores óptimos de las variables de control, <math>u</math> y <math>\chi</math>, con la variable de estado <math>\omega</math> (en la figura se representa solo una de las posibles curvas; se destaca que ésta muestra una pendiente descendente).</p>	



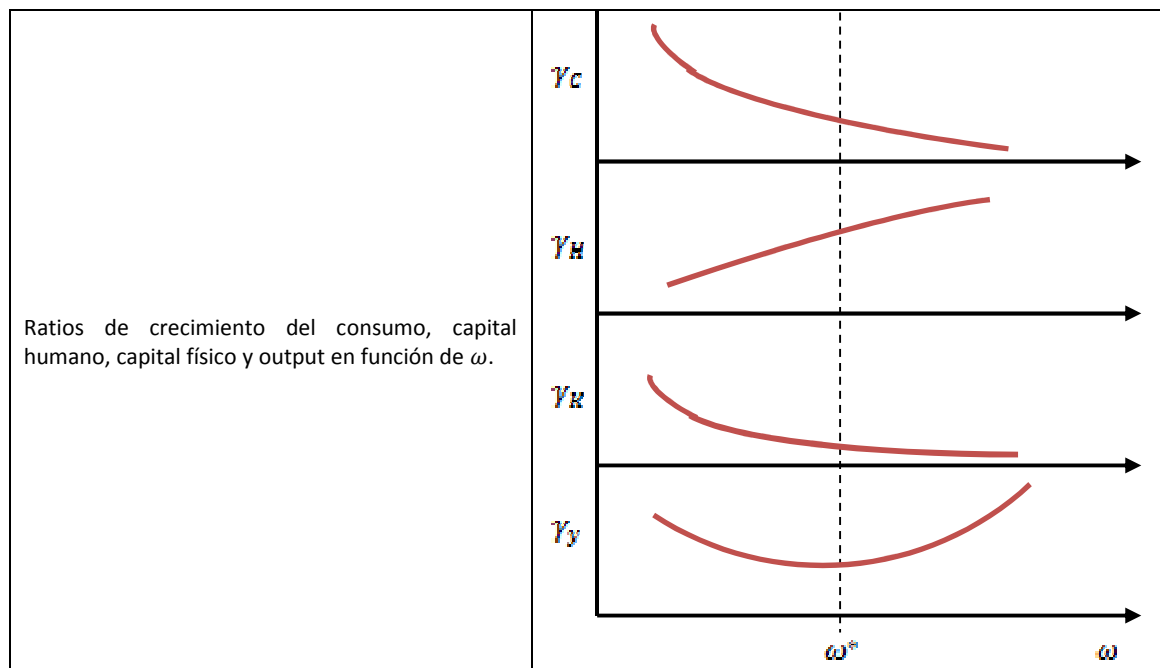


Tabla 2.5. Dinámicas de transición en el modelo de acumulación de capital humano

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004: 254-258)

Al igual que en el modelo de aprendizaje por la práctica, el planificador considera la externalidad, es decir, que, cuando un individuo aumenta su stock de capital humano mediante la educación, su acción repercute en la productividad de todos los integrantes de la economía a través del término  $h_a^\psi$ . Por tanto, en el cálculo de optimización se incluye este efecto, lo que lleva a determinar la tasa de crecimiento del capital humano para el planificador social como:

$$\gamma_h^* = \frac{\phi - [(1 - \alpha)(\rho + \delta) + \psi(\delta + n)]}{\theta(1 + \psi - \alpha)} \tag{2.54}$$

Sala-i-Martin (1994: 112) destaca que “tal como era de esperar, en ausencia de externalidades la tasa de crecimiento coincide con la obtenida en una economía competitiva”:  $\gamma^* = \frac{\phi - \rho - \delta}{\theta}$ . Por tanto, si  $\psi = 0$ , el equilibrio competitivo coincide con el óptimo. En presencia de externalidades la tasa óptima de crecimiento es mayor que la del mercado competitivo, dado que el rendimiento que obtiene el sector privado de la inversión en educación es menor que el considerado desde el punto de vista social.

Mulligan y Sala-i-Martin (1993) analiza las condiciones que garantizan el crecimiento endógeno, destacando que, cuando los sectores tienen la misma intensidad de factores, las transiciones se encuentran asociadas a un efecto de desequilibrio existente entre los dos sectores: de este modo, el ratio de crecimiento del output aumenta con la distancia entre  $\frac{K}{H}$  y su estado de equilibrio. Sin embargo, el modelo descrito en esta sección se caracteriza por una mayor intensidad en capital humano para la producción de dicho capital. Por tanto, resulta necesaria una alteración de los patrones, que repercute en el efecto de desequilibrio. Barro y Sala-i-Martin (2004) destaca que el nuevo ratio de output (incluyendo la producción de nuevo capital humano) tiende a crecer con el alcance del desequilibrio si el capital humano es

relativamente abundante, pero se reduciría drásticamente en la situación contraria. Sala-i-Martin (1994: 111) ejemplifica las dos circunstancias: *“una economía que perdiese una gran cantidad de población en relación con su dotación de capital físico (...) tendería a crecer más lentamente. Por el contrario, si una economía pierde una gran cantidad de capital físico en relación con su capital humano, la tasa de crecimiento durante la reconstrucción será alta”*.

En relación a los procesos de convergencia, Mulligan y Sala-i-Martin (1993: 46) muestra que el modelo Uzawa-Lucas predice convergencia condicional : así, en un panel de países que difieren solo en sus condiciones iniciales, el ratio de crecimiento se vuelve negativo cuando la medida del capital humano se mantiene constante. Algunos estudios empíricos, como Barro (1991), sugieren que el signo del coeficiente de convergencia cambia cuando el ratio de ahorro se mantiene constante. Este hecho es coherente con otros resultados experimentales, que muestran que el crecimiento se encuentra relacionado negativamente con la renta inicial y positivamente con los ratios de ahorro y con medidas del capital humano. Se puede demostrar que el modelo Uzawa-Lucas verifica estos supuestos, de modo que sus mecanismos de transición no difieren de los asociados a modelos neoclásicos estándar.

Retomando un planteamiento apuntado con anterioridad, resulta posible generalizar el modelo Uzawa-Lucas, permitiendo la presencia de capital físico en el sector de la educación. En este caso, Barro y Sala-i-Martin (2004) constata que el ratio correspondiente al capital físico empleado en la educación frente al capital humano asociado a la producción converge hacia el estado de equilibrio. El problema se complica debido a que no es posible simplificar y obtener representaciones en un espacio bidimensional; frente a la obtención de soluciones analíticas se plantean estimaciones cualitativas, basadas en simulaciones, que permiten verificar que los ratios de crecimiento de las variables principales del modelo se comportan de manera similar a la del patrón básico.

## **2.7.5 Modelos de crecimiento con I+D**

### **2.7.5.1 Modelo de aumento de número de bienes**

Sala-i-Martin (1994) señala la importancia que adquiere para la literatura sobre crecimiento endógeno la relación entre la tasa de progreso tecnológico y la correspondiente al desarrollo económico. Por su parte, Barro y Sala-i-Martin (2004) recuerda que la ausencia de retornos decrecientes en ausencia de progreso tecnológico garantizaba el crecimiento per cápita a largo plazo. Sin embargo, la simple acumulación de capital (incluso considerando bajo este concepto el capital humano) no puede sostener dicho crecimiento, lo que requiere considerar el progreso tecnológico en su doble dimensión. En efecto, la endogeneización de la tecnología (la incorporación al modelo del ratio exógeno considerado en los patrones neoclásicos) puede tratarse bajo dos enfoques:

- (i) Considerando que este progreso técnico se encuentra asociado a un mayor número de bienes de capital, que se pueden emplear como factores de producción (o sea, que obedece a la existencia de mayor número de inputs). En estos casos no existen rendimientos decrecientes asociados al número de bienes de capital, ya que las empresas de I+D, responsables del avance tecnológico, siempre estarán interesadas en encontrar nuevos productos.

- (ii) El segundo enfoque consiste en valorar el incremento de calidad de los productos obtenidos. En este contexto se desarrollan los modelos de “escaleras de calidad” o “*quality ladders*”, que consideran el proceso de destrucción creativa postulado por Schumpeter y en los que el progreso tecnológico responde a una auténtica guerra por la posesión del mercado entre empresas que desean mantener su liderazgo y las que quieren apropiarse de las cuotas existentes.

En este subapartado analizaremos un modelo perteneciente a la primera agrupación. Para ello partimos de una estructura de referencia desarrollada por Barro y Sala-i-Martin (2004), que se revisa en sus aspectos esenciales, para, posteriormente, profundizar en el modelo de Romer (1990).

Se distinguen tres tipos de agentes en esta economía: (i) los productores de bienes finales, que deben emplear trabajo y bienes intermedios de capital (procedentes de las empresas responsables de su invención y/o desarrollo) para poder obtener el output final y comercializarlo; (ii) las empresas de I+D, que invierten recursos para obtener nuevos productos y que, tras patentar los descubrimientos, proceden a su explotación, con un precio de alquiler derivado de la maximización de beneficios (en el modelo simplificado que se analiza se considera que esta patente concede un monopolio perfecto para producir y alquilar conocimientos); y (iii) los consumidores que, como en patrones anteriores, asignan una parte de su renta al consumo y otra al ahorro, con el objetivo de optimizar su función de utilidad, y que se encuentran sometidos a las restricciones habituales de presupuesto. El análisis de cada uno de estos elementos económicos permite deducir las ecuaciones que gobiernan el sistema y considerar las posibles políticas gubernamentales de actuación en este contexto.

La función de producción de la empresa  $i$  se expresa como:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \sum_{j=1}^N (X_{ij}^\alpha) \quad (2.55)$$

Se verifica  $0 < \alpha < 1$ . El término  $Y_i$  es el output,  $L_i$  el input de trabajo,  $X_{ij}$  representa el empleo por la empresa  $i$  del bien especializado e intermedio  $j$  y  $N$  el número de bienes intermedios (su diversidad). Barro y Sala-i-Martin (2004) apunta la posibilidad de emplear un modelo alternativo:  $Y_i = AL_i^{1-\alpha} [\sum_{j=1}^N (X_{ij}^\sigma)]^{\frac{\alpha}{\sigma}}$ . El parámetro  $\sigma$  controla en este caso los derechos sobre el bien intermedio  $j$ . Se retoma el patrón original considerando  $\sigma = \alpha$ .

La función mostrada en (2.55) posee las siguientes características:

- Muestra productividad marginal decreciente de cada input,  $L_i$  y  $X_{ij}$ , pero retornos constantes de escala en todos los inputs de manera conjunta.
- La formulación agregada del término  $(X_{ij}^\alpha)$  implica la independencia de los productos marginales de los bienes intermedios. Esto significa que el descubrimiento de un nuevo bien no supone una sustitución directa o un complemento de alguno ya

existente<sup>22</sup>. Por tanto, el proceso de I+D no conlleva a la obsolescencia de los bienes. Este planteamiento es clave y diferenciador de lo que se plantea en los modelos “*quality ladders*”, en los que un bien de calidad superior se convierte en sustituto de otro con características inferiores.

- Los productos marginales de cada bien intermedio tienden a infinito con  $X_{ij} = 0$ , pero disminuyen a medida que el empleo de los bienes aumenta. De ahí que las empresas encontrarán motivación para emplear todos los tipos disponibles.
- El progreso tecnológico se encuentra asociado a incrementos de  $N$  en vez de estar determinado por aumentos del parámetro de productividad  $A$ .

En referencia a los términos que integran la expresión se destacan los siguientes aspectos:

- Resulta adecuado considerar  $N$  como un valor continuo frente al carácter discreto asociado a la contabilización de un número determinado de clases de bienes. Bajo este enfoque  $N$  representa el “*average degree of specialization of the factors employed by the typical firm*”, Barro y Sala-i-Martin (2004: 287).
- La agregación de todos los outputs de cada empresa (se consideran físicamente idénticos entre sí) corresponde a un término  $Y$ , que se puede emplear para: (i) consumo; (ii) producción de bienes intermedios; y (iii) invertir en I+D de nuevos tipos (o sea, para expandir  $N$ ).
- Los términos  $X_{ij}$  se pueden modelar como flujos de servicios (lo que supone alquilar los bienes de capital asociados) o como gastos asociados a bienes y servicios percederos. Esta segunda interpretación simplifica el modelo, al considerar  $N$  como única variable de estado.

El beneficio para un productor de bienes finales es:

$$Y_i - \omega L_i - \sum_{j=1}^N P_j X_{ij} \quad (2.56)$$

En esta expresión  $\omega$  es el ratio salarial y  $P_j$  el precio del bien intermedio  $j$ . Ambas variables se encuentran dadas en el contexto de una economía competitiva. Se puede determinar el valor de la cantidad de input  $j$  demandado en función de  $P_j$ :  $X_{ij} = L_i \left( \frac{A\alpha}{P_j} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . Esta demanda es una función de pendiente descendente con elasticidad constante  $\frac{-1}{1-\alpha}$ .

El segundo de los agentes del modelo, las empresas dedicadas a la investigación, se enfrenta a un proceso de decisión que consta de dos fases: (i) dedicar recursos para obtener un nuevo diseño: esto requiere que el valor presente de los futuros beneficios esperados sea al menos equivalente a los gastos asociados al proceso de I+D; y (ii) establecer el precio óptimo al que los bienes recién inventados se alquilarán a los productores del output final. Este precio

<sup>22</sup> Se trata de una especificación coherente en un contexto tecnológico caracterizado por avances innovadores: en ciertos casos un bien puede ser sustituto de otro (reduciendo su producto marginal) o complementarlo (aumentando dicho producto marginal), pero el valor medio de los productos marginales se mantiene constante.

determina el valor presente de los beneficios, requerido en el primer paso. El proceso inverso, asociado a la resolución del problema, se muestra de manera más detallada al particularizar el modelo de Romer (1990).

Un aspecto relevante de las empresas de investigación es que pueden acceder libremente al mercado para desarrollar su actividad, abonando un coste  $\eta$  de I+D para asegurar el valor presente neto de las futuras ganancias,  $V(t)$ . Se demuestra que si  $V(t) \neq \eta$  el sistema no alcanza el equilibrio, por lo que el valor presente de los beneficios de la actividad de I+D debe cubrir los costes asociados. Por tanto, como destaca Barro y Sala-i-Martin (2004),  $\eta$  representa el valor de mercado de una empresa que posee los derechos para producir uno de los bienes intermedios. El valor agregado del conjunto de empresas de investigación corresponde a  $\eta N$ .

Por su parte, las familias consumidoras maximizan su beneficio en un horizonte infinito:  $U = \int_0^{\infty} \left( \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} dt$ . En este modelo el ratio de crecimiento de la población,  $n$ , es cero. Las familias reciben el ratio de retorno,  $i$ , sobre los activos y, además, perciben el ratio salarial sobre la cantidad fija agregada de labor:  $\omega L$ . Además, deben satisfacer la ecuación de Euler:  $\frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} (i - \rho)$ .

Al considerar una economía cerrada, se verifica que el total de activos familiares coincide con el valor en el mercado de empresas. La limitación de recursos en la economía global se expresa como:  $\eta \frac{dN}{dt} = Y - C - X$ . Aplicando las relaciones entre las variables se obtiene el ratio de crecimiento:

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{L}{\eta} \cdot A^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{1-\alpha} - \rho \right] \quad (2.57)$$

Este modelo, al igual que el AK, no presenta transición dinámica. Las variables  $N$ ,  $Y$ ,  $C$  crecen con el ratio  $\gamma$ , común, que es constante. Se aprecia que la influencia de las variables  $\theta$ ,  $\rho$  y  $A$  es similar a la mostrada en el patrón de crecimiento AK: la disposición al ahorro (lo que supone minorar  $\theta$  y  $\rho$ ) y una mejoría de la tecnología incrementan el ratio  $\gamma$ . Sin embargo, aparece un nuevo elemento,  $\eta$ , el coste asociado a la invención de un producto. En coherencia con una idea intuitiva, su disminución repercute también en un incremento del ratio de crecimiento. Por último, se identifica en la expresión analizada un factor de escala, asociado al crecimiento de la población,  $L$ . Esta presencia se encuentra asociada al empleo de nuevos productos de una manera no competitiva. En este contexto resultan de aplicación los aspectos comentados en otros modelos respecto a cuál puede ser la escala adecuada de medida: si, por ejemplo, se identifica el mundo como la unidad en la que se producen los intercambios de ideas y la difusión de los inventos,  $L$  se corresponde con el censo mundial y el modelo predice una relación positiva entre el crecimiento per cápita y los niveles globales de población.

Respecto a la solución del planificador, se puede demostrar que asigna mayores recursos que la descentralizada, de modo que se incrementa el nivel final de output.

Se analiza seguidamente la versión de Romer (1990) del modelo de aumento de número de bienes, que constituye, según Barro y Sala-i-Martin (2004), la primera aplicación formal de

estas estructuras en el ámbito del crecimiento endógeno. Las principales conclusiones de dicho estudio son: (i) el stock existente de capital humano determina el ratio de crecimiento; (ii) se dedica muy poco capital humano a la investigación en el equilibrio; (iii) la integración en mercados mundiales incrementará los ratios de crecimiento; y (iv) la existencia de una gran población no es suficiente para generar crecimiento (una idea incardinada con el problema del factor de escala, ya introducido previamente).

Los argumentos de Romer (1990) se articulan en torno a 3 premisas centrales:

- El cambio tecnológico es el auténtico motor económico, impulsando la acumulación de capital e incrementando la mejora de la productividad.
- Este cambio tecnológico responde a actuaciones intencionadas a cargo de individuos que reaccionan ante los incentivos que presenta el mercado. Resulta interesante precisar que la contribución a los cambios procede únicamente de personas que actúan en base a un “sistema de recompensas”: un científico becado por fondos estatales se encontraría ajeno a este planteamiento. En realidad Romer (1990) enfatiza el papel esencial de dichos incentivos en el proceso que hace posible que el nuevo conocimiento se transforme en bienes con mayor valor.
- Los resultados de los procesos de I+D poseen características especiales, que los diferencian de otros bienes económicos. El desarrollo de nuevos productos implica incurrir en determinados costes fijos pero, una vez elaboradas las instrucciones respecto a un nuevo producto o servicio, se pueden aplicar de manera sucesiva e indefinida, sin que ello suponga adicionar otros costes.

La función de producción temporal que muestran los productores de bienes finales se expresa como se ha descrito en el modelo básico<sup>23</sup>:  $Y_i = AL_i^{1-\alpha} (\sum_{j=1}^N x_{ij}^\alpha)$ . Si se supone que en el equilibrio la cantidad de bienes es idéntica<sup>24</sup> para todo  $i$  (o sea,  $x_i = x$ ), la función de producción se puede expresar como:  $Y = A(Nx)^\alpha N^{1-\alpha} L^{1-\alpha}$ . Bajo esta nueva formulación se advierte (Sala-i-Martin, 1994: 116):

- Para  $N$  dado, la producción muestra rendimientos constantes respecto a  $L$  y  $Nx$ .
- Para  $L$  y  $Nx$  dado, la producción aumenta al hacerlo el número de bienes de capital.
- Para  $L$  dado, la producción presenta rendimientos decrecientes respecto a  $Nx$  siempre que este aumento proceda de un incremento de  $x$ .

Estos comportamientos revelan de nuevo la similitud con el modelo AK, considerando ahora  $N$  como el bien que se acumula.

Suponiendo que las empresas alquilan cada bien intermedio al precio unitario  $R_i$  (dentro de un mercado competitivo) y que venden el producto obtenido con estos bienes más el trabajo a un precio unitario, su comportamiento responderá a maximizar el valor presente de todos los *cash flows* futuros. Considerando que la población no experimenta crecimiento se obtienen las condiciones de primer orden del bien  $x_i$  o función de demanda de dicho bien:

<sup>23</sup> Es decir, se supone que se obtiene un único bien de consumo a partir de diferentes factores de producción.

<sup>24</sup> El análisis del modelo conduce a esta conclusión, como se verá más adelante.

$$A\alpha x_i^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = R_i \quad (2.58)$$

De aquí se despeja  $x_i = \left(\frac{R_i}{A\alpha L^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . La demanda del bien está relacionada negativamente con el precio del alquiler, con una elasticidad  $-(1 - \alpha)$ .

La creación de nuevos bienes requiere que una empresa adquiera o produzca, en primer lugar, un diseño, lo que requiere detraer una cantidad constante,  $\eta$ , del output final. Sala-i-Martin (1994) advierte del problema asociado a considerar que la tecnología de investigación usa únicamente trabajo: esto supondría admitir una relación creciente entre los salarios reales y los costes de I+D, lo que supondría el hundimiento de la economía, afectada por costes en investigación cada vez mayores y rendimientos menores de los resultados en el tiempo. Romer (1990) introduce un factor de externalidad, que corrige el inconveniente señalado, al tener en cuenta el conocimiento acumulado tras la invención de bienes previos; esto se consigue suponiendo que el coste de investigación es proporcional a  $\frac{\omega}{N}$ . De este modo, los costes de investigación se reducen a medida que aumenta la experiencia. La conciliación entre el aumento de salarios y la disminución de costes de investigación conduce a una situación en la que los costes totales se mantienen constantes, de modo que resulta posible que la economía crezca a largo plazo.

Romer (1990: S81) señala, como se había anticipado al presentar el modelo básico, que *“once a firm has produced a design for durable  $i$ , it can obtain an infinitely lived patent on that design”*. Las  $x_i$  unidades del bien duradero se alquilan por un precio  $R_i$  a los productores de bienes finales; para ello se habrán producido con un coste marginal  $\vartheta$ , que se supone constante. Se asume que las empresas que se dedican a la investigación disponen de un monopolio sobre los bienes desarrollados<sup>25</sup>, infinito en el tiempo. Dado que la empresa que desarrolla un bien es su única vendedora, la curva de demanda de dicho bien mostrará, como se ha señalado en el modelo básico, una pendiente descendiente. Se considera que estos bienes tampoco se deprecian, por lo que el valor de una unidad en el presente corresponde al valor descontado del flujo infinito de ingresos por rentas que genera.

Las empresas, para maximizar sus beneficios, deben considerar:

- Los ingresos por rentas de alquiler, desde el momento inicial hasta el infinito, descontadas según un tipo de interés  $i$  (que supondremos constante, como, de hecho, sucede en el equilibrio).
- El coste marginal de producir la cantidad inicial  $x_i(0)$ .
- Los costes marginales de producir cantidades futuras de  $x_i$ . Para ello se supone que la producción aumenta según la función  $I_i(t)$ .
- Los costes fijos de inversión en la investigación del nuevo bien ( $\eta$ ).

Por tanto, la expresión matemática de la optimización es:

<sup>25</sup> Por ese motivo pueden imponer un precio de alquiler por encima de los costes marginales y recuperar la inversión en I+D.

$$\max_{x_i} \int_0^{\infty} e^{-it} [R_i x_i(t) - \vartheta I_i(t)] dt - \vartheta x_i(0) - \eta \quad (2.59)$$

La verificación de las condiciones de primer orden junto a la de transversalidad permiten obtener la relación que debe establecerse entre el bien y el tipo de interés:

$$x_i(t) = \left( \frac{A\alpha^2 L^{1-\alpha}}{i\vartheta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2.60)$$

Lo importante de la expresión (2.60) es que  $x_i(t)$  es independiente de  $i$ . Esto significa que las cantidades producidas de todos los bienes serán iguales (o sea, se confirma que  $x_i = x$ ) y, además, con un valor constante, dado que  $i$  en el equilibrio no varía. La inversión en el tiempo para producir nuevos bienes resulta nula: según el modelo, al efectuar el nuevo descubrimiento  $x_i(0)$  se produce de manera instantánea, sin que se requiera una nueva producción en el tiempo.

A partir de (2.60) se obtiene el precio óptimo del alquiler:  $R_i = \frac{i\vartheta}{\alpha}$ . De nuevo, este valor es independiente de  $i$  por lo que el alquiler de todos los bienes será el mismo. Sala-i-Martin (1994: 119) indica que *“el precio [de los activos de una empresa que invierte en I+D y descubre una nueva variedad de bienes] es un margen constante sobre el coste marginal, siendo el margen una función de la elasticidad de la demanda”*.

Si el coste de invertir en I+D debe corresponderse con el valor presente de los beneficios futuros se cumplirá:  $\int_0^{\infty} e^{-it} [R_i x_i(t) - \vartheta I_i(t)] dt - \vartheta x_i(0) = \eta$ . Dado que  $I_i(t) = 0$  se obtiene:  $\frac{R_i x_i}{i} = \vartheta x_i + \eta$ . De este modo se despeja la expresión de  $x_i$  en función de los parámetros del modelo:

$$x \equiv x_i = \frac{\eta\alpha}{\vartheta(1-\alpha)} \quad (2.61)$$

Como se ha visto, los consumidores pueden acceder al mercado de activos, en el que el interés vale  $i$ , recibir ingresos a través del trabajo y de los activos que poseen y asignar una pauta de consumo-ahorro para maximizar su función de utilidad. La aplicación de las técnicas de optimización descritas en secciones anteriores permite obtener la tasa de crecimiento de la economía en el modelo Romer (1990):

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{A\alpha L^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{\vartheta}\right)^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}{\eta^{1-\alpha} - \rho} \right] \quad (2.62)$$

Se detecta una relación inversa entre la tasa de crecimiento y el coste de las actividades en I+D ( $\eta$ ), así como respecto a  $\frac{\vartheta}{\alpha}$ , que representa el precio de monopolio que imponen las empresas que realizan la investigación. Esta tasa sí depende de forma positiva del tamaño de la



población. Se percibe ahora de una manera más directa que el efecto de escala es debido a que la tecnología constituye un bien no rival, cuyo coste de desarrollo es independiente del número de personas que lo empleen.

Como en modelos ya analizados, se verifica  $\gamma^* = \gamma_c^* = \gamma_y^* = \gamma_N^*$ .

El análisis de la solución del planificador implica considerar que la renta total sea igual al uso total de bienes finales. O sea:  $Y = AL^{1-\alpha}Nx^\alpha = c + \eta \frac{dN}{dt} + \vartheta x \frac{dN}{dt}$ . Aplicando los procedimientos de optimización se determina la tasa de crecimiento del planificador:

$$\gamma_{plan}^* = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{A\alpha L^{1-\alpha} \vartheta^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}{\eta^{1-\alpha} - \rho} \right] \quad (2.63)$$

La única diferencia con  $\gamma^*$  es la incorporación del coste marginal de producción de los bienes. El planificador considera como distorsión la utilización del precio de monopolio por parte de las empresas, ya que es superior al que fijaría en un contexto de óptimo de Pareto. Resulta intuitivo que este mayor precio provoca menores rendimientos que en un caso de competencia perfecta, lo que supone una menor inversión y, finalmente, también una tasa de crecimiento más reducida.

Barro y Sala-i-Martin (2004) destaca que, aunque el ratio de crecimiento en el equilibrio es constante, hay que considerar un nuevo tipo de externalidad en una economía descentralizada: la decisión de invertir en I+D y, por tanto, expandir el valor de  $N$ , supone una reducción de la cantidad de trabajo requerido para nuevas investigaciones. Las actividades de I+D activas en el momento presente tienen, por tanto, un efecto positivo de spillover en la productividad de las investigaciones futuras. Por tanto, la inapropiada distribución de trabajo entre producción e investigación refleja dos distorsiones: la asociada al monopolio de precios y la causada por el desbordamiento de las propias investigaciones. Por ese motivo parece razonable identificar políticas orientadas a hacer coincidir los resultados de la optimización de Pareto con los de la economía descentralizada.

Sala-i-Martin (1994: 122) introduce una interesante reflexión sobre el impacto en el modelo de una de estas políticas, los subsidios a la investigación: *“Es posible aumentar la tasa privada de rendimiento a través de la concesión de subsidios a la investigación. El problema de esta política es que también introduce una distorsión respecto a la cantidad de  $x$  que se elige y, por ello, la elección de  $x$  no sería óptima en el sentido de Pareto [...]. Una política que llevaría a la economía al óptimo es la de subsidiar las compras o alquileres de productos intermedios por parte de las empresas de bienes finales de manera que éstas se enfrentaran a un precio competitivo”*. Por su parte, Barro y Sala-i-Martin (2004: 312) señala: *“A successful subsidy policy is again difficult to implement in practice because it requires the government to identify promising areas of research that have substantial spillover benefits, and it assumes that the necessary public finance will not have distorting influences that outweigh the benefits from the internalization of the spillovers”*.

### 2.7.5.2 Modelo schumpeteriano de “escaleras de calidad”

En este segundo grupo de patrones temporales de crecimiento la endogeneización de la tecnología se obtiene a través del incremento de la calidad de los bienes. Novales et al. (2009: 333) destaca que, en este caso, *“innovation creates a new intermediate commodity, which is more productive than the previously available, making them obsolete”*. A diferencia del modelo de aumento del número de bienes, las mejoras en un nuevo producto, debidas a la acumulación del conocimiento y al resultado de las innovaciones, tienden a desplazar el antiguo. Por ello es habitual considerar diferentes grados de calidad para un bien. El asume de Schumpeter denominado *“destrucción creativa”* implica que *“cuando una empresa supera la calidad de un cierto producto (crea) hace que la generación anterior sea obsoleta (destruye) y, por tanto, se apropia del mercado de ese tipo particular de bienes”* (Sala-i-Martin, 1994: 114).

Aghion y Howitt (1992) destaca las implicaciones sobre el crecimiento asociadas a este planteamiento: la perspectiva de tener que destinar numerosos recursos para conseguir un elevado nivel de investigación puede disuadir a las empresas de I+D, con temor a experimentar una rápida obsolescencia de los productos creados. La caída en desuso de los inventos ocasiona una externalidad negativa hacia las innovaciones.

Se considera de nuevo un mercado con los tres agentes descritos en el modelo anterior. En este caso cada clase de bien intermedio tiene un determinado nivel de calidad (asociado al conocimiento existente), que puede ser mejorado. Con objeto de simplificar se considera que en cada sector se produce únicamente mediante tecnología de punta: solo se emplean los bienes con mayor índice de desarrollo para obtener el output. De manera similar a lo que acontece en el modelo de aumento del número de bienes, la empresa que posee el monopolio sobre el uso de la última tecnología recibe un beneficio por ello. Se supone que los innovadores que desarrollan el bien más avanzado (y, por tanto, pueden explotarlo) van cambiando a lo largo del tiempo: es decir, *“the latest innovator is a different person from the previous innovator, so that a research success terminates the predecessor’s flow of profit”* (Barro y Sala-i-Martin, 2004: 328). Por tanto, se complica la decisión respecto a los recursos a destinar a la investigación. Es necesario tener en cuenta no solo el flujo esperado de beneficio, descontado en el valor actual, sino considerar también la duración probable, asociada, a su vez, a los esfuerzos en I+D de los competidores.

La función de producción de la empresa  $i$  se expresa como:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \sum_{j=1}^N (\tilde{X}_{ij}^\alpha) \quad (2.64)$$

El nuevo elemento es  $\tilde{X}_{ij}$ , que representa la cantidad, ajustada en calidad, empleada en el bien intermedio  $j$ . Los grados de calidad potencial de cada bien intermedio se presentan en forma de una escalera, con los peldaños separados mediante intervalos constantes de valor  $q > 1$ . Se recomienda normalizar esta graduación, de modo que el primer bien inventado tiene calidad 1 y, a partir de aquí, se recorren los niveles  $q$ ,  $q^2$ , etc., en períodos sucesivos de tiempo

$(t_1, t_2 \dots)$ . Un bien obtenido a través de la última tecnología, desarrollada mediante  $k_j$  mejoras, tendrá asociado<sup>26</sup> el grado  $q^{k_j}$ .

En función de lo expuesto, los bienes intermedios son perecederos y tienen asociado un coste marginal unitario de producción. Como se ha indicado, en cada momento se emplea el bien con mayor grado de calidad: por tanto, la cantidad, ajustada en calidad, del input  $X_{ij}$  es  $\tilde{X}_{ij} = q^{k_j} X_{ij}$ .

La función de producción se puede reescribir:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \sum_{j=1}^N (q^{k_j} X_{ij}) \quad (2.65)$$

De nuevo, cada empresa trata de maximizar su beneficio:  $Y_i - \omega L_i - \sum_{j=1}^N P_j X_{ij}$ . Aplicando las condiciones de primer orden se obtiene la función de demanda para el bien  $j$ :

$$X_j = L \left[ \frac{A\alpha q^{\alpha k_j}}{P_j} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2.66)$$

Al igual que en el modelo anterior la elasticidad de la demanda es la constante  $\frac{-1}{1-\alpha}$  (se asume que  $L$  se mantiene también constante).

Como señala Novales et al. (2009), el incentivo a la innovación se encuentra en la posibilidad de obtener beneficios asociados al monopolio de producir bienes intermedios con una tecnología que se eleva un peldaño respecto a la anterior (ningún otro agente puede explotar el bien hasta que no encuentre mejoras). Se considera que los derechos de este monopolio se restringen a un único período (la nueva técnica puede ser secreta durante un tiempo o existir una patente).

Las empresas de I+D se enfrentan de nuevo a un proceso de decisión en dos fases: deben valorar si optan por realizar la investigación y, en caso afirmativo, determinar el precio al que comercializarán los nuevos bienes. Este precio óptimo es esencial para resolver el primer dilema, por lo que el proceso se desarrolla de manera inversa, tal y como se muestra en el siguiente esquema, en el que se han condensado los aspectos significativos a analizar en cada parte del proceso:

<sup>26</sup> Se supone que las innovaciones se aplican de manera secuencial (la escalera se sube peldaño a peldaño).

2ª etapa: precio óptimo de un bien ya inventado	1ª etapa: proceso de innovación
<p>El beneficio asociado a elevar la calidad desde el escalón <math>q^{j-1}</math> a <math>q^j</math> es el flujo de beneficio <math>\pi(k_j) = (P_j - 1) \cdot X_j</math>.</p> <p>El precio óptimo maximiza el valor presente descontado de todos los futuros beneficios: <math>P_j = \frac{1}{\alpha}</math>.</p> <p>Con este valor se determina la cantidad agregada que se produce de un bien intermedio así como el flujo de beneficio: <math>\pi(k_j) = \bar{\pi} \cdot q^{\frac{k_j \alpha}{1-\alpha}}</math>, siendo <math>\bar{\pi} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{1-\alpha} \cdot L</math>. Este término es constante si el tamaño de la población no varía: representa el flujo básico, correspondiente a <math>k_j = 0</math>.</p> <p>Se denota como <math>V(k_j)</math> el valor presente de todos los beneficios de un inventor que desarrolla su innovación en el escalón <math>k_j</math>, evaluado en el período <math>t_{k_j}</math>. Este término depende positivamente del flujo de beneficio y de la duración del monopolio asociado a la comercialización de este desarrollo.</p>	<p>Si <math>p(k_j)</math> es la probabilidad<sup>27</sup> por unidad de tiempo de una innovación con éxito en el sector <math>j</math>, en el que la calidad máxima es <math>k_j</math>, se puede determinar la esperanza de <math>V(k_j)</math> como <math>E[V(k_j)] = \frac{\pi(k_j)}{i+p(k_j)}</math>. Esto significa que la probabilidad de perder la posición de monopolio, sumada al interés <math>i</math>, constituyen un ratio de descuento. Un mayor valor de <math>p(k_j)</math> provoca la disminución de <math>E[V(k_j)]</math>.</p> <p>En este modelo se asume que la probabilidad de obtener una innovación con éxito depende del gasto de I+D en el sector <math>j</math>, <math>Z(k_j)</math>. Las inversiones resultan de interés si, al menos, el retorno esperado por unidad de tiempo, iguala el valor del gasto. O sea: <math>p(k_j) \cdot E[V(k_j + 1)] - Z(k_j) = 0</math>. Un análisis más detallado de la condición de entrada libre en el mercado de investigación requiere establecer suposiciones sobre la función que modela el efecto de la posición de la tecnología actual.</p>

Tabla 2.6. Fases del proceso de decisión en el sector de la investigación.

Fuente: elaboración a partir de Barro y Sala-i-Martin (2004).

Como se ha ido señalando, en este modelo cada innovación es, en términos de Aghion y Howitt (1992), un *acto de creación* que persigue capturar las rentas de un monopolio que deja de ser perpetuo. El valor de los derechos anteriores se anula en el momento que un competidor incorpora mejoras cualitativas. El tiempo requerido para ello,  $t_{k_{j+1}}$  se encuentra determinado por este esfuerzo económico de investigación y, por tanto, es endógeno.

Respecto a los consumidores, el output final considera el consumo agregado, los recursos asociados al uso de los bienes intermedios y el gasto en I+D. Por tanto, se cumple  $Y = C + X + Z$ . Definiendo el índice de calidad agregada,  $Q$ , como  $\sum_{j=1}^N q^{\frac{k_j \alpha}{1-\alpha}}$ , se puede demostrar que  $Y$ ,  $X$ ,  $Z$  son funciones lineales de dicho ratio (por lo que  $C$  también cumple esta relación). Por tanto, los ratios de crecimiento de todas las magnitudes son idénticos entre sí:

$$\gamma = \frac{dY/dt}{Y} = \frac{dC/dt}{C} = \frac{dX/dt}{X} = \frac{dZ/dt}{Z} = \frac{dQ/dt}{Q} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{\bar{\pi}}{\zeta} - p - \rho \right) \quad (2.67)$$

En esta expresión  $\frac{\bar{\pi}}{\zeta} = r + p(k_j + 1)$ . El valor de  $p$  es endógeno, por lo que resulta necesario analizar el comportamiento de  $Q$  y deducir de este modo su expresión en el equilibrio:

$$p = \frac{\left(\frac{\bar{\pi}}{\zeta}\right) - \rho}{1 + \theta \cdot \left[ q^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 1 \right]}. \text{ Se puede probar que, en efecto, este modelo alcanza un equilibrio sin}$$

<sup>27</sup> Novales et al. (2009) propone la siguiente expresión de la función de probabilidad de éxito:  $\lambda \left( \frac{\tilde{N}_{j,t}}{(1+\gamma)\tilde{A}_{j,t-1}} \right)^b$ , siendo  $\lambda$  un indicador de productividad en el sector de I+D,  $(1+\gamma)\tilde{A}_{j,t}$  el nivel de productividad en el instante  $t$  en el sector  $j$ , y  $b$  un parámetro que reduce el incremento del término entre paréntesis por debajo de una relación proporcional. El nivel de productividad sigue una distribución de Bernouilli. La expresión de la probabilidad revela que a mayor nivel de productividad más difícil resulta obtener una mejora, reduciéndose por tanto el valor asociado a una innovación con éxito.

dinámicas de transición. A partir de un valor inicial,  $Q(0)$ , el resto de variables crece con el mismo ratio. Analizando las diferentes expresiones expuestas se puede comprobar que  $\gamma$  decrece con  $\rho$  y  $\theta$ , asociados a la función de utilidad, y con  $\zeta$ , que representa el coste de investigación. Por el contrario el ratio de crecimiento aumenta con  $\bar{\pi}$  y  $q$ . El crecimiento final alcanzado depende de los resultados aleatorios asociados al esfuerzo en investigación. Barro y Sala-i-Martin (2009: 331) expresan: *“the relative quality positions of the sectors and, hence, the relative amounts spent of intermediate goods and R&D evolve in a random fashion”*.

La dependencia de  $\bar{\pi}$  respecto a  $L$  indica que, de nuevo, se presenta un efecto de escala. Para eliminar este inconveniente resulta adecuado modificar la función que modela la repercusión de la posición tecnológica actual (dentro la función que calcula la probabilidad de innovación con éxito), y que, en definitiva, expresa las dificultades de obtener resultados en la investigación en sectores más avanzados. Para ello se asume que existe una relación inversa respecto al nivel de output que se obtiene de un bien  $j$  cuando se alcanza un escalón superior de calidad.

Finalmente el ratio de crecimiento del planificador vuelve a ser superior al de la economía descentralizada, lo que refleja la política de precios de los bienes intermedios establecida en el monopolio. En este ámbito también resulta de aplicación un subsidio apropiado de las compras de bienes intermedios. Aghion et al. (2004) señala que la financiación del desarrollo posee un efecto positivo sobre el estado de equilibrio per cápita alcanzado, aunque su efecto tiende a desaparecer en el tiempo. En este contexto es necesario recordar que los incentivos a la I+D no consideran realmente las rentas derivadas del éxito del agente innovador, sino que se centran en los incrementos de dichas rentas. Aghion et al. (2001) destaca que este enfoque no suele estar presente en los modelos schumpeterianos, subrayando que la situación de privilegio en el monopolio conllevaría a no investigar en el estado de equilibrio. Por tanto, las rentas obtenidas por los innovadores con éxito pueden constituir un indicador poco fiable de los incentivos a la innovación. Un aumento en PMC (*product market competition*) puede estimular las actividades de I+D al propiciar los beneficios incrementales de la innovación: resulta razonable estudiar la posible correlación positiva entre PMC y el crecimiento de la productividad.

Aghion et al. (2002) profundiza en esta idea al plantear un modelo de crecimiento en el que la competición estimula el incremento señalado: se confirma, mediante datos experimentales, una predicción que señala que PMC e innovación se relacionan a través de una curva en forma de U invertida. Esto significa que los denominados efectos de escape dominan en un contexto de niveles reducidos de competición y que los schumpeterianos destacan cuando aquéllos son elevados.



---

## 3. Los procesos de convergencia sin la consideración de efectos espaciales

---

### 3.1 Introducción

Este capítulo proporciona una amplia revisión del concepto de convergencia, partiendo del asume básico que reconoce la dificultad o imposibilidad de identificar una definición única, cerrada y plenamente satisfactoria de un fenómeno con características múltiples y que requiere amplitud de enfoques. Los distintos modelos de crecimiento proporcionan un robusto corpus teórico y sus planteamientos deben contrastarse con los resultados empíricos a fin de ajustar las expresiones cuantitativas de aplicación. De este modo se consideran dos grandes conjuntos de medidas, profundamente relacionadas entre sí:  $\beta$ -convergencia, asociada a los desarrollos de los patrones neoclásicos, y  $\sigma$ -convergencia, convertida por los estamentos europeos en el indicador de referencia en los procesos de cohesión. Tras la exposición de las características, condicionantes, críticas y concreciones relativas a los correspondientes estudios, se procede a la revisión de otros procesos de convergencia, que comparten planteamientos comunes, aunque caracterizados por un tratamiento diferenciador de los procesos genéricos de captura de economías líderes o de consideración de las tendencias: los asociados al *catching-up* tecnológico y los relacionados con los efectos estocásticos. La sección concluye con una revisión de estudios empíricos en el seno de la EU (a nivel supra e infra nacional), identificados entre la extensa literatura econométrica por sus características relevantes y por su relación con nuestros objetivos, a los que se incorpora un análisis propio de la convergencia en el ámbito geográfico comunitario y nacional.

### 3.2 Objetivos de la medida de la convergencia

El significado intuitivo del término convergencia comprende un conjunto de connotaciones que han sido recogidas de distintas maneras en la extensa literatura generada sobre esta cuestión. En primer lugar resulta de interés acudir a las definiciones incorporadas en la vigésimo tercera edición del Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua y consignar que “*la acción o efecto de converger*<sup>28</sup>” hace referencia, en nuestro contexto, a dos ideas: la acepción primera, “*Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto*”; y la tercera, en el ámbito matemático, “*Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite*”.

El Diccionario panhispánico de dudas advierte de dos matices en este concepto: por una parte, la concesión de la relevancia al punto final, que es común para los agentes; y, por otro lado, la posible prevalencia de la idea de dirección (o sea, de un determinado patrón de comportamiento). Romero (2002: 93) traslada el paralelismo de las acepciones y de las ideas subyacentes al espacio económico, señalando que “*convergencia implica dos aspectos muy*

---

<sup>28</sup>El Diccionario panhispánico de dudas señala: “*Menos frecuente, pero también correcto, es su sinónimo convergir*”.

*diferentes*". En efecto, en coincidencia con este autor podemos distinguir estos planteamientos de evolución:

- Las economías que convergen alcanzan un "*determinado nivel final común de renta per cápita*". En este sentido, al considerar los modelos de crecimiento se ha hecho referencia al *steady-state* y a las previsiones de estos patrones respecto a la confluencia en un punto de equilibrio.
- Por otro lado, el aspecto direccional puede relacionarse con la "*existencia de estructuras similares [que] conllevaría a que en economía [la convergencia] se defina como semejanza en las estructuras productivas*<sup>29</sup>". De este modo, tanto la función de producción como comportamientos y preferencias de los agentes resultarían semejantes entre las economías convergentes. El autor citado destaca que, bajo esta visión, se considera si las "*disparidades iniciales entre las diferentes economías se van atenuando*".

Ambos bloques de contenido comparten una idea semejante, aunque deben ser diferenciados mediante un tratamiento específico. Monfort (2008: 3) advierte: "*there are several definitions of convergence and although coherent, they correspond to different concepts of convergence. One should therefore have a clear view of what is measured when using convergence indices*".

En una aproximación simplificada a la cuestión resulta coherente relacionar los aspectos relativos al primero de los planteamientos con los modelos de crecimiento analizados en la sección anterior. Tal y como se ha indicado, el modelo neoclásico se basa en el asume central de la existencia de rendimientos decrecientes de capital, lo que conduce al concepto de  $\beta$ -convergencia y a dos implicaciones muy significativas: (i) la dependencia del ratio de crecimiento de las tasas exógenas de progreso tecnológico y de fuerza laboral; y (ii) la cuantificación de ratios de crecimiento superiores en países pobres frente a ricos, lo que permitiría, en el largo plazo, que las economías de los primeros alcanzasen a los segundos. En contraposición, los modelos endógenos se caracterizan por la ausencia de estado estacionario, de modo que su evolución no conduciría a la convergencia en tasas de crecimiento.

El segundo enfoque expuesto se centra en la estructura común de las diferentes variables económicas que influyen en el output. De este modo, los análisis en este contexto se orientan al estudio de la dispersión a través de una medida genérica denominada  $\sigma$ -convergencia. Monfort (2008: 5) señala que "*Sigma-convergence simply refers to a reduction of disparities among regions in time*". Existen distintos indicadores de este comportamiento, como la desviación estándar de una muestra, los coeficientes de variación, los índices de Theil, de Gini o de Atkinson o la desviación logarítmica media. También se pueden encuadrar en este planteamiento los análisis de distribución de determinadas variables per cápita dentro de una economía: los gráficos de Salter constituyen una aproximación visual e intuitiva al problema,

---

<sup>29</sup>Romero (2002) refuerza esta idea al incorporar la acepción en biología del término convergencia que aparece en el diccionario Larousse de la lengua Española: "*fenómeno por el cual los seres o los órganos sometidos a condiciones análogas presentan aspectos y estructuras muy parecidas, incluso si las especies pertenecen a grupos muy alejados en la clasificación*".



mientras que la aplicación de las cadenas de Markov en el caso discreto posibilita un tratamiento cuantitativo y la posibilidad de realizar inferencias estadísticas. Los estudios basados en *kernels* estocásticos extienden estos razonamientos al supuesto continuo, mientras que el análisis de la convergencia estocástica comprende tratamientos de series temporales para considerar los posibles componentes con tendencia de las variables estudiadas.

Como señala Sala-i-Martin (1994), el test fundamental al que se enfrentan los modelos teóricos de crecimiento corresponde al contraste entre los resultados esperados respecto a la convergencia y la constatación empírica del proceso analizado (por lo general, asociado a la evolución de variables en un contexto espacio-temporal acotado). Se ha señalado que los modelos neoclásicos conducen, en principio, a predecir procesos de convergencia, mientras que los endógenos presagian la no convergencia, por lo que resulta relativamente sencillo calificar qué patrones realizan una mejor descripción de la realidad en base a los resultados experimentales obtenidos. Como se verá en posteriores secciones, este planteamiento general suele encontrarse alterado por los asumes iniciales en los que se sustenta el desarrollo procedimental de los distintos modelos y, en especial, por el área de estudio considerado, que puede alterar la consideración de espacio cerrado. Barro y Sala-i-Martin (2004) destaca que el comportamiento de las regiones que se encuentran dentro de una nación suele revelar una mayor similitud en tecnología, comportamientos, preferencias, etc. Esta realidad influye en una mayor presencia de indicadores de convergencia absoluta frente a los patrones que suelen estar presentes en las relaciones entre países.

Mankiw et al. (1992) subraya las particularidades de los modelos endógenos, al predecir que las diferencias entre países en renta per cápita pueden persistir de manera indefinida, incluso si éstos coinciden en ratios de ahorro y crecimiento de la población. En este sentido, los modelos de un solo sector indican que no se produce convergencia de ningún tipo. Barro (1989), al analizar las aportaciones de Lucas (1988), argumenta que pueden confirmarse procesos de convergencia en modelos endógenos de crecimiento con más de un sector si la renta inicial se encuentra relacionada con el grado de desequilibrio entre sectores.

Por su parte, Quah (1993) revisa el alcance exacto de los resultados de las regresiones empleadas en la medida de  $\beta$ -convergencia, partiendo para ello de la consideración del término *convergencia* en la literatura desarrollada hasta la fecha:

- Por una parte, resulta posible asemejarlo a un concepto más amplio, como el de ergodicidad, desarrollado en el ámbito econométrico (en concreto en el estudio de series temporales). Esto implica la cuantificación de la probabilidad con la que países originalmente ricos se desplazan por debajo de la media (y viceversa) o el análisis de la posible independencia entre la distancia de la renta de una nación o una región respecto de la media y la posición original de dicha economía. Quah (1993) sugiere estudiar estos aspectos a través de cadenas de Markov heterogéneas.
- La convergencia también se puede entender como la ausencia, en las diferencias de rentas existentes entre los países, de raíces unitarias o de tendencias temporales deterministas, lo que vuelve a requerir el examen de la dependencia respecto a las

condiciones iniciales: el autor plantea el desarrollo de este estudio en el ámbito de los campos aleatorios de raíces unitarias.

- Por último es posible asociar este concepto con la disminución de la dispersión transversal en el tiempo, de modo que la consecución de la convergencia implica que cada país acaba finalmente por ser tan rico como los demás. Esta idea se aproxima al planteamiento latente en los modelos neoclásicos.

Con independencia de su empleo para intentar confirmar predicciones (y validar los modelos asociados), la literatura empírica, muy abundante en este campo, proporciona una información sustancial para medir los resultados de posibles políticas de cohesión, como las planteadas en el seno de la EU, y analizadas en el primer capítulo del presente estudio. Como se ha señalado con antelación, el criterio habitual de medida de reducción de desigualdades regionales ha sido la convergencia del PIB per cápita respecto a la media europea. A la luz de las ideas expuestas, este planteamiento requiere dos breves reflexiones: (i) no existe una medida única de convergencia, por lo que la aplicación de un estándar u otro ofrecerá resultados diferenciados, que será necesario interpretar correctamente; y (ii) en línea con lo expuesto por Cereijo et al. (2006: 11), *“hay argumentación suficiente para considerar que los niveles de renta presentes de un país no representan perfectamente los niveles de bienestar actuales, debiendo completarse con variables adicionales que recojan el potencial de crecimiento”*.

Como aportación original del presente trabajo se considera la idoneidad de introducir otras variables económicas en las mediciones de convergencia, en una doble dimensión: la clásica, referida a la evolución histórica, inter-regional, de las mismas; y con una orientación hacia las previsiones de desarrollo futuro, estableciendo la correspondiente reflexión sobre la viabilidad de distintos indicadores propuestos por los órganos de gobierno de la EU.

Sintetizando la respuesta al epígrafe que encabeza este apartado, entendemos que el objeto de la medición de la convergencia supera la mera constatación de la coherencia de los resultados teóricos derivados de los modelos de crecimiento. Una correcta valoración de los análisis empíricos permite consignar la validez o el grado de desviación de determinadas políticas económicas, tanto del pasado como vigentes.

### 3.3 Procesos de $\beta$ -convergencia

#### 3.3.1 Descripción y relación con los modelos neoclásicos

La cuestión central respecto a si los países o regiones pobres crecen con una tasa superior a la de los ricos y pueden alcanzarlos en el largo plazo se encuentra indisolublemente unida al marco estructural proporcionado por los modelos neoclásicos. El estudio de este patrón permitía identificar la tasa instantánea de crecimiento de capital per cápita como la diferencia entre dos funciones, la curva de ahorro,  $sAk^{-(1-\alpha)}$ , y la curva de depreciación ( $\delta + n$ ), que es independiente de  $k$ . Como señala Sala-i-Martin (1994), la primera es estrictamente decreciente y la segunda estrictamente positiva, por lo que ambas se cruzan al menos una vez en el estado

estacionario,  $k^*$ . La evolución de las curvas y, por tanto, el comportamiento de la economía se representa en la Figura 3.1:

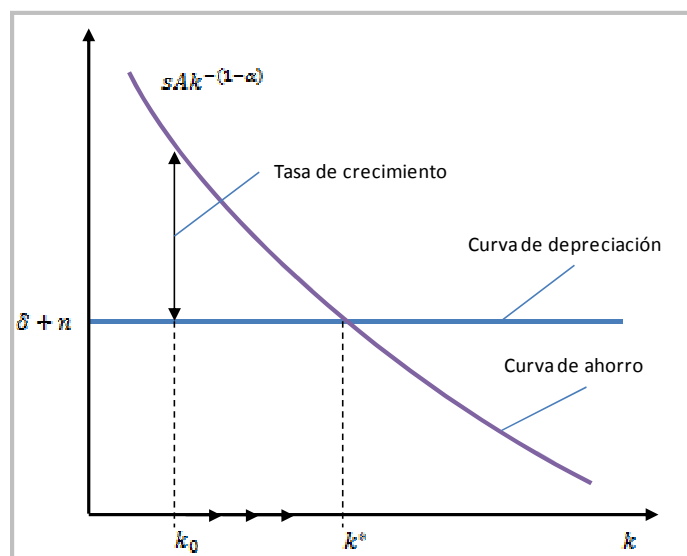


Figura 3.1. Representación de la tasa de crecimiento en el modelo neoclásico.  
Fuente: Sala-i-Martin (1994: 22).

Se aprecia que la tasa de crecimiento es positiva para valores inferiores a  $k^*$  y negativa en caso contrario. Aparte, lo más significativo es que esta ratio es tanto más elevada cuanto mayor sea la diferencia con el estado estacionario. El crecimiento se detiene en el *steady-state* (bajo el asume básico de rendimientos decrecientes de capital) porque “la economía alcanza un punto en el que los incrementos del stock de capital cubren exactamente la sustitución del stock de capital que se ha depreciado y compensan el crecimiento de la población”, (Sala-i-Martin, 1994: 23). La posible modificación permanente de un parámetro como la tasa de ahorro (vinculada, por ejemplo, a cambios en los tipos impositivos del gobierno) repercute, en el corto plazo, en un incremento inmediato de la tasa de crecimiento, que procede a disminuir, a lo largo del tiempo, hasta volver a valer cero.

La relación inversa entre la renta inicial y la tasa de crecimiento es lo que se denomina hipótesis de  $\beta$ -convergencia<sup>30</sup>. Desde un punto de vista más genérico resulta común hacer referencia a las “regresiones de Barro”, empleadas para analizar dinámicas de crecimiento, en las que un coeficiente negativo respecto a los niveles iniciales evidencia que existe convergencia.

El análisis de los posibles procesos de convergencia entre países (u otras unidades económicas) debe considerar un asume inicial, que caracteriza de manera significativa esta evolución:

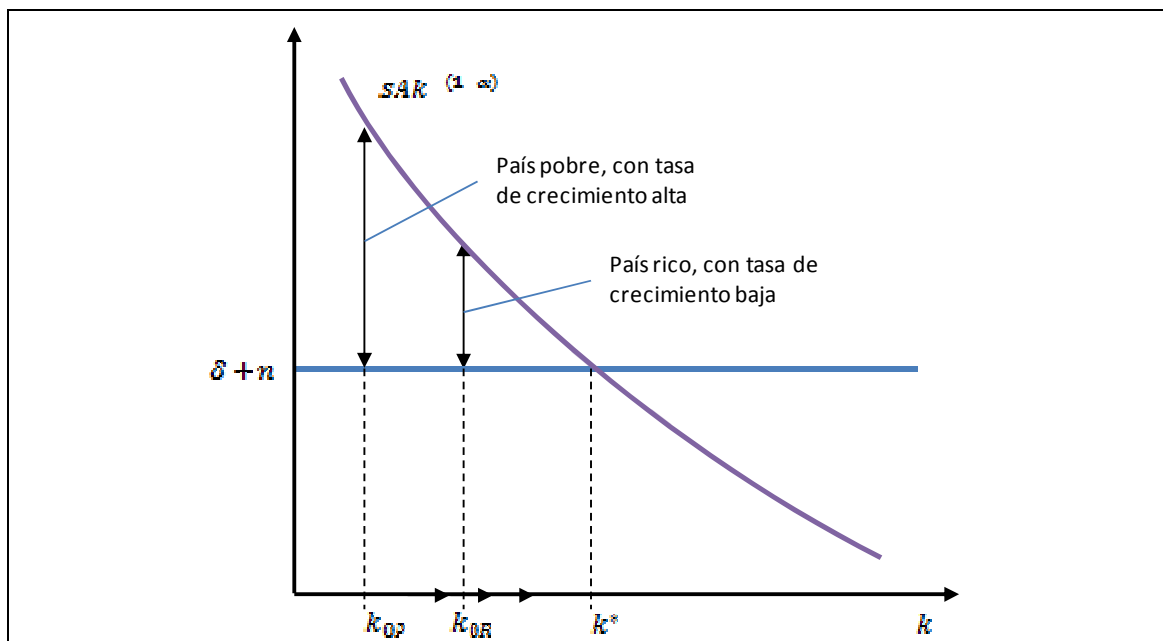
- Si las economías involucradas se diferencian al principio únicamente por los stocks de capital, los modelos neoclásicos predicen un crecimiento superior en las economías pobres respecto a las ricas. Las primeras parten con un nivel inferior de capital, por lo

<sup>30</sup> A veces se emplea también la expresión “convergencia hacia la media”.

que su tasa de crecimiento es superior a la de las segundas. Esta evolución recibe el nombre de  $\beta$ -convergencia *absoluta*, dado que todas las economías convergen hacia el mismo estado de equilibrio (en términos de renta per cápita y ratio de crecimiento).

- Por el contrario, si las unidades económicas se diferencian no solo en el stock inicial de capital, sino en otros parámetros (como el nivel tecnológico o las tasas de ahorro, depreciación o crecimiento de la población), los modelos neoclásicos no predicen un mayor crecimiento en el caso de países pobres. Aun así, es posible hablar de un proceso de  $\beta$ -convergencia *condicional* o relativa: cada economía alcanza un estado estacionario en el largo plazo, no coincidente con el de las demás, dado que la tasa de crecimiento continúa siendo inversa de la distancia a dicho punto de equilibrio. Según Sala-i-Martin (1994: 27) “*el modelo predice convergencia únicamente después de tener en cuenta los elementos determinantes del estado estacionario*”.

En la Figura 3.2 se representan las dos evoluciones descritas, considerando un país modelo pobre y otro rico.



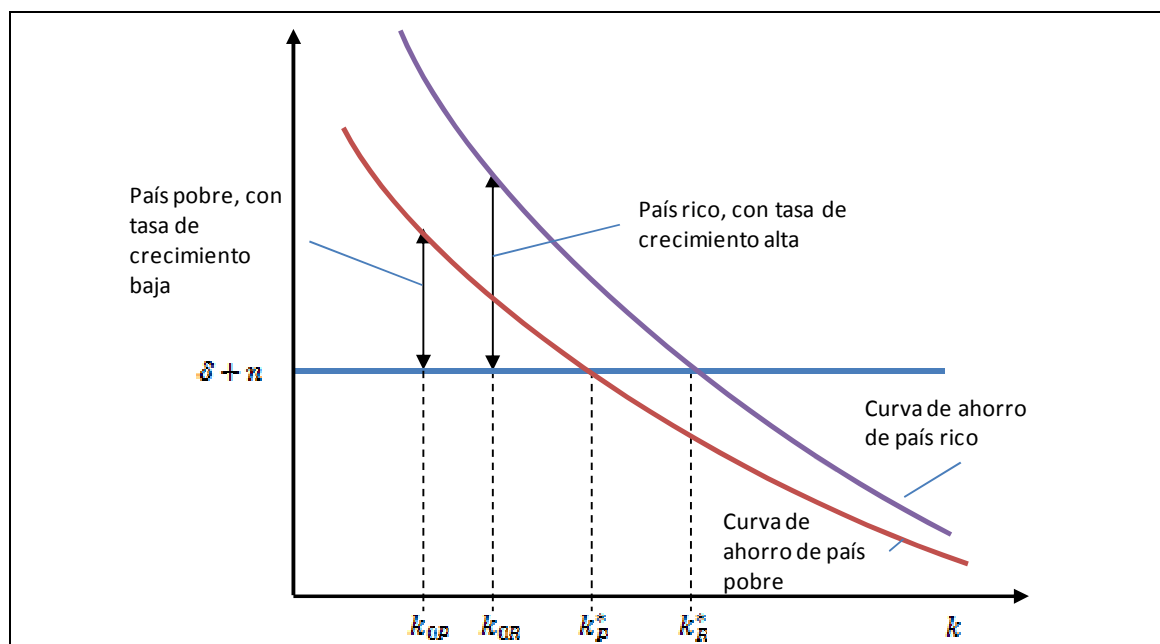


Figura 3.2. Convergencia absoluta y condicional en el modelo neoclásico

Fuente: Sala-i-Martin (1994: 26).

La comprobación de la hipótesis de convergencia sólo requiere estudiar si la correlación entre la renta de una unidad económica y su tasa de crecimiento es negativa; esto resulta sencillo de comprobar gráficamente representando, por ejemplo, el logaritmo de la renta per cápita frente a la tasa de crecimiento media anual. Sin embargo, el estudio empírico de la convergencia condicional se complica debido a que, como se verá al cuantificar la duración de las transiciones hasta el estado de equilibrio, la tasa de crecimiento está relacionada negativamente con el tamaño de la diferencia en logaritmo entre el capital en un instante determinado y en el estado de reposo. Por tanto, resulta necesario mantener constante el valor de  $k^*$  y determinar, a partir de aquí, la relación entre el crecimiento y el capital.

El cumplimiento de una restricción tan severa como la requerida por el proceso de  $\beta$ -convergencia absoluta, en cuanto a igualdad máxima de parámetros entre distintas economías (lo cual, además, posee una nula base empírica), hizo que a principios de los noventa los modelos neoclásicos se centraran en la convergencia condicional. Los trabajos seminales en este contexto, como Barro y Sala-i-Martin (1992) y Mankiw et al. (1992) desencadenaron, en términos de Monfort (2008: 4) *"a huge amount of literature attempting to empirically detect and measure the extent of Beta-convergence in various contexts"*.

Barro y Sala-i-Martin (1992) destaca como conclusión más significativa respecto a los planteamientos aportados por los diferentes modelos neoclásicos en economías cerradas el hecho ya señalado de que los ratios de crecimiento per cápita se encuentran inversamente relacionados con el nivel inicial de renta individual. Como se acaba de indicar, en economías similares en términos de preferencias y tecnologías, los países o regiones pobres crecen más deprisa que los ricos y, por consiguiente, existe una fuerza que promueve la convergencia del output y de la renta per cápita.

Si la relación entre el output y el capital responde a  $y = f(k)$ , la evolución del capital en esta economía se obtiene como:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - c - (\delta + g + n)k \quad (3.1)$$

Al estudiar el modelo Solow-Swan se obtenía la expresión del ratio de crecimiento del consumo al aplicar la condición de primer orden en la optimización de la función de utilidad:

$$\gamma_c \equiv \frac{dc/dt}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(k) - \delta - \rho] \quad (3.2)$$

En el estado de equilibrio las cantidades nominales de output, capital y consumo no varían, mientras que, en términos per cápita, crecen según  $g$ , el ratio exógeno de progreso tecnológico.

Las dinámicas de transición se pueden determinar mediante la log-linealización de las ecuaciones (3.1) y (3.2) alrededor del estado de equilibrio. Si la naturaleza de  $y(t)$  corresponde a una tecnología Cobb-Douglas, se obtiene:

$$\log[y(t)] = \log[y(0)] \cdot e^{-\beta t} + \log[y^*] \cdot (1 - e^{-\beta t}) \quad (3.3)$$

El interés se centra en el parámetro  $\beta$ , dado que gobierna la velocidad de ajuste al estado de equilibrio. Se puede obtener a través de la fórmula:

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \left\{ \psi^2 + 4 \left( \frac{1-\alpha}{\theta} \right) (\rho + \delta + \theta g) \left[ \frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha} - (n + \delta + g) \right] \right\}^{1/2} - \psi \right] \quad (3.4)$$

Con  $\psi = \rho - n - (1 - \theta)g > 0$ .

Barro y Sala-i-Martin (1992) expresa el ratio medio de crecimiento de  $y$  en un intervalo temporal comprendido entre 0 y un valor concreto  $T$ :

$$\frac{1}{T} \log \left[ \frac{y(T)}{y(0)} \right] = g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \cdot \log \left[ \frac{y^*}{y(0)} \right] \quad (3.5)$$

Esta ecuación revela que cuanto mayor sea el valor de  $\beta$  más se incrementará el grado de respuesta del ratio de crecimiento medio en el proceso de reducción del salto entre  $y^*$  e  $y(0)$ : o sea, aumentará la velocidad de convergencia hacia el estado de equilibrio.

El estudio destaca que el modelo propuesto implica convergencia condicional, dado que los términos  $y^*$  y  $g$  difieren entre economías. Como se ha indicado, desde un punto de vista empírico resulta complejo mantener fijos estos términos para poder estimar el valor de  $\beta$ , aunque, en el análisis por parte de estos autores de datos referentes a la economía

estadounidense (se comentará en una sección posterior), se constata que las diferencias de estos parámetros son menores que en otros contextos, por lo que no se necesitaría diferenciar, en principio, entre convergencia absoluta y condicional.

Por su parte, Mankiw et al. (1992) enfoca su análisis empírico a la constatación de la posible consistencia del modelo de crecimiento de Solow (como se ha señalado, uno de los objetivos centrales de la medida de la convergencia). Este trabajo introduce una modificación (*an augmented Solow model*) en el patrón básico al incorporar el factor de capital humano al ya existente de capital físico, lo que proporciona una explicación adecuada de los datos manejados; en efecto, las predicciones realizadas se confirman con mayor proximidad.

La variación planteada por estos autores responde a que el modelo original predice correctamente el sentido de los efectos del crecimiento en variables como el ahorro o la población, pero no infiere de manera adecuada las magnitudes. Un aspecto relevante a la hora de considerar las variables de control es que la acumulación de capital humano puede estar correlacionada con los ratios de ahorro y de crecimiento de la población, por lo que su omisión sesgaría los coeficientes estimados de dichas tasas. Sala-i-Martin (1994: 28) sostiene que “*el modelo de Solow ampliado para incorporar el capital humano es únicamente una forma de argumentar que la participación del capital relevante es mayor que la participación del capital físico*”.

De hecho, la inclusión del capital humano puede modificar de forma relevante tanto los aspectos teóricos como el análisis empírico de datos. Por ejemplo, al considerar el modelo endógeno de acumulación de capital humano se asume que, aunque existen retornos decrecientes de capital físico cuando este capital humano se mantiene constante, los retornos de todo el capital (incorporando la agregación de ambos) se consideran constantes.

En base a lo expuesto, la función de producción del modelo aumentado de Solow se expresa como:

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\beta [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta} \quad (3.6)$$

$H(t)$  representa el stock de capital humano; se asume que  $\alpha + \beta < 1$ , condición necesaria para garantizar la existencia del estado de equilibrio<sup>31</sup>. Si  $s_k$  es la fracción de renta invertida en capital físico y  $s_h$  la correspondiente al capital humano, se deduce la siguiente evolución económica:

$$\frac{dk}{dt} = s_k y(t) - (n + g + \delta) \cdot k(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{dh}{dt} = s_h y(t) - (n + g + \delta) \cdot h(t) \quad (3.8)$$

---

<sup>31</sup> Si  $\alpha + \beta = 1$  se incumple la existencia de retornos decrecientes para todo el capital y no se alcanza el *steady-state*.

Tras obtener las expresiones de  $k^*$  y  $h^*$  (capital y labor en el equilibrio), se puede demostrar que la renta per cápita depende del crecimiento de la población y de la acumulación de capital físico y humano<sup>32</sup>:

$$\log y(t) = \log A(0) + gt \cdot \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \log(n + g + \delta) + \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \log(s_k) + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \log(s_h) \quad (3.9)$$

Existe una formulación alternativa, que permite expresar la renta como función del ratio de inversión en capital físico y del nivel en el equilibrio del capital humano:

$$\log y(t) = \log A(0) + gt + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(s_k) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(n + g + \delta) + \frac{\beta}{1 - \alpha} \log(h^*) \quad (3.10)$$

Esta expresión es prácticamente similar a la correspondiente a la formulación inicial de Solow (ver nota al pie 32), pero considerando el capital humano como componente de un término de error: esto demuestra la relevancia de introducir el último sumando para prevenir el sesgo de los coeficientes.

Las dos expresiones de  $y(t)$  representan dos maneras de realizar las regresiones: (i) a través de la ecuación (3.9), considerando la acumulación de capital humano en términos de  $\log(s_h)$ ; o (ii), estimando la ecuación (3.10), en la que la influencia de dicho capital se expresa mediante  $\log(h^*)$ . Los resultados obtenidos por un camino u otro son diferentes: lo recomendable es discriminar la ecuación a considerar en función de los datos disponibles.

Mankiw et al. (1992) considera también que el modelo de Solow no predice convergencia absoluta; al contrario, implica que las naciones alcanzan estados de equilibrio distintos. Expresado de otro modo, la renta per cápita en un determinado país converge al valor de su *steady-state*, por lo que se verifica convergencia condicional. La inclusión en el modelo de las diferencias en ratios de ahorro y crecimiento de la población confirma la convergencia de estados cuyo comportamiento se consideraba, en estudios previos, como divergente.

En una sección posterior se describen los resultados más significativos de los estudios empíricos considerados en Mankiw et al. (1992). El empleo del modelo de crecimiento aumentado de Solow para el análisis de las diferencias internacionales en renta per cápita permite alcanzar las siguientes conclusiones:

- El capital recibe aproximadamente su retorno social, por lo que no existen externalidades relevantes respecto a la acumulación de capital físico.

<sup>32</sup> La expresión equivalente en el modelo básico de Solow es:

$$\log y(t) = \log A(0) + gt + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(s) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(n + g + \delta) + \delta$$



- La incorporación al patrón básico de Solow de las modificaciones descritas altera la cuantificación de la elasticidad de la renta respecto al ratio de ahorro, obteniéndose un resultado muy superior en el planteamiento de Mankiw et al. (1992).
- En el modelo básico un elevado crecimiento de la población reduce la renta porque el capital disponible debe repartirse de un modo más prudente entre los trabajadores. Sin embargo, en el modelo aumentado este comportamiento todavía resulta más restrictivo, dado que un incremento notable de la población supone una reducción apreciable de los factores de productividad. De nuevo, las diferencias cuantitativas son importantes.
- La trascendencia otorgada por el modelo modificado a las variables de ahorro, educación y crecimiento de la población explican en un grado muy destacado<sup>33</sup> las variaciones internacionales y diferencias en renta entre países.

Con anterioridad a los dos trabajos descritos y muy próximo a sus planteamientos, Baumol (1986) procede a analizar el crecimiento en productividad, PIB y exportaciones de economías industrializadas, empleando para ello un extenso conjunto de datos, que abarcan un horizonte histórico ligeramente superior a los cien años (desde 1870 hasta 1979). Una de las principales observaciones del estudio empírico es, según Baumol (1986: 1073), *“the remarkable convergence of output per labor hour among industrialized nations”*. Tal y como se ha indicado, las observaciones confirman una fuerte correlación inversa entre la productividad de un país (en este caso, referida a su valor en 1870) y el ratio medio medio de crecimiento desde entonces. El estudio sugiere, además, que el fenómeno de la convergencia se extiende a economías intermedias y a economías planificadas de manera centralizada, de modo que sólo los países menos desarrollados dejan de mostrar tal tendencia.

Resulta interesante la reflexión que se plantea sobre los reducidos ratios relativos de crecimiento de productividad de USA respecto a los de otros estados, como Alemania o Japón. En términos de Baumol (1986: 1073): *“this may be no more than a manifestation of the convergence phenomenon, which requires countries that were previously behind to grow more rapidly”*.

DeLong (1988) constituye una revisión de los resultados proporcionados por Baumol (1986). A pesar de la coherencia de los efectos descritos, se constata que las regresiones utilizadas incorporan un conjunto de naciones, que se identifican *ex post* como ricas y que se han desarrollado satisfactoriamente; como señala Sala-i-Martin (1994), *“la existencia de convergencia entre los países estudiados, por lo tanto, estaba poco menos que garantizada”*. La exclusión de la muestra de países actualmente pobres reduce el alcance de dichos resultados, dado que el planteamiento adecuado requiere la identificación *ex ante* de este conjunto: es decir, una regresión en la que constasen tanto países que han convergido junto a otros que, en 1870, estuviesen bien posicionados y pareciese que fueran a converger. DeLong (1988) incrementa la muestra original con naciones que parecían ricas en dicho año, sin

---

<sup>33</sup>Mankiw et al. (1992:407): *“The model explains about 80 percent of the international variation in income per capita, and the estimated influences of physical—capital accumulation, human—capital accumulation, and population growth confirm the model's predictions”*.

considerar la evolución posterior. Así, países como España, Brasil o Irlanda parten de unos niveles relevantes de renta per cápita, aunque, con posterioridad, muestran un comportamiento divergente.

Además, la importancia de los datos de renta en el año de partida como elemento de configuración de la muestra implica estudiar los errores de estimación y su influencia en los resultados del proceso de crecimiento. DeLong (1988) detecta errores en la formulación del modelo de regresión temporal, planteando, en su lugar, un sistema de dos ecuaciones con dos errores aleatorios, que no han de estar correlacionados y que deben verificar una relación acotada entre sus varianzas.

La nueva investigación desarrollada en el estudio obtiene resultados muy diferentes a los registrados en Baumol (1986). Según DeLong (1988: 1148), *"the long-run data do not show convergence on any but the most optimistic reading"*. Es decir, no se verifica que naciones en disposición de asimilar de manera rápida la tecnología industrial hayan convergido o alcanzado los niveles de los países líderes. El estudio concluye destacando que las fuerzas que conducen a la convergencia parecen más débiles que las que impulsan la divergencia: esto desmonta la creencia en un largo plazo en el que la transferencia tecnológica se produce de manera inevitable, constituyendo el factor principal del crecimiento económico. DeLong (1988) se posiciona en la línea argumental del comportamiento endógeno de Romer (1986), coincidiendo en que el salto en rentas entre países ricos y pobres tiende a ampliarse.

Barro (1989) se centra en el análisis de posibles inconsistencias de resultados experimentales frente a los teóricos, tanto de modelos neoclásicos como endógenos. En el primer caso se considera la no correlación detectada entre los ratios de crecimiento per cápita con el nivel inicial de producto per cápita, lo que entraría en conflicto con el asume básico de la relación inversa entre ambas variables. Los resultados experimentales corroboran una idea ya expuesta al analizar el concepto de  $\beta$ -convergencia: cuando se mantienen constantes las condiciones de partida del capital humano (medidos en término de matriculaciones en escuelas de Primaria y Secundaria), existe evidencia de un crecimiento más rápido de países con menor producto per cápita. Por su parte, los países con mayor capital humano se caracterizan por ratios más elevados de inversión de capital físico en PIB aunque, por el contrario, presentan ratios de fertilidad más reducidos. Estos resultados se muestran coherentes con las predicciones dimanadas de los modelos endógenos de crecimiento.

Concluimos este apartado retomando la diferenciación planteada sobre  $\beta$ -convergencia absoluta y condicional, pero considerando sus implicaciones de cara a planteamientos de política regional. De la Fuente (1996) observa que el primer caso implica una tendencia a que se igualen las rentas per cápita de todos los integrantes de un estado. Esto no quiere decir que la desigualdad desaparezca, dado que pueden producirse perturbaciones, con efecto transitorio, que afectarán de modo distinto a unas regiones que a otras. La política regional debe estar orientada, en tales supuestos, a corregir las incidencias en estos períodos. Según De la Fuente (1996: 14) *"funcionaría más como un mecanismo de reparto de riesgos que como una política tradicional de fomento del desarrollo"*. Frente al planteamiento defendido por Barro y Sala-i-Martin en sus estudios de la década de los noventa, las políticas de impulso tendrían

cierta justificación como instrumento de mejora de la convergencia si se centraran en la reducción de las diferencias en niveles iniciales de renta.

En el caso de  $\beta$ -convergencia condicional el planteamiento es distinto: cada región convergerá, en principio, a su propio *steady-state*, aunque éstos pueden ser muy diferentes entre sí. De este modo se mantendrían las disparidades entre territorios, así como las posiciones relativas de los mismos. De la Fuente (1996: 14) indica que “*los pobres tenderían a seguir siéndolo, y los ricos también*”. En este contexto las políticas regionales se deberían enfocar a corregir los factores que provocan las diferencias entre rentas en los estados estacionarios.

### 3.3.2 Observaciones a la hipótesis de $\beta$ -convergencia

La dicotomía existente entre el asume central de rendimientos decrecientes en los modelos neoclásicos y el de rendimientos constantes y crecientes en el caso endógeno constituye, en esencia, la base de las opiniones contradictorias respecto al cumplimiento de la hipótesis de  $\beta$ -convergencia.

En respuesta a las críticas aparecidas durante finales de la década de los ochenta respecto a los planteamientos neoclásicos, Mankiw et al. (1992) responde con una interesante reflexión al indicar que el modelo de Solow (en especial en su variante aumentada, incorporando factores de acumulación del capital humano) proporciona respuestas adecuadas y coherentes, en términos de comportamiento de variables económicas, respecto a los resultados empíricos. Por ejemplo, los ratios de retorno resultan consistentes con el patrón neoclásico. Sin embargo, esto no significa que el modelo de Solow constituya una teoría completa de crecimiento: los elementos que los autores neoclásicos consideran como exógenos –el ahorro, la variación de la población, los fenómenos de cambio tecnológico- poseen una importancia crucial para poder comprender los fenómenos económicos. Bajo el enfoque de Mankiw et al. (1992) la vía neoclásica conduciría a predicciones acertadas del proceso de crecimiento (que señalan, por tanto, el alcance de la convergencia –al menos condicional), mientras que los modelos endógenos responden al interés de identificar y comprender los mecanismos subyacentes del cambio, aunque con una pérdida de capacidad predictiva. Se trata de un planteamiento muy simplificado, como se podrá apreciar al comprobar los resultados de los estudios experimentales, pero que puede ilustrar determinados aspectos de la visión de las investigaciones a principios de la década de los noventa.

Por su parte, Sala-i-Martin (1994) expone las siguientes conclusiones a partir del estudio de diferentes análisis empíricos:

- Existen evidencias constatadas de la presencia de convergencia condicional.
- La velocidad de convergencia es muy uniforme entre las observaciones realizadas, encontrándose alrededor del 2% anual. Este sorprendente factor de “*universalidad del 2%*”, en términos de Mora (2002: 102), permite identificar como 35 los años necesarios para reducir la divergencia inicial a la mitad respecto del estado estacionario. Sala-i-Martin (1994) destaca que se trata de una velocidad muy lenta. En la sección posterior, centrada en la revisión de estudios empíricos, se analiza la

influencia de este resultado en los porcentajes de capital físico y humano respecto al total.

- El factor con más peso en la tasa de crecimiento es la tasa de ahorro e inversión. También resulta relevante la inversión en economía.
- Las políticas económicas incorrectas poseen gran influencia en la reducción de las tasas de crecimiento. Barro (1989) estudia precisamente la influencia en el crecimiento de las actuaciones gubernamentales, destacando el peso del consumo público y de las distorsiones e inestabilidades.

Sin embargo, en otras investigaciones, como Becker, Murphy y Tamura (1994), se cuestiona el modelo neoclásico y, por tanto, las previsiones de convergencia. Este estudio se centra en la relación entre crecimiento y natalidad, señalando la escasa atención prestada tanto por el modelo malthusiano como por el neoclásico al capital humano (evidenciada en los planteamientos endógenos alternativos). El patrón malthusiano sostiene que las tasas de fallecimiento disminuirán y las de natalidad aumentarán cuando las rentas excedan el nivel de equilibrio, sucediendo lo contrario para rentas por debajo de dicha cota. Por su parte, también es posible deducir del planteamiento neoclásico que el stock de capital crece más lentamente cuando la renta per cápita excede el nivel de capital de equilibrio, acaeciendo lo contrario si es inferior: según Becker et al. (1994) esta relación explicaría el comportamiento de los países desarrollados, pero fracasa al considerar la globalidad de naciones. Sin embargo, la investigación de Sala-i-Martin (1994) considera el enfoque neoclásico para estudiar el crecimiento espectacular en la década de los ochenta de los países “*milagro*” (como los del este asiático), que constituían economías rezagadas, atribuyendo esta evolución a elevadas tasas de ahorro e inversión.

El planteamiento alternativo de Becker et al. (1994: 324) consiste en incorporar el capital humano a las aproximaciones malthusianas y neoclásicas: “*Since human capital is embodied knowledge and skills, and economic development depends on advances in technological and scientific knowledge, development presumably depends on the accumulation of human capital*”. Para ello se asume que los ratios de retorno de las inversiones en capital humano aumentan –en vez de disminuir– cuando el stock de capital humano se incrementa, al menos hasta valores muy elevados de éste (cuando se requiere un esfuerzo incremental muy elevado para absorber más conocimiento). Ello es debido a que el capital humano es el producto de sectores como el de la educación, que emplean sus inputs de manera más intensiva que los que producen capital físico<sup>34</sup>. Por tanto, la producción de capital humano es intensiva en capital humano y requiere de más cantidad unitaria que otros factores para obtener un determinado *output*. En contraposición, los ratios de retorno de las inversiones en capital físico disminuyen cuando su stock aumenta (comportamiento neoclásico), es decir, se emplea de una manera tan intensa como en el caso del consumo.

---

<sup>34</sup> La educación emplea una fuerza laboral altamente cualificada, tanto profesores como investigadores. Los ratios de retorno son reducidos cuando existe poco capital humano. Pueden experimentar un descenso.

En este modelo la natalidad se considera endógena. Como en aproximaciones históricas previas, se supone que el ratio de descuento, aplicado por la generación actual al consumo per cápita respecto a futuros descendientes, depende de manera negativa de la natalidad presente. Es decir, el comportamiento decreciente de la utilidad marginal implica que el ratio de descuento aplicado a cada hijo disminuye cuando el número de éstos aumenta. Becker et al. (1994) lo modela con la siguiente función de utilidad:  $V_t = u(c_t) + a(n_t) \cdot n_t \cdot V_{t+1}$ . Los términos  $V_t$  y  $V_{t+1}$  se refieren a las utilidades de los padres y de cada hijo;  $c_t$  representa el consumo paterno;  $n_t$  es el número de hijos. Se verifica:  $u' > 0$  y  $u'' < 0$ ; el grado de altruismo por hijo,  $a(n_t)$ , evoluciona negativamente respecto al número de hijos.

Se procede al análisis de las consecuencias de estos planteamientos en el caso del capital humano. Para ello se representa el capital humano por trabajador,  $H$ , frente a la misma variable retardada una unidad temporal (no se considera el efecto del capital físico). Se distinguen tres puntos relevantes (ver Figura 3.3):

- En el origen, con  $H = 0$ , el ratio de retorno de las inversiones en capital humano es bajo, aunque el ratio de descuento de futuros consumos,  $(a_n)^{-1}$ , tiene un valor elevado, asociado a la evolución de la natalidad<sup>35</sup>. Dado que el ratio de descuento es superior al de retorno de las inversiones se verifica que  $H = 0$  es un punto estacionario, que es además localmente estable: la economía retorna al origen, aun cuando el capital humano esté creciendo, mientras la cantidad invertida sea menor que el capital gastado.
- El asume inicial del modelo considera que la cantidad invertida en capital humano continúa creciendo mientras así lo haga su stock, aunque la demanda de hijos decrece, al ir resultando más caros sus cuidados. La situación final depende del comportamiento del ratio de retorno:
  - Si decae en el largo plazo (con  $H$  alcanzando valores elevados), se alcanza un segundo punto estacionario,  $H^*$ , en el que se satisface que el ratio de retorno coincide con el ratio de descuento (caso (a) de la Figura 3.3).
  - En el caso de una evolución asintótica del ratio de retorno, el término  $H^*$  haría referencia a un ratio constante de crecimiento en capital humano (caso (b) de la Figura 3.3), representado por las curvas  $h$  y  $h'$ , que representan, tanto en este caso, como en el anterior, la relación entre  $H_{t+1}$  y  $H_t$ .
- Existe un tercer punto a considerar,  $\hat{H}$ , que resulta inestable: las desviaciones negativas conducen hacia el origen y las positivas hacia  $H^*$ . El significado de  $\hat{H}$  es que corresponde a un estado en el que un padre sería indiferente a reducir o incrementar el capital humano de sus hijos.

Los estados estacionarios  $H = 0$  y  $H = H^*$  son localmente estables dado que las curvas  $h$  y  $h'$  están por debajo de la recta de equilibrio  $H_{t+1} = H_t$  para  $H < \hat{H}$  y por encima de la misma una vez superado dicho punto.

<sup>35</sup> El valor de  $n$  es alto cuando  $H$  es bajo, ya que en esta fase el cuidado de los hijos resulta barato.

Como se puede apreciar, el modelo conduce a dos estados estacionarios estables: por una parte, a un *steady-state* subdesarrollado, con reducido capital humano y bajos ratios de retorno de las inversiones en dicho capital; y, por otro lado, a un estado desarrollado, caracterizado por altos ratios de retorno, en el que, incluso puede manifestarse un crecimiento continuado del capital humano.

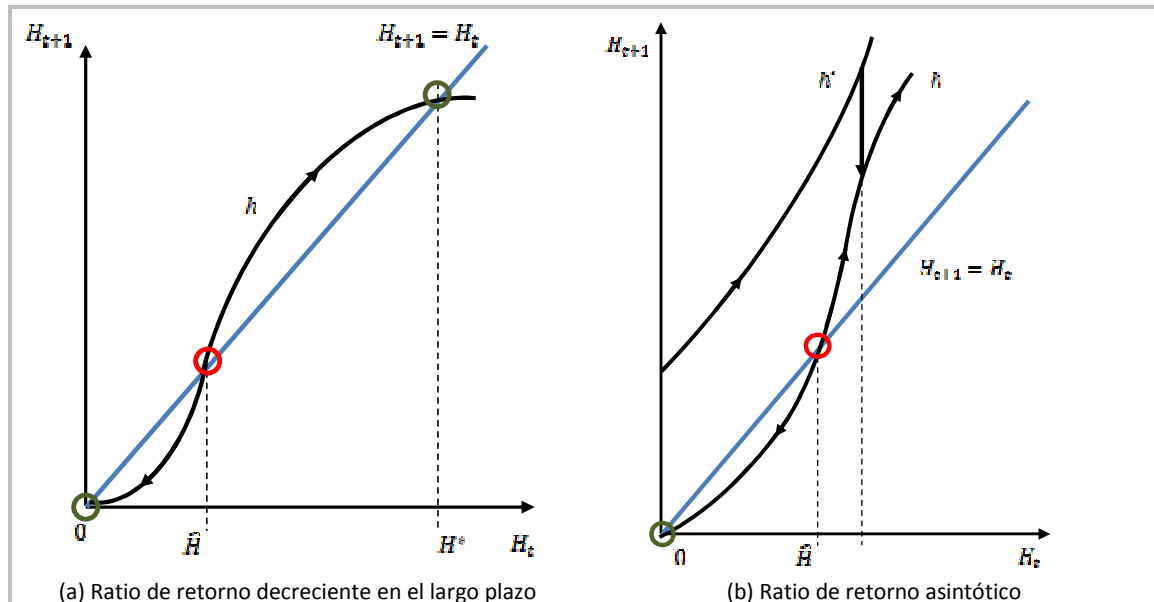


Figura 3.3. Dinámicas de transición en el modelo Becker et al. (1994).

Fuente: Becker et al. (1994: 328-329).

La introducción del capital físico no altera significativamente la evolución del modelo, aunque su equilibrio depende, además, del grado de complementariedad entre dicho capital y el humano.

Las economías subdesarrolladas permanecen en ese estado hasta que acceden al suficiente nivel de tecnología o, por otros medios, consiguen desplazar la curva que relaciona la variable retardada por encima de la línea de estado estacionario en  $H = 0$  o aumentar el stock de capital humano por encima de  $\hat{H}$ . Del mismo modo, una economía se mantendrá en el nivel de desarrollo hasta que un desastre (guerras, catástrofes naturales...) destruya suficiente capital humano, verificándose  $H < \hat{H}$ , o trasladando la relación de retardo por debajo de la recta estacionaria. Estas modificaciones pueden provocar cambios permanentes o únicamente transitorios. Becker et al. (1994: 345) hace referencia, en este contexto, al papel de la *suerte* en el desarrollo de las sociedades: "*Considerable luck is needed in the timing and magnitude of shocks to give a sufficiently big push to investments in human and physical capital*". La incidencia de este factor es altamente improbable, aunque puede constituir la respuesta a la primacía de las sociedades occidentales desde el siglo XVII.

Los planteamientos en el contexto de la fertilidad hacen referencia al nacimiento de muchos o pocos niños, a las inversiones en cada uno de los hijos y en la acumulación en el largo plazo del capital físico. Aunque el análisis de Becker et al. (1994) es más profundo, resulta posible sintetizar la relación entre capital humano y tasas de natalidad en los siguientes términos:

cuando el primer factor es abundante, los ratios de retorno de las inversiones en capital humano son altos respecto a los ratios de retorno de los hijos, sucediendo lo opuesto cuando el capital humano se caracteriza por su escasez. Esto supone considerar que se alcanzan dos estados estables de equilibrio: (i) sociedades con una limitación en dicho capital humano, que se caracterizan por familias de gran tamaño, en las que se invierte poco en cada miembro; y (ii) economías con abundante capital humano, optando, en principio, por núcleos familiares reducidos, con elevada inversión en sus integrantes.

Frente a planteamientos similares al expuesto, que persiguen el enriquecimiento y mejora del modelo neoclásico, Quah (1993) desarrolla una crítica severa a la determinación de la  $\beta$ -convergencia mediante los métodos habituales de regresión, empleando, para ello, la paradoja de Galton. Previamente Friedman (1992) recupera una interesante aportación de Harold Hotelling, realizada en 1933, en la que se identificaba que un aparente proceso de convergencia no era tal, sino que respondía a una falacia estadística, causada por el método de agrupación empleado para analizar los datos. Este asume erróneo (paradoja de Galton) suele encontrarse muy presente en los cálculos de regresión y, de manera particular, en el ámbito de investigaciones econométricas<sup>36</sup>. Por ejemplo, si se acude al planteamiento clásico de Barro para confirmar la hipótesis de  $\beta$ -convergencia en un conjunto de economías se procederá al cálculo de la regresiones transversales de los ratios de crecimiento respecto a los niveles iniciales: lo habitual es considerar el PIB por hora de trabajador en el año de partida frente al ratio de crecimiento medio anual en todo el período temporal. El resultado puede variar, drásticamente, si el estudio se realiza con la variable PIB por hora de trabajador en el año final (evitándose de este modo el efecto de agrupamiento). Friedman (1992) destaca, en este contexto, el interés de optar por el análisis de la posible disminución de la varianza entre unidades económicas individuales, una idea que se concreta en el estudio de la  $\sigma$ -convergencia. Por su parte, Zimmerman (1992) extrapola al ámbito económico el estudio original de Galton respecto a la evolución de las estaturas entre padres e hijos, a fin de analizar el componente hereditario en la distribución de rentas y su incidencia en la igualdad de oportunidades presente en la sociedad. Interesa destacar que las estimaciones recopiladas en la literatura anterior sobre esta cuestión recogen unos valores de la elasticidad de las ganancias de los hijos respecto de las de los padres que resultan muy inferiores a las obtenidas en el estudio, al incorporar métodos de corrección de los errores de medida. La contaminación original de los datos puede provocar, por tanto, un sesgo a la baja de la estimación obtenida.

Como se indicó al analizar el concepto de convergencia, Quah (1993) recopila diferentes aproximaciones a este término, introduciendo un planteamiento de reducción de la dispersión muy cercano al concepto clásico de  $\sigma$ -convergencia. La cuestión central de la investigación es que, estableciendo la correspondiente analogía con la paradoja de Galton, se puede concluir

---

<sup>36</sup> La constatación empírica de la regresión hacia la media —entendida como un retroceso hacia la mediocridad— constituyó un conflicto en la obra de Galton, quien defendía una mejora de las características de los individuos a través de los mecanismos de la herencia, no reflejada en la constatación empírica. Friedman (1992) señala un ejemplo de esta paradoja, indicando que en una regresión lineal entre dos variables,  $x$  e  $y$ , la correspondiente a  $y$  sobre  $x$  es más plana respecto al eje de abscisas que la de  $x$  sobre  $y$ .

que el empleo de las regresiones de Barro no proporciona evidencias de la convergencia en el sentido expuesto. Mora (2003: 62-63) resume el planteamiento de Quah indicando que “*la correlación negativa no es el resultado de que la distribución de los países cumpla con los criterios de convergencia, sino el cumplimiento de la Falacia de Galton originada por derivar implicaciones dinámicas del comportamiento estático de la distribución de los países en el tiempo, que se develaría si se analiza la distribución de los países a lo largo del tiempo*”.

En este sentido se considera que las economías tendrán el mismo nivel de renta en el largo plazo (o la misma evolución en el crecimiento) si se controlan de manera apropiada las diferencias exógenas (capital humano, políticas públicas, etc.). Esto implica una transición dinámica hacia una pauta subyacente de crecimiento, que debe ser única para todas las naciones, y que se manifestará en una correlación entre los ratios medios de crecimiento y las condiciones iniciales. Sin embargo, resulta posible demostrar matemáticamente, a través de la falacia de Galton, que el planteamiento inverso resultaría incorrecto: una correlación negativa de las variables expuestas no supone que la distribución *cross-section* inicial colapse necesariamente hacia el estado estacionario. La inferencia falsa, en términos de Galton, tendría el siguiente enfoque: las condiciones iniciales negativas constituyen una fuerza que proporciona el impulso para que la distribución evolucione hacia la pauta común de crecimiento, mientras que las perturbaciones empujan en el sentido opuesto. Quah (1993) estudia las relaciones de regresión entre las rentas de los países, considerando que son independientes y se encuentran idénticamente distribuidas, y comprueba, considerando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que es posible que la distribución *cross-section* llegue incluso a divergir aunque las condiciones iniciales de la regresión muestren una correlación negativa entre los ratios medios de crecimiento y sus niveles iniciales.

Las conclusiones expuestas no experimentan cambios al eliminar el asume referente a la independencia e idéntica distribución de las rentas: los cálculos resultan más complejos y la representación exige gráficos en 3-D, pero la heterogeneidad o las relaciones de dependencia no alteran sustancialmente la evolución dinámica. En esta investigación, Quah (1993) plantea dos vías alternativas para evaluar de una manera más transparente la hipótesis de convergencia:

- Por una parte analizando de manera visual las distribuciones *cross-section* de output por trabajador a lo largo del tiempo. Esto exige un proceso de normalización (sencillo, pero imperfecto) para poder eliminar el componente de crecimiento y de fluctuaciones asociado a la evolución económica mundial. Los análisis en este contexto resultan muy limitados en su alcance.
- El planteamiento más robusto corresponde al desarrollo a un modelo probabilístico de transiciones, a través de cadenas discretas de Markov, que permite caracterizar el estado estacionario. En una sección posterior se describe y sintetiza esta forma de medida de la convergencia.

La fuerte crítica de Quah (1993) a la evaluación de la  $\beta$ -convergencia es rechazada por Sala-i-Martin (1996) en el contexto del reconocimiento del interés empírico de este concepto y del asociado a la  $\sigma$ -convergencia. Para ello considera ejemplos en los que interesa analizar el



*“retorno a la mediocridad”*: los especialistas en cuestiones deportivas, caso de las ligas de fútbol o baloncesto, se preguntan por el tiempo que tardan equipos de alto nivel por retornar a los resultados de la media; es decir, ¿cuánto es la duración de sus ciclos de excelencia? La pregunta también resulta de interés en su formulación inversa: ¿cuál es el ratio de crecimiento hacia un nivel privilegiado que experimentan los equipos mediocres? Todo ello se puede estudiar en el contexto de los resultados de determinadas políticas (como las existentes en la liga de baloncesto profesional estadounidense), enfocadas a favorecer el tránsito hacia la mejora de la competitividad. En estos casos la dispersión existente no resulta relevante. Los análisis se deben focalizar en las medidas de  $\beta$ -convergencia.

Otro ejemplo de interés, contenido en Sala-i-Martin (1996), corresponde al estudio de economías con grados idénticos de renta, pero con estructuras diferentes: particularizando al caso de un país eminentemente agrícola, que denominaremos A, con el dominio de la tierra en manos de una pequeña clase privilegiada, la riqueza corresponderá a lo largo de las generaciones a las mismas familias, mientras que los descendientes de individuos pobres continuarán en la misma situación de desventaja. Si, por ejemplo, la economía de un país B se centra en el sector industrial, la posesión de la riqueza estará asociada a los propietarios de compañías y a un reducido grupo de emprendedores, con el conocimiento y la habilidad para identificar buenas ideas y explotarla. Las dinámicas en este caso son más variadas: determinados trabajadores de las compañías pueden optar por el emprendimiento y modificar su estatus; o, por el contrario, los hijos de los primeros emprendedores pueden no tener el nivel de sus padres y perder las fortunas originales. La ampliación del estudio de los países A y B a un número significativo de años revelará la constancia del grado de desigualdad existente (agrupaciones de individuos ricos frente a pobres) pero en el segundo caso la riqueza se encuentra asociada a familias distintas. Sala-i-Martin (1996) destaca que la economía B muestra un comportamiento de  $\beta$ -convergencia dado que el ratio de crecimiento de la renta familiar fue mayor para las familias pobres que para las ricas. Esto no sucede en A, ya que el ratio de crecimiento resulta similar para ambas tipologías. Los investigadores necesitan emplear el concepto de  $\beta$ -convergencia para identificar la proximidad de las situaciones descritas a una nación en particular y, en base a ello, estudiar cómo transformar un esquema en otro.

En el fondo, la exposición de estos ejemplos permite concretar el tipo de estudios para los que la medida de  $\beta$ -convergencia resulta idónea. De este modo las críticas de Quah (1993) se revierten en un sentido que afecta más al fondo que a la formulación de su investigación; como indica Mora (2004: 111), los análisis de Quah *“plantean cuestiones que no responde el análisis de convergencia tradicional”*. Sala-i-Martin (1996) también revisa la cuestión de la velocidad de convergencia universal, contrastando, como se verá más adelante, con el posicionamiento de Quah, recogido en un análisis posterior de este autor.

Un aspecto destacado de las formulaciones de la  $\beta$ -convergencia<sup>37</sup> planteadas hasta principios del siglo XXI es la falta general de consideración de los aspectos espaciales. LeGallo (2004: 139)

---

<sup>37</sup> Esta consideración también resulta aplicable al concepto de  $\sigma$ -convergencia.

señala que estas medidas de convergencia tratan a las regiones como si fueran “*isolated islands*”, resaltando que trabajos previos, como DeLong y Summers (1991), Mankiw (1995) y Quah (1996) advierten de la importancia de factores como el comercio entre regiones, difusión tecnológica, *spillovers*, etc. que requieren su incorporación a los estudios debido a la posible existencia de regiones geográficamente dependientes. El capítulo cuarto se centra exclusivamente en esta problemática.

Una conclusión significativa que se extrae de los primeros estudios empíricos de Barro y Sala-i-Martin y que se verá en la sección correspondiente es que la velocidad en el proceso de convergencia de las regiones de un mismo país es similar y, además, muy reducida. La lentitud de dicho proceso sugiere que la tecnología puede presentar rendimientos muy próximos a ser constantes a escala en el capital. De ahí que Mankiw et al. (1992), como se ha visto, extienda el modelo neoclásico para englobar la inversión en intangibles (factores educativos o I+D).

De la Fuente (1996) se plantea, en base a los resultados empíricos disponibles sobre la cuestión, la validez de determinadas interpretaciones de Barro y Sala-i-Martin sobre los procesos de convergencia. En primer lugar, según De la Fuente (1996: 30) “*no está claro que la convergencia regional sea absoluta y lenta*”. En base a estimaciones realizadas por Marcet (1994), Raymond y García (1994), Islam (1995) y el propio De la Fuente (1996) se comprueba que la apariencia de convergencia lenta hacia un *steady-state* único se debe al sesgo provocado por una especificación incorrecta (esto también puede producirse en estudios centrados en países). En la literatura se emplea de manera habitual la expresión *fixed effect bias*. Esto es debido a que en la ecuación básica de convergencia las variables que pueden influir sobre la tasa de crecimiento se imponen, de manera común a todas las regiones, antes de proceder a la estimación del coeficiente  $\beta$ . Actuando así: (i) no es posible aplicar un test sobre esta hipótesis de igualdad de los términos territoriales; y (ii) si este planteamiento es incorrecto las soluciones también lo serán. De la Fuente (1996: 31) señala que “*el sesgo de efectos fijos refleja la dificultad de estimar la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario sin haber fijado bien la posición de éste*”.

La solución consiste en estimar el modelo, incorporando las variables y analizando si resultan significativas: caso de no ser así y obtener que  $\beta > 0$ , se confirma la hipótesis de convergencia absoluta. La identificación de alguna variable significativa implica que se verifica convergencia relativa. Este planteamiento se simplifica en el caso de datos de panel: Marcet (1994) propone la introducción de variables ficticias regionales, que captarían las diferencias en rentas a largo plazo. Este autor realiza sus estudios empíricos con un estimador bayesiano sobre dos muestras, una de ámbito nacional correspondiente a países europeos desde 1950 a 1985 y otra con datos regionales de la EU desde 1980 a 1990. Islam (1995) mantiene un tratamiento similar al de Mankiw et al. (1992), a fin de poder comparar los resultados; por ese motivo extrae los datos de Summers y Heston (1988) aunque con diferencias en la consideración del ratio de crecimiento de la población. Por su parte, tanto Raymond y García (1994) como De la Fuente (1996) trabajan con paneles de regiones españolas (en ambos casos en el período 1955-1991), aunque este último amplía también su estudio a países de la OCDE.

Las conclusiones de los análisis citados resultan muy similares:

- Los resultados confirman el rechazo de la hipótesis de convergencia absoluta. El modelo clásico estaría mal especificado y el coeficiente de convergencia se encontraría sesgado.
- La velocidad de convergencia obtenida es muy superior a la recogida en la literatura hasta la fecha: Marcet (1994) señala que en el caso de los países sería del 11% de media, alcanzando el 23% para las regiones (dentro de un modelo de convergencia relativa, con cada unidad aproximándose a su propio estado estacionario). Estos valores implican que el porcentaje de capital en la función de producción neoclásica debería ser mayor.
- La posición inicial en la distribución de renta constituye el factor más importante para determinar la ubicación final de la renta en el *steady-state*. Precisamente el mensaje central de Marcet (1994) resulta así de contundente: los países y las regiones más pobres continuarán, de media, siendo pobres. Respecto a la medida de  $\sigma$ -convergencia, que comentaremos más adelante, las diferencias de renta se reducen sólo en una pequeña cantidad.

De la Fuente (1996), en su estudio sobre la  $\beta$ -convergencia de las CC.AA. españolas, compara los resultados del valor del coeficiente estimado mediante la ecuación básica frente al relativo a la introducción de variables ficticias regionales. El término  $\beta$  se multiplica por cuatro, pasando del 2.95% al 12.73%. El coeficiente de cada variable regional representa una estimación del estado estacionario de la Comunidad: más de la mitad son significativos. De esta manera también se rechaza la hipótesis de convergencia absoluta.

Los resultados son muy similares al analizar la  $\beta$ -convergencia entre los países de la OCDE entre 1960 y 1991. El valor de  $\beta$  pasa del 2.50% al 6.26%, lo que supone que los mecanismos de convergencia actúan con mayor intensidad en cada país que en el ámbito global. De la Fuente (1996: 35) coincide con la opinión de Marcet (1994): *“no cabría esperar una reducción significativa de la desigualdad regional o internacional en el futuro, sino más bien todo lo contrario, especialmente una vez tenemos en cuenta el impacto de las perturbaciones aleatorias. Además tampoco habría que esperar cambios significativos en las posiciones relativas de los distintos territorios”*. En este sentido, la estimación a largo plazo de la productividad relativa de cada región española, partiendo del año 1991, sugiere que las CC.AA. se encuentran muy próximas a su estado estacionario.

La segunda de las cuestiones que se debaten en De la Fuente (1996) corresponde al contenido del controvertido coeficiente de convergencia: realmente, ¿qué es lo que mide o se esconde tras este valor? Las conclusiones de Barro y Sala-i-Martin respecto a los resultados empíricos sobre convergencia se centran en dos aspectos centrales: (i) se confirma la existencia de rendimientos decrecientes de los factores acumulables y (ii) constituyen una evidencia respecto a los modelos de crecimiento neoclásicos, incorporando el concepto aumentado del capital. De la Fuente (1996) coincide en líneas generales con estas ideas, aunque en base a su propia investigación, considera muy importante el tratamiento de otros mecanismos de convergencia, iguales o más importantes que los rendimientos decrecientes: la difusión tecnológica (que se abordará al estudiar los procesos de convergencia *catching-up*), los flujos

de factores inter-regionales e inter-sectoriales, posibles efectos de *spill-over* y las relaciones entre nivel de renta y tasas de ahorro y natalidad<sup>38</sup>. Bajo este enfoque, el valor estimado de  $\beta$  representaría el efecto neto de un conjunto de fuerzas que actúan en pro y en contra de la desigualdad (un planteamiento en el que se intenta conciliar las visiones específicas sobre las dos medidas básicas de convergencia).

De la Fuente (1996) relaciona sus propios resultados empíricos con las conclusiones de Barro y Sala-i-Martin:

- Coincide en que valores positivos del coeficiente de convergencia proporcionan la evidencia de rendimientos decrecientes de los factores acumulables.
- La alta velocidad de convergencia detectada (si es correcta) debe obedecer, como se ha indicado, a otros factores y no solo a los rendimientos decrecientes.

La revisión teórica contenida en Gluschenko (2012) constituye un retorno al contenido de las fuentes primigenias que contienen la descripción de la medida de  $\beta$ -convergencia (básicamente las obras de principios de los noventa de Barro y Sala-i-Martin), con el objeto de identificar el alcance de los análisis realizados con esta herramienta. Una incorrecta comprensión del concepto ha propiciado errores en la interpretación de los resultados empíricos y en sus correspondientes implicaciones políticas. En concreto, Gluschenko (2012) identifica dos grandes bloques de falacias o, empleando su terminología, *mitos* respecto a la  $\beta$ -convergencia: (i) las teorías económicas predicen que se alcanza la convergencia entre las economías; y (ii) la presencia de  $\beta$ -convergencia sugiere decrecimiento de las diferencias en rentas. Desde una perspectiva genérica, el problema radicaría en confundir el sentido de las medidas de dispersión (agrupadas bajo el amplio concepto de  $\sigma$ -convergencia) con el relativo a la mayor velocidad de crecimiento de las economías pobres. Esta investigación enlaza, por lo tanto, con los planteamientos expuestos por Friedman (1992) y Quah (1993), desarrollados con posterioridad por otros autores, entre los que se destaca la interesante aportación de Magrini (2004). En este estudio se pregunta por la convergencia entre regiones, identificándose dos argumentos subyacentes para tratar de encontrar la solución a una cuestión básica de la ciencia econométrica: (i) no todas las aproximaciones a esta problemática parecen igualmente fiables o convincentes<sup>39</sup>; y (ii) la mayoría de los estudios empíricos emplean métodos desarrollados para analizar la convergencia entre estados, aun cuando existen diferencias significativas entre países y regiones. La consideración del tratamiento espacial (motivada porque la convergencia se produce habitualmente entre grupos de regiones contiguas geográficamente) constituye un planteamiento más robusto del problema, como se indicará en el capítulo cuarto.

Respecto al primero de los mitos sobre la  $\beta$ -convergencia (predicción de la convergencia en la renta entre las economías), Gluschenko (2012) enfatiza que las teorías de crecimiento no

<sup>38</sup> Esta relación de aspectos no se plantea como una lista cerrada. En sus estudios empíricos, Barro y Sala-i-Martin incorporan, además, los efectos migratorios, a los que De la Fuente (1996) también hace una leve referencia, junto al papel de la estructura sectorial y la localización geográfica.

<sup>39</sup> Gluschenko (2012: 2) advierte: "*In the last two decades (...) a few thousand applied researches exploiting analysis of  $\beta$ -convergence were published in the world*".

constituyen un corpus cerrado de conocimiento, sino que se encuentran en desarrollo constante, en un proceso de incorporación y solape de nuevas ideas. De hecho los modelos suelen alcanzar conclusiones contradictorias o, incluso, radicalmente opuestas. En este contexto el concepto de  $\beta$ -convergencia se identifica con uno de estos patrones, el neoclásico, en sus distintas versiones. Por tanto, la aplicación de esta medida no debe generalizarse sino llevarse a cabo teniendo en cuenta los asumes y peculiaridades inherentes a la obtención de las ecuaciones del proceso; esto, por ejemplo, se percibe al considerar los rigurosos condicionantes para el cumplimiento de la  $\beta$ -convergencia absoluta.

La consideración de las pautas seguidas en la optimización de la riqueza social, según el planteamiento de Ramsey-Cass-Koopmans o a través del tratamiento exógeno de los parámetros en el modelo Solow-Swan, permite identificar tres condiciones básicas para la verificación de las ecuaciones de convergencia:

1. Estas ecuaciones se cumplen únicamente en la vecindad del *steady-state*. Por lo tanto su aplicación requiere asumir que las pautas de crecimiento de las economías se encuentran muy cerca de las pautas de equilibrio. Resulta evidente que se trata de un asume muy riguroso, aunque Gluschenko (2012) matiza sus condicionantes al indicar que si el ratio de ahorro se mantiene constante en el período temporal considerado<sup>40</sup> las ecuaciones de convergencia resultan plenamente válidas en cualquier intervalo del proceso.
2. Debido a la construcción del modelo, las rentas per cápita deben expresarse en términos de unidades eficientes de trabajo (o de valor añadido por trabajador). El estudio de valores agregados per cápita respecto al total de personas requiere que el ratio de crecimiento de la población coincida con el del número de trabajadores (se trata de un asume común a todos los estudios). Cuando la variable output coincide con rentas de personas per cápita el escenario torna más complejo, ya que se requiere una evolución similar en el comportamiento de las rutas seguidas por los valores añadidos por trabajador y dichas rentas personales per cápita (el tratamiento de estas cuestiones no suele incluirse en los análisis empíricos, lo que parece indicar que no se tienen en cuenta). En este contexto también debe tenerse en cuenta que si el estudio se centra en regiones, éstas en absoluto pueden considerarse como economías cerradas (hipótesis de partida de los modelos considerados).
3. Las ecuaciones de  $\beta$ -convergencia resultan de aplicación si se produce crecimiento, pero no son válidas –al menos carecen de justificación teórica- cuando la economía experimenta recesión.

La verificación de un proceso de  $\beta$ -convergencia absoluta requiere, como se ha visto anteriormente, que las economías sean homogéneas, o sea, que tengan idénticos valores de los parámetros estructurales. Las ecuaciones de convergencia muestran que, en tal caso, sus pautas de crecimiento hacia el equilibrio serán iguales. En la Figura 3.4 se muestra un ejemplo de evolución, que muestra que las economías pobres alcanzarán a las ricas, de modo que, en el

---

<sup>40</sup> O sea, la economía en cuestión se ajusta al modelo Solow-Swan.

límite, con  $t \rightarrow \infty$ , las diferencias globales en renta entre economías habrán tornado a cero (la recta discontinua representa una pauta de equilibrio).

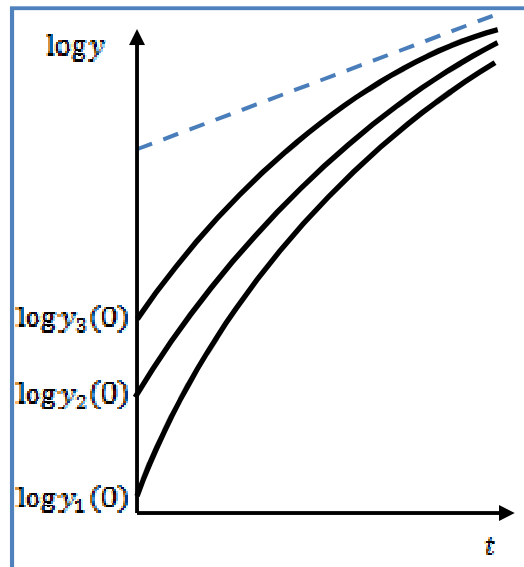


Figura 3.4. Representación de un proceso de  $\beta$ -convergencia absoluta

Fuente: Gluschenko (2012: 7).

La revisión de este planteamiento en el caso de economías heterogéneas conduce a la idea de  $\beta$ -convergencia condicional: cada economía posee su propia pauta de crecimiento hacia el equilibrio, a la que converge. Se ha visto que el modelo neoclásico predice que la renta per cápita en una economía crece más rápido cuanto más alejada está el valor de equilibrio para dicha economía. El gran problema es que no aporta más información: no indica cómo se relacionan las distintas economías. De hecho, en un contexto de  $\beta$ -convergencia condicional las economías pobres no necesitan crecer más deprisa que las ricas: si, por ejemplo, un país con rentas elevadas se encuentra muy por debajo de su pauta de crecimiento hacia el equilibrio, en comparación con el posicionamiento de un país pobre, puede evolucionar con mayor celeridad. Esta idea se visualiza en la siguiente figura, en la que se muestran dos grupos de economías homogéneas (las correspondientes a 1 y 4; y a 3 y 5) y una economía denominada 2 que posee su propia pauta de crecimiento hacia el equilibrio (al ser pobre se puede comparar con la economía 1). De manera global se observa divergencia en la renta.

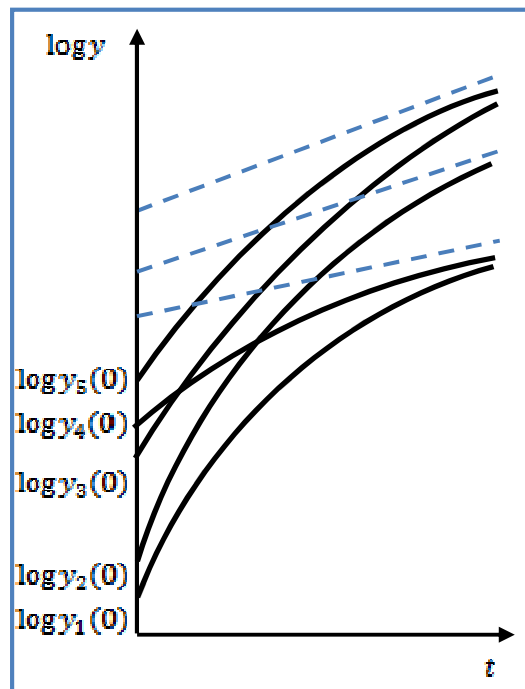


Figura 3.5. Representación de un proceso de  $\beta$ -convergencia condicional.  
Fuente: Gluschenko (2012: 7).

Aparte, el modelo neoclásico es válido sólo si el progreso tecnológico se encuentra libremente a disposición de todas las empresas: la consideración de este supuesto en las ecuaciones de convergencia supone que las pautas de crecimiento hacia el equilibrio de las economías heterogéneas deben ser paralelas entre sí. Esto se representa en la Figura 3.6:

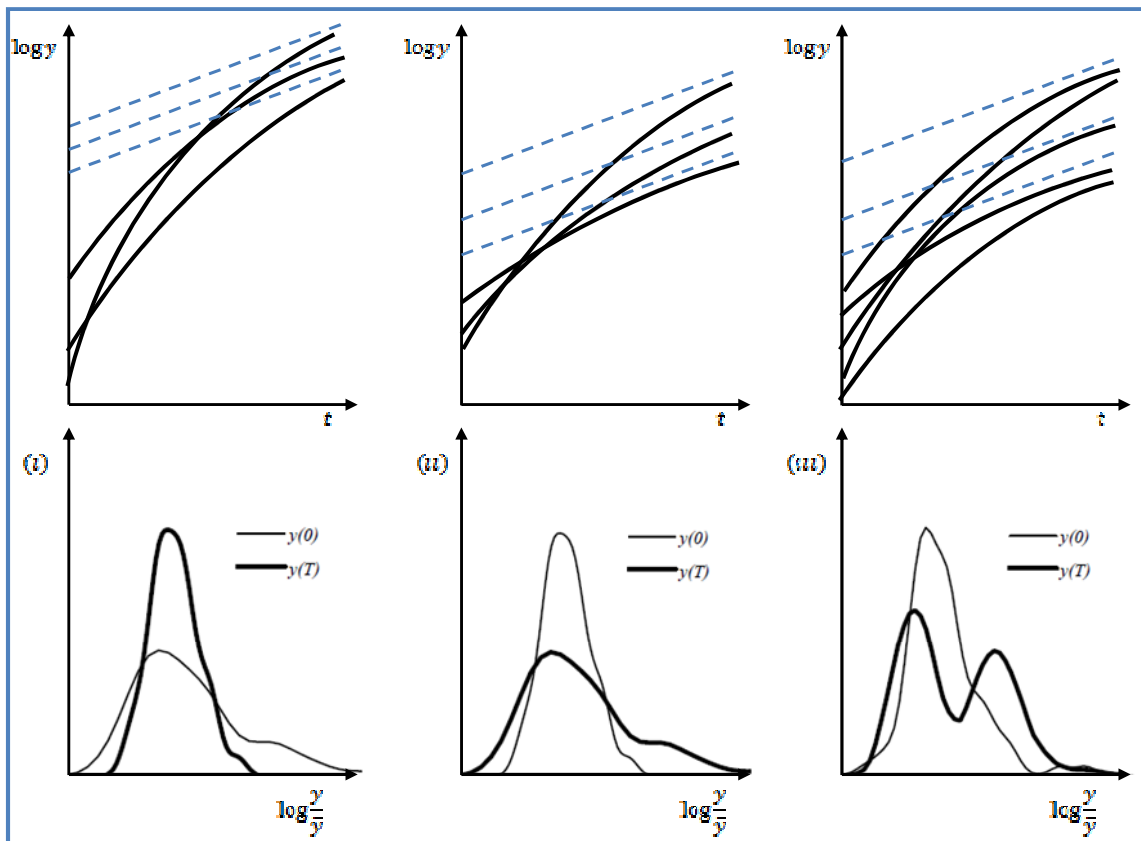


Figura 3.6. Cambios en la distribución de la renta en procesos de  $\beta$ -convergencia condicional: (i) convergencia global; (ii) divergencia en la renta; (iii) club de convergencia.

Fuente: Gluschenko (2012: 9).

El asume de ratios de progreso tecnológico idénticos entre las distintas economías no es realista porque eso supondría que el estado de la tecnología debería resultar uniforme. Si se relaja esta limitación los comportamientos no varían de manera cualitativa. Las pendientes de las rectas de equilibrio suelen cambiar, sin cambios significativos de dinámicas.

Gluschenko (2012) diferencia tres patrones de dinámicas de distribución de renta correspondientes a la  $\beta$ -convergencia condicional:

- Convergencia global de las economías: ocurre cuando la distancia entre pautas extremas de crecimiento hacia el equilibrio es menor que la extensión entre los niveles iniciales de renta. Se diferencia de la convergencia absoluta en que las diferencias en renta no desaparecen en el límite (es posible que sí se estabilicen en un determinado nivel).
- Divergencia en renta de las economías: en tal caso, la distancia descrita va aumentando.
- Polarización: se produce una convergencia local o en clubs, de modo que afecta a dos o más grupos de economías homogéneas. Bajo esta hipótesis de existencia de clubs de convergencia las desigualdades pueden aumentar o disminuir.



La evolución final, según uno de estos esquemas, se encuentra asociada a los valores de los parámetros estructurales de cada economía y de los niveles iniciales de rentas per cápita. Se puede apreciar que la  $\beta$ -convergencia condicional puede tener asociadas diferencias en renta que evolucionen de manera creciente y/o decreciente. Por tanto, en términos de Gluschenko (2012: 10), *“conditional  $\beta$ -convergence has no (applied) analytical and predictive power regarding trends of the evolution of spatial income inequality”*. Lo máximo que proporciona este supuesto es que el comportamiento de un conjunto de economías resulta compatible con el modelo de crecimiento neoclásico, pero no permite constatar cómo se comportan realmente: es decir, si las diferencias crecen o se vuelven más estrechas. En el caso específico del análisis de las desigualdades regionales sólo resulta posible afirmar que la desigualdad en rentas decrecerá si las estructuras sectoriales de todas las regiones son idénticas; ni siquiera es posible confirmar si las diferencias crecen o menguan realmente. La conclusión central de esta primera parte del estudio es: *“Given heterogeneous economies, this model can suggest nothing definite regarding the evolution of income inequality”* (Gluschenko, 2012: 12).

Esta extensa crítica no implica, como muestran otros trabajos previos, que el concepto de  $\beta$ -convergencia resulte erróneo: el problema no está en qué consiste la medida sino en una interpretación errónea, presente en numerosos estudios empíricos. Gluschenko (2012) afirma que estos análisis únicamente sirven para verificar si el comportamiento de las economías es coherente con las premisas del modelo de crecimiento neoclásico.

### 3.3.3 Condicionamiento de los estudios empíricos sobre $\beta$ -convergencia

La constatación del alcance del estado estacionario en el largo plazo por parte de las economías requiere la medición de la distancia entre el nivel de renta en un momento determinado y dicho nivel en el estado estacionario. Los asumes y previsiones del modelo neoclásico se confirman si se detecta *“una correlación parcial negativa entre crecimiento y nivel de renta, condicional al estado estacionario”* (Sala-i-Martin, 1994: 138).

Existen dos planteamientos básicos para desarrollar los estudios empíricos que deben conducir a conclusiones significativas respecto al proceso de  $\beta$ -convergencia: (i) centrar el análisis en un conjunto de economías con parámetros parecidos, como, por ejemplo, entre regiones dentro de un país; y (ii) aplicar regresiones múltiples a un agregado de unidades económicas, en las que no tiene por qué verificarse la existencia de homogeneidad. En el primer caso se trata de economías abiertas (dado que existe flujo entre las regiones) y el objetivo, dada la igualdad, entre otros aspectos, de preferencias y cultura, organización institucional y sistema de impuestos, es la identificación de  $\beta$ -convergencia absoluta. Por el contrario, el segundo escenario debería exhibir  $\beta$ -convergencia condicional: esto supone que la correlación parcial entre crecimiento y renta inicial tiene que ser negativa.

Siguiendo a Sala-i-Martin (1994), resulta interesante obtener las expresiones de las estimaciones necesarias en cada contexto partiendo de la siguiente manera de determinar la tasa de crecimiento de la renta per cápita de una economía  $i$  entre dos períodos sucesivos de tiempo (el tratamiento resulta recomendable para la comparación de países o agrupaciones supra-regionales):

$$\gamma_{i,t} = \log(y_{i,t}) - \log(y_{i,t-1}) = a - \beta \log(y_{i,t-1}) + u_{i,t} \quad (3.11)$$

El término  $u_{i,t}$  constituye un término de perturbación, asociado a variaciones transitorias de los parámetros; se asume que su media es cero, que posee la misma varianza entre economías y que es independiente en términos espaciales y temporales. Por otro lado, como resulta sencillo deducir, un mayor valor de  $\beta$  (verificándose  $0 < \beta < 1$ ) confirma mayor tendencia hacia la convergencia.

En el caso del estudio de convergencia entre regiones se plantea la estimación de la siguiente regresión no lineal, en vez de la expresada en (3.11):

$$\gamma_{it_0, t_0+T} = a - \left[ \frac{(1 - e^{-\beta T})}{T} \right] \cdot \log(y_{it_0, t_0+T}) + u_{it_0, t_0+T} \quad (3.12)$$

La tasa de crecimiento expuesta corresponde al período  $t_0$  y  $t_0 + T$ ; el término de perturbación representa en este caso la media de los errores en dicho intervalo. Sala-i-Martin (1994) justifica la elección de esta ecuación por tres motivos: (i) el término  $\beta$  proporciona directamente la velocidad de convergencia; (ii) con esta formulación  $\beta$  resulta independiente de la duración del período  $T$  de estimación<sup>41</sup>; y (iii) la linearización del modelo neoclásico en el entorno del *steady-state* conduce a una expresión similar a (3.12).

La comparación entre diferentes países supone renunciar al asume de igualdad o cercanía entre los parámetros de preferencias u organización institucional. Al descartar la convergencia a un mismo estado estacionario se requiere el empleo de una regresión múltiple: para ello la tasa de crecimiento se emplea como variable dependiente y el nivel inicial de renta, más otras variables que se entiende determinan el estado estacionario, como variables que explican el proceso. La investigación de la  $\beta$ -convergencia condicional requiere trabajar con la siguiente expresión:

$$\gamma_{i,t} = \log(y_{i,t}) - \log(y_{i,t-1}) = a - \beta \log(y_{i,t-1}) + \phi X_{i,t-1} + u_{i,t} \quad (3.13)$$

El término  $X_{i,t-1}$  agrupa al conjunto de variables que determinan el estado estacionario de la economía. Existe convergencia condicional si el coeficiente  $\beta$  de (3.13) es negativo.

La comparación entre (3.13) y (3.11) permite identificar el grave problema asociado a no considerar las variables explicativas. Si el comportamiento económico corresponde a un patrón de  $\beta$ -convergencia condicional, pero se aplica una regresión de  $\beta$ -convergencia absoluta, se estará estimando:

$$\gamma_{i,t} = \log(y_{i,t}) - \log(y_{i,t-1}) = a - \beta \log(y_{i,t-1}) + \omega_{i,t} \quad (3.14)$$

<sup>41</sup> Ello es debido a que el término  $\frac{(1-e^{-\beta T})}{T}$  es decreciente respecto a  $T$ .

El término de perturbación  $\omega_{i,t}$  representa realmente la suma de  $\phi X_{i,t-1}$  y  $u_{i,t}$ . Lo común es que la renta y las variables que determinan el estado estacionario se encuentren correlacionadas. Esto supone la introducción de un sesgo en la estimación de  $\beta$ , de modo que la estimación ofrece un valor nulo, no acorde con la realidad. Se retoma esta cuestión al considerar los estudios empíricos desarrollados en el contexto de la  $\beta$ -convergencia.

Resulta de notable interés profundizar en las aproximaciones metodológicas bajo las que se llevan a cabo los estudios empíricos. Tamás y Metiu (2013) relaciona los dos grandes bloques de trabajo:

- Por un lado, mediante regresiones transversales, en base al planteamiento del modelo de Solow; lo habitual es trabajar con la versión aumentada, según la revisión de Mankiw (1992).
- Otra opción corresponde a la aplicación de test desarrollados en el contexto de series temporales para detectar raíces unitarias y cointegración.

Dentro de los análisis desarrollados en este segundo grupo, Evans y Karras (1996) muestra que la aplicación de los test convencionales resulta válida únicamente si las economías poseen estructuras dinámicas autorregresivas idénticas de primer orden y las diferencias entre éstas se encuentran completamente controladas. Para ello se debe considerar que la inferencia sobre la convergencia de las economías se realiza aplicando mínimos cuadrados ordinarios a la expresión:

$$g_n = \alpha + \beta y_{n0} + \gamma x_n + v_n \quad (3.15)$$

El término  $g_n \equiv \frac{y_{nT} - y_{n0}}{T}$  representa el ratio de crecimiento de output per cápita para la economía  $n$  entre el período 0 y  $T$ ,  $x_n$  es un vector que recoge las variables que controlan las diferencias permanentes entre economías (en términos de otros niveles de ratios de crecimiento de output per cápita),  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros,  $\gamma$  es un vector de parámetros y  $v_n$  corresponde a un término de error con media cero y varianza finita. El valor del parámetro  $\beta$  resulta fundamental en la caracterización de la dinámica del sistema:

- Si  $\beta < 0$  las economías convergen: unidades económicas ricas en el instante inicial, con las diferencias permanentes controladas a través de  $x_n$  y sin efectos específicos asociados al término de error, crecerán más lentamente que las que parten de una situación de pobreza. Dentro de este supuesto hay que diferenciar:
  - $\gamma = 0$ , que corresponde a convergencia absoluta.
  - $\gamma \neq 0$ , o sea, el parámetro se estima de manera libre, lo que supone que se produce convergencia condicional.
- Si, por el contrario,  $\beta = 0$ , las economías divergen: las diferencias observadas en el instante inicial persistirán en el tiempo.

Autores como Cuadrado-Roura (2001), Cappelen, Castellaci, Fagerberg y Verspagen (2003), Yin, Zestos y Michelis (2003) o Geppert, Happich y Stephan (2005) han desarrollado sus

estudios sobre crecimiento y evolución de las desigualdades en la EU considerando estos planteamientos.

Evans y Karras (1996) indica que las estimaciones de  $\beta$  y  $\gamma$  obtenidas mediante OLS no resultan probablemente útiles porque los términos  $y_{n0}$  y  $v_n$  están, por lo general, correlacionados. En el inicio de la revisión de este estudio se indicaban los dos condicionantes, en términos de dinámicas y control, que se debían verificar y que se incumplen en un porcentaje muy elevado de situaciones. La amplia variación de los parámetros tecnológicos entre países invalida una posible reelaboración de (3.15), como la planteada por Barro y Sala-i-Martin (1992), y que han seguido otros autores como Mankiw o Romer. En el estudio empírico asociado a este análisis teórico, que considera 48 Estados contiguos de USA, se vulneran las restricciones citadas.

El planteamiento alternativo suponer partir de la siguiente ecuación, que se deduce a partir de (3.15):

$$\Delta(y_{n,t} - \bar{y}_t) = \delta_n + \rho_n(y_{n,t-1} - \bar{y}_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \varphi_{ni} \Delta(y_{n,t-1} - \bar{y}_{t-1}) + u_{nt} \quad (3.16)$$

En este caso  $\rho_n$  es un parámetro que indica convergencia cuando es negativo (y que señala divergencia si es nulo). Los parámetros significativos corresponden a  $\varphi_{ni}$ , puesto que garantizan que las raíces del sumatorio se encuentren fuera del círculo unidad.

De acuerdo al modelo neoclásico se debe testar la hipótesis nula, o sea  $\rho_n = 0$  y  $\delta_n = 0$  para todo  $n$  frente a la hipótesis alternativa,  $\rho_n < 0$  para todo  $n$  y  $\delta_n \neq 0$  para algún  $n$ . Evans y Karras (1996) indican que los modelos endógenos predicen  $\rho_n = 0$  y  $\delta_n \neq 0$  para todo  $n$ , debido a que las diferencias en tecnología, preferencias, políticas gubernamentales, etc. provocan diferencias en los ratios de tendencia de crecimiento. Por ese motivo el test final considera este último planteamiento e implica estimaciones OLS de los diferentes parámetros y ratios que conforman (3.15). Esta aproximación se concreta en el ámbito de la convergencia estocástica, que se desarrolla en 3.5.

### 3.3.4 Análisis empíricos generales de modelos de crecimiento y de procesos de $\beta$ -convergencia

En esta sección se procede a una revisión de resultados significativos respecto a ratios de crecimiento per cápita y comprobación de la hipótesis de convergencia, derivados de estudios experimentales efectuados en los últimos veinte años. Se consideran para ello análisis genéricos o circunscritos a un ámbito geográfico diferente al europeo (el grueso de los primeros estudios se focaliza en la economía estadounidense). Dado su interés para el presente trabajo se destina un apartado concreto a los estudios específicos en el ámbito de la EU, que se desarrolla tras el análisis completo de las distintas medidas de convergencia. Dada la extensa literatura y profundidad de los trabajos realizados en los contextos citados, nuestra investigación se centra en la identificación de líneas maestras, hitos relevantes y parámetros que determinan la identificación (o rechazo) de los postulados de convergencia.

Baumol (1986) analiza el crecimiento per cápita, desde 1870 a 1979, de 16 países industrializados (12 de ellos europeos), según los datos recopilados en una publicación de 1982<sup>42</sup>, que servirá de base para diferentes investigaciones realizadas a finales de los 80; en una segunda parte de su estudio se complementa esta información con otras fuentes, de modo que se amplía el número de economías. La media en el incremento de productividad entre las 16 naciones, durante el período de 109 años citado, asciende a 1,150%, correspondiendo el valor inferior a Australia (en torno a un porcentaje del 400%) y el superior a Japón (casi 2,500%). El ratio estadounidense (1,080%) se encuentra, curiosamente, rozando el valor medio indicado. Respecto a la convergencia, la representación semilogarítmica de los datos en el tiempo para 6 países, que abarcan el espectro completo de los incrementos de productividad (Australia, Reino Unido, Holanda, USA, Italia y Japón), confirma la tendencia a la aproximación entre dichos niveles. Este resultado se generaliza al considerar la muestra completa y representar en las abcisas el valor inicial, o sea, el nivel absoluto del PIB por hora de trabajo, en precios relativos de 1970, frente al ratio de crecimiento del PIB por hora de trabajo desde 1870: se observa una fuerte correlación inversa, con un valor muy elevado del coeficiente asociado ( $R^2=0.88$ ).

La potencia de esta correlación provoca cierta sorpresa, porque implica, al menos aparentemente, que el PIB por hora de trabajo es la única variable que posee relevancia, dado que las restantes no parecen afectar a la evolución final (por ejemplo, las características específicas de cada mercado, las tasas de ahorro existentes o las políticas institucionales desarrolladas para impulsar el crecimiento). Baumol (1986) interpreta que los *spill-overs* asociados a las naciones líderes en productividad –determinantes, por tanto, en todo el proceso- poseen un efecto muy superior al de otros elementos que pueden modelar el comportamiento de cada economía. Estos desbordamientos se producen en una doble dimensión: la correspondiente a la inversión y a la innovación. Un nivel muy elevado en un país del segundo aspecto citado posee el efecto colateral de un incremento en la productividad del resto de naciones<sup>43</sup> (en principio más limitado), dado que la presión de los mercados en competencia obliga a las industrias a obtener acceso directo a los nuevos hallazgos o a su imitación. En este contexto de competición schumpeteriana se acaban por compartir los beneficios de los esfuerzos realizados en innovación<sup>44</sup>. Como señala Mora (2002) la presencia de difusión tecnológica permite el desarrollo de los procesos de *catching-up*, en los que la convergencia se establece en términos de acercamiento en tecnología. En realidad, la reducción de las diferencias en los niveles de conocimiento tecnológico (por ejemplo, copiando o encontrando sustitutos de los descubrimientos a bajo coste) permite reducir distancias entre los niveles de renta de los países, lo que se concretaría en un proceso de convergencia. Sin embargo, la formulación presentada con anterioridad respecto a la  $\beta$ -convergencia no resulta suficiente para estudiar el componente de desarrollo tecnológico. En una sección posterior se

---

<sup>42</sup> Angus Maddison, *Phases of Capitalist Development* (New York, 1982).

<sup>43</sup> Baumol (1986: 1077): “for such nations a successful productivity-enhancing measure has the nature of a public good”.

<sup>44</sup> El incremento espectacular del volumen de exportaciones (293,060% en el caso extremo de Japón) reforzaría la idea de crecimiento asociado a la incorporación de procesos para imitar las innovaciones.

revisan los estudios planteados a partir de la segunda mitad de la década de los 90, en los que se retoma la cuestión.

Por su parte, la inversión exhibe propiedades muy similares, de modo que *“the analysis suggests that the absolute benefits are contagious- that one country's successful investment policy will also raise productivity and living standards in other industrialized countries”*, Baumol (1986: 1078). Los beneficios mutuos afectan en mayor medida a la productividad de los países rezagados que a la de los líderes, dado que los primeros tienen más aspectos que aprender; esto redundará en el proceso de convergencia.

La investigación descrita plantea dos aspectos centrales a considerar: (i) realmente, ¿la economía líder juega un rol tan destacado como referencia del crecimiento del resto de naciones?; y (ii) tal y como se expuso con anterioridad, un análisis como el descrito, restringido a países con un elevado nivel de desarrollo en el año final, no tiene en consideración la evolución de economías que no han alcanzado la convergencia. Este segundo aspecto es abordado por Baumol (1986), cuando se centra en el análisis de los ratios reales de crecimiento del PIB per cápita en 72 países durante el período 1950-1980. Para ello se utiliza el extenso conjunto de datos elaborado por Alan Heston y Robert Summers, en los que se ajusta el nivel de PIB nacional en paridad de precios y tipos de cambio. La discusión de los resultados se extiende a la posible diferenciación de los denominados clubs de convergencia.

Abramovitz (1986) retoma la primera pregunta expuesta en el párrafo anterior y elabora una importante reflexión sobre las conexiones existentes entre el proceso de convergencia y el éxito alcanzado por la economía líder e imitadoras. Para ello considera dos situaciones extremas: la “explosión” de crecimiento de la productividad acaecido tras la Segunda Guerra Mundial, con USA como nación líder y el resto de países siguiendo su estela, en un proceso de *catching-up*; y, en contraposición, el retardo en el crecimiento de la productividad sufrido por los países perseguidores en el período de crisis que se inicia en 1973. En el primer escenario se considera que los países industrializados trasladaron a sus procesos productivos un extenso conocimiento tecnológico que había quedado sin aplicar durante el conflicto bélico. Por el contrario, en la década de los 70 estas naciones se habían descolgado del proceso de seguimiento del líder.

En línea con un aspecto central del proceso de  $\beta$ -convergencia, el retroceso en el nivel de productividad de un país proporciona potencial para un rápido crecimiento. Esto resulta coherente con la idea que una nación líder dispone de tecnología punta, de modo que la edad tecnológica de su stock de capital coincide con la cronológica. En el caso de un país perseguidor la edad tecnológica es muy superior a la cronológica, de modo que su stock se encuentra obsoleto en el presente. Cuando el líder descarta capital antiguo y lo reemplaza, el incremento de productividad asociado se encuentra limitado por el avance del conocimiento entre la instalación de dicho stock y el de su sustitución. Sin embargo, el país perseguidor dispone de potencial para pasar de capital muy anticuado hasta el nuevo, en la frontera del conocimiento. A mayor distancia entre la productividad del líder y el perseguidor mayor potencial de crecimiento por parte de este último, lo que se traduce en un incremento en la

velocidad de alcance. Este efecto se reduce a medida que exista una menor distancia tecnológica entre las economías.

Con independencia de los efectos cuantitativos de este proceso (en términos de reducción del ratio capital-labor o de incremento del output, entre otros), es necesario considerar un importante aspecto cualitativo: el retroceso tecnológico no suele deberse a una situación fortuita, sino a determinadas deficiencias intrínsecas de la economía de un país, que le han impedido alcanzar un estatus técnico más elevado. Al referirse a esta idea Abramovitz (1986) emplea un término acuñado por Ohkawa y Rosovsky (1960): *potencial social*. De este modo, se plantea una hipótesis más rigurosa respecto al proceso descrito. El potencial de rápido crecimiento de un país es importante cuando se encuentra retrasado y, además, *se dispone de un nivel social avanzado*. Las naciones en retroceso, pero sin cualificación, no poseen esta capacidad latente de desarrollo.

El potencial social es un término difícil de concretar y, sobre todo, cuantificar. En una primera aproximación se puede identificar con el nivel de competencia técnica (por ejemplo, considerando años de educación) y de las instituciones financieras, políticas, industriales, etc. Abramovitz (1986) destaca la importancia de considerar, además, como aspecto negativo, los posibles obstáculos al cambio, asociados a situaciones inherentes de privilegio, derechos arraigados, etc.

La diferencia tecnológica con el líder, junto al potencial social para explotar con éxito los avances técnicos ya empleados por aquél, definen el potencial del país respecto a la mejora de la productividad a largo plazo a través del proceso de *catching-up*. Sin embargo, a corto plazo, el ritmo de avance en un determinado período depende de una serie de factores, como la limitación en la difusión del conocimiento, la acumulación del capital o la expansión de la demanda: o sea, aunque a largo plazo el proceso de *catching-up* es auto-limitante, durante determinados períodos es posible que sea más fuerte o débil, en base a variaciones endógenas de las capacidades sociales o de los propios patrones de convergencia de la producción.

El análisis empírico de Abramovitz (1986) se centra en el mismo conjunto de datos estimados por Maddison y empleado por Baumol (1986). Los resultados más significativos revelan que las diferencias de productividad iniciales constituyen el potencial para que se produzca el proceso de *catching-up* en el largo plazo. Sin embargo, no se puede obviar el sesgo de la muestra, por lo que resulta altamente improbable obtener resultados semejantes con un conjunto más amplio de países. El estudio de períodos cortos debe realizarse en un doble contexto: por una parte requiere el seguimiento de la tendencia a la convergencia dentro del grupo de perseguidores y, por otro lado, hay que considerar esta evolución entre dicho conjunto y el país líder.

Este segundo aspecto se relaciona directamente con la cuestión que se planteaba sobre el rol del líder en el proceso de crecimiento. Las hipótesis manejadas contemplan una reducción de los diferenciales de productividad entre los países, pero no permiten predecir cambios en el liderazgo o en la clasificación por niveles de productividad de los perseguidores. Estas limitaciones son indudablemente muy severas y revelan la necesidad de introducir nuevas

consideraciones en un planteamiento tan simplificado. De hecho, la teoría establece un flujo unidireccional de beneficios desde el líder hacia los seguidores, cuando la realidad puede revelar otros comportamientos. Abramovitz (1986) señala que, por ejemplo, el auge de la manufactura británica del algodón en la Primera Revolución Industrial arruinó la explotación irlandesa del lino. Este mismo país, Irlanda, padeció los efectos de la emigración de la población joven a USA, lo que provocó un largo letargo asociado a la pérdida de este potencial. Otra publicación de Abramovitz, citada por Baumol (1986) hace referencia al efecto “*backwash*” o de oleaje, consistente en que el crecimiento del líder provoca la inhibición del crecimiento de los seguidores.

Por otra parte, el flujo de beneficios también puede desplazarse desde los perseguidores hasta la nación líder. Todas estas opciones deberían considerarse en un modelo más formalizado de *catching-up*, como se considerará en 3.4.

Se señalaba anteriormente que DeLong (1988) partía también de los datos de Maddison respecto a 16 países industrializados en el período 1870-1979. El sesgo que caracteriza a esta selección y la medida forzosamente errónea de la variable independiente implican que los resultados ofrecen una imagen de convergencia que puede, o no, ser real. A partir de esta consideración, DeLong (1988) construye una muestra con una serie de países que deben verificar tres condicionantes: (i) caracterizarse por un alto potencial social en 1870; (ii) ser considerados en la selección con independencia de su posterior patrón de crecimiento; y (iii) aproximarse en la medida de lo posible al conjunto de 16 naciones identificado por Baumol (1986). Esta identificación resulta muy compleja, simplemente constatando el hecho de los múltiples cambios fronterizos de las distintas naciones en un horizonte que incluye subperíodos tan convulsos de la historia. Se plantea una reflexión similar respecto a la idoneidad de incluir únicamente economías capitalistas, dado el posible efecto distorsionante de países con planificación centralizada: sin embargo, en la muestra final solo se incluye una nación del todavía existente bloque comunista y su supresión tiene efectos ínfimos en el grado estimado de convergencia.

El universo de estudio de DeLong (1988) corresponde a los países analizados por Baumol (1986), eliminando Japón e incorporando 7 nuevos (2 sudamericanos, 4 europeos –incluyendo España y Portugal– y 1 del continente oceánico), por lo que el total de la muestra se eleva a 22.

También se indicaba con anterioridad que el estudio propone un modelo diferente de regresión respecto al empleado por Baumol (1986), debido al error de medición de la renta en 1870. En concreto se recomienda resolver el siguiente sistema:

$$Renta_{1979} - Renta\ verdadera_{1870} = \alpha + \beta \cdot Renta\ verdadera_{1870} + \varepsilon_i \quad (3.17)$$

$$Renta\ estimada_{1870} = Renta\ verdadera_{1870} + \eta_i \quad (3.18)$$

Los términos  $\varepsilon_i$  y  $\eta_i$  corresponden a los errores aleatorios y  $Renta\ verdadera_{1870}$  es el valor a estimar. El sistema se cierra si se asume que los errores no están correlacionados y se fija



además un valor para el ratio de las varianzas de los mismos:  $\rho = \left(\frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2}\right)$ . La consideración  $\rho = 1$  resulta razonable, dado que supone equiparar el error de medida en el año 1870 con la perturbación de la regresión. Además, la convergencia se encuentra asociada a una pendiente negativa de  $\beta$  y a una reducida varianza de  $\varepsilon$ , por lo que interesará un valor elevado del ratio de las varianzas<sup>45</sup>.

La resolución del sistema, para el período 1870-1979, se plantea fijando cinco valores de  $\rho$ : 0.0; 0.5; 1.0 (caso central); 2.0; e infinito (es decir, intercambiando los roles de las variables dependientes e independientes). En las regresiones en las que  $\rho < 1$ , el coeficiente  $\beta$  es negativo; en el caso central  $\beta = 0.110$ . DeLong (1988) plantea la opción de trabajar con datos más fiables, a fin de evitar un posible sesgo hacia la no convergencia. Por este motivo se resuelve el sistema con datos del período 1913-1979, debido a la existencia de una elevada información en un año prebélico. Los resultados son muy similares a los precedentes: no existe convergencia en el caso central; si se considera un error de medida superior al de la perturbación de regresión se detecta divergencia: las naciones ricas en el año inicial (1870 ó 1913) amplían la brecha de rentas relativas.

DeLong (1988) atribuye la ausencia de convergencia a la presencia en la muestra de Chile, Argentina, España y Portugal. La identificación de determinados elementos comunes a estos países sugiere plantear el análisis de las siguientes regresiones:

- Régimen democrático en el período 1950-1980 frente a crecimiento a largo plazo en el período 1870-1979. La variable referida a la democracia resulta ser relevante en el caso central.
- Régimen democrático en el año 1870 frente a crecimiento a largo plazo en el período 1870-1979. En este caso, al incorporar una medida *ex ante* de la democracia, la correlación desaparece.
- Religión dominante en el año 1870 frente a crecimiento a largo plazo en el período 1870-1979. La introducción de esta otra asociación *ex ante* conduce, sin embargo, a una correlación significativa, con una varianza del error de medida no demasiado alto. DeLong (1988) reconoce la dificultad de interpretar este resultado, planteando una posible relación directa entre la implantación de la religión y el potencial social para asimilar nuevas tecnologías.

Se ha señalado cómo, a principios de los años noventa, los economistas neoclásicos “hicieron su propia contrarrevolución”, en términos de Sala-i-Martin (1994: 137), desarrollando y ampliando el concepto de convergencia condicional hacia múltiples estados estacionarios a partir de los iniciales planteamientos neoclásicos; esto supone introducir variables de control en el proceso de contraste.

<sup>45</sup> La aplicación de mínimos cuadrados ordinarios –desaconsejada por DeLong (1988), entre otros autores– supone, implícitamente, fijar  $\rho = 0$ .

Robert J. Barro elabora diversos estudios empíricos, contrastando los resultados obtenidos con las hipótesis tanto de modelos neoclásicos como endógenos. Nos referimos en primer lugar a las investigaciones desarrolladas en Barro (1989), que se resumen en la siguiente tabla:

Objeto del estudio	Descripción de los resultados y conclusiones
<p>Análisis de la relación entre los ratios de crecimiento de PIB real per cápita respecto al PIB real per cápita en el año 1960. Fuente de los datos: el PIB se obtiene de la publicación de Summers-Heston (1988). Tamaño de la muestra: 98 países<sup>46</sup>. Período temporal: 1960-1985.</p>	<p>No existe correlación. Los resultados son inconsistentes con las teorías estándar de crecimiento neoclásico, pero sí se ajustan a las previsiones de los modelos endógenos propuestos por Lucas (1988), en los que el ratio de crecimiento del producto per cápita es independiente del nivel inicial del producto per cápita.</p>
<p>Influencia de los indicadores representativos del capital humano respecto a la tasa de crecimiento del PIB real per cápita. Fuente de los datos: los datos de capital humano proceden de Naciones Unidas. Tamaño de la muestra: 98 países. Período temporal: 1960-1985.</p>	<p>Los dos indicadores centrales del capital humano empleados son los ratios de matriculación en niveles de primaria y secundaria en el año 1960. Si se mantienen constantes un conjunto de variables, entre las que se encuentran las medidas de capital humano inicial, se determina una correlación parcial negativa, entre la tasa de crecimiento del PIB real per cápita y el PIB real per cápita inicial (o sea, valores iniciales elevados del PIB per cápita afectan de manera negativa al posterior crecimiento per cápita). Por otra parte, el crecimiento per cápita se encuentra relacionado positivamente con los indicadores del capital humano inicial, manteniéndose constantes el PIB y las restantes variables.</p>
<p>Análisis de la relación entre la tasa de natalidad, capital humano y PIB real per cápita. Fuente de los datos: los ratios de natalidad y mortalidad corresponden al Banco Mundial. Tamaño de la muestra: 98 países. Período temporal: 1965-1985.</p>	<p>Existe correlación negativa entre una variable que mide el número de hijos por mujer que vivirán por encima de los cuatro años y el valor del PIB inicial. Del mismo modo, también se produce correlación negativa entre dicha variable y un indicador del capital humano. Por tanto, valores elevados de capital humano tienen asociados bajos índices de natalidad, y altos ratios de inversión de capital físico. Se constata que, fijado el capital humano, valores elevados del PIB per cápita poseen una relación insignificante con la natalidad neta.</p>
<p>Relación entre los ratios de inversión física real y PIB real. Fuente de los datos: el total de inversión corresponde a Summers-Heston (1988); los datos relativos a la inversión pública proceden de Barro (1989). Tamaño más restrictivo de la muestra: 76 países. Período temporal más restrictivo: 1970-1985.</p>	<p>Si se mantienen constantes las medidas de capital humano, la relación parcial entre el ratio de inversión física privada y el PIB en el año inicial resulta negativa. Estos resultados son similares para el caso del ratio de inversión total, aunque con unos coeficientes estimados más pequeños en magnitud.</p>

<sup>46</sup> El autor señala que este es el número máximo de países de los que ha podido reunir los suficientes datos.

Objeto del estudio	Descripción de los resultados y conclusiones
<p>Influencia en el crecimiento de las actuaciones gubernamentales.</p> <p>Fuente de los datos: el consumo público se encuentra relacionado en Summers-Heston (1988); los datos relativos a la inversión pública proceden de Barro (1989); la medida de la estabilidad política se establece a través de dos variables procedentes de Banks (1979): (i) número de revoluciones y golpes de Estado por año; y (ii) número anual de asesinatos de políticos por millón de personas; la división de sistemas económicos corresponde a Gastil (1987); las distorsiones del mercado se evalúan en relación a la paridad en el poder de compra de bienes de inversión, según Summers-Heston (1988).</p> <p>Tamaño más restrictivo de la muestra: 76 países.</p> <p>Período temporal más restrictivo: 1970-1985.</p>	<p>Las conclusiones más significativas de esta parte del análisis son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El consumo público se encuentra inversamente relacionado con el crecimiento (incluso manteniendo constante el ratio de inversión).</li> <li>• La inversión pública tiene escasa relación con el crecimiento.</li> <li>• Cada una de las variables de Banks (1979) se relaciona significativamente de manera negativa con el crecimiento. En términos de Barro (1989: 18): <i>“It is possible that these results reflecta positive influence of growth on political stability, rather than (or in addition to) the effects of stability on growth”</i>.</li> <li>• Parece que existe una relación negativa entre gobiernos socialistas y crecimiento, desapareciendo dicha dependencia en el caso de gobiernos mixtos entre el socialismo y el libre mercado (el autor alude a la subjetividad de la división de los sistemas económicos y señala la poca fiabilidad de estos resultados concretos).</li> <li>• Las distorsiones de los bienes de inversión resultan adversas para el crecimiento.</li> </ul>
<p>Estudio de la debilidad en el crecimiento en países del África sub-sahariana y Latinoamérica.</p> <p>El análisis se centra en las variables endógenas, cuyas fuentes de obtención, tamaño muestral y período temporal considerado se relaciona en apartados anteriores.</p>	<p>En el caso de África los resultados más relevantes son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Existe una relación significativa de la variable artificial que representa a esta región con el ratio de crecimiento real del PIB per cápita en el período 1960-1985.</li> <li>• Por su parte, la relación es significativamente positiva con el ratio de natalidad.</li> <li>• No se detecta una relación estadísticamente significativa con los ratios de inversión (aunque las estimaciones obtenidas son positivas).</li> <li>• Manteniendo constantes los ratios de natalidad e inversión, el coeficiente estimado de la variable artificial es significativamente negativo (con un valor en torno al 1% anual).</li> </ul> <p>Los resultados para Latinoamérica son prácticamente idénticos, con el matiz de estimaciones negativas respecto a los ratios de inversión (pero mateniendo que la relación no es significativa). Barro (1989) destaca la importancia de continuar profundizando en el conocimiento del débil comportamiento en crecimiento de los países de ambos continentes.</p>

Tabla 3.1. Resumen de los resultados de los estudios empíricos en Barro (1989).

Fuente: elaboración propia a partir de Barro (1989).

Resulta interesante destacar que la identificación de los errores estándar se realiza mediante la matriz de covarianza desarrollada por White (1980), dada la posibilidad de que la heterocedasticidad resulte de importancia entre los países estudiados. En determinadas regresiones las observaciones son poderadas en función de los niveles de PIB bruto o del volumen de población.

En alguno de sus apartados el estudio empírico considera las implicaciones del modelo de producción de dos sectores (capital físico y capital humano), propuesto por Lucas (1988). Al analizar este patrón de crecimiento en el capítulo segundo se constataba la existencia de dinámicas de transición; de este modo se predecía un ratio nacional creciente de inversión física per cápita a partir del ratio inicial correspondiente a la relación entre el capital humano y el físico. En este sentido las aportaciones de Becker et al. (1994), que recogen algunos

desarrollos realizados con anterioridad y por ello citados en Barro (1989), contemplan la posibilidad de que el ratio de retorno del capital humano se incremente por encima de un determinado rango, debido a los beneficios por desbordamiento de dicho factor. En términos de Barro (1989: 2), *“the return to some kinds of ability (such as talent in communications) is higher if other people are also more able”*.

El modelo de Becker et al. (1994) retoma algunos aspectos considerados por Ramsey (1928) respecto a la consideración del comportamiento de las funciones de utilidad que guían el ahorro y el consumo. Su análisis asume que una mayor tasa de natalidad en la generación actual incrementa el descuento del consumo futuro per cápita. Por tanto, el incremento de nacimientos hace disminuir las inversiones, tanto en capital físico como humano. De manera opuesta, un mayor capital humano por persona reduce la demanda de hijos, dado que aumentaría el coste del tiempo empleado en su cuidado.

Como valoración general del estudio, Barro (1989) destaca la coherencia de los resultados que predicen los modelos con los obtenidos empíricamente: se confirma el movimiento conjunto entre el crecimiento per cápita y el ratio de inversión o el movimiento inverso entre dicho crecimiento y la tasa de natalidad. Las evoluciones se reflejan en los residuos de las ecuaciones de regresión.

Sala-i-Martin (1994) parte de esta investigación para considerar el tratamiento de la convergencia condicional. En una sección teórica previa se advertía del error asociado a la omisión de variables que determinan el estado estacionario en la correspondiente regresión. Para cuantificar este efecto se procede a la estimación de una ecuación de tipo convergencia absoluta y otra de convergencia condicional, siendo la variable dependiente la tasa media de crecimiento del PIB per cápita entre 1960 y 1985. Las variables explicativas empleadas son<sup>47</sup>:

- Logaritmo del PIB per cápita en el año inicial.
- Fracción de la población en edad escolar que en 1960 acudía a escuelas secundarias.
- Fracción de la población en edad escolar que en 1960 acudía a escuelas primarias.
- Consumo público promedio entre los años 1960 y 1985 (excluidos educación y gasto militar).
- Desviación del deflactor de la inversión respecto de la media muestral.
- Número de revoluciones y golpes de estado acaecidos en el período considerado.
- Número de asesinatos por cada mil habitantes y año.
- Variable ficticia (0-1) para América Latina.
- Variable ficticia (0-1) para África.
- Tasa de ahorro: inversión total bruta de la economía dividida por el PIB.
- Tasa de crecimiento de la población más tasa de depreciación.

De nuevo se emplean los datos de PIB real elaborados por Summer y Heston (1988). El número de observaciones utilizadas es 114.

---

<sup>47</sup> Se marcan con color azul las incluidas en el estudio previo de Barro.

En primer lugar, la estimación de una ecuación de convergencia absoluta ofrece un valor positivo del coeficiente del PIB inicial, por lo que esta hipótesis se descarta.

En la segunda estimación el coeficiente del PIB inicial resulta negativo:  $\hat{\beta} = -0.0124$  (error estándar = 0.0032). Como señala Sala-i-Martin (1994: 151): *“Si aceptamos la hipótesis de que las variables explicativas  $X_{i,t-1}$  están relacionadas con los niveles tecnológicos e institucionales que determinan la posición de estado estacionario, entonces podemos interpretar el hecho de que el coeficiente del PIB inicial sea negativo como evidencia de convergencia condicional”*. La velocidad de convergencia,  $\lambda$ , se obtiene de la expresión  $\hat{\beta} = \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}$ , con  $T = 25$  años, y corresponde a 1,5% por año (muy cerca del 2% presente en los estudios empíricos sobre economías regionales).

Los signos de los coeficientes de las variables explicativas resultan coherentes con las conclusiones de Barro (1989). Respecto a las que no aparecían específicamente en dicho estudio:

- Las dos variables ficticias son negativas y muy significativas. Según Sala-i-Martin (1994: 153) *“esto significa que estas dos regiones del mundo [América Latina y África] han crecido mucho menos de lo que las variables explicativas predicen”*.
- El modelo de Solow-Swan predice que la tasa de ahorro debería tener coeficiente positivo, el crecimiento de la población ser negativo y el coeficiente del PIB inicial ser nulo al incluir ambas variables. Todo ello se cumple.

Levine y Renelt (1992) emplea una variante del método de los límites extremos (EBA: extreme-bounds analysis) desarrollado por Leamer (1983) para comprobar la robustez de las estimaciones de coeficientes en los estudios empíricos sobre crecimiento. EBA se aplica sobre expresiones del tipo:  $Y = \beta_I I + \beta_M M + \beta_Z Z + u$ , siendo  $Y$  el crecimiento del PIB per cápita,  $I$  un conjunto de variables que siempre se incluyen en la regresión,  $M$  la variable de interés y  $Z$  un subconjunto de variables elegidas de un conjunto en el que se encuentran las potencialmente explicativas del proceso de crecimiento (en base a estudios previos).

El método consiste en ir variando este subconjunto  $Z$  hasta encontrar el rango más amplio de coeficientes de estimación sobre la variable  $M$  que los test de hipótesis estándar no rechazan. En concreto, primero se trabaja sobre una regresión básica, que incluye  $I$  y  $M$ . Seguidamente se analizan los resultados de las regresiones para todas las posibles combinaciones lineales con hasta tres variables  $Z$ , lo que permite identificar los valores superiores e inferiores para el coeficiente de la variable de interés,  $\beta_M$ , no rechazado a un nivel de significación del 0.05. El extremo superior se define como el grupo de variables  $Z$  que produce el máximo valor de  $\beta_M$  más dos desviaciones estándar. El grado de confianza que se puede depositar en la correlación parcial entre las variables  $I$  y  $M$  se infiere de los límites extremos del coeficiente  $\beta_M$ :

- Si  $\beta_M$  permanece con un valor significativo y del mismo signo en los extremos, se puede mantener una adecuada confianza en esta relación. El resultado es, por tanto, robusto.

- Si, por el contrario,  $\beta_m$  reduce su grado de significación, o cambia de signo, el resultado se vuelve frágil, debilitándose la confianza en la variable de interés.

Mediante la aplicación de EBA Levine y Renelt (1992) descubre que la mayoría de variables empleadas en los estudios empíricos dejan de ser robustas. Los resultados que afectan a los procesos de crecimiento se resumen en los siguientes puntos (Levine y Renelt, 1992: 959):

- (i) Existe una correlación robusta y positiva entre los ratios de crecimiento medio y el porcentaje medio de inversión en PIB.
- (ii) Del mismo modo se detecta una correlación robusta y positiva entre el porcentaje de inversión en PIB y el porcentaje medio del sector comercio en el PIB.
- (iii) Una amplia variedad de medidas de política comercial no se encuentran correlacionadas de manera robusta con el crecimiento cuando la ecuación incluye el porcentaje de inversión.
- (iv) Se detectan resultados de calidad que apoyan la hipótesis de convergencia condicional derivado del estudio de Barro (1989): existe correlación robusta y negativa entre el nivel inicial de renta y el crecimiento en el período 1960-1989<sup>48</sup>.
- (v) Ninguno de los indicadores de índole fiscal se encuentra correlacionado de manera robusta con el crecimiento o el porcentaje de inversión.
- (vi) Todos los indicadores económicos y políticos recogidos en el análisis de Barro (1989) y Sala-i-Martin (1994), a excepción del nivel de PIB inicial y la tasa de ahorro, que es robustamente positiva, no están correlacionados de manera robusta con el crecimiento o con el porcentaje de inversión.

Sala-i-Martin (1994) contra-argumenta estos resultados con dos consideraciones:

- El método propuesto no tiene en cuenta que las estimaciones de  $\beta_m$  cambian, de acuerdo a una determinada distribución, a medida que se van cambiando las variables  $Z$ . Habría que conocer la distribución exacta de dichas estimaciones a fin de suavizar las condiciones extremas del test (que limitan en exceso las variables que pueden cumplirlo).
- Las variables consideradas sí tienen efecto sobre la tasa de crecimiento: el problema es que la alta correlación existente entre las mismas impide determinar, de manera adecuada, el verdadero efecto sobre ese ratio.

Barro (1990) constituye una ampliación y desarrollo teórico del análisis empírico previo de este autor sobre la relación entre las actuaciones del gobierno y el crecimiento económico. Al incluir el factor de los servicios públicos, financiados a través de tasas, en los modelos endógenos, se deducía que las funciones de producción y utilidad se incrementaban inicialmente para luego decaer. En el caso de una función de producción con naturaleza Cobb-Douglas, se identifica el porcentaje del ratio de impuesto que maximiza la utilidad de una familia representativa:  $\tau = \frac{\varpi}{y} = \alpha$ , siendo  $\varpi$  la cantidad de gastos públicos en bienes y servicios y  $\alpha$  el parámetro habitual de elasticidad.

<sup>48</sup> Sin embargo, este resultado no se mantiene en otro período considerado en el estudio: 1974-1989.

En el estudio se incluyen resultados relevantes, realizados hasta la fecha, respecto a la relación entre políticas gubernamentales y crecimiento económico, que se resumen en la siguiente tabla:

Fuente y análisis efectuado	Estudios previos y conclusiones
<p>Landau (1983): analiza 104 países a partir de una recopilación inicial de Summers-Heston, con información desde 1961 hasta 1976. El estudio ideal se centraría en el impacto total de la política económica y una medida adecuada del bienestar; al carecer de estos datos se opta por un estudio de carácter parcial.</p>	<p>Se observan relaciones significativas negativas entre el ratio de crecimiento del PIB real per cápita y el nivel de consumo público respecto al PIB. Estos valores se detectan en el conjunto completo de países, teniendo en cuenta el peso de la población o descartando dicho efecto. Los resultados son coherentes con la visión de un mercado libre, en el que el crecimiento público afecta al crecimiento general. De todos modos, se deben emplear con cautela, ya que la variable empleada no representa el impacto económico total de la política del gobierno. El gasto público debería apoyar la mejora del bienestar incluso en escenarios de decrecimiento del PIB per cápita.</p> <p>Respecto al nivel de PIB per cápita en el año inicial cabría esperar que la relación resultase negativa (convergencia) para países con alto nivel de renta y positiva para estados con menor renta (que constituyen la gran mayoría, al menos respecto a US y Japón: por eso la relación global debería haber sido estadísticamente poco significativa y positiva). Sin embargo, los resultados generales del estudio proporcionan regresiones negativas y significativas. Eso sí, los países con rentas más reducidas tienen un crecimiento más lento que los que se encuentran en el nivel medio o alto. Landau (1983) emplea dos variables para explicar este comportamiento: el porcentaje de gasto público sobre el PIB y la inversión en educación. En este sentido, el coeficiente que relaciona la inversión total en educación y el ratio de crecimiento es positivo y altamente significativo.</p>
<p>Kormendi y Meguire (1985): estudio del consumo y gasto público de 47 países a partir de la II Guerra Mundial (datos obtenidos de <i>International Financial Statistics</i>).</p>	<p>No se detectan relaciones significativas entre los ratios de crecimiento medio del PIB y los porcentajes de consumo gubernamental en PIB.</p>

Fuente y análisis efectuado	Estudios previos y conclusiones
<p>Grier y Tullock (1989): extiende el análisis anterior de Kormendi and Meguire (1985) a 113 países, empleando los datos de Summers y Heston (1984). La muestra se diferencia entre los 24 países miembros de la OECD y los correspondientes al resto del mundo (ROW), que se diferencian, a su vez, a nivel de continentes. Para ello se examinan los efectos de siete variables en el crecimiento económico:</p>	<p>Los valores de los coeficientes varían ampliamente entre los grupos identificados, aunque se pueden extraer las siguientes conclusiones generales:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La renta per cápita inicial en los países de la OECD posee un coeficiente significativo y negativo, por lo que se detecta una evidencia a favor de la hipótesis de convergencia.</li> <li>• En el caso ROW el coeficiente resulta significativo y positivo, por lo que los países ricos crecen más deprisa que los pobres.</li> <li>• El crecimiento de la población es significativo y positivo en ambos grupos.</li> <li>• El valor medio de la inflación no tiene efectos negativos en los ratios de crecimiento de los países OECD, pero es significativo y negativo en el conjunto ROW.</li> <li>• La desviación estándar de la inflación es significativa y negativa en los dos grupos.</li> <li>• La desviación estándar del crecimiento del PIB es significativa y positiva en ambos casos.</li> <li>• El crecimiento del consume public resulta significativamente correlacionado con el crecimiento económico en los países de la OECD, mostrando un comportamiento menos homogéneo en ROW (hay determinadas naciones en las que no se verifica).</li> <li>• La represión política se encuentra correlacionada de manera negativa con el crecimiento en África y América Central y del Sur.</li> </ul>
(i) PIB per cápita real inicial.	<p>Trabajos previos, como Baumol (1986) y Abramowitz (1986), se focalizan en la convergencia de los niveles de productividad. En Grier y Tullock (1989) se considera el nivel inicial de PIB per cápita como variable explicativa del crecimiento de dicho PIB. El concepto de convergencia analizado es el correspondiente al modelo neoclásico: economías con alto nivel de riqueza inicial tendrán un crecimiento futuro más bajo si se comparan con otras unidades, debido a los retornos decrecientes asociado a las inversiones adicionales en tecnología.</p>
(ii) Crecimiento de la población.	<p>Esta variable debería incidir con un efecto positivo en el crecimiento. Kormendi y Meguire (1985) señala que la teoría neoclásica predice una relación exacta entre el crecimiento de la fuerza laboral y la de la renta.</p>
(iii) Inflación. (iv) El cambio en la inflación.	<p>La visión más extendida es que la inflación reduce la acumulación de capital y el crecimiento. En países en desarrollo suele estar asociada a crisis políticas, que debilitan el crecimiento.</p>
(v) Desviación estándar de la inflación.	<p>Mullineaux (1979) y Levi y Makin (1980) han analizado series temporales en US y detectan que la variabilidad de la inflación se encuentra correlacionada negativamente con el crecimiento.</p>
(vi) Desviación estándar del crecimiento de la renta.	<p>Según Sandmo (1971) existe una asociación positiva entre el incremento de la tasa de ahorro y el crecimiento medio de la renta.</p>



Fuente y análisis efectuado	Estudios previos y conclusiones
(vii) Gobierno.	<p>Las posibles consecuencias en este contexto son muy variadas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La producción de bienes públicos de carácter básico (como infraestructuras) fomenta el crecimiento.</li> <li>• Una fuerte regulación de la actividad económica ralentiza el crecimiento.</li> </ul> <p>Grier y Tullock (1989) se centra en el porcentaje de consumo público respecto al PIB, empleando para ello el ratio de crecimiento<sup>49</sup> de dicho porcentaje.</p>

Tabla 3.2. Relación entre políticas gubernamentales y crecimiento económico

Fuente: elaboración propia a partir de Landau (1983), Kormendi y Meguire (1985), Grier y Tullock (1989) y Barro (1990)

Barro (1992) contiene un estudio sobre la convergencia de la renta per cápita entre los estados de USA. En la siguiente figura se recogen los resultados más significativos de este análisis:

Características de la muestra
<p>Se emplean dos medidas de la renta per cápita:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. La renta per cápita personal: se trabaja con los datos anuales de los 48 estados continentales<sup>50</sup>. El período considerado es 1880 a 1988. A los valores nominales se les aplica una deflación empleando el índice nacional de precios al consumo. El empleo de la misma medida de deflación respecto a cada Estado afecta únicamente a los términos constantes en las correspondientes regresiones e introduce errores potenciales, ya que es posible que no se mantenga la paridad, absoluta o relativa, del poder adquisitivo. En estos casos se produciría un error de medida de los ratios de crecimiento o de los niveles de la renta per cápita.</li> <li>2. El producto per cápita bruto (GSP)<sup>51</sup> por Estado, también disponible de manera anual. Los valores nominales se modifican mediante un término de deflación agregado anual.</li> </ol> <p>Las principales diferencias entre ambas medidas radican en que la renta personal incluye términos corporativos netos cuando los individuos reciben dividendos mientras que el GSP engloba beneficios corporativos y depreciaciones; esta variable, además, asocia las rentas de capital al Estado en el que se desarrolla la actividad económica, mientras que la renta personal se asocia a la ubicación de la razón social.</p>
Resultados
<p>Respecto a la renta per cápita personal se realizan regresiones no lineales de mínimos cuadrados, considerando el intervalo completo (1889-1988) y nueve divisiones temporales de dicho período:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En el primer caso el valor del coeficiente de convergencia estimado es <math>\hat{\beta} = 0,0175</math> con un error estándar de 0,0046. La correlación simple entre el ratio medio de crecimiento de 1880 a 1988 y el valor inicial (en términos logarítmicos) tiene asociada un valor muy destacable: -0,93.</li> <li>• Los nueve intervalos temporales<sup>52</sup> corresponden a 1880-1900, 1900-1920, períodos de 10 años entre 1920 y 1980 y una última división relativa a 1980-88. Los valores estimados del coeficiente de convergencia varían entre -0,0122 (error estándar: 0,0074) hasta 0,0373 (error estándar: 0,0053). Si se considera un único valor para los 9 intervalos se obtiene <math>\hat{\beta} = 0,0189</math> (muy próximo a 0,0175, correspondiente a todo el período) con un error estándar de 0,0019, muy inferior al global. Para contrastar la hipótesis de igualdad de los coeficientes <math>\beta</math> se emplea un estadístico que se distribuye como una <math>\chi^2</math> con 8 grados de libertad (número de intervalos temporales - 1). El valor límite es de 15,5 y p-valor nulo (con un 5% de nivel de porcentaje crítico), mientras que el resultado empírico muestra un resultado de 32,1 (p-valor = 0,000), muy superior. Por tanto, se debe rechazar esta hipótesis: la inestabilidad de los coeficientes está asociada a determinadas perturbaciones, como la variación del peso de los productos agrícolas en el IPC en ciertos períodos temporales.</li> <li>• Para revertir el efecto descrito se construye una variable que mide la composición sectorial de la renta en</li> </ul>

<sup>49</sup> El empleo del ratio de crecimiento en vez del nivel gubernamental implica que se supone que la actividad pública afecta de manera temporal a dicho proceso.

<sup>50</sup> Las muestras que comienzan en 1880 tienen 47 observaciones, porque no se dispone de los datos de Oklahoma en dicho año.

<sup>51</sup> Se trata de una variable análoga al GDP o *gross domestic product*

<sup>52</sup> Los primeros intervalos constan de 20 años porque no se dispone de los datos de renta de 1890 ni de 1910.

cada Estado, considerando nueve categorías: agricultura; minería; construcción; manufactura; transporte y servicios públicos; venta al por mayor y comercio minorista; finanzas, seguros e inmuebles; servicios; y sector público y empresas públicas. La incorporación de estos términos hace que los coeficientes  $\beta$  se vuelvan más estables en los nueve períodos, con valores entre 0.139 (0.0076) y 0.362 (0.0055). El coeficiente estimado agregado pasa a ser 0,0249 (0,0021). El estadístico que mide la hipótesis de igualdad es 13,9 (p-valor = 0,084), inferior a 15,5. Por tanto, manteniendo constantes las medidas de la composición sectorial no se rechaza la hipótesis de un único coeficiente para todos los períodos.

Respecto al GSP se vuelve a considerar el período completo y divisiones temporales, en este caso cuatro:

- En el intervalo 1963-1986, sin considerar la composición sectorial, se obtiene  $\hat{\beta} = 0,180$  (0,0059).
- Los sub-períodos considerados son: 1963-1969, 1969-1975, 1975-1981 y 1981-1986. El rango del coeficiente de convergencia se extiende desde -0,0285 hasta 0,1130. El valor estimado del coeficiente agregado para los cuatro intervalos es  $\hat{\beta} = 0,0211$  (0,053), pero la hipótesis de igualdad se rechaza dado que el estadístico es 31,2 (p-valor = 0,000).
- La introducción del componente sectorial vuelve a estabilizar los coeficientes de convergencia (en este caso el GSP se desagrega en 54 sectores). Los valores se mueven en una estrecha franja, entre 0,0157 (0,0060) y 0,0297 (0,0101). El coeficiente agregado es  $\hat{\beta} = 0,0216$  (0,0042); la hipótesis de igualdad se acepta, con un valor del estadístico de 1,7 (p-valor = 0,637).

Tabla 3.3. Medida de la  $\beta$ -convergencia en los estados de USA (1880-1988).

Fuente: elaboración propia a partir de Barro (1992).

Barro (1992) señala que las propiedades de convergencia de las dos medidas de la renta per cápita analizadas en la Tabla 3.3 deberían coincidir en un modelo de economía cerrada. Curiosamente, las estimaciones de  $\beta$  son muy similares en ambos casos (limitando el estudio de la renta per cápita personal al mismo período temporal que el GSP, el valor de  $\hat{\beta} = 0,0181$ , con un error estándar de 0.0040, resulta muy próximo al coeficiente agregado en el caso de cuatro intervalos y composición sectorial, con  $\hat{\beta} = 0,0216$ ). Sin embargo, el conjunto integrado por los estados estadounidenses no representa, en absoluto, un modelo de economía cerrada: se producen flujos de bienes y tecnología, los residentes de un estado pueden pedir prestado de otros, es posible que se den flujos migratorios internos, etc. La investigación analizada plantea algunos elementos que parecen explicar la cercanía de los resultados:

- La introducción de restricciones a los préstamos que pueden obtener los estados (en forma de ratio tope entre la deuda externa y el stock de capital, interpretando de nuevo que éste engloba el capital humano) implica que el producto doméstico se comporte con el tiempo como la renta nacional. En este caso las propiedades de convergencia serían similares, como se verifica en el estudio empírico.
- La posible difusión de la tecnología entre economías es otro factor que influye en el comportamiento de la convergencia: la movilidad del capital puede ocasionar la divergencia del output per cápita y de los stocks de capital. El potencial de imitación también permite que las economías pobres crezcan con tasas elevadas.
- Un elemento relevante en este contexto es la migración de personas, dado que puede promover la convergencia: Barro y Sala-i-Martin (1991, a) confirma que la inmigración neta se encuentra relacionada de manera positiva con la renta per cápita inicial y que la inclusión de esta variable resulta coherente con el modelo de crecimiento neoclásico.

El estudio de Barro (1992) incluye también una comparación entre los resultados obtenidos al analizar el proceso de convergencia de los estados de USA con los de otras naciones. Para ello se introduce, en primer lugar, el análisis de 98 países, entre 1960 y 1985, presentado al

exponer las investigaciones de Barro (1989). Esta primera regresión proporciona un valor de  $\hat{\beta} = -0.0037$  (0.0018). Se aprecia que no existe una relación significativa entre el ratio de crecimiento y el logaritmo del PIB per cápita en el año inicial; de hecho, el signo del coeficiente de convergencia es negativo, por lo que existiría una tendencia (muy pequeña) de mayor crecimiento de los países ricos frente a los pobres. Estos resultados difieren de manera destacada con los relativos a los estados de USA, en los que se aprecia una significativa correlación negativa entre la renta per cápita inicial y su ratio de crecimiento (en las dos variantes expuestas). Como se recoge en Barro (1989) el estudio de los 98 países muestra una correlación significativa y parcialmente negativa entre estas variables si se mantienen constantes otras variables como los ratios de matriculación en primaria y secundaria, el ratio medio de gasto en consumo público respecto al PIB o, por ejemplo, medidas de estabilidad política. La introducción de estos elementos supone que el nuevo valor del coeficiente estimado de convergencia es  $\hat{\beta} = 0.0184$  (0.0045), en consonancia con los resultados correspondientes a los estados de US.

Se detecta otra diferencia central en la comparación de los dos estudios. Tal y como cabía esperar, los estados estacionarios muestran mayor homogeneidad de distribución en el caso USA: por tanto, la relación negativa entre el ratio de crecimiento y el logaritmo de la renta inicial es perceptible incluso aunque las diferencias entre los *steady-states* no se mantengan constantes. En tal caso la convergencia absoluta coincide con la condicional (basta comparar la cercanía de los resultados obtenidos de manera directa frente a los derivados de la introducción del componente sectorial). Por el contrario, la muestra de 98 países se caracteriza por mayores diferencias en los valores de los estados estacionarios, lo que apunta a la divergencia entre los mismos. Precisamente la inclusión de las variables adicionales que mantienen la constancia de las variaciones entre países consigue que la relación parcial entre el ratio de crecimiento y el logaritmo de la renta se torne más negativa.

A fin de explorar estas últimas ideas Barro (1992) centra su investigación en otro grupo de estados homogéneos, en este caso los 20 miembros originales de la OECD. Se obtiene que el ratio de crecimiento per cápita es negativo respecto al logaritmo del PIB per cápita inicial, con un valor significativo y positivo de  $\hat{\beta} = 0.0095$  (0,0028). Sin embargo, el valor del coeficiente es aproximadamente la mitad del correspondiente a USA. Barro (1992) interpreta que los países de la OECD se encuentran en una posición intermedia entre los dos casos estudiados. Al introducir las variables adicionales a la regresión se obtiene  $\hat{\beta} = 0.0203$  (0.0068), en línea con los resultados estabilizados para la muestra de 98 países.

Barro y Sala-i-Martin (2004) amplía el análisis realizado sobre los estados de USA, tanto en el horizonte temporal como en la sistematización de las técnicas empleadas para determinar la velocidad de convergencia. En este contexto resulta adecuado recordar que la ecuación que permite calcular el ratio medio de crecimiento de renta per cápita para una economía dada (en un determinado intervalo, de 0 a  $T$ ) considera como variables explicativas tanto el nivel inicial de renta como su nivel estacionario. Para obviar el tratamiento de esta segunda variable se emplea la convergencia relativa frente a la absoluta.

La ventaja de utilizar datos regionales radica en la fórmula que representa la nueva regresión (ahora de carácter univariante) a estimar:

$$\frac{1}{T} \log \frac{y_{iT}}{y_{i0}} = a - \left[ \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \right] \cdot \log(y_{i0}) + \omega_{i0,T} \quad (3.19)$$

Si el término  $\left[ \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \right]$  resulta negativo se concluye que las economías pobres tienden a crecer más rápido que las ricas (o sea, se produce convergencia absoluta). Ahora bien, ¿es posible afirmar lo contrario? ¿Se puede rechazar el modelo de crecimiento neoclásico si se verifica que el coeficiente no es negativo? La cuestión es que el modelo neoclásico predice una regresión multivariante y no la expresada en (3.19). En el caso de un análisis empírico en el que se constata convergencia relativa (con diferentes estados estacionarios, o sea:  $\hat{y}_i^* \neq \hat{y}_j^*$  para todo  $i$  y  $j$ ) la ecuación anterior se encuentra mal especificada y el término excluido se incorpora al de error,  $\omega_{i0,T}$ . Esto supone diferenciar dos situaciones:

- Si el nivel estacionario de renta se encuentra relacionado con el nivel inicial, el término de error estará correlacionado con la parte de la derecha de la fórmula de regresión, por lo que ésta proporcionará un valor sesgado de  $\beta$  (normalmente nulo). La única manera de obtener estimaciones correctas consiste en identificar los valores de los estados estacionarios e introducirlos en la regresión.
- Si, por el contrario, no existe correlación entre el estado inicial y el estacionario, el término de error, aunque incluye la variable desaparecida,  $\hat{y}_i^*$ , no está correlacionado con la variable explicativa. Por tanto, (3.19) proporciona una estimación consistente de  $\beta$ .

Cuando se analizan datos en los que todas las economías poseen el mismo *steady-state* el término  $\left[ \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \right] \cdot \ln(\hat{y}_i^*)$  se incorpora a la constante de la fórmula, por lo que (3.19) vuelve a proporcionar una estimación correcta de  $\beta$ .

El análisis efectuado permite identificar dos vías para estimar la velocidad de convergencia:

- Se pueden emplear conjuntos *generales* de datos (sin garantías en cuanto a la ausencia de correlación entre el nivel inicial de renta y el estacionario) y encontrar indicadores del *steady-state*.
- Otra opción consiste en utilizar datos relativos a economías que tienden a converger al mismo estado estacionario o, al menos, en los que exista seguridad de no-correlación respecto al nivel inicial. De ahí el interés de emplear conjuntos de datos regionales: en general las diferencias en tecnología, preferencias y políticas son menores entre regiones que entre países<sup>53</sup>. Barro y Sala-i-Martin (2004: 468) señala: “*Firms and households of different regions within a single country tend to have access to similar technologies and have roughly similar tastes and cultures*”.

<sup>53</sup> Como se ha indicado en otros apartados, esta homogeneidad relativa implica que la convergencia absoluta es más probable entre regiones dentro de un país que entre estados.

La revisión del estudio sobre estados de US supone volver a realizar estimaciones no lineales de mínimos cuadrados de acuerdo a (3.19) en el intervalo 1880-2000. Para ello se consideran tres posibles formulaciones:

- La consideración de la ecuación básica (3.19), sin la introducción de otras variables.
- La incorporación de variables ficticias regionales a la ecuación básica. En concreto se emplean cuatro, correspondientes a la distribución principal del censo: Noreste, Sur, Medio Oeste y Oeste.
- La inclusión de componentes sectoriales<sup>54</sup>, junto a las variables ficticias regionales, en la ecuación básica.

En la siguiente figura se relacionan los resultados obtenidos respecto a la renta personal<sup>55</sup> (los términos entre paréntesis corresponden al error estándar):

Período considerado	Ecuación básica	Ecuación con variables ficticias regionales	Ecuación con componentes sectoriales y variables ficticias
Completo: 1880-2000	$\hat{\beta} = 0.0172 (0.0024)$	$\hat{\beta} = 0.0160 (0.0034)$	—
Nueve sub-períodos <sup>56</sup>	$\hat{\beta}_{min} = -0.0149 (0.0051)$ $\hat{\beta}_{max} = 0.0502 (0.0058)$ $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0150 (0.0015)$	$\hat{\beta}_{min} = -0.0128 (0.0078)$ $\hat{\beta}_{max} = 0.0512 (0.0062)$ $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0164 (0.0021)$	$\hat{\beta}_{min} = 0.0029 (0.0050)$ $\hat{\beta}_{max} = 0.0305 (0.0035)$ $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0212 (0.0023)$

Tabla 3.4. Regresiones de la renta personal en estados de USA (1880-2000).  
Fuente: elaboración a partir de Barro y Sala-i-Martin (2004).

Se relacionan seguidamente las conclusiones más significativas de este estudio:

- El valor de  $R^2$  al considerar el período completo (sin variables añadidas) es muy elevado: 0.92. La representación del ratio de crecimiento anual respecto al logaritmo de la renta personal per cápita en 1880 se ajusta a través de una renta de pendiente negativa, que confirma la existencia de  $\beta$ -convergencia absoluta para los estados de USA. El valor estimado del coeficiente de convergencia al introducir variables ficticias regionales es muy similar al obtenido de la ecuación básica: Barro y Sala-i-Martin (2004) sugiere que esto supone que la velocidad a la que la media de las rentas converge a lo largo de las regiones del censo no difiere en exceso de la velocidad a la que la media de las rentas converge en cada uno de los estados dentro de dichas regiones. El término  $R^2$  supera al anterior: 0.95.
- El estudio distingue nueve intervalos en el horizonte temporal, obteniéndose en siete de ellos coeficientes estimados de convergencia significativamente positivos. Sólo en uno el valor de  $\hat{\beta}$  es negativo, el correspondiente al sub-período 1920-1930 (estaría asociado a la fuerte caída de precios de los productos agrícolas, afectando de manera

<sup>54</sup> Según Barro y Sala-i-Martin (2004), en línea con Barro (1992), las variables adicionales representan un intento de mantener las conmociones agregadas (o *shocks*) que afectan de manera diferenciada a los grupos de estados.

<sup>55</sup> En Barro (1992) se apreciaba que los resultados obtenidos eran muy similares en el tratamiento de la renta personal y de la GSP, por lo que se opta por trabajar con la variable de la que se dispone de más información.

<sup>56</sup> Los intervalos considerados son: 1880-1900; 1900-1920; períodos de 10 años a partir de 1920.

destacada al crecimiento de estados dependientes de este sector). Los coeficientes tienen valores insignificantes para los intervalos más recientes: 1980-1990 y 1990-2000. La inclusión de las variables regionales no modifica el signo negativo del subperíodo 1920-1930: los estados pobres tienden a crecer más lentamente que los ricos durante esta década. Sin embargo, la consideración, además, de las variables sectoriales altera el coeficiente de convergencia en dichos años, obteniéndose un valor positivo:  $\hat{\beta} = 0.02$ .

Por tanto, los estados de USA tenderían a converger con una velocidad cercana al 2% anual. Las medias de las cuatro regiones censadas convergen con un ratio similar a la de los estados interiores. Manteniendo constantes las medidas estructurales no se rechaza la hipótesis de convergencia estable en el tiempo, aunque las estimaciones para las dos últimas décadas prácticamente corresponden al valor nulo.

Barro y Sala-i-Martin (2004) advierten de una problemática asociada a los errores de medida: su presencia tiende a introducir un sesgo ascendente en la estimación del coeficiente de convergencia. Por ese motivo su eliminación puede suponer la aparición de convergencia. De todos modos, la revisión de los resultados empíricos para corregir este efecto revela que el error de medida no es un elemento crucial en la relación significativa y negativa entre el crecimiento y el nivel inicial de renta. Por tanto, no parece que constituya una variable central de la cuestión.

Otro aspecto de interés es la posible consideración de la migración como variable de control del proceso de  $\beta$ -convergencia. Barro y Sala-i-Martin (2004) muestra que la migración de trabajadores con bajo nivel de capital humano desde economías pobres a ricos tiende a acelerar la convergencia de la renta y del producto per cápita. Parece razonable incluir este efecto, introduciendo el ratio neto de migración como otra variable de la ecuación de regresión. Si la hipótesis es cierta (es decir, la migración constituye una importante vía de convergencia), y se puede tratar como un elemento exógeno respecto a la variable de error, el valor de  $\hat{\beta}$  debe disminuir al mantener constante la migración.

Debido a la limitación de información disponible, este nuevo estudio se limita, en el caso de USA, al período 1920-1990, subdividiéndose en siete intervalos. La regresión se lleva a cabo considerando el efecto de las variables regionales ficticias y de la estructura sectorial, planteándose en tres escenarios: (i) excluyendo el efecto migratorio; (ii) incluyendo la migración y aplicando OLS; y (iii) incluyendo la migración y empleando una estimación instrumental basada en las ecuaciones que describen la evolución neta de este proceso. Los resultados se representan en la siguiente tabla:

Migración excluida	Migración incluida. OLS	Migración incluida. Estimación instrumental
$\hat{\beta} = 0.0196$ (0.0025)	$\hat{\beta} = 0.0231$ (0.0028)	$\hat{\beta} = 0.0174$ (0.0033)

Tabla 3.5. Medida de la relación entre migración y convergencia en los estados de USA (1920-1990).

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004: 493).

Los resultados no muestran el comportamiento esperado: el valor del coeficiente aumenta al considerar la regresión mediante OLS y disminuye (en ambos casos mínimamente) cuando se emplea la estimación instrumental. Barro y Sala-i-Martin (2004) lo atribuye al carácter endógeno del ratio de migración neta.

En el estudio que se está analizando se procede a la recuperación de la investigación recogida en Barro y Sala-i-Martin (1992 b) sobre el aspecto migratorio en las 47 prefecturas japonesas (los datos agregados de la renta proceden del *Annual Report on Prefectural Accounts* y los de la inmigración de varias publicaciones desarrolladas por el *Statistics Bureau*).

Se representan en primer lugar los resultados correspondientes a las regresiones de renta personal:

Período considerado	Ecuación básica	Ecuación con variables ficticias regionales	Ecuación con componentes sectoriales y variables ficticias
Completo: 1930-1990	$\hat{\beta} = 0.0279$ (0.0033)	$\hat{\beta} = 0.0276$ (0.0034)	—
Dos sub-períodos:			—
1930-1955	$\hat{\beta} = 0.0358$ (0.0035)	$\hat{\beta} = 0.0380$ (0.0037)	
1955-1990	$\hat{\beta} = 0.0191$ (0.0035)	$\hat{\beta} = 0.0222$ (0.0035)	
Siete sub-períodos <sup>57</sup>	$\hat{\beta}_{min} = -0.0152$ (0.0079) $\hat{\beta}_{max} = 0.0967$ (0.0100) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0125$ (0.0032)	$\hat{\beta}_{min} = -0.0023$ (0.0082) $\hat{\beta}_{max} = 0.0625$ (0.0092) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0232$ (0.0034)	$\hat{\beta}_{min} = 0.0047$ (0.0118) $\hat{\beta}_{max} = 0.0661$ (0.0118) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.0312$ (0.0040)

Tabla 3.6. Regresiones de la renta personal en prefecturas de Japón (1930-1990).

Fuente: elaboración a partir de Barro y Sala-i-Martin (2004).

Al considerar el período completo se obtiene un valor de  $R^2$  idéntico al de los estados de USA: 0.92. La representación gráfica muestra una perfecta adaptación de la recta de regresión entre el ratio anual de crecimiento y el logaritmo de la renta per cápita en 1930. Por su parte, las estimaciones de los coeficientes de convergencia son muy similares, tanto al aplicar la ecuación básica como al agregar las variables ficticias, confirmando la existencia de  $\beta$ -convergencia en las prefecturas de Japón. La velocidad de convergencia entre los distritos es aproximadamente la misma que dentro de éstos.

La división del horizonte temporal en dos períodos muestra que el proceso de  $\beta$ -convergencia se ralentizó a partir de 1955. Cuando esta fragmentación se amplía a siete sub-períodos se observa que el valor estimado de  $\beta$  es negativo en tres de ellos. El test de igualdad de los coeficientes estimados proporciona un valor del estadístico de 94.6 (p-valor = 0.000), por lo que la hipótesis es rechazada. La introducción de las variables regionales supone que el signo erróneo de  $\beta$  sea erróneo (y no significativo) en un único sub-período, 1955-1960. En este caso el valor del estadístico de igualdad es 40.6 (p-valor = 0,000); la hipótesis vuelve a ser rechazada. Por último, al considerar variables regionales y sectoriales desaparecen los signos negativos en la estimación de  $\beta$ . La hipótesis de igualdad de coeficientes tampoco se acepta, dado que nuevo estadístico es 26.4 (p-valor = 0.002).

<sup>57</sup> Corresponden a una división cada 5 años a partir de 1955.

Barro y Sala-i-Martin (1992b) detecta dos fuentes de inestabilidad en los resultados: (i) la ciudad de Tokio constituye un *outlier* en la década de los 80 (por tanto, durante dos sub-períodos), con un ratio de crecimiento muy superior, que no es capturado por las variables sectoriales; y (ii) el coeficiente de convergencia también posee un valor elevado anómalo en el intervalo 1970-1975, asociado a la crisis del petróleo de 1973.

Por su parte, los resultados derivados de la consideración de los efectos migratorios son los siguientes:

Migración excluida	Migración incluida. OLS	Migración incluida. Estimación instrumental
$\hat{\beta} = 0.0312 (0.0040)$	$\hat{\beta} = 0.0340 (0.0044)$	$\hat{\beta} = 0.0311 (0.0042)$

Tabla 3.7. Medida de la relación entre migración y convergencia en las prefecturas de Japón (1955-1990).

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004: 493).

La evolución del coeficiente es similar al caso estadounidense por lo que, de nuevo, parece que la migración no constituye un elemento importante en la consideración de la  $\beta$ -convergencia de las prefecturas japonesas.

Se revisan a continuación otros estudios sobre patrones de convergencia en distintas regiones del mundo (el caso específico de la EU se analiza en el apartado 3.8).

Coulombe y Day (1999) compara la evolución de las desigualdades regionales en la renta per cápita en Canadá y en los doce estados de USA limítrofes con dicho país. Para ello el análisis se centra en la evolución de tres variables (en términos nominales) a lo largo del tiempo:

- La renta personal per cápita desde 1950 hasta 1995. Se obtiene un valor de  $\hat{\beta} = 0.0370$  ( $R^2 = 0.9618$ ) para Canadá y de  $\hat{\beta} = 0.0323$  ( $R^2 = 0.9353$ ) para los estados limítrofes.
- El output per cápita en el período 1964-1992. En el caso de Canadá:  $\hat{\beta} = 0.0231$  ( $R^2 = 0.9860$ ), mientras que en los estados analizados de USA:  $\hat{\beta} = 0.0452$  ( $R^2 = 0.9355$ ). El estudio también realiza una estimación para Canadá excluyendo la región de Alberta por su potencial petrolífero (de ese modo se tiene en cuenta el efecto ya comentado de la crisis del crudo en la década de los 70 y 80): en este caso  $\hat{\beta} = 0.0309$  ( $R^2 = 0.9847$ ).
- El output por trabajador, entre 1967 y 1992. Se obtiene para Canadá:  $\hat{\beta} = 0.0387$  ( $R^2 = 0.9605$ ); para Canadá sin considerar Alberta:  $\hat{\beta} = 0.0567$  ( $R^2 = 0.9482$ ); y, finalmente, para los estados frontera:  $\hat{\beta} = 0.0398$  ( $R^2 = 0.9309$ ).

Las tres variables expuestas han sido empleadas en la literatura sobre convergencia, aunque lo recomendable es utilizarlas en términos reales. Coulombe y Day (1999) no dispone de los precios regionales para aplicar la deflación durante todos los períodos, por lo que opta por emplear una modificación de la ecuación de convergencia en términos de desviación de la media nacional. En este estudio se aprecia que la velocidad de convergencia es significativa y positiva, en línea con las predicciones del modelo neoclásico sobre convergencia absoluta. Los



valores obtenidos resultan ligeramente superiores a los correspondientes a muestras en las que se verifica la universalidad del 2%. Esta diferencia estaría asociada a las características nominales de los datos. Por otro lado, la velocidad estimada de convergencia no es siempre mayor en Canadá que en los estados considerados de USA (como se podría esperar en una primera aproximación). El coeficiente es superior únicamente al considerar la renta personal per cápita y el output por trabajador cuando se excluye la región de Alberta. Los autores recuerdan que el parámetro  $\beta$  no mide el ratio de reducción de la dispersión relativa (índice de  $\sigma$ -convergencia) sino el ratio medio al que un nivel económico pobre de output per cápita converge hacia otro rico.

Resulta sorprendente que un modelo que predice convergencia absoluta explique la evolución de las diferencias entre regiones desiguales en términos de recursos propios y políticas públicas. Parece que la acumulación de capital y los cambios tecnológicos son los principales responsables de la disminución de estas diferencias relativas de renta en Canadá, con un papel restringido de la acción gubernamental. Por su parte, las diferencias en el comportamiento de la convergencia entre este país y los estados de USA se deben a los patrones de acumulación de capital humano.

El modelo, sin embargo, no explica la disparidad de tasas de desempleo en las distintas regiones ni las características de los factores estructurales que subyacen en el nivel de equilibrio alcanzado.

### **3.4 Convergencia y *catching-up* tecnológico. Evidencias empíricas.**

En la revisión de estudios empíricos sobre  $\beta$ -convergencia se aludía al *catching-up* tecnológico como un proceso de acercamiento, asociado al proceso general de difusión del conocimiento. Ciertamente, la convergencia de las economías puede deberse a la existencia de rendimientos decrecientes, como predice el modelo neoclásico, en el que se descarta el tratamiento del progreso tecnológico. Sin embargo, diferentes tratamientos basados en modelos endógenos de crecimiento consideran la relación entre la convergencia y el libre acceso a las innovaciones de los países o de las empresas líderes. Mora (2002: 125) subraya que “*la ventaja de copiar a un bajo coste implica reducir distancias en los niveles de renta*”.

De manera análoga al planteamiento central del modelo neoclásico, los primeros tratamientos de la cuestión asumen un importante potencial de crecimiento en países con menor nivel de conocimiento tecnológico. Estos acercamientos iniciales en términos de  $\beta$ -convergencia incorporan simplemente el desarrollo tecnológico como una variable explicativa más de la ecuación de regresión. En una fase posterior de los estudios, tal y como se describió en la relación de observaciones a la medida de  $\beta$ -convergencia, De la Fuente (1996) plantea que el valor estimado del coeficiente de convergencia constituye una síntesis del efecto de las diferentes fuerzas (tanto positivas como negativas) que actúan sobre la evolución de las

desigualdades, entre las que se encuentra la difusión tecnológica<sup>58</sup>. También en una sección precedente se revisó la hipótesis de *catching-up* desarrollada en Abramovitz (1986), en la que se describe el proceso de difusión tecnológica.

Fagerber (1987) analiza la posible correlación existente entre el nivel de desarrollo económico, en términos de PIB per cápita, y el nivel de desarrollo tecnológico, considerando estadísticas sobre patentes y resultados de I+D. El análisis empírico de las hipótesis planteadas se realiza para el período 1960-1983 sobre 19 países de la OECD más 6 economías fuertemente industrializadas, no pertenecientes a este ámbito. Los resultados confirman que la imitación, el crecimiento de actividades innovadoras y los intentos para reducir las diferencias tecnológicas constituyen factores que explican amplios aspectos del crecimiento económico. El potencial de estas variables se reduce de manera significativa cuando se eliminan de la muestra las economías con mayor proporción industrial.

Este último resultado posee gran interés y se encuentra en línea con la coincidencia general entre los estudios de considerar el *catching-up* tecnológico como un fenómeno no global. DeLong (1988), por ejemplo, destaca que existen países con potencial para progresar a través de esta vía, pero que, finalmente, no se desarrollan. Verspagen (1991) se centra en esta cuestión y considera que los modelos de crecimiento no tienen en cuenta la posibilidad explícita de que ciertos estados se queden rezagados. Se desarrolla para ello un nuevo modelo dinámico que incorpora tanto los efectos de adelanto tecnológico como los de retraso. Esto supone descartar que los procesos de *spill-over* se producen de manera automática (como algunas hipótesis de convergencia llegan a sugerir) y constatar que “*the capabilities of the «receiving» country (firms) to «assimilate» (foreign) technological knowledge are critical to the success of diffusion*”, Verspagen (1991: 361). En efecto, si los receptores del nuevo conocimiento no poseen las habilidades de asimilación los fenómenos de desbordamiento no tendrán lugar.

Cohen y Levinthal (1989) desarrolla un modelo a nivel microeconómico en el que se modela la capacidad de una empresa para emplear *spill-overs* del conocimiento generado por otras. Si  $z_i$  representa la incorporación a la empresa  $i$  del conocimiento tecnológico y científico, su formulación se puede expresar como<sup>59</sup>:

$$z_i = M_i + \gamma_i \left( \theta \sum_{j \neq i} M_j + T \right) \quad (3.20)$$

Las restantes variables que aparecen en la ecuación son:

<sup>58</sup> El resto de fuerzas relacionadas por este autor son las relaciones de rendimientos decrecientes, los flujos inter-regionales, las externalidades y los efectos del nivel de renta sobre las tasas de ahorro y de natalidad.

<sup>59</sup> Se asume que esta variable provoca el incremento de ganancias brutas de la empresa, aunque con un ratio decreciente.

- $M_i$ : inversión de la empresa en I+D. Las inversiones en I+D de las restantes entidades, representadas por  $\sum_{j \neq i} M_j$ , también influyen en  $z_i$ .
- $\gamma_i$ : fracción de conocimiento de dominio público que la empresa puede asimilar y explotar (o sea, su capacidad de absorción).
- $\theta$ : grado por el que esfuerzo de investigación de una empresa provoca un efecto de desbordamiento en el conjunto de conocimiento disponible para uso de otras. Se cumple  $0 \leq \theta \leq 1$ , de modo que  $\theta = 0$  implica que los beneficios del proceso de I+D repercuten únicamente en la empresa. El valor de  $\theta$  puede establecerse en función de la política empleada por la entidad para la protección de sus derechos intelectuales o para la explotación de patentes.

El modelo plantea que la capacidad de absorción de una empresa depende de su esfuerzo en I+D. De este modo se asume que  $0 \leq \gamma_i \leq 1$ : si  $\gamma_i = 1$  la empresa absorbe todo lo que es de dominio público; cuando el valor es cero esta absorción es también nula (y el conocimiento tecnológico adquirido se limita al derivado de la inversión propia en I+D).

En el contexto macroeconómico el planteamiento genérico es muy similar: un país puede aplicar el conocimiento pendiente en función de su capacidad de asimilación. Esto, a su vez, requiere una cierta inversión de capital. Verspagen (1991) plantea un modelo simple, en base a una relación norte ( $n$ ) –sur ( $s$ ) entre dos países. Se asume que el estado del norte se encuentra más avanzado desde el punto de vista tecnológico que el sur. El salto tecnológico entre ambos se define como  $G = \log \frac{A_n}{A_s}$ , con  $A$  representando el stock de conocimiento de cada país. La incorporación del logaritmo supone que el salto es cero cuando los niveles de stock de conocimiento son iguales en ambos países. Por su parte, la evolución dinámica de esta variable en cada ámbito geográfico se expresa como:  $\frac{dA_n/dt}{A_n} = \beta_n$  y  $\frac{dA_s/dt}{A_s} = \beta_s + S$ . El término  $\beta$  representa el ratio exógeno de crecimiento del stock de conocimiento debido a la I+D, que es distinto para cada país; por su parte  $S$  corresponde al ratio de crecimiento del stock de conocimiento debido a efectos de *spill-over* del norte. Al asumir la superioridad tecnológica del norte no existe un término similar  $N$ ; además esto implica que  $\beta_n > \beta_s$ .

La especificación del término *spill-over* requiere distinguir entre su valor potencial y el actual. Esto implica introducir la *capacidad de aprendizaje* de un país. Se asume que depende de su capacidad intrínseca<sup>60</sup> y de la distancia tecnológica hasta el país líder. La expresión funcional de dicho término es:  $S = aG e^{-\frac{G}{\delta}}$ , siendo  $aG$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) el ratio de *spill-over* potencial y  $e^{-\frac{G}{\delta}}$  la capacidad de aprendizaje, que depende de  $\delta > 0$ , la capacidad intrínseca de aprendizaje. La formulación propuesta verifica: (i) el valor actual del *spill-over* no es superior al potencial; (ii) los efectos de desbordamiento actuales son nulos para economías muy próximas tecnológicamente; y (iii) los *spill-overs* pueden crecer de manera destacada si  $\delta$  es elevada.

<sup>60</sup> Este término se encuentra determinado, a su vez, por una mezcla de factores sociales, educación de trabajadores, nivel de infraestructuras, etc.

La combinación de las cuatro ecuaciones descritas permite obtener la expresión del comportamiento dinámico del salto tecnológico:

$$\frac{dG}{dt} = b - aGe^{-\frac{G}{\delta}} \quad (3.21)$$

El valor de  $b$  corresponde a la diferencia  $\beta_n - \beta_s$ . La ecuación (3.21) se analiza de manera gráfica en la Figura 3.7. La línea horizontal  $B$  representa la tendencia del salto tecnológico a aumentar debido a la diferencia exógena entre los ratios de crecimiento del stock de conocimiento entre ambos países. Por su parte, las curvas  $S_i$  caracterizan la tendencia del salto tecnológico a disminuir debido al efecto de desbordamiento:  $S_i(G) = aGe^{-\frac{G}{\delta}}$ ; se supone que  $a$  es constante. Valores superiores de  $i$  se asocian a incrementos de la capacidad intrínseca de aprendizaje. Resulta sencillo deducir que el máximo de las curvas se produce en  $G = \delta$ .

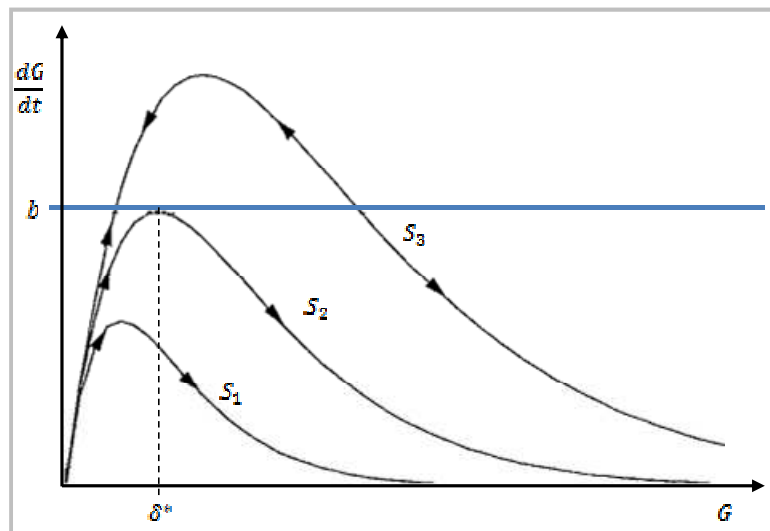


Figura 3.7. Comportamiento dinámico del salto tecnológico.  
Fuente: Verspagen (1991: 364).

Los puntos de equilibrio del salto tecnológico corresponden a la intersección de la línea  $B$  y de las curvas  $S$ : en ellos se verifica que la derivada respecto al tiempo del salto tecnológico es nula. Cuando la curva  $S$  llega hasta  $B$  con pendiente positiva el punto de equilibrio resulta estable; por el contrario, es inestable si alcanza la horizontal con pendiente negativa. Esto es debido a que, cuando la curva  $S$  está por debajo de  $B$ , los *spill-overs* de conocimiento son más pequeños que el incremento tecnológico del salto tecnológico, por lo que éste continúa aumentando.

Se comprueba que, en efecto, el modelo considera tanto la evolución de *catching-up* como de *falling-behind*. Dependiendo del valor inicial del salto tecnológico y de la capacidad intrínseca de aprendizaje, puede verificarse un proceso de acercamiento o de retroceso.

A pesar de su aparente simplicidad, el modelo facilita una serie de consideraciones desde el punto de vista de las políticas de desarrollo económico:

- Se aprecia que para ciertas combinaciones de valores iniciales y de la capacidad intrínseca de aprendizaje la convergencia no tendrá lugar. Esto se corresponde con países muy retrasados tecnológicamente, con capacidades inadecuadas para aplicar el conocimiento procedente de naciones más desarrolladas. Por tanto, antes de iniciar el proceso de *catching-up* se debe desarrollar una fase en la que estos estados rezagados aumentarán dicha capacidad intrínseca de aprendizaje mediante mejoras formativas, invirtiendo en infraestructuras, etc. En general las mejoras corresponderán a inversiones de índole pública. La fase de *pre-catching-up* se representa en la Figura 3.8 por el movimiento existente desde el punto A hasta C. En este período hay que considerar que la tecnología del país líder continúa desarrollándose, por lo que no es suficiente con alcanzar el punto B: de ahí la importancia de políticas muy activas por parte del gobierno, que tengan en cuenta el tiempo de actuación. El movimiento de C hasta E representa la fase en sí de *catching-up*: el país rezagado reduce el salto tecnológico hasta un cierto nivel, sin necesidad de incrementar la ratio de cambio tecnológico, aplicando el conocimiento adquirido de la nación avanzada. Desde C hasta D aumentan los *spill-overs*; a partir de ese punto los desbordamientos se reducen lentamente hasta alcanzar el salto de equilibrio en E.
- Por otra parte, el salto tecnológico converge a cero únicamente si los ratios exógenos de cambio tecnológico coinciden para los dos países. En esta fase *post-catching-up* la investigación en el propio país alcanza niveles comparables a los del país más desarrollado. En la Figura 3.8 esta última evolución se representa con el movimiento desde E hasta F.

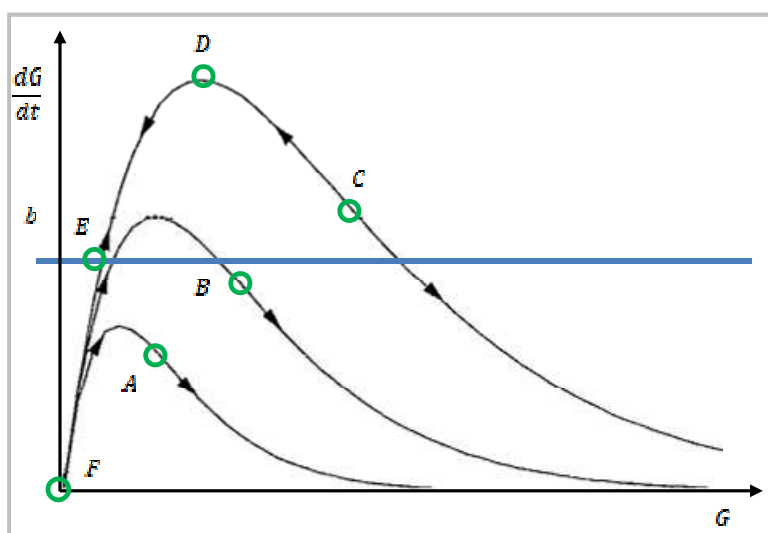


Figura 3.8. Fases del proceso de catching-up.

Fuente: Verspagen (1991: 367).

La estimación del modelo se realiza sobre una muestra de 114 países para el período 1960-1985: los datos sobre productividad y población se extraen de Summers y Heston (1987) y los de capacidad de asimilación de *spill-overs* de conocimiento proceden de Naciones Unidas y del Banco Mundial. Se emplea para ello el movimiento a largo plazo del salto tecnológico como variable dependiente. El modelo propuesto ajusta correctamente los datos, proporcionando

parámetros con el signo esperado, altamente significativos. De hecho se compara con dos modelos lineales, uno de ellos propuesto por Abramovitz (1979), y se constata un mejor ajuste por parte del descrito, que es no lineal. Una conclusión importante de los resultados de la estimación es que la educación constituye un factor importante del proceso de *catching-up*, en línea con conclusiones de estudios anteriores.

En Bernard y Jones (1996) se encuentran importantes reflexiones sobre la relación entre tecnología y convergencia. El estudio parte de una crítica sobre la orientación de los debates existentes a mediados de los noventa entre la comunidad de investigadores, excesivamente focalizados en dos líneas de pensamiento enfrentadas: la que consideraba la convergencia como un fenómeno sólido, correctamente argumentado por los modelos de crecimiento neoclásico; y la que expresaba su escepticismo sobre esta posibilidad y se centraba en la identificación de múltiples estados de equilibrio para países con similares recursos. Esta polarización implica la ausencia de un tratamiento adecuado del rol específico de la tecnología en la cuestión de la convergencia. Según los autores citados, esta variable aparece como un índice más dentro del conjunto inicial de factores multiplicativos, de modo que se asume que todas las economías acumulan la tecnología con la mismo ratio. El factor principal en estos modelos es la acumulación de capital.

El eje central de este estudio es la comparación que se plantea entre la importancia concedida a la tecnología por los investigadores del crecimiento económico frente a su escaso tratamiento en los estudios empíricos sobre convergencia. El interés, por ejemplo, de las nuevas teorías de crecimiento reside en que se centran en el cambio tecnológico endógeno, diferenciando el papel de la acumulación de capital. Dado que el objeto del análisis se aleja de la controversia entre las dos visiones ya comentadas, Bernard y Jones (1996) considera un modelo de crecimiento de Solow, en el que la función de producción se expresa como:  $Y_i = K_i^{\alpha_i} (A_i L_i)^{1-\alpha_i}$ . Por tanto, en términos per cápita:  $y_i = A_i^{1-\alpha_i} k_i^{\alpha_i}$ . El término original de estas formulaciones se encuentra en la variación del factor de ponderación,  $\alpha$  (se da como evidente la posibilidad de variación entre países de los niveles de cambio tecnológico del factor de trabajo aumentado,  $A_i$ ). Bernard y Jones (1996: 4) argumenta que no hay razón para considerar que la tecnología deba entrar multiplicando en la función de producción  $F(K, L, t)$ : *“two economies with the same K, L, and even A will produce diferente quantities of output if the  $\alpha$ 's differ”*. Estas diferencias se encuentran asociadas a la heterogeneidad de los bienes que se producen dentro de una determinada economía.

Las acumulaciones se producen tanto en capital como en tecnología. En el primer caso:  $\frac{dK_i}{dt} = s_i Y_i - \delta_i K_i$ . Respecto al ratio de crecimiento de tecnología, el asume más simple de transferencia de tecnología se expresa como:  $\frac{dA_i/dt}{A_i} = \xi_i \left( \frac{A_\omega}{A_i} \right)$ . El término  $\xi_i$  recoge la habilidad de un país para adoptar la tecnología más productiva (en términos aumentados de trabajo),  $A_\omega$ , que se asume que crece de manera exógena con un ratio  $g = \xi_\omega$ . Se puede demostrar que los ratios tecnológicos en el estado estacionario verifican:  $\frac{A_i}{A_\omega} = \frac{\xi_i}{\xi_\omega}$ . También se

verifica, como es común en estos desarrollos, la igualdad de las distintas ratios de crecimiento:  $g_{y_i} = g_{k_i} = g_{A_i} = g$ .

Resulta muy interesante constatar que, bajo este enfoque, los niveles de los estados estacionarios de output per cápita dependen de algo más que las ratios de ahorro, las de depreciación y las de crecimiento de la población; en efecto, incorporan una dependencia de los países para adoptar el nivel tecnológico frontera y de los porcentajes agregados de factor:

$$\frac{y_i^*(t)}{y_{us}^*(t)} = \frac{\xi_i}{\xi_{us}} \cdot \frac{\left(\frac{s_i}{n_i + g + \delta_i}\right)^{\alpha_i/1-\alpha_i}}{\left(\frac{s_{us}}{n_{us} + g + \delta_{us}}\right)^{\alpha_{us}/1-\alpha_{us}}} \quad (3.22)$$

En este contexto se comprueba que la variación de tecnología entre los países se debe tanto a las diferentes habilidades que caracterizan su adopción de la tecnología líder, tal y como se analizaba en Verspagen (1991), como a sus propias características industriales y de tratamiento de productos. Como señala Bernard y Jones (1996): a los países que sean buenos innovando les irá bien.

El estudio empírico del modelo se construye en base a catorce economías del ámbito OECD, diferenciando la industria total de la manufactura. Se comprueba que, en efecto, existen variaciones sustanciales de la tecnología entre los países y se aprecia una relación muy directa entre la dispersión de la productividad laboral y los cambios en las diferencias tecnológicas. Los resultados relativos a la industria total son plenamente consistentes con los planteamientos relativos a la transferencia de tecnología; en el caso de la manufactura esta relación es menos directa.

Las evidencias empíricas publicadas a principios de la década de los noventa parecían confirmar la importancia en los procesos de convergencia del acceso de los países pobres a la tecnología de los más ricos. Este cumplimiento de la hipótesis de difusión tecnológica<sup>61</sup> repercute en rápidos crecimientos de la productividad total de los factores (PTF), lo que supone un incremento de las tasas de crecimiento a nivel nacional. De la Fuente (1996: 37) advierte del escaso tratamiento de la misma cuestión en un ámbito de carácter más restringido, como el correspondiente a las autonomías, máxime cuando *“parece razonable pensar que existen bastante menos obstáculos a la transmisión de ideas y técnicas de producción entre las regiones de un país dado, que entre naciones con lenguas diferentes y sistemas educativos y legales a veces muy distintos, por lo que este fenómeno debería ser, en principio, más fácil de detectar a nivel regional que nacional”*.

Con idea de contrastar la existencia de un fenómeno de *catching-up* a nivel regional, De la Fuente (1996) parte de una función de producción agregada de tipo Cobb-Douglas, en la que se relaciona el producto agregado regional con: un índice de eficiencia técnica, el stock privado

<sup>61</sup> Es decir, procesos de imitación y absorción, más baratos que el desarrollo propio de mecanismos de innovación.

de capital físico, el nivel de empleo, otro indicador del stock medio de capital humano por trabajador y la tasa de desempleo. El interés se centra en la descomposición de la tasa de eficiencia técnica en dos elementos: (i) un término correspondiente al promedio nacional (su media aritmética, que se considera como una variable exógena<sup>62</sup>) más (ii) un diferencial tecnológico de cada región con respecto a dicho promedio. Se supone que este diferencial tiene una evolución similar a la descrita para la tasa de eficiencia, es decir, un factor relativo al promedio del país, como su nivel educativo, más la distancia tecnológica de la región respecto a la media (que representaría su *brecha tecnológica*). El análisis del signo del coeficiente que afecta a la brecha tecnológica permite comprobar si se verifica la hipótesis de difusión tecnológica y, en efecto, las regiones más atrasadas se benefician de la adopción, a bajo coste, de las tecnologías de países más ricos.

Aunque no se puede observar directamente, resulta factible expresar esta variable en relación a los términos que integran la función de producción, considerando las desviaciones de cada región respecto al promedio. El modelo se estima empleando las series de renta por CC.AA. elaboradas por el entonces BBV y las de stocks de capital físico y humano del Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas. De la Fuente (2006) plantea cuatro especificaciones asociadas a posibles características de la tasa de progreso técnico; los resultados se muestran en la siguiente tabla:

---

<sup>62</sup> En principio parece razonable considerarlo asociado al diferencial tecnológico y formativo del país respecto al nivel de los circundantes y al gasto destinado a I+D.



Supuesto	Resultados obtenidos
(i) Se considera la tasa de progreso técnico exógena y común a todas las regiones, por lo que no habría difusión tecnológica.	Los coeficientes de los factores productivos son significativos y sus valores son razonables, salvo el correspondiente al capital físico, que no es estadísticamente significativo y su valor es muy pequeño.
(ii) Se introduce el efecto de difusión tecnológica, pero manteniendo la independencia de la tasa de progreso técnico respecto al nivel de formación de los trabajadores.	El coeficiente de difusión tecnológica es significativo y positivo, aunque algo reducido. El coeficiente capital físico pasa a ser significativo, aunque todavía con un valor inferior al esperado. Los coeficientes de capital humano y trabajo siguen siendo significativos y razonables.
(iii) Se permite que la tasa de progreso técnico dependa del nivel relativo de educación en cada Comunidad Autónoma.	El coeficiente de difusión tecnológica es significativo y positivo. El valor estimado de la tasa de convergencia tecnológica se multiplica por 2.5. Los coeficientes de los factores productivos se mantienen estables, con una ligera mejoría en las estimaciones.
(iv) Se impone la restricción de rendimientos constantes a escala en el trabajo y en el capital físico y humano.	Los resultados son muy similares a los de la sección anterior.

Tabla 3.8. Estimación de la difusión tecnológica entre regiones españolas.

Fuente: Elaboración propia a partir de De la Fuente (2006).

A partir de las estimaciones realizadas y aplicando la formulación del modelo neoclásico aumentado con la incorporación del capital humano, se obtiene un coeficiente de convergencia del 2.68%. La velocidad de convergencia de la renta por trabajador depende de este factor y del coeficiente de convergencia tecnológica, que se estima en torno al 6.8%. Por tanto, se verifica la hipótesis de difusión tecnológica entre regiones, con tasas muy altas. El factor crucial de este proceso correspondería al acercamiento entre los niveles de productividad total.

Maudos, Pastor y Serrano (1998) aborda un estudio similar al expuesto, advirtiendo que los métodos comúnmente empleados en los trabajos que relacionan convergencia y PTF (como índices de Törnqvist o contabilidad del crecimiento) son válidos sólo en determinados supuestos de eficiencia, tanto técnica como de asignación<sup>63</sup>. Aparte, no permiten desagregar el crecimiento de la PTF en un término de ganancias de eficiencia más otro de desarrollo técnico.

Existen estudios que sí incorporan en sus análisis la posible ineficiencia, destacando, en general, importantes niveles, que varían entre países y regiones. Estos análisis no suelen identificar la eficiencia como mecanismo de convergencia de la productividad del trabajo.

El objetivo de Maudos et al. (1998) consiste en analizar este proceso de convergencia en la productividad del trabajo en las regiones españolas en el período 1964-1991, diferenciando: (i) acumulación de *inputs* por trabajador y (ii) crecimiento de la PTF. Dentro de ésta, a su vez, se

<sup>63</sup> La ineficiencia se suele tomar en cuenta asumiendo de manera implícita que existe un nivel medio de eficiencia, asociado a la propia función de producción, respecto al cual se producen desviaciones aleatorias, que pueden ser englobadas en un término de error. Esto puede ser válido cuando dichas desviaciones son poco significativas, lo cual se contradice con los resultados empíricos, como se indica en el siguiente párrafo.

distingue, como se ha indicado, una parte correspondiente a la eficiencia (es decir, a la evolución respecto a la frontera técnica) y otra al cambio técnico (al desplazamiento de dicha frontera técnica). Esto se consigue calculando índices de productividad de Malmquist, que se obtienen a través de métodos frontera no paramétricos (DEA): su ventaja es que no resulta necesario imponer una determinada forma funcional ni establecer supuestos de distribución para la ineficiencia; por otra parte permite obtener una tasa de crecimiento del progreso técnico distinta para cada elemento de la muestra.

El índice de Malmquist mide el crecimiento de la productividad entre dos períodos empleando datos de producción e *inputs* de cada región. Se requiere calcular un concepto particular de distancia, la que separa a cada unidad de la tecnología de referencia en el período considerado; Maudos et al. (1998: 240) define la función distancia “*como la inversa de la máxima expansión a la que es preciso someter el vector de outputs del período (...) dado el nivel de inputs (...) para que dicho individuo (...) sea eficiente y se encuentre por tanto sobre la frontera del período*”. Las distancias se definen con respecto a tecnologías de períodos distintos. De este modo el crecimiento en la PTF,  $M_0$ , se expresa como el producto, entre dos períodos, del efecto *catching-up* o cambio en la eficiencia relativa (*CE*) más el cambio técnico (*CT*). El incremento de la productividad implica que  $M_0 > 1$ , lo que requiere que uno de los dos términos –o los dos– sean mayores que la unidad. Los cambios en el *catching-up* se pueden diferenciar, a su vez, en los que se deben a cambios en la eficiencia técnica pura (*CEP*) y a los asociados a la eficiencia de escala (*CEE*). El proceso de descomposición se expresa, por tanto, como:  $M_0 = CE \cdot CT = (CEE \cdot CP) \cdot CT$ .

Se indicaba anteriormente que la muestra empleada comprende las Comunidades Autónomas españolas (se excluyen Ceuta y Melilla), distinguiéndose un output (*VAB*) y dos inputs: trabajo y capital físico. Los datos sobre las variables *VAB* y *L* proceden de fuentes del BBVA, mientras que *K* corresponde a estimaciones realizadas por el Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas. Se analiza el período completo (1964-1991) así como tres subperíodos: crecimiento (1964-1973), crisis (1973-1985) y recuperación (1985-1991).

Los resultados más significativos del estudio empírico son:

- Madrid es la región más eficiente en todo el período. Las CC.AA. de Extremadura y Galicia son las más ineficientes: la existencia de altos niveles de ineficiencia confirma la idoneidad de emplear el enfoque no paramétrico.
  - Los efectos de la eficiencia de escala son poco relevantes.
  - La ineficiencia media muestra un comportamiento poco estable: como se podía esperar, las mejoras de eficiencia se producen en la etapa de crecimiento y recuperación, aumentando la ineficiencia media en la de crisis.
- La PTF media de las regiones crece a un ritmo anual del 2.25%: el 0.30% corresponde a las ganancias de eficiencia y el 1.94% (o sea, el 80%) al progreso técnico, que constituye, por tanto, la variable fundamental del proceso.
- La estimación de la  $\beta$ -convergencia absoluta se realiza mediante MCO, considerando el crecimiento medio durante cada período de la productividad del trabajo y de cada uno

de sus componentes (cambio en la eficiencia, progreso técnico y empleo de más *inputs* por trabajador) respecto al logaritmo de la productividad inicial del trabajo.

- El valor de la convergencia acumulada en todo el período es del -2.18%, por lo que se corresponde con los resultados habituales en los estudios regionales. La convergencia se manifiesta en los tres sub-períodos, aunque se incrementa en el final (-5.64%).
- El efecto acumulado del cambio en la eficiencia repercute positivamente en la convergencia y resulta estadísticamente significativo: -0.63%. En general esta contribución es muy variable: en el sub-período de crecimiento su efecto fue divergente, aunque muy poco significativo; en el de crisis la mejora en la eficiencia supuso una mejora de la convergencia; y, por último, en el subperíodo 1985-1991 las CC.AA. con menos productividad mejoran su eficiencia relativa y contribuyen a consolidar el proceso. La magnitud de este término aumenta significativamente con el tiempo.
- En términos de Maudos et al. (1998) *“el cambio técnico ha sido una fuente sistemática y significativa de divergencia”*. En el conjunto del período su efecto es del +3.14%, con una disminución en el tiempo desde el subperíodo inicial (+5.57%) hasta el último (+1.55%). El resultado es coherente con la idea de que las CC.AA. más desarrolladas son las que introducen las innovaciones y las primeras que, por tanto, las emplean.
- La acumulación de *inputs* por trabajador se identifica con el mecanismo neoclásico de convergencia: el valor es negativo y significativo en todos los sub-períodos, por lo que el resultado global recoge esa evolución (-4,69%).

El crecimiento de la PTF corresponde a la consideración del cambio en eficiencia y del progreso técnico, siendo divergente el efecto acumulado en el período (+2.50%) debido a la segunda variable<sup>64</sup>. Esto contradice las evidencias aportadas en investigaciones anteriores, como De la Fuente (1996). Sólo en el último sub-período la PTF presenta una ligera convergencia, debido a la fuerte componente de la eficiencia en este intervalo.

Maudos et al. (1998) desarrolla un segundo estudio empírico a fin de determinar la influencia de ciertas variables en la eficiencia. En concreto, se centra en las tres siguientes:

- La cualificación de la mano de obra (capital humano): para ello utiliza como indicador el porcentaje de la población ocupada que, al menos, tiene estudios medios.
- Las dotaciones de capital público: se considera el stock de capital público productivo, que hace referencia a inversiones en carreteras e infraestructuras urbanas e hidráulicas. Este capital público se escala empleando cuatro elementos: producción, número de ocupados, superficie y población.
- Especialización productiva: se aproxima por el peso de la agricultura en el total productivo (un procedimiento muy habitual en la literatura sobre convergencia).

---

<sup>64</sup> Maudos et al. (1998) indica que el lento proceso de convergencia global se debe al fuerte efecto divergente del progreso técnico.

Los parámetros estimados que se obtienen de este estudio resultan significativos y se encuentran en línea con lo esperado: (i) regiones con mayores dotaciones de capital humano y público obtienen mejores niveles de eficiencia; y (ii) las regiones con mayor composición agrícola presentan inferiores niveles de eficiencia.

Con objeto de profundizar en algunos de estos aspectos resulta posible descomponer la convergencia en eficiencia de modo similar a la diferenciación descrita respecto a la productividad del trabajo. De este modo, a través de las estimaciones se deduce que el capital humano –en especial la política educativa- favorece la productividad del trabajo mediante su efecto en la eficiencia. Las políticas de inversión pública constituyen una fuente de divergencia regional (al menos hasta mediados de los años setenta).

Maudos, Pastor y Serrano (2000) constituye una revisión y ampliación del trabajo anterior<sup>65</sup>, en el que se destacan las siguientes conclusiones:

- Las ganancias de eficiencia representan un valor muy destacado de las ganancias en la PTF de la economía española: un 40%. En regiones más rezagadas, como Andalucía, Canarias y Galicia, a las que se agrega la Comunidad Valenciana, éste es el principal componente de crecimiento de la PTF.
- Se confirman las importantes diferencias sectoriales, en ritmo de crecimiento y en descomposición. Las mayores ganancias en la PTF se producen en la agricultura<sup>66</sup> y en industrias no energéticas; el sector servicios posee menores ganancias de productividad.
- Entre las décadas de los sesenta y los ochenta (aunque con mayor intensidad a partir de mediados de los setenta) se produce convergencia entre las regiones en relación a los niveles de eficiencia. Esta convergencia no es homogénea, porque hay sectores en los que aumenta la desigualdad (agricultura y energía), mientras que en otros la disparidad se reduce (industria, construcción y servicios).

En la materia que se está analizando resulta evidente la importancia que adquieren las componentes espaciales. De la Fuente (1996), por ejemplo, consideraba este efecto entre los posibles mecanismos potenciadores del proceso de convergencia. Aun quebrando el principio lógico que se ha conferido a las secciones de revisión del estado del arte en esta materia, se ha optado por profundizar, con antelación a su tratamiento en el próximo capítulo, en los efectos espaciales; en concreto, Paci y Pigliaru (2002) consideran la relevante cuestión del *catching-up* tecnológico, considerando determinados aspectos de índole espacial. En la investigación citada se consideran dos aspectos muy cercanos: (i) el papel de la heterogeneidad y de la difusión tecnológica en la convergencia del PIB per cápita en ausencia de datos sobre las PTF regionales; y (ii) los patrones espaciales de esta heterogeneidad tecnológica y su relación con los mecanismos de convergencia regional. El análisis empírico se realiza sobre regiones europeas.

---

<sup>65</sup> El periodo temporal, por ejemplo, se extiende desde 1964 a 1993.

<sup>66</sup> En contraposición, el sector agrícola –junto al energético- es el menos eficiente.

En relación al primer aspecto se pueden considerar distintos enfoques:

- (i) Los planteamientos más clásicos, como el ya considerado Mankiw et al. (1992), consideran que no hay presencia de diferencias tecnológicas entre las economías o que, en la práctica, no desempeñan un papel relevante en la convergencia, de modo que este proceso se relaciona únicamente con los incrementos de capital (lo habitual es considerar su versión aumentada).
- (ii) Las diferencias tecnológicas sistemáticas existen y, en efecto, contribuyen al proceso de convergencia. Sin embargo, determinados estudios con este enfoque, como Islam (1995), asumen que dichas diferencias son estacionarias, por lo que, de nuevo, se descarta el efecto del *catching-up* (no se valida la hipótesis sobre su existencia). Se debe recordar la dificultad de estudiar la influencia de la heterogeneidad y la difusión tecnológica sobre el crecimiento, en especial si no se disponen de datos sobre las PTF regionales.
- (iii) Finalmente, en el contexto más avanzado, se considera la existencia de las diferencias tecnológicas, se asume que no son estacionarias y se identifican como un elemento relevante de la convergencia de la renta a través de un proceso de difusión, como los descritos con anterioridad.

El modelo planteado por Paci y Pigliaru (2002) considera (iii) como la hipótesis general, de modo que la convergencia se debería al incremento del capital y al proceso de *catching-up* tecnológico, considerando (i) y (ii) como casos restrictivos. Los análisis empíricos asociados persiguen la identificación del planteamiento más idóneo entre estos tres. En base al desarrollo ya realizado en Pigliaru (1999) se consideran dos comportamientos:

- El correspondiente a la economía líder: en concreto, se supone que su ratio de crecimiento a largo plazo depende de su inclinación a innovar.
- Las economías rezagadas persiguen a la líder a través del mecanismo de *catching-up*, que también depende de la propia inclinación a innovar.

Los valores de estas tendencias se consideran exógenos; el estudio no plantea mecanismos para identificar sus condicionantes subyacentes o de qué manera les afectan las posibles políticas públicas. En la siguiente tabla se formula el mecanismo de crecimiento y el de *catching-up*, considerando una tecnología Cobb-Douglas:  $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$

Crecimiento en la economía líder	Procesos de <i>catching-up</i> correspondientes a las economías perseguidoras
<p>Inclinación a innovar: <math>\theta = \frac{R}{Y}</math>, con <math>0 \leq \theta &lt; 1</math> y con <math>R</math> la cantidad total de recursos asignados a la innovación. Si <math>s</math> es la tendencia al ahorro se debe verificar <math>(s + \theta) &lt; 1</math> para que se pueda producir consumo en cada período.</p> <p>El conocimiento tecnológico aumenta en proporción a <math>R</math>. El ratio de crecimiento tecnológico se expresa como: <math>\frac{dA/dt}{A} = \theta z^\alpha</math>. Países con tendencias similares a la innovación, pero con diferentes niveles de output per cápita tendrán ratios de innovación distintos.</p> <p>El valor estacionario del ratio de crecimiento tecnológico (sin considerar los efectos de depreciación o de crecimiento de la población) es <math>\theta^{1-\alpha} s^\alpha</math>.</p>	<p>La formulación del crecimiento tecnológico es ahora: <math>\frac{dA/dt}{A} = \theta \left(\frac{A^*}{A}\right) z^\alpha</math>; los términos con asterisco hacen referencia a la economía líder. El término entre paréntesis corresponde al salto tecnológico.</p> <p>Se puede demostrar que en el largo plazo las dos economías crecen con el mismo ratio (se supone que <math>0 &lt; \theta \leq \theta^*</math>, de modo que el ratio de crecimiento del perseguidor converge al del líder).</p> <p>El sistema es globalmente estable alrededor del estado de equilibrio definido por: <math>\tilde{A} = \frac{\theta^*}{\theta}</math> (con <math>\tilde{A} \equiv \frac{A^*}{A}</math>) y <math>\frac{z^*}{z} = \left(\frac{s^*}{s}\right)^{1/(1-\alpha)}</math>.</p> <p>La pauta de convergencia de las economías perseguidoras se caracteriza por: <math>\frac{z}{z^*} &lt; \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}^*}</math> (mecanismo de crecimiento de capital característico del modelo de Solow) y por <math>\frac{A^*}{A} &gt; \tilde{A}</math> (proceso de <i>catching-up</i> tecnológico).</p>
<p>Con objeto de simplificar los desarrollos se asume que la tendencia al ahorro es idéntica en todas las economías, y que coincide con la del líder. Esto supone que <math>\tilde{z} = \frac{s^*}{\theta^*}</math> y <math>\tilde{A} = \frac{\theta^*}{\theta}</math>. También se consideran dos intervalos de tiempo, <math>t_1</math> y <math>t_2</math>, con <math>t_2 &gt; t_1</math>; se define <math>\tau = t_2 - t_1</math>.</p> <p>Al hacer una transformación log-lineal alrededor de los valores estacionarios se obtiene una expresión que requiere de los datos de las PTF para que se pueda estimar. Con objeto de obviar la no disponibilidad de esta información se aplica el método de efectos fijos propuesto por Islam (1995), de modo que la ecuación se vuelve a escribir en términos de datos de panel:</p> $\log y_{i,t} - \log y_{i,t-1} = \mu_{i,t} + \kappa_t - \beta_1 \log y_{i,t-1} + \beta_2 \log \theta_{i,t-1} + \omega_{i,t} \quad (3.23)$ <p>Se relacionan los términos de esta fórmula:</p> <p><math>\kappa_t \equiv \tilde{g}^* \tau + \beta_2 \log A^*(t_1) + \alpha \beta_1 \log s^* - (\alpha \beta_1 + \beta_2) \log \theta^*</math>. Se trata de un término que varía en el tiempo, pero que permanece constante entre las regiones.</p> <p><math>\log y_{i,t} \equiv \log y(t_2)</math>; <math>\log y_{i,t-1} \equiv \log y(t_1)</math>.</p> <p><math>\mu_{i,t} = (\beta_1 - \beta_2) \log A(t_1)</math>, con <math>\beta_1 = (1 - e^{-(1-\alpha)\theta^{1-\alpha}s^\alpha\tau})</math> y <math>\beta_2 = (1 - e^{-\theta^{1-\alpha}s^\alpha\tau})</math>. El término <math>\mu_{i,t}</math> representa el grado de heterogeneidad tecnológica en un determinado instante.</p> <p><math>\omega_{i,t}</math> es el término de error (media igual a cero).</p>	
<p>Como en otra secciones, se definen los términos por unidad de labor efectiva: <math>y \equiv \frac{Y}{L}</math>; <math>k \equiv \frac{K}{L}</math>; <math>z \equiv \frac{Z}{L}</math>. Se puede comprobar que <math>y = k^\alpha A^{1-\alpha} = z^\alpha A</math>.</p>	

Tabla 3.9. Formulación de los procesos de crecimiento de la economía líder y de *catching-up* tecnológico de las perseguidoras.

Fuente: elaboración propia a partir de Paci y Pigliaru (2002)

Como se aprecia en el modelo, la variable  $\beta_1$  se relaciona con el proceso de crecimiento y  $\beta_2$  con el de *catching-up*. Se indicaba anteriormente que el objetivo del estudio consiste en utilizar estimaciones de panel de la ecuación (3.23) para identificar cuál de las tres hipótesis que se han expuesto resulta más adecuada:

- El planteamiento (i) se corresponde con la existencia de una correlación negativa entre la variable dependiente y el valor inicial de la productividad por unidad de labor efectiva, mientras que se entiende que la variable que mide las diferencias regionales respecto a la inclinación a innovar resulta irrelevante. Por tanto, se debería verificar:  $\beta_1 > 0$  y  $\beta_2 = 0$ .

- En el caso (ii) se supone que existe también una correlación negativa entre las dos variables indicadas, así como una correlación positiva respecto a la medida de la tendencia regional a innovar. Esto supone:  $\beta_1 > 0$  y  $\beta_2 > 0$ .
- La verificación del planteamiento (iii) implica que las dos variables que conforman el grado de heterogeneidad tecnológica sean positivas, de manera similar a lo que implica la hipótesis (ii).

Dado que los modelos (ii) y (iii) comparten las mismas predicciones cualitativas, resulta necesario establecer algún planteamiento diferenciador. Si se considera (3.23) para el caso (ii) –o sea, descartando la difusión tecnológica y asociando la convergencia únicamente al incremento de capital- se puede demostrar que el índice inicial de tecnología y la tendencia a innovar se encuentran correlacionados, por lo que un valor positivo y significativo de  $\beta_2$  no constituye una evidencia incuestionable de la difusión tecnológica como un elemento activo del proceso de convergencia. Por tanto, si  $\beta_2 > 0$  de manera relevante se descarta la hipótesis clásica (i) y se acepta la idea, común a (ii) y (iii), de que la heterogeneidad tecnológica (asociada a las diferencias en la tendencia a innovar) resulta relevante para el análisis de la convergencia. El valor de  $\beta_2$  no proporciona certeza respecto a si el grado de heterogeneidad permanece estacionario o decrece en el tiempo debido al proceso de difusión; en tal caso, la diferenciación entre los dos últimos modelos requiere un análisis específico.

El análisis empírico se centra en el período 1978-1997 y corresponde a 131 regiones de los 15 integrantes de la EU (se excluye la antigua Alemania del Este). Los datos de empleo y de valor añadido (en millones de ECU de 1990 y corregidos en pps) proceden de Cambridge Econometrics. Resulta muy interesante la manera de medir la inclinación regional a la innovación: Paci y Pigliaru (2002) considera las patentes registradas en la Oficina Europea de Patentes durante el intervalo temporal: de este modo, cada patente se asocia a la región en la que reside su correspondiente inventor; si hay más de uno se determinan las fracciones correspondientes y se asignan a las distintas regiones de residencia. De este modo, el número de patentes que hay en cada territorio se divide por su PIB para obtener el índice de inclinación regional a la innovación. Se podrían plantear otras alternativas: por ejemplo, la residencia de la organización a la que pertenece el investigador o alguna medida relacionada con el gasto regional en I+D, pero estos planteamientos estiman a la baja las tendencias a la innovación en la periferia. El índice así calculado no es, ni mucho menos, uniforme. Los autores diferencian cinco grupos en función de su valor medio: esto permite distinguir *clusters* espaciales de áreas de innovación en el norte de Europa. Los territorios más innovadores corresponden a Suecia, Alemania, Francia y Finlandia. Por el contrario, las regiones con menores índices se ubican en el sur de Europa: Portugal, España, Grecia y sur de Italia.

El método de estimación empleado es LSDV (*Least Squares Dummy Variable*). Se consideran cuatro sub-períodos: 1978-1983, 1983-1988, 1988-1993 y 1993-1997. La variable dependiente es la tasa media de crecimiento del PIB por trabajador en cada intervalo. Las variables explicativas corresponden a la productividad por unidad de labor y a la tendencia a la innovación. Sus valores al inicio de cada sub-período se expresan en niveles logarítmicos. Finalmente, se consideran las tres hipótesis sobre el papel de la difusión tecnológica.

Los resultados más significativos de las estimaciones son: (i) el valor inicial de la productividad por unidad de labor tiene el signo esperado y es altamente significativo; (ii) lo mismo sucede con el índice de tendencia a la innovación: este resultado se contradice con el planteamiento clásico, por lo que se rechaza. La evidencia empírica muestra que la heterogeneidad tecnológica resulta relevante para el estudio de la convergencia regional en Europa.

El problema se centra en la diferenciación de las hipótesis (ii) y (iii) presentadas al principio de este estudio. Tal y como se indicó, el resultado  $\beta_2 > 0$  y significativo resulta consistente con los dos planteamientos. Para resolver la cuestión se procede al análisis de los efectos fijos estimados, dado que proporcionan una medida (indirecta) del nivel tecnológico de cada economía. Según (iii) las variaciones transversales de estos niveles deberían encontrarse en niveles estacionarios o, lo que es lo mismo, en el caso (ii) estas variaciones sí deberían ser estacionarias. Pues bien, los resultados de las estimaciones en dos amplios sub-períodos (1978-1988 y 1988-1997) indican que las diferencias decrecen desde 6.65 en el primer intervalo hasta 5.71 en el segundo (el problema de este resultado es que corresponde a una serie temporal muy reducida, por lo que no resulta posible controlar el efecto de perturbaciones aleatorias o factores sistemáticos; por tanto, se debe interpretar con cierta cautela).

En conclusión: la heterogeneidad tecnológica resulta importante para el estudio de los procesos de convergencia en Europa; parte de la convergencia detectada se encuentra generada por un proceso creciente de difusión tecnológica.

La segunda parte de Paci y Pigliaru (2002) analiza la distribución regional de la tendencia a innovar, a fin de identificar posibles patrones espaciales. En los primeros años de la década del dos mil se habían desarrollado de manera escasa los modelos que consideraban la posibilidad de influencias de la localización geográfica y del papel económico de territorios vecinos en el proceso de crecimiento de cada país. Por ese motivo se opta por el empleo directo de técnicas espaciales econométricas.

El conocido test  $I$  de Moran permite medir el grado de autocorrelación espacial de la tendencia a la innovación. En este caso se emplean matrices de contigüedad de tercer orden. Considerando los niveles uno y dos de vecindad parece que existe una asociación espacial positiva y significativa para todos los años considerados. Esto significaría que la tendencia a la innovación de cada región depende de manera relevante de la actividad innovadora desarrollada por sus vecinas. Incluso en el nivel tres de contigüedad se verifica la significación estadística, aunque mostrando una clara reducción de la asociación espacial. Por tanto, los *spill-overs* tecnológicos desempeñan un papel central a lo largo de las regiones europeas. La influencia no se restringe únicamente a la vecindad inmediata, sino que puede abarcar relaciones de segundo y hasta tercer grado, aunque dicho potencial se pierde con la distancia. Este comportamiento es similar en las otras variables que muestran correlación espacial, como el ratio de crecimiento y el nivel de productividad.

La presencia de autocorrelación puede afectar a las estimaciones realizadas, dado que, como se verá en el capítulo cuarto, supone que se incumplen las hipótesis fundamentales del modelo



clásico y los resultados obtenidos a través de OLS dejan de ser eficientes. Paci y Pigliaru (2002) emplea dos test con multiplicadores robustos de Lagrange, en base a un planteamiento ya propuesto por Anselin y Rey (1991): el primero determina la presencia de autocorrelación espacial debido a errores en las especificaciones (*error autocorrelation*) y el segundo analiza este efecto en la variable dependiente (*spatial lag*). Los resultados obtenidos recomiendan la aplicación de métodos específicos asociados al control explícito de la componente espacial. En concreto estas medidas permiten corregir los patrones y muestran que los coeficientes espaciales autorregresivos ofrecen valores positivos y estadísticamente significativos.

El alcance de la información proporcionada por los patentes e índices similares posee, como se ha visto, una destacada importancia a la hora de extraer conclusiones de los resultados obtenidos. En el ámbito reducido del entorno empresarial, pero con cierta facilidad de extrapolación a otros contextos, el estudio de Gambardella y Torrisi (1998) analiza si la convergencia tecnológica implica necesariamente la correspondiente convergencia en los mercados. El análisis se realiza en el ámbito de la industria electrónica, dado que constituye el paradigma de un sector caracterizado por la presencia de procesos de convergencia tecnológica. Para ello se procede a la comparación de la diversificación tecnológica de las treinta y dos empresas de mayor tamaño en el ámbito estadounidense y europeo en el intervalo temporal 1984-1992. Este índice de diversificación se obtiene de dos maneras distintas: (i) midiendo el número de patentes que cada empresa tiene registradas (diversificación tecnológica) y (ii) considerando operaciones de crecimiento interno o externo, como incorporación de filiales, establecimientos de *joint-venture* o adopción de acuerdos de colaboración. En ambos casos se asignan las observaciones registradas al sub-sector correspondiente: ordenadores, equipamiento en telecomunicaciones, componentes electrónicos, otros elementos electrónicos y tecnologías no electrónicas. La primera clasificación se asocia directamente a tareas de I+D, mientras que la segunda puede estar relacionada con algún factor de investigación, pero, sobre todo, corresponde a planteamientos en comercialización y producción.

Las compañías de la muestra se caracterizan por la similitud en la diversificación tecnológica: las patentes registradas en el período considerado se extienden a los cinco sub-sectores. Por su parte, desde el punto de vista de las operaciones comerciales se distinguen diversos tipos: algunas empresas diversifican sus inversiones, con operaciones en todos los subsectores; otras se encuentran muy especializadas, desarrollando su actividad en sólo uno de ellos. Entre estos dos extremos existen entidades intermedias.

Desde el punto de vista dinámico, la comparación de la diversificación de patentes entre un intervalo anterior, 1970-1983, y el considerado en el estudio, 1984-1991, muestra que no se han producido cambios significativos. De hecho, compañías muy focalizadas en un sub-sector, desde el punto de vista del crecimiento interno o externo, mantienen un cierto grado de diversificación tecnológica. Sin embargo, sí se advierte que un destacado número de compañías han focalizado sus inversiones comerciales, reduciendo el número de subsectores respecto al año inicial (en este caso 1983).

Por último se realiza un análisis de regresión para examinar las relaciones entre estrategias de diversificación y el nivel de desempeño de cada empresa (en términos de ventas o beneficios). Se obtiene que los mejores resultados económicos están representados por empresas que aumentaron su diversificación tecnológica y se centraron en el sub-sector de actividad específico para desarrollar sus actividades de crecimiento. En términos de Gambardella y Torrisi (1998: 446): *“the best performing companies were those that focused on their core business, but widened their technological capabilities”*. Por tanto, existe cierto grado de incompatibilidad entre diversificación tecnológica y diversificación en operaciones de negocios.

Otro estudio empírico sobre convergencia tecnológica es el correspondiente a Cameron, Proudman, y Redding (2005), que se centra en el análisis del crecimiento de la productividad en Reino Unido, durante el período 1970-1992, a través de un panel en el que se contemplan catorce sectores correspondientes a industrias manufactureras (a partir de 1992 esta clasificación se modifica, por lo que no es posible extender el conjunto de datos ni disponer de una desagregación más amplia). La principal fuente de información corresponde al Censo de Producción (tanto de UK como de USA, dado que esta segunda economía se identifica como frontera tecnológica).

En el marco de trabajo se considera que tanto la innovación como la transferencia de tecnología constituyen fuentes de crecimiento de la productividad para economías por debajo de la frontera tecnológica. El potencial de esta transferencia de tecnología se mide en base a la diferencia de niveles de PTF entre la economía analizada (en este caso Reino Unido) y la que se encuentra en la frontera tecnológica. Este enfoque permite investigar los fenómenos de *spill-over* derivados tanto de los procesos formales de I+D como de otras actividades informales en el ámbito de la investigación. Los autores consideran dos variables directamente relacionadas con la I+D, comercio internacional y capital humano, y se examina: (i) si cada una de ellas actúa directamente sobre los ratios de crecimiento de la PTF (o sea, sobre la innovación) y (ii) si este efecto depende de la distancia respecto a la frontera tecnológica (es decir, cómo influye en los procesos de transferencia).

El procedimiento de datos de panel es el más indicado para llevar a cabo estos estudios porque permite analizar los diferentes efectos subyacentes. De este modo es posible considerar la hipótesis de que la transferencia tecnológica se produce a través del comercio internacional y contrastarla frente a distintas alternativas: por ejemplo, si la capacidad de absorción de cada economía (asociada al capital humano o las inversiones en I+D) marca el desarrollo de este proceso o si se lleva a cabo de manera autónoma (en una evolución independiente de las variables económicas; este último planteamiento aparece de manera frecuente en la literatura sobre la cuestión).

La consideración de los distintos elementos permite estimar una ecuación de convergencia que representa las relaciones de cointegración a largo plazo. Se incorporan para ello, de manera explícita, los aspectos de I+D, capital humano y comercio internacional; se procede a testar, a través de los datos existentes, si cada variable afecta al crecimiento de la productividad a través de la innovación y/o de la transferencia de tecnología.

Se describen seguidamente los principales resultados del estudio realizado bajo este enfoque:

- (i) Se confirma que la transferencia de tecnología constituye una vía de crecimiento de la productividad en los sectores que conforman la manufactura en Reino Unido. Esta observación se mantiene incluso variando las especificaciones econométricas y empleando distintas medidas de la PFT. El ratio de productividad en Reino Unido aumenta cuando mayor es el salto de los niveles de eficiencia industrial entre el país rezagado y el líder (manteniendo fijo el nivel de otras variables).
- (ii) En consonancia con las predicciones de los modelos endógenos, se detecta un efecto positivo de la I+D sobre el crecimiento de la productividad. Se trata de un resultado robusto, que no varía incluso en un rango amplio de especificaciones.
- (iii) El incremento de comercio internacional repercute en un aumento de la productividad a través de la transferencia de tecnología, pero no afecta a la innovación. Este resultado se verifica con variables instrumentales, dada la problemática de endogeneidad que suele aparecer al considerar procesos de crecimiento en relación a los flujos comerciales. De este modo se constata que la relación es estadísticamente significativa.
- (iv) El capital humano afecta de manera primordial al output a través de los ratios de retorno; el nivel de competencia de los trabajadores se identifica como un índice cualitativo idóneo para controlar las variaciones de la PTF entre los países porque permite, precisamente, detectar ratios internos de retorno como, por ejemplo, los asociados a los sueldos.

Mora (2002) plantea una serie de reflexiones sobre la consideración del acercamiento tecnológico como proceso de convergencia:

- Los resultados empíricos confirman que la convergencia de la renta per cápita obedece tanto a los mecanismos neoclásicos (asociados a los rendimientos decrecientes en la acumulación de factores) como a los procesos genéricos de acercamiento en niveles de tecnología. El problema es que no resulta sencillo aislar estos dos factores y medir el efecto de cada uno de ellos en la evolución global. Aparte, resulta muy compleja la determinación de datos tecnológicos relativos a las acciones en innovación o en difusión en cada economía. Mora (2002: 133) señala que *“cualquier duda razonable en torno a la técnica utilizada para aproximarse a la convergencia en renta per cápita también es trasladable a la convergencia de tipo tecnológico”*.
- Los estudios de convergencia necesitan de nuevos enfoques para considerar, por ejemplo, el papel del capital humano en los procesos de innovación. Otro elemento relevante es la posible existencia de *spill-overs* espaciales, una idea que se muestra coherente con la concentración en entornos específicos de la actividad tecnológica desarrollada en la EU.
- El tercer planteamiento hace referencia a la propuesta de Quah (1999), según la cual la convergencia tecnológica haría referencia a un proceso de identificación de *clusters* tecnológicos o grupos integrados por unidades económicas similares. La estabilidad de

estos clusters se encontraría asociada a mecanismos para compartir los conocimientos y, en definitiva, a la materialización de coaliciones internas.

El tratamiento del análisis espacial de los efectos de desbordamiento y la revisión de aspectos asociados a los *clusters* se desarrollan en el siguiente capítulo.

### 3.5 Convergencia estocástica

Al igual que sucede al considerar los procesos de *catching-up* tecnológico, es posible extender el concepto de convergencia en otros ámbitos como, por ejemplo, el estocástico, mediante la ampliación de las técnicas de tratamiento de series temporales (integración y cointegración). Los primeros progresos en este sentido se recogen en el análisis de Nelson y Plosser (1982) respecto a la posible reversión de las tendencias del PIB real. En concreto, el estudio se centra en la caracterización de las series temporales macroeconómicas, planteando dos opciones: (i) identificándolas como fluctuaciones estacionarias alrededor de una tendencia determinista o (ii) considerando que constituyen procesos no estacionarios, sin tendencia a retornar a una pauta determinista. Estos autores emplearon distintas series temporales de la economía estadounidense y encontraron evidencias favorables al segundo modelo: en efecto, las fluctuaciones se pueden descomponer en un componente de crecimiento (o secular) más otro cíclico, de modo que las variaciones bruscas en este último elemento contribuyen de manera significativa a la variación de la variable estudiada. Así, los efectos permanentes de estos *shocks* son mayores que lo que predicen los modelos basados en la opción (i)<sup>67</sup>. La revisión de los análisis realizados sobre perturbaciones monetarias indica que su consideración como fluctuaciones meramente transitorias conduce a errores en la interpretación de las variaciones del *output*. Como señala Mora (2002), el comportamiento de las series posee importantes repercusiones en las políticas monetarias o fiscales implementadas: si la variable per cápita evoluciona con una tendencia estocástica, los efectos de los planteamientos gubernamentales tendrán efectos en un largo plazo de tiempo.

Campbell y Mankiw (1989) retoma la cuestión de la persistencia<sup>68</sup>, destacando la dificultad de un estudio en un contexto en el que se dispone de datos escasos. A finales de la década de los ochenta sólo se podían emplear ocho intervalos no solapados, de cinco años cada uno, correspondientes a la economía en US en el período posterior a la II Guerra Mundial. Se plantean dos estrategias para ampliar los conjuntos de datos: (i) empleando información previa a la confrontación bélica, lo cual conlleva asumir errores en la reconstrucción de estas referencias; y (ii) utilizar cuantificaciones de otros países. En este estudio se acude a datos de

---

<sup>67</sup> Campbell y Mankiw (1989) señala que estos estudios consideran que los efectos se disipan en 5 a 10 años como sumo.

<sup>68</sup> El concepto intuitivo de persistencia como un elemento que continúa durante un largo período en el tiempo se puede expresar matemáticamente de distintas maneras. Una opción sería considerar el logaritmo de la renta como un proceso estacionario expresado en términos de medias móviles, de modo que el valor del último impacto del *shock* recogería la suma de los anteriores. El estudio que se revisa emplea una función que incorpora autocorrelaciones entre los valores de la renta desplazados temporalmente, de modo que la consistencia de las estimaciones aumenta a medida que lo hace el tamaño de la muestra.

Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y los ya señalados de USA. Los resultados confirman las conclusiones de Nelson y Plosser (1982): las fluctuaciones de la renta estadounidense son muy persistentes. En el resto de naciones, a excepción de Reino Unido, la persistencia es todavía mayor, a pesar de las diferencias sustanciales que existen entre ellos respecto a las autocorrelaciones individuales del crecimiento del *output*. Aunque es posible emplear un estimador no paramétrico (más sencillo desde el punto de vista computacional), también funciona correctamente el modelado del logaritmo de la renta como un proceso estacionario ARMA, cuyos parámetros se pueden estimar mediante máxima verosimilitud. Sin embargo, Cogley (1990) analiza los ratios de varianza de nueve países de la OECD en el período 1871 a 1985 y, aunque encuentra rasgos de persistencia en todos ellos, no detecta una estabilidad relativa en el largo plazo similar a la de USA. Por su parte, Kormendi y Meguire (1990) tampoco encuentra raíces unitarias para datos internacionales.

El desarrollo en profundidad del concepto de convergencia estocástica se verifica en los trabajos de Bernard y Durlauf publicados durante la década de los noventa. De este modo, en Bernard y Durlauf (1991: 2) se señala: *“Convergence in the face of stochastic technical innovations essentially asks whether permanent movements in one country’s per capita output are associated with permanent movements in other countries’ outputs”*. Mora (2002: 115) se refiere a esta nueva concepción, y a sus diferencias respecto a la  $\beta$ -convergencia, cuando indica que *“la idea es que la convergencia no se identifica tan sólo como una propiedad de la relación entre valores iniciales y el crecimiento para un período de tiempo determinado, sino también como la relación entre las predicciones a largo plazo para el producto per cápita, tomando como dadas las condiciones iniciales”*. Lee, Pesaran y Smith (1997) considera que esta tercera noción de convergencia (tras  $\beta$  y  $\sigma$ -convergencia) trata el logaritmo per cápita del output como una variable integrada y se centra en determinar si distintos países comparten una tendencia común determinista y/o estocástica.

El análisis *cross-section* empleado en Romer (1986) o Lucas (1988), entre otros, conlleva diferentes problemas, como se ha puesto de manifiesto en distintos apartados de este estudio. En este contexto resulta importante recordar, por ejemplo, que bajo este enfoque únicamente se contrasta la hipótesis nula de no convergencia frente a la alternativa de verificación de este proceso; esto supone que dejan de considerarse los casos intermedios. Lee et al. (1997) desarrolla una versión empírica de un modelo estocástico de crecimiento de Solow. En este caso no resulta válido el procedimiento habitual de desarrollar una función lineal alrededor del estado estacionario; tampoco es posible emplear el coeficiente de convergencia de un modo análogo al tradicional, dado que contiene elementos que hacen referencia al proceso de convergencia en sí y otros que reflejan la correlación asociada a los *shocks* tecnológicos. Además, las perturbaciones contienen un término de media móvil, lo que complica aún más las inferencias sobre raíces unitarias. El tratamiento empírico asociado al empleo de métodos de series temporales, considerando los datos de los países como un panel heterogéneo, permite diferenciar los procesos de convergencia hacia los estados estacionarios y las propias evoluciones *cross-section* de dichas pautas de crecimiento. Por otro lado, la consideración de la versión modificada del modelo clásico permite relacionar los procesos estocásticos de renta

y tecnología, confirmando, por ejemplo, que la presencia de raíces unitarias en el output no implica de manera necesaria un conflicto con los planteamientos de convergencia.

En Bernard y Durlauf (1991) también se tienen en cuenta otros modelos de crecimiento y, en ese sentido, se señala cierta proximidad hacia el enfoque estocástico en la propuesta de Quah (1990); de hecho, ambos estudios coinciden en rechazar la hipótesis de  $\beta$ -convergencia. No obstante, existen diferencias entre estas dos visiones: (i) el marco econométrico no es común y conlleva el empleo de distintos test de hipótesis; (ii) el primero de los análisis se restringe a economías industrializadas y avanzadas<sup>69</sup>; y (iii) el conjunto de datos empleado por Bernard y Durlauf (1991) se extiende, a su vez, a todo el siglo XX<sup>70</sup>.

El desarrollo de Bernard y Durlauf (1995) parte de definiciones estocásticas formales respecto a las fluctuaciones y la convergencia. El *output* individual se modela como:

$$a(L)Y_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it} \tag{3.24}$$

El término  $a(L)$  contiene una raíz en el círculo unidad y  $\varepsilon_{it}$  es un proceso estacionario de media cero. Esta formulación posee la ventaja de permitir trabajar con tendencias tanto deterministas como estocásticas. En la siguiente figura se formulan las definiciones generales de convergencia y de tendencias comunes:

<p>Convergencia en output.                  Dos países, <math>i</math> y <math>j</math>, convergen si las estimaciones a largo plazo del output de ambos son iguales tras un tiempo fijado <math>t</math>: <math>\lim_{k \rightarrow \infty} E(y_{i,t+k} - y_{j,t+k}   I_t) = 0</math></p>	<p>Tendencias comunes en output.                  Dos países, <math>i</math> y <math>j</math>, poseen una tendencia común si las estimaciones a largo plazo del output son proporcionales tras un tiempo fijado <math>t</math>: <math>\lim_{k \rightarrow \infty} E(y_{i,t+k} - \alpha y_{j,t+k}   I_t) = 0</math></p>
<p>Convergencia en output multivariante.                  Diferentes países, <math>p = 1 \dots n</math>, convergen si las estimaciones a largo plazo del output de todos ellos son iguales tras un tiempo fijado <math>t</math>: <math>\lim_{k \rightarrow \infty} E(y_{1,t+k} - y_{p,t+k}   I_t) = 0, \forall p \neq 1</math></p>	<p>Tendencias comunes en output multivariante.                  Diferentes países, <math>p = 1 \dots n</math> poseen una tendencia común si las estimaciones a largo plazo del output son proporcionales tras un tiempo fijado <math>t</math>: <math>\lim_{k \rightarrow \infty} E(y_{1,t+k} - \alpha_p \bar{y}_{j,t+k}   I_t) = 0</math> con <math>\bar{y}_t = [y_{2t}, y_{3t} \dots y_{pt}]</math></p>
<p>En estas expresiones <math>I_t</math> representa el conjunto de economías en un determinado instante.</p>	

Tabla 3.10. Definiciones de convergencia y de tendencias comunes en output.  
 Fuente: Bernard y Durlauf (1995).

Estos enunciados poseen analogías inmediatas con los términos de raíces unitarias y cointegración presentes en la literatura de series temporales. Por ejemplo, los países  $i$  y  $j$  convergen bajo este planteamiento si sus outputs se encuentran cointegrados respecto al vector  $[1, -1]$ . Aunque no se verifique la convergencia específica señalada, ambos estados pueden mostrar un comportamiento similar en el largo plazo. Respecto a lo expuesto sobre tendencias comunes, *“this is a natural definition to employ if we are interested in the*

<sup>69</sup> Los autores muestran escaso interés por el estudio comparado entre economías extremas como, por ejemplo, las correspondientes al sub-Sáhara y a países de la OECD, dado que parece razonable pensar que entre ellas no se producirá convergencia. Lo interesante (y lo que llamaría la atención en caso de no producirse) es centrarse en la posible convergencia entre países con similares características económicas (y con cierta relación de proximidad).

<sup>70</sup> Se sigue de este modo la primera de las recomendaciones de Campbell y Mankiw (1989).

*possibility that there are a small number of stochastic trends affecting output which differ in magnitude across countries*", Bernard y Durlauf (1995: 100).

El empleo de test de raíces unitarias para el análisis de la convergencia posee la dificultad añadida de su sensibilidad respecto al estado de evolución del *output*. Los instrumentos habituales en la práctica econométrica se encuentran desarrollados asumiendo que los datos se encuentran generados por una medida invariante. Si, por ejemplo, las economías estudiadas parten de diferentes condiciones iniciales y se encuentran todavía en transición hacia el steady-state en el momento del análisis, las pruebas pueden ofrecer un resultado erróneo y señalar la nulidad de la hipótesis de convergencia. En Bernard y Durlauf (1995) se emplean técnicas multivariantes para analizar la convergencia y las tendencias comunes de los datos empíricos:

- Por una parte se acude a procedimientos espectrales desarrollados por Phillips y Ouliaris (1988), en los que se tiene en cuenta que el rango de la matriz de densidad de las primeras diferencias en la frecuencia cero es de rango  $q \leq n$ , donde  $q$  es el número de tendencias estocásticas linealmente independientes en la muestra y  $n$  el número de series.
- También se utilizan dos test estadísticos planteados por Johansen (1988) a fin de determinar, en este caso, el rango de la matriz de cointegración.

En Bernard y Durlauf (1996) se amplía el concepto previo de convergencia a fin de considerar los condicionantes de los modelos neoclásicos respecto a la persistencia de las diferencias en el *output*. De este modo se presentan dos definiciones (aunque referidas en este caso a pares de países, también se puede realizar una extrapolación a un conjunto de economías, de manera análoga a lo recogido en la Tabla 3.10):

- Convergencia como *catching-up*. En este caso los países  $i$  y  $j$  convergen entre los períodos  $t$  y  $t + T$  si la esperanza del logaritmo de las desigualdades de la renta per cápita reduce su valor. Si  $\mathfrak{F}_t$  representa el total de la información disponible en  $t$  y se asume que  $y_{it} > y_{jt}$ , entonces debe verificarse<sup>71</sup>:  $E(y_{i,t+T} - y_{j,t+T} | \mathfrak{F}_t) < y_{i,t} - y_{j,t}$ .
- Convergencia como igualdad de predicciones a largo plazo en un tiempo fijado. Este concepto coincide con el expuesto en la Tabla 3.10. Como señala Mora (2002: 118) respecto al cumplimiento de esta hipótesis: "en el límite, las diferencias en renta per cápita entre dos países tienden a hacerse nulas, por lo que en  $k$  períodos se igualan los niveles de renta per cápita".

Ambas definiciones se encuentran muy relacionadas. Resulta posible demostrar: (i) la verificación del segundo tipo de convergencia implica que se cumple la convergencia como *catching-up*; y (ii) si las economías coinciden en la función de producción (exhibiendo retornos no incrementales de escala y verificando las condiciones de Inada), en el comportamiento de los capitales físicos y humanos, en los ratios de ahorro, depreciación y crecimiento de la masa

<sup>71</sup> Para no complicar la notación se asume que las variables en minúsculas se refieren al logaritmo de su valor.

laboral, así como en la distribución de *shocks* temporales, entonces mostrarán los dos tipos de convergencia.

En el estudio de Bernard y Durlauf (1996) se revisan los siguientes test de convergencia:

- Test *cross-section*. Bajo este enfoque se requiere que una media ponderada de países con rentas por encima de la media inicial crezca con una tasa más lenta que la media de crecimiento para todo el conjunto. Esto es análogo, en términos econométricos, a que los primeros momentos de los procesos estocásticos que gobiernan el crecimiento difieran significativamente entre economías ricas y pobres. En este contexto se verifica un resultado de notable interés: la existencia de un coeficiente estimado de convergencia con signo negativo resulta compatible con un modelo que no verifique el segundo tipo de convergencia, la referida a la igualdad en las predicciones a largo plazo. Esta situación puede darse, por ejemplo, si las economías que convergen a un estado bajo de equilibrio parten de condiciones iniciales muy alejadas del *steady-state*, mientras que las que lo hacen a un nivel elevado se encuentran próximas a éste.
- Test de series temporales. En este caso si la diferencia de términos  $y_{it} - y_{jt}$  contiene una media no nula (comportamiento determinista) o una raíz unitaria, de nuevo deja de verificarse el segundo tipo de convergencia.

Los dos enfoques resultan incompatibles. El tratamiento *cross-section* requiere la existencia de una raíz unitaria mientras que los test de series temporales necesitan que no aparezca dicha raíz. Por tanto, la convergencia bajo un instrumento implica que no se verificará la hipótesis al emplear el otro. Como señala Mora (2002: 119): “*si bien las regresiones cross-section asumen que los datos se encuentran en transición hacia una distribución límite y la convergencia se interpreta como que las diferencias iniciales entre las economías se dispararán en un período de tiempo fijo, por el contrario, la utilización de series temporales implica que los momentos muestrales de los datos aproximan de forma adecuada las propiedades de las distribuciones límite de las economías objeto de estudio y que la convergencia se interpreta de forma que las condiciones iniciales no tienen efectos sobre el valor esperado para la diferencia entre outputs*”. La necesidad de contar con momentos invariantes en los datos para poder aplicar series temporales influye en la búsqueda de técnicas alternativas, como las asociadas a las funciones de transición de Markov, que se analizarán en el siguiente capítulo.

En la Tabla 3.11 se relacionan los principales resultados empíricos asociados a distintos estudios realizados en la década de los noventa sobre esta cuestión:



Estudio	Características de la muestra y del análisis	Conclusiones más significativas
Bernard y Durlauf (1991, 1995)	<i>Output</i> real per cápita de 15 economías de la OECD. Período considerado: 1900 a 1987. Se emplea el test de Dickey-Fuller ampliado, el de Phillips-Ouliaris y los métodos de Johansen.	Se encuentran escasas evidencias de convergencia entre las economías (las desviaciones de la renta per cápita persisten en el tiempo). Existen factores comunes a todas las economías: las interacciones de los mismos con las características propias de cada nación determinan los ratios de crecimiento.
Esteve y Pallardó (1996)	Producto real per cápita de los países de la EU-15 (con excepción de Luxemburgo). Período considerado: 1950 a 1992. Se aplican técnicas de cointegración para estudiar las relaciones a largo plazo de las variables. Los test empleados corresponden al desarrollado por Phillips y Perron y el de estacionariedad de Kwiatkowski, que sustituye al de raíz unitaria de Dickey-Fuller. En una segunda fase se procede a verificar la posible presencia de alteraciones significativas en los resultados asociados a la posibilidad de que las series contengan rupturas. Se estudian cambios en el nivel, en la tendencia y simultáneos en nivel y tendencia.	Tampoco se detectan evidencias a favor de la convergencia estocástica (en cualquiera de las dos acepciones). Al permitir la posibilidad de un cambio en la tendencia a lo largo del período se obtiene convergencia a largo plazo entre el país líder, Alemania, y los demás cofundadores de la EU, a los que se añade Austria y Dinamarca. No se detecta convergencia entre economías que se incorporaron más tarde a la Comunidad.
Lee et al. (1997)	PIB real per cápita de 102 países no productores de petróleo. A partir de esta muestra se seleccionan, además, dos subconjuntos: uno con 61 estados, excluyendo pobres o de los que no se dispone de información fiable, y otro con 22, pertenecientes a la OECD. Período considerado: 1960 a 1985, aunque las estimaciones se realizan sobre el intervalo 1965 a 1985, debido a la necesidad de comparar distintas especificaciones dinámicas. Se emplean regresiones Dickey-Fuller aumentadas.	Se rechaza la hipótesis de igualdad de ratios de crecimiento tecnológico entre los países. Esto implica relajar el asume de homogeneidad, lo que supone que las estimaciones de $\beta$ -convergencia aumentan del 2% al 3% (aunque la interpretación de este término en el contexto estocástico no resulta similar a la del modelo clásico de Solow). El crecimiento de tecnología resulta mayor en los países de la OECD, con una menor dispersión al compararse con el resto del mundo. Por tanto, el nivel de dispersión global aumenta: los estados divergen.

Tabla 3.11. Principales resultados de los estudios empíricos sobre convergencia estocástica.

Fuente: elaboración propia a partir de Bernard y Durlauf (1991, 1995), Esteve y Pallardó (1996), Lee et al. (1997) y Mora (2002).

Siguiendo a Mora (2002) podemos identificar los dos principales estudios que han planteado críticas al concepto de convergencia estocástica. Por una parte, Caporale y Pittis (1993) considera una falacia identificar los procesos de convergencia con los de cointegración; el estudio de la convergencia en tasas de inflación dentro de países de la EU le permite alcanzar esa conclusión y plantear, como alternativa, que mientras este proceso se encuentre en fase de desarrollo los diferenciales de inflación probablemente serán no estacionarios y exhibirán

tendencias comunes estocásticas. Los test de cointegración se basan, como se ha indicado, en asumes de estabilidad, por lo que, previsiblemente, fallarán en sus resultados. Por otro lado, Söderlind (1994) expresa sus dudas sobre la validez de considerar la cointegración como base para el análisis de la convergencia. En este caso la diferencia de enfoques radica en la validez de los test de cointegración sobre muestras pequeñas. Diversos estudios empíricos demostrarían el interés de aplicar estas técnicas sobre grupos reducidos de países, con características similares.

Bajo otro punto de vista Hobbj y Franses (2000) amplía las consideraciones de los trabajos de Bernard y Durlauf, proponiendo el empleo de análisis de *clusters* para permitir la identificación endógena de los países que convergen. De este modo se introduce el concepto de convergencia asintóticamente perfecta, que supone considerar situaciones en las que las economías no divergen pero sí mantienen diferencias constantes en términos de renta per cápita. En cierto modo supone un tratamiento análogo al de la  $\beta$ -convergencia condicional.

## 3.6 Procesos de $\sigma$ -convergencia

### 3.6.1 Descripción de las medidas de $\sigma$ -convergencia

En apartados previos se ha introducido el concepto de  $\sigma$ -convergencia como el proceso por el que “la dispersión de la renta real per cápita entre grupos de economías tiende a reducirse en el tiempo”, (Sala-i-Martin, 1994: 130). Mora (2002: 134) indica que esta medida se desarrolla para “analizar la desigualdad en la distribución de renta per cápita entre diferentes países o regiones” frente al estudio de la evolución de una unidad económica hacia su *steady-state*, que es lo que aporta la  $\beta$ -convergencia<sup>72</sup>.

Barro y Sala-i-Martin (1990) diferencia y profundiza en estos dos conceptos de convergencia, señalando diversas investigaciones en las que ya se considera un tratamiento inicial de la dispersión: Easterlin (1960), Streissler (1979), Baumol (1986) o Dowrick y Nguyen (1989), entre otros. Las dos medidas se encuentran relacionadas: la  $\beta$ -convergencia es necesaria, pero no suficiente, para que se produzca la  $\sigma$ -convergencia. Monfort (2008) lo justifica de manera intuitiva al señalar que las economías pueden convergir unas hacia otras, pero apartarse en instantes determinados debido a choques aleatorios, o, en el caso de la  $\beta$ -convergencia condicional, confluir hacia diferentes estados estacionarios (sin garantía, por tanto, de una reducción de la dispersión).

Sala-i-Martin (1994) analiza esta relación entre las dos medidas suponiendo que en un grupo de regiones,  $i = 1... N$ , se produce  $\beta$ -convergencia. La tasa de crecimiento de la renta per cápita de una determinada economía entre dos años consecutivos,  $t - 1$  y  $t$ , se obtiene como:

$$\gamma_{i,t} = \log(y_{i,t}) - \log(y_{i,t-1}) \quad (3.25)$$

<sup>72</sup> O, como señala Monfort (2008: 5): “While Beta-convergence focuses on detecting possible catching-up processes, Sigma-convergence simply refers to a reduction of disparities among regions in time”. En esta reflexión el término *catching-up* se plantea en niveles más amplios que los puramente tecnológicos.

Al verificarse la hipótesis de  $\beta$ -convergencia, la tasa de crecimiento debe depender negativamente del nivel de renta en  $t - 1$ , por lo que su expresión podría ser:

$$\gamma_{i,t} = a - \beta \log(y_{i,t-1}) + \omega_{i,t} \quad (3.26)$$

El último sumando es un término de error, que recoge perturbaciones transitorias (se supone que su media es cero y que la varianza es común e independiente en el tiempo para todas las economías:  $\sigma_{\omega}^2$ );  $\beta$  se identifica con el coeficiente de convergencia, siendo, por tanto, un valor positivo entre 0 y 1 (a mayor valor de  $\beta$  existe una mayor tendencia hacia la convergencia<sup>73</sup>).

Operando en (3.26) se obtiene:

$$\log(y_{i,t}) = a + (1 - \beta) \log(y_{i,t-1}) + \omega_{i,t} \quad (3.27)$$

Aunque existen otras formas de medir la dispersión de un conjunto de datos, en este estudio se opta por la varianza muestral del logaritmo de la renta:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\log(y_{i,t}) - \mu_t]^2 \quad (3.28)$$

La variable  $\mu_t$  representa la media muestral de  $\log(y_{i,t})$ . Sala-i-Martin (1994) destaca que esta varianza muestral del logaritmo de la renta resulta invariante con el nivel de renta media de las economías analizadas. Se trata de una medida muy cercana al coeficiente de desviación, que se analizará con posterioridad.

Si el valor de  $N$  es elevado (lo que corresponde a un alto número de observaciones) la varianza de la muestra se aproxima a la varianza de la población, de modo que se puede emplear (3.27) para intentar expresar su variación en el tiempo:

$$\sigma_t^2 \cong (1 - \beta)^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma_{\omega}^2 \quad (3.29)$$

Esta ecuación en diferencias, de primer orden, es estable si  $(1 - \beta)^2 < 1$ , lo que supone  $0 < \beta < 2$ . Por tanto, si  $\beta < 0$  —es decir, si no hay  $\beta$ -convergencia— la expresión sería inestable y no se verificaría  $\sigma$ -convergencia. Concluimos de este modo que la  $\beta$ -convergencia es condición necesaria para obtener  $\sigma$ -convergencia. En términos de Sala-i-Martin (1994: 132), “para que las economías se acerquen, es necesario que las pobres crezcan más que las ricas”.

La solución de la ecuación en diferencias permite encontrar la evolución de la varianza en función del tiempo:

<sup>73</sup> Sala-i-Martin (1994) señala que la condición  $\beta < 1$  implica que no se producirán *adelantamientos sistemáticos* de economías pobres respecto a las ricas. La expresión (3.26) sí permite que, de manera eventual, haya cambios de líderes: esto sucede cuando las economías de dos países se encuentran muy próximas y el término estocástico de error favorece al perseguidor.

$$\sigma_t^2 = \sigma_*^2 + [\sigma_0^2 - \sigma_*^2] \cdot (1 - \beta)^{2t} \quad (3.30)$$

El término  $\sigma_*^2$  representa el estado estacionario<sup>74</sup> de  $\sigma_t^2$  y su valor es:

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma_\omega^2}{1 - (1 - \beta)^2} \quad (3.31)$$

Se comprueba que a mayor valor de  $\beta$  la dispersión disminuye. El incremento de la varianza del error contribuye al aumento de la dispersión. Por su parte, (3.30) significa que  $\sigma_t^2$  se aproxima al estado estacionario (dado que  $0 < \beta < 1$ ), pero la diferencia  $[\sigma_0^2 - \sigma_*^2]$  puede ser positiva o negativa (en función de la relación existente entre el estado inicial y el estacionario):

- Si  $\sigma_0^2 > \sigma_*^2$  el valor de  $\sigma_t^2$  se reduce durante la dinámica hacia el estado estacionario, por lo que se produce  $\sigma$ -convergencia.
- Si  $\sigma_0^2 < \sigma_*^2$  el valor de  $\sigma_t^2$  aumenta durante la transición (incluso con  $\beta > 0$ ). O sea, puede darse  $\beta$ -convergencia y no verificarse  $\sigma$ -convergencia. Tal y como se había indicado, la  $\beta$ -convergencia no es condición suficiente para que se produzca la  $\sigma$ -convergencia.

La evolución de la dispersión del producto per cápita entre las economías, en términos de la varianza de su logaritmo, se representa en la siguiente figura (se asume que el coeficiente  $\beta$  se mantiene constante):

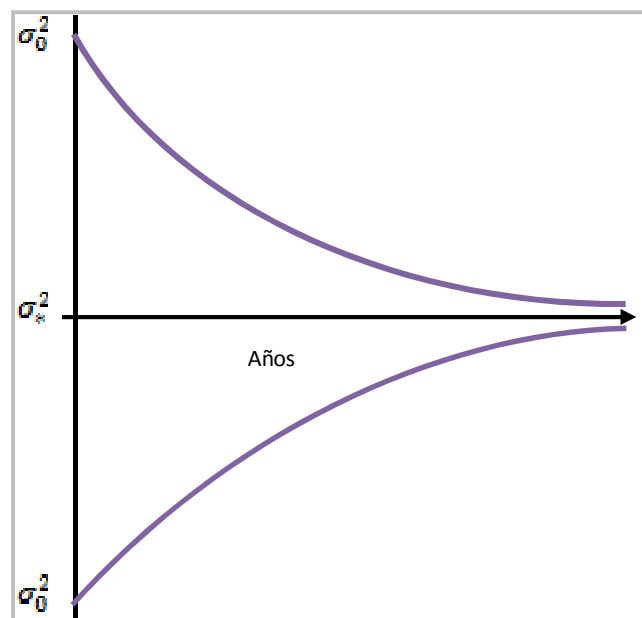


Figura 3.9. Comportamiento teórico de la dispersión del producto per cápita.

Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004: 464)

<sup>74</sup> En el estado estacionario  $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2$  para todo  $t$ .

Como se aprecia en la figura, a lo largo del tiempo  $\sigma_t^2$  decrece (o aumenta) si el valor inicial,  $\sigma_0^2$ , es mayor (o menor) que el valor del estado de equilibrio. Por tanto, un coeficiente positivo de  $\beta$  ( $\beta$ -convergencia) no implica que  $\sigma_t^2$  disminuya ( $\sigma$ -convergencia).

Sala-i-Ferrer (1996) muestra en la Figura 3.10 los condicionantes entre ambas medidas a través de distintos comportamientos del logaritmo del PIB per cápita en el tiempo. La economía A comienza siendo más rica que la economía B: debido a la distancia entre las rentas existe un índice de dispersión inicial. En el panel (i) el ratio de crecimiento de A es menor que el de B (al menos en el período  $T$  de tiempo considerado), por lo que se produce  $\beta$ -convergencia. Además, la dispersión se reduce: por tanto, se verifica  $\sigma$ -convergencia<sup>75</sup>. Sala-i-Ferrer (1996: 1021) destaca, en base a esta representación, que *“the existence of  $\beta$ -convergencia will tend to generate  $\sigma$ -convergencia”*.

En el segundo panel se comprueba que la ausencia de  $\beta$ -convergencia (la economía que al inicio es más rica crece más deprisa) se encuentra asociada con la falta de  $\sigma$ -convergencia (la distancia entre las economías aumenta en el tiempo).

Sin embargo, es posible que los países inicialmente pobres crezcan más rápido que los ricos ( $\beta$ -convergencia) sin que se verifique  $\sigma$ -convergencia: esta construcción se muestra en el panel (iii). Al final del período la economía B es más rica que A, manteniéndose la dispersión inicial. En este sentido sería posible considerar incluso mayor distancia final entre las dos economías. Eso supondría la existencia de  $\sigma$ -divergencia, a pesar de producirse la  $\beta$ -convergencia.

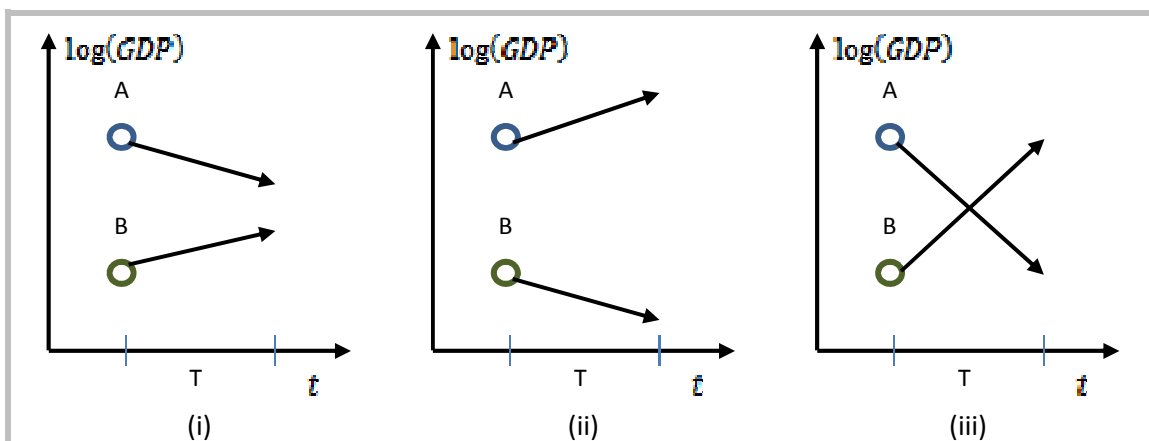


Figura 3.10. Evolución de economías y relación entre  $\sigma$ -convergencia y  $\beta$ -convergencia.  
Fuente: Sala-i-Ferrer (1996: 1021)

Las gráficas (i) y (ii) constituyen ejemplos de movimientos entre economías en los que la distribución final de la renta varía. En el panel (iii) existe movilidad dentro de la distribución, pero ésta permanece sin cambios. Bajo nuestra opinión, los desarrollos matemáticos avalan la posibilidad de que se produzcan las evoluciones expuestas, aunque casos extremos, como (iii), no poseen, en principio, una constatación empírica fundamentada.

<sup>75</sup> El autor aporta otra forma de ver que la existencia de  $\beta$ -convergencia es condición necesaria para que exista  $\sigma$ -convergencia: basta comprobar que es imposible aumentar la cercanía entre las economías si la más pobre (B) no crece más deprisa que la más rica (A).

Furceri (2005) revisa estas relaciones y obtiene una relación matemática de causalidad entre las dos medidas de convergencia. Expresando la renta como el GDP y partiendo de (3.27) se obtiene:

$$\text{sign}(\beta) = \text{sign}[\sigma_t^2 - \sigma_{t+\tau}^2 + \text{var}(\log(GDP_t)) - \log(GDP_{t+\tau})] \quad (3.32)$$

Si  $\sigma_t^2 - \sigma_{t+\tau}^2 > 0$  (se verifica  $\sigma$ -convergencia) entonces  $\beta$  tiene que ser positiva. De este modo demuestra que una condición necesaria para la existencia de la  $\sigma$ -convergencia es que se produzca la  $\beta$ -convergencia.

Por su parte, Wodon y Yitzhaki (2006) resume los condicionantes expuestos e indica que la  $\sigma$ -convergencia implica que se verifica la  $\beta$ -convergencia, mientras que la presencia  $\beta$ -convergencia constituye solo una condición necesaria para la  $\sigma$ -convergencia. Sin embargo, su análisis univariante de la relación entre las dos medidas muestra un resultado sorprendente: la  $\beta$ -convergencia puede observarse tanto hacia adelante como hacia atrás en el tiempo, lo que merece una consideración importante a la hora de interpretar los resultados empíricos.

Como se ha indicado, el estudio de Wodon y Yitzhaki (2006) se restringe, en aras de su simplificación, a regresiones simples univariantes. Para ello se consideran dos períodos en el tiempo y la transformación logarítmica  $y = \log(Y)$ , siendo  $Y$  la renta real per cápita. Se define  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) como la desviación estándar de  $y$ ; el coeficiente de regresión de  $y_i$  sobre  $y_j$  se expresa como  $\beta_{ij}$ . En base a lo expuesto,  $\sigma$ -convergencia implica que la desviación decrece con el tiempo ( $\sigma_2 < \sigma_1$ ). Por otro lado, se verifica  $\beta$ -convergencia en los términos expuestos si  $\beta_{21} < 1$ . La relación entre los términos de desviación y regresión es la siguiente:

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\text{cov}(y_2, y_2)}{\text{cov}(y_1, y_1)} = \frac{\frac{\text{cov}(y_2, y_1)}{\text{cov}(y_1, y_1)}}{\frac{\text{cov}(y_2, y_1)}{\text{cov}(y_2, y_2)}} = \frac{\beta_{21}}{\beta_{12}} \quad (3.33)$$

Estos cocientes son menores que uno cuando se cumple la relación de  $\sigma$ -convergencia. Por otro lado, por definición:

$$\beta_{12} \cdot \beta_{21} = \rho^2 \leq 1 \quad (3.34)$$

En este caso el término  $\rho$  hace referencia al coeficiente de correlación de Pearson entre  $y_1$  e  $y_2$ . En base a esta identidad y a (3.33) se obtiene:

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\beta_{21}}{\beta_{12}} = \frac{\beta_{21}^2}{\rho^2}$$

Las conclusiones inmediatas de esta relación son:

- Si hay  $\sigma$ -convergencia se cumple que  $\beta_{21} < 1$ , por lo que también se cumple la hipótesis de  $\beta$ -convergencia.

- Si, por el contrario, se parte de una situación en la que se verifica la  $\beta$ -convergencia no tiene por qué darse  $\sigma$ -convergencia, ya que el coeficiente de correlación de Pearson es menor que uno. Wodon y Yitzhaki (2006) señala que una reducción de la desigualdad implica  $\beta < 1$ , pero esta desigualdad puede cumplirse incluso si la desigualdad crece, siempre y cuando haya suficiente rango de cambio entre los países. Por ejemplo, esto sucedería en el caso de un bajo nivel de correlación. En un caso extremo, con  $y_1$  e  $y_2$  estadísticamente independientes,  $\beta = 0$ , sin que ello tenga relación en el posible incremento o disminución de la desigualdad.

La ecuación (3.34) indica que los dos coeficientes de regresión,  $\beta_{21}$  y  $\beta_{12}$ , pueden ser menores de uno de manera simultánea, lo que se interpreta como convergencia en caso de desplazamiento hacia adelante o hacia atrás en el tiempo. Wodon y Yitzhaki (2006) expresa con exactitud que una condición para que se verifique esta doble  $\beta$ -convergencia es que no haya cambios en  $\sigma$ . En realidad,  $\beta_{12} < 1$  implica que  $\sigma_{12} < \sigma_2^2$ , con  $\sigma_{12}$  la covarianza entre las rentas en estos dos períodos. Análogamente  $\beta_{21} < 1$  implica que  $\sigma_{12} < \sigma_1^2$ . Por tanto, la condición de que ambos valores de  $\beta$  sean menores que la unidad es que se verifique:  $\sigma_{12} < \min[\sigma_1^2, \sigma_2^2]$ .

Resulta relativamente sencillo encontrar situaciones empíricas en las que los dos coeficientes de regresión son menores que uno. Los autores citados obtienen este hallazgo en un estudio sobre países latinoamericanos, con ambos términos estadísticamente significativos al nivel del 5%.

El resultado se puede extrapolar a otras medidas de  $\sigma$ -convergencia; en el estudio se considera el índice de Gini como alternativa a la varianza del logaritmo del PIB per cápita. De nuevo se obtiene que la  $\beta^G$ -convergencia<sup>76</sup> puede ocurrir sin que se produzca la Gini-convergencia. Por el contrario, si la Gini-convergencia tiene lugar, entonces la  $\beta^G$ -convergencia también debe producirse. Cuando las observaciones de dos períodos son estadísticamente independientes, la  $\beta^G$ -convergencia es nula, con independencia del comportamiento del índice de Gini, y la convergencia se observa en ambos sentidos temporales.

Este interesante estudio no concluye que las observaciones de  $\beta$ -convergencia siempre se vayan a producir en los dos sentidos temporales (depende del conjunto de datos y de las especificaciones multivariantes), pero la posibilidad de que este hecho se produzca obliga a una interpretación mucho más cuidadosa de los conceptos.

Se indicaba anteriormente que existen diferentes índices para la medida de la dispersión. Litchfield (1999) señala que la desigualdad es un concepto muy amplio que, en este contexto, se asocia a la dispersión de una distribución de renta, de consumo o de algún indicador de bienestar de una población. Goerlich (1998) considera esta relación al señalar que coexisten dos corrientes de investigación sobre esta materia, tradicionalmente separadas, pero con notables puntos de contacto y complementariedad: (i) los análisis clásicos sobre la desigualdad, enfocados en especial en el estudio de la distribución de la renta personal; y (ii)

<sup>76</sup>  $\beta_{12}^G$  y  $\beta_{21}^G$  son los coeficientes de regresión de Gini de la renta en un período frente al otro.

los trabajos sobre la convergencia o la divergencia de la renta per cápita entre unidades económicas. En términos de Goerlich (1998: 8): “Así pues aunque la literatura sobre la desigualdad parte del individuo y la del crecimiento de una unidad espacial considerablemente más amplia, las dos tratan de estudiar la evolución en el tiempo de la distribución de una variable económica considerada de especial relevancia desde el punto de vista del bienestar o de la actividad económica. Debe ser obvio que las técnicas de análisis en un tipo de literatura pueden utilizarse satisfactoriamente en el otro, supuesto que disponemos de los datos necesarios”.

En este contexto más generalista, en el que la dimensión poblacional constituye el eje central de los estudios, no todos los procedimientos de medida resultan idóneos. Por ejemplo, consideremos el rango y la varianza, que constituyen, de manera intuitiva, dos instrumentos directamente asociados a la medida de la dispersión de una muestra. En concreto, el rango relativo corresponde a la diferencia entre el valor máximo y el mínimo, dividido por la media de la población. Como se verá seguidamente, se trata de una variable que incumple el principio de transferencia de Pigou-Dalton, dado que no tiene en cuenta lo que existe entre los términos extremos. Por su parte, la varianza no es independiente de la escala utilizada para la renta: la medida de la desigualdad ofrecida difiere en relación cuadrática respecto a la proporción que se haya empleado.

Resulta sencillo intuir que existen propiedades deseables para garantizar el alcance de las medidas empleadas. Litchfield (1999) revisa el estudio de Cowel (1985) para sistematizar cinco axiomas respecto a las propiedades que dichas medidas de desigualdad deberían cumplir, al menos idealmente:

- (i) Principio de transferencia de Pigou-Dalton. Implica que la transferencia de renta de una persona (o unidad) más pobre a otra más rica debe ser identificada como un aumento (o, al menos, no como una disminución) de la desigualdad; del mismo modo, la transferencia de renta de un individuo rico a otro pobre supondrá una disminución (o no se consignará como incremento) de dicha desigualdad. Atkinson (1970) lo expresa según el planteamiento original de Dalton en 1920: si se hace una transferencia de renta  $d$  desde una persona con renta  $y_1$  hacia otra con una renta inferior,  $y_2$  (con  $y_2 \leq y_1 - d$ ) se debería preferir la nueva distribución. Este principio se identifica con el de *mean preserving spread*, desarrollado por Rothschild y Stiglitz (1969), que postula que una condición necesaria y suficiente para priorizar dos distribuciones, con cierta independencia de su función de utilidad (se exige que sea cóncava y creciente), es que una pueda obtenerse a partir de la otra mediante la redistribución de riqueza desde la de renta superior a la inferior. Por tanto, la concavidad de la función de utilidad es garantía del cumplimiento del principio de



transferencia. En la siguiente figura se representa el efecto de la propagación de la preservación de la media en la curva de Lorenz<sup>77</sup>:

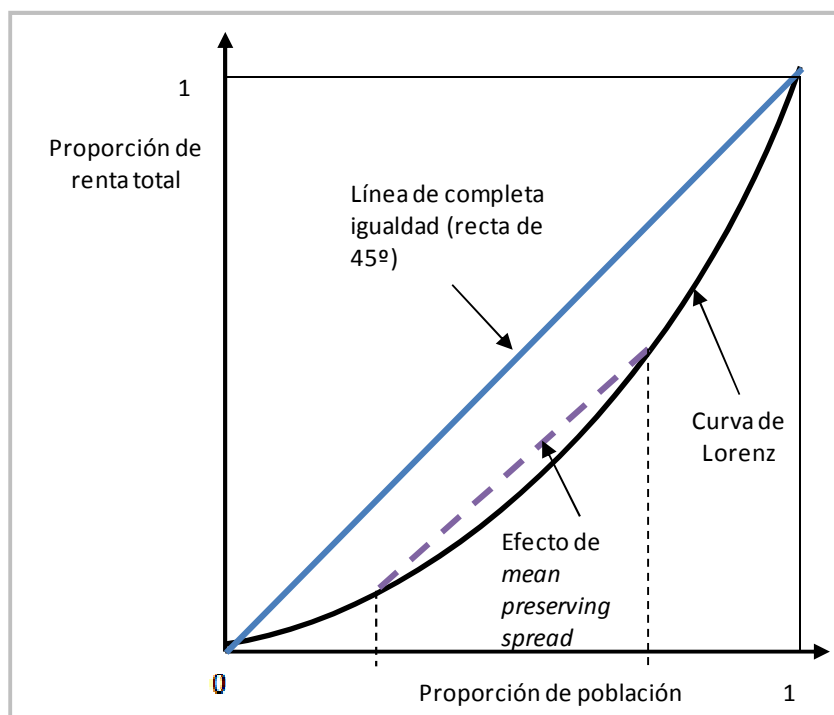


Figura 3.11. Efecto de *mean preserving spread* en la curva de Lorenz.  
Fuente: Atkinson (1970: 248)

Goerlich (1998) identifica el planteamiento expuesto, en línea con Sen (1973), como un principio débil de transferencia, porque solo se exige que la desigualdad se reduzca o aumente en función de la naturaleza de la misma. Sin embargo, no se hace referencia a la cantidad en la que debe darse el cambio. El principio de transferencia, en sentido fuerte, exige que el incremento o decremento dependa de la distancia entre las proporciones de las rentas.

- (ii) Principio de independencia de la escala de la renta. Esto supone que la medida de desigualdad debe ser invariante respecto a incrementos o decrementos proporcionales en la renta per cápita. O sea, si los cambios individuales se producen en la misma proporción (por ejemplo, al cambiar la unidad monetaria), la desigualdad no debe variar. Si expresamos  $I(y)$  como una determinada medida de desigualdad y  $\lambda > 0$  es un escalar, entonces se verificará:  $I(y) = I(\lambda y)$ . Se ha indicado que la varianza incumple este principio, ya que  $var(\lambda y) = \lambda^2 var(y)$ .
- (iii) Principio de independencia del tamaño de la población. Este axioma, también debido a Dalton, implica que “el índice debe permanecer inalterado si el número de individuos en cada nivel de renta se ve alterado en la misma proporción” (Goerlich, 1998: 14). La

<sup>77</sup> Goerlich (1998: 10): “La curva de Lorenz (...) es (...) una función de estadísticos de orden y muestra el porcentaje acumulado de renta correspondiente al percentil  $p$  de la distribución de la renta per cápita,  $0 \leq p \leq 1$ ”.

fusión de dos distribuciones idénticas no altera, por tanto, la medida de la desigualdad. En términos matemáticos, para cualquier escalar  $\lambda > 0$ ,  $I(y) = I(y[\lambda])$ , siendo  $y[\lambda]$  una concatenación del vector  $y$ , aplicada  $\lambda$  veces.

- (iv) Principio de simetría o de anonimato: la desigualdad debe ser independiente de cualquier otra característica individual que no corresponda a la dimensión que se está midiendo (generalmente la renta). O sea, para cualquier permutación  $y'$  de  $y$ :  $I(y) = I(y')$ .
- (v) Principio de descomposición. La medida debe poder dividirse en partes constituyentes de la distribución, como, por ejemplo, subgrupos de población o fuentes alternativas de renta: de este modo, si la desigualdad aumenta en cada una de estas divisiones se infiere que también lo hará en el conjunto completo.

Cowel y Kuga (1981) desarrolla el concepto de la categoría de medidas de desigualdad de entropía generalizada (GE), a la que pertenecen los índices que verifican los cinco principios expuestos<sup>78</sup>. Algunos autores, como Amiel (1998), cuestionan la validez de estos axiomas, dado que las medidas de desigualdad poseen un componente subjetivo debido a la posible incorporación de juicios de valor.

En Litchfield (1999) se indica la expresión general de una medida de desigualdad perteneciente a la categoría GE:

$$GE(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{\bar{y}} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (3.35)$$

El número de unidades en la muestra es  $n$ ,  $y_i$  representa la renta de la unidad  $i$  (entre 0 y  $n$ ), e  $\bar{y}$  constituye la media aritmética de la renta. El valor de  $GE$  tiene un rango entre 0 e infinito: el término nulo implica una distribución en la que todas las rentas son idénticas, de modo que a mayor valor la desigualdad será superior. El término  $\alpha$  representa el peso de las distancias entre las rentas en distintas secciones de la distribución. Coeficientes reducidos implican mayor sensibilidad de la medida hacia cambios en la parte inferior (el comportamiento es el opuesto para valores superiores de  $\alpha$ ). Lo habitual, como se verá al analizar las medidas de desigualdad más comunes, es trabajar con  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ , ó  $\alpha = 2$ .

Monfort (2008) revisa cinco medidas de desigualdad, en función de su sensibilidad y de la valoración que realizan de la distribución. En primer lugar, se centra en el coeficiente de variación ( $CV$ ), que se define como el ratio que relaciona la desviación estándar de la distribución de probabilidad con la media. La expresión de este término es:

<sup>78</sup> Goerlich (1998) identifica las tres primeras como las propiedades fundamentales que deben ser satisfechas por una medida de desigualdad. En concreto, los principios de independencia de la escala y del tamaño implican que el índice puede ser calculado a partir de la curva de Lorenz (no sería necesario conocer la renta media ni el total de la población).

$$CV = \frac{1}{\bar{y}} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

Por tanto, se verifica que  $GE(2) = \frac{1}{2} CV^2$ . Goerlich (1998: 25) indica que el CV “*valora de forma uniforme las transferencias de renta dentro de la distribución*”. No es una medida que pondere uno de los extremos de la distribución por lo que permite diferenciar el segmento en el que se produce la igualdad de las rentas. También verifica los axiomas (i) a (iv) recopilados en Litchfield (1999).

Monfort (2008) señala que los investigadores suelen preferir este coeficiente respecto a la desviación estándar, dado que ésta no posee un significado en sí misma, salvo que se disponga del término cuantitativo de la media. Dado un valor de la desviación estándar, el CV proporciona cuál es el grado de variabilidad únicamente en relación con dicha media.

La segunda medida de desigualdad a estudiar es el popular coeficiente de Gini ( $G$ ), muy empleado en el análisis de la renta personal. Su expresión es la siguiente:

$$G = \frac{1}{2n^2\bar{y}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j| \quad (3.37)$$

Este índice también se determina de manera geométrica como dos veces el área entre la curva de Lorenz y la línea de completa igualdad (ver Figura 3.11). Por tanto,  $G$  varía entre 0 (igualdad máxima) y 1 (desigualdad máxima), aumentando a medida que la curva de Lorenz se aleja de la recta<sup>79</sup> de 45°.

Al igual que el  $CV$ , el coeficiente de Gini es una medida que verifica los axiomas (i) a (iv)<sup>80</sup>; sin embargo, se puede descomponer de manera sencilla únicamente si las particiones no se solapan (por ejemplo, los subgrupos de población no se superponen en términos de renta). Lambert y Aronson (1993) advierte que en estos casos de superposición aparece un término residual que es problemático y difícil de comprender. La expresión genérica de dicha descomposición es (considerando  $k = 1, 2 \dots n$  los índices correspondientes a los subgrupos de población):

$$G = G_B + \sum a_k G_k + R \quad (3.38)$$

El término  $G_B$  corresponde al coeficiente de Gini inter-grupal: es el que se obtendría si la renta de cada subgrupo fuese reemplazada por su media. El coeficiente  $a_k$  representa el resultado de multiplicar el porcentaje de población por el porcentaje de renta en cada subgrupo;  $G_k$  es el

<sup>79</sup> Corresponde al caso en el que todas las agrupaciones reciben la misma renta per cápita.

<sup>80</sup> Goerlich (1998) muestra, por ejemplo, que  $G$  verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton a partir de consideraciones geométricas: una transferencia de una persona rica a una más pobre implica que la curva de Lorenz se desplace hacia arriba, reduciendo el valor del coeficiente.

índice de Gini de renta correspondiente al subgrupo en sí. Por último,  $R$  es el residuo y, como se ha indicado, su valor es cero cuando no existen solapes. Lambert y Aronson (1993) utiliza el análisis gráfico para identificar el término residual como una sub-área debajo de la curva de Lorenz; para ello desarrolla un procedimiento en tres etapas, partiendo de una situación hipotética de máxima igualdad, consistente en: (i) introducir la desigualdad entre los grupos; (ii) considerar la desigualdad dentro de los mismos; y (iii) tener en cuenta el posible solape entre los subgrupos de distribución de la renta. Este enfoque permite considerar la superposición como un efecto entre grupos ocasionado por la dispersión existente en su interior.

En el contexto específico de nuestro estudio, el coeficiente de Gini se emplea para comparar las distribuciones de renta entre unidades económicas, aunque se debe tener en cuenta su especial sensibilidad respecto a los siguientes aspectos:

- La influencia de lo que Monfort (2008: 6) identifica como “*granularity of the measurements*”: los cálculos basados en cinco cuantiles del 20% (bajo índice granular) ofrecen un valor de  $G$  más bajo que otros que empleen veinte cuantiles del 5% (alto índice de gránulo) de la misma distribución.
- Por otra parte, este índice otorga mayor importancia a las transferencias realizadas en el centro de la distribución que en sus extremos (aunque estos últimos los considera de forma análoga, sin diferenciar el tramo inferior del superior).

Existen diversos procedimientos para estimar el coeficiente de Gini. Albu (2012) describe varias aproximaciones. En primer lugar, si  $L(x)$  representa una aproximación válida de la curva de Lorenz, entonces  $G := \int_0^1 L(x)dx$ . Una posible estimación de esta curva es  $L(x) = \frac{x}{ax+b}$ .

El segundo método consiste en aplicar interpolación (es menos consistente pero también menos arduo). La curva de Lorenz se estima en cada intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$  como una línea entre dos puntos consecutivos; de este modo el índice de Gini se obtiene como  $G := 1 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - X_{i-1}}{100} \right) \left( \frac{Y_i + Y_{i-1}}{100} \right)$ . En esta expresión los pesos acumulados de la población,  $X$ , y los del PIB,  $Y$ , se toman en términos de porcentaje.

Otra medida que se puede determinar a través de la curva de Lorenz (aunque no se corresponde con  $G$ ) es la máxima distancia vertical entre la curva y la línea de completa igualdad. Bajo un enfoque geométrico implica la identificación del punto en el que la curva de Lorenz tiene pendiente igual a uno; Goerlich (1998) señala que, desde el punto de vista estadístico, corresponde a un medio de la desviación absoluta media relativa. Esta cantidad equivaldría al porcentaje de renta total que se debería transferir de la mitad rica de la población a la mitad más pobre para poder alcanzar la igualdad en la distribución de la renta entre las unidades económicas. Se trata de un término identificado en la literatura como coeficiente de *Robin Hood* ( $RH$ ) y que, en definitiva, se expresa como  $RH = \max(X - Y)$ . El sentido de esta denominación bajo el enfoque socioeconómico resulta evidente.

La tercera de las medidas de desigualdad de la renta revisada por Monfort (2008) es el índice de Atkinson. En realidad, empleando los términos con precisión, se debe hacer referencia a la familia de índices normativos de Atkinson, encuadrada dentro de los que se basan en una función de bienestar social, que considera la desigualdad como una pérdida en potencia del bienestar conjunto.

La expresión general de este conjunto de medidas es:

$$A_{\varepsilon} = 1 - \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i}{\bar{y}} \right]^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (3.39)$$

El parámetro  $\varepsilon$ , que es constante ( $\varepsilon \geq 0$ ), corresponde al denominado grado social de aversión hacia la desigualdad. En el caso  $\varepsilon = 0$  no existe aversión social a la desigualdad (su valor es nulo bajo cualquier distribución de la renta); a medida que  $\varepsilon$  aumenta se incrementa el grado de aversión social, de modo que con  $\varepsilon \rightarrow \infty$  sólo se valora el bienestar del individuo más pobre.

Del análisis de la fórmula se infiere que para  $\varepsilon > 0$  el índice  $A_{\varepsilon}$  varía entre 0, igualdad perfecta, y 1, máxima desigualdad. Expresando  $\alpha = 1 - \varepsilon$  se deduce la equivalencia ordinal entre esta medida y el conjunto de medidas de desigualdad de entropía generalizada. Goerlich (1998) destaca un resultado de Cowel (1995): es posible demostrar que  $\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \geq 0$ , por lo que  $A_{\varepsilon}$  nunca experimenta decrecimiento al aumentar el término  $\varepsilon$ .

La familia de índices de Atkinson cumple los axiomas (i) a (iv). Respecto al problemático quinto principio, es cierto que puede descomponerse, pero no se verifica que la suma de los componentes intra-grupo e inter-grupo proporcione la medida total de desigualdad.

Monfort (2008) advierte de la diferente sensibilidad de  $A_{\varepsilon}$  en función del grado de aversión: cuanto tiende a uno se detectan mejor los cambios en la parte inferior de la distribución (bajos niveles de la renta per cápita), alterándose el comportamiento cuando dicho grado decae hacia el cero (se experimenta mayor sensibilidad a los tramos superiores de la distribución de renta).

La familia de índices de Theil, en sus dos versiones más populares, constituye la cuarta y la quinta de las medidas de desigualdad analizadas en Monfort (2008). Se trata, según Goerlich (2008: 18), de “*dos interesantes medidas de desigualdad a partir del concepto de entropía de la teoría de la información*”. La idea que se extrapola a este contexto es que la menor probabilidad de que ocurra un suceso le confiere mayor interés.

Particularizando  $\alpha = 1$  en la expresión genérica de las medidas pertenecientes a la categoría GE, y aplicando la regla de L'Hopital, se obtiene el primero de los índices de Theil:

$$T = GE(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \log \frac{y_i}{\bar{y}} \quad (3.40)$$

El término  $\frac{y_i}{\bar{y}}$ , que también aparecía en la expresión de la clase de medidas de Atkinson, tiene una interpretación geométrica inmediata en la curva de Lorenz (corresponde a su pendiente en el percentil correspondiente), por lo que puede emplearse esta representación para obtener su valor.

En caso de igualdad perfecta, el índice es cero. Goerlich (2008) interpreta que, en tal caso, los porcentajes referidos a la renta y a la población son idénticos. Cuando se produce la máxima desigualdad, un grupo (supongamos que el  $i$ ) dispone de toda la renta y el resto de ninguna; es decir,  $y_j = 0 \forall j \neq i$ . Por tanto,  $T$  alcanza el máximo valor.

El primer coeficiente de Theil aplica pesos similares a lo largo de toda la distribución. Verifica, además, los cinco axiomas deseables para las medidas de desigualdad: el cumplimiento del principio (v) significa que  $T$  puede expresarse como la suma de desigualdades medias dentro de los subgrupos más un término que recoge las diferencias existentes entre los mismos. Monfort (2008) describe esta identidad considerando que la población se divide en  $m$  subgrupos, con  $Tr_i$  el índice de Theil del subgrupo  $i$  ( $i = 1 \dots m$ ),  $s_i$  el porcentaje de la renta de dicho subgrupo sobre el total, y  $T_c$  el coeficiente de desigualdad inter-grupal. De este modo, el índice de Theil se obtiene como:

$$T = \sum_{i=1}^m Tr_i + T_c = T_r + T_c \quad (3.41)$$

Esta expresión<sup>81</sup> considera las diferencias dentro de los grupos y las que existen entre ellos. Por ejemplo, en el caso concreto de un estudio empírico sobre la EU, los  $m$  subgrupos corresponderían a los Estados-miembro,  $Tr_i$  reflejaría las desigualdades entre las regiones de cada país,  $s_i$  la relación entre la renta estatal y el PIB europeo, y  $T_c$  recogería la dispersión entre las distintas naciones.

El segundo de los índices de Theil es la desviación logarítmica media ( $MLD$ ) y su expresión se obtiene considerando  $\alpha = 0$ , y aplicando L'Hopital, en la expresión genérica de la categoría GE:

$$MLD = GE(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{\bar{y}}{y_i} \quad (3.42)$$

Este coeficiente vuelve a tomar el valor nulo en el caso de igualdad perfecta (las proporciones de renta y población de cada agrupación resultan idénticas), aunque no se encuentra definida para distribuciones en las que la renta per cápita es cero (el término logarítmico tiende a  $-\infty$  con  $y \rightarrow 0$ )<sup>82</sup>. Al igual que el primer índice de Theil, el valor de  $MLD$  se puede deducir directamente de la representación de la curva de Lorenz. Las similitudes también se verifican

<sup>81</sup> Los subíndices hacen referencia a *region* (r) y a *country* (c).

<sup>82</sup> Esto constituye un problema al trabajar con conjuntos de datos individuales.

respecto al cumplimiento de los cinco axiomas. El coeficiente *MLD* se puede descomponer en medidas de desigualdad intra- e inter-grupales. Goerlich (2008) indica que tanto *T* como *MLD* miden la divergencia entre proporciones de renta y de población; para ello se emplea la misma función de distancia, aunque aplicando pesos distintos. Una diferencia significativa respecto a *T* radica en la mayor sensibilidad del índice *MLD* a los cambios en la parte inferior de la distribución.

En la siguiente tabla se resumen las características principales de las cinco medidas de  $\sigma$ -convergencia expuestas:

Medida	Rango de variación	Observaciones
Coficiente de variación ( <i>CV</i> )	0-1	Sensible a cambios en la media (en especial cuando el valor de la media está próximo a cero).
Índice de Gini ( <i>G</i> )	0-1	Sensible a cambios en la media o en la moda.
Índice de Atkinson ( <i>A<sub>e</sub></i> )	0-1	En función del parámetro de aversión al riesgo el coeficiente se vuelve más sensible a tramos superiores o a inferiores de la distribución.
Índice de Theil ( <i>T</i> )	0-∞	Proporciona pesos equivalentes a lo largo de toda la distribución. No tiene una interpretación directa.
Desviación logarítmica media ( <i>MLD</i> )	0-∞	Sensible a tramos inferiores de la distribución. No tiene una interpretación directa.

Figura 3.12. Propiedades de medidas de desigualdad.

Fuente: Monfort (2008).

Existen otras medidas de la desigualdad que se pueden considerar. Goerlich (1998) plantea la posibilidad de obtener coeficientes relativos a la igualdad entre proporciones mediante la curva de Lorenz (por ejemplo, determinando el porcentaje de la población con renta igual o inferior a la media). Estos indicadores complementarios ofrecen información muy útil respecto a los extremos, aunque no suelen resultar tan robustos como para emplearlos de manera única (incumplen, como en el caso del coeficiente *RH*, el principio de transferencias de Pigou-Dalton).

Se veía anteriormente que la varianza incumplía el principio de independencia de la escala. Sin embargo, la varianza de los logaritmos, definida como  $Var(\log y) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} (\log y_i - \log \tilde{y})^2$ , con  $N_i$  la población del grupo  $i$  y el término  $\log \tilde{y} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} (\log y_i)$ , sí verifica este axioma. Otro aspecto positivo es que, al igual que la varianza, puede descomponerse en una medida de la desigualdad inter-grupos y en otra intra-grupos. Como inconveniente, incumple el principio de transferencias de Pigou-Dalton para rentas superiores a  $\tilde{y}_e$  y, al igual que *MLD*, no se puede definir para distribuciones con renta nula.

El problema de disponer de un número amplio de indicadores<sup>83</sup> para evaluar el proceso de  $\sigma$ -convergencia es que los resultados se resienten de una cierta ambigüedad y puede aparecer el problema de la subjetividad comentado anteriormente. Goerlich (1998: 15) considera esta cuestión señalando que “es cierto que las comparaciones entre distribuciones son sensibles a la elección del índice de dispersión elegido, ya que las diferentes medidas de desigualdad tienden

<sup>83</sup> Se han omitido referencias a otro tipo de aproximaciones, a través de técnicas de inferencia estadística o de bootstrap, por no resultar necesarias para el desarrollo de este estudio.

*a enfatizar de forma diferente la desigualdad en distintas partes de la distribución*". Por ello resulta de notable interés profundizar en la comparación, no tanto de las distribuciones, sino de los propios coeficientes empleados. En este contexto hay que distinguir:

- Índices de desigualdad ordinalmente equivalentes: son aquellos que proporcionan una ordenación idéntica de diferentes vectores de renta.
- Índices de desigualdad cardinalmente equivalentes: en tal caso uno de ellos procede de una transformación lineal del otro. Por tanto, aportan la misma clasificación de vectores de renta y, además, muestran un porcentaje idéntico de variación respecto a la comparación de dos situaciones distintas.

La equivalencia cardinal engloba a la ordinal; lo inverso no resulta cierto.

Se puede demostrar que la familia de coeficientes de Atkinson,  $A_\varepsilon$ , y la de Theil, expresada de manera genérica como  $T(\beta)$ , con  $\varepsilon > 0$  y  $\beta = 1 - \varepsilon$ , son índices de desigualdad ordinalmente equivalentes: proporcionan la misma ordenación de un conjunto de curvas de Lorenz, pero no coinciden en la valoración de la manera en que evolucionan las diferencias. El índice de Theil con  $\beta = 2$  y el coeficiente de variación son cardinalmente equivalentes.

Goerlich (1998) extrae dos conclusiones relevantes de los aspectos de equivalencia mostrados:

- Desde un punto de vista empírico no resulta aconsejable focalizar en un determinado índice las conclusiones respecto la reducción o incremento de la desigualdad. Lo adecuado es considerar los resultados que ofrecen diferentes coeficientes ordinalmente equivalentes y comprobar si las deducciones muestran coherencia cuantitativa. El análisis de Monfort (2008) sobre la  $\sigma$ -convergencia en la EU, que se revisa en una sección posterior, muestra la forma de realizar este tratamiento.
- También resulta adecuado considerar clases o familias de índices dependientes de un parámetro que permita otorgar mayor o menor importancia a distintas partes de la distribución. Esto permite resolver ciertas situaciones en las que no resulta posible valorar objetivamente el tratamiento de la desigualdad en distintas curvas de Lorenz: lo ideal es que una distribución domine, en términos de Lorenz, por completo a las otras (esta idea se revisa en el tratamiento que se inicia en el siguiente párrafo), ya que de este modo todos los índices que satisfagan el principio de transferencias proporcionarán la misma ordenación. Cuando no es así se requiere acudir a consideraciones subjetivas, de ahí el interés de contar con un tratamiento de parámetros que resuelva dudas en regiones conflictivas de la distribución.

Litchfield (1999) plantea un tratamiento más amplio de las posibles situaciones de ambigüedad en la ordenación de las distribuciones, ocasionadas por la diferente sensibilidad de los índices a las distintas partes de las distribuciones. Propone para ello la consideración de las tres categorías del dominio estocástico, lo que permite priorizar las distintas categorías:



- Dominio estocástico de primer orden: de manera simplificada, si una distribución  $y_1$  domina de este modo a otra  $y_2$ , cualquier función de bienestar social que crezca en renta proporcionará mayores niveles de bienestar en la distribución  $y_1$  que en la  $y_2$ .
- Dominio estocástico de segundo orden: en este caso, el dominio de  $y_1$  sobre  $y_2$  implica que cualquier función de bienestar social incremental y cóncava en renta otorga mayores niveles de bienestar en la distribución  $y_1$  que en la  $y_2$ . El cumplimiento de la primera condición implica que se verifique esta segunda (lo contrario no es cierto).
- Dominio estocástico de segundo orden con media normalizada: este tercer concepto, también conocido como dominio de Lorenz, se centra en la ordenación de distribuciones bajo la consideración de la desigualdad en vez de con la medida del bienestar. En este caso, si la curva de Lorenz de la distribución de  $y_1$  nunca se encuentra por debajo de la curva de Lorenz de la distribución de  $y_2$  y, al menos, en algún lugar está por encima, entonces  $y_1$  domina bajo esta modalidad a  $y_2$ . Según Atkinson (1970), cualquier índice de desigualdad que verifique el principio de simetría y el de transferencias de Pigou-Dalton ordenará estas dos distribuciones de modo similar al de la curva de Lorenz.

Se concluye este apartado formalizando el tratamiento de la descomposición de medidas de desigualdad; al revisar los índices propuestos por Monfort (2008), se concretaron algunos aspectos relativos a la desagregación de los coeficientes de Gini o de Theil. Como se ha podido comprobar, la separación de los índices (cuando resulta posible) permite identificar los distintos niveles de contribución a la disparidad de los subgrupos identificados o el peso de ciertas características particulares.

Siguiendo a Litchfield (1999) se puede diferenciar, en primer lugar, la descomposición en subgrupos de población: *“consiste en la subdivisión de la población en grupos homogéneos, exhaustivos y mutuamente excluyentes, para analizar qué parte de la desigualdad total es atribuible a cada uno de estos grupos”*. Goerlich (1998: 28). En este contexto se identifica un índice como aditivamente descomponible en sentido débil si se puede escribir como la suma de un componente inter-grupal y otro intra-grupal. El término inter-grupos ( $I_b$ ) mide la desigualdad externa y se obtiene asignando a cada miembro del grupo la renta per cápita media del mismo. Por su parte, el componente intra-grupos ( $I_w$ ) se refiere a la desigualdad interna y corresponde a una suma ponderada de los índices de diversidad de cada uno, asociada a los pesos de renta y/o población. En la descomposición según la población se pueden distinguir dos tipos de técnicas:

- Descomposición estática, referida al período anual. El valor del componente intra-grupos se obtiene como  $I_w = \sum_{j=1}^k w_j (GE(\alpha))_j$ , siendo  $w_j = v_j^\alpha f_j^{1-\alpha}$ , con  $v_j$  el porcentaje de renta de cada partición y  $f_j$  el porcentaje de población ( $j = 1, 2 \dots k$ ). Por otra parte,  $I_b$  se calcula asignando la renta media de cada partición  $j$  a cada miembro de la partición y calculando:  $I_b = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \left[ \sum_{j=1}^k f_j \left( \frac{y_j}{\bar{y}} \right)^\alpha - 1 \right]$ .

- Descomposición dinámica, que se establece para un determinado período de tiempo. En este caso el componente inter-grupal se puede desagregar en un efecto renta, asociado a las diferencias de las medias de las rentas entre subgrupos, y a un efecto de distribución, asociado a los cambios en el tamaño (número de personas) de dichos subgrupos. Por su parte, el componente intra-grupal recoge condicionantes relacionados estrictamente con la desigualdad. El tratamiento aritmético de esta descomposición resulta más compleja que en el caso anterior. Litchfield (1999) se centra únicamente en  $MLD = GE(0)$  e identifica los tres componentes descritos en la siguiente expresión (se han diferenciado mediante distintos colores en la fórmula):

$$\Delta MLD = \sum_{j=1}^k \bar{f}_j MLD_j + \sum_{j=1}^k \overline{MLD}_j \Delta f + \sum_{j=1}^k [\bar{\lambda}_j - \overline{\log(\lambda_j)}] \Delta f_j + \sum_{j=1}^k (\bar{v}_j - \bar{f}_j) \Delta \log(\bar{y}_j) \quad (3.43)$$

El término  $\lambda_j$  representa la media de la renta del grupo  $j$  respecto a la media total. El primer sumando capta el efecto de pura desigualdad, el segundo el de distribución y el tercero el relativo a la renta.

El segundo método de descomposición considera las distintas fuentes ( $f$ ) que originan las rentas, como las ganancias del trabajo, las transferencias entre el sector privado y el público, rentabilidades del capital, etc. Por tanto, la desigualdad total  $I$  se puede expresar en términos de factores que dependen de cada fuente de renta:  $I = \sum_f S_f$ . La fuente de renta proporciona un efecto de desigualdad si  $S_f > 0$  y de igualdad si  $S_f < 0$ ;  $S_f$  representa, por tanto, la contribución del factor  $f$  a la desigualdad total (a mayor valor, más importancia). Con objeto de emplear términos normalizados se emplea el factor proporcional de contribución  $s_f = \frac{S_f}{I}$ ; de este modo  $\sum_f s_f = 1$ .

La descomposición a emplear depende de la medida de la desigualdad utilizada, aunque debe verificar dos supuestos: (i) ser descomponible –verificar el axioma (v)– y (ii) encontrarse definida para un extenso número de fuentes, incluyendo rentas nulas (se veía que no era posible en índices como  $MLD$  o la varianza de logaritmos). La expresión más sencilla en este contexto corresponde a  $GE(2)$ :

$$S_f = s_f GE(2) = \rho_f \chi_f \overline{GE(2)}. GE(2)_f$$

El término  $\rho_f$  corresponde a la correlación entre  $f$  y la renta total y  $\chi_f$  es la relación entre la media de la fuente y la total.

### 3.6.2 Observaciones respecto a las medidas de $\sigma$ -convergencia. Consideración de las dinámicas de distribución.

Como se ha visto al analizar los estudios relacionados con la  $\beta$ -convergencia, la aparente controversia entre esta medida y la  $\sigma$ -convergencia se resuelve en términos similares a los expuestos por Monfort (2008: 3): “(...) there is no convergence measure capable of capturing

*all relevant aspects of a convergence process. It is therefore important to know what the specificities and the limits of the existing measures are*". De este modo, cuando Sala-i-Martin (1996b) expone los ejemplos citados en un apartado anterior respecto al potencial de la  $\beta$ -convergencia (eliminando en el estudio la posibilidad de considerar la dispersión), concluye su exposición destacando que, con ello, no se intenta sugerir que la  $\sigma$ -convergencia carezca de interés. En concreto, *"it is very important to know whether actual economies's incomes are becoming more similar or whether the differences between rich and poor families or individuals increase over time"*, Sala-i-Martin (1996b: 1328). Los fenómenos que investiga cada medida son conceptualmente distintos: la  $\beta$ -convergencia estudia el movimiento de la renta dentro de una misma distribución, mientras que la  $\sigma$ -convergencia se centra en cómo la distribución evoluciona a lo largo del tiempo.

Esta visión integradora no es óbice, sin embargo, para que, por ejemplo, Sala-i-Martin (1994) muestre su preferencia por la información proporcionada por la  $\beta$ -convergencia: dado que lo importante es conocer la posibilidad de predecir un crecimiento más rápido de los países pobres frente a los ricos o determinar la velocidad de cambios en el sentido de naciones pobres hacia ricas o la inversa, la mengua en la dispersión global pasa a un segundo plano. Según Sala-i-Martin (1994: 134-135) *"si supiéramos que los países pobres se convierten en países ricos en pocos años, entonces no nos preocuparíamos incluso de si la varianza es grande o pequeña, ya que sabríamos que los países pobres saldrían de la pobreza en poco tiempo"*.

Los trabajos de Quah durante la década de los noventa advierten de una posible interpretación errónea de procesos en los que se verifica la  $\sigma$ -convergencia. En este sentido, Mora (2003) señala que en las dos representaciones mostradas en la Figura 3.13 la  $\sigma$ -convergencia no varía, aunque representan dos escenarios completamente distintos: en (i) esta medida permanece constante mientras el PIB fluctúa, mientras que en (ii) tanto el PIB como la  $\sigma$ -convergencia permanecen constantes. Esta segunda situación muestra un mundo polarizado, en el que los países ricos y pobres permanecerían siempre en sus correspondientes estatus.

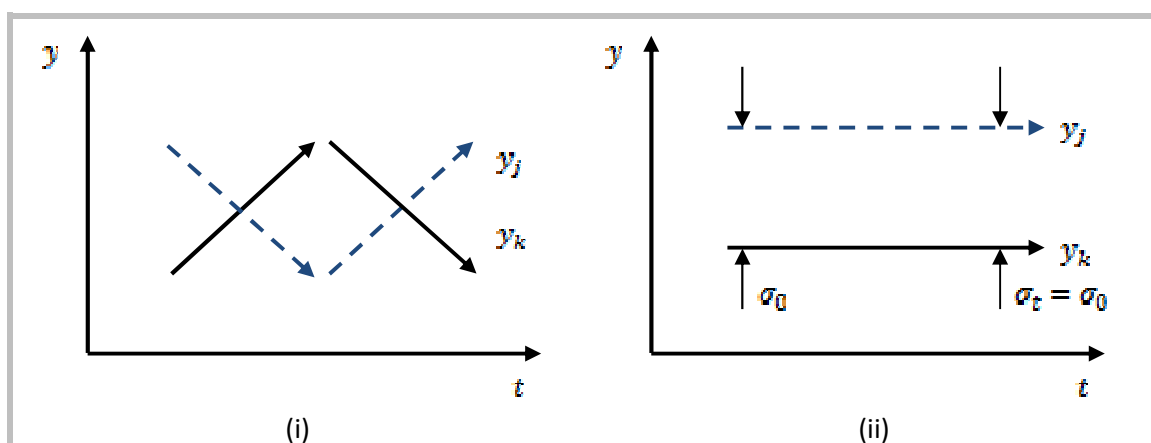


Figura 3.13.  $\sigma$ -convergencia: modelo *leap-frogging* y modelo polarizado.  
Fuente: Mora (2003: 62-63).

Quah (1996b) formaliza estas ideas al considerar que la fluctuación en el tiempo de la distribuciones de renta puede llevar a situaciones limitantes como: (i) convergencia; (ii)

estratificación; o (iii) crecimiento continuado de la desigualdad. Su planteamiento conduce a destacar la relevancia de la localización física y de los efectos de desbordamiento geográfico frente a factores macro-económicos. La importancia de los factores espaciales constituye precisamente el eje de desarrollo del capítulo cuatro de este estudio.

En la figura nº XX se representan tres figuras planteadas en Quah (1996b) y en Durlauf y Quah (1999) en las que, a partir de la ecuación de  $\beta$ -convergencia, se generan distribuciones consistentes con esta hipótesis, variando únicamente los valores de  $y(0)$  y la varianza de los residuos de las regresiones. Aunque los estadísticos resultan similares, las implicaciones respecto al proceso de acercamiento son muy distintas, como sucedía en otros ejemplos previos. En (i) las economías comienzan muy cerca de la distribución estacionaria y luego se separan para volver a converger. Por tanto se constataría un proceso de  $\sigma$ -divergencia hacia un estado estacionario con  $\sigma$  constante. En el caso (ii) tanto la  $\beta$ - como la  $\sigma$ -convergencia coinciden: todas las economías convergen de manera suave hacia la pauta estacionaria de crecimiento. Finalmente, en (iii) se muestra un conjunto de economías en el límite estacionario de la distribución, pero desarrollando dinámicas internas de evolución. Se puede interpretar como el estado final de (i).

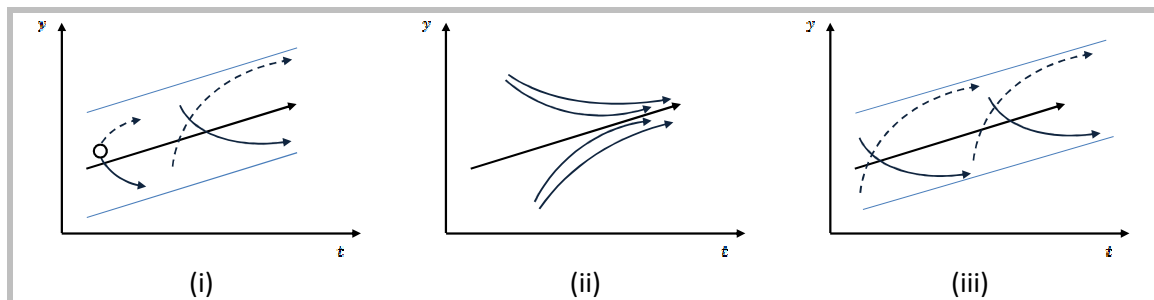


Figura 3.14. . Comportamientos de  $\beta$ -convergencia y  $\sigma$ -convergencia

Fuente: Durlauf y Quah (1999).

Durlauf y Quah (1999) analiza el signo del coeficiente de regresión en el caso (iii) y observa que el ratio de crecimiento muestra un valor negativo respecto al nivel inicial. Esto supondría que la dinámica de convergencia debería ser similar a la mostrada en (ii), con economías pobres que alcanzan finalmente los mismos niveles de renta que las ricas. Es más, se puede demostrar que las dinámicas de  $\sigma$ -convergencia de (iii) en la Figura 3.14 y de (ii) en la Figura 3.13 son coincidentes, aunque el comportamiento de ambas economías difiera de manera muy significativa.

Mora (2003: 63) especifica las conclusiones derivadas de este análisis en los siguientes términos: “*la convergencia tipo sigma no nos dice nada acerca de la distribución del PIB ni de la tan soñada convergencia*”. Según los estudios de Quah, los índices de desigualdad sólo consideran el análisis de un determinado aspecto de la distribución en un instante dado, por lo que resulta aventurado basarse únicamente en los mismos para argumentar un posible acercamiento entre las economías a nivel global. Como se verá posteriormente, la  $\sigma$ -

convergencia no puede ofrecer información<sup>84</sup> sobre la presencia de *clusters* en el conjunto de la muestra ni de otro tipo de transiciones internas (tal y como se ha indicado en el párrafo anterior).

Mora (2002) recapitula las críticas realizadas por Quah en sus trabajos de 1993 y 1996:

- Las regresiones de  $\beta$ -convergencia en datos *cross-section* o de panel estudian únicamente el comportamiento de una economía media y no de la distribución en su conjunto.
- Los análisis empíricos no parecen resultar coherentes con la hipótesis de transiciones suaves y monótonas hacia el *steady-state*. Como se indicó al analizar la  $\beta$ -convergencia, la tasa de convergencia universal del 2% se debería a razones independientes de la dinámica de crecimiento.
- La  $\beta$ -convergencia es compatible con distribuciones que pueden evolucionar hacia la concentración, hacia la divergencia, estratificarse, polarizarse...
- Las diferentes medidas de desigualdad no informan, en general, sobre el comportamiento interno de las distribuciones.

En base a estas apreciaciones Quah (1996a) plantea un doble análisis: (i) el estudio de la dinámica interna de la distribución mediante el empleo de cadenas de Markov en el caso discreto y la estimación de kernels estocásticos para el caso continuo; y (ii) revisar la forma de la distribución, utilizando histogramas para datos discretos y estimando las funciones de densidad al considerar datos continuos. De este modo el estudio de la convergencia se plantea como un análisis integral de la distribución de la renta per cápita.

Concluimos este apartado haciendo una breve referencia a las limitaciones de la  $\sigma$ -convergencia en la consideración espacial de la convergencia, asociadas, de nuevo, a la escasa o nula información proporcionada sobre la morfología de la distribución.

### 3.6.3 Análisis empíricos de ámbito general de procesos de $\sigma$ -convergencia

Barro y Sala-i-Martin (2004) revisa también la  $\sigma$ -convergencia en los períodos temporales y geográficos en los que analizaba la hipótesis de  $\beta$ -convergencia, descritos anteriormente. En el caso de los 47 ó 48 estados de USA se constata una destacada reducción de la desigualdad desde el año 1880, con un valor de 0.54, hasta 0.14 en el 2000. La variable de medida empleada es la desviación del logaritmo de la renta personal per cápita. El índice experimenta la siguiente evolución: (i) disminución de la desigualdad desde el año inicial hasta 1920; (ii) incremento de la dispersión hasta un valor de 0.40 en 1930, debido a la problemática del sector agrícola en la década de los veinte; (iii) tendencia decreciente hasta mediados de los setenta (el mínimo de este largo período se alcanza en 1976, con  $\sigma_t = 0.14$ ), con leves aumentos en 1932 y en los años inmediatamente posteriores a la conclusión de la II Guerra

<sup>84</sup> *Permanece en silencio*, según la sugerente expresión utilizada por Durlauf y Quah (1999). Rey y LeGallo (2009) también la emplea en su estudio.

Mundial; (iv) ligero crecimiento de la desigualdad hasta una cota de 0.16 en 1988; y (v) la dispersión permanece en torno a 0.14 en la década de los noventa, con una evolución muy plana del índice.

El análisis de  $\sigma$ -convergencia en las 47 prefecturas de Japón desde 1930 hasta 1990 emplea la misma medida que en el caso estadounidense. La desigualdad sufre un largo proceso de reducción, de forma parecida al comportamiento en USA, desde finales de la II Guerra Mundial hasta 1980. Se pueden distinguir los siguientes sub-períodos: (i) incremento de la dispersión de la renta personal desde 1930, con un valor de 0.47, hasta 0.63 en 1940 (los autores lo atribuyen a la expansión militar durante este período); (ii) decrecimiento *radical* desde el máximo en 1940 hasta un mínimo de 0.12 en 1978; (iii) leve incremento hasta  $\sigma_t = 0.15$  en 1987; y (iv) estabilidad, en torno a este valor, desde ese año.

Jenkins y van Kerm (2003) integra los tres aspectos de la distribución de la renta (tendencias hacia la desigualdad, crecimiento diferencial y movilidad) en un marco teórico en el que se relacionan los patrones de crecimiento y el comportamiento de los individuos. Este estudio considera los índices generalizados de Gini, mostrando que los cambios en desigualdad entre dos hitos temporales se pueden descomponer en dos elementos: uno sintetiza los procesos de movilidad mediante la reclasificación y el segundo considera el enfoque de progreso de crecimiento de la renta, es decir, si se orienta más al beneficio de los pobres que al de los ricos.

El planteamiento del análisis permite profundizar en una situación calificada de *paradójica* por los autores: el crecimiento económico en USA fue mayor para las unidades ricas que para las pobres durante las décadas de los 80 y de los 90, a pesar de la orientación hacia los más desfavorecidos, lo que incidió en un aumento de las desigualdades. Este escenario se compara con el de la economía de Alemania Occidental en el mismo período, caracterizada también por un crecimiento en beneficio de los pobres (*pro-poor*), y que registró, sin embargo, un crecimiento relativamente menor de las diferencias.

En línea con lo expuesto al analizar las características del coeficiente de Gini, Jenkins y van Kerm (2003) se centra en los cambios de renta de los individuos, más que en el impacto sobre grupos de *pobres* o *ricos*. Realmente las composiciones de estas posibles agrupaciones varían en el tiempo, dado que las personas experimentan cambios en su situación económica asociados a distintos ratios de crecimiento. De modo similar a los conjuntos de medidas de Atkinson y Theil, es posible identificar una familia de índices generalizados de Gini, asociada a un parámetro de aversión a la desigualdad,  $v > 1$ . La expresión genérica de esta clase de medidas es:

$$G(v) = 1 - \int [v(1-p)^{v-1}] \frac{x}{\mu} f(x) dx \quad (3.44)$$

El término  $f(x)$  corresponde a la función de densidad de probabilidad de la renta,  $p = F(x)$  es la correspondiente función acumulada de distribución y  $\mu$  representa la media de la renta. La fórmula se puede interpretar como una media ponderada de la renta relativa respecto a la media de cada individuo, en la que el peso social se expresa como  $w(p, v) = v(1-p)^{v-1}$ . La

desigualdad se obtiene, por tanto, como diferencia entre la evaluación social para el caso en el que todas las rentas son iguales y la evolución social en la situación actual.

El índice clásico de Gini corresponde a  $v = 2$ . Valores superiores del parámetro de aversión confieren mayor peso social a individuos más pobres que el coeficiente tradicional.  $G(v)$  también varía entre cero (máxima igualdad:  $\frac{x}{\mu} = 1$ , la integral también vale uno y la diferencia es cero) y uno (máxima desigualdad).

El estudio analiza el cambio del coeficiente de Gini,  $\Delta G(v)$ , entre un año inicial (0) y otro final (1) para un conjunto fijo de individuos. Se demuestra que esta variación se descompone en dos términos:

$$\Delta G(v) = R(v) - P(v)$$

$R(v)$  corresponde a un índice de movilidad o término de reclasificación:  $\int \int [w(p_0, v) - w(p_1, v)] \left(\frac{x_1}{\mu_1}\right) f(x_0, x_1) dx_0 dx_1$ . Se interpretan las siguientes situaciones en función de su valor:

- Cuando no se produce reclasificación  $R(v) = 0$ .
- $R(v) > 0$  cuando los rangos de renta pueden revertirse. El máximo se produce cuando la persona más pobre en el año inicial se convierte en la más rica en el final; del mismo la segunda más pobre se vuelve la segunda más rica, etc.

Por su parte,  $P(v)$  se interpreta como una media ponderada en términos sociales de los cambios en las rentas relativas entre los años límite:  $\int \int w(p_0, v) \left[\frac{x_1}{\mu_1} - \frac{x_0}{\mu_0}\right] f(x_0, x_1) dx_0 dx_1$ . Es un término que sintetiza el *progreso* del crecimiento de la renta; considerando su valor se distinguen las siguientes situaciones:

- Si todas las personas experimentan un crecimiento en igual proporción las rentas relativas permanecen constantes y, por tanto,  $P(v) = 0$ .
- Si  $P(v) > 0$  el crecimiento de la renta se concentra más entre los individuos más pobres que entre los ricos: este factor conduce a una disminución de la desigualdad a lo largo del tiempo (siempre que el resto de factores influyentes permanezca constante). Éste es el caso que se describía en USA y Alemania Occidental: crecimiento en beneficio de los pobres.
- Por el contrario, si  $P(v) < 0$  las ganancias de la renta en el tiempo se concentran entre los individuos ricos, implicando un crecimiento de las desigualdades. Esta situación se describe como crecimiento regresivo de la renta.

Como se ha indicado, el marco de descomposición descrito se empleó para estudiar los cambios en desigualdad de la renta en USA (en el período 1980-1993)<sup>85</sup> y Alemania Occidental (1984-1998)<sup>86</sup>, focalizando la investigación en el mayor crecimiento de dicha disparidad en la

<sup>85</sup> Datos obtenidos del *US Panel Study on Income Dynamics*.

<sup>86</sup> Datos obtenidos del *German Socio-Economic Panel*.

primera nación. La medida de renta de cada individuo se basa en el término de renta anual tras impuestos de la familia a la que pertenece, ajustada, debido a diferencias en el tamaño y composición de las mismas, mediante la escala Oxford, o antigua de equivalencia<sup>87</sup>. Este valor se pondera en períodos de tres años, a fin de minimizar errores de medida o asociados a efectos transitorios: o sea, la renta de un individuo en el año  $t$  corresponde a la media aritmética de las rentas anuales en  $t - 1$ ,  $t$  y  $t + 1$ . Los datos fueron depurados, mediante la eliminación, por ejemplo, de *outliers* específicos de la muestra. Las descomposiciones se plantearon en períodos sucesivos de cinco años, de modo que en el caso de US se dispone de ocho agrupaciones (1981-1986, 1982-1987, etc.) y en el de Alemania Occidental de diez (1985-1990, 1986-1991, etc.).

Los resultados más significativos de las estimaciones realizadas en el ámbito estadounidense son:

- La desigualdad creció más del 2% en cada uno de los lustros considerados: el porcentaje máximo fue del 2.62% en el período 1981-1986 y el mínimo de 2.06% en 1987-1992.
- El crecimiento de la renta en estos intervalos fue progresivo:  $P(2) > 0$  en todos los casos. Por tanto, se trata de un crecimiento en beneficio de los pobres (mayor, de manera proporcional, para los más desfavorecidos). Esto parece una contradicción con otros estudios, como Danziger y Gottschalk (1995), en los que se muestra que el crecimiento de los ricos fue mayor que el de los pobres en las décadas analizadas (esto revela el comportamiento paradójico al que se hacía referencia anteriormente).
- El índice  $R(2)$  de reclasificación representa casi siempre el doble que el índice de progreso, de modo que se detecta una reestructuración importante de la distribución de la renta. Al mismo tiempo que crecen las desigualdades en cada período se suceden los cambios en los integrantes de grupos pobres, intermedios y ricos.

En relación a Alemania Occidental:

- Las desigualdades de renta y el ratio de crecimiento de las mismas son, por lo general, significativamente menores que en USA. Por ejemplo, en 1986  $G(2)_{Alemania} = 2.22\%$ , mientras que  $G(2)_{US} = 3.02\%$ ; en ese mismo año  $\Delta G(2)_{Alemania} = 0.114\%$ , mientras que  $\Delta G(2)_{US} = 0.250\%$ .
- La descomposición de la variación de los índices de Gini es similar a la de USA: se percibe, de nuevo, un crecimiento de la renta *pro-poor*.
- Las diferencias significativas se producen debido a la gran importancia del factor de progreso. Aunque, como en USA,  $R(2) > P(2)$  en la década de los ochenta, esta desigualdad se mantiene con cantidades muy pequeñas. De hecho, en los noventa se cumple  $R(2) \cong P(2)$ ; o, incluso, en ciertos períodos el primer término es menor que el segundo, por lo que  $\Delta G(2) < 0$  (por ejemplo,  $\Delta G(2)_{1993} = -0.014\%$ ).

<sup>87</sup> Esta escala asigna el valor de 1 al primer miembro de la familia, 0.7 a cada adulto adicional y 0.5 a cada hijo. Existen otras múltiples escalas, como se comprueba en la revisión de Atkinson, Rainwater y Smeeding (1995). Eurostat emplea la escala Oxford.



Se puede constatar que el crecimiento de la renta repercute en un mayor beneficio de los pobres en Alemania Occidental que en US. Para ello se representa en una misma gráfica, para los períodos temporales considerados (en especial cuando las series se solapan), el término de progreso, normalizado respecto al índice de Gini inicial, y se observa directamente que la evolución germánica es superior a la estadounidense.

### 3.7 Análisis de las distribuciones

Rey y Le Gallo (2009) considera que los estudios de econometría sobre el crecimiento se pueden diferenciar en dos grupos: el primero se centra en lo que los autores denominan aproximación regresiva, es decir, en la elaboración de predicciones a partir de las teorías desarrolladas en este campo, como los modelos neoclásicos; el segundo conjunto se desvía de los asumes económicos que subyacen en los anteriores patrones y se focaliza en el análisis de la distribución de rentas de manera global. Como señala Rey y Le Gallo (2009: 1252) *“the focus shifts to how different parts of the distribution may behave over time, and to questions of whether there are changes in modality and shape of the distribution and concerns with the intradistributional dynamics and mixing”*. Resulta evidente que este cambio de objetivos repercute en las técnicas estadísticas empleadas en uno y otro campo.

Monfort (2008) señala que las medidas de la diversidad, descritas con anterioridad, resultan sencillas en su tratamiento informático y proporcionan un resumen de la información de la muestra; sin embargo, como también se ha expuesto, no permiten profundizar en características internas, como el movimiento de las economías dentro de la distribución. De ahí el interés de aplicar técnicas englobadas en la segunda de las divisiones expuestas. El autor diferencia en este contexto: (i) instrumentos basados en el análisis visual y (ii) herramientas numéricas de medición.

La técnica más empleada bajo una aproximación meramente gráfica es el histograma, que permite estimar la densidad de la distribución de manera no paramétrica. Sin embargo, como se indicaba en el primer capítulo, se trata de un medio con una severa limitación: la subjetividad implícita que requiere la elección de intervalos que cubren el conjunto de la muestra. Además, la representación obtenida tampoco es uniforme.

En el citado primer capítulo se empleaba un modelo de mixtura para la eliminación de estos efectos negativos. Barrios y Strobel (2009), al analizar las relaciones existentes entre desigualdades regionales y el PIB per cápita a nivel nacional, desarrolla una metodología semiparamétrica propuesta por Robinson (1988), que requiere un estimador *kernel* de regresión. Esto supone la consideración de dos efectos: (i) por una parte, una función desconocida, en términos de determinadas variables, representa el comportamiento no lineal; mientras que (ii) se asume que otro conjunto de variables explicativas tiene un efecto lineal en la renta. La metodología de trabajo se escinde en dos partes: (i) en primer lugar se estiman los coeficientes del término lineal empleando OLS; y (ii) se estima la función de regresión en un punto determinado aplicando mínimos cuadrados ponderados, de modo que zonas cercanas poseen mayor influencia que las alejadas. El problema, de nuevo, es que el procedimiento en sí

requeriría la elección de distintos parámetros que modelan el ancho de banda de los intervalos empleados. Autores como Härdle (1990) o Fox (1990) plantean alternativas para la identificación de los puntos extremos. Monfort (2008) señala como criterio habitual en este contexto la aplicación del método de optimización *Asymptotic Mean Integrated Squared Error*. Mediante esta técnica el autor detecta una variación significativa en la distribución del PIB per cápita regional en los países EU-27, durante el período 1995-2005, dado que evolucionaría de un comportamiento bimodal a otro unimodal. Como se describirá en el estudio de los clubs de convergencia, la mayoría de estudios identifican síntomas de polarización en el contexto europeo a lo largo de las dos décadas finales del siglo XX: de este modo, a finales de los noventa existiría un *cluster* de países pobres, caracterizados por un nivel estacionario bajo (en torno al 40% de la media), y otro de naciones más ricas (alrededor del 110% de la media) en convergencia hacia un estado superior. El análisis de Monfort (2008) supondría un cambio radical de la distribución, dado que implica descartar la existencia de clubs con este comportamiento.

Otra herramienta de índole visual es el análisis de frecuencias acumuladas; es decir, la consideración del porcentaje de unidades observadas cuyo valor cae por debajo de una determinada referencia. En la Figura 3.15 se representan las distribuciones de frecuencias acumuladas del PIB per cápita para las regiones EU-28 en los años 2000 y 2011. En base a su construcción, se puede inferir que una mayor inclinación de la curva de frecuencias se corresponde con menores desigualdades en la distribución. En ese sentido, y en consonancia con otros resultados expuestos en el capítulo 1, las diferencias entre las regiones estarían disminuyendo a lo largo de la última década.

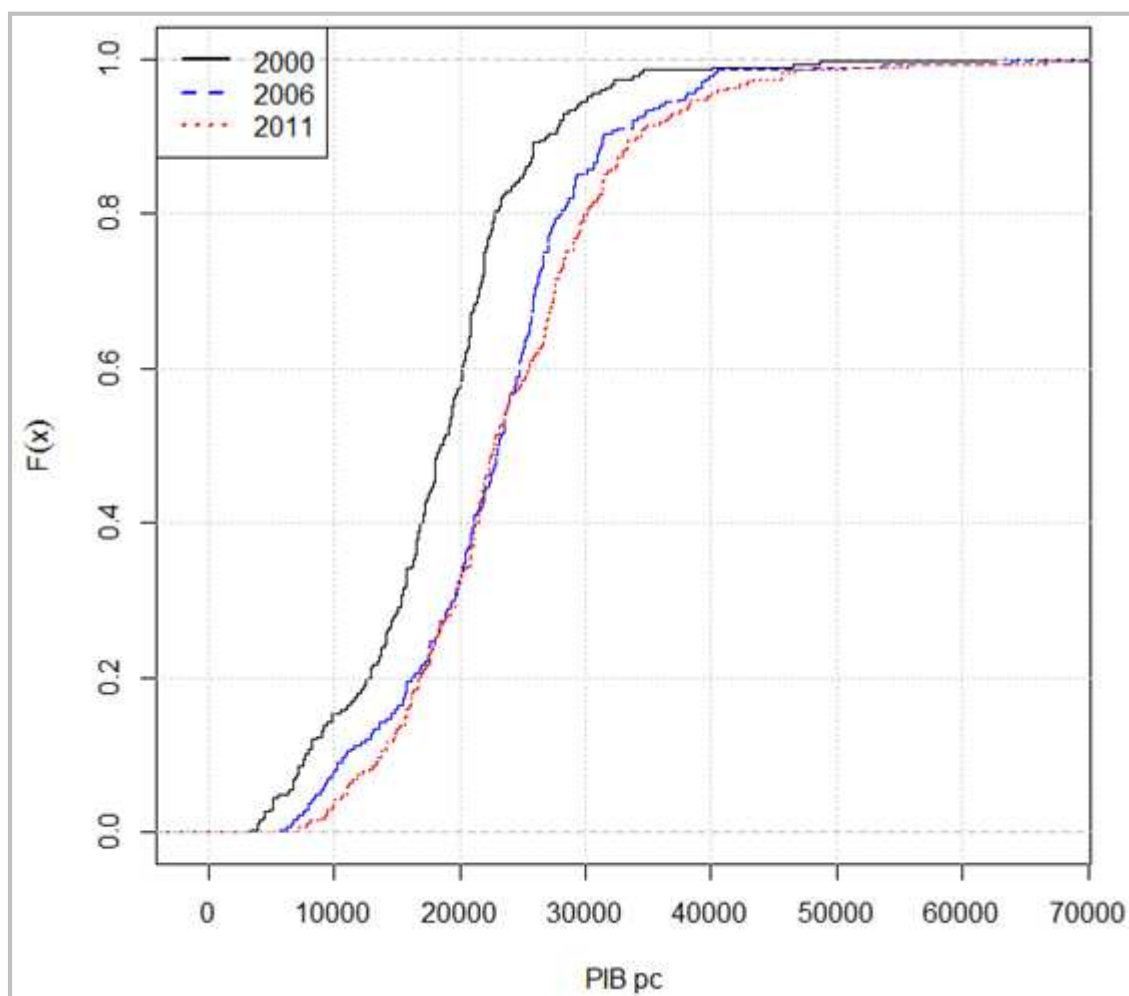


Figura 3.15. Distribuciones de frecuencias acumuladas correspondiente a EU-28 (NUTS 2). Años 2000, 2006 y 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Monfort (2008) describe, por último, en este ámbito visual, las gráficas de Salter, que consisten en representar las regiones en el eje horizontal, de manera ordenada, según los valores del PIB per cápita en un determinado año y, a partir de ahí, manteniendo este ranking, añadir nuevos valores de las rentas en períodos posteriores. Esto permite visualizar los cambios en la distribución regional del PIB y detectar determinados patrones de convergencia o divergencia. En este caso la tendencia de las curvas a ser más horizontales revela una menor desigualdad dentro de la distribución. En la siguiente figura se representa la comparación entre las rentas per cápita en las regiones EU-28 en el año 2011 frente a la ordenación existente en el 2000.

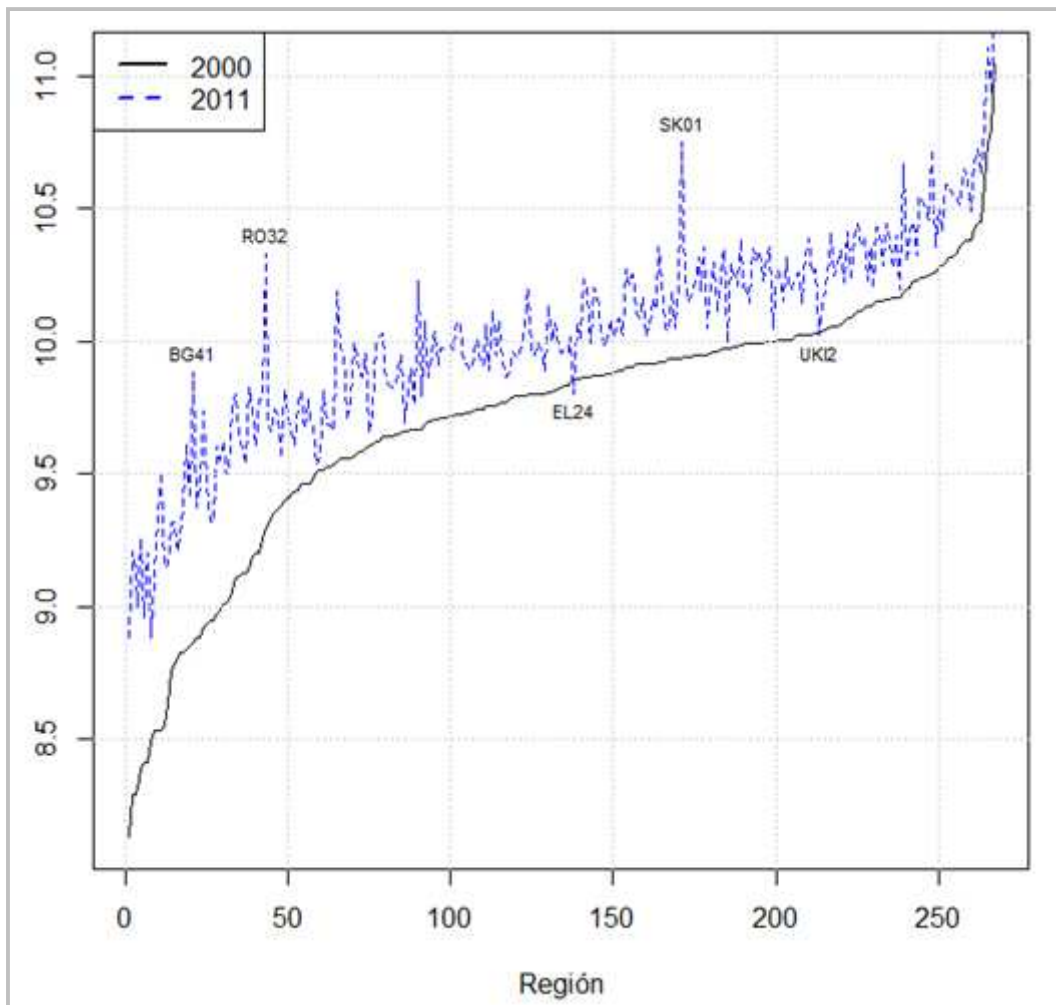


Figura 3.16. Gráfica de Salter de la dispersión en 2011 de EU-28 (NUTS 2) frente a 2000 como año base.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Las zonas de la gráfica que se encuentran a la izquierda corresponden a las regiones más pobres, de modo que el valor del PIB per cápita asociado aumenta hacia la derecha. A fin de considerar distintas situaciones se han destacado, en primer lugar, las áreas BG41 (Yugozapaden, en Bulgaria), en la que el PIB per cápita aumenta casi el triple (2.76) entre el año inicial y final, y RO32 (Bucuresti – Ilfov<sup>88</sup>, en Rumanía, región en la que se incluye la capital), con un incremento en esta variable de 2.8. Como ejemplo de economía intermedia, EL24 (Sterea Ellada), en Grecia, experimenta una reducción de la renta per cápita, muy significativa en la escala relativa de representación (aunque desde un punto de vista cuantitativo, la ratio correspondiente a los valores en el año final frente al inicial toma el valor 0.94). La revisión del PIB durante la primera década del siglo XXI permite confirmar que la tendencia negativa en esta región, hacia el decrecimiento, se inicia en 2008. Por su parte, SK01 (Bratislavský kraj, en Eslovaquia) duplica (2.26) la renta en el período, durante el que, por

<sup>88</sup> Según fuentes de Eurostat, sólo seis regiones superaron el umbral del 75% empleado para los Fondos Estructurales entre 200 y 2009, entre las que se encuentran Yugozapaden, Bucuresti-Ilfov y, por ejemplo, Andalucía.

cierto, se produce la incorporación del país a la EU. Finalmente, una unidad rica, como UK12 (la periferia de Londres) se mantiene prácticamente en el mismo nivel de renta real.

En un estudio similar de Monfort (2008) se incorpora una curva de ajuste de las series, en base a un desarrollo en polinomios, que facilita el análisis gráfico. La evolución de las curvas parece confirmar que se está produciendo un proceso de convergencia. Es posible pensar en un fenómeno de *catching-up* genérico porque el movimiento de desplazamientos hacia arriba en la zona de regiones pobres es superior a los desplazamientos descendentes en la parte rica. Al igual que Monfort (2008), en nuestro estudio también se identifican unidades con bajos niveles de renta en 2000, que experimentan un retroceso económico en 2011, y regiones ricas que continúan incrementando su PIB per cápita entre los dos extremos; es decir, no existe uniformidad absoluta en los distintos ámbitos de rentas.

Técnicas como las mostradas, y otras similares, focalizadas en la revisión visual, permiten identificar de manera intuitiva la evolución de las variables que se analizan, pero, como contrapunto, se encuentran limitadas desde el punto de vista numérico: (i) no ofrecen medidas características de las dinámicas de la distribución y (ii) sobre todo, carecen de la posibilidad de aplicar test estadísticos de hipótesis. Monfort (2008) señala las cadenas de Markov como herramienta básica de cuantificación de la distribución. Esto exige una división no solapada en intervalos de PIB per cápita y la determinación de una matriz de probabilidades de transición entre las distintas categorías identificadas. Dado el potencial de este instrumento bajo el enfoque espacial (justificado por la importancia de la influencia de regiones vecinas en los movimientos regionales de renta), se traslada al capítulo cuarto la descripción genérica de esta herramienta, así como su aplicación al estudio del proceso de convergencia considerando los condicionantes geográficos.

## 3.8 Estudios empíricos en la Unión Europea

### 3.8.1 Diversos análisis existentes en la literatura

En este apartado se consideran, por una parte, estudios centrados en el conjunto de la Unión Europea, bajo distintos enfoques; y, por otro lado, análisis particulares de algunos países de este entorno. La revisión no se plantea, en modo alguno, de manera exhaustiva, dado el volumen y disparidad de la información existente. En este contexto el interés se centra en la identificación de los enfoques y desarrollos de las investigaciones y de los tratamientos específicos de datos.

Barro y Sala-i-Martin (2004) recupera un estudio del año 1991 en el que se analizaba la convergencia en 90 regiones de 8 países europeos: 11 en Alemania, 11 en Reino Unido, 20 en Italia, 21 en Francia, 4 en Países Bajos, 3 en Bélgica, 3 en Dinamarca y 17 en España. Se consideraba para ello, con mínimas modificaciones, el PIB per cápita. El período histórico considerado se extiende desde 1950 a 1990<sup>89</sup>: se consideran cuatro sub-períodos, con intervalos de diez años en cada uno. Las regresiones consideran dos aspectos: (i) variables

---

<sup>89</sup> En España el período se restringe a 1955-1987.

ficticias nacionales, con el objeto de identificar las diferencias de los valores del ratio de progreso tecnológico y del nivel de renta en el estado estacionario; y (ii) porcentajes sectoriales y variables ficticias nacionales.

En la siguiente tabla se relacionan los resultados más significativos:

Período considerado	Ecuación con variables ficticias nacionales	Ecuación con componentes sectoriales y variables ficticias
Cuatro sub-períodos	$\hat{\beta}_{min} = 0.010$ (0.004) $\hat{\beta}_{max} = 0.023$ (0.009) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.019$ (0.002)	$\hat{\beta}_{min} = 0.007$ (0.005) $\hat{\beta}_{max} = 0.034$ (0.009) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.018$ (0.003)

Tabla 3.12. Análisis de convergencia entre regiones europeas. Período 1950 a 1990.

Fuente: elaboración a partir de Barro y Sala-i-Martin (2004).

En la primera regresión la hipótesis de  $\beta$  constante a lo largo de los cuatro sub-períodos no se rechaza, porque el estadístico asociado toma el valor 4.9 (p-valor = 0.179)<sup>90</sup>. El valor agregado de  $\beta$  corresponde, prácticamente, a la constante universal del 2%.

La representación del ratio de crecimiento del PIB per cápita frente al PIB per cápita inicial (en términos logarítmicos) muestra una relación negativa, con un valor de correlación de -0.72. El ratio de crecimiento y el nivel de PIB per cápita se miden en relación a la media de los países, por lo que los autores deducen que se verifica  $\beta$ -convergencia absoluta para las regiones en el interior de los países, más que entre los estados.

La segunda regresión considera el porcentaje de agricultura e industria en el empleo total (tres primeros sub-períodos) o en el PIB (cuarto intervalo); estos valores se incorporan para medir la componente estructural. De nuevo, el valor agregado de  $\beta$  se identifica con el 2%. El estadístico relativo al test de constancia de los coeficientes toma, de manera sorprendente, un valor superior al correspondiente en la regresión sin términos sectoriales: 8.6 (p-valor = 0.034). En otros estudios de los mismos autores, como los relativos a USA o Japón, la incorporación de los elementos estructurales estabilizaba los coeficientes  $\beta$ , por lo que, como conclusión, se identificaba el interés de revisar los datos empleados en la composición sectorial (y descartar errores).

En el análisis también se estiman los valores individuales de  $\beta$  para los cinco países de mayor tamaño. Para ello se consideran los cuatro sub-períodos temporales ya indicados y se incorporan las variables ficticias (que cambian entre intervalos) así como los porcentajes sectoriales (los parámetros varían entre cada sub-período, pero no entre las naciones). Cada coeficiente  $\beta$  puede ser diferente a nivel de país, como es lógico, pero se estima un único valor para todo el horizonte temporal. La siguiente tabla reproduce las estimaciones obtenidas:

<sup>90</sup> El p-valor procede en este caso, al considerar cuatro intervalos, de una distribución  $\chi^2$  con tres grados de libertad.

País	Estimación de $\beta$
Alemania	0.0224 (0.0067)
Reino Unido	0.0277 (0.0104)
Italia	0.0155 (0.0037)
Francia	0.0121 (0.0061)
España	0.0182 (0.0048)

Tabla 3.13. Estimación del coeficiente individual  $\beta$  para cinco países europeos  
Fuente: Barro y Sala-i-Martin (2004).

Se aprecia que, de nuevo, los valores de los coeficientes se encuentran en torno al 2%: varían desde el 1.21% de Francia hasta el 2.77% de Reino Unido. El test sobre la igualdad de los coeficientes  $\beta$  muestra que no se puede rechazar la hipótesis de idéntica velocidad regional de convergencia.

Barro y Sala-i-Martin (2004) analiza también la  $\sigma$ -convergencia de las regiones dentro de los cinco países indicados; el estudio se centra en la desviación estándar del logaritmo del PIB per cápita en el intervalo indicado (1950-1990). La tendencia general es de reducción de la dispersión, con pequeñas fases de crecimiento en Alemania y Reino Unido a partir de 1970, coincidiendo con la crisis del petróleo. Los valores de  $\sigma_t$  en 1990 eran<sup>91</sup>: 0.27 (Italia), 0.22 (España), 0.19 (Alemania), 0.14 (Francia) y 0.12 (Reino Unido).

En su revisión de medidas y evolución de la convergencia en los países europeos, Monfort (2008) destaca que los resultados empíricos obtenidos suelen estar condicionados tanto por las observaciones como por la propia especificación de partida: es decir, si se investiga la convergencia en términos absolutos o relativos<sup>92</sup>, variables seleccionadas para modelar la influencia en la ratio de crecimiento, consideración de factores espaciales... Esto provoca una amplia diversidad de inferencias, tal y como se comprueba en los limitados exámenes incorporado al presente trabajo. El autor citado extrae sus propias conclusiones sobre los procesos de convergencia en EU:

- Se constata la hipótesis de  $\beta$ -convergencia entre las regiones europeas, tanto a nivel EU-15 como EU-27.
- La velocidad de convergencia varía entre los períodos considerados. En la década de los ochenta esta velocidad fue menor que en intervalos previos y posteriores.
- Del mismo modo, la velocidad de convergencia que se obtiene al trabajar con modelos de convergencia absoluta es menor que la asociada a modelos de convergencia relativa. Esto reflejaría el resultado asociado a la comparación de los procesos de crecimiento entre regiones de un mismo país y de naciones distintas.
- La inclusión de efectos espaciales también proporciona una estimación inferior de la velocidad, aunque refuerza la noción de incremento de la convergencia entre las regiones europeas más pobres.

<sup>91</sup> El año exacto es 1987 en el caso de España.

<sup>92</sup> Como se ha visto en secciones previas, las ecuaciones que modelan estos efectos son distintas y deben emplearse de manera diferenciada en función del efecto que se pretende analizar.

En este mismo estudio se analiza la  $\sigma$ -convergencia en las regiones europeas a nivel NUTS 2, en los períodos 1980-2005 (EU-15) y 1995-2007 (EU-27). Para ello se emplean las cinco medidas de desigualdad consideradas en la revisión de Monfort (2008), lo que permite comparar el alcance y las conclusiones obtenidas. Los datos son extraídos de nuevo de Eurostat.

La evolución del coeficiente de variación de la renta muestra una fuerte convergencia de los países EU-15 hasta mediados de los 90, con una reducción del valor del  $CV$  desde 0.33 hasta 0.28. A partir de 1996 el término permanece fluctuando en torno a esta cifra. En el caso EU-27 el  $CV$  disminuye rápidamente desde 0.43, en 1995, hasta 0.35, en 2005, con una aparente tendencia a seguir esta tendencia. Monfort (2008) señala que los observadores concluyen que el proceso de convergencia continúa desarrollándose a nivel EU-27 debido a la integración de los nuevos miembros, más pobres, de la EU, que perseguirían a los ricos. La convergencia se habría detenido entre los países EU-15.

En la línea expuesta, el patrón de comportamiento a nivel de cada nación no se correspondería con el del conjunto. El  $CV$  particular de los nuevos Estados-miembro indica un incremento de las diferencias: en Rumanía, por ejemplo, este índice aumenta de 0.15 en 1995 hasta 0.40 en 2005. Por tanto, como se señala ampliamente en nuestro estudio, las diferencias locales constituyen un elemento central en la consideración de los procesos de crecimiento.

Respecto al índice de Gini, las diferencias entre países EU-15 se reducen de manera ininterrumpida desde el 17.7% en 1980 hasta el 14.6% en 2005 aunque, de nuevo, mediados de los noventa representa la frontera temporal que limita el período de máximos cambios. La disminución de desigualdades del PIB per cápita a nivel EU-27 es más rápida: 24.4% en 1995 hasta 21.2% en 2005. Se observa, como en el caso del  $CV$ , un crecimiento de la dispersión asociada al coeficiente  $G$  entre nuevos Estados-miembros.

Resulta de interés comparar estos resultados con los obtenidos por Albu (2012) al medir el proceso de convergencia en la EU a través de los índices de Gini. En este estudio, centrado en el período 2000 a 2011, se trata el inicio de la crisis de finales de la primera década del siglo XXI, cuya presencia se omite en Monfort (2008).

En primer lugar se determina la curva de Lorenz de la EU en los dos años extremos. La comparación muestra una disminución en el tiempo del área encerrada por ésta y la diagonal, lo que implica que se ha producido un proceso de convergencia. Este primer resultado se confirma con las distintas estimaciones de  $G$  o de índices relacionados:

- La determinación del coeficiente a través del cálculo de las áreas muestra que  $G$  disminuye de manera continua desde el 18.0% en 2000 hasta el 13.2% en 2009; en 2010 aumenta de manera leve, alcanzando el 13.6%, y vuelve a decrecer hasta el 13,0% en 2011.
- El método de interpolación revela una reducción desde el 15.8% hasta el 12.2%, con algunos repuntes. El mínimo se alcanza en 2009, con un 11.7%, y los incrementos se producen en 2010, con el 12.3%, y en 2011, con el 12.2%.



- Por último, el índice  $RH$  también decrece de manera continua: 13.0% en 2000 hasta el 8.7% en 2011.

Todos estos resultados muestran un proceso de convergencia robusto y muy significativo, a pesar del impacto negativo de la crisis, concretado en los suaves incrementos de los coeficientes al final del período.

El tercero de los análisis de  $\sigma$ -convergencia en las regiones EU-27 NUTS 2, a cargo de Monfort (2008), se centra en la familia de índices de Atkinson, considerando los siguientes tres valores de  $\varepsilon$ : 0.50, 0.75 y 0.90. Las tres medidas decaen bruscamente al principio del período, aunque el valor del salto se incrementa con la aversión a la desigualdad. Monfort (2008) interpreta que el efecto dominante se asocia al enriquecimiento general de las regiones.

Por su parte, el cuarto de los estudios, correspondiente a la evolución del primer índice de Theil, vuelve a mostrar una reducción de las diferencias entre los países de la EU. El potencial de esta medida reside en la diferenciación de los fundamentos del proceso. En este caso se aprecia que el factor clave de la disminución global es el fuerte decrecimiento de las desigualdades inter-grupales. Las diferencias intra-grupales, o sea, en el seno de las regiones, aumentan, aunque débilmente. Este resultado concilia resultados previos que señalaban una reducción general de las desigualdades a nivel EU aunque coincidiendo con incrementos en las diferencias internas de algunos estados. El ratio  $\frac{T_r}{T}$  representa el porcentaje de desigualdades intra-grupales y fluctúa entre el 30% en 1995 y el 35% en 2005, con ligeros aumentos y disminuciones a lo largo del período (aunque concluye por encima del nivel inicial). Por su parte,  $\frac{T_c}{T}$  se centra en las diferencias inter-grupales y, como se ha indicado, decrece en el tiempo: desde el 70% en 1995 hasta el 56% en 2005 (14 puntos porcentuales en diez años).

Finalmente los resultados correspondientes al segundo coeficiente de Theil,  $MLD$ , muestran un comportamiento muy similar al del primero. Las diferencias globales se redujeron durante el período de estudio (desde el 76% hasta el 63%) debido al predominio del componente entre países,  $MLD_c$ . A nivel intra-grupal ( $MLD_r$ ) estas diferencias aumentaron levemente (con un valor inicial del 24% y final de 37%).

El estudio más reciente sobre convergencia en el ámbito europeo al que se ha tenido acceso corresponde a Eurostat y fue publicado el 23 de marzo de 2015 (PIB Eurostat, 2015). Podemos destacar, en primer lugar, ciertos aspectos de la distribución del PIB regional per cápita:

- La diferencia en el año 2008 entre la unidad con renta más baja frente a la más rica era de 12.2:1 (coincidente con nuestros resultados, tal y como se muestra en la Figura 1.11).
- Las regiones con alto valor del PIB per cápita suelen contener a la capital del país o encontrarse cerca (es un fenómeno también puesto de manifiesto en Monfort, 2008).
- Por el contrario, se detectan 68 regiones en 2009 con una renta per cápita inferior en un 25% o más a la media de la EU-27; 20 unidades geográficas se localizan en 6 Estados-miembros de la EU-15 (España, Francia, Grecia, Portugal, Reino Unido e Italia),

mientras que las 48 restantes corresponden a los 12 Estados-miembros adheridos con posterioridad a 2004 (cada uno de estos países poseían al menos una región con esta característica).

El estudio citado analiza la convergencia en el seno de la EU durante los primeros nueve años del siglo XXI y concluye indicando que se ha producido un aumento de esta característica. Se consideran, en este sentido, las aproximaciones basadas en dos elementos:

- La evolución de la relación entre los valores superiores e inferiores del PIB per cápita, mediante un análisis similar al expuesto en el capítulo primero; en la sección 1.3.2 se veía cómo este procedimiento sólo considera relaciones extremas, por lo que no permite profundizar en las características de la distribución.
- El examen de la dispersión, revisando las divergencias del PIB per cápita regional con respecto a la media nacional y ponderando en función de la población. Se comprueba que este nivel de diferencias se incrementa en los nuevos Estados-miembros (en especial en Bulgaria), así como en Grecia y, más débilmente, en Francia, Irlanda, Portugal, Reino Unido y Suecia. En otros países, como Alemania, Austria, Bélgica, Dinamarca, España, Finlandia o Italia se redujo este índice. El resultado global de los dos efectos confrontados se concreta finalmente en un aumento de la convergencia regional durante el período citado.

En el contexto de estudios supranacionales, Persson (1997) analiza la posible convergencia de la renta per cápita en los 24 municipios<sup>93</sup> suecos durante el período 1911-1993, aunque hay vacíos de información en los años 1913 a 1915, y 1917 a 1918. La medida observada es la renta bruta per cápita. Al no disponer de un índice de precios específico de cada municipio se opta por ajustar las rentas aplicando la deflación a través del índice nacional de precios al consumo. La diferenciación entre los *counties* se basa únicamente en los precios de las viviendas.

Los resultados del análisis de la  $\beta$ -convergencia, considerando como variable dependiente el ratio de crecimiento medio de la renta anual per cápita, se representan en la siguiente figura:

Período considerado	Rentas ajustadas según las diferencias regionales en el precio de las viviendas	Rentas no ajustadas
1906-1990	$\hat{\beta} = 0.041$ (8.1)	$\hat{\beta} = 0.027$ (15.0)
1911-1990	$\hat{\beta} = 0.037$ (8.4)	$\hat{\beta} = 0.024$ (16.8)
1919-1990	$\hat{\beta} = 0.039$ (9.4)	$\hat{\beta} = 0.027$ (16.2)
Ocho sub-períodos <sup>94</sup>	$\hat{\beta}_{min} = 0.003$ (0.3) $\hat{\beta}_{max} = 0.066$ (10.8) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.037$ (26.9)	$\hat{\beta}_{min} = 0.001$ (0.1) $\hat{\beta}_{max} = 0.060$ (8.3) $\hat{\beta}_{agreg} = 0.032$ (31.3)

Tabla 3.14. Regresiones de crecimiento de la renta entre *counties* suecos (rentas ajustadas y no ajustadas al precio de las viviendas).

Fuente: Persson (1997).

<sup>93</sup> Se emplea esta traducción para el término *counties*, al no existir equivalencia exacta en nuestro ámbito.

<sup>94</sup> Corresponden a 1906-1916, 1919-1930 e intervalos de 10 años a partir de 1930.

Los valores entre paréntesis corresponden a los t-estadísticos. El método de estimación empleado en los tres intervalos que llegan hasta 1990 corresponde a mínimos cuadrados no lineales. Estos resultados no parecen afectados de manera severa por los errores de medida, dado que las estimaciones de los coeficientes son muy similares.

Persson (1997) plantea el estudio de los sub-períodos como un test de solidez. Para ello se utiliza un método de regresión no lineal, que proporciona que los valores de los coeficientes son significativos y positivos en casi todos los intervalos: la excepción es 1980-1990, con  $\hat{\beta}$  cercano al cero. El coeficiente agregado para todos los sub-períodos es  $\hat{\beta} = 0.037$ . Sin embargo, el estadístico que mide la probabilidad de igualdad de los coeficientes en el intervalo completo alcanza un valor de 32.2 (p-valor = 0,000)<sup>95</sup>, por lo que esta hipótesis es rechazada al nivel del 5%.

Las estimaciones obtenidas cuando no se procede al ajuste de las rentas muestran valores inferiores de los coeficientes de convergencia. Esto se debe a que los municipios más ricos poseen los costes de viviendas más elevados. A su vez, estos coeficientes son ligeramente superiores al término del 2% que aparece en las investigaciones de Barro. Persson (1997) plantea que la no inclusión del coste de la vida, como sucede en dichos estudios, puede provocar un sesgo descendente en la estimación de  $\beta$ .

En este segundo caso el estadístico asociado a la probabilidad de igualdad de los coeficientes toma un valor de 2.3 (p-valor = 0,000). La hipótesis vuelve a ser rechazada.

La inestabilidad de los coeficientes sugiere incluir el componente sectorial en la ecuación de convergencia. En este trabajo sólo se incorporan los shocks asociados al sector agrícola (dada la ausencia de ciertos datos se elimina el estudio del período 1906-1990). Se aprecia en la Tabla 3.15 que los valores de los coeficientes resultan muy similares al planteamiento básico. El valor agregado para los ocho intervalos es  $\hat{\beta} = 0.046$ , superior al caso inicial, aunque el estadístico de probabilidad de igualdad es 18.0 (p-valor = 0.012), descartándose la hipótesis de similares velocidades de convergencia.

El estudio considera el peso de otros tres factores en los resultados obtenidos: la política de solidaridad de salarios (que parece que no influye significativamente en la convergencia), las políticas públicas a nivel nacional (la redistribución de la riqueza desde los municipios ricos a los pobres a través de la acción gubernamental tampoco ha influido en el proceso) y los procesos migratorios. En la Tabla 3.15 se muestran los resultados obtenidos al incluir este último factor en la regresión del crecimiento de la renta. De este modo se aprecia que el coeficiente estimado desciende desde 0.039 (9.4) a 0.032 (4.9) en el período 1919-1990 cuando la migración neta se mantiene constante, lo que confirma su efecto positivo en la velocidad de convergencia (esta disminución es todavía más acusada en el intervalo 1911-1990). Aun así, la incidencia en el proceso no resulta especialmente significativa (la migración no explica gran parte de la convergencia) pero sí permite fijar el valor medio de la velocidad de

---

<sup>95</sup> El p-valor se obtiene de una distribución  $\chi^2$ ; en esta ocasión con siete grados de libertad.

convergencia en torno al 3%. La introducción del factor migratorio en la regresión provoca un problema de multicolinealidad en determinados períodos que debe tratarse con prudencia.

Período considerado	Presencia del componente del sector agrícola	Presencia de la migración
1911-1990	$\hat{\beta} = 0,033 (3,5)$	$\hat{\beta} = 0,022 (2,8)$
1919-1990	$\hat{\beta} = 0,037 (3,7)$	$\hat{\beta} = 0,032 (4,9)$
Ocho sub-períodos <sup>96</sup>	$\hat{\beta}_{min} = 0,016 (1,2)$ $\hat{\beta}_{max} = 0,124 (4,3)$ $\hat{\beta}_{agreg} = 0,046 (9,6)$	$\hat{\beta}_{min} = -0,007 (-0,6)$ $\hat{\beta}_{max} = 0,099 (5,2)$ —

Tabla 3.15. Regresiones de crecimiento de la renta entre counties suecos (presencia del sector agrícola y de la migración)

Fuente: Persson (1997).

Por otra parte, la desviación estándar del logaritmo de la renta per cápita decrece desde 0.45 en 1906 hasta 0.03 en 1993, por lo que hay presencia de  $\sigma$ -convergencia. Esta disminución no se produce de manera monótona, dado que en ciertos intervalos la dispersión aumenta. El patrón de evolución es similar al detectado en las mismas épocas en USA (estudios de Barro), Japón y países de Europa occidental.

Henning, Enflo, y Andersson (2011) considera un horizonte temporal más amplio, 1860 a 2009, para analizar el PIB por trabajador en las 24 *counties* suecas. Este análisis profundiza en los aspectos comunes de las trayectorias de crecimiento regionales a largo plazo: para ello procede a la descomposición de los patrones evolutivos y a la identificación de propiedades cíclicas y de tendencia.

Un planteamiento de notable interés en el contexto de la disgregación aparece en las aportaciones de Geary y Stark (2002) y se relaciona con los métodos simplificados de aplicación en la investigación para estimar el nivel regional del PIB. En la línea de trabajos anteriores, como Crafts (1983) o Bairoch (1989), los investigadores proceden a la identificación de un conjunto de variables, relacionadas de manera funcional con el output, y que se pueden emplear para predecir su nivel. El test para comprobar la validez del método consiste en comparar las estimaciones obtenidas con las oficiales y determinar si los errores se encuentran dentro de las tolerancias fijadas (en este caso se considera el 10%). La parte empírica de este estudio consiste en el análisis del PIB de los cuatro países integrantes de Reino Unido durante los años comprendidos entre 1861 y 1911, centrándose en la evolución de esta variable en Irlanda, en un período trascendental para su devenir histórico.

El análisis se articula en torno al problema clásico en este contexto, el comportamiento del crecimiento de una economía pobre frente a otra rica. En efecto, la pregunta inicial de Geary y Stark (2002: 919) es: “*What happened to Ireland’s GDP after economic union with Britain?*” Como se ha visto, frente a esta cuestión los modelos neoclásicos predicen convergencia condicional si los países implicados tienen características económicas similares. Otros investigadores relacionan el retraso económico del estado pobre con una mayor capacidad de *catching-up* y de adopción de la tecnología de las naciones más ricas. De hecho, las distintas

<sup>96</sup> Corresponden a 1911-1919, 1919-1930 e intervalos de 10 años a partir de 1930.

investigaciones desarrolladas sobre dicho período ofrecen conclusiones dispares, dentro de los dos márgenes expuestos.

Una alternativa al enfoque general de los estudios es la construcción de un amplio conjunto de indicadores de la renta, empleando datos sobre ratios de empleo, salarios, ganancias, etc. Esto exigiría un notable esfuerzo, por lo que Geary y Stark (2002) desarrolla un método alternativo, que permite generar estimaciones del nivel que, probablemente, presentaba el output real de Inglaterra, Gales, Escocia e Irlanda para los intervalos considerados en el período 1861-1911. El planteamiento de partida supone considerar el PIB de los cuatro estados como una variable agregada; de este modo, el PIB de *United Kingdom* se expresa como:

$$Y_{UK} = \sum_{i=1}^4 Y_i \quad (3.45)$$

El PIB de cada país se determina como  $Y_i = \sum_j y_{ij} L_{ij}$ , con  $y_{ij}$  el output medio por trabajador en el estado  $i$  y en el sector<sup>97</sup>  $j$ , y  $L_{ij}$  el número de trabajadores asociado. El valor agregado de output por trabajador en la industria  $j$  para UK se obtiene como  $y_j = \sum_i y_{ij}$ . Precisamente no existe disponibilidad de los datos relativos a  $y_{ij}$ , por lo que se postula que la relación entre  $y_{ij}$  e  $y_j$  es análoga a la existente entre los salarios abonados,  $w_{ij}$  y  $w_j$ . O sea, se supone<sup>98</sup>:

$$Y_i = \sum_j \left[ y_j \beta_j \left( \frac{w_{ij}}{w_j} \right) \right] L_{ij} \quad (3.46)$$

El término  $\beta_j$  es un escalar que preserva las diferencias relativas entre los países, normalizando los valores del PIB, de modo que la suma de los totales de cada país proporciona el global para UK. Su expresión es:

$$\beta_j = \frac{Y_j}{\sum_i \left[ y_j \left( \frac{w_{ij}}{w_j} \right) \right] L_{ij}} \quad (3.47)$$

El modelo se cierra fijando un valor de la ratio MPL/APL, donde MPL representa el producto marginal del trabajo (y es equivalente a los salarios, según la teoría económica) y APL constituye el producto medio del trabajo. La posible constancia de la elasticidad de sustitución de la función de producción, la existencia de retornos decrecientes de escala de dicha función o las imperfecciones del mercado afectan al valor de la ratio, lo que provoca un sesgo, que no es posible medir, en la estimación del PIB. Sin embargo, la comparación con estimaciones de carácter más oficial confirma que el método proporciona resultados aceptables.

Geary y Stark (2002) plantea dos medidas de convergencia entre Irlanda y Gran Bretaña:

<sup>97</sup> Los sectores considerados son agricultura, industria y servicios.

<sup>98</sup> Se asume, por tanto, que la productividad laboral de cada sector nacional se refleja en su salario sectorial.

- La primera es una medida relativa, que considera la evolución en el tiempo de la ratio PIB per cápita en Gran Bretaña frente al PIB per cápita en Irlanda; y de la ratio PIB por trabajador entre ambos estados. En caso de convergencia las dos ratios deberían moverse hacia la unidad: las estimaciones confirman este supuesto.
- La segunda medida corresponde a la diferencia absoluta entre el PIB per cápita, por un lado, y el PIB por trabajador, por otro, en los dos países. Una evolución convergente debería mostrar que estas diferencias disminuyen hacia el cero<sup>99</sup>. Sin embargo, el análisis de los datos muestra que no se verifica un movimiento a largo plazo en dirección a este valor.

La conclusión es que se percibe una convergencia débil, pero sin que llegue a manifestarse un proceso absoluto de *catching-up* por parte de Irlanda. Otros apartados del estudio permiten comprobar que en este estado el empleo decayó en el período considerado, aunque el crecimiento de output por trabajador fue superior al del resto de países del Reino Unido.

### 3.8.2 Estudio sobre $\sigma$ -convergencia en UE-28

En esta sección se expone el desarrollo de un estudio sobre  $\sigma$ -convergencia<sup>100</sup> en la Unión Europea, considerando los países integrantes en la actualidad. Se parte para ello de los datos de PIB per cápita por regiones (nivel NUTS 2), en el intervalo 2000 a 2008, obtenidos a través de Eurostat. En primer lugar se relacionan los valores agregados de los índices de convergencia analizados en 3.6.1.

	CV	Gini	Atk <sub><math>\epsilon=0.5</math></sub>	Atk <sub><math>\epsilon=0.7</math></sub>	Atk <sub><math>\epsilon=0.9</math></sub>	Theil	MLD
2000	0.411	0.241	0.053	0.081	0.099	0.101	0.117
2001	0.402	0.237	0.051	0.078	0.094	0.097	0.112
2002	0.395	0.230	0.048	0.073	0.089	0.092	0.105
2003	0.389	0.225	0.045	0.069	0.084	0.088	0.099
2004	0.386	0.219	0.043	0.065	0.079	0.084	0.093
2005	0.386	0.217	0.042	0.064	0.078	0.083	0.091
2006	0.382	0.212	0.040	0.061	0.074	0.079	0.086
2007	0.376	0.207	0.038	0.058	0.070	0.075	0.081
2008	0.374	0.206	0.036	0.055	0.066	0.073	0.076
2009	0.365	0.201	0.035	0.052	0.063	0.070	0.073
2010	0.369	0.203	0.035	0.053	0.063	0.070	0.073
2011	0.372	0.205	0.035	0.053	0.063	0.071	0.073

Tabla 3.16. Índices de  $\sigma$ -convergencia entre las regiones UE-28. Datos agregados.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

En las siguientes figuras se representa la evolución de estas medidas:

<sup>99</sup> La evolución hacia cero de la medida absoluta implica que la medida relativa tiende a la unidad. Lo contrario no es cierto.

<sup>100</sup> A diferencia de otros enfoques, se ha optado por un tratamiento separado de  $\beta$ -convergencia, introduciendo factores espaciales, que se incorpora al capítulo cuarto.

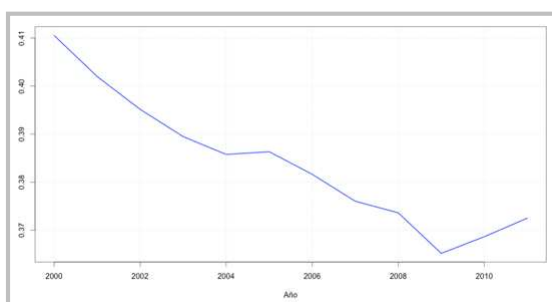


Figura 3.17. Evolución del coeficiente de variación. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

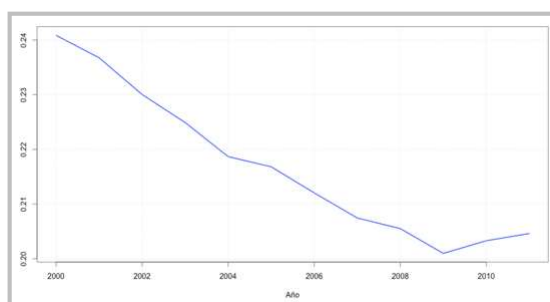


Figura 3.18. Evolución del coeficiente Gini. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

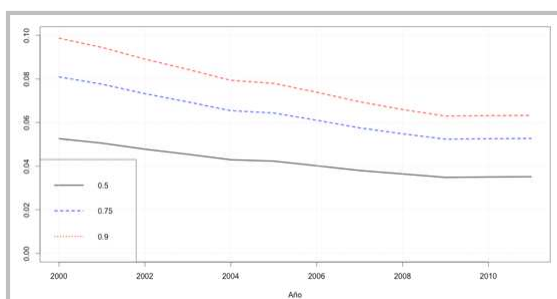


Figura 3.19. Evolución de los índices de Atkinson. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

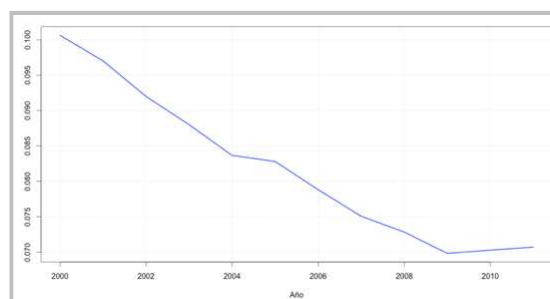


Figura 3.20. Evolución del índice Theil. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

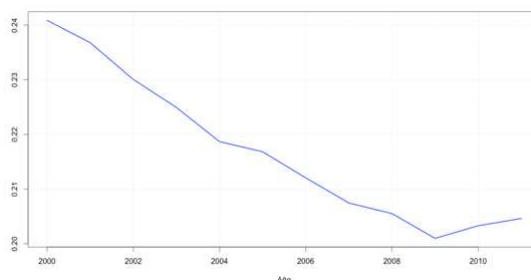


Figura 3.21. Evolución de la desviación logarítmica media. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

En línea con la exposición de Monfort (2008) todos los indicadores muestran un comportamiento muy similar: las diferencias se reducen durante el período 2000 a 2009, constatándose a partir de ese momento el estacionamiento o un leve crecimiento del proceso. No se dispone de una referencia temporal más amplia para constatar la dinámica entre 2011 a 2015, que ofrecería información significativa sobre la evolución de la crisis iniciada a finales de la primera década del siglo.

Se procede seguidamente al estudio de la descomposición de determinados índices. En este contexto se ha empleado la librería *IC2* de R. La evaluación de la contribución de cada componente puede establecerse en base a dos planteamientos: (i) bajo un enfoque *clásico*,

como el considerado en la revisión teórica, dividiendo cada componente por el indicador total; y (ii) empleando la aproximación de Elbers et al. (2005), *between-groups inequality*<sup>101</sup>, que evalúa diferencias particulares intergrupales frente a un estándar de máximas diferencias, que se obtiene al fijar el número y tamaños relativos de agrupaciones identificadas en el universo de estudio. En nuestro caso, la consideración de uno u otro criterio no implica diferencias significativas en los resultados finales, por lo que se opta por mantener (i).

El índice Gini se descompone, bajo los matices expuestos en 3.6.1, en el término intragrupal, intergrupar y residuo (se adjunta una última columna con el porcentaje del valor máximo del componente intergrupar detectado):

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergrupar	Residuo	Porcentaje intergrupar máximo
2000	5.9	68.0	26.2	68.7
2001	6.0	66.2	27.8	66.8
2002	6.1	66.3	27.6	66.8
2003	6.1	66.4	27.5	67.0
2004	6.2	67.7	26.2	68.3
2005	6.2	66.6	27.2	67.2
2006	6.3	65.5	28.3	66.1
2007	6.3	63.2	30.5	63.8
2008	6.5	60.6	32.9	61.2
2009	6.6	61.0	32.4	61.7
2010	6.6	61.0	32.4	61.7
2011	6.7	61.6	31.7	62.3

Tabla 3.17. Descomposición del índice Gini.

Fuente: elaboración propia

El elevado valor del residuo alerta de la existencia de solapes, por lo que se están considerando subgrupos con elementos repetidos en términos de renta. Esto implica que la interpretación debe considerarse bajo cautela: la disminución del porcentaje intergrupar supondría, en principio, una aproximación en términos del PIB entre las unidades agregadas, es decir, las naciones; en contraposición se experimentaría un aumento de las diferencias internas entre las regiones existentes en un mismo país, asociado al aumento del porcentaje intragrupal. El residuo representa en torno al 30% del componente del índice, lo que, insistimos, limita, en principio, el alcance de estas consideraciones.

En la siguiente figura se representa la evolución de los componentes; esto permite apreciar una leve variación de la tendencia a partir de 2008:

<sup>101</sup> Se denomina ELMO en la librería R.



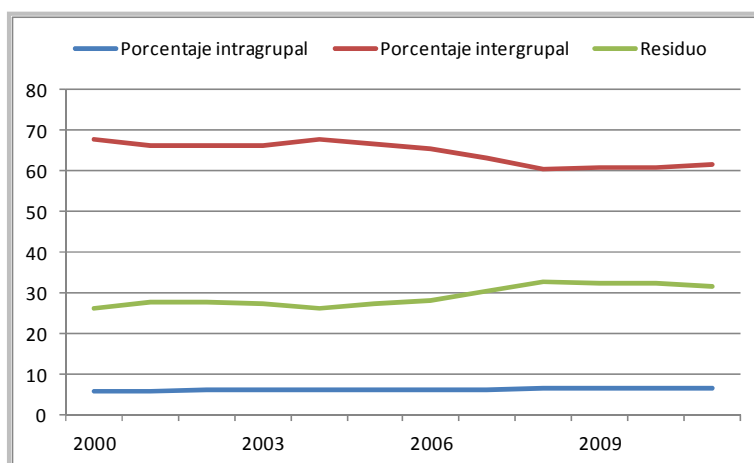


Figura 3.22. Evolución temporal de los componentes del índice Gini.  
Fuente: elaboración propia

Respecto al índice Theil:

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergrupales	Porcentaje intergrupales máximo
2000	36.7	63.3	64.2
2001	37.7	62.3	62.8
2002	39.4	60.6	61.0
2003	40.8	59.2	59.7
2004	42.0	58.0	58.6
2005	44.4	55.6	56.2
2006	45.7	54.3	54.9
2007	49.2	50.8	51.4
2008	54.4	45.6	46.3
2009	56.5	43.5	44.0
2010	57.2	42.8	43.5
2011	58.3	41.7	42.4

Tabla 3.18. Descomposición del índice Theil.  
Fuente: elaboración propia

En este caso la Tabla 3.18 muestra evidencias de un incremento de la dispersión entre las regiones que pertenecen a un mismo país, mientras que la disminución del porcentaje intergrupales subraya una aproximación, en términos de renta, entre los estados (los componentes máximos se encuentran en consonancia con esta idea). Se trata de un comportamiento *convergente-divergente* que reaparecerá al estudiar estos procesos mediante la introducción de consideraciones espaciales.

La Figura 3.23 permite comprobar que se produce una inversión en la ponderación de los componentes (en 2008); en este caso no se aprecia modificación en las tendencias de crecimiento y decrecimiento, por lo que parece que la crisis no habría afectado a la evolución de las diferencias intragrupal e intergrupales.

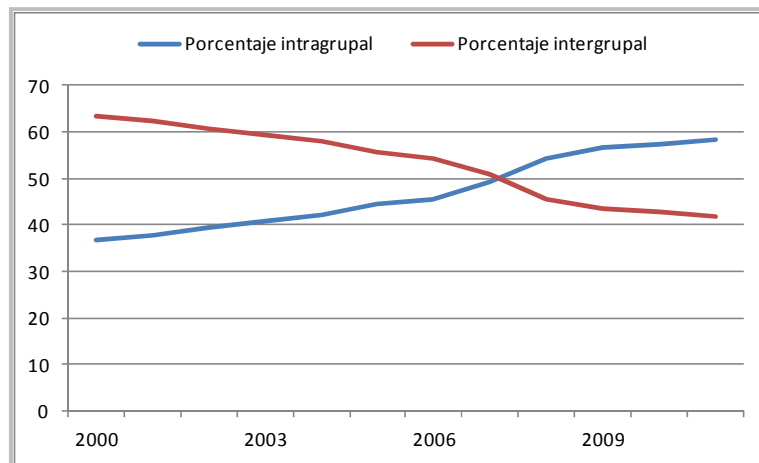


Figura 3.23. Evolución temporal de los componentes del índice Theil.  
Fuente: elaboración propia

La descomposición de la desviación logarítmica media resulta coherente con la evolución indicada:

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergruppal	Porcentaje intergruppal máximo
2000	29.4	70.6	71.6
2001	30.3	69.7	70.4
2002	32.4	67.6	68.2
2003	33.8	66.2	66.9
2004	35.4	64.6	65.4
2005	38.2	61.8	62.7
2006	40.1	59.9	60.7
2007	44.1	55.9	56.8
2008	49.5	50.5	51.3
2009	51.7	48.3	49.0
2010	53.1	46.9	47.6
2011	54.7	45.3	46.0

Figura 3.24. Descomposición del índice MLD.  
Fuente: elaboración propia

Tampoco en este caso se aprecia un efecto relevante de la crisis económica acaecida en torno al año 2008:

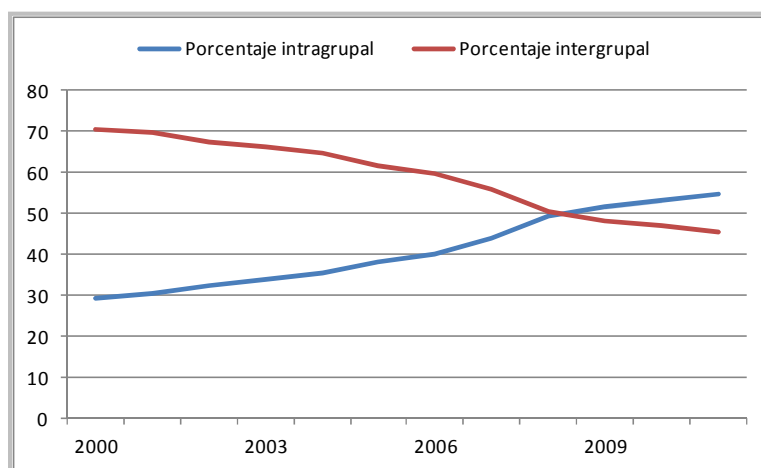


Figura 3.25. Evolución temporal de los componentes del índice MLD.  
Fuente: elaboración propia

En el anexo se incorporan las descomposiciones de la familia de índices de Atkinson, que no ofrecen más información de interés sobre la distribución y evolución de pesos de los términos intergrupales e intragrupal; en estos tres casos también aparecen términos residuales, aunque con una incidencia menor que en el indicador de Gini.

Finalmente nos hemos centrado en la contribución de cada país al índice Theil, lo que permite identificar la evolución de las desigualdades en cada ámbito específico. En la siguiente tabla se recogen los datos disponibles, desagregados temporalmente (en ciertos estados no se dispone de la información bajo este esquema):

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
AT	1,3	1,3	1,3	1,2	1,1	1,0	1,1	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8
BE	4,4	4,3	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8	3,5	3,1	3,3	3,3	3,1
BG	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	1,0	1,3	1,4	1,5	1,5	1,5
CZ	2,2	2,4	2,6	2,9	2,9	2,9	3,0	3,2	3,0	3,0	2,9	2,7
DE	15,6	15,9	15,4	15,4	15,0	13,9	13,7	12,8	11,1	10,3	10,2	10,6
DK	-	-	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6
EL	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	1,4	1,6	1,5	1,6	1,8	1,7	1,5
ES	6,1	5,9	5,7	5,3	5,3	4,8	5,1	4,9	4,6	5,1	4,7	4,7
FI	0,9	0,9	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,6
FR	13,3	12,7	13,2	13,1	12,1	12,0	11,8	12,1	14,1	14,0	15,5	15,2
HU	2,0	2,2	2,7	2,6	2,8	2,8	3,0	3,0	2,8	3,0	2,9	2,9
IE	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,6	0,6	0,6	0,7	0,6
IT	14,1	14,6	13,8	13,6	13,3	12,0	11,8	11,4	10,8	10,1	10,5	10,5
NL	1,1	1,1	1,2	1,1	1,2	1,2	1,2	1,0	1,2	1,1	1,1	1,1
PL	2,9	3,1	3,1	3,0	3,3	3,5	3,8	3,8	3,5	4,2	4,6	4,6
PT	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,5	1,3	1,4	1,3	1,2
RO	2,4	2,1	2,3	2,4	2,7	3,6	3,9	4,3	5,5	4,8	4,9	5,7

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
<b>SE</b>	1,2	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,0	1,3	1,0	1,1
<b>SI</b>	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
<b>SK</b>	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,9	1,8	1,9	1,7	2,1	2,0	2,1
<b>UK</b>	28,2	27,9	27,4	28,3	29,0	29,9	29,4	29,9	30,5	30,2	28,6	28,7

Tabla 3.19. Contribución nacional al índice Theil. Años 2000 a 2011.

Fuente: elaboración propia

Se observan comportamientos dispares. Debemos recordar que el índice Theil se caracteriza en este período por una tendencia notablemente descendente (atenuada al final del mismo), tal y como se percibe en Alemania o Italia; sin embargo, hay países como Bulgaria o Rumanía (con un histórico similar en cuanto a proceso de incorporación a la Eurozona), que aportan un incremento de la dispersión. El índice permanece estable en un amplio conjunto de estados, como Finlandia, Holanda o Suecia.

En la Tabla 1.1 se representa la contribución de cada país a la componente intragrupal, por lo que ofrece una visión directa de las desigualdades regionales:

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
<b>AT</b>	0,021	0,022	0,023	0,020	0,017	0,018	0,018	0,016	0,016	0,017	0,01,	0,015
<b>BE</b>	0,058	0,050	0,060	0,057	0,056	0,057	0,053	0,051	0,049	0,051	0,050	0,048
<b>BG</b>	0,021	0,026	0,034	0,037	0,040	0,043	0,059	0,076	0,080	0,091	0,094	0,088
<b>CZ</b>	0,050	0,056	0,059	0,063	0,061	0,063	0,064	0,068	0,071	0,068	0,070	0,066
<b>DE</b>	0,028	0,029	0,029	0,028	0,027	0,026	0,026	0,025	0,023	0,022	0,021	0,022
<b>DK</b>	-	-	-	-	-	-	-	0,014	0,014	0,015	0,019	0,018
<b>EL</b>	0,010	0,011	0,014	0,013	0,013	0,025	0,027	0,028	0,030	0,033	0,034	0,036
<b>ES</b>	0,027	0,026	0,024	0,022	0,021	0,019	0,019	0,019	0,019	0,021	0,021	0,022
<b>FI</b>	0,026	0,027	0,024	0,020	0,020	0,020	0,021	0,021	0,021	0,026	0,025	0,020
<b>FR</b>	0,033	0,032	0,033	0,033	0,030	0,031	0,031	0,033	0,041	0,040	0,045	0,045
<b>HU</b>	0,062	0,064	0,076	0,071	0,073	0,076	0,083	0,087	0,087	0,091	0,089	0,089
<b>IE</b>	0,022	0,023	0,022	0,021	0,017	0,019	0,015	0,018	0,019	0,019	0,023	0,023
<b>IT</b>	0,040	0,037	0,037	0,037	0,036	0,035	0,034	0,034	0,035	0,032	0,035	0,036
<b>NL</b>	0,009	0,009	0,010	0,009	0,010	0,010	0,010	0,008	0,010	0,010	0,010	0,010
<b>PL</b>	0,027	0,030	0,029	0,028	0,029	0,032	0,033	0,034	0,032	0,035	0,038	0,038
<b>PT</b>	0,030	0,029	0,032	0,032	0,033	0,034	0,034	0,033	0,032	0,033	0,032	0,031
<b>RO</b>	0,071	0,057	0,062	0,061	0,062	0,085	0,082	0,087	0,107	0,093	0,096	0,113
<b>SE</b>	0,019	0,017	0,017	0,016	0,018	0,019	0,017	0,017	0,017	0,023	0,018	0,020
<b>SI</b>	0,014	0,015	0,015	0,017	0,017	0,018	0,019	0,018	0,017	0,017	0,017	0,015
<b>SK</b>	0,072	0,074	0,079	0,079	0,080	0,102	0,094	0,096	0,088	0,105	0,102	0,109
<b>UK</b>	0,072	0,072	0,067	0,068	0,066	0,072	0,070	0,077	0,087	0,086	0,087	0,091

Tabla 3.20. Contribución nacional al componente intragrupal del índice Theil. Años 2000 a 2011

Fuente: elaboración propia

Entre los países que aportan un mayor peso al componente vuelven a estar presentes Bulgaria y Rumanía; por su relevancia destacamos también el comportamiento de Grecia: aunque ya contribuía de manera destacada al índice Theil en su globabilidad, la evolución de su participación en la componente intragrupal resulta muy significativa, en especial considerando el drama económico y social que atenaza a este país en los años 2014 y 2015, motivado por la crisis originada en 2008.

El caso español se caracteriza por una disminución de su participación en la desigualdad durante todo el período considerado y por una aportación relativamente estable a la componente intragrupal; la tendencia descendente se modifica, como en Polonia, Eslovaquia o Reino Unido, en el período de inflexión acaecido a finales de la primera década del siglo XXI.



---

## 4. Influencia de los efectos espaciales en los procesos de convergencia

---

### 4.1 Introducción

El último capítulo se enfoca a la importante problemática de la consideración de los efectos espaciales en los procesos descritos en secciones anteriores. Se plantea, en primer lugar, una revisión de la econometría espacial y de los condicionantes en los análisis de factores geográficos, que pueden afectar a la consistencia de los resultados. Tras la revisión de los dos efectos más importantes en este ámbito se procede a una revisión teórica y empírica de cinco líneas de trabajo, desarrolladas en los últimos años y que, bajo nuestra opinión, abarcan un amplio horizonte de estudios sobre dinámica espacial y convergencia, muy orientadas, como se verá, al tratamiento de agrupaciones:  $\beta$ -convergencia espacial, aplicaciones con cadenas de Markov, tratamiento de mixturas, procedimientos de clustering y modelos panel. Se señalan algunos resultados significativos alcanzados así como limitaciones identificadas en el tratamiento de determinadas temáticas.

### 4.2 El concepto de econometría espacial.

Son numerosos los estudios, como Arbia, Basile y Salvatore (2002), Rey y Janikas (2005) o Rey y LeGallo (2009), que expresan el contraste entre la intensa actividad investigadora en el análisis genérico de los procesos de convergencia y de la medida de su velocidad (por ejemplo, en el seno de la UE y en el contexto de identificación de barreras a la integración económica y monetaria) frente al desarrollo de estudios empíricos en los que se incorpora explícitamente el componente espacial. En el primero de los trabajos citados se indica que, a principios del siglo XXI, la mayoría de consideraciones prácticas se centraban todavía en determinadas medidas estadísticas básicas, en las que las características geográficas no reciben la importancia necesaria.

Realmente se percibe una doble controversia en este contexto: (i) por una parte, se ha incrementado la demanda de conocimiento sobre las medidas de reducción de las diferencias existentes entre las distintas economías o sobre sus tasas de crecimiento, en gran parte como consecuencia de la necesidad de conocer el alcance de las políticas en la EU (aunque el enorme aumento de estos estudios se extiende a países y regiones de todo el mundo); y (ii) las técnicas estadísticas espaciales, que proporcionan el fundamento de la aplicación de los estudios econométricos, se conocen desde mediados de los años cincuenta del siglo XX, a través de los trabajos de Moran, Geary o Wittle. Arbia (2006) aporta una relación de trabajos en los que se formula la teoría estadística de índole espacial, destacando los estudios seminales de Whittle (1954; 1962; 1963), la primera consolidación de estos textos a través de Ord (1973) y Bennet (1979), los desarrollos de los años ochenta, con Ripley (1981; 1988) y Upton y Fingleton (1985; 1989), y los correspondientes a los noventa y a principios del siglo XXI, como Haining (1990; 2003). En una frase citada por otros investigadores, como Rey y Le Gallo (2009), Arbia (2006: 3)

resume esta paradoja: “*spatial econometric methods were well developed in the literature, but the drama was that no one used them in the mainstream applied economic analysis!*”.

En una primera reflexión es posible pensar que la constatación de un menor número de estudios incluyendo componentes espaciales, respecto a lo que cabría esperar (a la luz de la literatura restante), se debe a que, simplemente, estas consideraciones no resultan básicas para las conclusiones obtenidas. En el capítulo anterior se han analizado diferentes medidas y procedimientos en los que dicha cuestión no se encuentra presente o lo hace de manera poco relevante. Arbia et al. (2002) señala que, en el fondo, los modelos de identificación de  $\beta$ -convergencia o de  $\sigma$ -convergencia se basan en cálculos, realizados sobre agregaciones espaciales (naciones, regiones...), con el objetivo de identificar coeficientes de regresión o determinar la varianza logarítmica, en los que se emplean métodos estándar como OLS<sup>102</sup>. En este mismo trabajo se llama la atención sobre dos aspectos que afectan a la posible validez de los resultados derivados de estos planteamientos: (i) los datos espaciales representan un nivel de agregación, asociado a circunstancias políticas e históricas, que se tiene que considerar en su justo alcance; la elección del tipo de partición empleado afecta a los resultados estimados (como ya se ha visto en secciones anteriores, al considerar el distinto impacto de las fuerzas de convergencia en función del tipo de territorio analizado); y (ii) en concreto, los datos regionales no pueden considerarse independientes, dada la presencia de elementos similares entre unidades vecinas. La consideración (ii) anula el asume básico de independencia, lo que puede conducir a la aparición de sesgos en las estimaciones realizadas. Respecto a (i), Arbia (1989) y Anselin y Rey (1991) advierten que un incorrecto emparejamiento entre el fenómeno a analizar y las unidades administrativas para las que se dispone de los datos puede provocar errores de autocorrelación espacial: en términos del segundo de los estudios citados, se trata de *ciertas molestias*, que deben ser eliminadas. Este es un caso particular de alteración no esférica, que no provoca sesgos en las estimaciones OLS, pero sí modifica el cálculo de la varianza (de la eficiencia, en definitiva). Las inferencias basadas en estas medidas sí se encontrarán sesgadas.

Como se indicaba anteriormente, a pesar del desarrollo existente de las herramientas estadísticas espaciales, su implementación en el ámbito econométrico constituye un proceso dilatado y, hasta cierto punto incompleto, en el tiempo. Arbia (2006) sitúa la identificación de una rama específica del conocimiento, identificada como *spatial econometrics*, a finales de la década de los setenta; Anselin (2010) considera el año 1979 como el hito en el que se inicia la nueva disciplina<sup>103</sup>. El término corresponde a Jean Paelinck, y se asocia a la siguiente definición, recogida en Paelinck y Klaasen (1979: vii)<sup>104</sup>: “*blend of economic theory, mathematical formalisation and mathematical statistics*” En este trabajo se distinguen cinco elementos característicos de su campo de estudio: (i) la interdependencia espacial; (ii) la asimetría de las relaciones espaciales; (iii) los factores explicativos de la distancia espacial; (iv)

<sup>102</sup> Anselin y Rey (1991) advierte que OLS no es un estimador consistente en este contexto, con independencia de la posible correlación que presenten los términos de error, debido a las características específicas de la dependencia bidimensional y bidireccional en el espacio.

<sup>103</sup> Se basa para ello en la publicación de otras importantes contribuciones, aparte de las realizadas por Paelinck: Bartels and Ketellapper (1979), Bennett (1979) y Hordijk (1979).

<sup>104</sup> En realidad, Jean Paelinck planteó el término, asociado al interés de crear este nuevo campo de conocimiento, en el Annual Meeting of the Dutch Statistical Association en Tilburg en mayo de 1974.



la diferenciación entre interacciones *ex post* y *ex ante*; y (v) el modelado explícito del espacio (su topología). Los primeros estudios, como Paelinck and Nijkamp (1975) o Klaassen, Paelinck y Wagenaar (1979)<sup>105</sup>, se centran en las teorías económicas subyacentes, dejando de lado los aspectos asociados a la estimación estadística y a los test de verificación de hipótesis (en esta fase inicial se mantienen centrados, casi en exclusiva, en OLS y Multiplicadores de Lagrange).

Anselin (1988: 7) aporta otra acertada definición de la econometría espacial: “*the collection of techniques that deal with the peculiarities caused by space in the statistical analysis of regional science models*”. Las diferencias con la econometría estándar obedecen a “*the specific spatial aspects of data and models in regional science that preclude a straightforward application of standard econometric methods*”, (Anselin, 1988: 8). Las primeras contribuciones en este campo centran su alcance en el modelado regional y urbano, como así confirmarían los desarrollos empíricos en décadas posteriores. Por otra parte, a pesar de la similitud y de la existencia de puntos en común con la geo-estadística y la estadística espacial, la econometría espacial posee un estatus especial y guarda un paralelismo con estas disciplinas similar al que experimenta la econometría respecto a la estadística convencional. Cressie (1993) distingue de manera explícita entre econometría espacial y el conjunto de temáticas consideradas dentro de la estadística espacial.

Precisamente las obras de Luc Anselin, publicadas desde principios de la década de los ochenta, contribuyen a un desarrollo notable de esta disciplina. Una breve revisión de las mismas permite identificar algunos de los ámbitos de trabajo desarrollados en este contexto, tanto en lo concerniente al campo teórico como al empírico. Arbia (2006) considera Anselin (1988) como el primer tratamiento amplio de la materia, en el que se investigan con suficiente profundidad temáticas básicas en este campo como la dependencia o la heterogeneidad espacial. En Anselin y Rey (1991) se analizan las propiedades del test *I* de Moran y de los Multiplicadores de Lagrange respecto al estudio de la dependencia espacial, lo que permite verificar el potencial de la segunda de las técnicas. Anselin (1995) se centra en las prestaciones de los estadísticos LISA (*local indicators of spatial association*), empleados en la descomposición de otros indicadores globales y que permiten la identificación de lo que aportan las distintas observaciones de la muestra. Por otra parte, Anselin, Varga y Acs (2000) considera los fenómenos de *spill-over* de carácter local que se detectan entre la investigación generada en la Universidad y las innovaciones de alta tecnología; para ello se consideran los efectos espaciales en el tratamiento de los datos desagregados por sectores. Anselin (2001) constituye una revisión de los fundamentos de la econometría espacial. Casi quince años después de la publicación de la definición expuesta, este autor identifica el objeto central de esta materia, al señalar que se ocupa de la autocorrelación espacial y de la heterogeneidad espacial en modelos *cross-section* y de panel.

Finalmente, Anselin (2006: 902) incorpora una destacada amplitud de miras en la definición y objetivos de esta disciplina, al identificarla como “*a subset of econometric methods that is concerned with spatial aspects present in cross-sectional and space-time observations*”.

---

<sup>105</sup> Como se puede apreciar, los primeros trabajos en este campo corresponden a investigadores holandeses, a los que posteriormente se unirían economistas británicas. El centro de desarrollos se trasladaría, en una segunda fase, a USA.

*Variables related to location, distance and arrangement (topology) are treated explicitly in model specification, estimation, diagnostic checking and prediction".* Siguiendo a este autor, las cuatro dimensiones en las que se concretan los objetivos de la econometría espacial se resumen en los aspectos que se tratan a continuación.

Por una parte en la especificación del modelo: con ello se hace referencia a la inclusión de la dependencia y heterogeneidad espacial en las expresiones matemáticas formales de los modelos de regresión. La dependencia espacial considera de manera habitual los efectos de sus vecinas en las variables en base a medias ponderadas (*spatially lagged variables*). Esto implica profundizar en la definición de vecindad y, por tanto, requiere considerar matrices de pesos espaciales. A su vez, la heterogeneidad espacial puede diferenciarse en discreta (los coeficientes del modelo adoptan un conjunto de valores pre-establecidos) o continua (estos coeficientes cambian en el espacio, con valores que se determinan en base a una forma funcional o a un proceso de estimación). Revisemos brevemente estas ideas.

- Estimación: los métodos más usuales en este ámbito corresponden a máxima verosimilitud y a momentos generalizados. Algunas aproximaciones consideran un tratamiento unificado de la dependencia y la heterogeneidad espacial; también se trabaja con aproximaciones bayesianas, aunque suelen resultar problemáticas, precisamente por los problemas asociados a la presencia de estos dos factores.
- Test de especificación: en este ámbito lo que se intenta es detectar posibles desviaciones respecto a modelos estándar que planteen la posibilidad de la existencia de elementos espaciales. Se han desarrollado diferentes test en línea con el clásico *I* de Moran, generalizados para la inclusión de residuos. Otras técnicas se relacionan con los Multiplicadores de Lagrange, las pruebas de puntuación de Rao o la aplicación de paneles de correlación.
- Predicción espacial: se trata de un campo menos desarrollado, aunque con un peso destacado en el campo de aplicación de la geo-estadística.

Continuando con la descripción del devenir histórico, Rey y Le Gallo (2009) señala la influencia de la reorientación de la literatura sobre el crecimiento hacia la dimensión regional, acaecida a principios de la década de los noventa. Constituyen ejemplos de este cambio estudios como: Carlino y Mills (1993), que encuentra evidencias de convergencia estocástica y de  $\beta$ -convergencia en las regiones estadounidenses durante el período 1929-1990; Neven y Gouyette (1995), centrado en las diferencias significativas que se encuentran en los patrones de convergencia entre sub-períodos del intervalo 1975 a 1990 entre regiones de la CEE, diferenciadas por su pertenencia al norte o al sur; o, por no extender en demasía estas referencias, Rey y Montouri (1999), donde se reconsidera la convergencia de la renta regional en USA bajo el enfoque econométrico espacial y se muestran los elevados valores de autocorrelación, que influyen en errores de especificación y en la generación de fenómenos de *spill-over* entre estados vecinos.

Estos y otros estudios focalizados en el ámbito regional se caracterizan por un tratamiento más amplio de la problemática del crecimiento respecto a los estudios tradicionales de índole nacional. En el nuevo marco de trabajo aparecieron otros elementos a considerar, como flujos de trabajo y de capital, intercambios comerciales o impacto de políticas comunes, que, en su

momento, provocaron una reflexión sobre la posible falta de desarrollo de métodos econométricos para el modelado de las interdependencias regionales. La reflexión de Rey y Le Gallo (2009: 1252) resulta muy esclarecedora: *“When confronted with evidence of spatial dependence and heterogeneity in regional growth sets, the strategy adopted by many researchers has been to remain in the closed-economy model but to adjust the closed model for these spatial effects”*. Sin embargo, como se ha indicado anteriormente, los métodos econométricos espaciales ya se encontraban desarrollados, pendientes de su aplicación en los diferentes planteamientos empíricos.

Otra analogía a considerar es el proceso de integración de las técnicas de series temporales con los estudios econométricos. En lo referente a la absorción de las ideas por parte del entorno de investigadores la evolución fue bien distinta. El trabajo seminal de Box y Jenkins (1970), en el que se contienen los desarrollos básicos de series univariantes, se incorporó de manera muy rápida a las investigaciones y, sobre todo, a los libros de texto sobre la materia – así al menos lo indica Arbia (2006). Este mismo autor comenta que este desarrollo acaecido con las series temporales no guarda similitud con la difusión de los tratamientos espaciales. Un destacado número de obras introductorias u orientadas a la docencia, publicadas en su mayoría en la década de los noventa, omiten la cuestión o le dedican escasa atención. Otra minoría de libros aborda la temática espacial, aunque centrándose, por lo general, en el problema de autocorrelación, y sin tratar diversos aspectos relevantes, como las nuevas técnicas de estimación o la aplicación de los test de verificación de hipótesis.

En lo que se refiere a los condicionantes de ambas tipologías de estudio –series temporales y efectos espaciales– diversos autores identifican una proximidad en el tratamiento. Arbia (2006) describe algunos de estos planteamientos: Johnson (1991) establece una analogía directa entre el marco temporal y la autocorrelación espacial, que puede presentarse en datos *cross-section*; Bataghi (2001: 197), por su parte, indica que *“Spatial dependence models may use a metric of economic distance which provides cross-sectional data with a structure similar to that provided by the time index in a time series”*. En Durlauf, Johnson y Temple (2005) se encuentra una reflexión similar, cuando se indica que los especialistas en este campo han desarrollado analogías espaciales respecto a conceptos empleados en series temporales. Para estos autores resulta más complicada la adaptación de métodos estadísticos espaciales al ámbito del crecimiento. El problema en estos casos suele ser la correcta identificación del término espacial que se debe emplear y del esquema de ordenación, difícil de precisar en datos *cross-section*.

Las conexiones temporales-espaciales no resultan tan directas o inmediatas como parece desprenderse de las citas. Anselin (2001) advierte que las propiedades de los estimadores de series espaciales no constituyen una simple extensión al campo bidimensional de los resultados obtenidos para series temporales (en una sección posterior se revisarán los factores que complican este proceso de derivación). Rey y Le Gallo (2009: 1253) coincide con esta apreciación al referirse a la problemática de la correlación espacial: *“spatial correlation is not a simple spatial analogue to temporal correlation, nor are the methods that have been developed in the spatial literature simple extensions of time series methods”*. Como se ha indicado en esta sección introductoria, la dependencia constituye sólo uno de los distintos

efectos espaciales que pueden encontrarse en el estudio de datos geo-referenciados. Anselin (2010) destaca que las cinco reglas planteadas en Paelinck y Klaasen (1979) recogen aspectos básicos de los efectos espaciales en las especificaciones econométricas, como la alotropía o la topología, que constituyen las principales diferencias entre series espaciales y series temporales.

En Arbia (2006) se hace referencia a otro importante hito en el desarrollo de la econometría espacial: la aparición de las teorías sobre “nueva economía geográfica”, asociadas al trabajo primigenio de Krugman (1991), Premio Nobel en Ciencias Económicas en 2008, en el que se hace referencia a la *localización de la producción en el espacio* y se introducen conceptos muy próximos al de externalidades espaciales. En este contexto tienen cabida desarrollos específicos de la econometría espacial, como los relativos a la convergencia regional o a la concentración de actividades económicas. Florex y Vlist (2003) destaca que las nuevas consideraciones respecto al espacio también aparecieron en otras disciplinas, como, por ejemplo, en la sociología: los planteamientos de la Escuela de Chicago o la reactivación de teorías de interacción social provocaron el interés por realizar investigación sobre fenómenos espaciales, a fin de identificar efectos de dependencia o de *spill-overs*. Estos autores también destacan la importante contribución de Internet al desarrollo de las técnicas econométricas espaciales, en principio al facilitar el acceso a una ingente cantidad de datos. Sin embargo hay algunos elementos subyacentes a considerar: (i) la posibilidad de trabajar en los modelos con información disponible en distintos niveles de agregación permitió profundizar en aspectos como la escala espacial y la identificación, asociados al problema de la unidad de área modificable; (ii) el incremento de datos disponibles hace viable la representación directa de modelos, caracterizados por funciones de estimación que decaen con la distancia. Por último, no se debe obviar que el desarrollo de programas informáticos más sencillos de usar, y también disponibles a través de la web, constituye otro elemento positivo en la evolución de las aplicaciones econométricas espaciales.

Como síntesis de la evolución expuesta, Anselin (2010) plantea el siguiente desarrollo histórico, en tres fases, de la econometría espacial:

Fases del desarrollo de la econometría espacial	Principales hitos
Precondiciones para el crecimiento: mediados de los setenta hasta finales de la década de los ochenta.	<p>El desarrollo de este campo procede de la confluencia de dos fuentes de interés: la revolución cuantitativa en materia geográfica y la necesidad de los investigadores en materias regionales y urbanas de incorporar efectos espaciales en sus modelos.</p> <p>Las principales materias de trabajo en esta fase son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrollo de test de residuos para analizar la autocorrelación espacial.</li> <li>• Procedimientos para especificar los modelos espaciales.</li> <li>• Métodos básicos de estimación.</li> <li>• Discriminación de modelos.</li> <li>• Test de especificación.</li> </ul> <p>Estas temáticas se identifican como básicas y su desarrollo se mantiene a lo largo de los siguientes períodos.</p>

Fases del desarrollo de la econometría espacial	Principales hitos
Propulsión: década de los noventa.	<p>Anselin (2010) destaca en esta fase la influencia de nuevos especialistas, que se suman a las actividades de los primeros desarrolladores. Se trata, sobre todo, de discípulos de investigadores del período anterior.</p> <p>Los principales desarrollos corresponden a economistas estadounidenses y se centran en campos aplicados: desarrollo, economías urbanas y regionales, actuaciones públicas, estado real de las economías, etc.</p> <p>Se destacan dos características fundamentales de esta fase de <i>take off</i> (término de Anselin, 2010):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Las investigaciones se vuelven más rigurosas; se formalizan determinados tratamientos, como las derivaciones de las propiedades asintóticas de estimadores y test estadísticos.</li> <li>• Se mejoran de manera paulatina las propiedades de los distintos métodos de análisis de muestras, en relación directa con el incremento de estudios empíricos basados en datos más realistas.</li> </ul> <p>Las principales actuaciones investigadoras son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Especificación de modelos, métodos de estimación y desarrollo de test.</li> <li>• Estudio de modelos de regresión lineal estándar.</li> <li>• Tratamiento de la heterogeneidad espacial: se introduce la regresión geográfica ponderada (GWR) para modelar la variabilidad de parámetros en el espacio.</li> <li>• Avances en aproximaciones bayesianas.</li> <li>• Destacada atención a desarrollos en aspectos computacionales y de software. Esto permite la mejora de la estimación de modelos de regresión espacial mediante métodos de máxima verosimilitud.</li> </ul>
Madurez: se inicia con el nuevo siglo.	<p>Los distintos indicadores (número de artículos, presencia en cursos universitarios, software existente, oportunidades laborales, etc.) confirman la importancia adquirida por la econometría espacial, que lleva, incluso, a la constitución en 2006 de una Asociación Econométrica Espacial, responsable de la organización de encuentros internacionales. La disciplina desempeña un papel fundamental como metodología de trabajos en el ámbito de análisis de delincuencia, medio ambiente, epidemiología y salud pública, entre otros.</p> <p>Se han alcanzado importantes avances en las distintas áreas de investigación señaladas: por ejemplo, en relación a la formalización de las propiedades asintóticas de los modelos principales de regresión espacial, máxima verosimilitud y método generalizado de momentos; también se pueden destacar los trabajos asociados a los modelos de error autorregresivos, tratamientos del error de la matriz de varianza-covarianza, endogeneidad, consideración de parámetros al borde del espacio, etc.</p> <p>También se destacan tres tipos de modelos que reciben una destaca atención en esta última fase: (i) panel espacial; (ii) variables latentes y (iii) tratamiento de flujos.</p> <p>Por último, hay que destacar el crecimiento exponencial del software disponible, específicamente adaptado a las necesidades espaciales, sobre todo en el contexto de comunidades de código libre.</p>

Tabla 4.1. Principales fases de evolución de la disciplina econométrica espacial

Fuente: elaboración propia a partir de Anselin (2010).

Anselin (2010) emplea la expresión “*from margins to mainstream*” para describir este proceso genérico de crecimiento y enfatizar el interés creciente en los últimos años, sobre todo en las

ciencias sociales, respecto al empleo de las técnicas espaciales. Todo este planteamiento queda refrendado mediante la consideración de cinco dimensiones del cambio acaecido desde la fase de precondiciones hasta la madurez:

- Publicaciones científicas. En Anselin y Hudack (1992) se revisa el conjunto de artículos publicados en *Journal of Regional Science* y *Journal of Urban Economics* durante el período 1988-1991: de los 409 artículos analizados, 23 introducían análisis *cross-section* y sólo uno consideraba efectos espaciales. Florax y De Vlist (2003) reproduce un análisis similar, localizando en torno a 40 artículos que se centran en la cuestión. El salto cuantitativo respecto a las investigaciones en este campo, detectado en torno al cambio de siglo, queda confirmado en las sesiones especiales sobre econometría espacial, dentro de la 42 Conferencia Europea de la *Regional Science Association International*, en las que se presentaron quince ponencias. Como ejemplo de ámbitos de estudio se pueden citar: modelos espacio temporales, tratamiento de riesgos espaciales, diseño de cadenas de Markov o estimadores simultáneos de mínimos cuadrados para convergencia espacial.
- Libros de texto. Se señalaba anteriormente la escasa atención prestada por estas publicaciones durante la década de los noventa a la temática espacial. La situación no varía en exceso durante los primeros años del 2000, aunque el análisis de la autocorrelación espacial se empieza a considerar en obras como Kennedy (2003), Wooldridge (2003) o Cameron y Trivedi (2005). El cambio en el nivel de atención a estas cuestiones se detecta, más bien, en los *handbooks*: por ejemplo, desde 2006 *Palgrave Handbook of Econometrics* contiene un capítulo dedicado al tratamiento de problemas espaciales, al mismo nivel que otras materias clásicas, como estudios sobre series temporales o microeconometría.
- Software. Goodchild, Haining y Wise (1992) resume los aspectos tratados en el seno de un grupo de trabajo constituido en la Universidad de Sheffield, en marzo de 1991, para analizar, básicamente, los siguientes temas: (i) posibles beneficios asociados a la interacción entre sistemas GIS y métodos de análisis de datos espaciales (ESDA); (ii) identificación de áreas específicas para establecer dicha conexión; y (iii) cómo llevar a la práctica los enlaces necesarios. Esta relación describe, ya sólo con el guión expuesto, el grado de desarrollo del software existente para el tratamiento de datos espaciales. Los sistemas GIS, por ejemplo, se consideraban muy limitados y restringidos a la realización de operaciones geométricas básicas, análisis de preguntas simples y descripciones resumidas de una realidad geográfica de carácter estático. La conclusión a la que llega el grupo de trabajo, respecto a esta herramienta, es: "*GIS clearly needs stronger analysis and modelling capabilities if it is to meet its potential as a general-purpose tool for handling spatial data*", Goodchild et al. (1992: 409). Aun cuando resultaba evidente que la conexión entre GIS y ESDA reforzaría el potencial de ambos instrumentos, lo cierto es que los desarrollos en el ámbito de la información geográfica tampoco se estaban llevando a cabo en el sentido requerido para dicha unión. Las empresas especializadas en estos productos se focalizaban en un mercado muy específico, mientras que los avances en ESDA se producían en un reducido entorno científico y académico y, además, como se ha indicado en la revisión histórica, se percibían como una materia muy oscura. La carencia de un software apropiado para

ESDA constituyó un impedimento para el desarrollo de trabajos empíricos hasta que comenzaron a implementarse, a mediados de la década de los noventa, programas como SpaceStat o S+Spatialstats.

La situación ha cambiado radicalmente desde entonces: en la actualidad se dispone de numerosas herramientas especializadas en este campo, en forma tanto de software libre, en código abierto o como programas comerciales, con niveles variables de compatibilidad con otros desarrollos paralelos. Florex y Vlist (2003) destaca los dos paquetes informáticos más completos en el ámbito de la econometría espacial a principios de la década de los dos mil: (i) *SpaceStat*, desarrollado precisamente bajo la tutela de Anselin, integrable con ArcView, y con un extenso conjunto de instrumentos para realizar análisis, elaborar matrices de pesos o desarrollar variogramas<sup>106</sup>; y (ii) un conjunto de extensiones, preparadas en MATLAB, a cargo de LeSage, incluyendo modelados, rutinas bayesianas o test y estimadores.

En la siguiente figura se resumen las herramientas informáticas seleccionadas por Rey y Anselin (2006) en base al incremento de sus aplicaciones espaciales en ciencias sociales, a mediados de la primera década del siglo XXI:

Identificación	Características principales
<i>GeoDa</i>	Programa <i>open source</i> orientado al análisis interactivo de datos espaciales: permite el desarrollo de todas las fases de un estudio empírico, desde la elaboración de los mapas hasta la verificación de la autocorrelación espacial, exploración multivariante y análisis de regresión.
Funciones implementadas en <i>R</i> para el análisis estadístico espacial.	La comunidad adscrita al proyecto de código libre <i>R</i> ha desarrollado diversas aplicaciones en este contexto, destacando el paquete <i>spdep</i> : incluye funciones para el tratamiento de la autocorrelación espacial y para la estimación de regresiones espaciales. Existen otros módulos más específicos, orientados a problemas analíticos concretos.
<i>CrimeStat</i>	Como su denominación da a entender, este programa se encuentra especialmente diseñado para el análisis espacial de índices de criminalidad, aunque es posible extrapolarlo a campos como epidemiología, botánica, geología, etc. Posee una interfaz de tratamiento de datos compatible con los principales sistemas GIS: <i>ArcView</i> , <i>ArcGis</i> , <i>MapInfo</i> ... El software consta de herramientas para el análisis de autocorrelación, detección de puntos calientes o interpolación espacial.

<sup>106</sup> En la actualidad, BioMedware (Geoespatial Research and Software) proporciona distintos paquetes informáticos para visualizar, analizar y explorar datos geoespaciales, con una definida orientación hacia las ciencias de la salud y medioambientales. *SpaceStat* es uno de estos programas y se caracteriza como “*the international standard for spatial econometric modeling*”.

Identificación	Características principales
<i>Spatial Analysis on a NETwork</i> (SANET)	Consiste en una herramienta basada en un sistema GIS para el tratamiento de datos en red. Permite trabajar con dos clases de fenómenos: (i) los que ocurren en una red (por ejemplo, asociados al tráfico) y (ii) los que tienen lugar en espacios próximos a la misma (siguiendo con el mismo ejemplo, se haría referencia a restaurantes, gasolineras, áreas de servicio... adyacentes a una carretera). Dispone de módulos para integrarse con <i>ArcView</i> .
Extensión para la visualización en 3-D del sistema <i>Spatial and Nonspatial Data</i> (SAND).	El prototipo SAND proporciona funcionalidades para la representación de datos bidimensionales y la realización de búsquedas. La extensión incorporada permite añadir una nueva dimensión a estos tratamientos.
<i>ChoroWare</i>	Este software se enfoca a la elaboración de mapas cloropéticos. Para ello aplica algoritmos genéticos que permiten valorar la idoneidad del esquema de clasificación frente a distintas funciones objetivo.

Tabla 4.2. Ejemplos de desarrollos informáticos existentes en el año 2006 para el tratamiento de aplicaciones espaciales.

Fuente: elaboración propia a partir de Rey y Anselin (2006)

La información recogida en la anterior figura, en cuanto a la representatividad de las herramientas expuestas, permanece vigente, en su mayoría, nueve años después de su síntesis, aun cuando los desarrollos y nuevas aplicaciones en este campo se producen a gran velocidad, adaptándose a las tecnologías vigentes. *GeoDa* continúa siendo un programa muy extendido y de código abierto (programado en C++), con un desarrollo orientado al análisis de datos espaciales: EDA, ESLA, regresiones... Las librerías, también con acceso libre y gratuito, contienen módulos para el tratamiento de aspectos geométricos, *clusters* o dinámicas espaciales. En este contexto *GeoDa Space*, programado en lenguaje Python, aporta las herramientas para el tratamiento de la econometría espacial: variables endógenas, HAC, análisis de errores, etc. Este software dispone de una versión libre y otra de pago, con mayor funcionalidad. Como señala Chasco y Fernández-Avilés (2009: 22) “*se trata de un programa que incluye una amplia gama de funciones (...): desde la simple representación gráfica en mapas, pasando por la visualización del efecto de autocorrelación espacial global y local, hasta llegar a estimar y contrastar modelos de regresión espacial. Un aspecto clave de GeoDa es que se desarrolla en un marco interactivo que combina los mapas con gráficos estadísticos, utilizando la técnica de enlace dinámico de vistas*”.

Por su parte, R constituye un entorno de programación genérico para análisis estadístico, con resultados gráficos muy interesantes, que ha experimentado una gran difusión (en especial en el ámbito académico) desde los desarrollos iniciales, a finales de la década de los noventa. Como se indicaba, el potencial de este software reside en la posibilidad de incorporar paquetes para desarrollo de tareas específicas, a través de su programación por parte del usuario o acudiendo a repositorios para la descarga e implementación. A título de ejemplo, Taylor et al. (2013) presenta el paquete-R *Igcp* para inferencias espaciales y espacio-temporales y para el desarrollo de predicciones en procesos log-gaussianos Cox; por su parte, Pebesma (2012) describe las



características de *spacetime*, un módulo que proporciona instrumentos para representar datos espacio-temporales, realizar predicciones, agregar trayectorias, etc.

Programas con enfoques más específicos, como *CrimeStat* o *ChoroWare*, continúan empleándose en la actualidad. La última versión del primero de estos programas es de enero de 2015 e incluye en torno a cien rutinas para el análisis espacial. GeoDa Center dispone de la versión alfa de un software similar: *Crime Analytics for Space-Time* (CAST), que también posee doble versión: libre y con licencia. *ChoroWare* responde a un planteamiento muy delimitado, orientado en este caso a la identificación interactiva de soluciones; en cierto modo su operatividad se puede equiparar a la de los módulos descritos en algunas de las herramientas ya descritas. En este sentido, SANET se implementa en la actualidad (la última versión localizada es de principios de 2013) en *ArcGIS*, como un *plug-in* de esta plataforma. SAND constituye un ejemplo de un prototipo experimental, en este caso un sistema GIS desarrollado en la Universidad de Maryland, orientado al desarrollo de investigaciones.

- Fondos para investigación en tecnologías geo-espaciales, estadística y econometría espaciales. En el caso estadounidense hay que considerar, aparte de las fuentes tradicionales, como la National Science Foundation, las aportaciones de agencias especializadas, como *Nacional Institutes of Health* y *National Institute of Justice*, ésta última promocionando, por ejemplo, el desarrollo del software *CrimeStat* (el lema del portal web de esta organización hace referencia, precisamente, al empleo de nuevas tecnologías para mejorar los esfuerzos de la justicia).
- Difusión y publicidad de los resultados. Lentamente la disciplina ha ido ocupando posiciones en listas de especialización por parte de entidades como *American Economic Association* y *Agricultural and Applied Economics Association*. Este incremento de visibilidad también se refleja en su inclusión como materia en cursos de Grado en econometría.

La confluencia de la literatura sobre convergencia (sub-nacional o regional) con la referente a las técnicas de análisis espacial se produce de una manera más relevante a principios de la primera década del siglo XXI, lo que permitió, en base a la opinión de Rey y Le Gallo (2009), el desarrollo de un corpus creciente de análisis empíricos relativos a la convergencia espacial. Anselin (2010) señala que este auge de los estudios se explica, de manera genérica, considerando dos aspectos: (i) la elaboración y libre disposición de un volumen incremental de datos geo-referenciados, que, además, pueden ser tratados mediante sistemas de información geográfica (GIS) u otros conjuntos de paquetes informáticos plenamente amigables y compatibles; y (ii) el desarrollo de nuevos enfoques teóricos para analizar interacciones de todo tipo, introduciendo perspectivas originales en el tratamiento de cuestiones como efectos entre pares, *spill-overs* espaciales y fenómenos de red.

Centrándose en la fase de madurez identificada por Anselin (2010), Chasco (2003) relaciona cuatro principales ámbitos de investigación y aplicación en econometría espacial:

Líneas de trabajo	Aspectos concretos
Efectos de dependencia y heterogeneidad espacial.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reinterpretación de las matrices de pesos espaciales.</li> <li>• Formulación de nuevos contrastes de dependencia y heterogeneidad espacial.</li> <li>• Estudio de las consecuencias de su no consideración en el modelado (inferencias ecológicas o problema de la unidad espacial modificable).</li> <li>• Análisis Exploratorio de Datos Espaciales integrado en entorno GIS.</li> </ul>
Efectos y datos espaciales en modelos de regresión lineal.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Especificación de efectos de vecindad en: (i) modelos de convergencia regional; (ii) crecimiento económico; (iii) productividad; (iv) I+D; (v) demanda de transportes; (vi) modelos hedónicos del precio de la vivienda; y (vii) otros fenómenos sociales, como actos delictivos.</li> <li>• Tratamiento de las perturbaciones aleatorias asociadas a la omisión de variables explicativas.</li> <li>• Estudio de la veracidad de contrastes de dependencia espacial.</li> <li>• Aplicación de métodos de filtrado para eliminar el problema de dependencia espacial.</li> <li>• Incorporación de la cointegración espacial.</li> <li>• Estimación de modelos espaciales de ecuaciones simultáneas.</li> <li>• Determinación de las consecuencias de la heterogeneidad espacial en los coeficientes de autocorrelación espacial.</li> </ul>
Efectos espaciales en modelos de variables dependientes limitadas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Incorporación de los estadísticos de autocorrelación espacial a la estimación de modelos logit, probit y tobit.</li> </ul>
Efectos espaciales en modelos espacio-temporales	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tratamiento combinado de datos de corte transversal y de series temporales: se puede realizar desde un esquema clásico o desde el ámbito bayesiano.</li> </ul>

Tabla 4.3. Líneas principales de investigación de la econometría espacial.

Fuente: Chasco (2003).

## 4.3 Tratamiento espacial de variables

### 4.3.1 La naturaleza de los datos espaciales.

La revisión histórica planteada en el apartado anterior suscita una reflexión: realmente ¿es necesario el desarrollo específico de una disciplina –en este caso la econometría espacial– para realizar el tratamiento de los datos espaciales? Chasco (2003: 8) se pregunta “*si este tipo de datos contiene tantas peculiaridades como para demandar unas técnicas de investigación específicas*”. La respuesta afirmativa de la autora se basa en la constatación de tres aspectos particularmente relevantes:

- Los datos espaciales poseen una *naturaleza georreferenciada*: la posición de un elemento en el espacio constituye, en sí misma, información relevante, por lo que la localización es una variable más a integrar en los estudios. Este hecho posee trascendencia a niveles más profundos. Como señala Chasco (2004: 1), la heterogeneidad espacial se presenta en un ámbito en el que “*las formas funcionales y los parámetros variarán con la localización geográfica no siendo homogéneos para toda la matriz de datos*”. Este efecto (también asociado a la multidireccionalidad)

requiere una correcta diferenciación de otros fenómenos espaciales y su correspondiente tratamiento mediante los adecuados procedimientos econométricos.

- Del mismo modo hay que tener en cuenta, como se adelantaba en el párrafo anterior, la *multidireccionalidad*, cuyo efecto más notable es la interacción espacial o autocorrelación entre los elementos estudiados. También se encuentra presente en procesos de *spill-over*, de contagio, emulación, etc. En contraposición con esta naturaleza, los datos temporales presentan unidireccionalidad, tal y como se resalta en determinados apartados de este capítulo.
- Por último, y en línea con la idea anterior, los datos espaciales se caracterizan por su *multidimensionalidad* en el ámbito temporal, incluyendo todo su espectro.

La presencia de los efectos espaciales (como se ha indicado, los más conocidos, aunque no únicos, corresponden a la autocorrelación y a la heterogeneidad) justifican un tratamiento específico de las investigaciones en este contexto. Existen, además, problemas muy concretos en el tratamiento de estos datos, que se deben sumar a los que se encuentran presentes en los estudios clásicos de econometría no espacial. Chasco (2003) relaciona los siguientes aspectos:

- La elección de la escala o del nivel de agregación regional. La habitual disponibilidad de datos que se pueden adicionar, partiendo de unidades individuales hasta ámbitos globales, requiere una correcta identificación del marco específico de observación, dado que los resultados finales pueden quedar desvirtuados por la distinción realizada. A modo de ejemplo se identifican dos problemáticas clásicas en este contexto:
  - La cuestión de la unidad espacial modificable (*modifiable areal unit problem*, MAUP), que implica que los estadísticos pueden cambiar de valor en función de la agregación territorial seleccionada. Este hecho ha aparecido, de manera más o menos implícita, en la revisión que se ha realizado de estudios sobre variables diferenciadas, a nivel nacional o regional. En general, la agrupación o la desagregación de datos, en función de la escala, afecta a los valores de la varianza, de la autocorrelación o de la estacionariedad espacial, entre otros.
  - También resulta frecuente que la escala de observación difiera de la correspondiente al ámbito espacial del proceso estudiado. Esto puede implicar modificaciones de la variabilidad interna, directamente relacionadas con problemas de heterocedasticidad.
- El proceso de obtención y almacenamiento informático de los datos. Los investigadores deben ser conscientes de las dificultades asociadas a la confección de las tablas de datos por parte de los organismos responsables y considerar, por tanto, el tratamiento de datos incorrectos o no existentes. En general, los aspectos más significativos a incorporar en la fase previa de los estudios son: (i) determinación de los procedimientos a emplear para identificar y corregir los errores; (ii) consideración de la fiabilidad de los datos sobre los que se realiza el trabajo; (iii) valoración de posibles errores de muestreo (por ejemplo al considerar la estratificación de encuestas); y (iv) identificación de la metodología a emplear para asignar correctamente los datos a las unidades geográficas asociadas.
- El análisis exploratorio y confirmatorio de la información. En este plano hay que considerar dos aspectos fundamentales:

- El tratamiento de grandes bases de datos requiere técnicas específicas<sup>107</sup>, como las asociadas a las técnicas de *data mining*, que permiten identificar aspectos que se desvían de la aleatoriedad geográfica (estructuras, asociaciones o similares).
- En relación con el aspecto anterior, Chasco (2003: 26) también enfatiza la importancia del paradigma inferencial: *“la teoría asintótica clásica sobre la que se asientan los métodos de estadística y econometría espacial ha sido desarrollada para obtener las propiedades de los estimadores y contrastes estadísticos en muestras finitas, pero no tienen sentido cuando la muestra utilizada prácticamente tiende a infinito”*.

### 4.3.2 Modelos econométricos espaciales

Es bien conocido que, bajo ciertos enfoques, un modelo econométrico se puede concebir como un conjunto de observaciones derivadas de un determinado experimento. En la formulación de Arbia (2006) el modelo genérico se construye a partir de  $n$  (multivariantes) reconocimientos empíricos, expresados como  $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ , correspondientes a los resultados singulares de un experimento relacionado con un conjunto de variables aleatorias  $(X_1, X_2 \dots X_n)$ . La concreción de este planteamiento requiere introducir hipótesis sobre: (i) la naturaleza de las variables aleatorias; y (ii) sobre el modo en que se producen las relaciones con las observaciones. Lo habitual es encuadrar estas suposiciones en dos grandes categorías:

- Las hipótesis relacionadas con un modelo probabilístico (PM) y con la correspondiente distribución de las variables aleatorias. La expresión de este planteamiento en forma paramétrica es  $\Phi = \{f_{X_1, X_2 \dots X_n}(x_1, x_2 \dots x_n; \theta), \theta \in \Theta\}$ , siendo  $\Phi$  la familia paramétrica de funciones de densidad,  $f$  la función agregada de dichas variables aleatorias,  $\theta$  un vector con parámetros desconocidos, que deben ser estimados, y  $\Theta$  el espacio paramétrico.
- Las hipótesis asociadas al modelo muestral (SM) correspondiente a las  $n$  observaciones.

En base a este enfoque resulta sencillo diferenciar las cuatro tipologías principales de datos económicos que se utilizan en los estudios empíricos (estas agrupaciones se han ido considerando en apartados anteriores de este trabajo, pero resulta idóneo concretar su significado antes de afrontar el modelado espacial):

---

<sup>107</sup> El tamaño de las matrices de pesos espaciales se incrementa en orden  $N^2$ , de ahí la relevancia del número de observaciones.

Tipología	Descripción
Datos cross-section	El modelo econométrico se construye como una <i>muestra aleatoria</i> , asumiéndose que cada variable aleatoria se distribuye de manera independiente, con una función de densidad $f_{X_i}(x_i; \theta)$ . La función de probabilidad agregada se obtiene como el producto de las densidades marginales.
Expresión matemática:	$f_{X_1, X_2 \dots X_n}(x_1, x_2 \dots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta)$
Series temporales	En este caso el modelo responde a un <i>proceso aleatorio</i> , de modo que las variables aleatorias se ordenan respecto al tiempo. La expresión del PM se transforma en $\Phi = \{f_{X_{t_1}, X_{t_2} \dots X_n}(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}; \theta), t_i \in T, \theta \in \Theta\}$ Resulta posible considerar las densidades condicionales, aunque la formulación final de la probabilidad agregada no queda tan simple como en el caso anterior.
Expresión matemática:	$f_{X_{t_1}, X_{t_2} \dots X_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}; \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_{t_i}   X_{t_1} \dots X_{t_{i-1}}}(x_{t_i}   x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_{i-1}}; \theta)$
Series espaciales	A la observación sobre las unidades económicas se adiciona información de carácter espacial (en la siguiente sección se profundiza en este concepto). En este caso se interpreta que los datos se recogen a partir de un <i>modelo probabilístico</i> .
Expresión matemática:	$\Phi = f_{X_{s_1}, X_{s_2} \dots X_{s_n}}(x_{s_1}, x_{s_2} \dots x_{s_n}; \theta), s_i \in S, \theta \in \Theta$
El término <i>s</i> se refiere a la localización espacial. No es posible, a priori, simplificar esta formulación.	
Datos de panel o unidades espaciales	Se trata de la tipología que se obtiene al combinar series temporales con datos <i>cross-section</i> o con series espaciales. Los datos de panel se refieren a agentes económicos simples y las unidades espaciales a regiones, estados o similares.
Expresión matemática:	$\Phi = f_{X_{s_1 t_1}, X_{s_2 t_1} \dots X_{s_n t_1}, X_{s_1 t_2}, X_{s_2 t_2} \dots X_{s_n t_m}}(x_{s_1 t_1}, x_{s_2 t_1} \dots x_{s_n t_1}, x_{s_1 t_2} \dots x_{s_n t_m}; \theta), s_i \in S, t_i \in T, \theta \in \Theta$

Tabla 4.4. Tipologías de datos económicos.

Fuente: Arbia (2006).

El problema de las series espaciales radica, como se puede observar, en la necesidad de redefinir el PM para tener en cuenta la estructura de dependencia geográfica subyacente a las variables aleatorias (de otro modo resultaría imposible estimar todos sus términos). La manera más intuitiva de incorporar esta naturaleza espacial es considerando y ampliando las características de las series temporales, dado que existen ciertas analogías (aunque constituyen, como se ha indicado anteriormente, ámbitos con tratamientos diferenciados) o desarrollando la base conceptual de los procesos aleatorios bidimensionales: durante la segunda mitad de la década de los años cincuenta y en la de los sesenta se trabajó con esta segunda orientación, elaborándose una importante literatura sobre los denominados campos aleatorios (o *random fields*).

La consideración de lo que es el *espacio* no es una cuestión baladí. De hecho el sentido cambia de manera notable si se hace referencia a conceptos como espacio geográfico o espacio económico. Arbia (2006) cita a Paelinck (1983), quien define el espacio, de manera genérica y formal, como el par  $S \triangleq \{O, R\}$ , siendo  $O$  el conjunto de objetos que se estudian y haciendo referencia  $R$  a las relaciones existentes entre éstos. Chasco (2003: 17) constata los condicionantes de este concepto al señalar que “*el espacio geográfico es una realidad de naturaleza compleja y distribución continua imposible de manejar sin realizar un esfuerzo de abstracción encaminado a reducir o dividir esta continuidad en entidades numéricas discretas, observables y susceptibles de medición matemática*”. Ciertamente, el contexto temporal también posee una naturaleza continua, pero su descomposición en elementos discretos

(años, meses, horas, segundos, etc.) resulta inmediata, al igual que su aceptación. Además su dimensión es lineal, con un discurso que evoluciona del pasado hacia el futuro.

En el ámbito espacial las divisiones de su naturaleza continua no son tan intuitivas; en un ámbito bidimensional o plano resulta notablemente difícil establecer una ordenación similar a la que se deriva de la consideración de eventos acaecidos o por suceder<sup>108</sup>. Por tanto, este fraccionamiento suele requerir un tratamiento específico en función del estudio a realizar. Existe un amplio consenso sobre la idoneidad de restringir las representaciones de los objetos espaciales a tres figuras geométricas, que expresarían la correspondiente localización en el espacio geográfico: puntos, líneas y polígonos. Siguiendo a Chasco y Fernández-Avilés (2009) y, a modo de ejemplo, el tutorial de un programa de tratamiento cartográfico, MapInfo (2003), identificamos estos elementos:

- Puntos: representan las posiciones de los datos, encontrándose determinadas por sus coordenadas (latitud y longitud). Pueden hacer referencia a ubicaciones de individuos o de empresas; en ciertos análisis se consideran las ciudades e, incluso, unidades superiores como un todo, siempre que se identifique una posición representativa en el espacio del correspondiente centroide.
- Líneas: son "*objetos abiertos que cubren una distancia dada y comunican varios puntos o nodos*", Chasco y Fernández-Avilés (2009: 15). En este contexto se pueden considerar las líneas en sí, sus agregaciones en polilíneas y los arcos<sup>109</sup>. Como ejemplos clásicos de estos objetos se consideran las líneas de comunicación o las eléctricas, las calles, ríos, etc.
- Polígonos: se trata de figuras planas y cerradas, que cubren una determinada área. Resulta relativamente sencillo asociarlas a provincias, regiones, países o subdivisiones de índole censal o espacios de ventas y comerciales.

MapInfo Professional asocia cada uno de estos objetos a una capa (tratamiento muy habitual en este tipo de software), lo que permite incorporar elementos de texto o de recopilación en vistas diferenciadas. La fragmentación del espacio mediante el empleo de estas tres figuras se simplifica cuando los objetos tienen fronteras delimitadas (por ejemplo, un edificio o, incluso, una carretera, con sus nodos iniciales y finales) y la variable se puede considerar discreta de una manera natural (por ejemplo, al asociar el PIB per cápita a una determinada región). La cuestión resulta más compleja cuando el fenómeno estudiado varía de manera claramente continua en el espacio: el gradiente de una variable física, como la temperatura o la cota de un terreno, representan esta situación. Esta segunda situación requiere identificar lugares representativos a los que asociar mediciones y considerar funciones que relacionen los valores en puntos intermedios.

Arbia (2006) realiza un tratamiento formalizado de estas ideas partiendo de la definición de campo aleatorio: para ello identifica la tripleta de elementos que definen un espacio

---

<sup>108</sup> Existen infinitas direcciones en el espacio, aunque resulte posible simplificar los desplazamientos considerando los clásicos ejes cartesianos.

<sup>109</sup> Como señala Chasco y Fernández-Avilés (2009), en un sentido amplio, todas las líneas terrestres son realmente arcos, dado que la Tierra es una esfera (el efecto de la curvatura no suele resultar significativo en el ámbito econométrico).

probabilístico  $(\Omega, B, P(\cdot))$ ;  $\Omega$  es el espacio muestral,  $B$  el conjunto asociado de Borel y  $P(\cdot)$  hace referencia a una medida de probabilidad. Por otro lado se considera  $S$ , un conjunto no vacío en  $\mathbb{R}^2$ , y se define una función bidimensional  $X$ , tal que  $\Omega \times S \rightarrow R$ . El conjunto ordenado de variables aleatorias  $\{X(\cdot, s), s \in S\} = \{X(s), s \in S\}$ , indexado respecto a  $s$ , recibe la denominación de campo aleatorio. Dos son las características fundamentales de un *random field*: su topología y la estructura de dependencia espacial.

Los índices  $s \in S$ , a los que se hacía referencia en la Tabla 4.4, se encuentran directamente relacionados con la topología de las observaciones. En primer lugar se diferencian dos situaciones: (i) cuando estos valores son continuos representan las coordenadas de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ ; (ii) si, por el contrario, toman valores discretos, pueden referirse a las coordenadas de una malla regular (normalmente una cuadrícula) o a los valores relativos a un conjunto finito de polígonos (resulta sencillo pensar en este caso en regiones geográficas)<sup>110</sup>. Chasco (2003) señala que lo habitual en el análisis econométrico espacial es considerar los esquemas reticulares o *lattice*; determinados cálculos se simplifican al organizar las observaciones bajo esta estructura gráfica que, además, posee una representación inmediata en términos de la matriz de interacciones.

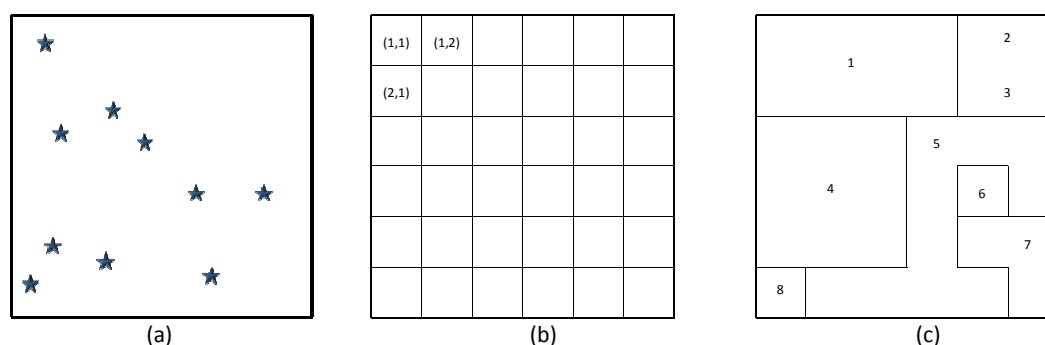


Figura 4.1. Tipologías de datos espaciales.

Caso (a):  $\{X(s), s = (r, s); r, s \in \mathbb{R}\}$ . Casos (b) y (c):  $\{X(s), s = s; s \in I^+\}$

Fuente: Arbia (2006: 34).

La representación expuesta se encuentra relacionada de manera muy estrecha (aunque no debe confundirse) con el almacenamiento de las localizaciones geográficas en el entorno SIG. Por un lado, como indica Chasco y Fernández-Avilés (2009: 17) “*los datos vectoriales registran la información a modo de coordenadas geográficas, en un sistema plano o rectangular de coordenadas, de manera que las formas o figuras de puntos se registran como localizaciones simples del tipo  $(x,y)$ , mientras que las formas lineales, incluyendo los contornos de los polígonos, se recogen como series ordenadas de coordenadas  $(x,y)$* ”. Por otra parte se consideran los datos *raster*, asociados a cuadrículas o matrices, en los que cada celda tiene asociado un valor que representa una determinada forma geométrica. En realidad los datos en sí de la variable estudiada se guardan en tablas relacionadas con dichas figuras, de ahí que se hable de una estructura de datos georrelacionados.

<sup>110</sup> El vector  $s$  representa en realidad un escalar  $s \in I^+$ .

Arbia (2006) indica que en el caso de campos aleatorios de parámetro continuo la topología queda identificada, de manera objetiva, a través de la distancia métrica. La medida más extendida este contexto es la distancia euclídea entre dos puntos,  $s_i$  y  $s_j$ :

$$d_{ij} = \sqrt{(s_i - s_j)^T (s_i - s_j)} \quad (4.1)$$

Resulta válida la aplicación de cuantificaciones distintas, dependiendo del objeto del estudio. En el campo concreto de nuestro análisis la incorporación de la distancia Manhattan (correspondiente a la suma de las diferencias absolutas entre las coordenadas de los puntos) o la métrica máxima de Chebyshev (que se identifica con la mayor diferencia en cualquiera de las coordenadas espaciales) puede aportar mejoras significativas en determinados procedimientos de cálculo.

Por el contrario, la topología de los campos aleatorios de parámetro discreto requiere ser especificada por el investigador, lo que aporta un componente subjetivo al estudio. Arbia (2006) propone algunos planteamientos para paliar este problema:

- Lo habitual es considerar los centroides de cada polígono y calcular las distancias entre estos puntos mediante algún procedimiento métrico (como los indicados en los párrafos anteriores). Este planteamiento se complica si las figuras son muy irregulares o los centroides se ubican en localizaciones anómalas.
- Se puede emplear como alternativa (más compleja desde el punto de vista computacional) la distancia Hausdorff, considerando dos polígonos,  $A$  y  $B$ , como subconjuntos compactos:  $H(A, B) = \max_{a \in A} \{ \min_{b \in B} [d(a, b)] \}$ , siendo  $a$  y  $b$  puntos de  $A$  y de  $B$  respectivamente, y  $d(a, b)$  cualquier medida de la distancia entre ellos.

Desde el punto de vista específico de los estudios econométricos las distancias expuestas no recogen aspectos cualitativos, a veces muy determinantes, de los enlaces existentes entre las unidades observadas. Como señala Conley y Topa (2002), la distancia física no tiene en cuenta las barreras u otros condicionantes, como los ríos o las autopistas, que pueden resultar básicos en el análisis de los municipios (por ejemplo, en su densidad poblacional). Por ese motivo diversos autores han planteado medidas alternativas bajo enfoques sociales o comerciales. En la siguiente tabla se mencionan algunas de estas propuestas:



Estudio	Medidas planteadas
Case (1993)	Esta investigación sobre los estados norteamericanos se centra en cómo los gastos realizados por cada uno afectan a las políticas fiscales de los restantes. Esta idea implica revisar el concepto de vecindad entre unidades y extenderlo más allá de la constatación de límites fronterizos. Tras probar diferentes alternativas se comprueba que la distribución racial de la población (en concreto, el porcentaje de personas de color) constituye la mejor variable en la que basar las medidas de distancia.
Conley y Topa (2002)	<p>Se consideran los siguientes aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Costes de interacción. Existen costes en términos monetarios y de tiempo relativos al mantenimiento de las convenciones sociales: aumentan con la distancia física y con el desplazamiento (relacionado en este caso con las características de los transportes públicos) entre las ubicaciones de las residencias de los individuos.</li> <li>• Características raciales y étnicas. La distancia étnica y racial entre un vector <math>e_i</math> de porcentajes de nueve<sup>111</sup> razas y etnias presente en el tramo censal <math>i</math> y el correspondiente vector <math>e_j</math> en el tramo <math>j</math> se define como: <math display="block">ED_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^9 (e_{ik} - e_{jk})^2}</math> </li> <li>• Distancia ocupacional. Corresponde también a una distancia euclídea, en este caso entre el vector <math>o_i</math> de porcentajes de trabajadores en trece ocupaciones distintas en el tramo censal <math>i</math> y el correspondiente vector <math>o_j</math> en el tramo <math>j</math>: <math display="block">OD_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{13} (o_{ik} - o_{jk})^2}</math> </li> </ul>
Aten (1996, 1997)	<p>Estos estudios analiza la correlación espacial entre precios de mercado mediante el empleo de tres medidas de localización relativa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La relativa a la existencia de una frontera común (el resultado es un valor nominal que indica la presencia o no de contigüidad).</li> <li>• Una distancia matricial, que se define como: <math display="block">w_{ij} = \frac{1/d_{ij}}{1/\sum_j d_{ij}}</math> </li> <li>• La proximidad comercial, que recoge los flujos entre países: <math display="block">w_{ij} = \frac{t_{ij}}{\sum_j t_{ij}}</math> <p>El término <math>t_{ij}</math> corresponde a la proporción de comercio del país <math>i</math> que no se incluye en el volumen total de comercio del país <math>j</math>. Se determina como <math>t_{ij} = \frac{X_{ij} + M_{ji}}{\sum_j (X_{ij} + M_{ji})}</math>, siendo <math>X_{ij}</math> las exportaciones de <math>i</math> a <math>j</math> y <math>M_{ji}</math> las importaciones de <math>j</math> a <math>i</math>.</p> </li> </ul>

Tabla 4.5. Medidas alternativas de la distancia en campos aleatorios.  
Fuente: elaboración propia a partir de referencias citadas por Arbia (2006).

La segunda característica de los campos aleatorios es la estructura de dependencia. Arbia (2006) indica que se puede determinar como la función de probabilidad agregada:

$$F[x(s_1), x(s_2) \dots x(s_n)] = Pr\{X(s_1) \leq x(s_1), X(s_2) \leq x(s_2) \dots X(s_n) \leq x(s_n)\} \quad (4.2)$$

Esta expresión adopta la siguiente formulación cuando las variables aleatorias son continuas, considerando la agregación de la función de densidad de probabilidad:

<sup>111</sup> El estudio analiza patrones de desempleo en Chicago entre 1980 y 1990. Los grupos identificados son: personas negras, nativos americanos, nativos de islas asiáticas y del Pacífico, hispanos, blancos, alemanes, irlandeses, italianos y polacos.

$$F[x(s_1), x(s_2) \dots x(s_n)] = \int_{-\infty}^{x(s_1)} \dots \int_{-\infty}^{x(s_n)} f_{u_1, u_2, \dots, u_n}[u_1, u_2, \dots, u_n] du_1 du_2 \dots du_n \quad (4.3)$$

Resulta interesante diferenciar entre: (i) la naturaleza de la variable aleatoria y (ii) la correspondiente a los valores del índice  $s$ . Las variables, que pueden ser continuas o discretas, se distribuyen sobre un *random field* que también puede tener naturaleza continua o discreta. En la siguiente figura se relacionan ejemplos de los distintos contextos a considerar:

	Variable aleatoria continua	Variable aleatoria discreta
Campo aleatorio de parámetro continuo.	Valor de la producción realizada en diferentes localizaciones industriales.	Número de empleados en un conjunto de localizaciones industriales en el espacio $\mathbb{R}^2$ .
Campo aleatorio de parámetro discreto.	PIB regional.	Número de empleados en un conjunto de regiones.

Tabla 4.6. Posibles distribuciones en el espacio de las variables aleatorias.

Fuente: Arbia (2006).

Para cada variable aleatoria  $X(s_i)$  perteneciente al campo aleatorio  $\{X(s), s \in S\}$  se definen los siguientes estadísticos:

- La media:  $E[X(s_i)] = \mu(s_i), \forall i$
- La varianza:  $Var[X(s_i)] = \sigma^2(s_i), \forall i$
- Otros momentos de  $X(s_i)$ :  $E[X(s_i)^r] = \mu_r(s_i), \forall i, \forall r \geq 1$

Se aprecia que todas estas características se pueden expresar en términos del índice  $s$ .

La función de auto-covarianza espacial posee una destacada importancia para la consideración de las posibles restricciones de los modelos. Se define como:

$$\gamma(s_i, s_j) = E \left[ (X(s_i) - \mu(s_i)) (X(s_j) - \mu(s_j)) \right] \quad s_i, s_j \in \mathbb{R}^2 \quad (4.4)$$

La versión estandarizada o función de autocorrelación espacial se expresa del siguiente modo:

$$\rho(s_1, s_2) = \frac{\gamma(s_1, s_2)}{\sqrt{\gamma(s_1)\gamma(s_2)}} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2 \quad (4.5)$$

Como se indicaba en la primera sección de este capítulo, Anselin (2001) relacionaba directamente la disciplina de la econometría espacial con el estudio de la dependencia o correlación espacial (en la nota al pie número 113 se indica que ambos términos no se refieren exactamente al mismo concepto) y de la heterogeneidad o estructura espacial. Los dos efectos son tan significativos que, en cierto modo, reducen la importancia de otros fenómenos espaciales. Cuando se revisaba la formulación de las series espaciales, en la Figura 4.1, se constató que el número de parámetros a estimar es muy superior al tamaño de la información de la que se dispone. Arbia (2006) plantea reducir esta cantidad de parámetros mediante restricciones, de modo que los valores se puedan inferir a partir de la única observación disponible del campo aleatorio. La particularidad de este enfoque es que las restricciones se refieren, precisamente, tanto a la consideración de factores de heterogeneidad como de dependencia espacial.

### 4.3.3 El fenómeno de autocorrelación espacial

Chasco (2003: 9) identifica la autocorrelación espacial con *“la falta de independencia que se produce a menudo entre las observaciones de datos de corte transversal”*. Resulta obligada en este contexto la referencia a la primera ley de la geografía, en términos de Tobler (1970: 236)<sup>112</sup>: *“everything is related to everything else, but near things are more related than distant things”*. Miller (2004: 284) reflexiona sobre las implicaciones de este postulado e indica que la asociación espacial no debe confundirse con la concepción de causalidad: *“two things that are associated may be involved in a causal relationship, or there may be other hidden variables that cause the association”*. A pesar de ello, la correlación sí puede proporcionar ciertas evidencias de causalidad. Otra aportación interesante de autor es la referida al potencial de la información suministrada por la existencia de estas interrelaciones: en la literatura econométrica se tiende en exceso a considerarlas como elementos que llevan a la confusión y que deben ser corregidos cuando, en realidad, revelan la existencia de un grado único de singularidad asociado a la situación relativa en el espacio.

Cliff y Ord (1972) considera que cuando los datos poseen una determinada ordenación espacial se vulnera el asume básico de las regresiones de mínimos cuadrados: los términos del error dejan de ser independientes bajo la hipótesis nula. Estos autores presentan y desarrollan un estadístico para constatar patrones de correlación; el estudio considera variables asociadas a condados dentro de un país. El planteamiento se extiende de manera inmediata a cualquier otro modelo de regresión en mínimos cuadrados. Chasco (2003) hace referencia a determinados estudios empíricos que permiten concretar los términos de la dependencia espacial: así, Cox (1960) constata la continuidad geográfica entre los estados norteamericanos respecto a la intención de voto; Cliff y Ord (1981) analiza, bajo un enfoque espacial, las formas de transmisión de enfermedades y epidemias. De este modo se identifica la autocorrelación espacial con la dependencia<sup>113</sup> de los valores observados en regiones *vecinas* (término que exigirá una concreción específica), aunque también hay que considerar el papel de los factores externos (es decir, otras variables). Como se verá seguidamente, la distancia cobra un significado todavía más profundo en este contexto, dada la importancia de las cercanías relativas.

Martori, Hoberg y Madariaga (2008) describe la autocorrelación espacial como un fenómeno en el que se identifican las observaciones próximas, bajo el punto de vista espacial, con valores similares de las variables. Esta influencia puede concretarse, según Chasco y Fernández-Avilés (2009) en dos tipos de efectos:

---

<sup>112</sup> W. R. Tobler plantea la evaluación de un modelo de crecimiento urbano en base a la predicción de la distribución de un mapa de población. La reducción de la (excesiva) dimensión del problema exige focalizar las variables consideradas e ignorar la mayor parte del posible universo de estudio.

<sup>113</sup> Chasco y Fernández-Avilés (2009) puntualiza que, bajo un punto de vista estricto, dependencia y autocorrelación corresponden a conceptos diferenciados. La autocorrelación representa una formulación débil de la dependencia, considerando únicamente los primeros momentos de la distribución conjunta de las variables. En la literatura se suelen emplear ambos términos de manera indistinta.

- Autocorrelación espacial positiva, cuando valores altos de una variable se encuentran rodeados, desde el punto de vista geográfico, de términos que también son elevados (esta realidad también se constata para valores bajos). El efecto desbordamiento o *spill-over*, ya considerado en apartados anteriores, constituye el paradigma de esta tipología de dependencia: la presencia de un determinado efecto en una región se traslada a las adyacentes, por lo que el fenómeno se concentra en un ámbito más amplio (es el caso de la típica distribución de rentas elevadas en el norte y reducidas en el sur).
- En términos de Griffith (2006: 336), la autocorrelación espacial negativa “*refers to a geographic distribution of attribute values, or a map pattern, in which the neighbors of locations with large values tend to have intermediate values, and the neighbors of locations with small values tend to have large values*”. El patrón visual corresponde a la típica disposición de casillas en blanco y negro del tablero de ajedrez. Se trata de una manifestación ciertamente anómala, que puede presentarse, por ejemplo, en el tratamiento de regiones con alta densidad que se encuentran rodeadas por otras despobladas (se puede pensar en desplazamientos migratorios de zonas rurales a espacios urbanos). Este autor considera que la gran mayoría de las autocorrelaciones negativas detectadas se deben a la escala geográfica empleada. De este modo se escondería una dependencia positiva subyacente, que saldría a la luz con la simple modificación del tratamiento agregado de las unidades espaciales.

El diagrama de dispersión de Moran ofrece información visual sobre el signo, positivo o negativo, de este efecto. Como resulta evidente, también puede verificarse la ausencia de autocorrelación espacial: esto sucede cuando la variable geográfica se distribuye de manera aleatoria en el espacio, sin presencia de estructuras o asociaciones. Por otro lado, puede verificarse que la detección de un determinado efecto de correlación no esté respondiendo a una auténtica interacción entre las variables. En estos casos se habla de correlaciones espurias o falsas, que se deberían a errores de medida transferidas en las observaciones de unas regiones que corresponderían a otras.

Desde un punto de vista formalizado, la presencia de autocorrelación espacial implica que la covarianza de los valores de pares de variables aleatorias, relativas a observaciones individuales, es distinta de cero. Como señala Anselin (2001) esta covarianza posee sentido espacial cuando la relación entre las variables se establece en términos de estructura o interacciones. Chasco (2003) subraya que, en efecto, los fenómenos humanos se caracterizan por la presencia de estas conexiones, lo que puede modelarse como una relación funcional entre una variable en una determinada localización ( $y_i$ ) y los valores en un conjunto de  $n$  ubicaciones:  $y_i = f(y_1, y_2 \dots y_n)$ . Con este número de observaciones no se dispone de la suficiente información para estimar la matriz de covarianzas  $n \times n$  (el total de parámetros a estimar es  $n^2 - n$  frente a la disponibilidad de  $n$  datos). Arbia (2006) considera que ni siquiera la teoría asintótica (en la que se basan los modelos económicos dinámicos) ofrece soluciones operativas en el contexto espacial<sup>114</sup>. Anselin (2001) enfrenta el comportamiento cuadrático de la covarianza con la evolución lineal del tamaño muestral; la consideración de datos de panel,

<sup>114</sup> Resulta difícil, por ejemplo, considerar la aproximación de los datos espaciales al infinito, dado que el ámbito geográfico se encuentra limitado de manera inherente.

en los que se dispone de un mayor número de observaciones repetidas de *cross-section*, permite explotar la dimensión temporal y aplicar estimaciones no paramétricas de la matriz de covarianza.

En cualquier caso la consideración del problema de autocorrelación requiere imponer una estructura en la covarianza o, como señala Chasco (2003: 53), establecer “*estructuras comunes, subyacentes al fenómeno de interacción que se estudia, de forma que sólo se estime un pequeño número de características propias de la dependencia espacial existente*”. Este planteamiento se lleva a cabo introduciendo el concepto topológico de vecindad. Arbia (2006) recoge tres definiciones de este concepto, muy empleadas en el ámbito econométrico espacial:

- Dos unidades,  $s_i$  y  $s_j$ , son vecinas si se verifica:  $0 \leq d_{ij} \leq d^*$ , siendo  $d_{ij}$  la medida adoptada de la distancia y  $d^*$  una distancia fijada de corte.
- Dos unidades,  $s_i$  y  $s_j$ , son vecinas si  $d_{ij} = \min(d_{ik}) \forall i, k$  (se refiere, por tanto, a los vecinos más cercanos).
- En el caso de campos aleatorios de parámetro discreto se puede asociar el concepto de vecindad a la existencia de un límite común entre dos retículas o polígonos.

Se aprecia que, en efecto, las similitudes con el ámbito temporal son muy reducidas: frente a relaciones basadas en un planteamiento lineal (las que se establecen entre la variable en el presente,  $y_t$ , y sus valores en el pasado,  $y_{t-1}$ , o en el futuro,  $y_{t+1}$ ), las conexiones espaciales de vecindad o contigüidad se pueden extender a todas las posibles direcciones existentes en  $\mathbb{R}^2$ . En la siguiente figura se recogen los criterios de vecindad más empleados en función del tipo de campo aleatorio:

Característica del campo	Concepto de vecindad
Parámetro continuo	Distancia crítica. Esta idea se puede extender a la consideración del camino más corto entre nudos de una red <sup>115</sup> . De este modo, un nudo puede ser vecino de otro si se encuentra dentro de un determinado radio, considerando el segundo como centroide, o porque la distancia corresponda a la del camino con menor longitud entre todas las combinaciones posibles.
Parámetro discreto	Frontera común. En general, dos unidades geográficas de tipo poligonal son vecinas si comparten una determinada limitación del espacio. En el caso de distribuciones sobre mallas regulares se pueden considerar o no los vértices y/o los bordes de las retículas. En esta situación se distinguen tres posibles criterios para identificar la vecindad (así denominados en base al juego del ajedrez): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Criterio de la reina: las fronteras se extienden a bordes y/o vértices comunes, de modo que cada celda tiene ocho vecinos, considerando todas las direcciones.</li> <li>• Criterio de la torre: en este caso se excluyen los vértices y sólo se consideran los bordes comunes. Se trata del concepto más popular en este ámbito.</li> <li>• Criterio del alfil: representa la situación opuesta a la anterior. Únicamente se tienen en cuenta los vértices comunes.</li> </ul>

Tabla 4.7. Criterios más comunes de vecindad

Fuente: elaboración propia, a partir de Chasco y Fernández-Avilés (2009)

Chasco (2003: 54) señala que, a partir de estos planteamientos básicos, “*pueden considerarse varios órdenes de contigüidad de forma recursiva, definiendo el orden de contigüidad k-ésimo*

<sup>115</sup> De este modo se consideran las dos primeras definiciones propuestas por Arbia (2006).

cuando las unidades espaciales son de primer orden contiguas a una unidad espacial de orden  $k$ -ésimo, y no contiguas de orden inferior”.

La estructura de vecindad elegida para el campo aleatorio influye, de manera sustancial, en los resultados de los análisis econométricos espaciales. Por este motivo Arbia (2006) recomienda la comprobación, mediante pruebas, de la robustez de los resultados asociados a distintas definiciones de contigüidad. La expresión analítica de dicha estructura de vecindad se realiza mediante una *matriz de pesos espaciales*<sup>116</sup>. En términos de Anselin et al. (1996: 81), “*these spatial weight matrices represent «degree of potential interaction» between neighboring locations*”.

La consideración más simple (y más empleada) de esta matriz, que se denota como  $W$ , corresponde a una formulación binaria:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in N(i) \\ 0 & \text{eoc} \end{cases} \quad (4.6)$$

$N(i)$  representa el conjunto de todos los vecinos de la unidad  $s_i$ ; por definición  $s_i \notin N(i)$ , es decir,  $w_{ij} = 0, \forall i = j$  (una unidad espacial nunca es vecina de sí misma; por tanto, la diagonal principal de  $W$  está formada por ceros). La matriz de pesos espaciales es simétrica, dado que se supone que las relaciones de vecindad son recíprocas (lo cual no tiene por qué corresponderse con la realidad). En el caso binario que se está estudiando el cardinal de dicho conjunto,  $\eta_i$ , corresponde a  $\sum_j w_{ij}$ .

En general, “*a connectivity matrix thus formally expresses the proximity links existing between all pairs of sites that constitute a random field according to a pre-specified concept of neighbourhood*”, según Arbia (2006: 38). Por tanto, resulta válida la incorporación de cualquier conjunto de pesos que permita aportar a este instrumento el conocimiento o la experiencia disponible sobre el fenómeno de estudio<sup>117</sup>. Cliff y Ord (1973: 12) señala: “*the use of a generalised weighting matrix (...) allows the investigator to choose a set of weights which he deems appropriate from prior considerations. This allows great flexibility*”. Un tratamiento adecuado de la matriz permite modelar factores geográficos, determinadas barreras, formas específicas, etc. En contraposición, la incorporación de estos elementos a la matriz supone incrementar el riesgo de tratamientos subjetivos por parte del investigador y, por tanto, de enmascarar los verdaderos efectos espaciales del problema.

En vista de la definición anterior, un término de esta matriz de pesos espaciales,  $w_{ij}$ , cuantifica del siguiente modo el efecto de una región  $i$  sobre otra  $j$ : (i) si  $w_{ij} = 0$  no existe autocorrelación espacial entre ambas observaciones; y (ii) si  $w_{ij} \neq 0$  se produce una

<sup>116</sup> Los términos empleados en la literatura para designar esta matriz son muy numerosos. Chasco (2003) diferencia la matriz binaria, denominándola de interacciones, frente a la de pesos espaciales, también identificada como de ponderaciones Cliff-Ord. Sin embargo, Arbia (2006) utiliza la expresión genérica *connectivity matrix* para englobar los distintos planteamientos. Por su parte, Chasco y Fernández-Avilés (2009) emplea como equivalentes las siguientes denominaciones: interacciones, pesos, ponderaciones, distancias y contactos.

<sup>117</sup> Aunque resulta recomendable definir la matriz en base a la estructura subyacente de la dependencia espacial, no siempre sucede así. Getis y Aldstadt (2010: 148) señala: “*In many instances,  $W$  has no obvious relationship whatsoever to dependence structure*”.

interacción de carácter espacial, que se puede interpretar, según Chasco (2003: 57), como “*contigüidad de distancias, a través de centroides, dentro de una banda de distancia mínima (considerándose contiguos dos puntos cuando estén situados a una distancia inferior a la prefijada como mínima), o como función inversa de la distancia simple o cuadrática*”. Este amplio enfoque queda recogido en la expresión general de la matriz:  $w_{ij} = g[d_{ij}]$ , siendo  $g$  una función inversa de la distancia. La literatura plantea múltiples expresiones de dicha función, como se verá seguidamente.

En ciertos planteamientos resulta de utilidad la estandarización de los pesos, de modo que la suma de las filas valga la unidad; de este modo se incorpora una ponderación idéntica respecto a la influencia que recibe cada región por parte de las vecinas. Esto implica definir un conjunto de pesos  $w_{ij}^* \in W^*$  tal que:  $w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}} = \frac{w_{ij}}{\eta_i}$ . Así, pues, se cumple  $\sum_j w_{ij}^* = 1$ . El proceso de estandarización puede repercutir en la pérdida de simetría de la matriz y, en general, complicar los procesos de cálculo, aunque también facilita el tratamiento de los retardos espaciales.

Getis y Aldstadt (2010) cita las cinco reglas de Griffith, que ayudan a especificar el contenido de las matrices de pesos: (i) resulta preferible incorporar las distancias al problema, de manera razonable, antes que asumir, directamente, la independencia de las variables; (ii) es mejor trabajar en una participación espacial genérica que sobre celdas o retículas; (iii) lo ideal es considerar muestras con elevados números de unidades espaciales; (iv) en contraposición, los modelos empleados no deberían tener un alto nivel espacial (o sea, lo recomendable es optar por patrones sencillos); y (v) los resultados mejoran cuando se consideran matrices infra-especificadas (con pocos vecinos) que sobre-especificadas. En este contexto de definición de  $W$  consideramos relevante la importancia concedida por Getis y Aldstadt (2010) a los efectos espaciales y al *rango* geoestadístico:

- Por una parte, cuando las variables muestran amplia heterogeneidad espacial, la matriz debería modelarse en base a un reducido número de enlaces; en el caso opuesto, con un escenario, a priori, homogéneo desde el punto de vista geográfico, la formulación de  $W$  consideraría un elevado número de conexiones.
- Por otro lado, la escala de representación también posee notable relevancia, dado que influye directamente en la identificación de la estructura de dependencia de las variables.

Como se ha indicado, la matriz de pesos debería considerar efectos de interacción directamente relacionados con el fenómeno específico que se está estudiando, ampliando la visión meramente geográfica de las relaciones entre las variables. Se describen seguidamente algunos de los planteamientos propuestos en la literatura, según la revisión de Chasco (2003) y Getis y Aldstadt (2010):

- La propuesta de Dacey, en 1968, corresponde a:  $w_{ij} = d_{ij} \cdot \alpha_i \cdot \beta_{i(j)}$ , siendo  $\alpha_i$  la proporción de la región  $i$  sobre el área total y  $\beta_{i(j)}$  el porcentaje del perímetro  $i$  en contacto con  $j$ .

- Cliff y Ord (1973) revisa la idea anterior y plantea el grado de interrelación en términos de distancia entre los centros de las regiones (se elimina el concepto de área regional) y la longitud de la frontera común:  $w_{ij} = \frac{(\beta_{i(j)})^b}{d_{ij}^a}$ , con  $a$  y  $b$  parámetros positivos, que permiten conceder más importancia a pares de unidades con centros dispuestos a menor distancia y fronteras más extensas.
- Un modelo particular respecto al planteado por estos dos autores, en el que de nuevo se vuelve a otorgar menor influencia a regiones que se encuentran a más distancia, es el gravitacional, propuesto por Anselin en 1980, cuya formulación más genérica corresponde a:  $w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^a}$ , con  $a > 0$  (el caso más habitual<sup>118</sup> es  $a = 2$ ).
- Case, Rosen y Hines (1993) recoge  $w_{ij} = \frac{1}{|x_i - x_j|}$ , siendo  $x$  una variable socioeconómica, como, por ejemplo, el PIB.
- En Molho (1995) se considera el volumen de empleo,  $E$ , para medir la autocorrelación, obviándose por tanto el componente geográfico:  $w_{ij} = \frac{E_j^{-ad_{ij}}}{\sum_{k \neq i} E_k^{-ad_{ik}}}$ ,  $\forall i \neq j$ .
- Existen diversas aproximaciones en las que las funciones de pesos disminuyen en relación al ancho de banda (de modo que, variando este parámetro, se modifica el comportamiento de la curva, potencial o exponencial). Brunsdon et al. (1996) propone:  $\varpi = \sqrt{e^{-\frac{d}{\theta}}}$ , siendo  $d$  una medida de distancia y  $\theta$  el parámetro "bandwidth".
- Fotheringham et al. (1996) también plantea un esquema en el que el efecto disminuye con el ancho de banda; para ello se debe fijar un valor experimental,  $k$ , de corte:

$$\varpi(r) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r}{k}\right)^2\right)^2 & \text{si } r \leq k \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Otro esquema posible, muy similar en forma al anterior, corresponde a la función "tricube", planteada por McMillen y McDonald (2004):  $\varpi = \left(1 - \left(\frac{d}{q^*}\right)^3\right)^3$ , para  $d < q^*$  siendo  $q^*$  la distancia del vecino de orden  $q$  más cercano a la observación realizada. El peso es nulo cuando  $d$  es superior a esta distancia.
- Toral (2000) formula la matriz en base a criterios de índole netamente espacial:  $w_{ij} = \delta_{ij} \frac{k_i k_j p_i p_j}{d_{ij}^a}$ , con  $\delta_{ij} = 1$  si las unidades  $i$  y  $j$  tienen frontera en común (0 en otro caso),  $k$  expresando el valor de la longitud en kilómetros de las carreteras en ambos elementos,  $p$  identificado como el valor de la población en cada región,  $d_{ij}$  la distancia por carretera entre los centros (capitales) de  $i$  y  $j$ , y el parámetro  $a > 0$ , pudiendo tomar los valores 0, 1 ó 2.
- La matriz de pesos de Van der Kruk (2001) se expresa como:  $W = \sum_{d=1}^D W_d$ , con  $d$  el orden de vecindad y  $D$  el número máximo de órdenes de vecindad identificados.

<sup>118</sup> A mayor valor del exponente menor influencia de los vecinos.



- LeSage (2004) emplea una función gaussiana, que también disminuye con la distancia:  $w_i = \phi\left(\frac{d_i}{\sigma\theta}\right)$ , siendo  $\phi$  la función de densidad Normal y  $\sigma$  la desviación estándar del vector de distancias  $d_i$ .

Getis y Aldstadt (2010) propone la construcción de una matriz de pesos mediante el empleo del estadístico local  $G_i^*$  de Getis, el cual proporciona: (i) una cuantificación positiva si existen agrupaciones de variables con valor elevado alrededor de  $i$ ; y (ii) un término negativo cuando estos *clusters* se encuentran constituidos por variables con valores reducidos. Las medidas de  $G_i^*$  se recuentan y acumulan a medida que se incrementa la distancia de observación, hasta alcanzar un valor crítico,  $d_c$ , a partir del que el estadístico deja de aumentar. Denominando  $d_{NN1}$  a la distancia hasta el primer vecino más cercano a  $i$ ,  $G_i^*(d_c)$  el valor del estadístico de Getis asociado a la distancia crítica y  $G_i^*(0)$  la base sobre la que se comparan el resto de medidas de  $G_i^*$ , se puede identificar el valor de cada elemento de la matriz  $W$ :

Si  $d_c > d_{NN1}$ ,

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{|G_i^*(d_c) - G_i^*(d_{ij})|}{|G_i^*(d_c) - G_i^*(0)|} & \forall j \text{ donde } d_{ij} \leq d_c \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Si  $d_c = d_{NN1}$ ,

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para toda } j \text{ donde } d_{ij} = d_c \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Si  $d_c = 0$ ,  $w_{ij} = 0 \forall j$

La asociación tiene en cuenta la proximidad de los valores entre variables, de ahí que todos los términos de  $w_{ij}$  sean mayores o iguales que cero. Precisamente un problema importante de esta construcción es el elevado número de filas nulas que genera, dado que la correlación espacial vale cero en la distancia crítica y por encima. Este efecto se compensa introduciendo una variable ficticia, a la que se asigna el valor unitario cuando se detecta una estructura de dependencia.

Por su interés en este contexto se destaca la investigación de Dray, Legendre y Peres-Neto (2006) sobre estructuras espaciales y relaciones de dependencia establecidas en el seno de ecosistemas naturales. El estudio aplica una aproximación denominada *principal coordinates of neighbour matrices* (PCNM), relacionada de manera muy directa con las funciones estructurales de la autocorrelación espacial. Este método consiste básicamente en: (i) diagonalizar una matriz de pesos espaciales, truncada previamente en base a una determinada regla (esta diagonalización se lleva a cabo mediante un análisis de coordenadas principales o PCoA); (ii) extraer los autovectores que maximizan el índice de Moran de autocorrelación; y (iii) emplear dichos autovectores en la regresión de modelos o, directamente, para explicar los resultados.

La técnica PCoA se puede aplicar sobre la matriz de pesos o sobre la denominada matriz de similitudes,  $S$ , que se obtiene a partir de la primera. En el análisis de Dray et al. (2006) se

emplea la siguiente formulación:  $S = [s_{ij}] = \left[ 1 - \left( \frac{d_{ij}}{\max(d_{ij})} \right)^2 \right]$ . El valor de las componentes se extiende desde 0 ( $d_{ij} = \max(d_{ij})$ ) hasta 1 ( $d_{ij} = 0$ ). Aunque  $S$  se puede interpretar como un grafo ponderado, resulta más interesante identificarla, a su vez, como otra matriz de pesos espaciales, que recoge la fuerza de las interacciones potenciales entre las unidades espaciales. De este modo, todas las ubicaciones se consideran vecinas, a excepción de las más alejadas, en las que la similitud se vuelve nula.

Como indica Chasco (2003: 60): “La matriz de ponderaciones espaciales hace posible la conexión entre el valor de una variable en un punto del espacio geográfico y las observaciones de dicha variable en otros puntos del sistema”. Es sabido que en el ámbito de las series temporales esta relación se establece en base a operadores de retardo; a partir del conjunto de variables aleatorias  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ , se aplica  $L(X_{t_i}) = X_{i-1}$ , que provoca un desplazamiento hacia la unidad adyacente en la escala del tiempo. Este planteamiento se puede extender a un mayor número de períodos,  $s$ , en el pasado:  $L(X_{t_i})^s = X_{i-s}$ . Sólo existe proximidad en una dirección, de modo que únicamente se requiere fijar la cuantificación del movimiento.

Este concepto no resulta tan simple en el ámbito espacial, caracterizado por la multidimensionalidad de la noción de proximidad. En principio, cualquier variable vecina a la observada (en función de la definición de vecindad identificada) podría identificarse con el retardo. El planteamiento más habitual consiste en extender esta relación al conjunto de unidades vecinas, considerando la suma ponderada<sup>119</sup> de sus efectos. En esta línea, Arbia (2006) desarrolla la definición de valor espacialmente retardado (*spatially lagged value*) de una variable aleatoria  $X(s_i)$  dado un campo aleatorio  $\{X(s), s \in S\}$  como:  $L[X(s_i)] = \frac{1}{\eta_i} \sum_{s_j \in N(i)} X(s_j)$ .

Esta expresión se puede desarrollar y simplificar, como se indicaba anteriormente, teniendo en cuenta el proceso de estandarización:  $L[X(s_i)] = \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^n w_{ij} X(s_j) = \sum_{j=1}^n w_{ij}^* X(s_j)$ . En notación matricial:  $L[X(s)] = W^* X(s)$ , con  $X(s)$  el vector columna  $(X(s_1), X(s_2) \dots X(s_n))^T$ .

La extensión del retardo a órdenes superiores en el contexto espacial resulta posible, empleando la noción de contigüidad. Chasco (2003) señala que esto tiene significado únicamente en el contexto de matrices de pesos binarias y, además, su aplicación resulta compleja, dado el riesgo de introducir rutas circulares o trayectorias redundantes (es decir, que en las interacciones ya se haya introducido una conexión considerada anteriormente).

La necesidad de disminuir el número de parámetros que caracteriza al campo aleatorio para obtener su estimación estadística implica introducir restricciones en el ámbito de la dependencia espacial. Arbia (2006) considera la ergodicidad como la limitación más *débil* en este contexto, tras el tratamiento de conceptos como independencia o *incorrelación* asintótica. De nuevo, se trata de un concepto trasladado desde el entorno de las series temporales y que hace referencia a la memoria de los procesos. La presencia de este efecto garantiza que la media y covarianza de la variable aleatoria coinciden con las de las

<sup>119</sup> En matrices binarias el retraso espacial se corresponde con la suma de los valores de las variables vecinas.

observaciones singulares realizadas. Expresado de una manera formalizada, un campo aleatorio se considera ergódico si:

$$\lim_{d_{ij} \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \sum_{d_{ij}} \rho(s_i, s_j) = 0 \quad (4.7)$$

Este sumatorio se extiende a todas las posibles distancias y  $\Delta$  representa el número de las mismas.

La consecuencia de este fenómeno es que las medias y momentos espaciales convergen en probabilidad a su expresión clásica:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{p} \mu \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_j - \mu)(x_i - \mu) \xrightarrow{p} \gamma(d_{ij}) \quad (4.10)$$

#### 4.3.4 La heterogeneidad espacial

El segundo de los grandes efectos espaciales identificado por Anselin (1988) se relaciona, en términos de Chasco (2004), con la diferenciación regional de las unidades, de modo que las formas funcionales y parámetros varían con la localización geográfica. El fenómeno más evidente y conocido de heterogeneidad corresponde a la diferenciación de datos transversales entre regiones ricas del norte y pobres del sur.

Anselin (2001: 3-4) define este concepto como “*simply structural instability in the form of non-constant error variances (heteroskedasticity) or model coefficients (variable coefficients, spatial regimes)*”. Por su parte, bajo un enfoque complementario, Arbia (2006) analiza las posibles restricciones al concepto de heterogeneidad, asociadas a la necesidad de reducir el número de parámetros a ser estimados en el tratamiento de la función agregada de distribución de probabilidad  $F(X(s), \theta_s)$ . En este sentido se puede considerar recomendable el tratamiento de campos aleatorios que preserven un grado adecuado de generalidad y que, en paralelo, muestren cierto nivel de homogeneidad espacial. Un subconjunto con estas características es el correspondiente a los campos aleatorios estacionarios, en los que la función agregada de distribución de probabilidad no varía cuando se produce un desplazamiento en el espacio. Se pueden considerar dos clases distintas de movimiento:

- El traslado con un movimiento rígido o traslación. En tal caso, el campo aleatorio permanece sin cambios en lo relativo a  $F(X(s), \theta_s)$  y, con propiedad, se identifica como homogéneo (frente a la opción de ser heterogéneo).
- La rotación con un cierto ángulo: cuando el campo aleatorio no varía en esta situación se dice que es isótropo (frente a su opuesto, la anisotropía). La estructura de dependencia no cambia, de manera sistemática, a lo largo de distintas direcciones.

La verificación de estos dos supuestos identifica al campo aleatorio como estacionario en sentido estricto: los momentos univariantes y sus correspondientes mezclas no cambian aunque se modifique el espacio de referencia. En la práctica se trata de una situación muy poco frecuente. Como señala Anselin (2006) lo habitual es acudir a relajaciones de un cierto orden en el nivel estacionario.

En general, la literatura ha concedido una menor atención al problema de la heterogeneidad debido a la posibilidad de aplicar técnicas econométricas estándar para afrontar su tratamiento (por ejemplo mediante análisis *cluster*). Sin embargo, Anselin (2001), citado por Chasco (2003, 2004) considera relevante desarrollar en este estudio en el contexto de la econometría espacial debido a las siguientes razones:

- En base a la propia esencia del concepto: la problemática de la inestabilidad y variabilidad espacial posee un alto componente geográfico.
- Se trata de un fenómeno que se suele presentar conjuntamente con problemas de autocorrelación espacial. En este contexto los contrastes habituales dejan de tener validez, al encontrarse sesgados.
- Finalmente, los dos efectos espaciales pueden identificarse de manera equivalente, por ejemplo en el tratamiento de modelos de regresión de corte transversal. Siguiendo a Anselin (2001) Chasco (2003, 2004) considera que un *cluster* de residuos es susceptible de una interpretación tanto en términos de heterocedasticidad de grupos (*groupwise*), asociada a la heterogeneidad espacial, o como un efecto directo de la autocorrelación espacial.

La definición propuesta por Anselin (2001) orienta el estudio de este fenómeno en dos sentidos. Por una parte, considerando la heterocedasticidad espacial: Chasco (2003: 115) la identifica como “ausencia de estabilidad en la dispersión de un fenómeno, como sucede muchas veces con los residuos de una regresión”. Anselin (2001) lo expresa de manera más formal cuando considera un conjunto  $S$  de unidades geográficas, estableciendo una partición en  $N$  subconjuntos  $S_n$  ( $n = 1 \dots N$ ) compactos y no solapados, y procede a señalar que la heterocedasticidad en el grupo se expresa en términos de la varianza del error dada una observación  $i$ :  $Var(\varepsilon_i) = \sigma_n^2$  con  $i \in S_n$ . Chasco (2003, 2004) señala que esto significa que la varianza de una perturbación aleatoria deja de ser una constante y pasa a ser distinta para cada observación muestral.

Al excluir del modelo correspondiente de regresión espacial los términos asociados a la autocorrelación se obtiene el patrón de error heterocedástico (caso particular de los modelos de perturbaciones aleatorias no esféricas). A finales de la década de los ochenta y principios de los noventa se desarrollaron diversas taxonomías relacionadas con el modelo de regresión

espacial, en las que se incluyen, de forma agregada y escalonada, los dos grandes efectos espaciales; las correspondientes expresiones se exponen en esta sección, a fin de establecer seguidamente su relación con el patrón genérico de heterocedasticidad.

En la siguiente tabla se resumen los aspectos más importantes del planteamiento expuesto:

Consideraciones respecto a la regresión espacial		
Primera tipología. Anselin (1988)		
Identificación	Formulación	Observaciones
Modelo autorregresivo (autocorrelación espacial univariante)	$y = \rho W y + u$ $u \sim N(0, \sigma^2 I)$	Resulta adecuado para situaciones en las que los valores de una determinada variable dependen de manera sistemática de la localización geográfica.
Modelo básico de regresión espacial	$y = X\beta + u$ $u \sim N(0, \sigma^2 I)$	Es un modelo válido si el efecto espacial queda totalmente explicado por los valores de variables explicativas.
Modelo de error espacial (dependencia espacial en la perturbación aleatoria)	$y = X\beta + u$ $u = \lambda W u + \varepsilon$ $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$	En este caso $u$ corresponde a una perturbación aleatoria distribuida según un proceso AR(1). Al existir factores no identificados según el patrón anterior se procede a incorporarlos en el término de error.
Modelo de auto-retardo espacial (mixto)	$y = \rho W y + X\beta + u$ $u \sim N(0, \sigma^2 I)$	Se considera la influencia de las variables omitidas a través de una variable dependiente retardada espacialmente.
Segunda tipología. Florax y Folmer (1992)		
Identificación	Formulación	Observaciones
Modelo general de regresión espacial (contempla perturbaciones aleatorias autorregresivas y heterocedásticas)	$y = \rho W_1 y + X\beta_1 + W_2 R\beta_2 + u$ $u = \lambda W_3 u + \varepsilon$ $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$ $\Omega_{ii} = h_i(Z\alpha), h_i > 0$	El modelo considera los dos efectos espaciales. La incorporación de restricciones en el vector de parámetros $[\rho, \beta_1, \beta_2, \theta, \lambda, \alpha]$ permite identificar planteamientos particulares y deducir la especificación adecuada <sup>120</sup> .
Consideraciones respecto a la heterocedasticidad		
Identificación	Formulación	Observaciones
Modelo de error heterocedástico	$y = X\beta + u$ $Var(u_i) = \sigma_i^2 I$ $E[uu'] = \Omega$	El modelo requiere fijar una estructura de la varianza para poder ser identificado.
Se identifican seguidamente los términos generales que aparecen en las expresiones anteriores: $y$ : vector de observaciones de la variable dependiente (o endógena). $W_{(i)}$ : matrices de pesos espaciales. Por tanto, $W \cdot$ constituye el retardo espacial de la variable correspondiente. $\rho$ y $\lambda$ : coeficientes de autorregresión (recogen la intensidad de las interdependencias entre las variables asociadas). $u$ y $\varepsilon$ : perturbaciones aleatorias. $X$ , $R$ y $Z$ : matrices de variables independientes. $\beta_i$ : vector de parámetros de las variables independientes. $\Omega$ : matriz de covarianzas. $\alpha$ : vector asociado a los términos no constantes de la matriz $Z$		

Tabla 4.8. Modelos de regresión espacial y modelo de error heterocedástico

Fuente: elaboración propia a partir de Chasco (2003, 2004).

<sup>120</sup> Por ejemplo  $\rho = \beta_2 = \theta = \lambda = \alpha = 0$  se corresponde con el modelo básico de regresión lineal.

En el ámbito de los modelos de regresión espacial, la inclusión de las variables endógenas retardadas espacialmente resulta similar a la introducción del desfase temporal en el contexto de las series temporales<sup>121</sup>. Sin embargo, en el primer caso se presenta un problema de autocorrelación entre dicha variable y el término de error: esto supone que el estimador mínimo cuadrado no resulta consistente.

Se omite en nuestro estudio<sup>122</sup> el tratamiento de las taxonomías de modelos de externalidades espaciales, desarrollada en Anselin (2001). Bajo este interesante enfoque los *spill-overs* se expresan como multiplicadores espaciales y se alcanzan diferentes especificaciones, en base a que los retardos espaciales afecten a la variable endógena, a las explicativas o a las perturbaciones aleatorias.

Chasco (2004) relaciona tres posibles estructuras de la varianza de las perturbaciones aleatorias:

- Heterocedasticidad aditiva: en este caso la varianza se expresa como función lineal de un conjunto de  $Z$  variables heterocedásticas (coincidentes o no con las explicativas). De este modo se expresa  $Var(u) = Z \cdot \zeta$ , con  $\zeta$  el vector de coeficientes.
- Heterocedasticidad de coeficientes aleatorios: la perturbación aleatoria se relaciona con el cuadrado de las  $Z$  variables explicativas (que muestran problemas de heterocedasticidad). Por tanto:  $Var(u) = Z^2 \cdot \zeta$ .
- Heterocedasticidad de grupos (*groupwise*): las  $Z$  variables heterocedásticas corresponden en esta situación a variables categóricas y el modelado se puede realizar “a través de tantos valores de la varianza de la perturbación aleatoria como distintos grupos geográficos compactos puedan derivarse de los datos”, Chasco (2003: 105).

Esta autora señala que el modelo de error heterocedástico puede estimarse a través de mínimos cuadrados generalizados factibles o mediante máxima verosimilitud.

Retomando la definición de Anselin (2001) nos centramos en la inestabilidad paramétrica, consistente en la variación, tanto en la forma funcional como en los parámetros, de la regresión. En este contexto existen relaciones concretas, asociadas a cada localización, entre la variable endógena y las variables explicativas, lo que impide estimar los términos asociados con un número limitado de observaciones. Chasco (2004) se refiere al estudio de LeSage (1999), en el que se plantea un mecanismo de análisis basado en asumir la especificación de la variación espacial y procede seguidamente a su contraste con la información obtenida de la muestra. En este contexto se pueden diferenciar las formas recogidas en la siguiente tabla:

Modelos con inestabilidad paramétrica continua: los parámetros experimentan una deriva espacial continua.		
Identificación	Formulación	Observaciones
Modelo espacial de parámetros aleatorios	$y_i = X_i^T \beta_i$ $\beta_i = \beta + \mu_i$	Se trata de un caso particular de la estructura de heterocedasticidad de coeficientes aleatorios.

<sup>121</sup> Desarrollando los modelos combinados, con términos sustantivos y residuales, se puede obtener la especificación de un modelo mixto espacial *SARMA* ( $p, q$ ).

<sup>122</sup> Se incorporan las referencias específicas y necesarias en el tratamiento de mixturas, en la sección ().

Modelo de expansión espacial	$\beta_j = \zeta_0 + \zeta_1 m_j + \zeta_2 p_j$	La deriva se expresa en términos de las denominadas variables de expansión. La formulación adjunta corresponde a una simplificación del modelo original, considerando dependencia directa del espacio geográfico.
Modelo de superficie tendencial	$y = a + b_1 m + b_2 p + b_3 m^2 + b_4 p^2 + b_5 mp + u$	Las variables explicativas de este modelo de regresión se corresponden con las coordenadas terrestres de una determinada localización. La expresión () corresponde a un modelo de segundo orden. El gran problema de estos patrones es la fuerte multicolinealidad que introducen.
Modelo de regresiones ponderadas geográficamente	$y = X\beta + u$	El modelo se caracteriza por la estimación de los parámetros a través de mínimos cuadrados, constituyendo los pesos una función de la distancia entre cada punto y el resto.
Modelos con inestabilidad paramétrica discreta: en este caso la muestra de datos se divide en un número acotado de estructuras distintas, lo que permite obtener estimaciones eficientes (se reduce el número de grados de libertad del sistema).		
Modelo SANOVA (ANOVA espacial)	$y = b_0 + b_1 f + u$ $u \sim N(0, \sigma^2 I)$	Corresponde a la aplicación de ANOVA clásico en el contexto espacial (por ello se suele emplear en análisis exploratorio univariante). Permite medir las posibles diferencias significativas entre la media de una cierta variable y determinados grupos de datos.
Modelo espacial de regresiones cambiantes ( <i>switching regressions</i> )	$y^* = X^* \beta^*$ En este caso $X^*$ representa una matriz diagonal integrada por subconjuntos de variables explicativas.	Se estima un número de coeficientes de regresión similar al de regímenes espaciales establecidos.
En las expresiones anteriores se consideran los siguientes términos (no se relacionan los ya descritos en la Tabla 4.8): $X_i$ : vector de variables independientes. $\beta_i$ : vector de coeficientes para cada observación $i$ . $\zeta_i$ : vector de coeficientes de las variables correspondientes. $m_{(i)}$ : coordenada geográfica de longitud $p_{(i)}$ : coordenada geográfica de latitud $b_i$ : coeficientes de regresión. $f$ : variable categórica que identifica las estructuras.		

Tabla 4.9. Descripción de modelos con inestabilidad paramétrica continua

Fuente: elaboración propia a partir de Chasco (2003, 2004).

#### 4.4 Modelización espacial de $\beta$ -convergencia

Con objeto de normalizar algunos conceptos relacionados con la notación se expresa, previamente, la ecuación que gobierna los procesos de  $\beta$ -convergencia, en la que se consigna, como variable dependiente, la tasa de crecimiento que experimenta una magnitud observada (en nuestro caso la renta) durante  $T$  períodos de tiempo:

$$y = \frac{\ln(x_T) - \ln(x_1)}{T} \quad (4.11)$$

La variable independiente es el valor inicial de dicha magnitud,  $x_1$ , por lo que una primera aproximación a la regresión consiste en el siguiente modelo de lineal (MRL), descrito matricialmente:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (4.12)$$

Como se ha indicado,  $Y$  es el vector columna que contiene la tasa de crecimiento para cada una de las  $n$  unidades geográficas disponibles,  $X$  es la matriz de  $n$  filas y 2 columnas, la primera formada por unos y la segunda almacenando el valor inicial de la magnitud, mientras que  $\varepsilon$  va a representar en este caso el vector de los  $n$  errores. Ya se ha señalado que la matriz  $X$  podría incluir otras variables potencialmente predictoras.

La realización de inferencias sobre el modelo MRL requiere, como es sabido, las hipótesis habituales de normalidad, homocedasticidad e independencia. Sin embargo, la naturaleza espacial de los datos analizados obliga a utilizar modelos que tengan en cuenta ese fenómeno y que se relacionan en la Tabla 4.8. En nuestro estudio se han construido los siguientes modelos espaciales (expresados según la notación que se empleará en esta sección; en todos ellos se considera una matriz de pesos espaciales  $W$  de dimensiones  $n \times n$ ):

Modelo	Formulación
Retardo espacial	$Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon$ $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$
Retardo espacial de Durbin	$Y = \rho WY + X\beta + \delta WX + \varepsilon$
Retardo espacial con error autorregresivo	$Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon = \lambda W\varepsilon + u,$ $u \sim N_n(0, \sigma_u^2 I_n)$
Error autorregresivo	$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon = \lambda W\varepsilon + u, \quad u \sim N_n(0, \sigma_u^2 I_n)$

Tabla 4.10. Modelos considerados en la modelización espacial de la  $\beta$ -convergencia.

Fuente: LeSage y Pace (2009).

Los cuatro modelos expuestos pueden ser ajustados con la ayuda de la librería *spdep* de R (Bivand y Piras, 2015), que ofrece funciones para realizar la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros de los distintos modelos, incluyendo mecanismos apropiados para el tratamiento de las dificultades computacionales que pueden surgir en estos procesos. En concreto, los dos primeros modelos pueden estimarse con la función *lagsarlm*. Para el modelo de retardo espacial de error autoregresivo se ha utilizado la función *sacsarlm*, y para el cuarto modelo se ha empleado la función *errorsarlm*.

Dada la disponibilidad de distintos modelos, surge la necesidad de disponer de criterios apropiados para medir la bondad del ajuste proporcionado por cada uno, y que sirvan también para seleccionar el modelo más apropiado. Entre la variedad de diagnósticos existentes, tras la revisión de diversos estudios empíricos y textos, se ha optado por los siguientes criterios, cuya implementación en R se describe con detalle en Bivand et al. (2013).

- Criterios de Información: se han calculado los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano de Schwarz (BIC).
- Test de autocorrelación espacial de Moran. Se ha calculado el estadístico global  $I$  de Moran y el p-valor correspondiente para contrastar la hipótesis nula de no existencia



de correlación espacial. En las tablas se muestra el estadístico I estandarizado. Se ha empleado la función *moran.test* de la librería *spdep* de R (Bivand y Piras, 2015).

- Estudio de la significatividad de los coeficientes: si bien la salida de las funciones R previamente comentadas proporciona tablas con los valores z asintóticos para los contrastes de significación de cada coeficiente, la fiabilidad de estos procedimientos puede verse mermada si los residuos resultantes exhiben señales de heterocedasticidad. Para detectar esta problemática se ha utilizado el test de Breusch-Pagan (Breusch y Pagan, 1979), implementado en la función *bptest* de la librería *lmtest* R. En caso de resultar significativo se debe recurrir a una estimación más eficiente del error estándar de cada coeficiente. En nuestro estudio se ha utilizado la función *vcovHC* de la librería *sandwich* (Zeileis, 2004), que obtiene una estimación consistente frente a heterocedasticidad de los coeficientes del modelo de regresión lineal. Posteriormente se ha utilizado la función *coeftest* de la librería *lmtest* (Zeileis y Hothorn, 2002) para realizar inferencias sobre los coeficientes utilizando los estimadores del error estándar resultantes de la anterior estimación consistente.

Las siguientes tabla recoge los principales criterios calculados para los distintos modelos espaciales que han sido construido para analizar la beta-convergencia sobre las regiones EU-28, siendo la variable el PIB per cápita. Se ha trabajado con dos matrices de pesos espaciales, W4 y Wk10, definidas previamente.

Modelos	Retardo espacial	Durbin	Retardo espacial y error autorregresivo	Error autorregresivo
AIC	-1590.7	-1593.6	-1592.4	-1556.3
BIC	-1576.3	-1575.7	-1574.5	-1541.9
I de Moran	2.274(*)	3.389(***)	-0.181	4.221(***)
$\beta$	-5.931e-07 (***)	-4.138e-07(***)	-5.560e-07(***)	-6.125e-07(***)
$\rho$	0.977 (***)	0.964 (***)	0.957 (***)	
$\delta$		-4.271e-07(*)		
$\lambda$			0.332 (.)	0.987 (***)

Tabla 4.11. Modelos espaciales. Matriz de pesos espaciales W4.

Fuente: elaboración propia.

. pv<0.1; \* pv<0.05; \*\* pv<0.01; \*\*\* pv<0.001

Modelos	Retardo espacial	Durbin	Retardo espacial y error autorregresivo	Error autorregresivo
AIC	-1594.0	-1592.0	-1592.1	-1584.0
BIC	-1579.5	-1574.1	-1574.1	-1569.7
I de Moran	0.422	0.258	0.145	-0.357
$\beta$	-4.911e-07 (***)	-5.091e-07(***)	-5.091e-07(***)	-5.245e-07(***)
$\rho$	0.793(***)	0.801 (***)	0.779 (.)	
$\delta$		4.738e-07 (***)		
$\lambda$			0.068	0.887 (***)

Tabla 4.12. Modelos espaciales. Matriz de pesos espaciales Wk10

Fuente: elaboración propia.

. pv<0.1; \* pv<0.05; \*\* pv<0.01; \*\*\* pv<0.001

Las tablas resumen muestran que en general es preferible trabajar con la matriz de pesos  $W_{k10}$ , ya que para los cuatro modelos construidos con la matriz  $W_4$  el estadístico global de Moran resulta ser no significativo. Además, el único modelo con el que se obtiene un estadístico  $I$  no significativo incluye un parámetro débilmente significativo (tercer modelo). El test de autocorrelación espacial de Moran, unido a los criterios AIC y BIC (los de menor valor), sugieren que el mejor ajuste se obtiene con el modelo de retardo espacial con la matriz de pesos espaciales  $W_{k10}$ , seguido por el modelo de Durbin.

Los modelos de regresión espacial explotan la estructura de dependencia existente entre las unidades geográficas estudiadas. Un cambio en una sola observación (región) debido a una variable predictora afecta a la propia región (impacto directo) y puede afectar a otras regiones (impacto indirecto). De hecho, un aspecto distintivo de los modelos econométricos espaciales es la habilidad para capturar estas interacciones. Sin embargo, la interpretación de las estimaciones de los parámetros se ve dificultada por estas interacciones entre regiones.

En un modelo de regresión lineal, cada coeficiente se interpreta directamente como la derivada parcial de la variable dependiente respecto de la correspondiente variable independiente (debido a las hipótesis de linealidad e independencia):

$$y_i = \sum_{r=1}^k x_{ir}\beta_r + \epsilon_i \xrightarrow{\epsilon_i \text{ indep.}} \frac{\partial y_i}{\partial x_{ir}} = \beta_r \quad \forall i, r; \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_{jr}} = 0 \quad \forall j \neq i, \forall r \quad (4.13)$$

Sin embargo, la interpretación de los coeficientes en modelos con retardos espaciales de  $Y$  o de  $X$  requiere ciertas precauciones y obliga a tener en cuenta la teoría de impactos. LeSage y Pace (2009) presenta con detalle estos conceptos, que se describen brevemente a continuación. Como ilustración se va a considerar el modelo de Durbin, distinguiendo el término independiente, y se supone una sola variable predictora cuyos valores se recogen en el vector  $X$  para simplificar la notación, siendo  $\underline{1}_n$  el vector columna formado por unos:

$$Y = \rho WY + \alpha \underline{1}_n + X\beta + \delta WX + \epsilon \quad (4.14)$$

Por tanto:

$$(I_n - \rho W)Y = X\beta + \delta WX + \alpha \underline{1}_n + \epsilon \quad (4.15)$$

$$Y = S(W)X + \alpha V(W)\underline{1}_n + V(W)\epsilon \quad (4.16)$$

Respecto a esta última ecuación:

$$S(W) = V(W)(I_n\beta + \delta W) \quad (4.17)$$

$$V(W) = (I_n - \rho W)^{-1} = I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \dots \quad (4.18)$$

Se puede demostrar (LeSage y Pace, 2009) que:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = S(W)_{ij} \quad \forall i, j \quad (4.19)$$

Se deduce entonces que un cambio en la variable predictora en una región puede afectar a la variable dependiente en una o más regiones.

En particular:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = S(W)_{ii} \quad \forall i \quad (4.20)$$

Por lo que cada elemento de la diagonal de  $S(W)$  mide el impacto sobre la variable dependiente en la región  $i$  cuando cambia la variable predictora en dicha región. Este impacto incluye el efecto de retroalimentación entre regiones, es decir, efectos calculados sobre una secuencia de regiones que empiezan y acaban en la región  $i$ .

La media de estos impactos se conoce con el nombre de impacto directo medio, que se define como la media de los impactos debidos al efecto que produce un cambio en la variable predictora sobre la variable dependiente. Se obtiene a partir de la media de la diagonal de  $S(W)$ :

$$IMP_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(W)_{ii} = \frac{1}{n} tr(S(W)) \quad (4.21)$$

La suma de la fila  $i$ -ésima de  $S(W)$  permite cuantificar el impacto sobre la variable dependiente en la región  $i$  que resulta de cambiar la variable predictora por la misma cantidad en todas las regiones, por lo que esta suma es conocida con el nombre de impacto total sobre una observación.

De manera similar, la suma de la columna  $i$ -ésima recibe el nombre de impacto total desde una observación. Es inmediato que las medias de ambos tipos de impactos totales (*desde* y *sobre*) coinciden, y la media resultante se conoce como impacto medio total:

$$IMP_t = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^t S(W) \mathbf{1}_n \quad (4.22)$$

La diferencia entre ambos impactos medios se conoce con el nombre de impacto medio indirecto:

$$IMP_{ind} = IMP_t - IMP_d \quad (4.23)$$

El estudio de los impactos *sobre* y *desde* una observación permite detectar cuáles son las regiones más sensibles a cambios en las demás regiones o bien cuáles tienen mayor influencia sobre las demás. En nuestro estudio se han calculado estos indicadores, si bien no se utilizan las expresiones directas para  $S(W)$ , sino que se han empleado expresiones alternativas mucho más eficientes descritas en LeSage y Pace (2009). Con este enfoque se han generado mapas según el nivel de los impactos *desde*, con cuatro categorías, para los dos modelos mejores, ambos con Wk10. Los resultados se muestran en la siguiente figura:

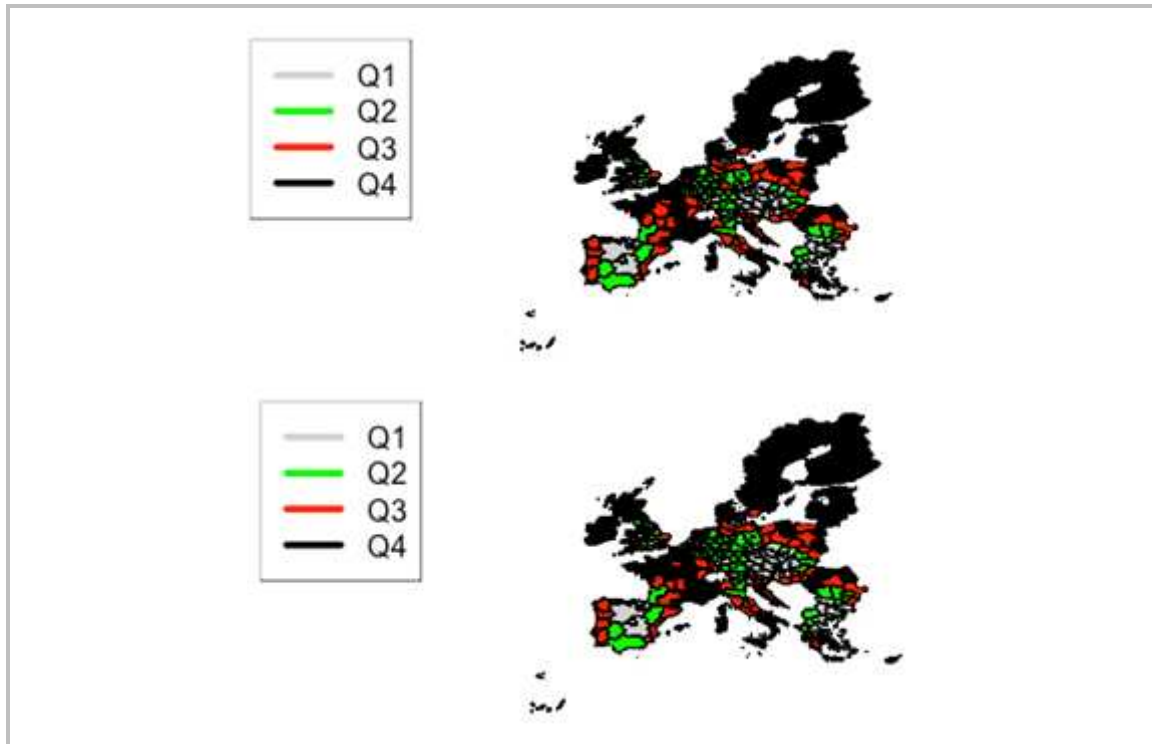


Figura 4.2. Mapas de impactos en base a la matriz Wk10  
Fuente: elaboración propia.

## 4.5 Clubs de convergencia

### 4.5.1 Desarrollo teórico

El agrupamiento o *clustering* es otro de los conceptos que se ha trasladado por analogía desde el ámbito de las series temporales al de la econometría en general, con importantes repercusiones en el contexto espacial. Liao (2005: 1857) destaca como objetivo central de las técnicas existentes en este campo “*to identify structure in an unlabeled data set by objectively organizing data into homogeneous groups where the within-group-object similarity is minimized and the between-group-object dissimilarity is maximized*”. Montero (2014) subraya la importancia de una partición no supervisada de datos no etiquetados, así como del concepto o definición empleada de similitud, que permite agrupar los objetos cercanos y no considerar los más alejados. Este autor revisa algunos ejemplos en los que su tratamiento, en términos de series temporales, resulta inmediato e idóneo: estudio de productos con similares patrones de ventas, países con un crecimiento análogo de la población, variables físicas con idéntico comportamiento espacial, etc.

Como se indicaba en la sección 3.6.2, la obra de Quah desarrolla una extensa crítica a la  $\sigma$ -convergencia debido a la incapacidad de esta medida para aportar información sobre la distribución de las rentas e identificar, de este modo, la pauta real de comportamiento de las economías (las regresiones transversales representan una evolución promedio, que enmascara la realidad). El planteamiento alternativo, recogido, por ejemplo, en Quah (1997), considera la extrapolación al ámbito espacial de determinadas consideraciones presentes en la literatura sobre *clustering*. Mora (2003: 64) recoge distintos argumentos centrales en los que se basan las aportaciones de Quah, entre los que se destaca la idea de que “*los países se seleccionan*

*endógenamente en grupos, no actúan aisladamente. (...) De esta forma pueden existir coaliciones o clubs de convergencia formados endógenamente a través de todos los países, y las dinámicas de convergencia diferentes dependerán de la distribución inicial de las características de los países”, Mora (2003: 64). Galor (1996) centra la visión y señala que economías que se aproximan al mismo estado de equilibrio constituyen un club de convergencia. Bartkowska y Riedl (2012) describe la verificación de la hipótesis de existencia de clubs de convergencia como la constatación de la convergencia a diferentes estados estacionarios por parte de economías similares en características estructurales.*

Si se consideran los planteamientos básicos del modelo Solow-Swan, la similitud entre economías respecto a sus términos productivos, preferencias, políticas públicas, etc. se concretaría en un proceso de  $\beta$ -convergencia absoluta. El matiz relevante se encuentra, como es lógico, en las condiciones de partida: cuando existen diferencias entre las mismas, los estados convergerán a otros *steady-state* y se apartarán de la cuenca común de atracción.

Quah (1997) analiza las posibles dinámicas de las distribuciones, considerando, por ejemplo, el PIB de los países: partiendo del estado inicial, se producirá una evolución en el tiempo, que conllevará, en principio, la creación de clubs de convergencia en base a las coaliciones –según término de Morá (2003)- que se irán formando. La concreción de los clubs, en cuanto a número y composición, depende de dicha distribución inicial del PIB,. La *polarización* implicaría un proceso de incremento de las desigualdades entre países ricos y pobres, así como la desaparición paulatina de la clase media (Quah evoca, para ello, la sugerente imagen de “*emerging twin peaks*”). También resulta posible considerar la *estratificación*, en una situación con modas múltiples en la distribución del PIB. Lo importante en este contexto es identificar la variedad de dinámicas internas: (i) la *persistencia*, tratada con anterioridad, constituye una característica de países que eran ricos o pobres en el instante inicial y que continúan en la misma situación al final; y (ii) la *renovación (churning)*, que implica un cambio de roles entre las economías. La aparición conjunta de los dos fenómenos implica un proceso de separación: países originalmente próximos, en cualquiera de las clases, pero, con un efecto más relevante en la clase media, se alejarían en uno u otro sentido.

Por tanto, el estudio de la distribución conlleva una doble visión: el comportamiento externo, asociado a la aparición de los *twin peaks* y de los procesos de polarización y estratificación, y, por otro lado, la movilidad interna, asociado a fenómenos de persistencia y de renovación, con países en fase de adelantamiento y otros que son rebasados. El modelo clásico de  $\beta$ -convergencia tampoco permite el tratamiento de este tipo de información porque, por ejemplo, como señala Mora (2003), la identificación de la convergencia condicional no tiene en cuenta, la posible estructura endógena de coaliciones. El tratamiento de esta aseveración y del análisis alternativo desarrollado por Quah se traslada a la siguiente sección, dado que estos estudios se fundamentan en desarrollos de cadenas de Markov.

Azariadis (1990) representa una contribución previa, de notable interés en la elaboración teórica y en el desarrollo de estudios sobre los clubs de convergencia. La reflexión inicial del autor se centra en la evidencia empírica de la existencia de comportamientos que no resultan coherentes con las previsiones de los modelos neoclásicos: una revisión centrada en el período 1940 a 1970 revela que las ratios de crecimiento de ciertos países que partían con rentas más

elevadas se manifestaban superiores a las de otros estados pobres, con estados iniciales también inferiores. Bajo el enfoque de las teorías clásicas, estas diferencias persistentes se deberían a factores exógenos, en términos de discrepancias estructurales entre las economías. La propuesta de Azariadis (1990) es que las disparidades entre ratios de crecimiento per cápita pueden aparecer incluso entre naciones con componentes similares. El modelado de este fenómeno se realiza mediante la introducción de externalidades de capital humano, en las que se verifican retornos crecientes de escala respecto a la calidad media de los recursos existentes; el autor hace referencia en este contexto a externalidades tecnológicas con propiedad umbral (*threshold*). Si el resto de factores se mantiene constante, la productividad de la inversión privada en educación resulta superior en países desarrollados que en los que se encuentran en situaciones de renta inferior. La propiedad *threshold* justifica la posible existencia de múltiples pautas de crecimiento estables y equilibradas. Otra conclusión importante del estudio es que, en igualdad de otros términos, la presencia de ratios elevadas respecto a la inversión de capital humano constituye una condición necesaria para una tasa de crecimiento alta y sostenible.

Otro desarrollo clásico, en este caso en el contexto de elaboración de test para contrastar las hipótesis sobre clubs de convergencia, corresponde a Durlauf y Johnson (1995). El planteamiento general de estas evaluaciones implica considerar el modelo de régimen simple como hipótesis nula. Para aplicar el test se procede a dividir el conjunto con todos los datos en distintos subgrupos, aplicando una variable de control, y se examina si los parámetros del modelo son equivalentes entre dichos *clusters*. Los elementos de discretización más empleados corresponden a: (i) el output per cápita en el instante inicial; y (ii) la ratio inicial de alfabetización de adultos. Este segundo término implica conceder de nuevo una importancia básica a la educación y permitiría detectar diferencias entre niveles de desarrollo socio-económico.

Frente a desarrollos orientados de manera preferente a la confirmación de la existencia o no de *clusters* de convergencia, se puede destacar otra vía de estudios centrada en la identificación de los mismos. Bartkowska y Riedl (2012) advierte de una problemática que caracteriza a los trabajos iniciales en este ámbito: la obtención de los grupos requiere una cierta predeterminación, tanto especificando la(s) variable(s) responsables de su constitución como fijando (de manera arbitraria) los niveles *threshold*. Frente a este planteamiento limitante se desarrollan diversos estudios que identifican los clubs de convergencia mediante agrupamiento endógeno, sin necesidad de especificar los factores causantes de la aparición de los múltiples steady-state. Corrado, Martin y Weeks (2005) diferencia dos importantes áreas de trabajo centradas en la identificación y composición de los clubs de convergencia: (i) por una parte se encontrarían los estudios centrados en la identificación a priori de posibles ordenaciones y un máximo número de agrupaciones, como Canova (1999); y (ii) por otro lado, hay que considerar las aproximaciones estadísticas basadas en algoritmos de clustering, como Hobijn y Franses (2000).

En el citado Durlauf y Johnson (1995) se confirma que el método exógeno para la determinación de grupos en base a variables de control no permite identificar correctamente estas economías con dinámicas comunes; por una parte resulta necesario otorgar libertad para determinar el comportamiento de los distintos regímenes pero, por otro lado, la

fragmentación del conjunto de datos en base a las condiciones iniciales anula dichos grados de libertad. La solución adoptada se basa en el análisis de árboles de regresión, técnica desarrollada en Breiman et al. (1984) y que proporciona un mecanismo no paramétrico para identificar los comportamientos múltiples. Se requiere para ello la aplicación de un algoritmo de ordenación, no existiendo una base teórica ni test para la determinación del nivel de significación estadística de los resultados. Una conclusión interesante de los análisis empíricos se refiere a que los ratios de  $\beta$ -convergencia dentro de los grupos identificados son mayores que en la muestra total; este resultado resulta coherente con la hipótesis de presencia de múltiples regímenes.

Canova (1999) considera el número de clusters y su composición como parámetros desconocidos, estableciendo cierta similitud con los términos *perdidos* en series temporales endógenas. La investigación revela que existen heterogeneidades en la distribución de la renta regional per cápita y una tendencia hacia la distribución de agrupamientos en torno a cuatro polos de atracción, en función de los niveles iniciales. Corrado et al. (2005) señala que estos resultados se encuentran condicionados por la ordenación previa de los datos, lo que introduce sesgos en base a los términos enfatizados (por ejemplo, concediendo importancia a la localización).

Hobijn y Franses (2000) considera en su procedimiento de identificación de *clusters* tres tipos de comportamiento asintótico de los niveles de renta per cápita (los dos primeros corresponden a Bernard y Durlauf, 1995): (i) convergencia asintótica perfecta, que supone que los países convergerán a niveles idénticos del logaritmo de la renta per cápita, con independencia de los valores actuales; (ii) convergencia asintótica relativa, que implica que las diferencias entre los niveles del logaritmo de la renta per cápita se aproximan a una constante finita; y (iii) convergencia de ratios de crecimiento, referido al comportamiento estacionario de media nula del primer operador en diferencias. Tras la identificación de dos test referidos a los estados estacionarios multivariantes se desarrolla un algoritmo de *clustering*, que consta de dos partes: (i) la muestra se agrupa en base al test de comportamiento estacionario de media nula; y (ii) se aplica una segunda evaluación relativa al nivel estacionario, lo que proporciona un agrupamiento que verifica convergencia asintótica relativa.

El estudio empírico considera dos conjuntos de datos y, en ambos casos, identifica una notable ausencia de convergencia:

- En una muestra de 112 países extraída del Penn World Table se obtienen 63 clubs de convergencia asintótica perfecta y 42 agrupaciones cuya convergencia es asintótica relativa.
- En el segundo análisis se consideran 15 países industrializados (se trata de una muestra utilizada previamente por Bernard y Durlauf, 1995): en este caso se identifican 9 y 7 conjuntos respectivamente.

La revisión de las agrupaciones obtenidas sugiere que los (escasos) fenómenos de convergencia resultan más comunes entre economías con rentas reducidas; tampoco se detectan procesos de acercamiento de países pobres a ricos. La ausencia de convergencia se debería, en principio, a tendencias estocásticas de divergencia.

En el enfoque de Corrado et al. (2005), basado en Hobijn y Franses (2000), se introducen los efectos espaciales en la fase de interpretación de los resultados de los *clusters* de convergencia; se emplean para ello una serie de conjuntos de medidas de contigüidad de índole geográfico, socio-demográfico y político, en base a las clasificaciones planteadas en el seno de la EU respecto a la aplicación de Fondos Estructurales. Previamente se aplica un test multivariante, de contrastes regionales por parejas, para determinar la composición de los agrupamientos.

Resultan de interés las aportaciones realizadas para subsanar el principal inconveniente de Hobijn y Franses (2000), la ausencia de variables no condicionales. Al basarse únicamente en las diferencias entre el PIB de las unidades estudiadas, la evaluación de la composición de los *clusters* resulta difícil o imposible. Por ese motivo, Corrado et al. (2005) plantea: (i) indicadores del nivel periférico, que permiten diferenciar las regiones en función de su accesibilidad a las ubicaciones centrales; (ii) patrones basados en estructuras de asentamiento, que establecen una clasificación en base al número de habitantes y densidad de población; (iii) niveles de ajuste estructural y desarrollo respecto a los objetivos planteados por la EU. Un objetivo adicional del estudio consiste en determinar el impacto de las políticas de desarrollo de la externalidad inducidas bajo esta orientación.

El estudio empírico se centra en 77 regiones europeas<sup>123</sup> NUTS 1, considerando el GVA<sup>124</sup> por trabajador en el período 1975 a 1999 en los sectores agrícola, industrial y servicios. Los resultados más significativos son:

- En agricultura se identifican 23 *clusters*: uno de tamaño 1, nueve de tamaño 2, siete de tamaño 3, cuatro de tamaño 4, uno de tamaño 5 y otro de tamaño 6. Estas agrupaciones se asocian con la climatología de las unidades y con el desarrollo tecnológico; al analizar la distribución en el tiempo se confirma la tendencia a la disminución de la convergencia.
- En industria se perciben 25 grupos: dos de tamaño 1, siete de tamaño 2, once de tamaño 3, cuatro de tamaño 4 y sólo hay un *cluster* con cinco países, en línea con estudios como Bernard y Jones (1996), que encuentran escasa evidencia de convergencia en el ámbito de la manufactura.
- Finalmente, en el sector servicios sí se detecta una fuerte convergencia, con 48 *clusters* distribuidos del siguiente modo<sup>125</sup>: siete de tamaño 1, diecinueve de tamaño 2, doce de tamaño 3, tres de tamaño 4, tres de tamaño 5, dos de tamaño 6 y otros dos de tamaño 7.

El tratamiento del impacto de los Fondos Estructurales se realiza mediante la comparación entre los *clusters* identificados y una matriz artificial basada en las ayudas recibidas por este concepto. En el ámbito agrícola la correlación se mantiene estable, mientras que en el sector

---

<sup>123</sup> Bartkowska y Riedl (2012) considera más adecuado un tratamiento de los datos a nivel NUTS 2 porque corresponde a la clasificación de regiones de la UE de acuerdo a la que se redistribuyen los fondos estructurales.

<sup>124</sup> GVA: Gross Value Added.

<sup>125</sup> Se ha considerado de manera agregada la cuantificación de los servicios asociados al mercado con los no asociados.



servicios (orientados al mercado) sí se observa un incremento de dicha correlación, lo que confirma el potencial de estas herramientas para promover el desarrollo regional.

Sin duda alguna, la aportación más innovadora en este ámbito corresponde a Phillips y Sul (2007), con su desarrollo del test log t, basado en la varianza transversal del ratio de las rentas per cápita a lo largo del tiempo. Se trata de un método que no requiere que las respectivas series temporales sean cointegradas y, por lo tanto, permite un comportamiento individual transitoriamente divergente (esto constituye una propiedad ciertamente interesante). Otra ventaja es que permite identificar, de manera endógena, un amplio espectro de comportamientos, como convergencia a un estado común de equilibrio, divergencia o existencia de clubs de convergencia.

Phillips y Sul (2007) parte de una interesante descomposición de los datos de panel. Resulta recomendable recordar que la representación habitual en este contexto es:

$$\log y_{it} = \varphi_i \mu_t + \varepsilon_{it} \quad (4.24)$$

El término  $y_{it}$  hace referencia a la variable económica que proceda (por ejemplo, PIB),  $\varphi_i$  al componente unitario característico o específico,  $\mu_t$  al factor común y  $\varepsilon_{it}$  al término de error;  $i = 1 \dots N$  y  $t = 1 \dots T$  ( $N$  el número de unidades y  $T$  el horizonte temporal).

La nueva representación propuesta de  $\log y_{it}$  implica una división en dos partes representativas:

$$\log y_{it} = \left( \varphi_i + \frac{\varepsilon_{it}}{\mu_t} \right) \mu_t = \delta_{it} \mu_t \quad (4.25)$$

El término  $\delta_{it}$  absorbe la parte de error y el componente específico unitario y, por consiguiente, representa la parte idiosincrática que, al igual que el factor común, varía con el tiempo. La convergencia se encuentra directamente relacionada con esta variable. Mientras el modelo clásico intenta explicar el comportamiento de  $\log y_{it}$  a través de  $\mu_t$  y dos componentes unitarios característicos ( $\varphi_i$  y  $\varepsilon_{it}$ ), la propuesta de Phillips y Sul (2007) se centra en describir la renta per cápita distinguiendo la parte idiosincrática de la pauta de crecimiento común experimentada por la economía.

A fin de modelar esta variable,  $\delta_{it}$ , se construye un coeficiente relativo de transición,  $h_{it}$ , que permite eliminar en el tratamiento el término de crecimiento común,  $\mu_t$ :

$$h_{it} = \frac{\log y_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log y_{it}} = \frac{\delta_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{it}} \quad (4.26)$$

Por tanto,  $h_{it}$  representa la pauta de transición de la economía  $i$  relativa a la media transversal y posee una doble interpretación: (i) mide el comportamiento individual en relación a otras economías; (ii) describe las divergencias relativas de la economía  $i$  respecto al término de crecimiento común.

De este modo, en caso de convergencia (absoluta) todas las economías se mueven hacia la misma pauta de transición:  $h_{it} \rightarrow 1 \forall i$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En tal caso, la varianza de  $h_{it}$ , denotada como  $V_t^2 = N^{-1} \sum_i (h_{it} - 1)^2$ , converge a cero.

Cuando, por el contrario, no hay convergencia, se plantean varias situaciones:  $V_t^2$  puede converger a un número positivo (caso clubs de convergencia), o permanecer por encima de cero y divergir. En este sentido resulta importante destacar que los distintos métodos de agrupamiento endógeno consiguen identificar los clusters, pero su interpretación resulta mucha más compleja: en efecto, resulta difícil discernir entre club de convergencia y convergencia condicional.

Con objeto de especificar la hipótesis nula de convergencia, Phillips and Sul (2007) modela  $\delta_{it}$  de forma semiparamétrica, fijando en  $[\ ]$  el valor de  $\delta_i$ , introduciendo  $\sigma_i$  como un parámetro idiosincrático de escala, considerando  $\xi_{it}$  como iid(0,1),  $L(t)$  una función que varía muy lentamente hacia infinito con  $t \rightarrow \infty$  y  $\alpha$  la ratio de decaimiento de dicha función:

$$\delta_{it} = \delta_i + \frac{\sigma_i \xi_{it}}{L(t)t^\alpha} \quad (4.27)$$

De este modo, la hipótesis nula de convergencia se plantea como  $H_0: \delta_i = \delta$  y  $\alpha \geq 0$ , frente a la alternativa  $H_A: \delta_i \neq \delta$  ó  $\alpha < 0$ .

Los autores demuestran que, en caso de convergencia, la varianza de  $h_{it}$  adopta la forma limitante  $V_t^2 \sim \frac{A}{L(t)^2 t^{2\alpha}}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para algún  $A > 0$ . Se obtiene así la siguiente forma de regresión:

$$\log \left( \frac{V_1^2}{V_t^2} \right) - 2 \log L(t) = a + b \log t + u_t$$

En este caso  $t$  se fragmenta en períodos homogéneos:  $t = [rT], [rT] + 1 \dots T$ , con  $r \in (0,1)$ . En base a simulaciones de Monte Carlo, Phillips and Sul (2007) sugiere emplear  $L(t) = \log t$  (de ahí la denominación del modelo) y  $r = 0.3$  para tamaños de muestra inferiores a  $T = 50$ . Empleando  $\hat{b} = 2\hat{a}$ , se puede calcular el error estándar de estimación a través de un estimador HAC (estimador consistente de autocorrelación y heterocedasticidad) para la varianza de los residuos a largo plazo. En Panopoulou (2009), por ejemplo, se emplea el núcleo espectral cuadrático y se determina el ancho de banda a través del procedimiento de dependencia de datos de Andrews (1991). La hipótesis nula de convergencia se rechaza si  $t_{\hat{b}} < -1.65$  (5% de nivel de significancia).

El método se inicia con un filtrado previo de datos, a fin de eliminar la componente cíclica (los autores recomiendan el filtro de alisado de Hodrick-Prescott). Como se indicaba anteriormente, la hipótesis nula de convergencia se verifica incluso con patrones transitorios de divergencia temporal (en este ámbito falla el test desarrollado por Hobijn y Franses, 2000). Si la convergencia se rechaza para la muestra completa, el procedimiento de testado se aplica a subgrupos, siguiendo un mecanismo de test de *clustering* que consta de cuatro pasos y que se describe en la siguiente tabla:

Paso 1. Ordenación descendente de cada sección transversal en base a los últimos períodos correspondientes a las series temporales del panel.

La convergencia resulta más evidente en las observaciones finales (tanto en la muestra total como en los subgrupos). En el caso de volatilidad de los datos el ordenamiento se puede basar en la media de las series temporales, acotando los últimos períodos.

Paso 2. Formación de grupos iniciales de  $k$  \* regiones.

Se toman las primeras  $k$  unidades (con  $2 \leq k \leq N$ ) procedentes del panel y se aplica la regresión log  $t$ . Si  $t_{\bar{b}}$  es mayor de -1.65 se añaden más unidades, una a una, calculando  $t_{\bar{b}}$  para las  $k$  unidades seleccionadas cada vez. Se continúa mientras  $t_{\bar{b}}$  aumente y se encuentre por encima de -1.65 (nivel de significancia del 5%). Cuando se obtenga un valor más pequeño para  $t_{\bar{b}}$  se concluye que se ha formado un grupo centrado con  $k^* = k - 1$  miembros. Si la condición  $t_{\bar{b}} > -1.65$  no se verifica con las dos primeras unidades, se elimina la primera y se aplica la regresión para la segunda y tercera. Se continúa hasta obtener dos unidades en las que se cumpla  $t_{\bar{b}} > -1.65$ . Si no se detectan en todo el conjunto se concluye que no se presenta convergencia en el panel.

Paso 3. Cribado de los datos para nuevos miembros del club.

Tras identificar el grupo inicial de un club, se lleva a cabo un test para analizar la pertenencia al club de otras unidades en el panel. Se añaden las unidades restantes (de una en una) a los  $k$  \* integrantes del grupo y se aplica la regresión log  $t$ . Se repite para todas las unidades externas al grupo. Se seleccionan unidades en las que  $t_{\bar{b}} > c$ , con  $c$  un valor crítico ( $c \geq 0$ ) y se añaden al grupo. Se aplica el test log  $t$  para el grupo entero. Si  $t_{\bar{b}} > -1.65$  se concluye que este grupo constituye un club de convergencia. En otro caso se incrementa el valor crítico para la selección del integrante del club: se forma un nuevo grupo consistente en el grupo inicial más todas las unidades en las que  $t_{\bar{b}}$  sea mayor que el valor crítico incrementado y se aplica la regresión log  $t$ . Se repite hasta que  $t_{\bar{b}} > -1.65$  para el grupo completo. Se concluye que todas las unidades forman un club de convergencia. Si no hay unidades aparte del grupo inicial en las que  $t_{\bar{b}} > -1.65$  se concluye que el club de convergencia consiste sólo en el grupo inicial.

Paso 4. Procedimiento recursivo y regla de detención.

Se forma un segundo grupo con todas las unidades externas al club de convergencia; o sea, en las que  $t_{\bar{b}} < c$ . Se aplica el test log para este grupo completo con objeto de chequear si  $t_{\bar{b}} > -1.65$  y el grupo converge. Si no es así, se repiten los pasos 1-3 en este grupo para determinar si el panel incluye un subgrupo menor que pueda formar un club de convergencia. Si no hay  $k$  en el paso 2 para el que  $t_{\bar{b}} > -1.65$ , se concluye que las unidades restantes divergen.

Tabla 4.13. Pasos del algoritmo de clustering de Phillips y Sul (2007).

Fuente: elaboración a partir de Phillips y Sul (2007) y Bartkowska y Riedl (2012)

Phillips y Sul (2007) propone también un algoritmo de fusión de clusters. Se toma el primero y el segundo grupo y se aplica el test log  $t$ : si el t-estadístico es mayor que -1.65 (5% de nivel de significancia) se asume que ambos grupos forman un club conjunto. Se repite el test tras añadir el nuevo grupo y se continúa hasta que el t-estadístico indique que la hipótesis de convergencia es rechazada. En tal caso se concluye que todos los grupos, excepto el último, convergen y se inicia el test de nuevo comenzando con el grupo para el que la hipótesis de convergencia fue rechazada.

#### 4.5.2 Estudios empíricos

El estudio empírico de Bartkowska y Riedl (2012) se centra en 206 regiones NUTS2 en el período entre 1990 y 2002. La variable utilizada es el GVA por trabajador en precios constantes de 1995 (los datos proceden del repositorio del Cambridge Econometrics Database). Se relacionan seguidamente los resultados más significativos alcanzados:

- Cuando el test log  $t$  se aplica toda la muestra, la hipótesis de convergencia global se rechaza al nivel de significancia del 5%. Por tanto, se concluye que las regiones

europas no convergen al mismo estado de equilibrio en términos de GVA por trabajador.

- Al aplicar seguidamente los procedimientos del algoritmo de *clustering*, se identifican 14 *clusters* y 3 regiones divergentes. Finalmente, se comprueba si algunos de los subgrupos obtenidos pueden ser agregados, para formar clubs de convergencia más grandes, mediante el algoritmo de fusión. Tras esta revisión se identifican 6 clubs de convergencia (ordenados de mayor a menor renta media): el primero con 21 regiones, el segundo con 68, el tercero con 52, el cuarto con 42, el quinto con 20 y el sexto con 3.
- Se observan las siguientes particularidades en estos clusters:
  - Se detecta un aparente **efecto del país**: o sea, regiones que pertenecen al mismo estado tienden a formar parte del mismo cluster. Esto se aprecia de forma destacada en Suiza, pero también en Austria y Finlandia.
  - También se aprecia que regiones que incluyen la **capital del país** parece que pertenecen a un **club de mayor nivel de renta** que las vecinas (por ejemplo, París, Londres, Madrid...).
  - Los clubs parecen concentrados de manera espacial: regiones que pertenecen al mismo club tienden a formar parte de un clúster de manera conjunta. Este hecho queda confirmado por el cálculo del estadístico del test *I* de Moran, que toma el valor 0.59 cuando se aplica a la variable independiente.
  - La influencia de los fondos de cohesión resulta poco precisa. Por un lado hay regiones que recibieron dichos fondos y sin embargo permanecen en los clubs 4, 5 y 6. Esto se da en especial en regiones de países del sur (España, Grecia y Portugal). Por el contrario, algunas regiones inicialmente pobres han conseguido recuperarse y pasan al primer grupo; se trata de unidades en las que se incluye la capital del país.

Bartkowska y Riedl (2012) incluye, además, una investigación sobre la importancia de las condiciones iniciales y las características estructurales en la formación de cada *cluster*. Para ello se identifican las siguientes variables, en base a los desarrollos recogidos en la literatura sobre el tema:

Condiciones iniciales (datos relativos al año 1990)	
VARIABLES EMPLEADAS	OBSERVACIONES
Fuerza laboral	Se trata del porcentaje de población activa respecto al total.
Stock de capital per cápita	Se determina como el total de las inversiones en un período previo (1980-1990) respecto al número de trabajadores (se incorpora un factor de depreciación del 10%).
Capital humano	Porcentaje de población con educación superior.
Renta per cápita	Se determina como el GVA respecto al número de trabajadores, en precios constantes de 1995.
Condiciones estructurales (si no se indica nada, datos de 1990).	
VARIABLES EMPLEADAS	OBSERVACIONES
Producción de alta tecnología	Porcentaje de GVA relativo a producción de alta

	tecnología frente al total de GVA en industria y servicios.
Servicios	Porcentaje de GVA en el sector servicios respecto al total.
Crecimiento de la población	Ratio de crecimiento en el período 1980-1990.
Pertenencia a un país	Variable artificial que se aplica a las regiones que pertenecen al mismo país.
Vecindad de renta per cápita	Corresponde al producto de la matriz de pesos por la renta per cápita.
Aglomeración	Densidad de población.

Tabla 4.14. Variables empleadas en el modelado de condiciones iniciales y estructurales de las economías.

Fuente: Bartkowska y Riedl (2012)

Resulta importante destacar en este contexto que la localización geográfica puede constituir un factor muy relevante en la concreción del club de convergencia al que se unirá una región. De hecho, en el estudio previo se deducía que las regiones europeas pertenecientes al mismo parecían formar clubs de convergencia comunes y, como refleja el valor de la  $I$  de Moran, regiones vecinas tienden a formar un *cluster* de manera conjunta. La captura de esta forma de externalidad se realiza, como se aprecia en la tabla [], de dos maneras distintas: (i) a través de variables ficticias para controlar la pertenencia a un país; y (ii) considerando el crecimiento per cápita de regiones vecinas para controlar los excedentes geográficos. Se aplica para ello una matriz de pesos espaciales de orden 1, por lo que regiones que comparten una frontera se definen como vecinas (el vecino de una isla es la región más cercana a la isla en términos de distancia geográfica).

La aplicación de un modelo logit ordenado, en el que la variable a ser explicada representa el club al que pertenece una región, confirma que tanto las condiciones iniciales como las características estructurales juegan un papel significativo a la hora de explicar la pertenencia a un club específico.

En nuestro caso se han planteado una serie de estudios en la línea expuesta en el párrafo anterior, es decir, encaminados a identificar el rol de determinadas variables en el proceso de integración de los clubs. En primer lugar se ha procedido al análisis del GVA por trabajador en nueve países, según la información recogida en la base de datos BD.EURS (NACE Rev.1), descrita en Escriba y Murgui (2014). En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos:

<b>Número de regiones consideradas: 121</b>														
<b>Número de clusters identificados: 14</b>														
<b>Número de regiones divergentes: 33</b>														
<b>Composición de los clusters</b>														
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>
<b>33</b>	<b>17</b>	<b>4</b>	<b>18</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

Tabla 4.15. Resultados de clustering según GVA en regiones europeas (9 países).

Fuente: elaboración propia según datos de BD. EURS.

La nueva base de datos plantea correcciones a determinados listados de Eurostat, por lo que se encuentra muy depurada. Resultaría perfecta para el desarrollo de estudios en el ámbito regional, pero todavía no incorpora información a nivel NUTS 2 de todos los países considerados (9): esto introduce ciertas distorsiones en los resultados e impide, por ejemplo,

la visualización de los mismos. Los datos obtenidos impulsan a pensar en una posible fusión de grupos, pero el algoritmo no proporciona una respuesta significativa.

En el siguiente análisis se considera el listado, ya empleado en secciones anteriores, del PIB per cápita en las regiones correspondientes a EU-28. Se muestran seguidamente los resultados del proceso de identificación de clusters:

<b>Número de regiones consideradas: 267</b>														
<b>Número de clusters identificados: 14</b>														
<b>Número de regiones divergentes: 80</b>														
<b>Composición de los clusters</b>														
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>
<b>80</b>	<b>47</b>	<b>46</b>	<b>21</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>17</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

Tabla 4.16. Resultados de clustering según PIB per cápita en regiones europeas (NUTS 2). EU-28.

Fuente: elaboración propia según datos de Eurostat.

La composición de los clusters formados se incorpora al anexo. De nuevo, obtenemos resultados muy similares: un elevado número de regiones divergentes y la constitución de múltiples agrupaciones, algunas extremadamente reducidas, con 2 ó 3 integrantes.

Los resultados espaciales se reflejan en la siguiente figura:

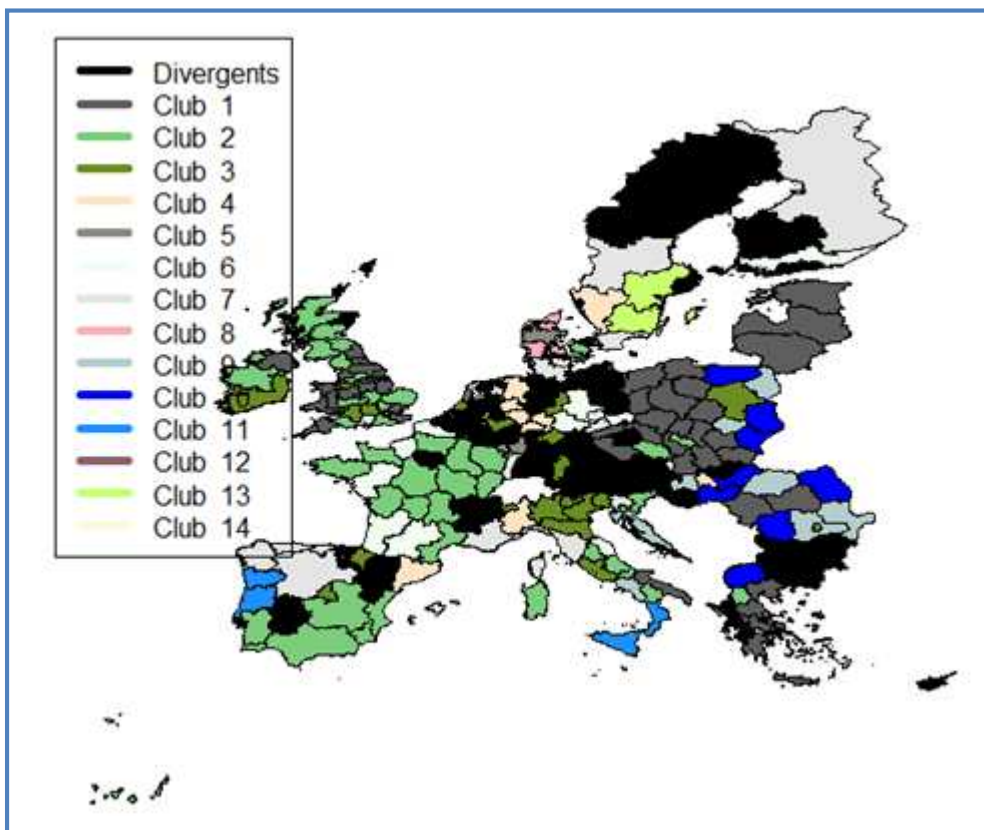


Figura 4.3. Resultados de clustering según PIB per cápita en regiones europeas (NUTS 2). EU-28. Representación gráfica.

Fuente: elaboración propia

Se han planteado otros análisis con las siguientes variables: (i) porcentaje de personas que abandonan los estudios; (ii) eficiencia energética; (iii) energías renovables; (iv) emisiones de gases efecto invernadero; (v) porcentaje de empleo. Como se puede apreciar, se encuentran directamente relacionadas con los parámetros de revisión del programa Europa 2020 y su revisión hubiese proporcionado información relevante sobre la idoneidad de esta elección. Por desgracia, el método no ofrece buenos resultados en estos tratamientos. Se trasladan a las conclusiones las apreciaciones sobre este hecho.

## 4.6 Cadenas de Markov

### 4.6.1 Descripción

En la sección anterior se analizaba el tratamiento, en las obras de Quah, de la formación de clubs de convergencia y de los cambios asociados en la forma de la distribución de la renta per cápita (pasando de unimodal a bimodal en un determinado período de tiempo). La composición final de los *clusters* depende de las condiciones iniciales y de determinados parámetros estructurales de las distintas economías. Estos planteamientos tienen su origen en el estudio de la evolución del logaritmo de la renta per cápita en 105 países desde 1960 hasta finales de la década de los ochenta. El análisis de los núcleos gaussianos revela, en efecto, cambios en las distribuciones. Quah (1997: 34) advierte de la gravedad de situaciones en las que hay economías que se mantienen extraordinariamente pobres (dentro de un proceso genérico de separación) y que se muestran en las distintas gráficas: *“They represent real people and real countries, not just observations that might be useful to delete in a statistical analysis”*.

Quah (1997) plantea una primera vía de cuantificar las dinámicas de las distribuciones internas a través de la discretización del espacio de valores de renta y procediendo a contar las transiciones detectadas entre las distintas celdas. A partir de esta información se puede elaborar la correspondiente matriz de probabilidad de transiciones. Este procedimiento, sin embargo, no resulta de aplicación inmediata cuando las variables son continuas, dado que provoca distorsiones en el tratamiento de la evolución dinámica. Se requiere extender este planteamiento reticular hacia la idea de infinito y de continuo, para obtener así el núcleo estocástico, que se comporta como una función de densidad de probabilidad<sup>126</sup>. La representación a nivel *cross-section* de los datos del período inicial frente al final permite observar la evolución de la distribución: cuando, en general, la mayoría de elementos se concentra alrededor de la diagonal de 45º se deduce que se han producido escasos cambios. La situación opuesta corresponde a rotaciones de 90º en sentido contrario a las agujas del reloj, que representa adelantamientos entre las economías: las ricas se vuelven pobres y viceversa. El estudio de los datos concretos permite concluir que, en efecto, se perciben cambios en las modas de las distribuciones. Según Quah (1997: 38), *“there is a wide spectrum of intradistribution dynamics—overtaking and catching-up occur simultaneously with*

---

<sup>126</sup> La función describe las transiciones durante el período de tiempo acotado para un determinado valor de la renta. LeGallo (2004: 140-141) interpreta las funciones de densidad, de manera análoga, como *“the continuous equivalent of a histogram in which the number of intervals has been set to infinity and then to the continuum”*.

*persistence and languishing—while overall the twin-peaks shape in the cross-sectional distribution emerges”.*

Como se analizó en el capítulo dos del presente trabajo, los modelos endógenos proporcionan un marco teórico en el que los patrones de interacción subyacentes pueden emerger. En los apartados correspondientes se consideraban las evoluciones dinámicas que permiten alcanzar la convergencia a un estado único o, por ejemplo, a una distribución bimodal, polarizada. Resulta interesante recordar en este ámbito el papel del capital humano, como elemento potenciador del progreso tecnológico.

Basándose en que los núcleos estocásticos cuantifican la evolución de la distribución a través del tiempo, Quah (1997) plantea su uso para determinar cuáles son los factores condicionantes que se encuentran detrás de la aparición de los “*twin-peaks*”. Para ello se procede a la revisión del proceso de definición de un núcleo estocástico. Si  $\mu$  y  $\nu$  son elementos de un espacio de Banach<sup>127</sup>  $B(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$  y representan medidas de probabilidad en dicho espacio, un núcleo estocástico respecto a  $\mu$  y  $\nu$  constituye una aplicación  $M_{(\mu, \nu)}: (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \rightarrow [0, 1]$ , que satisface las siguientes restricciones: (i)  $M_{(\mu, \nu)}(y, \cdot)$  es una medida de probabilidad  $\forall y$  en  $\mathbb{R}$ ; (ii)  $M_{(\mu, \nu)}(\cdot, A)$  es  $\mathfrak{R}$ -mensurable  $\forall A$  en  $\mathbb{R}$ ; y (iii)  $\mu(A) = \int M_{(\mu, \nu)}(y, A) d\nu(y) \forall A$  en  $\mathbb{R}$ . Por su parte, denotando  $F_t$  como la distribución de rentas entre las economías en cada instante  $t$ , se puede asociar una medida  $\lambda_t$  que, en su esquema más simple, respondería a una forma autorregresiva de primer orden:  $\lambda_t = T^*(\lambda_{t-1}, u_t)$ ,  $t \geq 1$ , siendo  $T^*$  un operador que relaciona el producto conjunto de las medidas con las distorsiones generales,  $u_t$ , de las medidas de probabilidad.

Analizando la definición de núcleo estocástico, en especial la restricción (iii)<sup>128</sup>, se puede apreciar que  $M$  representa una descripción completa de las transiciones del estado  $y$  a cualquier otro perteneciente al espacio de estados  $\mathbb{R}$ . En base a esta idea se puede obtener una expresión central en este desarrollo:

$$(T^*\nu)(A) = \int M(y, A) d\nu(y) \quad (4.28)$$

Como señala Quah (1996c), la estructura de  $T^*$  aporta una cuantificación empírica de las dinámicas internas: en concreto, permite predecir la evolución de  $F_t$  y  $\lambda_t$  en el tiempo. Considerando, por ejemplo, que las distorsiones, son nulas, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias de este operador:

$$T^*(\lambda_{t+s-1}, 0) = T^*(T^*(\lambda_{t+s-2}, 0), 0) = T^*(T^*(T^* \dots (\lambda_t, 0), 0) \dots 0) \quad (4.29)$$

- La convergencia global en igualdad correspondería a (4.29), con  $s \rightarrow \infty$ , tendiendo a un punto degenerado.

<sup>127</sup> Por ejemplo,  $\mathbb{R}$  puede ser la recta real y  $\mathfrak{R}$  los correspondientes conjuntos de Borel.

<sup>128</sup> Siguiendo a Quah, (1997), se destaca que la condición (i) garantiza que  $\int M_{(\mu, \nu)}(y, A) d\nu(y)$  es una media ponderada de las medidas de probabilidad y (ii) confirma que dicha expresión corresponde a una integral de Lebesgue. Por tanto, (i) y (ii) avalan la correcta interpretación de (iii).



- La polarización en ricos y pobres se encontraría asociada a (4.29) tendiendo hacia una medida con dos puntos. La distribución límite,  $F_{t+s}$ , sería bimodal.
- En general, la estratificación (o existencia de distintos clubs de convergencia) implica que (4.29) tiende a una medida con diversos puntos.

La velocidad a la que se alcanza este estado limitante se identifica a través de la estructura espectral de  $T^*$ . Los diversos estudios empíricos estiman  $T^*$  bajo enfoques distintos (semiparametrización, discretización de  $\lambda$ , regresiones cross-section, considerando o ignorando la información acumulada en cada período...) y los resultados también son variados. En Quah o Desdoigts (1994), por ejemplo, los resultados apuntan a una dinámica “*twin-peaks*”; Quah (1996c) cita que Durlauf y Johnson (1996) encuentra evidencia de multimodalidad, mientras que Bianchi (1995) constata unimodalidad en el instante inicial (1960) y bimodalidad a finales de los ochenta.

López-Baso, Vayá, Mora y Suriñach (1999) estudian la convergencia, tanto del PIB por trabajador en ECU (como medida de productividad) como el PIB per cápita, en *ppa*, en una muestra de, respectivamente, 129 y 143 regiones europeas. Este análisis revela indicios de bimodalidad en PIB per cápita, de modo que grupos de regiones con niveles de renta por debajo de la media muestran una tendencia hacia la convergencia a un nivel inferior que el resto. El tratamiento de la distribución del PIB por trabajador no muestra cambios significativos en la forma externa de la distribución, por lo que resulta más probable la unimodalidad; sí se percibe un reducido grupo de economías con un nivel de productividad inferior a la media (regiones pobres de Portugal y Grecia), aunque la alta dispersión que muestran implica el rechazo de su consideración como club de convergencia.

LeGallo (2004) analiza una muestra compuesta por 138 regiones en 11 países europeos procedentes de EUROSTAT Regio durante el período 1980 a 1995, ampliando de este modo la selección inicial de Quah (1996b). El estudio revela un incremento en el año final del número de países que se encuentran por debajo de la media del PIB per cápita, en ECU, o que superan el doble de esta cantidad. Se detecta, además, una segunda moda persistente, aparte de la principal, situada alrededor del 50% de la media europea: esto reflejaría la existencia de un grupo de regiones con rentas bajas, que convergerían a un nivel inferior. De todos modos, la bimodalidad sólo se muestra al final del período<sup>129</sup>. Estos resultados no coinciden con los obtenidos por Quah (1996b) y se encuentran en línea con los correspondientes a López-Baso et al. (1999). Parece que la inclusión de regiones pobres en la muestra (portuguesas y griegas, como se ha indicado) es el desencadenante de la identificación de este fenómeno, ya que Quah (1996b) no considera dichas unidades en su estudio.

Con objeto de valorar la tendencia de la formación de grupos alrededor de dos polos, LeGallo (2004) emplea la medida de polarización desarrollada por Esteban y Rey (1994) o índice  $ER$ :

$$ER = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_i^{1+\alpha} f_j |y_i - y_j| \quad (4.30)$$

<sup>129</sup> Un pequeño pico final, situado alrededor de 1.8 puntos por encima de la media europea, revelaría en principio la tendencia de regiones muy ricas a divergir a partir de 1995.

El término  $f_i$  representa la frecuencia de la población en el grupo  $i$ ,  $y_i$  el logaritmo de su media condicional,  $N$  el número de grupos y  $\alpha$  el conocido como efecto de oposición, cuyo valor se restringe al intervalo  $[0,1.6]$ . En este estudio específico se considera que el primer polo está integrado por regiones cuya renta está por debajo del 75% de la media de la EU (regiones Objetivo nº 1) y el resto por los demás territorios. El parámetro  $\alpha$  se fija en 1.5 para ponderar de manera significativa el efecto de polarización.

En el caso del PIB per cápita se verifica un descenso suave del índice  $ER$  a lo largo del período, con un breve repunte entre 1987 y 1991 y un cierto aumento al final del mismo. LeGallo (2004) considera que la polarización entre los dos grupos se mantiene durante todo el intervalo. Por su parte, el PIB por trabajador se mantiene en 0.03, con una leve y breve tendencia al crecimiento al final del período.

El interés de los desarrollos de Quah, confirmado por los análisis paralelos a cargo de otros investigadores, se ve limitado por su opacidad respecto al procedimiento de identificación de las cadenas markovianas asociadas a la última ecuación. Mora (2003: 69) señala que “*es toda una incógnita cómo se llega a la matriz de Markov presentada por Quah*”. Por ese motivo se procede a una revisión más profunda de esta materia, en especial en lo referente a su tratamiento en el ámbito de la convergencia. En primer lugar se procederá a una revisión de las definiciones, proposiciones y teoremas más relevantes para nuestro estudio en este ámbito.

Se considera un sistema que puede presentar uno de  $N$  estados posibles,  $S_1 \dots S_N$ , en cualquier periodo de tiempo discreto  $t$ . Se denota por  $q_t$  el estado del sistema en el momento  $t$ . En principio la descripción probabilística en  $t$  depende de  $t-1$ ,  $t-2$ ,  $t-3$ , etc. En el caso particular de las cadenas discretas de Markov de primer orden,  $q_t$  sólo depende de  $q_{t-1}$ :

$$P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i, q_{t-2} = S_k, \dots] = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i] \quad (4.31)$$

En nuestro estudio se considerarán cadenas de Markov homogéneas, caracterizadas por el hecho de que estas probabilidades no dependan de  $t$ . Por tanto una cadena o proceso discreto de Markov homogéneo se puede definir como sigue.

Una cadena o proceso discreto de Markov homogéneo es un proceso estocástico discreto en el tiempo, caracterizado por los siguientes elementos y propiedades:

- (i) Un conjunto de  $N$  estados posibles  $S = \{S_1 \dots S_N\}$ , con  $q_t$  denotando el estado en el momento  $t$ .
- (ii) Una matriz de probabilidades de transición entre estados,  $A = \{(a_{ij}), i, j = 1, 2 \dots N\}$ , siendo  $a_{ij} = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i]$
- (iii) Una función de probabilidad inicial para los  $N$  estados:  $\pi = \{\pi_1 \dots \pi_N\}$ , con  $\pi_i = P[q_0 = S_i]$

Cada fila de la matriz  $A$  contiene una función de probabilidad, por lo que este tipo de matrices también son conocidas como estocásticas. Los productos de matrices estocásticas vuelven a

tener la misma naturaleza, y, de hecho, las probabilidades de transición tras  $m$  etapas se calculan mediante potencias de la matriz  $A$ :  $a_{ij}^{(m)} = P[q_{t+m} = S_j | q_t = S_i]$ .

Existen dos proposiciones relacionadas con estas transiciones tras un número de etapas:

- Dado un proceso discreto de Markov homogéneo, las probabilidades de transición tras el paso de  $m$  periodos de tiempo vienen dadas por los elementos de la matriz estocástica  $A^{(m)}$ .
- Dado un proceso discreto de Markov homogéneo, si  $\pi^{(m)}$  es la función de probabilidad de la cadena tras el paso de  $m$  periodos de tiempo, se verifica que  $\pi^{(m)} = A^{(m)}$

Por otra parte, se dice que una cadena de Markov es ergódica si resulta posible pasar de cualquier estado a otro, no necesariamente en un solo paso. Estas cadenas también son conocidas como irreducibles. Del mismo modo, una cadena de Markov es regular si existe alguna potencia de la matriz de transición cuyos elementos sean todos mayores que 0. Por tanto toda cadena regular es ergódica, pero no se verifica la propiedad contraria. Cualquier matriz de transición,  $A$ , sin ceros, determina una cadena regular, aunque también puede ocurrir que una cadena regular tenga una matriz de transición en la que existan ceros. El siguiente teorema proporciona un resultado fundamental sobre las cadenas regulares.

Sea  $A$  la matriz de transición de una cadena regular, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} = W \quad (4.32)$$

En este caso todas las filas de  $W$  son iguales al mismo vector  $w$ , que define una función de probabilidad estrictamente positiva (todas las probabilidades son no nulas). El vector  $w$  recibe el nombre de distribución ergódica.

Otro teorema de interés, relativo a la distribución ergódica, recoge que si  $A$  es la matriz de transición de una cadena regular y  $W$  es tal que:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} \quad (4.33)$$

Entonces, denotando por  $w$  la fila común de  $W$ , y  $c$  un vector columna de unos, se verifica: (i)  $wA = w$ , y cualquier vector  $v$  tal que  $vA = v$  es múltiplo de  $w$ ; y (ii)  $Ac = c$ , y cualquier vector columna  $x$  verificando  $Ax = x$  es múltiplo de  $c$ .

Se puede demostrar que en las condiciones del teorema anterior, existe un único vector de probabilidad  $v$  tal que  $vA = v$ .

Un vector fila  $w$  con la propiedad descrita en (i),  $wA = w$  es llamado vector fijo para  $A$ . De manera similar, un vector columna  $x$  tal que  $Ax = x$  es llamado vector fijo para  $A$ . Existen varios métodos para calcular el vector  $w$  que define la distribución ergódica. Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, se deduce que:  $w(A - I) = 0$

Otra proposición en este ámbito señala que el vector ergódico de una cadena de Markov regular corresponde al autovector izquierdo normalizado asociado al autovalor unitario de la matriz de transición  $A$ . La distribución límite es la misma si se comienza con una distribución inicial cualquiera.

El último teorema que se presenta en esta primera sección indica que si  $A$  es la matriz de transición de una cadena regular, y  $v$  un vector de probabilidad cualquiera, se verifica entonces que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} vA^{(n)} = w \quad (4.34)$$

De nuevo nos referimos a  $w$  como la distribución ergódica. LeGallo (2004) interpreta este elemento como la distribución en equilibrio a largo plazo. De este modo se pueden diferenciar los comportamientos respecto a la convergencia: la concentración en frecuencias de la clase media implicaría convergencia hacia la media, mientras que si se extiende a otras frecuencias en algunas de las clases, se experimentaría una estratificación hacia diferentes clubs de convergencia; la dispersión de la distribución entre todas las clases se identifica con un proceso de divergencia.

Cuando se observa una secuencia de realizaciones de una cadena de Markov surge la necesidad de estimar sus parámetros. El conjunto de datos disponible en los estudios empíricos que se han realizado se puede describir mediante una muestra aleatoria  $X = \{X_{ij}\}$  de  $n$  casos y  $T$  periodos de tiempo, de modo que  $x_{rt}$  representa el estado que presenta el caso  $r$  en el periodo de tiempo  $t$ ; con  $r = 1, 2, \dots, n$  y  $t = 1, 2, \dots, T$ . Realmente cada fila contiene una muestra de tamaño  $T$  de realizaciones de una cadena de Markov.

El siguiente teorema expone que, dada una muestra aleatoria  $X$  de una cadena de Markov homogénea, los estimadores de máxima verosimilitud de los elementos de la matriz de transición son:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j'=1}^N n_{ij'}} \quad (4.35)$$

Donde  $n_{ij}$  representa el número total de transiciones de la clase  $i$  en  $t-1$  a la clase  $j$  en el periodo de tiempo  $t$ :

$$n_{ij} = \#\{X_{r,t-1} = i \cap X_{r,t} = j\} \quad (4.36)$$

La expresión para el error estándar de las estimaciones de máxima verosimilitud es:

$$ES(\hat{a}_{ij}) = \frac{\hat{a}_{ij}}{\sqrt{n_{ij}}} \quad (4.37)$$

El estudio de la movilidad de una cadena de Markov y por tanto de la velocidad de convergencia en el contexto de este estudio puede ser facilitado con el cálculo de diversos indicadores, que se definen seguidamente.

Una primera medida la proporciona el índice de estabilidad:

$$IE = \frac{\text{tr}(A)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}}{N} \quad 0 \leq IE \leq 1 \quad (4.38)$$

Cuanto mayor es la cercanía de  $IE$  a uno, más estable resulta la cadena de Markov.

Sin embargo, resultan también necesarios, y más en nuestro estudio, indicadores que midan la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria. Schorrocks (1978) define un índice de movilidad, de manera genérica, como una función real continua,  $\mathcal{M}(\cdot)$ , sobre el conjunto de matrices de transición,  $\mathcal{A}$ . Geweke, Marshall y Zarkin (1986) identifica este término como una función  $\mathcal{M}(A)$  que transforma  $A$  en un escalar.

Si, dados  $A \in \mathcal{A}$  y  $A' \in \mathcal{A}$ , se identifica la expresión  $A > A'$  con  $a_{ij} \geq a'_{ij} \forall i \neq j$  y  $a_{ij} > a'_{ij}$  para algún  $i \neq j$ , entonces se pueden detectar las siguientes limitaciones:

- Normalización: se restringe el rango de los índices al intervalo  $[0,1]$ , de manera análoga a medidas estáticas de desigualdad. Esto facilita el cálculo de probabilidades de movimientos y no supone, en sí mismo, una restricción a la identificación de indicadores, dado que siempre es posible aplicar un cambio de escalas y de origen para cumplir tal condición.
- Monotonía:  $A > A'$  implica  $\mathcal{M}(A) > \mathcal{M}(A')$ .
- Inmovilidad:  $\mathcal{M}(I) = 0$ .
- Movilidad perfecta:  $\mathcal{M}(A) = 1$  si  $A = ux^T$  con  $u$  el vector de unos y  $x^T u = 1$ .

Las condiciones de normalización, monotonía y movilidad perfecta son incompatibles entre sí (el conflicto severo se produce entre las dos últimas). Por tanto, en función del factor al que se desee otorgar relevancia se optará por priorizar una u otra restricción, relajando la limitación que corresponda.

Geweke et al. (1986) se refiere al criterio de persistencia, que establece que un índice debería ser consistente con interpretaciones simples e interesantes de la matriz de transición. En este estudio se recoge, además, el criterio de convergencia, que implica que  $\mathcal{M}(A)$  debería establecer una ordenación entre las matrices de transición consistente con la ratio al cual éstas convergen a la matriz ergódica. El criterio de agregación temporal, por su parte, supone dejar de considerar la influencia de la longitud del período básico de tiempo en las comparaciones sobre movilidad.

Siguiendo a Le Gallo (2004) se pueden considerar dos clasificaciones: índices de movilidad a la convergencia e índices de movilidad al equilibrio. Los primeros caracterizan de diversas formas la velocidad de aproximación a la distribución ergódica. Están basados en los autovalores de la matriz de transición, pero solo miden un aspecto de la distribución, ya que, incluso, cuando se

alcance la distribución de equilibrio habrá movimientos de una clase a otra. La segunda familia, la referida a los índices de movilidad al equilibrio, pretende obtener indicadores más amplios que los primeros.

Se analizan seguidamente los índices de movilidad a la convergencia más empleados. El indicador *half-life* (mitad de la vida) se interpreta como la cantidad de tiempo necesaria para cubrir la mitad de la distancia temporal a la distribución ergódica, y se define matemáticamente como:

$$hl = \frac{-\log(2)}{\log|l_2|} \quad (4.39)$$

Siendo  $l_2$  el segundo autovalor de  $A^T$ . Se verifica que  $0 \leq hl \leq \infty$ : mientras más cercano a 0 más cercanía a la distribución ergódica. Si  $hl = 0$  (es decir,  $l_2 = 0$ ) el sistema ha alcanzado el equilibrio, mientras que  $hl = \infty$  corresponde a la no existencia de distribución estacionaria. Schorrocks (1978) señala que una estructura rígida se asocia con cambios lentos en la distribución, de modo que la convergencia resulta relativamente lenta; por el contrario, estructuras con movilidad perfecta proporcionan la distribución de equilibrio dentro de un intervalo singular de tiempo. Este autor proporciona un índice que verifica la propiedad de invarianza del período<sup>130</sup>:  $M_{HL}(A, T) = e^{-hlT}$ . Se trata de un indicador que varía en el intervalo  $[0,1]$  y que representa, por tanto, la normalización de  $hl$ . También verifica inmovilidad, movilidad perfecta y movilidad perfecta fuerte:  $\mathcal{M}(A) = 1$  si y solo si  $A$  tiene filas idénticas.

Los siguientes indicadores toman valores en intervalos acotados, mientras se encuentren más cercanos al valor nulo mayor será la velocidad de aproximación a la distribución ergódica.

El índice de Prais se define como:

$$Prais = \frac{N - tr(A)}{N - 1}, \quad 0 \leq Prais \leq \frac{N}{N - 1} \quad (4.40)$$

Schorrocks (1978) destaca que Prais (1955) muestra que el tiempo medio de salida de la clase  $i$  se obtiene como  $\frac{1}{1-a_{ii}}$ . El índice de Prais se puede escribir como  $\sum_i \frac{1-a_{ii}}{N-1}$ , que es el recíproco de la media armónica de la media de tiempos de salida, normalizada por el factor  $\frac{N}{N-1}$ . Este indicador verifica inmovilidad, monotonía e inmovilidad fuerte; esta última propiedad implica que  $\mathcal{M}(A) = 0$  si y solo si  $A = I$ . También se cumple el criterio de persistencia. Cuando el indicador muestra el valor nulo implica total ausencia de movilidad. En el límite superior se verifica el máximo de esta característica de la muestra.

Geweke et al. (1986) señala que resulta evidente que cualquier índice  $\mathcal{M}(A)$  que se pueda expresar como una función monótona decreciente de los módulos de los autovalores de  $A$

<sup>130</sup>  $\mathcal{M}(A, T) > \mathcal{M}(A^k, kT)$ ,  $k \geq 1$ . Este criterio, y el de consistencia del período (si  $\mathcal{M}(A) \geq \mathcal{M}(A^*)$  entonces  $\mathcal{M}(A^k) \geq \mathcal{M}(A^{*k})$ ), se integran dentro de la visión genérica de agregación temporal.

cumplirá con el criterio de convergencia y será internamente consistente. El índice del autovalor se expresa como:

$$MA = \frac{1}{N-1} \left( N - \sum_j |l_j| \right) \quad (4.41)$$

Por su parte, el indicador del segundo mayor autovalor corresponde a:

$$SMA = 1 - |l_2|, \quad 0 \leq SMA \leq 1 \quad (4.42)$$

Dardanoni (1993) indica que esta expresión se interpreta en la literatura en términos de velocidad de escape de las condiciones iniciales y de regresión hacia la media.

Por último, el índice determinante se expresa como:

$$Det = 1 - |A|, \quad 0 \leq Det \leq 1 \quad (4.43)$$

Como señala Schorrocks (1978), los indicadores que emplean el determinante de la matriz de transición (existe una formulación más genérica,  $M_D = 1 - |A|^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ ) no han sido bien recibidos en la literatura, debido a que proporcionan el valor completo de la movilidad si hay dos columnas o dos filas idénticas. Este indicador vulnera la condición de movilidad perfecta fuerte si  $l_n = 0$ .

Respecto a los índices de movilidad al equilibrio, consideramos, en primer lugar, el de Bartholomew:

$$Bart = \sum_{i=1}^N w_i \sum_{j=1}^N a_{ij} |i - j| \quad (4.44)$$

Este indicador mide el número esperado de cambios de clase cuando el sistema se encuentra en el estado estacionario. Siguiendo a Schorrocks (1978), el sumatorio sobre  $j$  proporciona el número medio de clases que cruza un individuo originalmente en el estado  $i$ ; este valor se pondera posteriormente en términos de la distribución de equilibrio. Esta medida verifica en general la condición de inmovilidad, pero no se encuentra normalizada, ni cumple necesariamente monotonía o movilidad perfecta.

La probabilidad incondicional de abandonar la clase actual, que es un término escalado por  $\frac{N}{N-1}$ , se define como:

$$UPLC = \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^N w_i (1 - a_{ii}) \quad (4.45)$$

El siguiente indicador se basa en el cálculo previo de la matriz de tiempos medios de primer paso. Esto requiere una serie de resultados previos.

Dada una cadena de Markov ergódica inicializada en el estado  $S_i$ , se define el tiempo medio de primer paso de  $S_i$  a  $S_j$  al valor esperado del número de etapas para alcanzar el estado  $S_j$  por primera vez, que se denotará  $m_{ij}$ . Recibe el nombre de matriz de tiempos medios de primer paso la correspondiente a  $M = \{m_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ . Según LeGallo (2004) se interpreta que un elemento de la misma,  $m_{ij}$ , representa el tiempo esperado para que una región se mueva desde la clase  $i$  a la  $j$  la primera vez.

El cálculo de la matriz  $M$  puede realizarse con la ayuda de la llamada matriz fundamental. Para ello resulta adecuado basarse en la siguiente proposición: dada una cadena de Markov ergódica,  $W$ , la matriz  $I - A + W$  posee inversa. En tal caso, dada una cadena de Markov ergódica se llama matriz fundamental a la matriz  $Z = (I + A + W)^{-1}$ .

Un teorema importante en este contexto señala que, dada una cadena de Markov ergódica, se verifica que:

$$M = (I - Z + cc^T Z_{dg})D \quad (4.46)$$

Donde  $c$  es un vector columna de unos,  $Z_{dg}$  es la matriz que resulta al hacer cero los elementos no diagonales de  $Z$ , y  $D$  es una matriz diagonal formada por los elementos  $\frac{1}{w_j}$ .

Con la base teórica anterior, se define el indicador tiempo medio de primer paso como el número esperado de periodos de tiempo para que un individuo cualquiera de la población pase a tener el estado de un segundo individuo cualquiera:

$$M_f = wMw^T \quad (4.47)$$

En los desarrollos asociados al estudio de las evoluciones económicas surge la necesidad de contrastar la igualdad de varias matrices de transición. Además de estimar una matriz de transición  $A$  con todas las regiones analizadas, se dispone de estimaciones de distintas matrices de transición, cada una ajustada según la categoría de la variable agregada espacialmente. De ese modo, usando el mismo número de categorías,  $N$ , se dispone también de  $N$  matrices de transición  $A^{(1)}, \dots, A^{(N)}$ . Se plantea entonces el contraste de la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: a_{ij}^{(1)} = \dots = a_{ij}^{(N)} = a_{ij} \quad \forall i, j = 1 \dots n \quad (4.48)$$

En nuestro estudio se han implementado dos procedimientos en R, uno basado en la distribución asintótica asociada al test de razón de verosimilitud y un test de permutaciones.



En el primer caso, el estadístico resultante es, según LeGallo (2004)<sup>131</sup>:

$$Q = -2 \log \left\{ \prod_{l=1}^N \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \left( \frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{a}_{ij}^{(l)}} \right)^{n_{ij}^{(l)}} \right\} \quad (4.49)$$

En esta expresión intervienen los siguientes elementos:

- $\hat{a}_{ij}$  es la estimación de la probabilidad de que una unidad territorial esté en la clase  $i$  en  $t - 1$  y pase a la clase  $j$  en  $t$ ;
- $\hat{a}_{ij}^{(l)}$  corresponde a la estimación de la probabilidad de que una unidad territorial esté en la clase  $i$  en  $t - 1$  y pase a la clase  $j$  en  $t$ , suponiendo que la agregación espacial esté en la categoría  $l$  en  $t - 1$ ;
- $n_{ij}^{(l)}$  es el número de regiones que pertenecen a la clase  $i$  en  $t - 1$  y pasan a la clase  $j$  en  $t$ , y cuya agregación espacial se encuentre en la categoría  $l$  en  $t - 1$ .

Bajo la hipótesis nula,  $Q \rightarrow \chi_{N(N-1)}^2$ . Por tanto el  $p$  valor se puede calcular como la probabilidad a la derecha del valor observado  $Q_0$ :

$$pv = P[Y \geq Q_0] \quad Y \sim \chi_{N(N-1)}^2 \quad (4.50)$$

Sin embargo, además de los inconvenientes y restricciones usuales en un test asintótico, agravado en este caso por la necesidad de estimar de modo fiable  $N^3$  probabilidades, la naturaleza espacial de los datos analizados conlleva dudas adicionales sobre el rendimiento de este procedimiento, tal y como expresa Fingleton (1983a, 1983b y 1986).

Como alternativa al test de razón de verosimilitud se ha implementado en R el siguiente test de permutaciones en base a que, bajo la hipótesis nula, las probabilidades de transición no dependen de la categoría que ocupan los valores agregados espaciales; por tanto estas categorías pueden ser permutadas aleatoriamente en cada iteración.

- Se calcula el estadístico  $Q$  sobre los datos originales y se obtiene  $Q_0$ .
- Se fija  $B$ , el número de permutaciones (en nuestro caso se ha optado por 2000).
- Para  $b = 1, 2 \dots B$  se desarrolla el ciclo iterativo:
  - Se aplica una permutación aleatoria de las categorías de la variable agregada espacial.
  - Se recalcula el estadístico, obteniéndose  $Q_b^*$ .
  - Se pasa al siguiente valor de  $b$ .

El  $p$ -valor aproximado se obtiene finalmente con la expresión

<sup>131</sup> Para ello se basa en Anderson y Goodman (1957) y Kullback, Kupperman, y Ku (1962).

$$\hat{p}_B = \frac{\#\{Q_b^* \geq Q_0\}}{B} \quad (4.51)$$

La consideración de los patrones espaciales asociados a las transiciones regionales entre las clases identificadas en las distribuciones de PIB, es decir, su tratamiento a través de cadenas de Markov espaciales, requiere, como indica LeGallo (2004), la aplicación del correspondiente test de autocorrelación. Este autor emplea las siguientes matrices de pesos<sup>132</sup>  $W(k)$ , con  $k = 1, 2, 3$ :

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j, \forall k \\ \frac{1}{d_{ij}^2}, & \text{si } d_{ij} \leq D(k) \\ 0, & \text{si } d_{ij} > D(k) \end{cases}$$

En este caso  $d_{ij}$  representa la distancia del Gran Círculo, también llamada distancia ortodrómica, entre los centroides de las regiones  $i$  y  $j$ . Se ha utilizado para calcular estas distancias la función `rdist.earth` de la librería `fields` de R (Nychka et al., 2014).  $D(k)$  representa el parámetro de corte para cada valor de  $k$ ; por encima de este valor se rechaza el efecto de las interacciones. LeGallo (2004) considera  $D(1)$  como el cuartil inferior,  $D(2)$  la mediana y  $D(3)$  el cuartil superior de la distribución de la gran distancia circular.

En base a esta consideración de la matriz se procede a la evaluación de las transiciones mediante el test de agregación propuesto por Cliff y Ord (1981):

$$BB = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij}(\delta_i \delta_j) \quad (4.52)$$

Esta herramienta evalúa movimientos, tanto ascendentes como descendentes de clase. En el primer caso el término  $\delta_i = 1$  si la región  $i$  ha ascendido un nivel de renta; el valor que toma es cero en otro caso. Al evaluar la autocorrelación espacial de transiciones descendentes se considera  $\delta_i = 1$  si la región  $i$  baja una clase. En definitiva, el estadístico cuenta el número de veces que dos regiones vecinas experimentan un desplazamiento en el mismo sentido del PIB.

En línea con todos los planteamientos expuestos, Quah (1996b) destaca que la omisión de los condicionantes espaciales en los patrones de crecimiento de la renta puede provocar inferencias erróneas. Por ese motivo adopta lo que en la literatura (Rey, 2001 o LeGallo, 2004) se identifica como *regional conditioning*. Bajo este enfoque se consideran tres distribuciones distintas de la renta: (i) respecto a la media europea; (ii) en referencia a la media nacional; y (iii) en relación a los vecinos geográficos. En cada caso se procede a la normalización de la renta de cada región para obtener su valor relativo. El criterio geográfico (o sea, el asociado a la vecindad) es el más potente de los tres: se puede demostrar que la desviación estándar de esta distribución condicionada disminuye más rápido que las otras dos (Quah, 1996, realiza la estimación en un período de diez años). El estudio que se está revisando considera unas

<sup>132</sup> En la sección () se procedió a una revisión de modelos basados en planteamientos similares de distancia.

probabilidades de transición que describen las posiciones relativas entre la renta media nacional y la renta media de los vecinos geográficos. Quah (1996b) postula que si el contexto espacial no tuviera relevancia entonces las matrices de transición serían diagonales, dado que cada economía se consideraría independiente de sus vecinas<sup>133</sup>. La realidad es distinta: según este autor, al introducir el factor de condicionamiento, las matrices de transición, tanto las referentes la renta relativa de países como de vecinos, se encuentran lejos de tener una estructura diagonal (esta idea se analiza en nuestro estudio empírico a través de la matriz de transición de probabilidades condicionadas). Resulta importante destacar que este planteamiento no describe los cambios en el tiempo; se limita a mostrar el estado de la economía regional entre dos distribuciones de renta relativa en el mismo instante temporal.

Siguiendo a Quah (1996b) y considerando, por tanto, la importancia del criterio geográfico en la explicación de las desigualdades regionales del PIB per cápita en Europa, LeGallo (2004) construye una serie de rentas *relativas-vecinas*. El procedimiento consiste en normalizar el PIB per cápita de cada región en base al circundante; de este modo, como se indicó en la sección 4.3 se obtiene una matriz de pesos estandarizada,  $W^*$ . La media ponderada del PIB de las regiones vecinas se obtiene a través del vector  $W^*y$ , ya identificado como *retardo espacial*.

Rey (2001) incorpora una modificación de la matriz clásica de Markov para considerar estos efectos, generando la denominada matriz espacial de Markov, que descompone el conjunto  $k \times k$  de transiciones en un sistema  $k \times k \times k$ . En este sentido hay que recordar que el estadístico local de Moran permite transformar las localizaciones observadas en el espacio absoluto en posiciones del espacio relativo, que consideran la posición de la variable y de sus vecinas de distribución. Se consideran cuatro clases de asociaciones espaciales, como se muestra en la siguiente tabla:

Clase	Valor de la variable	Valor de las vecinas
HH	Por encima de la media	Por encima de la media
HL	Por encima de la media	Por debajo de la media
LH	Por debajo de la media	Por encima de la media
LL	Por debajo de la media	Por debajo de la media

Tabla 4.17. Asociaciones espaciales según el estadístico local del Moran

Fuente: Rey (2001: 200).

El desarrollo de la matriz espacial de Markov implica establecer el condicionante de Quah entre la clase inicial de renta y su retardo espacial. Como indica Rey (2001: 203), *“an explicit test of the stickiness or propulsive influence of an economy’s neighbors could be based on comparing the different state transitions conditioning on the initial state of its spatial lag”*. Si, por ejemplo, se considera  $k = 3$ , la estructura de esta matriz sería:

<sup>133</sup> La explicación de este resultado, en términos de Quah (1996: 953), es: *“Geographical regions, if they remain meaningfully defined, would be like isolated islands: neither their being part of a country, nor their being physically close to another region makes any difference for their economic performance”*.

Retraso	Estado $t_0$	Estado $t_1$		
		Bajo	Medio	Alto
Bajo	Bajo	$a_{LL L}$	$a_{LM L}$	$a_{LH L}$
	Medio	$a_{ML L}$	$a_{MM L}$	$a_{MH L}$
	Alto	$a_{HL L}$	$a_{HM L}$	$a_{HH L}$
Medio	Bajo	$a_{LL M}$	$a_{LM M}$	$a_{LH M}$
	Medio	$a_{ML M}$	$a_{MM M}$	$a_{MH M}$
	Alto	$a_{HL M}$	$a_{HM M}$	$a_{HH M}$
Alto	Bajo	$a_{LL H}$	$a_{LM H}$	$a_{LH H}$
	Medio	$a_{ML H}$	$a_{MM H}$	$a_{MH H}$
	Alto	$a_{HL H}$	$a_{HM H}$	$a_{HH H}$
	Bajo	$a_{LL}$	$a_{LM}$	$a_{LH}$
	Medio	$a_{ML}$	$a_{MM}$	$a_{MH}$
	Alto	$a_{HL}$	$a_{HM}$	$a_{HH}$

Tabla 4.18. Estructura de la matriz espacial de Markov. Caso  $k=3$ .

Fuente: Rey (2001: 204).

La parte final de la tabla XX representa las probabilidades de transición marginal para los estados iniciales y finales y se obtiene agregando las celdas superiores, en las que se disponen las distribuciones condicionales. Como señala Rey (2001) la influencia global de la dependencia espacial se refleja en las diferencias entre estos valores marginales y los condicionales. Si, por ejemplo,  $a_{MH} > a_{MH|L}$  la probabilidad de un movimiento hacia arriba de un estado con renta media, con independencia de sus vecinos, es mayor que la probabilidad de ese mismo desplazamiento hacia una clase superior de un estado medio, cuyos vecinos son pobres. Bajo este enfoque, si el contexto regional no influye en las probabilidades de transición se verificará:

$$m_{ij|1} = m_{ij|2} = \dots = m_{ij|k}, \forall i, j \quad (4.53)$$

El test recomendado para comprobar si se verifican las restricciones de (4.53) se recoge en (4.49). La evaluación consiste en comprobar si las probabilidades de transición espacial de una región no son diferentes de las recogidas en la matriz de transición no espacial. La hipótesis nula implica que estas probabilidades de transición no dependen del retardo espacial.

Se cierra el presente apartado con el tratamiento de dos aspectos significativos de las cadenas de Markov, espaciales y no espaciales, que pueden afectar de manera relevante a los resultados. Por una parte, como señala Monfort (2008), las conclusiones de los estudios en este contexto dependen fuertemente de la aproximación que se realice al rango de valores que definen las clases no solapadas. En los estudios previos, como Quah (1997), se consideran las medias del núcleo estocástico para identificar el principio y final de las distribuciones. Como alternativa, presente por ejemplo en LeGallo (2004), es posible definir las clases empleando los cuantiles, garantizando así que cada una contiene un número similar de observaciones.

Por otro lado, como indica Sala-i-Martin (2006: 352), *“using countries as units of analysis, however, is not useful if one worries about human welfare because different countries have different population sizes”*. En esta línea Monfort (2008) destaca la necesidad de penalizar el bienestar de los individuos que viven en unidades (regiones, países...) con tamaños de

población muy elevados. La consideración de esta idea dentro del tratamiento de cadenas de Markov implica ponderar dichas unidades económicas en base a su población.

Los estudios empíricos desarrollados en Monfort (2008) incorporan, en el apartado final, las dos cuestiones comentadas. En general, los resultados difieren poco de los iniciales, sin tener en cuenta estos aspectos, al menos desde el punto de vista cualitativo. La introducción de los pesos sí conlleva un ligero incremento de la velocidad de convergencia, lo que refleja que la distribución estacionaria es, de media, más frecuente en regiones más pobladas.

#### 4.6.2 Estudios empíricos

En el apartado anterior se han introducido algunas referencias respecto a desarrollos empíricos orientados a la identificación de la modalidad de la distribución de rentas. En este segundo apartado nos centraremos brevemente en el tratamiento de cadenas de Markov que se expone en dos estudios particulares, diferenciando el tratamiento espacial y el no espacial; seguidamente describiremos el análisis específico que hemos desarrollado en este ámbito.

Como se veía anteriormente, LeGallo (2004) desarrolla su investigación sobre PIB en ECUS y PIB en *ppa* en una muestra con 138 regiones (NUTS 2), en 11 países de Europa y en el intervalo 1980 a 1995. En su desarrollo no espacial de cadenas de Markov considera, en el estudio de la primera variable, cinco clases distintas: (i) < 65% de la media europea; (ii) entre el 65% y el 95%; (iii) entre el 95% y el 110%; (iv) entre el 110% y el 125%; y (v) por encima del 125% de la media de Europa. Al considerar el PIB en *ppa* también se identifican cinco clases: (i) < 75% de la media europea; (ii) entre el 75% y el 95%; (iii) entre el 95% y el 105%; (iv) entre el 105% y el 120%; y (v) por encima del 120% de la media de Europa. Siguiendo a Quah (1993a) la discretización inicial se lleva a cabo incluyendo en las agrupaciones iniciales un número similar de economías.

La matriz de probabilidades de transición se determina aplicando:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \quad (4.54)$$

El término  $n_{ij}$  representa el número total de regiones que se mueven desde la clase  $i$  en el año  $t - 1$  hasta la clase  $j$  en el año  $t$  durante los quince de transición; por su parte,  $n_i$  es la suma total de regiones que alguna vez han estado en la clase  $i$  desde 1980 hasta 1995.

A fin de comprobar si se han producido cambios en el proceso de convergencia, se aplica el estadístico (4.49), considerando el subperíodo 1980 a 1989 y 1989 a 1995. De este modo se analiza si ambas submatrices difieren entre sí y respecto a la estimación de la matriz para todo el período. Se comprueba de este modo que no es posible rechazar la hipótesis de transición similar para ambas submatrices y para la matriz completa.

El indicador tiempo medio de primer paso, definido en (4.47), muestra que el número medio de años en alcanzar cualquier clase es relativamente elevado: el mínimo corresponde a 13.7 años y el máximo a 162.7 años. De manera global los movimientos en sentido ascendente son más lentos que los descendentes (en especial para clases correspondientes a rentas más altas).

Por su parte el estudio de la distribución ergódica revela convergencia hacia la media en ambas variables, aunque se detecta una trampa de pobreza debido al incremento de clases pobres respecto a la distribución inicial. La medida de distintos índices de movilidad revela escaso dinamismo y confirma algunos planteamientos previos, que se deducían del estudio de las funciones de densidad: (i) se produce polarización; (ii) se detecta una convergencia lenta entre regiones con rentas bajas y cercanas a la media; y (iii) las economías más pobres no convergen hacia la media. “*The poorest regions will probably remain poor compared to the European average*”, LeGallo (2004: 147).

Monfort (2008) analiza también mediante cadenas de Markov no espaciales el PIB per cápita durante el período 1995 a 2005, considerando dos subperíodos: 1995 a 2000 y 2000 a 2005 (los datos proceden de EUROSTAT – Regio). También se establece una diferenciación en el tamaño de la muestra, al analizar por una parte EU-27 y por otra EU-15. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	EU-27	EU-15
Principales estadísticos	$Vida\ media_{1995-2005} = 3.9$ períodos <sup>134</sup> $Vida\ media_{1995-2000} = 8.4$ períodos $Vida\ media_{2000-2005} = 5.8$ períodos $IE_{1995-2005} = 0.74$ $IE_{1995-2000} = 0.86$ $IE_{2000-2005} = 0.85$	$Vida\ media_{1995-2005} = 4.5$ períodos $Vida\ media_{1995-2000} = 6.7$ períodos $Vida\ media_{2000-2005} = 5.4$ períodos $IE_{1995-2005} = 0.69$ $IE_{1995-2000} = 0.79$ $IE_{2000-2005} = 0.80$
Análisis de la matriz de transición	Indica alto grado de persistencia. Los elementos de la diagonal son muy elevados, lo que revela tendencia a permanecer en el mismo estado. Este comportamiento se atenúa en las clases finales: las regiones cuya renta se encuentra por debajo del 100% de la media europea se desplazan con mayor frecuencia hacia categorías superiores.	La persistencia es menor en este caso; los valores en la diagonal son inferiores que en EU-27.
Análisis del proceso de convergencia	Se detecta $\beta$ -convergencia. La distribución evoluciona hacia bajas frecuencias en la parte final. El proceso tiene una velocidad muy lenta, como se deduce de la vida media. El tiempo mínimo para alcanzar cualquier período es 4.13 períodos.	El proceso de convergencia se verifica para las regiones con renta por encima del 75% de la media, aunque continúa en desarrollo para las clases más bajas. La velocidad de convergencia es inferior a la de EU-27, aunque las transiciones en categorías con bajas rentas per cápita son más rápidas (el tiempo mínimo se reduce a 2.2 períodos).

Tabla 4.19. Estudio mediante cadenas de Markov del PIB per cápita en UE-27 y UE-15. Período: 1995-2005.

Fuente: elaboración propia a partir de Monfort (2008).

Se comprueba que el modelo no recoge de manera precisa la evolución en EU-15. Según Monfort (2008) esto es debido a la presencia de escasas regiones en las categorías inferiores: su peso es tan reducido que las diferencias existentes no se muestran en los indicadores principales. También se aprecian diferencias significativas respecto a los resultados de LeGallo (2004), tanto desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo, en especial en el tratamiento de la evolución de las clases más bajas.

<sup>134</sup> Cada período corresponde a diez años.

A fin de comparar los dos planteamientos no espaciales con la consideración de este aspecto, en la segunda parte del estudio de LeGallo (2004), se indican seguidamente las conclusiones más significativas de su análisis:

- Los valores del estadístico BB (ver ()), tanto en desplazamientos superiores como inferiores, muestran que la hipótesis nula de no autocorrelación espacial siempre es rechazada. Esta hipótesis también se rechaza incluso considerando desplazamientos en el *ranking* de las regiones superiores a una desviación estándar. La conclusión es, por tanto, que la dimensión espacial se debe incorporar al estudio de las transiciones regionales del PIB.
- Este planteamiento genérico se concreta al analizar algunos casos particulares. Por ejemplo, a través de la matriz espacial de Markov se comprueba que las regiones más ricas se encuentran afectadas de manera negativa por las más pobres: de media, estas localizaciones se desplazan hacia una clase inferior con una probabilidad del 7%; sin embargo, este valor alcanza el 11.1% si los vecinos son de clase media o el 9.2% si se trata de ámbitos pobres. Por el contrario, las unidades pobres se encuentran beneficiadas con la presencia circundante de ricas: la probabilidad de subir una categoría pasa del 4% de media general al 6% en el segundo caso.
- Por su parte el test de permutaciones señala que la hipótesis nula se rechaza de modo relevante para todas las matrices de pesos (tanto en ECU como en *ppa*). El contexto regional influye, por tanto, en la distribución interna del PIB.

El estudio empírico que hemos desarrollado se centra en el PIB per cápita en euros, asociado a 276 regiones (unidades NUTS 2) en el ámbito EU-28 (última actualización: 25 de septiembre de 2015). Los datos proceden de Eurostat. El intervalo temporal se extiende desde 2000 hasta 2011 (el máximo que proporciona en la actualidad este repositorio).

En primer lugar se procede al desarrollo de las cadenas de Markov sin elementos espaciales. Como se indicó en la sección anterior se consideran los cuartiles del PIB en el año inicial:

Cuartiles	0%	25%	50%	75%	100%
PIB	1,300	11,900	19,900	24,300	75,400

Tabla 4.20. Estudio empírico con cadenas de Markov. Cuartiles del PIB en el año 2000.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Esto permite identificar cuatro clases respecto al valor medio del PIB en el año 2000, con la siguiente distribución:

Identificación de la clase	1	2	3	4
Descripción	<64%	[64%,108%]	[108%,131%]	>131%
Porcentaje de regiones sobre el total	25.09%	25.09%	25.46%	24.34%

Tabla 4.21. Estudio empírico con cadenas de Markov. Identificación de las clases empleadas considerando las medias europeas de rentas.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

En las siguientes figuras se representan las distribuciones regionales de la variable, encuadradas en cada una de las clases, en el año inicial y final:

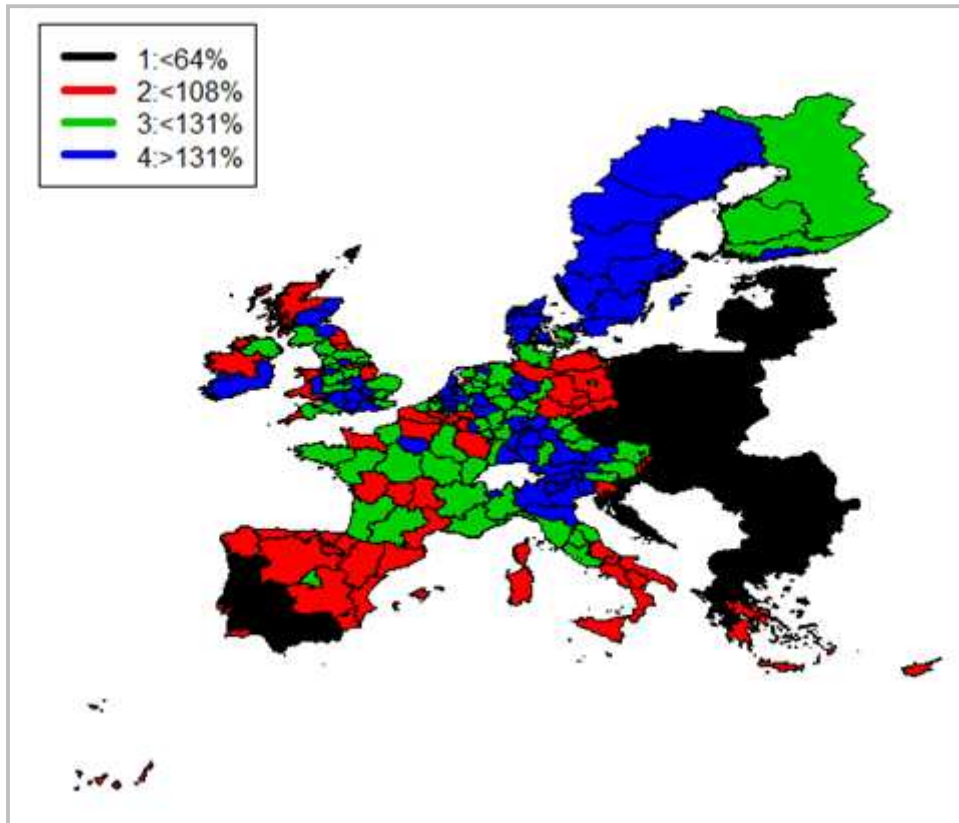


Figura 4.4. Estudio empírico con cadenas de Markov. Distribuciones de las clases correspondientes al PIB per cápita en euros considerando las medias europeas de rentas. Año 2000.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.



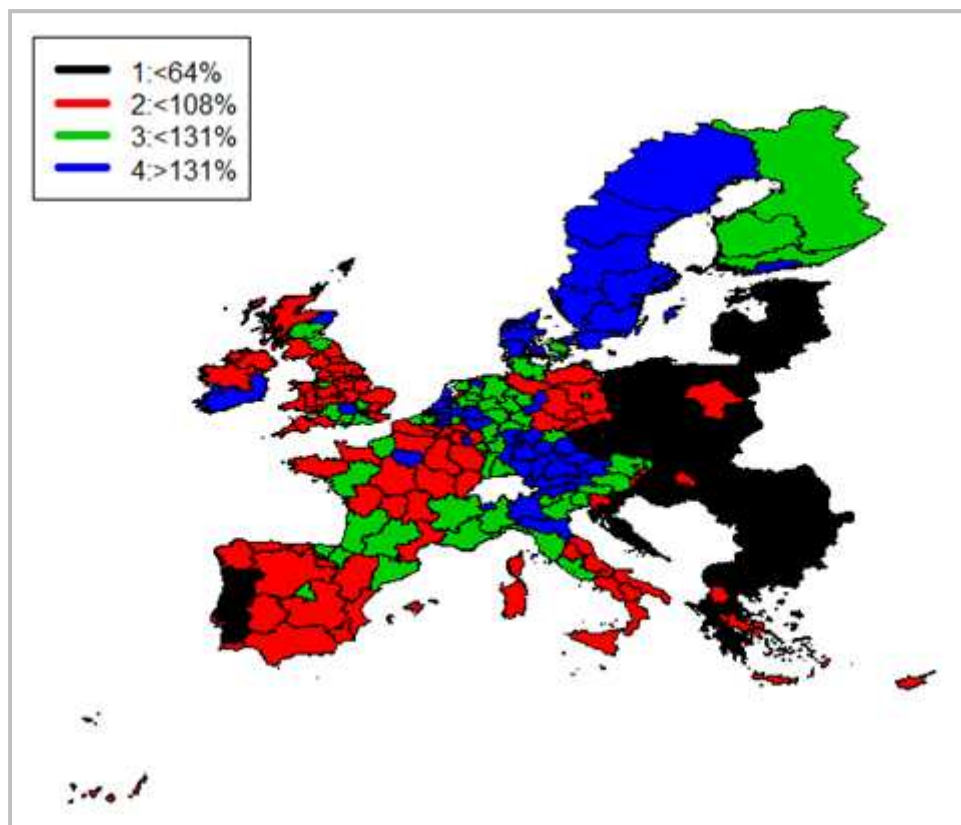


Figura 4.5. Estudio empírico con cadenas de Markov. Distribuciones de las clases correspondientes al PIB per cápita en euros considerando las medias europeas de rentas. Año 2000.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

De acuerdo al procedimiento indicado en LeGallo (2004), se determina el total de veces que se produce cada transición (para cada clase):

	1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%	N
1: <64%	660	18	0	0	678
2: [64%,108%]	12	811	29	0	852
3: [108%,131%]	0	53	734	33	820
4: >131%	0	0	43	544	587

A partir de aquí se calcula la matriz de probabilidades de transición:

	1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%
1: <64%	0.973	0.027	0.000	0.000
2: [64%,108%]	0.014	0.952	0.034	0.000
3: [108%,131%]	0.000	0.064	0.895	0.040
4: >131%	0.000	0.000	0.073	0.927

Se relaciona seguidamente la distribución ergódica alcanzada:

Descripción	<64%	[64%,108%]	[108%,131%]	>131%
Distribución	0.226	0.426	0.224	0.124

En línea con los resultados de LeGallo (2004) la diagonal de la matriz de probabilidades muestra valores muy elevados: esto supone, todavía más reforzado que en Monfort (2008), persistencia en los mismos estados y debería verse reflejado en los distintos indicadores. Se omite el tratamiento particularizado de subperíodos debido a esta idea de permanencia; una primera revisión de los resultados asociados a los intervalos 2000 a 2005 y 2006 a 2011 confirma la validez de este planteamiento. Por su parte, destaca en la distribución ergódica el incremento en la presencia de las segundas clases, lo que parece implicar cierto grado de convergencia hacia los valores medios. Al igual que LeGallo (2004) también concluimos que las regiones pobres no mostrarían esta tendencia.

En la siguiente tabla se disponen los principales índices de movilidad, definidos en la sección anterior:

Índice de estabilidad	0.937				
Indicadores de movilidad a la convergencia					
Half-life	23.962				
Prais (el máximo que puede alcanzar es $\frac{4}{3}$ )	0.084				
Segundo mayor autovalor	0.028				
Determinante	0.236				
Indicadores de movilidad al equilibrio					
Bartholomew	0.059				
Probabilidad incondicional de abandonar la clase actual	0.079				
Matriz de tiempos medios de primer paso (en color rojo se muestra el valor máximo y en verde el mínimo fuera de la diagonal)		1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%
	1:<64%	4.423	37.667	82.632	179.698
	2: [64%,108%]	128.931	2.346	44.965	142.031
	3: [108%,131%]	152.902	23.971	4.456	97.066
	4:>131%	166.554	37.623	13.651	8.110
Tiempo medio de primer paso	57.754				

Tabla 4.22. Estudio empírico con cadenas de Markov. Índices de estabilidad y movilidad asociados al tratamiento respecto a las medias europeas

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

El índice de estabilidad es muy elevado, lo que fortalece el sentido de los primeros comentarios. Igualmente, el índice de Bartholomev revela escasa esperanza de cambios de clase cuando el sistema alcanza el estado estacionario. De nuevo, las velocidades de convergencia resultan bajas, en términos próximos a los de LeGallo (2004) –y, por tanto, con ciertas disparidades respecto a Monfort (2008). En nuestro caso resulta difícil apreciar diferencias significativas en la celeridad de los cambios de clases (asociados tanto a movimientos ascendentes como descendentes). Se aprecia, como cabía esperar, muy largos tiempos de paso entre la clase 1 y la 4, encontrándose el mínimo en el descenso del nivel más alto al tercero.

Con objeto de completar el análisis se ha procedido al cálculo de la matriz de transición de probabilidades condicionadas a fin de cuantificar los efectos de las regiones vecinos.

	1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%	N
1: <64%	0.608	0.386	0.007	0.000	739
2: [64%,108%]	0.035	0.650	0.264	0.051	949
3: [108%,131%]	0.000	0.217	0.682	0.101	874
4: >131%	0.000	0.079	0.755	0.165	642

En nuestro caso se produjeron 739 casos de una región con un PIB por debajo del 64% de la media europea y, además, el 61% de estas regiones se caracterizaron porque sus vecinos tuvieron también de media un PIB por debajo de dicho 64% para el mismo año. La diagonal muestra valores superiores al 60% e inferiores al 70%, salvo en la última clase, detectándose porcentajes más reducidos en los elementos adyacentes. Esto concede importancia a los condicionantes de los vecinos, aunque la influencia es menor que, por ejemplo, en el estudio de LeGallo (2004).

Se procede seguidamente a incorporar el efecto espacial en la modelización de las cadenas de Markov. Para ello se calculan los llamados valores agregados espaciales. Dada la matriz de datos  $X$  de dimensiones  $N \times T$ , y dada una matriz de pesos espaciales  $W$  de dimensiones  $N \times N$ , siendo 1 la suma de cada fila de  $W$ , los valores agregados espacialmente se calculan mediante el producto matricial  $WX$ . Así, para cada año (columna de  $X$ ) se calcula para cada región y cada año una media ponderada de los valores de todas las regiones, donde el peso de cada valor será mayor para las regiones más cercanas.

La siguiente tabla presenta distribución de los valores agregados espaciales en el primer año (2000) utilizando los intervalos previamente definidos, todo ello con la matriz de pesos espaciales definida a partir de las inversas de las distancias ortodrómicas. Por ejemplo, la categoría <64% representa ahora el conjunto de regiones cuyo PIB agregado espacialmente se encontraba por debajo del 64% de la media de todos los valores agregados espaciales, todo ello referido al año 2000.

Identificación de la clase	1	2	3	4
Descripción	<64%	[64%,108%]	[108%,131%]	>131%
Porcentaje de regiones sobre el total	17.60%	28.46%	44.94%	8.98%

Tabla 4.23. Estudio empírico con cadenas de Markov. Identificación de las clases empleadas en el modelo con retardo espacial.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Se procede de nuevo a la representación de la distribución de las cuatro clases bajo este nuevo enfoque:

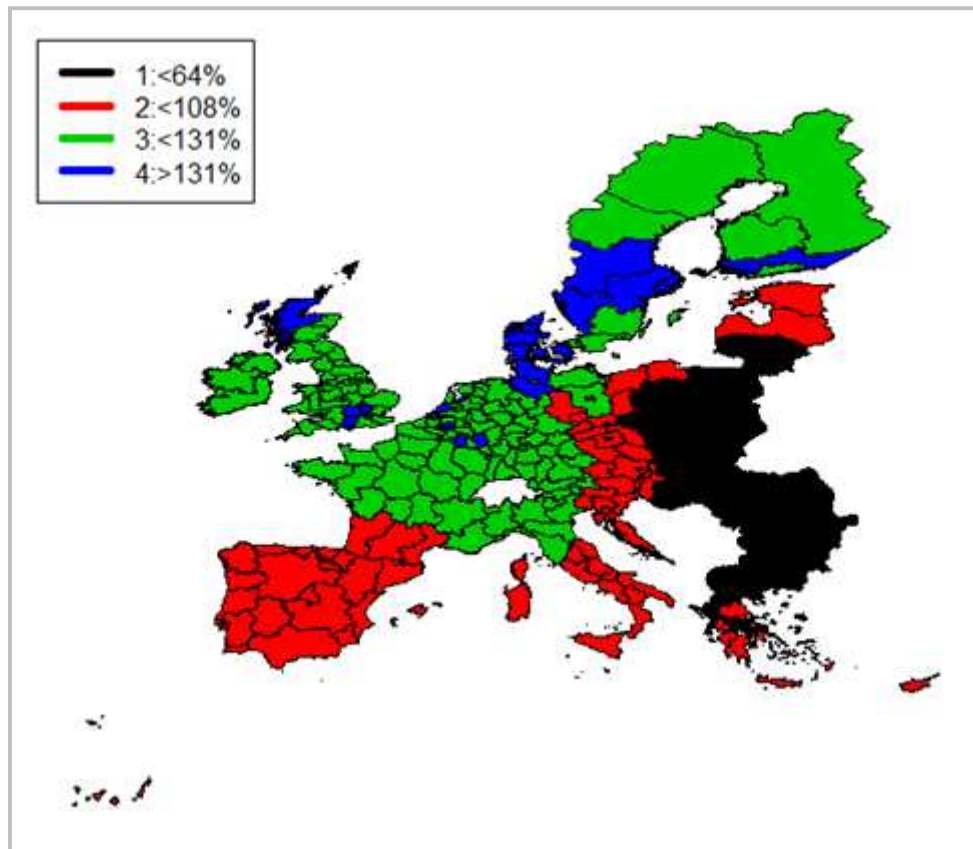


Figura 4.6. Estudio empírico con cadenas de Markov. Distribuciones de las clases correspondientes al PIB per cápita en euros considerando la media de las unidades vecinas. Año 2000.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

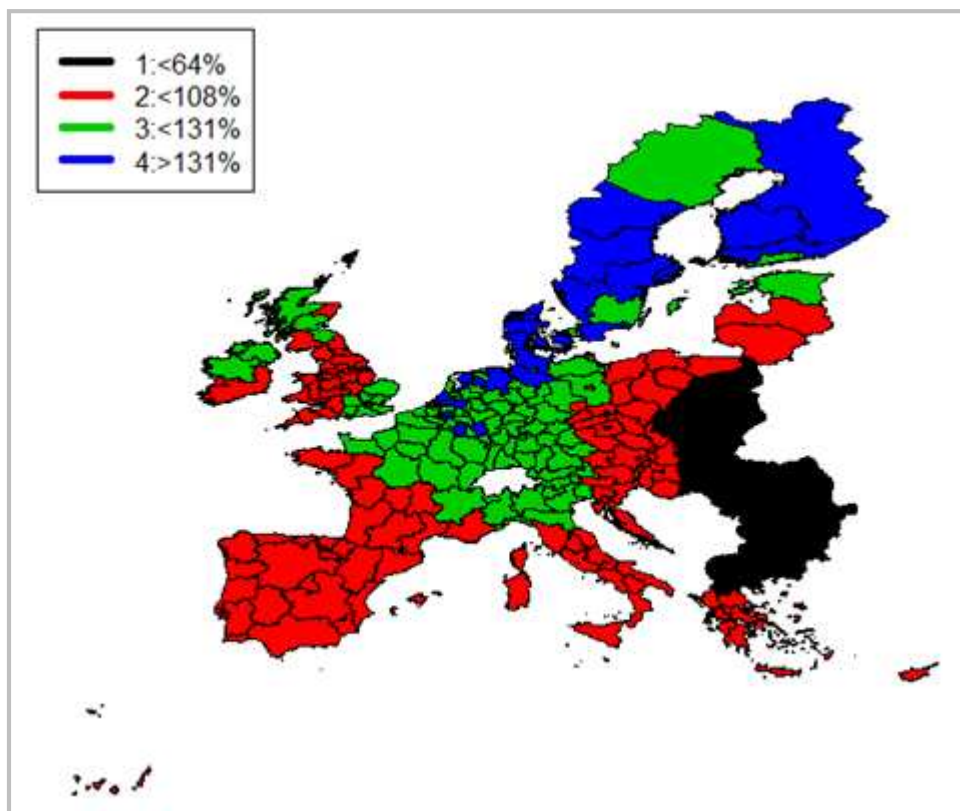


Figura 4.7. Estudio empírico con cadenas de Markov. Distribuciones de las clases correspondientes al PIB per cápita en euros considerando la media de las unidades vecinas. Año 2011  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Los totales de las transiciones se recogen en la siguiente tabla:

	1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%	N
1: <64%	431	17	0	0	448
2: [64%,108%]	4	990	29	0	1,023
3: [108%,131%]	0	60	1,166	25	1,251
4: >131%	0	0	22	193	215

Por tanto, la estimación de la matriz de probabilidades de transición, considerando el efecto espacial, es:

	1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%
1: <64%	0.962	0.038	0.000	0.000
2: [64%,108%]	0.004	0.968	0.028	0.000
3: [108%,131%]	0.000	0.048	0.932	0.020
4: >131%	0.000	0.000	0.102	0.898

La estimación de la distribución ergódica asociada es:

Descripción	<64%	[64%,108%]	[108%,131%]	>131%
Distribución	0.057	0.553	0.327	0.063

La matriz de probabilidades nos indica, por ejemplo, que, a principios de año, se detectaron 448 casos de una región con un PIB per cápita por debajo del 64% de la media de las vecinas: el 96.2% de estas unidades permanecieron en esta clase al final del período, mientras que el 3.8% restante ascendió al segundo nivel (de modo que su PIB per cápita pasó a estar comprendido entre el 64% y el 108% de la media del entorno).

En este caso los extremos se han reducido: se pasa de 678 regiones pobres y 587 ricas, respecto a la media europea (tal y como aparece en la matriz básica), frente a 448 pobres y 215 ricas, considerando la renta de las vecinas. De este modo se incrementan las unidades con PIB per cápita en el entorno de valores medios. La distribución ergódica recoge de manera diáfana este comportamiento (con valores en torno al 5% en los extremos), lo que también se refleja en una primera revisión de las dos últimas figuras, en las que se constata el predominio de los colores asociados a las clases intermedias.

En la siguiente tabla se disponen los valores de los principales índices de movilidad en este segundo contexto:

Índice de estabilidad	0.937				
Indicadores de movilidad a la convergencia					
Half-life	17.998				
Prais	0.080				
Segundo mayor autovalor	0.038				
Determinante	0.224				
Indicadores de movilidad al equilibrio					
Bartholomew	0.049				
Probabilidad incondicional de abandonar la clase actual	0.065				
Matriz de tiempos medios de primer paso (en color rojo se muestra el valor máximo y en verde el mínimo fuera de la diagonal)		1: <64%	2: [64%,108%]	3: [108%,131%]	4: >131%
	1:<64%	17.561	26.353	65.264	208.689
	2: [64%,108%]	436.434	1.809	38.911	182.336
	3: [108%,131%]	461.356	24.922	3.061	143.426
	4:>131%	<b>471.129</b>	34.695	<b>9.773</b>	15.676
Tiempo medio de primer paso	50.193				

Tabla 4.24. Estudio empírico con cadenas de Markov. Índices de estabilidad y movilidad asociados al tratamiento respecto a las medias de las regiones vecinas.

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

Se comprueba que la estabilidad de la matriz vuelve a ser muy elevada, manteniéndose el índice muy próximo a la unidad. En líneas generales, los indicadores de las dos cadenas muestran valores muy similares, encontrándose las máximas discrepancias en la vida media, que se reduce, y en los términos de la matriz de tiempos medios, que revelarían una mayor celeridad en los ascensos de clase (aunque muy matizada); el tiempo medio de primer paso también disminuye, lo que vuelve a sugerir, a la vista de las reflexiones sobre los indicadores temporales, una cierta disminución de la persistencia en los estados (que la matriz de transición, sin embargo, no muestra).

Como se indicaba en la revisión teórica, estas cuantificaciones hacen referencia a la convergencia entre vecinos, por lo que no ofrecen información sobre movimientos a nivel superior. Por ese motivo se procede a estimar la matriz espacial de Markov:

Retardo espacial	$t_i/t_{i+1}$	1	2	3	4	N	Distribución inicial
1:<64%	1	0.981	0.019	0.000	0.000	418	0.957
	2	0.167	0.800	0.033	0.000	30	0.043
	3	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0.000
	4	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0.000
2: [64%,108%]	1	0.961	0.039	0.000	0.000	256	0.289
	2	0.013	0.974	0.013	0.000	549	0.539
	3	0.000	0.029	0.948	0.023	172	0.132
	4	0.000	0.000	0.130	0.870	46	0.039
3: [108%,131%]	1	1.000	0.000	0.000	0.000	4	0.000
	2	0.000	0.922	0.078	0.000	230	0.167
	3	0.000	0.072	0.884	0.044	568	0.442
	4	0.000	0.000	0.069	0.931	449	0.392
4: >131%	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0.000
	2	0.000	0.930	0.070	0.000	43	0.167
	3	0.000	0.088	0.862	0.050	80	0.208
	4	0.000	0.000	0.065	0.935	92	0.625

La matriz muestra, por ejemplo, que la probabilidad relativa a que una región de clase 2 se mueva hacia la 3 en el instante final, suponiendo que su retardo espacial en el inicio estaba en 1, es del 3.30%. Si el retardo se hubiese encontrado en 2, la probabilidad se reduce al 1.30% (en línea con los resultados obtenidos sobre persistencia). Sin la consideración de efectos espaciales este valor hubiese sido 3.40%. Por otra parte, la probabilidad de ascenso de clase para una región perteneciente a la 3 es del 4.00%. Si se encontrara rodeada de unidades más pobres la probabilidad se reduce al 2.30% e, incluso, se vuelve nula. Por el contrario, en caso de contar con regiones circundantes más ricas, la probabilidad aumenta hasta el 5.00%. Finalmente el valor de la probabilidad (4.40%) es muy cercano al obtenido sin contar con condicionantes espaciales si la región está rodeada de localizaciones semejantes en renta.

A fin de comprobar, de manera formal, si las probabilidades de transición son independientes del espacio (es decir, si coinciden los dos modelos extremos de Markov) se emplea el test asintótico definido anteriormente. El valor del estadístico obtenido es  $Q = 57.539$ , con un p-valor = 0.0128, por lo que resulta significativo. Dado que el test es asintótico se aplica un test de permutaciones, a fin de reforzar la fiabilidad de los resultados:

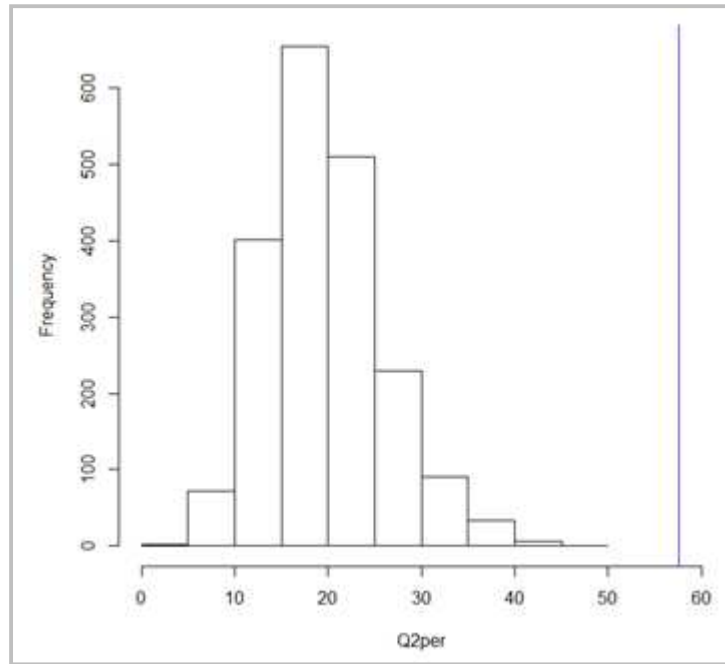


Figura 4.8. Histograma del estadístico de independencia.  
Fuente: elaboración propia.

El p-valor obtenido es nulo. Los resultados anteriores evidencian que las probabilidades de transición, considerando el retardo espacial y no teniéndolo en cuenta, son diferentes en uno y otro caso; se concluye que el contexto regional de una unidad influye en los movimientos dentro de la distribución de renta.

Seguidamente se procede a representar las estimaciones de las funciones de densidad asociadas a la distribución del PIB per cápita en euros, tomando en consideración el año inicial, intermedio y final del período de trabajo. Se ha diferenciado el tratamiento sin agregación (de manera similar a lo realizado en el capítulo uno) frente al planteamiento con efectos espaciales:



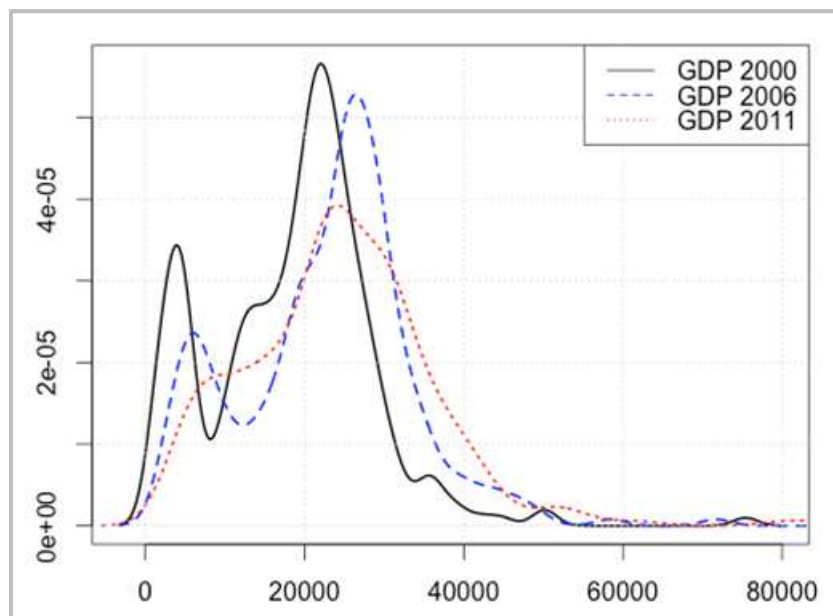


Figura 4.9. Estimación de la función de la densidad para la distribución del PIB, sin efectos espaciales  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat.

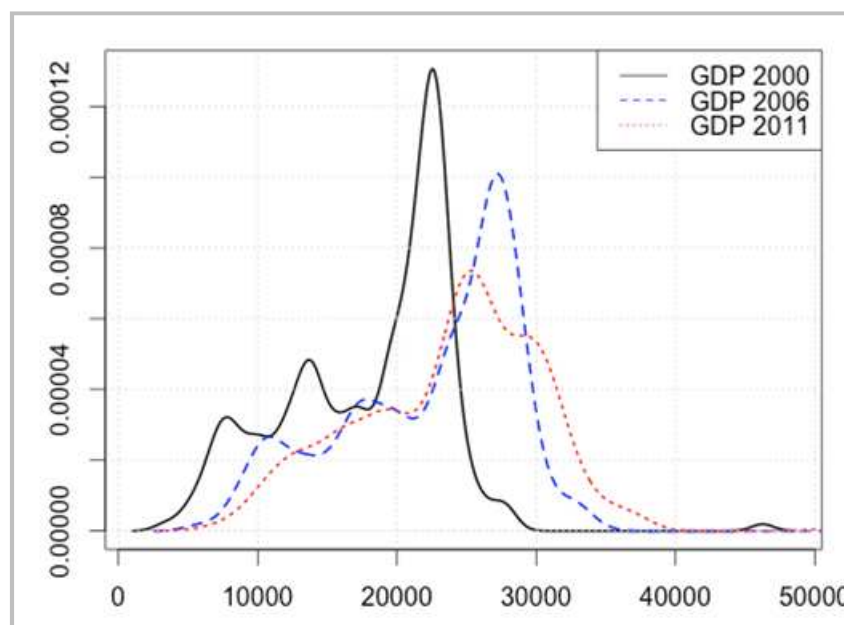


Figura 4.10. Estimación de la función de la densidad para la distribución del PIB, considerando efectos espaciales.  
Fuente: elaboración propia a partir de datos de Eurostat

En ambos casos se perciben mixturas (mezclas de componentes). Se ha procedido a un ajuste de modelos de mixturas de normales univariantes para ambas situaciones y de normales bivariantes empleando las dos. Utilizando R se identifica el siguiente número de componentes:

	PIB	PIB con efecto espacial	Ambos
2000	3	2	5
2001	3	2	4
2002	3	2	5
2003	3	2	4

	PIB	PIB con efecto espacial	Ambos
2004	3	2	4
2005	3	2	5
2006	3	2	5
2007	3	5	5
2008	3	2	4
2009	3	2	3
2010	3	2	3
2011	3	4	5

Tabla 4.25. Número de componentes normales en estimación de la función de densidad de la renta (sin y con efectos espaciales).

Fuente: elaboración propia.

En la sección siguiente se procede a un análisis específico de análisis de mixturas, que permite profundizar en la identificación de los componentes.

## 4.7 Mixturas de modelos de regresión lineal

### 4.7.1 Descripción

En distintas secciones del capítulo cuarto se ha resaltado la importancia de la consideración de la heterogeneidad estructural y de los efectos espaciales en los modelos de crecimiento y convergencia. De otro modo, bajo un tratamiento sin la consideración y posible inclusión de estas dependencias, se introducirían errores de especificación.

En la siguiente tabla se relacionan las tres interpretaciones clásicas del proceso de convergencia con su consideración a efectos de regresión:

El modelo empírico de  $\beta$ -convergencia se puede expresar, a partir de (3.5) en forma *cross-country* de regresión de crecimiento:

$$y_i = \frac{1}{T} [\log(y_{i,T}) - \log(y_{i,0})] = g - bx_i + u_i, i = 1 \dots N \quad [1]$$

El término  $b = \frac{1-e^{-\beta T}}{T}$  constituye un factor de convergencia,  $x_i = \log(y_{i,0})$  y  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

Dos asumes de homogeneidad relativos a la composición del término constante y a la constancia entre economías del factor de convergencia:

$$g = g_i = \bar{g}_i + \frac{1 - e^{-\beta_i T}}{T} \cdot \log(A_{i,0} \cdot y_i^*), \forall i$$

El progreso tecnológico se expresa como  $\bar{g}_i$ , la eficiencia inicial es  $A_{i,0}$  e  $y_i^*$  representa el valor del output de capital efectivo en el estado estacionario.

$$b = b_i = \frac{1 - e^{-\beta_i T}}{T}, \forall i$$

Cuando los factores determinantes no son constantes entre las regiones, el asume (i) deja de tener validez. Se introducen varias modificaciones: (i) al admitirse la heterogeneidad,  $y_i^*$  se incluye entre las variables de control de [1]; (ii) se considera que  $A_{i,0}$  pasa a incluir la tecnología inicial más otros efectos regionales ( $e_i$ ) que influyen en el crecimiento, de modo que  $\log(A_{i,0}) = \log(A_0) + e_i$ ; y (iii) el término de error pasa a expresarse como  $u_i = \frac{1-e^{-\beta_i T}}{T} \cdot e_i + \varepsilon_i$ . El nuevo asume a considerar es:

$$g = g_i = \bar{g}_i + \frac{1 - e^{-\beta_i T}}{T} \cdot \log(A_0), \forall i$$

La estimación de [1] asumiendo (i) y (ii) resulta equivalente a la aplicación de un test de convergencia absoluta. El valor positivo de  $\beta$  implica que se verifica tal hipótesis.

Este test tiene sentido en el ámbito regional (within-country convergence), dado que se considera homogeneidad en todos los parámetros.

La estimación de [1] asumiendo (ii) y (iii), e incluyendo variables de control, resulta equivalente a la aplicación de un test de convergencia relativa. El valor positivo de  $\beta$  implica que se verifica tal hipótesis: las regiones pobres crecen más deprisa que las ricas, de manera condicional, hacia el estado estacionario.

Este planteamiento implica considerar homogeneidad en el factor de convergencia, la eficiencia inicial y el progreso tecnológico; los determinantes del estado estacionario pueden ser heterogéneos.

La consideración de heterogeneidades estructurales implica: (i) las restricciones en la adopción de tecnologías afectan a la eficiencia de las economías regionales; y (ii) los *spill-overs* asociados a la acumulación de capital físico o humano pueden provocar efectos umbral, que se concretan, por ejemplo, en fenómenos como la polarización ( $\beta_i = \beta_1$ , si  $y_{i,0} < \hat{y}$ ;  $\beta_i = \beta_2$  en otro caso, con  $\hat{y}$  el valor umbral del nivel de renta). Los nuevos asumes a considerar son:

$$g \neq g_i = \bar{g}_i + \frac{1 - e^{-\beta_i T}}{T} \cdot \log(A_0), \forall i$$

$$b \neq b_i = \frac{1 - e^{-\beta_i T}}{T}, \forall i$$

La estimación de [1] asumiendo (iv) y (v) resulta equivalente a la aplicación de un test sobre clubs de convergencia.

Tabla 4.26. Relaciones entre regresiones y estimaciones de modelos de convergencia

Fuente: elaboración propia a partir de Battisti y Di Vaio (2009).

Como se ha resaltado en secciones anteriores los estudios actuales en este ámbito se centran en la consideración e identificación de clubs de convergencia, en especial bajo un enfoque endógeno, para la determinación de las pautas dinámicas, considerando, en todo caso, la influencia de las localizaciones geográficas. La tabla XX muestra cómo, en definitiva, el análisis de los procesos de convergencia, en sus tres amplias acepciones, se basa en el ajuste de modelos de regresión lineal. Por tanto, se aprecia la viabilidad de la aproximación a la detección de clusters mediante el ajuste de mixturas de modelos de regresión lineal. En nuestro estudio se considerarán este tipo de patrones, pero incluyendo una etapa inicial para tener en cuenta la naturaleza espacial de los datos analizados. Seguidamente se describe la metodología estadística que se ha considerado y el planteamiento finalmente implementado.

Rey y Montouri (1999: 149) considera que en un marco de crecimiento cross-section el asume de independencia entre términos de error correspondientes a diferentes regiones no resulta realista: *“the possibility exists for spatial spill-overs across state boundaries leading to forms of spatial dependence that would violate these assumptions”*. Dos son los planteamientos más comunes en la incorporación de los efectos de la dependencia espacial:

- Modelo de error espacial. Anselin (2001) lo describe como un caso especial de regresión con un término de regresión no esférico, en el que los elementos fuera de la diagonal de la matriz de covarianzas reflejan dicha estructura de dependencia espacial. La estimación a través de OLS permanece no sesgada, pero deja de mostrar eficiencia. Los estimadores clásicos de errores estándar sí experimentan sesgo. Rey y Montouri (1999) destaca que, en este contexto, un shock aleatorio que pudiera afectar a una región específica repercutiría no solo en el ratio de crecimiento de dicha unidad sino también en las restantes: aunque el número de vecinos sea limitado, la estructura covariante posibilita la máxima difusión a través de todo el sistema.
- Modelo de retardo espacial. En tal caso este término de retardo de la variable dependiente,  $Wy$ , es el que se incorpora al patrón de regresión. En términos de Anselin (2001), la expresión empleada corresponde a:  $y = \rho Wy + X\beta + \varepsilon$ , con  $\rho$  el coeficiente espacial autorregresivo. La correlación de  $Wy$  con las perturbaciones introduce un problema de endogeneidad, que provoca que la estimación OLS se encuentre sesgada y resulte inconsistente.

La aplicación de filtros locales constituye una estrategia alternativa para reducir, o incluso eliminar, la correlación espacial y así obviar el problema del sesgo o el de la no eficiencia en los estimadores de mínimos cuadrados. Un procedimiento empleado en la literatura para atenuar los efectos espaciales asociados a variables organizadas es el filtro local de Getis (Getis y Griffith, 2002), avalado por su éxito empírico.

Dado un conjunto de datos correspondientes a  $n$  localizaciones geográficas (regiones europeas en nuestro caso) y dada una matriz de pesos espaciales  $W$ , de dimensión  $n \times n$ , la aplicación del filtro local de Getis sobre una variable  $X$ , para cada unidad espacial  $i$ , se puede expresar de la siguiente forma:

$$x_i^F = x_i \frac{\bar{x}_{(i)}}{\bar{x}_{(i)}^w}, i = 1 \dots n \quad (4.55)$$

Esto implica que cada observación se multiplica por un cociente cuyo numerador es la media del resto de observaciones; el denominador se obtiene, por su parte, como la media ponderada con la matriz espacial para el resto de observaciones:

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j, \quad \bar{x}_{(i)}^w = \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij} x_j \quad (4.56)$$

Como señala Battisti y Di Vaio (2008) la aplicación del filtro provoca que las estimaciones OLS resulten consistentes. Por su parte, la componente espacial residual se puede obtener como  $x^S = x - x^F$ .

En cuanto a la elección de la matriz de pesos espaciales, Battisti y Di Vaio (2008) sugiere emplear un modelo binario, estandarizado por filas, basado en los  $k$  vecinos más cercanos<sup>135</sup>; es decir, dada una región la fila correspondiente en  $W$  se fija como 1 para las  $k$  regiones más cercanas y 0 para el resto. En ese mismo trabajo se consideran los valores  $k = 10, 15$  y  $20$ , resultando elegido el menor  $k$  para el cual el test de Moran aplicado a los residuos del modelo estimado de  $\beta$ -convergencia sobre las  $n$  regiones resulta no significativo. En nuestro estudio esta estrategia conduce a  $k = 10$ , con un p-valor para el test de Moran de 0.419, siendo inferior a 0.001 para  $k = 15$  y  $k=20$ .

Una vez aplicado el filtro local de Getis a las observaciones de cada año y cada región, se obtiene una nueva matriz de datos<sup>136</sup>, sobre la que se plantea el ajuste de las mixturas de modelos de regresión lineal (MMRL en adelante). Las MMRL son una herramienta originada en la literatura econométrica: Quandt (1972) establece las bases al estimar los parámetros de un sistema de regresión lineal que obedece a dos regímenes separados y que requiere, por tanto, detectar el punto de enlace de ambos comportamientos. Suponiendo que se cumplen las

<sup>135</sup> De este modo se garantiza que las islas europeas queden interconectadas al continente; las matrices de contigüidad, muy empleadas en la literatura por su sencillez de cálculo, provocan el efecto opuesto.

<sup>136</sup> Por tanto el primer paso de este proceso concluye con la obtención de una versión transformada (y limpia de dependencia espacial) de [1 en la tabla]:  $\gamma_i^F = g - bx_i^F + u_i$

hipótesis habituales de normalidad y homocedasticidad para cada una de las componentes, la función de densidad de la variable dependiente, condicionada a las predictoras, se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$d_{\theta}(y_i|x_i) = \sum_{j=1}^m \pi_j f_N(y_i; x_i^t \beta_j, \sigma_j^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.57)$$

Donde  $f_N$  representa la función de densidad de la distribución normal; el vector de parámetros  $\theta$  incluye el peso o probabilidad de cada una de las  $m$  componentes, así como las medias y varianzas respectivas:

$$\theta = (\pi, (\beta_1, \sigma_1^2), \dots, (\beta_m, \sigma_m^2)), \quad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_m) \quad (4.58)$$

Fijado  $m$ , la estimación de máxima verosimilitud se puede llevar a cabo mediante el algoritmo EM para encontrar un máximo local de la superficie definida por la función de verosimilitud. En nuestro estudio se ha utilizado la implementación del paquete *mixtools* de R, descrito en Benaglia, Chauveau, Hunter y Young (2009); en este trabajo se aplican los desarrollos descritos en De Veaux (1989) y se incluyen aspectos computacionales para evitar comportamientos anómalos durante las iteraciones del algoritmo.

Otra cuestión fundamental para ajustar las MMRL corresponde a la selección del número de componentes. Battisti y Di Vaio (2008) plantea esta identificación en base a dos reglas complementarias: (i) por una parte resulta interesante aumentar este valor, dado que proporciona mayor información; (ii) sin embargo, la interpretación de los datos requiere significatividad, que se pierde si los patrones son excesivos (e inservibles). Una primera opción, disponible en *mixtools*, consiste en ajustar distintos modelos para  $m = 1, 2 \dots M$  y, para cada uno de estos valores: (i) estimar los parámetros mediante el algoritmo EM; (ii) calcular el valor correspondiente a varios criterios de información, seleccionando  $m$  a partir del modelo que proporcione el mayor valor para alguno de dichos criterios. Las medidas que calcula esa librería son: Criterio de Información (AIC), desarrollado en Akaike (1973), Criterio de Información Bayesiano (BIC), correspondiente a Schwarz (1978), Verosimilitud Completada Integrada (ICL), de Biernacki, Celeux y Govaert (2000), y el AIC consistente, a cargo de Bozdogan (1987). En base a Battisti y Di Vaio (2008) BIC es el más restrictivo de todos y AIC el menor en este sentido, por lo que proporciona un número más elevado de valores.

La otra opción para seleccionar el número de componentes, también implementada en *mixtools*, consiste en la realización de  $M - 1$  contrastes de hipótesis secuenciales de la forma:

$$\begin{cases} H_0: m = m_0 \\ H_1: m = m_0 + 1 \end{cases} \quad m_0 = 1, 2, \dots, M - 1$$

Cada contraste se realiza mediante un procedimiento bootstrap basado en el estadístico del test de razón de verosimilitud (Mclachlan, 1987). A partir del p-valor obtenido para cada contraste, y fijado un nivel de significación  $\alpha$ , se elige el primer valor  $m_0$  para el cual el p-valor asociado no es menor que  $\alpha$ .

### 4.7.2 Estudios empíricos

El estudio de Battisti y Di Vaio (2008) se centra en el PIB per cápita, expresado en euros de 1995 y considerando dos muestras: la más extensa incluye 242 regiones (nivel NUTS 2) de EU-25, cubriendo el período 1991 a 2002; y una segunda, más restringida, consta de 190 regiones de EU-15, desde 1980 hasta 2002. Los datos proceden de Cambridge Econometrics.

Las consideraciones gráficas preliminares, basadas en las gráficas de Moran del logaritmo del PIB per cápita y de la tasa media de crecimiento de dicha variable para la muestra pequeña, indican una alta correlación espacial. Las observaciones referentes a la renta per cápita se encuentran, en su mayoría, en los cuadrantes HH o LL; o sea, las regiones, ricas o pobres, se encuentran rodeadas por unidades con el mismo estatus. La correlación espacial de las tasas de crecimiento es más débil. El valor del estadístico de Moran apenas disminuye un punto porcentual desde el año inicial hasta el final, lo que implica escasa variación en el nivel de aglomeración de las localizaciones físicas de los niveles de renta.

El análisis de  $\beta$ -convergencia se inicia con una estimación de [1] en las dos muestras mediante OLS estándar para, posteriormente, estudiar la autocorrelación espacial entre los residuos de la regresión. La revisión del conjunto más pequeño de datos se lleva a cabo considerando dos subintervalos temporales: 1980 a 1991 y 1991 a 2002. De este modo se facilita el estudio de las políticas de cohesión desarrolladas durante la década de los noventa y, además, resulta comparar las dos muestras y comprobar si existen patrones diferentes de convergencia entre las regiones en función del instante en que se adhieron a la EU.

Los resultados más significativos de esta primera parte del análisis se exponen en las siguientes líneas:

- Se detecta convergencia significativa para la muestra EU-15 durante todo el período, con una ratio del 0.6% anual, lo que supone una cuarta parte de la tasa *universal* del 2%. La vida media asociada sería, por tanto, de 108 años (las regiones pobres tardarían un siglo en reducir a la mitad su brecha con las ricas). Considerando subintervalos se constata que la convergencia no es relevante en la década de los ochenta; la fase importante del proceso se verifica en los noventa.
- Los resultados son muy similares para el conjunto de regiones pertenecientes a EU-25, aunque en este caso los coeficientes de convergencia son ligeramente inferiores.
- El cálculo del estadístico de Moran revela autocorrelación espacial significativa entre los residuos de ambas muestras, tanto en el período completo como en los subintervalos. Durante los noventa la dependencia espacial es mayor en EU-15: esto significa que la renta per cápita se encuentra menos concentrada a nivel de toda la Eurozona.

La importancia de los fenómenos espaciales requiere, por tanto, un tratamiento específico, como el descrito en la sección anterior. El primer paso, consistente en el filtrado de los datos, requiere fijar el número de componentes. La aplicación de los distintos criterios de información muestra que  $m = 3$  es la mejor aproximación para todas las muestras (salvo EU-15 en el segundo intervalo, donde todos los indicadores señalan al valor 2).

En la segunda fase, correspondiente al análisis de regresión, se diferencian dos supuestos:

- La especificación de dos componentes. Se estudian cuatro planteamientos: la muestra pequeña, considerando todo el intervalo y los dos subintervalos; y la muestra grande, con el período temporal ya indicado. El análisis de los coeficientes de convergencia, la vida media y el peso de cada elemento revela la identificación de un grupo pequeño (entre el 12% y el 26% del conjunto), con ratios muy elevados de convergencia (entre el 1.3% y el 3.2% salvo en los noventa, cuando divergen). La mayoría de las regiones se caracterizan por una convergencia lenta, en torno al 0.5% anual.
- Al considerar tres componentes se confirma el comportamiento anterior. Un grupo más pequeño muestra ratios de convergencia entre 1.2% y 4.7%, mientras que un régimen amplio, integrado por la agregación de otros dos (lo que supone alcanzar en torno al 85% del total, de media) muestra ausencia de convergencia (o muy lenta). Se comprueba que este hecho es independiente del nivel de riqueza o de pobreza de las regiones integrantes; por tanto, otros factores, en términos de aglomeración o de retornos incrementales, influirían en el comportamiento *divergente-convergente*: se detecta convergencia entre los estados, pero no entre las regiones. También resulta curioso constatar que esta convergencia se retrae durante la década de los noventa, cuando se trabajaba con máxima dedicación en la cohesión de los países europeos.

Nuestro estudio empírico se desarrolla considerando, de nuevo, los valores del PIB per cápita registrado en las regiones europeas (nivel NUTS 2) en el ámbito EU-28 (datos procedentes de Eurostat). Del mismo modo, se consideran las mismas matrices de pesos espaciales que en secciones anteriores.

En la primera parte del análisis se considera el PIB en euros. El paso inicial consiste en testar distintas especificaciones de los dos tipos de matrices en función de la vecindad ( $m$ ) empleada. Los cálculos con  $m = 1, 2, \dots, 20$  muestran ya, en el primer término ( $m = 1$ ) que los valores del estadístico  $I$  de Moran respecto a los residuos de la regresión son no significativos. Sin embargo, la vecindad unitaria provoca un filtrado posterior que no resulta plenamente satisfactorio. Tras la correspondiente revisión de resultados, y en base a los estudios desarrollados en la literatura, se opta por  $m = 10$ . Con ninguna de las matrices *distaGC1.w* hasta *distaGC4.w* se logran residuos que no tengan test de Moran no significativo. Los resultados se muestran en el anexo.

Como se indicaba en la revisión teórica, el modelo de mixtura se basa en una adecuada identificación del número de componentes. En este caso se plantean dos alternativas:

- La aplicación de un procedimiento bootstrap. De este modo se obtienen los siguientes p-valores: [0.00 0.08 0.63]. Este resultado implica rechazo al comparar 1 con 2 componentes, rechazo débil al comparar 2 con 3, y se acepta al comparar 3 con 4, dado que el p-valor = 0.63. Este método sugiere, por tanto, considerar tres componentes.
- La segunda opción supone incorporar los criterios de información descritos en la sección anterior. En la siguiente tabla se reproducen los resultados obtenidos: (Mejor

quita la columna 1 y no pongas explicaciones, porque el modelo de 1 componente no está muy claro en la documentación)

	2	3	4	5	Ganador
AIC	858.727	873.348	870.492	874.023	5
BIC	847.965	855.411	845.381	841.738	3
CAIC	844.965	850.411	838.381	832.738	3
ICL	848.499	856.328	846.541	843.265	3

Figura 4.11. Criterios de información en el estudio empírico con modelos de mezcla.

Fuente: elaboración propia.

Excepto en el Criterio de Información (AIC), el menos restrictivo, todos los demás sugieren tres componentes (como en el procedimiento *bootstrap*).

Dada la variabilidad de los resultados de la estimación de parámetros, se procede a repetir el proceso 20 veces. Se restringe la búsqueda a un máximo  $m = 5$ , a fin de identificar qué selección es la más frecuente. En la siguiente tabla se exponen los resultados obtenidos:

Criterio de información	Nº de componentes	Nº de resultados
AIC	3	1
	4	11
	5	8
BIC	2	1
	3	7
	4	11
	5	1
CAIC	2	12
	3	7
	4	1
ICL	2	1
	3	7
	4	11
	5	1

Figura 4.12. Determinación del número de componentes. Identificación de frecuencias

Fuente: elaboración propia.

Para estimar los modelos con  $m$  fijo, se construye una función en R que repite el ajuste partiendo de 20 valores iniciales y se queda con el modelo que tiene una mayor log-verosimilitud. En las gráficas se aprecia la necesidad de este proceso:



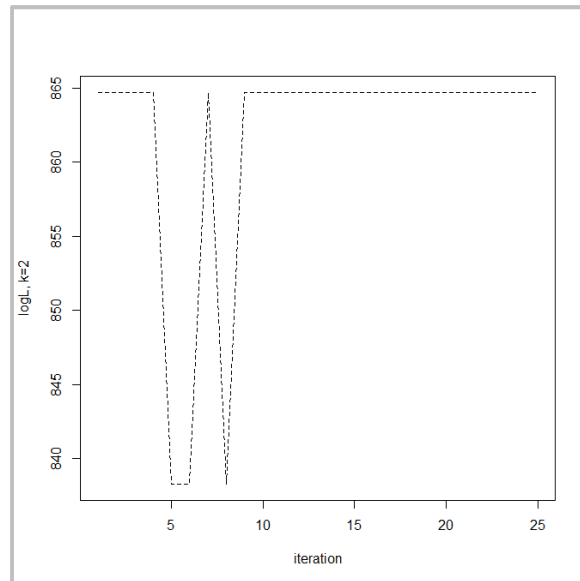


Figura 4.13. Relación entre el nº de iteraciones y el de componentes ( $m=2$ )  
Fuente: elaboración propia

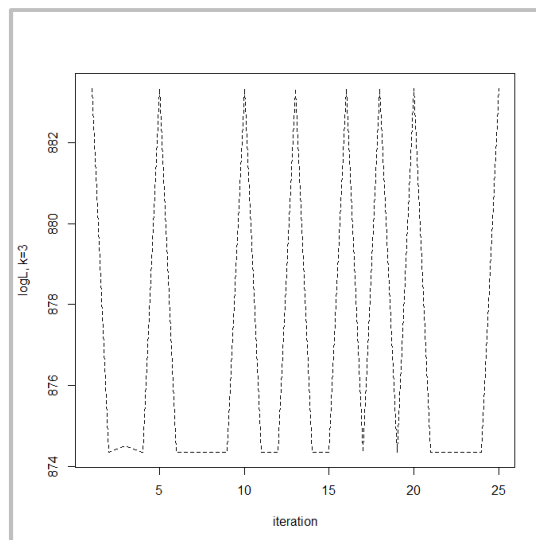


Figura 4.14. Relación entre el nº de iteraciones y el de componentes ( $m=3$ )  
Fuente: elaboración propia.

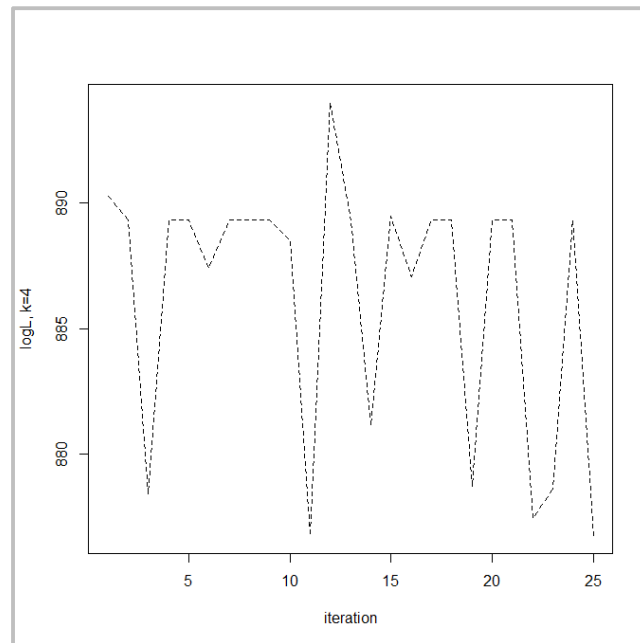


Figura 4.15. Relación entre el nº de iteraciones y el de componentes ( $m=4$ )  
Fuente: elaboración propia.

En base a los resultados previos se opta por explorar los resultados considerando  $m = 2, 3$  y 137.

Primera mezcla: 2 componentes.

Descripción	Variable	Componente 1	Componente 2
Peso de cada componente	Lambda	0.774851363	0.2251486
Estimaciones de las desviaciones típicas del error	Sigma	0.006535710	0.0152028
Coefficiente de cada modelo	Beta 1	0.012560196	0.1768268
Beta convergencia	Beta 2	0.000931605	-0.0152193
Función de verosimilitud	Loglik	864.7272	

Figura 4.16. Resultados de mezclas con dos componentes.  
Fuente: elaboración propia.

Segunda mezcla: 3 componentes:

	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Lambda	0.58784103	0.30192466	0.1102343
Sigma	0.00732353	0.00395796	0.0142593
Beta 1	0.00744272	0.12662760	0.2834770
Beta 2	0.00139019	-0.01033433	-0.0259402
Loglik	883.3477		

Figura 4.17. Resultados de mezclas con tres componentes.  
Fuente: elaboración propia.

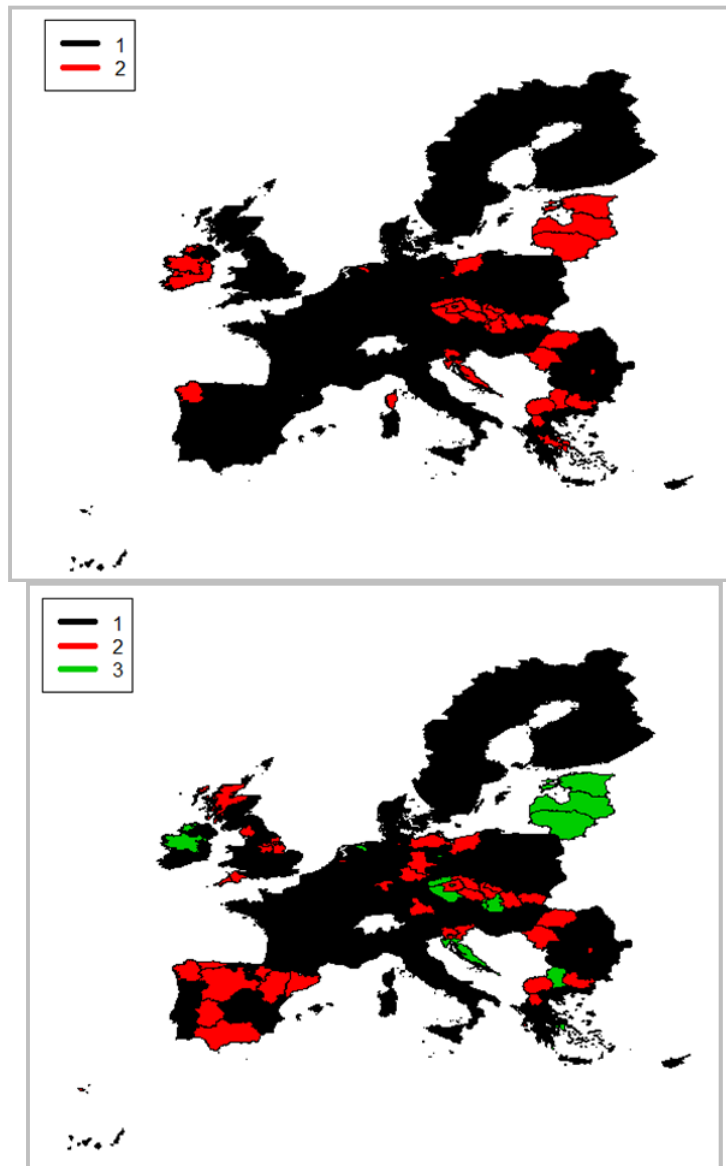
Tercera mezcla: 4 componentes:

<sup>137</sup> En nuestro caso cuando el término beta 2 es negativo, representa señal de  $\beta$ -convergencia.

	Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4
Lambda	0.14855013	0.19792096	0.42258343	0.2309455
Sigma	0.00365442	0.00211409	0.00513639	0.0154564
Beta 1	-0.02400246	-0.01440217	0.03703125	0.1701549
Beta 2	0.00384176	0.00369178	-0.00131581	-0.0144055
Loglik	876.7662			

Figura 4.18. Resultados de mixturas con cuatro componentes.  
Fuente: elaboración propia.

Se representan finalmente los mapas obtenidos:



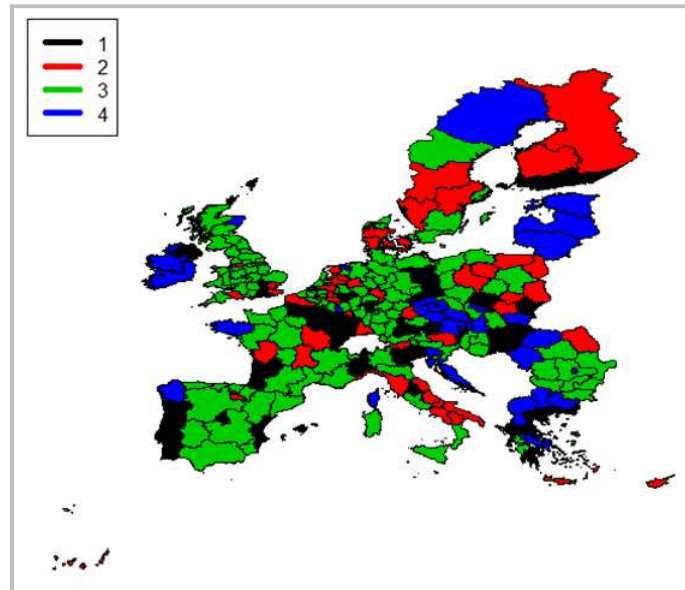


Figura 4.19. Mapas de mezclas, con dos, tres y cuatro componentes.  
Fuente: elaboración propia.

## 4.8 Modelos panel

### 4.8.1 Modelos panel sin efectos espaciales

La revisión de los nuevos estudios, basados en técnicas de estadística o econometría espacial, y centrados en la consideración de los procesos de convergencia o divergencia de las economías concluye con esta técnica, que entronca con aportaciones clásicas en este ámbito. En efecto la construcción de modelos panel para el análisis de  $\beta$ -convergencia se encuentra en Sala-i-Martin (1994), donde se propone el siguiente modelo, con  $T$  observaciones a lo largo del tiempo en cada una de  $N$  localizaciones geográficas:

$$\log(y_{it}) = \alpha + (1 - \beta)\log(y_{i,t-1}) + \varepsilon_{it} \quad i = 1, 2, \dots, N; t = 2, \dots, T \quad (4.59)$$

La condición  $\beta > 0$  implica  $\beta$ -convergencia, que se produce a mayor velocidad cuanto más alto sea dicho coeficiente. Las condiciones habituales de normalidad, homocedasticidad e independencia suelen ser dudosas en este contexto, por lo que las estimaciones de mínimos cuadrados (OLS) dejan de ser consistentes.

La literatura econométrica recoge modelos panel más apropiados para tener en cuenta las posibles asociaciones entre el término de error y los predictores. Un patrón muy utilizado en este contexto, y empleado por ello en este estudio, es el modelo panel de efectos fijos, que en el análisis de  $\beta$ -convergencia, se expresa de la siguiente forma:

$$\log(y_{it}) = \alpha + \mu_i + (1 - \beta)\log(y_{i,t-1}) + \varepsilon_{it} \quad i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T \quad (4.60)$$

Se observa que para cada región se dispone un coeficiente añadido al término independiente, por lo que realmente sólo se cuenta con un modelo distinto para cada región. Con las hipótesis

habituales sobre el error se puede realizar una estimación OLS en base a los datos transformados.

Se ha utilizado la función *plm* de la librería *plm* de R (Croissant y Millo, 2008) para ajustar este modelo sobre los datos del PIB per cápita. En el anexo en CD se dispone la rutina empleada para diseñar este modelo panel sin efectos espaciales.

Sin embargo la naturaleza espacial de los datos analizados puede hacer dudar de la calidad del ajuste. Se ha construido el test de Moran para los residuos de cada año, utilizando la matriz de pesos W4, encontrándose altas evidencias de la existencia de autocorrelación espacial cada año:

	I-Moran	Z valores	p-valores
2001	0.1774083	8.891201	3.022591e-19
2002	0.3624035	17.956850	2.121053e-72
2003	0.4391211	21.772227	2.127247e-105
2004	0.4623895	22.823865	1.328741e-115
2005	0.2960940	14.766421	1.205923e-49
2006	0.2479665	12.349908	2.438347e-35
2007	0.3755019	18.750449	9.598198e-79
2008	0.6221728	30.632413	2.266205e-206
2009	0.4671499	22.991321	2.846525e-117
2010	0.4183899	20.749985	6.131480e-96
2011	0.4212074	20.839394	9.511649e-97

Los propios efectos fijos  $\alpha + \mu_i$  presentan también esta autocorrelación espacial: la I de Moran toma el valor 0.487, con una media de -0.004 y una varianza de 0.004.

Se obtienen similares resultados con las matrices de peso tipo contigüidad.

El efecto espacial presente en los efectos fijos se aprecia en un mapa en el que se muestren sus cuantiles:

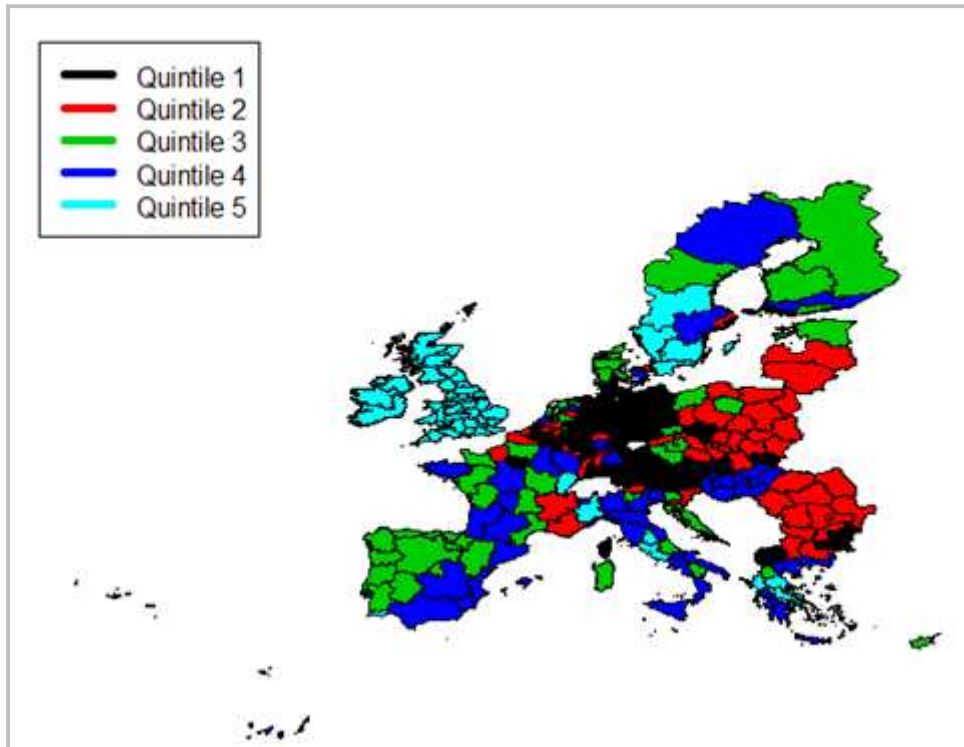


Figura 4.20. Mapa de cuantiles (modelo panel fijo no espacial)  
Fuente: elaboración propia.

#### 4.8.2 Modelos panel incluyendo efectos espaciales

La naturaleza espacial de los datos requiere, por tanto utilizar, modelos panel que tengan en cuenta esa circunstancia. Como posible mejora del modelo panel previamente presentado, se ha construido un modelo panel de error y retardo espacial. El paquete *splm* de R (Millo y Piras, 2012) ofrece una eficiente implementación de los modelos panel espaciales.

La expresión del nuevo patrón es la siguiente, en formato matricial:

$$Y = \lambda(I_M \otimes W)Y + (c_M \otimes I_N)\mu + X\beta + u, \quad u = \rho(I_M \otimes W)u + \varepsilon, \quad (4.61)$$

$$\varepsilon \sim N_{NM}(0, \sigma_\varepsilon^2 I_{NM})$$

Donde:

- $W$  es la matriz  $N \times N$  de pesos espaciales.
- $Y$  representa el vector columna de las  $N \times (T - 1)$  observaciones de la variable dependiente.  $X$  es el vector columna de la misma dimensión de la variable predictora. En el contexto de la beta convergencia corresponden a los logaritmos de la magnitud analizada en  $t$  y  $t-1$ , respectivamente.
- El vector de términos independientes se expresa como  $\mu$ .
- $u$  es el vector de errores.
- El producto matricial de Kronecker se representa como  $\otimes$ .
- $c_M$  es un vector columna de unos.
- $M = T - 1$
- $I_M$  e  $I_N$  son las matrices identidad de dimensiones  $M \times M$  y  $N \times N$ .

La librería *splm* dispone de funciones que realizan una estimación de máxima verosimilitud por métodos numéricos iterativos. Para los datos PIB per cápita, el ajuste de este modelo proporciona el siguiente resumen:

Residuos	Mínimo	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Máximo
	-0.3720	-0.0349	-0.0010	0.0384	0.2950

Coefficientes	Estimación	Error estándar	t-valor: Pr (>  t )
Lambda	8.2854e-01	2.7576e-02	30.046 < 2.2e-16
Rho	9.4224e-01	1.4876e-02	63.340 < 2.2e-16
Retardo espacial (log[GDP])	1.7754e-05	7.3958e-07	24.005 < 2.2e-16

El coeficiente del retardo espacial sigue siendo positivo y significativo, los coeficientes lambda y rho positivos son señal de efectos espaciales significativos.

Sin embargo, al estudiar las autocorrelaciones espaciales de los residuos se observa una clara disminución de ese efecto, al menos en comparación con el modelo panel anterior: De todos modos se siguen produciendo p-valores significativos:

	I-Moran	Z valores	p-valores
2001	0.04160445	2.224386	0.01306123
2002	0.04053802	2.173851	0.01485816
2003	0.02811962	1.570242	0.05817946
2004	0.03023069	1.665330	0.04792348
2005	0.01925764	1.129381	0.12936849
2006	0.03462666	1.886963	0.02958263
2007	0.02454222	1.396817	0.08123432
2008	0.01729402	1.033550	0.15067319
2009	0.03028493	1.672987	0.04716488
2010	0.02116381	1.223130	0.11064024
2011	0.03894364	2.102134	0.01777077

Como alternativa, se ha trabajado también con matrices de pesos espaciales tipo binario (contigüidad), encontrándose que para  $k = 2$  se elimina esa autocorrelación espacial:

Residuos	Mínimo	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Máximo
	-0.4100	-0.0180	-0.0010	0.0197	0.3740

Coefficientes	Estimación	Error estándar	t-valor: Pr (>  t )
Lambda	4.2095e-01	5.3191e-03	79.1390 < 2e-16
Rho	-1.1592e-01	1.8264e-02	-6.3467 < 2.2e-16
Retardo espacial (log[GDP])	9.2168e-06	3.1738e-07	29.0402 < 2e-16

Se observa que los coeficientes espaciales son ambos altamente significativos. El coeficiente de  $\beta$ -convergencia es  $1 - 9.2168e - 06 = 0.9999$ , positivo y significativo, indicando alta velocidad de  $\beta$ -convergencia.

	I-Moran	Z valores	p-valores
2001	0.08218237	1.5569198	0.05974476

	<i>I</i> -Moran	Z valores	p-valores
2002	-0.03274004	-0.5247219	0.70011175
2003	-0.04069864	-0.6761141	0.75051589
2004	0.06814732	1.3023436	0.09639947
2005	0.04620572	0.9078641	0.18197502
2006	-0.01513415	-0.2064812	0.58179246
2007	-0.01977226	-0.2918450	0.61479743
2008	-0.04484681	-0.7497269	0.77329039
2009	-0.03455711	-0.5602399	0.71234208
2010	-0.03671611	-0.5967888	0.72467579
2011	-0.04779857	-0.8131659	0.79193852

Al igual que en los modelos panel, se pueden estimar los efectos individuales, que con este modelo dejan de tener autocorrelación espacial significativa, señal del buen ajuste conseguido: la *I* de Moran toma el valor 0.4287, con una media de -0.004 y una varianza de 0.003.

La magnitud de los efectos fijos se puede representar en el siguiente mapa, donde se ha dividido en 5 intervalos su rango de valores:

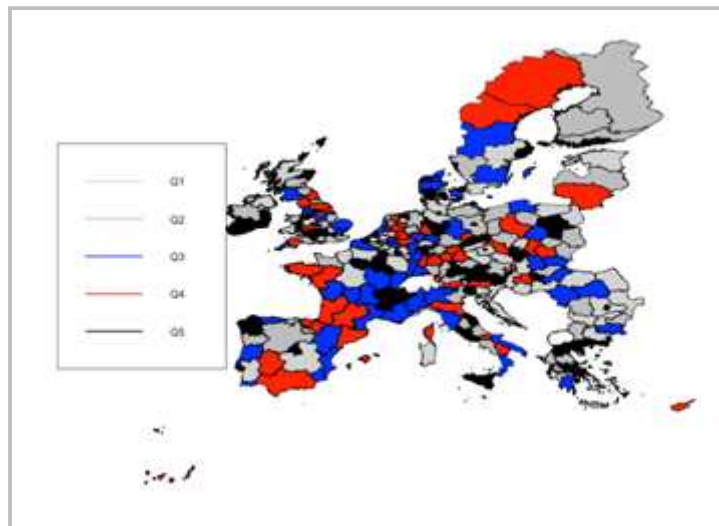


Figura 4.21. Representación de efectos fijos (modelo panel con efectos espaciales).

Fuente: elaboración propia.

En el anexo se recoge la estimación concreta de la desviación para cada región de los distintos efectos respecto del efecto medio global.



## 5. Conclusiones y líneas de futuro

### 5.1 Conclusiones

Resulta tarea prácticamente inasumible resumir los resultados parciales que se han ido trasladando a lo largo del presente estudio. Un objetivo latente en nuestra investigación ha consistido en la incorporación de desarrollos empíricos, complementarios a los correspondientes planteamientos teóricos, a fin de contrastarlos entre sí y, simultáneamente, relacionarlos con los desarrollos propios. Bajo ese prisma sí es posible, en primer lugar, confirmar la similitud general entre las inferencias propias y las obtenidas por los trabajos que hemos considerado más relevantes en cada una de las áreas de estudio. En coherencia con el desarrollo histórico de las materias expuestas nos hemos centrado, de manera diferenciada, en los análisis en los que se considera el efecto espacial. A pesar de la dificultad de los métodos –asociada, como es evidente, a la complejidad inherente- a estos fenómenos, las conclusiones parciales han confirmado, en cada caso, la necesidad de incorporar esta particularidad a los correspondientes análisis.

Sin embargo, de nuevo debemos volver a la reflexión inicial de Monfort (2008), con la que iniciábamos el tratamiento de medidas de convergencia y resaltar que cada uno de los instrumentos descritos, en el ámbito espacial o no espacial, posee su funcionalidad y que la interpretación de los resultados en cada campo debe ir acompañada del conocimiento de los asumes sobre los que se basan las técnicas. Por ese motivo, bajo nuestra opinión, los estudios desarrollados sobre  $\sigma$ -convergencia constituyen un mecanismo sencillo y rápido para identificar posibles comportamientos y pueden establecerse como procedimientos previos y exploratorios de investigaciones más profundas.

En el campo específico más especial subrayamos el potencial –ya reconocido por los diferentes autores citados- de las cadenas de Markov, que nos han ofrecido la oportunidad de profundizar en los mecanismos internos de convergencia entre las distintas naciones de la EU. Opinión contraria nos merece, sin embargo el mecanismo de identificación de clusters, que no nos ha permitido obtener resultados relevantes en la consideración de las que entendíamos como variables significativos de los procesos de crecimiento. Retomaremos esta cuestión en el siguiente apartado.

Los procedimientos de mixtura y panel de datos se encuentran en proceso de investigación y, al menos en las exploraciones realizadas (tanto las que se muestran en el trabajo como las que, por su escasa significatividad, se han omitido), plantean vías de trabajo que resultan muy prometedoras.

Bajo un planteamiento general volvemos a expresar –como así ha sucedido en distintas fases del estudio- la importancia de considerar e integrar las bases teóricas de los modelos de crecimiento en el estudio e interpretación de los resultados obtenidos tras la aplicación de los métodos estadísticos. La cohesión entre las dos ramas que integran la econometría, a la que hacíamos referencia en la introducción de este trabajo, resulta esencial para la mejora de los resultados.

## 5.2 Líneas futuras de trabajo

Esta sección se inicia con una reflexión sobre la calidad y cantidad de series temporales y espaciales en el ámbito de los estudios desarrollados. La limitación histórica de los datos de Eurostat constituye un serio hándicap para la aplicación de determinados métodos; por otra parte, la no consideración de información agregada a nivel regional, relativa a los targets de programas como Europa 2020 ha limitado la posibilidad de revisar el interés de las variables identificadas y de plantear, en su caso, alternativas, en base a las aportaciones teóricas presentes, por ejemplo, en los modelos endógenos de crecimiento.

Entendemos –aunque esta inferencia exigirá una reflexión más profunda en el tiempo- que los escasos resultados obtenidos en el ámbito de la diferenciación en clusters de las economías obedecen, precisamente a la ausencia de listados de datos, con los condicionantes necesarios de extensión temporal.

Queda en el aire la revisión de algunos otros métodos, como los expuestos en LeGallo y Rey (2008). En concreto parece que existe un fuerte potencial de desarrollo en los denominados núcleos estocásticos, aunque no se ha detectado en la literatura ningún planteamiento específico para su materialización en algoritmos operativos.

Volviendo al punto de vista económico, entendemos relevante la puesta en marcha de nuevos estudios encaminados a encontrar evidencias regionales de los impactos de las financiaciones públicas, tanto en términos estructurales como de crecimiento, en línea con lo expuesto por Vaona (2009). A lo largo de nuestro trabajo hemos hecho referencia a algunas investigaciones sobre el efecto de los Fondos de Cohesión, pero los planteamientos identificados, en el ámbito de modelado, resultan insuficientes para alcanzar conclusiones significativas; se parte de la dificultad asociada al tratamiento de estos aspectos, que suelen ser analizados mediante técnicas econométricas alternativas, en las que el tratamiento del aspecto espacial resulta limitado o inexistente.

# Bibliografía

- Abramovitz, M. (1986). Catching Up, Forging Ahead, and Falling Behind. *The Journal of Economic History*. Vol. 46(2), The Tasks of Economic History, 385-406.
- Abramovitz, M. A. (1979). Rapid Growth Potential and its Realization: The Experience of Capitalist Economies in the Postwar Period. En Malinvaud, E. (ed.), *Economic Growth and Resources*, Vol. 1. The Major Issues: Proceedings of the Fifth World Congress of the International Economic Association, 1-51, Macmillan, London.
- Aghion, P., & Howitt, P. (1992). A Model of Growth Through Creative Destruction. *Econometrica*, 60, March, 323-351.
- Aghion, P., Bloom, N., Blundell, R., Griffith, R., & Howitt, P. (2005). Competition And Innovation: An Inverted-U Relationship. *Quarterly Journal of Economics*, 120(2), 701-728.
- Aghion, P., Harris, C., Howitt P., & Vickers, J. (2001). Competition, Imitation and Growth with Step-by-Step Innovation. *The Review of Economic Studies*. 68(3), 467-492
- Aghion, P., Howitt, P., & Mayer-Foulkes, D. (2004). The Effect Of Financial Development On Convergence: Theory And Evidence. *Quarterly Journal of Economics*, 120(1), 173-222.
- Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. In BN Petrov, F Csaki (eds.), *Second International Symposium on Information Theory*. 267-281. Akademiai Kiado
- Albu, L. L. (2012). The convergence process in the EU estimated by Gini coefficients. *Journal for Economic Forecasting*, 4, 5-16.
- Amiel, Y. (1998). The Subjective Approach to the Measurement of Income Inequality. The Toyota Centre Suntory and Toyota International Centers for Economics and Related Disciplines. London School of Economics and Political Science. Discussion Paper. No. 38. June.
- Anderson T. W., & Goodman, L. A. (1957). Statistical inference about Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics* 28, 89-110.
- Andrews, D.W.K. (1991). Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrica* 59, 817-858.
- Anselin L., (1988). *Spatial Econometrics. Methods and Models*. Kluwer Academic, Boston.
- Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association-LISA. *Geographical analysis*, 27(2), 93-115.
- Anselin, L. (2001). *Spatial Econometrics*. En B. H. Baltagi (eds.). A companion to theoretical econometrics. Blackwell Publishing.
- Anselin, L. (2006). *Spatial econometrics*. En T. C. Mills, T. y Patterson, K., (eds.), *Palgrave Handbook of Econometrics: Volume 1, Econometric Theory*, 901-969. Palgrave Macmillan, Basingstoke.
- Anselin, L. (2010). Thirty years of spatial econometrics. *Papers in regional science*, 89(1), 3-25.
- Anselin, L., Bera, A. K., Florax, R., & Yoon, M. J. (1996). Simple diagnostic tests for spatial dependence. *Regional science and urban economics*, 26(1), 77-104.

- Anselin, L., Rey, S. (1991). Properties of tests for spatial dependence in linear regression models. *Geographical Analysis*, 23, 110-131.
- Anselin, L., Varga, A., & Acs, Z. (2000). Geographical spillovers and university research: A spatial econometric perspective. *Growth and change*, 31(4), 501-515.
- Anselin, L., & Hudak, S. (1992). Spatial econometrics in practice: A review of software options. *Regional Science and Urban Economics*, 22, 509-536.
- Arbia, G. (1989). *Spatial Data Configuration in Statistical Analysis of Regional Economic and Related Problems*. Dordrecht. Kluwer Academic.
- Arbia, G. (2006). *Spatial Econometrics. Statistical Foundations and Applications to Regional Convergence*. Berlin, Springer.
- Arbia, G., Basile, R., & Salvatore, M. (2002). Regional convergence in Italy 1951-1999: a spatial econometric perspective. ISAE, Istituto di Studi e Analisi Economica.
- Arrow, K. J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 29, 155-173
- Aten B. (1996). Evidence of spatial autocorrelation in international prices. *Review of Income and Wealth*, 42, 149-163.
- Aten B. (1997). Does space matter? International comparison of the prices of tradable and non-tradables, *International Regional Science Review*, 20, 35-52.
- Atkinson, A. B., Rainwater, L., & Smeeding, T. M. (1995). *Income Distribution in OECD Countries*. OECD Social Policy Studies, No. 18, Paris.
- Atkinson, A.B. (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 2, 244-63.
- Azariadis, C. y Drazen, A. (1990). Threshold externalities in economic development. *Quarterly Journal of Economic Development* 105 (2), 501-526.
- Azariadis, C., Drazen, A., 1990. Threshold externalities in economic development. *Quarterly Journal of Economics* 105(2), 501-526.
- Backus, D., Kehoe, P., & Kehoe, T. (1992). In search of Scale Effects in trade and growth. *Journal of Economic Theory*, 377-409.
- Bairoch, P. (1989). Wages as an indicator of gross national product. En P. Scholliers, ed., *Real Wages in 19th and 20th Century Europe*. Oxford: Berg, 51-60.
- Baltagi B. H., (2001). *Econometric Analysis of Panel Data*, (second edition). John Wiley and Sons, Chichester, England.
- Banks, A. S. (1979). *Cross-National Time-Series Data Archive*. Center for Social Analysis, State University of New York at Binghamton, September.
- Barrios, S., & Strobl, E. (2009). The dynamics of regional inequalities. *Regional Science and Urban Economics*, 39(5), 575-591.

- Barro, R. J. (1989). Economic Growth in a Cross Section of Countries. HEIR WorkingPaper 3120, September.
- Barro, R. J. (1990). Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth. *Journal of Political Economy*, 98, 5 (octubre), part II, S103-S125.
- Barro, R. J. (1991). Economic Growth in a Cross Section of Countries. *The Quarterly Journal of Economics*. 106(2), 407-443.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1990). Economic Growth and Convergence across the United States. Working Paper 3419. Cambridge, Mass.: National Bureau of Economic Research (August).
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1991). Convergence across States and Regions. *Brookings Papers Econ. Activity*, 1, 107-82.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of Political Economy* 100(2): 223-251.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1992). Public Finance in Models of Economic Growth. *Review of Economic Studies*, 59, October, 645-661.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1992). Regional growth and migration: A Japan-United States comparison. *Journal of the Japanese and International Economies*, 6 (December), 312-346.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic growth*. Cambridge, Mass.
- Bartels, C. P. and Ketellapper, R. (1979). *Exploratory and Explanatory Analysis of Spatial Data*. Martinus Nijhoff, Boston.
- Bartkowska, M., & Riedl, A. (2012). Regional convergence clubs in Europe: Identification and conditioning factors. *Economic Modelling*, 29, 22–31.
- Battisti, M., & Di Vaio, G. (2008). A spatially filtered mixture of beta-convergence regressions for EU regions, 1980-2002, en el libro *Spatial econometrics: Methods and applicatios*, coord: G. Arbia y B.H. Baltagi, 105-121.
- Baumol, W. J. (1986). Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data Show. *The American Economic Review*, 76(5) , 1072-1085.
- Becker, G. S., Murphy, K. M., Tamura, R. (1994). Human Capital, Fertility, and Economic Growth. EN Gary S. Becker, *A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education* (3rd Edition), 323-350. The University of Chicago Press.
- Benaglia, T., Chauveau, D., Hunter., & D.R., Young, D., (2009). mixtools: An R Package for Analyzing Finite Mixture Models. *Journal of Statistical Software*, 32(6), 1-29.
- Bennett R. J., (1979). *Spatial Time-series Analysis, Forecasting and Control*. Pion, London.
- Bernard, A. B. y Durlauf, S. N. (1995). Convergence in international output. *Journal of Applied Econometrics*, 10, 161-173.
- Bernard, A. B., & Jones, C. I. (1996). Comparing apples to oranges: Productivity Convergence and Measurement Across Industries and Countries. *The American Economic Review*, 86 (5), 1216-1238.

- Bernard, A. B., y Durlauf, S. N. (1991). Convergence of international output movements. National Bureau of Economic Research. Working Paper nº 3717.
- Bernard, A. B., y Jones, C. I. (1996). Technology and convergence. *The Economic Journal*, 106, 1037-1044.
- Bernard, A., & Durlauf, S. N. (1995). Convergence in international output. *Journal of Applied Econometrics*, 10(2), 97-108.
- Bernard, A., & Durlauf, S. N. (1996). Interpreting tests of the convergence hypothesis. *Journal of Econometrics*, 71(1-2), 161-173.
- Beugelsdijk, M. y Eijffinger, S. C. W. (2005). The effectiveness of structural policy in the European Union: An empirical analysis for the EU-15 in 1995-2001. *Journal of Common Market Studies*, 43, 37-51.
- Bianchi, M. (1995). Testing for convergence: a bootstrap test for multimodality. Working paper, Bank of England (May).
- Biernacki, C., Celeux, G., & Govaert G. (2000). Assessing a Mixture Model for Clustering with the Integrated Completed Likelihood. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(7), 719-725.
- Boldrin, M., & Canova, F. (2001). Inequality and convergence in Europe's regions: reconsidering European regional policies. *Economic policy*, 16(32), 205-253.
- Bozdogan, H. (1987). Model Selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The General Theory and Its Analytical Extensions. *Psychometrika*, 52(3), 345-370.
- Breiman, L., Friedman, J. L., Olshen, R. A. , & Stone, C. J. (1984). *Classification and Regression Trees*. Wadsworth. Belmont, CA.
- Brunsdon, C., Fotheringham, A. S., & Charlton, M. E. (1996). Geographically weighted regression: A method for exploring spatial nonstationarity. *Geographical Analysis*, Volume 28, 281-298.
- Cameron, A. C., & Trivedi, P. K. (2005). *Microeconometrics: Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cameron, G., Proudman, J., y Redding, S. (2005). Technological convergence, R&D, trade and productivity growth. *European Economic Review*, 49(3), 775-807.
- Campbell, J. Y., y Mankiw, N. G. (1989). International evidence on the persistence of economic fluctuations. *Journal of Monetary Economics*, 23(2), 319-333.
- Cannon, E. S. (2000). Economies of Scale and Constant Returns to Capital: A Neglected Early Contribution to the Theory of Economic Growth. *American Economic Review*, 90, March, 292-295.
- Canova, F. (1999). Testing for Heterogeneity in the Cross Sectional Dimension of a Panel: A Predictive Density Approach. Working Paper, Universidad Pompeu Fabra. Mayo.
- Canova, F., & Marcet, A. (1995). The poor stay poor: Non-convergence across countries and regions. Sin publicar. Universitat Pompeu Fabra.
- Caporale, G. M. y Pittis, N. (1993). Common stochastic trends and inflation convergence in the EMS, *Weitwirtschaftliches archiv*, 129, 207-215.

- Cappelen, A., Castellacci, F., Fagerberg, J., & Verspagen, B. (2003). The Impact of EU Regional Support on Growth and Convergence in the European Union. *Journal of Common Market Studies*, 41, 621-644.
- Carlino, G. A., & Mills, L. O. (1993). Are U.S. regional incomes converging? *Journal of Monetary Economics*. 32, 335-346.
- Case, A., Rosen, H., & Hines, J. (1993). Budget spillovers and fiscal policy interdependence: evidence from the states. *Journal of Public Economics*, 52, 285-307.
- Cashin, P., & Sahay, R. (1996). Regional economic growth and convergence in India. *Finance and Development-English Edition*, 33(1), 49-52.
- Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 32(91), 233-40.
- Castro, J. M., Bermejo, L. M., & Raya, A. M. (1999). Evaluación de los efectos de los fondos estructurales en la economía andaluza. *Revista de estudios regionales*, 54, 225-250.
- Castro, J. V., & Rute, B. S. R. (2001). Polarización, convergencia y movilidad entre las provincias españolas: 1955-1997. *RAE: Revista Asturiana de Economía*, 20, 7-26.
- Cereijo, E., Turrión, J. & Velázquez, F. J. (2006). Indicadores de convergencia real para los países avanzados. *Fundación de las Cajas de Ahorros (FUNCAS)*. Madrid.
- Chasco, C. (2003). *Econometría espacial aplicada a la predicción-extrapolación de datos microterritoriales*. Tesis Doctoral. Comunidad de Madrid: Consejería de Economía e Innovación tecnológica. Dirección General de Economía y Planificación.
- Chasco, C. (2004). Modelos de heterogeneidad espacial. *Econometrics*. 0411004, EconWPA.
- Chasco, C., & Fernández-Avilés, G. (2009). *Análisis de datos espacio-temporales para la economía y el geomarketing*. Netbiblo. La Coruña.
- Chipman, J. S. (1970). External Economies of Scale and Competitive Equilibrium. *Quarterly Journal of Economics* 84(3), 347-85.
- Cliff, A. D., & Ord, J. K. (1981). *Spatial processes: Models and applications*. Pion. London.
- Cliff, A., & Ord, K. (1972). Testing for spatial autocorrelation among regression residuals. *Geographical Analysis*, 4(3), 267-284.
- Cliff, A.D., & Ord, J.K. (1973). *Spatial autocorrelation*. Pion, London.
- Cogley, T. (1990). International evidence on the size of random walk in output. *Journal of Political Economy*, 98, 3.
- Cohen, W. M., y Levinthal, D. A. (1989). Innovation and learning: the two faces of R & D. *The economic journal*, 569-596.
- Comisión Europea. (2003). Reglamento (CE) n° 1059/2003 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 26 de mayo de 2003, por el que se establece una nomenclatura común de unidades territoriales estadísticas (NUTS). *Diario Oficial de la Unión Europea L 154*, 21 de junio de 2003, 1-41.

- Comisión Europea. (2006). Reglamento (CE) 1080/2006 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 5 de julio de 2006 , relativo al Fondo Europeo de Desarrollo Regional y por el que se deroga el Reglamento (CE) n o 1783/1999. Último acceso el 7 de septiembre de 2015 de: [http://ec.europa.eu/regional\\_policy/es/funding/erdf/](http://ec.europa.eu/regional_policy/es/funding/erdf/)
- Comisión Europea. (2006). Reglamento (CE) 1081/2006 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 5 de julio de 2006 , relativo al Fondo Social Europeo y por el que se deroga el Reglamento (CE) n o 1784/1999. Último acceso el 7 de septiembre de 2015 de: <http://ec.europa.eu/esf/main.jsp?catId=62&langId=es>
- Comisión Europea. (2010). Comunicación de la Comisión Europea 2020. Una estrategia para un crecimiento inteligente, sostenible e integrador. COM (2010) 2020 final. 3 de marzo, Bruselas.
- Comisión Europea. (2012). Energy Efficiency Directive. Último acceso el 11 de septiembre de 2015 a: <http://ec.europa.eu/energy/en/topics/energy-efficiency/energy-efficiency-directive>
- Comisión Europea. (2013). Reglamento (UE) 1303/2013 de 17 de diciembre de 2013 por el que se establecen disposiciones comunes relativas al Fondo Europeo de Desarrollo Regional, al Fondo Social Europeo, al Fondo de Cohesión, al Fondo Europeo Agrícola de Desarrollo Rural y al Fondo Europeo Marítimo y de la Pesca, y por el que se establecen disposiciones generales relativas al FEDER, FSE, FC y FEMP y se deroga el Reglamento (CE) 1083/2006. Último acceso el 26 de septiembre de 2015 de: [http://ec.europa.eu/contracts\\_grants/funds\\_es.htm](http://ec.europa.eu/contracts_grants/funds_es.htm)
- Comisión Europea. (2014). Instrumentos financieros en la política de cohesión 2014-2020 (2014). Recuperado el 7 de septiembre de 2015 de: [http://ec.europa.eu/regional\\_policy/sources/docgener/informat/2014/financiar\\_instruments\\_es.pdf](http://ec.europa.eu/regional_policy/sources/docgener/informat/2014/financiar_instruments_es.pdf)
- Comisión Europea. (2015). Objetivos Europa 2020. Último acceso el 11 de septiembre de 2015: [http://ec.europa.eu/europe2020/europe-2020-in-a-nutshell/targets/index\\_es.htm](http://ec.europa.eu/europe2020/europe-2020-in-a-nutshell/targets/index_es.htm)
- Conley T. G., & Topa G. (2002). Socio-economic distance and spatial patterns in unemployment. *Journal of Applied Econometrics*, 17, 303
- Cordero, G. (1992). La Cohesión en la Europa del Mercado Único y de la UEM. *Papeles de Economía Española* n° 51, 34-50
- Corrado, L., Martin, R., & Weeks, M. (2005). Identifying and interpreting regional convergence clusters across Europe. *Economic Journal*, 115.
- Coulombe, S. y Day, K. M. (1999). Economic Growth and Regional Income Disparities in Canada and the Northern United States. *Canadian Public Policy - Analyse de Politiques*, XXV(2)
- Cowell, F. (1995) *Measuring Inequality*, 2nd Edition, LSE Handbooks in Economics, Prentice Hall, London.
- Cowell, F. A. (1980). On the Structure of Additive Inequality Measures. *The Review of Economic Studies*, 47(2), 521-531.
- Cowell, F. A. (1985). Measures of distributional change: An axiomatic approach. *The review of economic studies*, February, LII, 135-151.
- Cowell, F. A. (1995). *Measuring Inequality* (2nd edition). Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead.
- Cowell, F. A. y Kuga, K. (1981). Inequality measurement: an axiomatic approach. *European Economic Review*, 15(3), 287-305.



- Cox, K. R. (1969). The voting decision in a spatial context. En *Progress in Geography*, 1. C. Board, R. J. Chorley, P. Hagget y D. R. Stoddart (eds.). Arnold, London; pp. 81-117.
- Crafts, N. F. (1983). Gross national product in Europe 1870-1910: some new estimates. *Explorations in Economic History*, 20(4), 387-401.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*. New York. John Wiley.
- Cuadrado Roura, J. R. y Suárez-Villa, I. (1992). Integración Económica y Evolución de las Disparidades Regionales. *Papeles de Economía Española* nº5 1, 69-82.
- Cuadrado-Roura, J. (2001). Regional Convergence in the European Union. From Hypothesis to the Actual Trends. *Annals of Regional Science*, 35, 333-356.
- Dall'erba, S. (2005). Distribution of regional income and regional funds in Europe 1989-1999: An exploratory spatial data analysis. *Annals of Regional Science* 39: 1-28.
- Dall'erba, S. (2005). Productivity convergence and spatial dependence among Spanish regions. *Journal of Geographical Systems* 7, 207-227.
- Dall'erba, S., & Le Gallo, J. (2008). Regional convergence and the impact of European structural funds over 1989-1999: A spatial econometric analysis. *Papers in Regional Science*, 87(2), 219-244.
- Danziger, S. y Gottschalk, P. (1995). *America Unequal*, Harvard University Press, Cambridge MA, USA.
- Dardanoni, V. (1993). Measuring social mobility. *Journal of Economic Theory* 61, 372-94.
- De la Fuente, A., (1996). Convergencia y otras historias: economía regional desde una perspectiva neoclásica. *Revista de Economía Aplicada* IV, 10, 5-64.
- De Long, J. B. (1988). Productivity Growth, Convergence, and Welfare: Comment. *The American Economic Review*. 78(5), 1138-1154
- De Long, J. B., & Summers, L. H. (1991). Equipment investment and economic growth. *Quarterly Journal of Economics* 106: 445-502.
- De Veaux, R. D. (1989). Mixtures of Linear regressions. *Computational Statistics and Data Analysis* 8, 227-245.
- Desdoigts, A. (1994) . Changes in the world income distribution: a nonparametric approach to challenge the neoclassical convergence argument. PhD Thesis, European University Institute, Florence (June).
- Domar, E. (1946). Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. *Econometrica*, 14(2), 137-147.
- Dowrick, S., & Nguyen, D. T. (1989). OECD comparative economic growth 1950-85: catch-up and convergence. *The American Economic Review*, 79, December, 1010-1030.
- Dray, S., Legendre, P., & Peres-Neto, P. R. (2006). Spatial modelling: a comprehensive framework for principal coordinate analysis of neighbour matrices (PCNM). *Ecological modelling*, 196(3), 483-493.
- Durlauf, S. N., & Quah, D. T. (1999). The new empirics of economic growth. *Handbook of macroeconomics*, 1, 235-308.

- Durlauf, S. N., Kourtellos, A., and Minkin, A. (2001). The local Solow growth model. *European Economic Review*, 45(4-6), 928-940.
- Durlauf, S.N., & Johnson, P.A., 1995. Multiple regimes and cross-country growth behaviour. *Journal of Applied Econometrics* 10 (4), 365–384.
- Easterlin, R. (1960). Regional Growth of Income: Long Run Tendencies. En Simon Kuznets, Ann Ratner Miller y Richard A. Easterlin, eds., *Population Redistribution and Economic Growth, United States, 1870-1950. II. Analysis of Economic Change*. Philadelphia: American Philosophical Society.
- Ederveen, S., De Groot, H. L. F., & Nahuis, R. (2006). Fertile soil for structural funds? A panel data analysis of the conditional effectiveness of European cohesion policy. *Kyklos* 59: 17-42.
- Escribano, G. (2004). Teorías del Desarrollo Económico. Tema 1 del Módulo "Desarrollo y Cooperación Internacional" del Curso de Experto Universitario en Planificación y Gestión de Proyectos de Cooperación para el Desarrollo. UNED, Organización de Estados Iberoamericanos y CIDEAL, 2004.
- Esposti, R., & Bussoletti, S. (2008). Impact of Objective 1 funds on regional growth convergence in the European Union: a panel-data approach. *Regional Studies*, 42(2), 159-173.
- Esteve, V., & Pallardó, V. (1996). Convergencia real en la Unión Europea: un análisis de series temporales. Mimeo, Universidad de Valencia. Valencia.
- European Commission (2004). *A New Partnership for Cohesion. Convergence, Competitiveness, Cooperation. Third Report on Economic and Social Cohesion*. European Commission, Brussels.
- Eurostat (sf). National Structures . Último acceso el 6 de septiembre de 2015 de: <http://ec.europa.eu/eurostat/web/nuts/national-structures-eu>
- Evans, P , & Karras, G. (1996). Convergence revisited. *Journal of Monetary & Economics*. 37, 249-265.
- Fagerberg, J. (1987). A technology gap approach to why growth rates differ. *Research policy*, 16(2), 87-99.
- Feenstra, R. C., Inklaar, R. ,& Timmer. M. P. (2015). The Next Generation of the Penn World Table. Último acceso el 12 de septiembre de 2015: [www.ggd.net/pwt](http://www.ggd.net/pwt)
- Fingleton, B. (1983a). Independence, stationarity, categorical spatial data and the chi-squared test. *Environment and Planning A*15, 483-99.
- Fingleton, B. (1983b). Log-linear models with dependent spatial data. *Environment and Planning A*15, 801-14.
- Fingleton, B. (1986). Analyzing cross-classified data with inherent spatial dependence. *Geographical Analysis* 18, 48-61.
- Florax, R. J. G. M., & Van de Vlist A. (2003). Spatial econometric data analysis: moving beyond traditional models. *International Regional Science Review*, 26,233-243.
- Fotheringham, A. S., Charlton, M. E. y Brunsdon, C. (1996). The geography of parameter space: an investigation of spatial non-stationarity. *International Journal of Geographical Information Systems*, 10(5), 605-627.

- Fox, J. (1990). Describing univariate distributions. En: J. Fox y J. S. Long (Eds.), *Modern Methods of Data Analysis*. Sage.
- Fraley, C., & Raftery, A. E. (2002) Model-based Clustering, Discriminant Analysis and Density Estimation *Journal of the American Statistical Association* 97, 611-631.
- Fraley, C., Raftery, A. E., Murphy, T. B., & Scrucca, L. (2012). *mclust* Version 4 for R: Normal Mixture Modeling for Model-Based Clustering, Classification, and Density Estimation Technical Report N. 597, Department of Statistics, University of Washington.
- Franco, H., & Ramírez, A. (2005). El modelo Harrod-Domar: implicaciones teóricas y empíricas. *Ecos de Economía* No. 21. Medellín, octubre, 127-151.
- Frankel, M. (1962). The Production Function in Allocation and Growth: A Synthesis. *American Economic Review*, 52, December, 995-1022.
- Friedman, M. (1992). Do Old Fallacies Ever Die?. *Journal of Economic Literature*. 30(4).
- Furceri, D. (2005).  $\beta$  and  $\sigma$ -convergence: a mathematical relation of causality. *Economics Letters*. 89, 212-215.
- Gadrey, J., Marcellesi, F., & Barragué, B. (2013). *Adiós al crecimiento : Vivir bien en un mundo solidario y sostenible*. El Viejo Topo. Barcelona.
- Galor, O., 1996. Convergence? Inferences from theoretical models. *The Economic Journal* 106 (437), 1056–1069
- Gambardella, A., & Torrisci, S. (1998). Does technological convergence imply convergence in markets? Evidence from the electronics industry. *Research Policy*, 27(5), 445-463.
- García-Solanes, J. G., & María-Dolores, R. (2001). The impact of European structural funds on economic convergence in European countries and regions. En W. Meeusen y J. Villaverde (eds) *Convergence issues in the European Union*. Edward Elgar Publishing, Cheltenham, UK.
- Gastil, R. D. (1987). *Freedom in the World*. Greenwood Press. Westport CT.
- Geary, F., & Stark, T. (2002). Examining Ireland's Post-Famine Economic Growth Performance. *The Economic Journal*, 112(482), 919-935.
- Geppert, K., Happich, M., & Stephan, A. (2005). *Regional Disparities in the European Union: Convergence and Agglomeration*. DIW Working Paper, 525, Berlin.
- Getis, A. & Griffith, D. A. (2002). Comparative spatial filtering in regression analysis. *Geographical Analysis* 34, 130–140.
- Getis, A., & Aldstadt, J. (2010). Constructing the spatial weights matrix using a local statistic. En L. Anselin, S. J. Rey (eds.), *Perspectives on spatial data analysis* (pp. 147-163). Springer Berlin Heidelberg.
- Geweke, J., Marshall, R. C. y Zarkin, G. A. (1986). Mobility indices in continuous time Markov chains. *Econometrica* 54, 1407-23.
- Gluschenko, K. (2012). *Myths about Beta-Convergence*. William Davidson Institute. Working Paper Number 1040. November.

- Gobierno de España. (2014). Secretaría de Estado de Investigación, Desarrollo e Innovación, Ministerio de Economía y Competitividad. Estrategia de Lisboa y Proceso de Liubliana. Recuperado el 10 de septiembre de 2015 de: [http://www.idi.mineco.gob.es/stfls/MICINN/Internacional/FICHEROS/Estrategia\\_de\\_Lisboa\\_y\\_Proceso\\_de\\_Liubliana.pdf](http://www.idi.mineco.gob.es/stfls/MICINN/Internacional/FICHEROS/Estrategia_de_Lisboa_y_Proceso_de_Liubliana.pdf)
- Gobierno de España. (2015) .Ministerio de Hacienda y Administraciones Públicas. Fondos comunitarios: período 2014-2020. Recuperado el 7 de septiembre de 2015 de: [http://www.dgfc.sggp.meh.es/sitios/dgfc/es-ES/ipr/fcp1420/Documents/Fondos\\_comunitarios\\_Resumen.pdf](http://www.dgfc.sggp.meh.es/sitios/dgfc/es-ES/ipr/fcp1420/Documents/Fondos_comunitarios_Resumen.pdf)
- Goerlich, F. J. (1998). Desigualdad, diversidad y convergencia: (algunos) instrumentos de medida. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, Universidad de Valencia.
- Goerlich, F. J., Mas, M., & Pérez, F. (2002). Concentración, convergencia y desigualdad regional en España. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, Universidad de Valencia.
- Goodchild, M., Haining, R., & Wise, S. (1992). Integrating GIS and spatial data analysis: problems and possibilities. *International Journal of Geographical Information Systems*, 6(5), 407-423.
- Grier, K. B., & Tullock, G. (1989). An Empirical Analysis of Cross-national Economic Growth, 1950-1980. *Journal of Monetary Economics* 24: 259-276. North-Holland
- Griffith, D. A. (1996). Some guidelines for specifying the geographic weights matrix contained in spatial statistical models. *Practical handbook of spatial statistics*, 65-82.
- Griffith, D. A. (2006). Hidden negative spatial autocorrelation. *Journal of Geographical Systems*, 8(4), 335-355.
- Griliches, Z. (1979). Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth. *Bell Journal of Economics*, 10(1), 92-116.
- Hagemann, H. (2009). Solow's 1956 Contribution in the Context of the Harrod-Domar Model. *History of Political Economy*.
- Haining R. P., (1990). *Spatial Data Analysis in the Social and Environmental Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Haining R. P., (2003). *Spatial Data Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Härdle, W. (1990). *Applied non-parametric regression*. Econometric Society Monographs series, 19. Cambridge University Press.
- Harrod, R. F. (1939). An Essay in Dynamic Theory. *The Economic Journal*. 49(193), 14-33.
- Henning, M., Enflo, K., y Andersson, F. N. G. (2011). Trends and cycles in regional economic growth. *Explorations in Economic History*, 48(4), 538-555.
- Hobijn, B. y Franses, P. H. 2000. Asymptotically perfect and relative convergence of productivity. *Journal of Applied Econometrics*, 15, 59-81.
- Hobijn, B., & Franses, P. H. (2000). Asymptotically Perfect and Relative Convergence of Productivity. *Journal of Applied Econometrics*, 15, 59-81.

- Hordijk, L. (1979). Problems in estimating econometric relations in space. *Papers, Regional Science Association*, 42, 99-115.
- Howitt, P., Weil, D. N. (2008). *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan.
- Inada, K. (1963). On a two-sector model of economic-growth: Comments and generalization, *Review of Economic Studies*, 30, 119-127.
- Islam, N. (1995). Growth Empirics: A Panel Data Approach. *Quarterly Journal of Economics*, CX(4), 1127-70.
- Jenkins, S. P., & van Kerm, P. (2003): Trends in Income Inequality, Pro-Poor Income Growth and Income Mobility, IZA Discussion paper series, No. 904.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-54.
- Johnston J., (1991). *Econometric Methods*, McGraw Hill, New York.
- Jones, L. E., & Manuelli, R. (1990). A convex model of economic growth: theory and policy implications. *Journal of Political Economy*, 98, October, 1008-1038.
- Kelejian, H. H., & Prucha, I. R. (1999). A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model. *International economic review*, 40(2), 509-533.
- Kennedy, P. (2003). *A Guide to Econometrics*, 5th Edition. MIT Press, Cambridge, MA.
- Keynes, J. M. (2006). *General theory of employment, interest and money*. Atlantic Publishers & Dist.
- Klaassen, L. H., Paelinck, J. H. P., & Wagenaar, S., (1979). *Spatial Systems*. Saxon House, Farnborough.
- Koopmans, T. C. (1965). On the concept of optimal economic growth. In *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam: North Holland.
- Kormendi, R. C., & Meguire, P. G. (1985). Macroeconomic Determinants of Growth: Cross-Country Evidence. *J. Monetary Econ.* 16 (September): 141-63.
- Kormendi, R.C., & Meguire, P. G.(1990). A multicountry characterization of the nonstationarity of aggregate output. *Journal of Money, Credit and Banking*, 22, 77-93.
- Kremer (1993). Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990. *Quarterly Journal of Economics*, 108, 3 (August), 681-716.
- Krugman P., (1991). *Geography and Trade*, Leuven University Press, Leuven and MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Kullback, S., Kupperman, M., & Ku, H. H. (1962). Tests for contingency tables and Markov chains. *Technometrics* 4, 573-608
- Kuznets, S. (1955). Economic growth and income inequality. *The American Economic Review*, 45(1), 1-28.

- Lambert, P. J., & Aronson, J. R. (1993). Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited. *The Economic Journal*, 1221-1227.
- Landau, D. L. (1983). Government Expenditure and Economic Growth: A Cross-Country Study. *Southern Econ. J.* 49 (January), 783-92.
- Le Gallo, J. (2004). Space-Time Analysis of GDP Disparities among European Regions: A Markov Chains Approach. *International Regional Science Review*, 27, 138.
- Leamer, E. E. (1983). Let's Take the Con out Of Econometrics. *American Economic Review*. March, 73, 31-43.
- Lee, K., Pesaran, M. H., & Smith, R. P. (1997). Growth and convergence in a multi-country empirical stochastic Solow model. *Journal of Applied Econometrics*, 12 (4), 357-392.
- LeSage, J. P. (2004). A family of geographically weighted regression models. En L. Anselin, R. Florax y S. Rey (eds.), *Advances in spatial econometrics: methodology, tools and applications*. Springer, Berlin, 241-264.
- Levhari, D. (1966). Extensions of Arrow's 'Learning by Doing'. *Rev. Econ. Studies* 33 (April): 117-31.
- Levhari, D. (1966). Further Implications of Learning by Doing. *Rev. Econ. Studies* 33 (January): 31-38
- Levi, M., & Makin, J. (1980). Inflation uncertainty and the Phillips curve: Some empirical evidence, *American Economic Review*, 70, 1022-1027.
- Levine, R., & Renelt, D. (1992). A sensitivity analysis of cross-country growth regressions. *The American economic review*, 942-963.
- Liao, T. W. (2005). Clustering of time series data - a survey. *Pattern recognition*, 38(11), 1857-1874.
- Litchfield, J. A. (1999). Inequality: methods and tools. Text for World Bank's Web Site on Inequality, Poverty, and Socio-economic Performance: <http://www.worldbank.org/poverty/inequal/index.htm>
- López-Bazo, E., Vayá, E., Mora, A. J., & Suriñach, J. (1999). Regional economic dynamics and convergence in the European Union. *The Annals of Regional Science*, 33(3), 343-370.
- Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, 22 (February), 3-42.
- Maasoumi, E. 1998. On mobility. In *Handbook of applied economic statistics*, edited by A. Ullah and D. Giles. New York: Marcel Dekker.
- Maddison, A. (1994). Explaining the Economic Performance of nations, 1820-1989. En W. J. Baumol, R. R. Nelson y E. N. Wolff (eds.) *Convergence of Productivity*. Oxford University Press, 20-61.
- Magrini, S. (2004). Regional (Di)Convergence. En Henderson V., Thisse J.-F. (eds.), *Handbook of Regional and Urban Economics*, Oxford: Elsevier, 4, 2741-2796.
- Mankiw, N. G. (1995). The growth of nations. *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 275-326.
- Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.

- MapInfo (2003). MapInfo Professional. Guía del usuario v7.5 (versión completa). MapInfo Corporation. Troy. Nueva York.
- Marcet, A. (1994). Los pobres siguen siendo pobres: Convergencia entre regiones y países, un análisis bayesiano de datos de panel, en *Crecimiento y convergencia regional en España y Europa*, ZZ, Instituto de Análisis Económico, Barcelona.
- Martin, P., & Rogers, C. A. (1995). Industrial location and public infrastructure. *Journal of International Economics* 39: 335-351.
- Martori, J. C., Hoberg, K., & Madariaga, R. (2008). La incorporación del espacio en los métodos estadísticos: autocorrelación espacial y segregación. *Actas del X Coloquio Internacional de Geocrítica: Diez años de cambios en el mundo, en la geografía y en las ciencias sociales, 1999-2008*. Barcelona, mayo de 2008.
- Maudos, J., Pastor, J. M., & Serrano, L. (1998). Convergencia en las regiones españolas. *Revista española de economía*. 15, 235-264.
- Maudos, J., Pastor, J. M., & Serrano, L. (2000). Crecimiento de la productividad y su descomposición en progreso técnico y cambio de eficiencia: una aplicación sectorial y regional en España (1964-93). *Investigaciones Económicas*, 24(1), 177-205.
- McLachlan, G. J. (1987). On Bootstrapping the Likelihood Ratio Test Statistic for the Number of Components in a Normal Mixture. *Journal of the Royal Statistical Society C*, 36, 318– 324.
- McMillen D., & McDonald J. (2004) Locally weighted maximum likelihood estimation: MonteCarlo evidence and an application. En L. Anselin, R. Florax y S. Rey (eds.), *Advances in spatial econometrics: methodology, tools and applications*. Springer. Berlin.225–239.
- Mihut, I. S. (2013). Economic growth and convergence criteria across emerging economies from Central and Eastern Europe. PhD Thesis. Faculty of Economics and Business Administration. Department of Political Economy. Babeş-Bolyai University.SORINA
- Miller, H. J. (2004). Tobler's first law and spatial analysis. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(2), 284-289.
- Molho, I. (1995). Spatial autocorrelation in British unemployment. *Journal of Regional Science*, 35; pp. 641-658.
- Monfort, B. P. (2008). Convergence of EU regions. Measures and evolution. Working Papers nº 01/2008. European Union. Regional Policy.
- Montero, P., & Vilar, J. A. (2014). TSclust: An R Package for Time Series Clustering. *Journal of Statistical Software*. November, Volume 62, Issue 1.
- Mora, A. J. (2002). Sobre convergencia económica. Aspectos teóricos y análisis empírico para las regiones europeas y españolas. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona. Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10803/1454>
- Mora, J. J. (2003). Crecimiento y convergencia: a propósito de Quah. *Estudios Gerenciales*, 19(89), 57-72.
- Mulligan, C. B., & Sala-i-Martin, X. (1993). Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.

- Mullineaux, D. (1980). Unemployment, industrial production and inflation uncertainty. *Review of Economics and Statistics* 62, 163-168.
- Nelson, C. R., & Plosser, C. R. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of monetary economics*, 10(2), 139-162.
- Neusser, K. (1991). Testing the long run implications of the neoclassical growth model, *Journal of Monetary Economics*, 27, 3-37.
- Neven, D., & Gouymte, C. (1995). Regional convergence in the European Community. *JCMS: Journal of Common Market Studies*, 33(1), 47-65.
- Novales, A., Fernández, E., & Ruiz, J. (2009). *Economic Growth: Theory and Numerical Solution Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ohkawa, K., & Rosovsky, H. (1960). The role of agriculture in modern Japanese economic development. *Economic Development and Cultural Change*, 9(1), 43-67.
- Ord J. K., (1975). Estimation methods for models of spatial interaction. *Journal of the American Statistical Association*, 70, 120-126.
- Paci, R., & Pigliaru, F. (2002). Technological diffusion, spatial spillovers and regional convergence in Europe. 273-292. Springer Berlin Heidelberg.
- Paelinck J. H. P. (1983). *Formal Spatial Economics*, Gower.
- Paelinck, J. H. P., & Klaassen, L. H. (1979). *Spatial Econometrics*. Gower, Westmead, Farnborough.
- Paelinck, J. H. P., & Nijkamp, P., (1975). *Operational Theory and Methods in Spatial Economics*. Saxon House and Lexington, Farnborough and Massachusetts.
- Panopoulou, E., & Pantelidis, T. (2009). Club convergence in carbon dioxide emissions. *Environmental and Resource Economics*, 44(1), 47-70.
- Parente, S. L., & Prescott, E. C. (1994). Barriers to Technology Adoption and Development. *Journal of Political Economy*, 102(2)
- Pebesma, E. (2012). spacetime: Spatio-temporal data in R. *Journal of Statistical Software*, 51(7), 1-30.
- Persson, J. (1997). Convergence in per capita income and migration across the Swedish counties 1906-1990. University of Stockholm. Institute for International Economic Studies. Seminar Papers, 601, 1-35.
- Phillips, P. C. B., & Ouliaris, S. (1988). Testing for cointegration using principal components methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 205-230.
- Phillips, P. C. B., & Sul, D. (2007). Transition modeling and econometric convergence tests. *Econometrica*, 75, 1771-1855.
- Pigliaru F. (1999), Detecting technological catch-up in economic convergence, *Contributi di Ricerca CRENoS*, 99.2.



- Population Reference Bureau (2011). Cuadro de datos de la población mundial 2011 [Recurso electrónico]. Último acceso el 18 de septiembre de 2015: [http://www.prb.org/pdf11/2011population-data-sheet\\_sp.pdf](http://www.prb.org/pdf11/2011population-data-sheet_sp.pdf)
- Prais, S. J. (1955). Measuring Social Mobility. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Part I*, 118 (1955), 56-66.
- Puigcerver-Peñalver, M. C. (2004). The impact of structural funds policy on European regions growth. A theoretical and empirical approach. Paper presentado en el XXIX Simposio de Análisis Económico, Universidad de Navarra, España, 16 a 18 de diciembre.
- Quah, D. T. (1996). Twin peaks: growth and convergence in models of distribution dynamics. *The Economic Journal*, 1045-1055.
- Quah, D.T. (1993). Galton's fallacy and tests of the convergence hypothesis. *Scandinavian Journal of Economics* 95(December), 427-443.
- Quah, D.T. (1996). Regional convergence clusters across Europe. *European Economic Review* 40: 951-58.
- Quah, D.T., (1999). Cross-country growth comparison: theory to empirics, Working Paper, Economics Department, London School of Economics, London, November.
- Quah, D.T., 1996. Convergence empirics across economies with (some) capital mobility. *Journal of Economic Growth*, 1, 95-124.
- Quandt, R. E. (1972). The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. *Journal of the American Statistical Association*, 67 (33), 306-310.
- Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*, 38(152), 543-559.
- Raymond, J. L., & B. García (1994). Las disparidades en el PIB per cápita entre comunidades autónomas y la hipótesis de convergencia", *Papeles de Economía Española*, 59, 37-58.
- Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española*. 23a ed. Edición del tricentenario. Madrid: Espasa-Calpe, 2014.
- Real Academia Española, & Asociación de Academias de la Lengua Española (2005). *Diccionario panhispánico de dudas*. Madrid. Santillana.
- Rebelo, S. (1991). Long Run Policy Analysis and Long Run Growth. *Journal of Political Economy*, 99(3), 500:521
- Rey S. J., & Montouri, B. D. (1998). US regional income convergence: a spatial econometric perspective. *Regional Studies*, 33, 143-156.
- Rey, S. J. (2001). Spatial Empirics for Economic Growth and Convergence. *Geographical Analysis*, 33(3), 195–214.
- Rey, S. J., & Anselin, L. (2006). Recent advances in software for spatial analysis in the social sciences. *Geographical Analysis*, 38(1), 1-4.
- Rey, S. J., & Janikas, M. V. (2005). Regional convergence, inequality, and space. *Journal of Economic Geography*, 5(2), 155–176.

- Rey, S. J., & Le Gallo, J. (2009). Spatial analysis of economic convergence. En T. C. Mills y K. Paterson (eds.), *Palgrave handbook of econometrics: Volumen 2, Applied Econometrics*, 1251-1290. Palgrave MacMillan.
- Rey, S. J., & Montouri, B. D. (1999). US regional income convergence: a spatial econometric perspective. *Regional studies*, 33(2), 143-156.
- Ripley B. D., (1981). *Spatial Statistics*. Wiley, New York.
- Ripley B. D., 1988. *Statistical Inference for Spatial Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Robinson, P. (1988). Root-N-consistent semiparametric regression. *Econometrica* 56, 931-954.
- Rodil, O., Rodríguez, D., Sánchez, M. C. y Vence, X. (2010). El crecimiento desigual de las regiones europeas: factores explicativos e implicaciones para la política de cohesión. Paper presentado en la XXXVI Reunión de Estudios Regionales - AECR, The future of the cohesion policy. Badajoz, Elvas, 17 a 19 de noviembre.
- Rodil, O., Vence, X. y Sánchez, M. C. (2012). Convergencia y divergencia regional en la Eurozona: disparidades en el patrón de crecimiento en el marco de la crisis global. Paper presentado en la XXXVIII Reunión de Estudios Regionales - AECR, The challenge of Regional Development in a world of changing hegemonies: knowledge, competitiveness and austerity. Bilbao, 22 a 23 de noviembre.
- Rodríguez-Pose, A. y Fratesi, U. (2004). Between development and social policies: The impact of European structural funds in objective 1 regions. *Regional Studies* 38: 97-113.
- Romer, P. M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002-1037.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* 98, S71-102.
- Rothschild, M. y Stiglitz, J. E. (1969). Increasing Risk: A Definition and its Economic Consequences. Cowles Foundation Discussion Paper 275, May.
- Sala-i-Martin, X. (1994). *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch, editor. Barcelona.
- Sala-i-Martin, X. (1996). Regional cohesion: evidence and theories of regional growth and convergence. *European Economic Review*, 40, 1325-1352.
- Sala-i-Martin, X. (2006). The World Distribution of Income: Falling Poverty and Convergence, Period. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. CXXI, 2, 351-397.
- Sandmo, A. (1970). The effect of uncertainty on saving. *Review of Economic Studies* 37, 353-360.
- Schumpeter, J. A. (1947). Theoretical Problems of Economic Growth. *The Journal of Economic History*, 7, 1-9.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.
- Sen, A. (1973). *On economic inequality*. Oxford University Press.
- Sheshinski, E. (1967). *Optimal Accumulation with Learning by Doing*. Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, Cambridge MA, MIT Press, 31-52.

- Shorrocks, A. 1978. The measurement of mobility. *Econometrica* 46, 1013-24.
- Shorrocks, A. F. (1984). Inequality decomposition by population subgroups, *Econometrica* 52, 1369-1385.
- Söderlind, P. (1994). International spillovers in an endogenous growth model. *Empirical Economics*, 19, 501-515.
- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.
- Streissler, E. (1979). Growth Models as Diffusion Processes: II. *Kyklos*, 32, 3, 571-586.
- Summers, R., & Heston, A. (1988). A New Set of International Comparisons of Real Product and Price Levels: Estimates for 130 Countries. *The Review of Income and Wealth*, 34(March), 1-25.
- Swan, T. (1956). Economic growth and capital accumulation, *Economic Record*, 82 (4), 755-782.
- Tamás, M., & Metiu, N. (2013). The evolution of economic convergence Discussion Paper Bundesbank, Deutsche Metiu, Norbert Hoffmann, Mathias.
- Taylor, B. M., Davies, T. M., Rowlingson, B. S., & Diggle, P. J. (2013). lgcp: An R Package for Inference with Spatio-Temporal Log-Gaussian Cox Processes. *Journal of Statistical Software*, 52(4).
- Temple, J. (1999). The new growth evidence. *Journal of Economic Literature*, XXXVII(March).
- Tobler W. (1970). A computer movie simulating urban growth in the Detroit región. *Economic Geography Supplement*, 46, 234-40.
- Toral, A. (2001). El factor espacial en la convergencia de las regiones de la UE: 1980-1996. Tesis doctoral. ICADE. Universidad de Comillas. Madrid.
- Unión Europea (2002). Tratado Constitutivo consolidado de la Unión Europea. *Diario Oficial de las Comunidades Europeas*. C 325, 24 de diciembre de 2002, 33-184.
- Unión Europea. (sf). Banco Europeo de Inversiones . Último acceso el 7 de septiembre de 2015 de: [http://europa.eu/about-eu/institutions-bodies/eib/index\\_es.htm](http://europa.eu/about-eu/institutions-bodies/eib/index_es.htm)
- Upton G. y Fingleton B., (1985). *Spatial Data Analysis by Example: Point Pattern and Quantitative Data*. Volume 1, Wiley, New York.
- Upton G., & Fingleton B., (1989). *Spatial Data Analysis by Example: Categorical and Directional Data*. Volume 2, Wiley, New York.
- Uzawa, H. (1965). Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 6(1), 18-31.
- Van Ark, B. y Crafts, N. (1996). Catch-up, convergence and the sources of post-war European growth: introduction and overview. En B. van Ark y N.F.R. Crafts, eds., 1-26. *Quantitative Aspects of Post-War European Economic Growth*. CEPR/Cambridge University Press.
- Vergara-González, R., Mejía-Serván, J., & Martínez-Lara, A. (2010). Crecimiento económico y convergencia regional en el Estado de México. *Paradigma económico*. Año 2, Núm. 1. Enero-junio, 53-88.

- Verspagen, B. (1991). A new empirical approach to catching up or falling behind. *Structural change and economic dynamics*, 2(2), 359-380.
- Vickerman, R. W. (1996). Location, accessibility and regional development: The appraisal of trans-european networks. *Transport Policy* 2: 225-234.
- Warsh, D. (2006). El conocimiento y la riqueza de las naciones [Recurso electrónico]. Antoni Bosch Ed. S. A.
- White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, 48, May, 817-838.
- Whittle P. J., (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, 41, 434-49.
- Whittle P. J., (1962). Topographic correlation, power-law covariance functions and diffusion. *Biometrika*, 49, 305-314.
- Whittle P. J., (1963). Stochastic processes in several dimensions. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 40(2), 975-994.
- Wodon, Q., & Yitzhaki, S. (2006). Convergence Forward and Backward? *Economics Letters*, 92(1), 47-51.
- Wooldridge, J. M. (2003). *Introductory Econometrics, A Modern Approach*. South-Western College Publishing, Cincinnati, OH.
- World Bank.(2015) GDP, growth . Último acceso el 18 de septiembre de 2015: <http://data.worldbank.org/indicador/NY.GDP.MKTP.KD.ZG/countries>
- World Bank.(2015). Population, total . Último acceso el 18 de septiembre de 2015: <http://data.worldbank.org/indicador/SP.POP.TOTL>
- Yin, L., Zestos, G., & Michelis, L. (2003). Economic Convergence in the European Union. *Journal of Economic Integration*, 18, 188-213.
- Zimmerman, D. J. (1992). Regression toward mediocrity in economic stature. *The American Economic Review*, 409-429.

# ANEXOS

## A.Anexo relativo al capítulo 1.

Relación de códigos nacionales en Penn World Table, según la versión revisada de Feenstra et al. (2015):

AGO	Angola	KNA	Saint Kitts and Nevis
ALB	Albania	KOR	South Korea
ARG	Argentina	KWT	Kuwait
ARM	Armenia	LAO	Laos
ATG	Antigua and Barbuda	LBN	Lebanon
AUS	Australia	LBR	Liberia
AUT	Austria	LCA	Saint Lucia
AZE	Azerbaijan	LKA	Sri Lanka
BDI	Burundi	LSO	Lesotho
BEL	Belgium	LTU	Lithuania
BEN	Benin	LUX	Luxembourg
BFA	Burkina Faso	LVA	Latvia
BGD	Bangladesh	MAC	Macao
BGR	Bulgaria	MAR	Morocco
BHR	Bahrain	MDA	Moldova
BHS	Bahamas	MDG	Madagascar
BIH	Bosnia and Herzegovina	MDV	Maldives
BLR	Belarus	MEX	Mexico
BLZ	Belize	MKD	Macedonia
BMU	Bermuda	MLI	Mali
BOL	Bolivia	MLT	Malta
BRA	Brazil	MNE	Montenegro
BRB	Barbados	MNG	Mongolia
BRN	Brunei	MOZ	Mozambique
BTN	Bhutan	MRT	Mauritania
BWA	Botswana	MUS	Mauritius
CAF	Central African Republic	MWI	Malawi
CAN	Canada	MYS	Malaysia
CHE	Switzerland	NAM	Namibia
CHL	Chile	NER	Niger
CHN	China	NGA	Nigeria
CIV	Ivory Coast	NLD	Netherlands
CMR	Cameroon	NOR	Norway
COD	Congo - Kinshasa	NPL	Nepal
COG	Congo - Brazzaville	NZL	New Zealand
COL	Colombia	OMN	Oman

COM	Comoros	PAK	Pakistan
CPV	Cape Verde	PAN	Panama
CRI	Costa Rica	PER	Peru
CYP	Cyprus	PHL	Philippines
CZE	Czech Republic	POL	Poland
DEU	Germany	PRT	Portugal
DJI	Djibouti	PRY	Paraguay
DMA	Dominica	QAT	Qatar
DNK	Denmark	ROU	Romania
DOM	Dominican Republic	RUS	Russia
ECU	Ecuador	RWA	Rwanda
EGY	Egypt	SAU	Saudi Arabia
ESP	Spain	SDN	Sudan
EST	Estonia	SEN	Senegal
ETH	Ethiopia	SGP	Singapore
FIN	Finland	SLE	Sierra Leone
FJI	Fiji	SLV	El Salvador
FRA	France	SRB	Serbia
GAB	Gabon	STP	Sao Tome and Principe
GBR	United Kingdom	SUR	Suriname
GEO	Georgia	SVK	Slovakia
GHA	Ghana	SVN	Slovenia
GIN	Guinea	SWE	Sweden
GMB	Gambia	SWZ	Swaziland
GNB	Guinea-Bissau	SYR	Syria
GNQ	Equatorial Guinea	TCO	Chad
GRC	Greece	TGO	Togo
GRD	Grenada	THA	Thailand
GTM	Guatemala	TJK	Tajikistan
HKG	Hong Kong	TKM	Turkmenistan
HND	Honduras	TTO	Trinidad and Tobago
HRV	Croatia	TUN	Tunisia
HUN	Hungary	TUR	Turkey
IDN	Indonesia	TWN	Taiwan
IND	India	TZA	Tanzania
IRL	Ireland	UGA	Uganda
IRN	Iran	UKR	Ukraine
IRQ	Iraq	URY	Uruguay
ISL	Iceland	USA	United States
ISR	Israel	UZB	Uzbekistan
ITA	Italy	VCT	Saint Vincent and the Grenadines
JAM	Jamaica	VEN	Venezuela
JOR	Jordan	VNM	Vietnam

JPN	Japan	YEM	Yemen
KAZ	Kazakhstan	ZAF	South Africa
KEN	Kenya	ZMB	Zambia
KGZ	Kyrgyzstan	ZWE	Zimbabwe
KHM	Cambodia		

Estudio de mixturas sobre la renta mundial en los años 1960, 1980, 2000 y 2011. Datos del PIB per cápita en miles de USA\$ de 2005 (en gris: datos inexistentes). Fuente de datos originales: Penn World Table, según la versión revisada de Feenstra et al. (2015).

Código nacional	1960		1980		2000		2011	
	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación
ATG			5,476.32	2	12,423.99	2	12,757.00	2
ALB			4,465.71	1	4,255.87	2	7,272.26	2
ARM					2,510.47	1	5,233.16	1
AGO			2,488.54	1	2,179.06	1	5,379.24	2
ARG	2,374.36	1	3,310.06	1	10,341.66	2	15,302.97	2
AUT	8,527.16	2	16,922.77	2	32,155.95	3	37,151.06	2
AUS	12,534.46	2	20,032.03	2	31,112.55	3	38,322.51	2
AZE					2,317.16	1	8,986.32	2
BIH					4,668.94	2	7,503.87	2
BRB	7,452.95	2	10,986.28	2	22,088.75	3	20,586.55	2
BGD	1,344.54	1	1,063.27	1	1,238.92	1	1,757.31	1
BEL	9,259.07	2	20,354.90	2	30,701.27	3	35,288.19	2
BFA	576.58	1	770.71	1	858.76	1	1,277.28	1
BGR			5,286.37	2	6,935.47	2	12,774.14	2
BHR			18,716.75	2	17,607.59	3	25,448.31	2
BDI	575.06	1	706.81	1	539.42	1	612.27	1
BEN	872.85	1	1,118.91	1	1,259.79	1	1,523.30	1
BMU			22,666.20	2	31,496.22	3	38,704.66	2
BRN			96,063.42	2	40,084.87	3	68,630.61	2
BOL	1,291.85	1	1,873.56	1	2,687.43	1	4,209.81	1
BRA	1,902.53	1	4,706.67	1	7,446.75	2	9,724.97	2
BHS			16,213.51	2	24,138.34	3	19,274.66	2
BTN			1,334.31	1	3,379.28	2	5,398.13	2
BWA	358.82	1	2,015.02	1	9,059.83	2	14,537.24	2
BLR					6,753.51	2	15,305.87	2
BLZ			4,241.43	1	5,814.94	2	7,321.04	2
CAN	11,858.27	2	22,303.69	2	32,714.22	3	35,179.76	2
COD	1,183.83	1	912.55	1	284.26	1	404.14	1
CAF	1,031.32	1	812.89	1	785.91	1	764.89	1
COG	836.95	1	2,019.64	1	1,962.60	1	2,856.56	1
CHE	17,880.67	2	27,647.36	2	36,521.23	3	44,641.57	2

Código nacional	1960		1980		2000		2011	
	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación
CIV	1,526.25	1	2,021.48	1	1,856.74	1	1,761.20	1
CHL	4,537.82	2	6,432.81	2	9,633.36	2	15,941.11	2
CMR	1,061.16	1	1,758.44	1	2,038.51	1	2,281.68	1
CHN	1,031.01	1	1,492.33	1	3,814.78	2	8,640.09	2
COL	3,219.05	2	6,400.14	2	6,252.13	2	8,940.10	2
CRI	4,174.29	2	6,841.42	2	8,207.92	2	10,093.60	2
CPV	841.20	1	1,143.81	1	2,586.00	1	4,518.35	1
CYP	3,053.46	1	10,561.18	2	21,612.57	3	27,991.77	2
CZE					17,012.17	2	23,083.67	2
DEU	8,898.70	2	17,722.77	2	28,692.49	3	34,382.52	2
DJI			3,744.71	1	2,147.52	1	2,860.85	1
DNK	10,875.01	2	20,081.17	2	31,257.90	3	35,408.74	2
DMA			3,396.79	1	8,076.88	2	11,261.79	2
DOM	2,056.14	1	4,004.30	1	5,848.07	2	8,694.25	2
ECU	2,113.40	1	4,630.41	1	4,107.67	2	7,069.11	2
EST	503.56	1			10,842.09	2	19,939.15	2
EGY			1,021.43	1	4,226.65	2	5,825.83	2
ESP	5,121.63	2	13,022.66	2	23,547.41	3	28,455.59	2
ETH	432.37	1	584.00	1	497.49	1	945.75	1
FIN	8,137.87	2	17,604.26	2	28,194.87	3	33,568.34	2
FJI	2,235.64	1	4,540.65	1	5,203.93	2	5,277.06	1
FRA	9,084.01	2	20,041.00	2	27,775.93	3	31,267.47	2
GAB	2,551.98	1	11,476.97	2	8,318.43	2	17,673.67	2
GBR	10,028.59	2	16,851.30	2	29,163.72	3	32,116.32	2
GRD			2,445.81	1	6,864.44	2	8,401.71	2
GEO					2,506.26	1	5,672.47	2
GHA	2,544.23	1	2,037.30	1	2,038.97	1	3,104.02	1
GMB	1,464.05	1	1,385.69	1	1,427.85	1	1,516.53	1
GIN	1,789.22	1	1,983.33	1	1,374.63	1	1,112.61	1
GNQ	404.96	1	1,003.07	1	3,694.92	2	11,253.51	2
GRC	3,946.15	2	11,811.12	2	19,635.34	3	23,465.27	2
GTM	2,122.33	1	3,389.04	1	3,597.90	2	4,218.78	1
GNB	1,081.63	1	1,312.04	1	1,106.93	1	1,285.21	1
HKG	3,514.01	2	13,586.15	2	31,186.81	3	44,882.03	2
HND	1,862.19	1	2,574.26	1	2,485.88	1	2,908.60	1
HRV					11,553.06	2	17,031.47	2
HUN			8,952.71	2	13,097.70	2	18,712.79	2
IDN	792.78	1	1,889.65	1	3,208.21	1	4,671.41	1
IRL	5,668.56	2	11,870.01	2	31,867.86	3	36,324.19	2
ISR	7,078.85	2	14,124.71	2	26,669.28	3	24,964.70	2
IND	956.40	1	1,048.31	1	1,833.07	1	3,718.68	1
IRQ			5,971.26	2	4,132.29	2	4,633.21	1



Código nacional	1960		1980		2000		2011	
	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación
IRN	2,048.59	1	3,477.41	1	6,394.42	2	13,631.75	2
ISL	9,666.33	2	24,329.54	2	32,479.31	3	31,451.07	2
ITA	6,332.49	2	17,738.30	2	28,876.42	3	28,877.38	2
JAM	4,091.60	2	3,534.98	1	4,667.37	2	5,041.99	1
JOR	2,465.03	1	4,089.10	1	3,443.86	2	5,911.06	2
JPN	4,783.18	2	17,579.13	2	28,811.25	3	30,231.69	2
KEN	1,325.25	1	1,588.04	1	1,477.47	1	1,635.91	1
KGZ					1,762.02	1	2,100.34	1
KHM			721.49	1	1,118.99	1	2,606.98	1
COM	878.20	1	1,682.07	1	1,203.29	1	1,179.32	1
KNA			4,772.15	1	11,135.90	2	12,533.84	2
KOR	1,099.75	1	4,532.37	1	19,306.37	3	27,363.62	2
KWT			43,068.94	2	33,996.99	3	73,698.79	2
KAZ					5,431.74	2	16,760.52	2
LAO			809.51	1	1,592.80	1	2,788.15	1
LBN			3,662.45	1	5,665.35	2	14,958.92	2
LCA			5,925.93	2	6,813.32	2	9,102.99	2
LKA	2,292.64	1	1,621.66	1	3,685.90	2	5,984.01	2
LBR			1,609.87	1	635.71	1	592.10	1
LSO	544.58	1	1,016.31	1	1,295.29	1	1,965.75	1
LTU					9,727.59	2	17,091.51	2
LUX	17,104.97	2	27,079.16	2	61,344.81	3	78,203.51	2
LVA					8,855.07	2	15,888.31	2
MAR	1,214.22	1	2,351.22	1	3,722.92	2	4,488.87	1
MDA					1,596.09	1	3,382.28	1
MNE					7,397.34	2	10,859.37	2
MDG	1,068.76	1	939.80	1	896.73	1	932.46	1
MKD					5,553.57	2	8,580.71	2
MLI	420.69	1	445.02	1	837.82	1	1,156.97	1
MNG			1,328.26	1	2,001.08	1	5,818.10	2
MAC			12,947.41	2	24,326.22	3	73,305.59	2
MRT	942.93	1	1,994.47	1	1,753.18	1	3,291.81	1
MLT	3,603.36	2	8,492.97	2	19,889.70	3	23,783.69	2
MUS	3,088.13	1	4,663.28	1	11,857.22	2	12,324.99	2
MDV			2,377.28	1	6,963.98	2	12,267.11	2
MWI	568.81	1	733.55	1	644.49	1	970.54	1
MEX	5,100.98	2	10,548.96	2	10,677.41	2	12,648.12	2
MYS	2,388.23	1	6,515.03	2	11,656.30	2	17,339.07	2
MOZ	391.22	1	546.54	1	490.11	1	969.49	1
NAM	3,744.86	2	5,975.96	2	4,755.36	2	6,607.74	2
NER	1,187.91	1	1,205.26	1	625.80	1	646.86	1
NGA	1,480.40	1	1,807.36	1	422.60	1	2,925.13	1

Código nacional	1960		1980		2000		2011	
	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación
NLD	9,492.42	2	19,593.14	2	32,632.47	3	37,881.92	2
NOR	10,126.57	2	22,195.50	2	37,879.92	3	52,217.17	2
NPL	675.29	1	679.00	1	1,044.28	1	1,281.26	1
NZL	12,007.54	2	14,936.44	2	23,566.20	3	26,510.67	2
OMN			10,335.20	2	13,825.32	2	36,036.05	2
PAN	2,419.15	1	5,511.41	2	7,543.90	2	12,126.76	2
PER	2,392.39	1	3,661.96	1	4,545.08	2	9,313.01	2
PHL	1,719.20	1	2,780.60	1	3,793.06	2	4,324.99	1
PAK	942.27	1	1,574.17	1	2,111.79	1	2,791.62	1
POL			5,229.39	2	11,478.79	2	18,342.59	2
PRT	3,713.70	2	9,040.46	2	19,292.95	3	22,103.17	2
PRY	1,414.77	1	3,019.12	1	3,184.34	1	4,496.25	1
QAT			68,285.52	2	45,027.46	3	129,946.42	2
ROU	1,207.29	1	5,500.40	2	6,335.92	2	13,482.92	2
SRB					6,109.79	2	9,480.96	2
RUS					8,848.73	2	18,604.77	2
RWA	850.67	1	1,000.23	1	648.55	1	1,212.93	1
SAU			28,772.75	2	17,266.00	3	30,473.54	2
SDN			1,251.60	1	1,697.37	1	2,894.69	1
SWE	11,086.47	2	18,274.27	2	30,587.85	3	35,959.08	2
SGP	2,507.68	1	11,970.87	2	34,984.27	3	59,149.47	2
SVN					19,548.86	3	24,111.80	2
SVK					12,190.94	2	21,314.36	2
SLE			1,028.51	1	807.49	1	1,079.54	1
SEN	1,893.93	1	1,419.51	1	1,703.27	1	1,761.66	1
SUR			5,360.77	2	4,740.40	2	6,658.10	2
STP			2,141.82	1	1,478.25	1	2,533.48	1
SLV	621.75	1	851.94	1	946.55	1	1,112.35	1
SYR	1,635.61	1	2,306.45	1	1,305.42	1	4,859.69	1
SWZ			2,701.23	1	5,306.06	2	5,858.91	2
TCD	1,078.11	1	883.99	1	939.76	1	2,349.81	1
TGO	836.26	1	1,456.54	1	1,005.49	1	1,191.02	1
THA	1,008.33	1	2,922.64	1	6,379.96	2	9,567.09	2
TJK					1,256.47	1	2,431.04	1
TKM					6,624.81	2	12,528.55	2
TUN	1,338.02	1	3,676.61	1	7,265.65	2	8,781.29	2
TUR	4,034.88	2	6,596.05	2	9,940.85	2	14,373.67	2
TTO	6,374.55	2	20,639.93	2	10,539.29	2	20,104.03	2
TWN	2,197.18	1	9,152.73	2	27,925.13	3	32,918.99	2
TZA	808.77	1	1,335.66	1	766.23	1	1,355.38	1
UKR					3,751.85	2	8,256.98	2
UGA	895.86	1	598.27	1	896.75	1	1,312.79	1

Código nacional	1960		1980		2000		2011	
	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación	PIBpc	Clasificación
USA	15,140.92	2	24,963.10	2	39,747.24	3	42,426.37	2
URY	6,377.31	2	8,472.14	2	9,791.33	2	13,387.93	2
UZB					3,070.05	1	6,161.62	2
VCT			3,004.94	1	6,555.69	2	8,042.63	2
VEN	6,894.32	2	9,515.10	2	6,298.16	2	11,003.35	2
VNM			807.53	1	1,820.19	1	3,731.85	1
YEM					958.09	1	2,276.73	1
ZAF	4,924.06	2	8,174.12	2	7,458.47	2	10,830.60	2
ZMB	2,875.21	1	1,406.55	1	993.65	1	2,498.26	1
ZWE	1,748.01	1	2,261.60	1	4,296.18	2	4,340.50	1

Estudio de mixturas sobre la renta europea (UE-28) en los años 2000 y 2006. Datos del PIB per cápita en ppa. Fuente de datos originales: Eurostat.

Código regional	PIB pc 2000	Componentes mixtura 2000	PIB pc 2006	Componentes mixtura 2006
AT11	16.600	2	19.800	2
AT12	20.700	2	24.200	2
AT13	34.600	1	39.300	1
AT21	20.900	2	25.100	2
AT22	21.300	2	25.900	2
AT31	24.300	2	29.200	2
AT32	28.000	2	33.800	2
AT33	25.700	2	31.200	2
AT34	25.800	2	31.100	2
BE10	48.700	1	53.700	1
BE21	28.200	2	32.600	2
BE22	20.200	2	22.800	2
BE23	20.800	2	24.800	2
BE24	24.700	2	29.300	2
BE25	22.500	2	26.400	2
BE31	22.000	2	27.100	2
BE32	15.800	2	18.300	2
BE33	18.000	2	20.500	2
BE34	16.800	2	19.300	2
BE35	16.500	2	19.400	2
BG31	4.900	1	6.200	1
BG32	4.500	1	6.600	1
BG33	5.200	1	7.900	1
BG34	5.600	1	7.900	1
BG41	7.100	1	14.100	1
BG42	4.100	1	6.700	1
CY00	16.700	2	22.000	2

CZ01	26.400	2	39.800	1
CZ02	12.900	1	17.700	1
CZ03	12.600	1	17.500	1
CZ04	11.300	1	15.100	1
CZ05	12.200	1	15.800	1
CZ06	12.100	1	16.800	1
CZ07	11.000	1	14.600	1
CZ08	10.500	1	15.700	1
DE11	27.900	2	33.800	2
DE12	25.600	2	31.300	2
DE13	22.200	2	26.700	2
DE14	23.300	2	28.700	2
DE21	32.000	2	38.100	1
DE22	20.400	2	25.800	2
DE23	21.700	2	26.700	2
DE24	20.000	2	24.500	2
DE25	24.100	2	28.700	2
DE26	22.000	2	27.500	2
DE27	21.900	2	27.300	2
DE30	21.600	2	24.700	2
DE40	15.100	2	18.800	2
DE50	30.200	2	37.400	1
DE60	40.100	1	48.200	1
DE71	32.300	2	38.900	1
DE72	20.400	2	25.200	2
DE73	21.200	2	26.400	2
DE80	14.700	2	18.000	1
DE91	21.400	2	25.900	2
DE92	21.900	2	27.000	2
DE93	16.600	2	19.000	2
DE94	20.000	2	23.700	2
DEA1	24.600	2	30.100	2
DEA2	25.000	2	29.200	2
DEA3	19.300	2	23.900	2
DEA4	22.600	2	26.600	2
DEA5	20.000	2	24.500	2
DEB1	19.400	2	23.600	2
DEB2	18.200	2	22.400	2
DEB3	21.500	2	25.400	2
DEC0	20.900	2	27.300	2
DED2	15.100	2	20.200	2
DED4	14.200	2	18.900	2
DED5	16.100	2	20.700	2
DEE0	14.400	2	18.800	2
DEF0	20.300	2	23.600	2
DEG0	14.200	2	18.200	2

<b>DK01</b>	30.200	2	34.700	2
<b>DK02</b>	18.200	2	21.200	2
<b>DK03</b>	22.400	2	26.100	2
<b>DK04</b>	23.300	2	27.000	2
<b>DK05</b>	21.800	2	25.500	2
<b>EE00</b>	8.600	1	15.600	1
<b>EL11</b>	11.900	1	15.500	1
<b>EL12</b>	14.800	2	17.500	1
<b>EL13</b>	14.500	2	19.700	2
<b>EL14</b>	13.600	1	16.900	1
<b>EL21</b>	13.500	1	15.500	1
<b>EL22</b>	15.500	2	22.500	2
<b>EL23</b>	12.500	1	17.200	1
<b>EL24</b>	19.100	2	20.400	2
<b>EL25</b>	15.700	2	18.300	2
<b>EL30</b>	18.100	2	28.100	2
<b>EL41</b>	12.900	1	17.500	1
<b>EL42</b>	19.500	2	24.700	2
<b>EL43</b>	15.800	2	19.800	2
<b>ES11</b>	14.300	2	21.000	2
<b>ES12</b>	15.400	2	22.300	2
<b>ES13</b>	17.300	2	23.600	2
<b>ES21</b>	22.600	2	31.100	2
<b>ES22</b>	23.400	2	30.700	2
<b>ES23</b>	21.000	2	27.000	2
<b>ES24</b>	19.300	2	26.700	2
<b>ES30</b>	25.200	2	32.200	2
<b>ES41</b>	16.700	2	23.000	2
<b>ES42</b>	14.500	2	20.000	2
<b>ES43</b>	11.700	1	16.300	1
<b>ES51</b>	22.600	2	29.000	2
<b>ES52</b>	17.800	2	22.900	2
<b>ES53</b>	22.800	2	27.000	2
<b>ES61</b>	13.600	1	19.200	2
<b>ES62</b>	15.500	2	21.100	2
<b>ES63</b>	15.600	2	21.000	2
<b>ES64</b>	15.400	2	20.300	2
<b>ES70</b>	17.500	2	21.800	2
<b>FI19</b>	19.400	2	23.900	2
<b>FI1B</b>	30.600	2	35.900	2
<b>FI1C</b>	20.800	2	24.500	2
<b>FI1D</b>	17.400	2	21.900	2
<b>FI20</b>	27.700	2	34.200	2
<b>FR10</b>	34.300	1	39.300	1
<b>FR21</b>	20.700	2	23.200	2
<b>FR22</b>	17.900	2	20.000	2

FR23	20.200	2	22.900	2
FR24	19.600	2	22.500	2
FR25	18.100	2	20.900	2
FR26	19.400	2	22.100	2
FR30	17.100	2	20.600	2
FR41	18.100	2	20.900	2
FR42	21.800	2	23.800	2
FR43	19.400	2	21.400	2
FR51	19.800	2	22.900	2
FR52	18.900	2	22.600	2
FR53	18.100	2	21.200	2
FR61	19.500	2	23.200	2
FR62	19.100	2	23.600	2
FR63	17.900	2	20.900	2
FR71	22.200	2	25.900	2
FR72	18.400	2	21.300	2
FR81	16.900	2	20.200	2
FR82	20.200	2	24.300	2
FR83	16.400	2	19.800	2
HR03	9.200	1	13.200	1
HU10	15.800	2	24.400	2
HU21	9.900	1	13.600	1
HU22	11.600	1	15.000	1
HU23	7.700	1	10.100	1
HU31	6.700	1	9.600	1
HU32	6.800	1	9.500	1
HU33	7.700	1	10.000	1
IE01	16.500	2	24.700	2
IE02	28.000	2	37.900	1
ITC1	25.100	2	27.600	2
ITC2	27.000	2	31.000	2
ITC3	23.000	2	25.500	2
ITC4	29.300	2	31.400	2
ITF1	19.300	2	20.400	2
ITF2	17.300	2	19.900	2
ITF3	13.800	2	15.700	1
ITF4	14.900	2	16.400	1
ITF5	15.700	2	17.500	1
ITF6	13.700	2	15.800	1
ITG1	14.200	2	16.200	1
ITG2	16.300	2	18.500	2
ITH1	31.200	2	33.800	2
ITH2	27.700	2	29.000	2
ITH3	26.800	2	29.100	2
ITH4	25.900	2	28.500	2
ITH5	28.600	2	30.700	2

IT11	24.100	2	26.500	2
IT12	22.000	2	23.500	2
IT13	22.500	2	25.300	2
IT14	25.700	2	29.200	2
LT00	7.500	1	13.600	1
LU00	46.500	1	63.800	1
LV00	6.900	1	12.500	1
MK00	5.100	1	7.100	1
MT00	16.500	2	18.500	2
NL11	28.300	2	40.500	1
NL12	20.800	2	24.700	2
NL13	20.300	2	23.800	2
NL21	22.100	2	26.200	2
NL22	21.600	2	26.000	2
NL23	18.300	2	23.500	2
NL31	31.600	2	36.300	1
NL32	29.200	2	35.400	2
NL33	25.800	2	31.500	2
NL34	21.900	2	27.100	2
NL41	25.900	2	30.900	2
NL42	22.700	2	27.200	2
PL11	8.200	1	11.300	1
PL12	14.000	2	19.600	2
PL21	8.000	1	10.700	1
PL22	9.900	1	13.000	1
PL31	6.500	1	8.300	1
PL32	6.400	1	8.400	1
PL33	7.000	1	9.300	1
PL34	6.800	1	9.000	1
PL41	9.800	1	12.900	1
PL42	9.200	1	11.100	1
PL43	8.200	1	10.900	1
PL51	9.400	1	13.100	1
PL52	7.600	1	9.800	1
PL61	8.300	1	10.700	1
PL62	7.200	1	9.200	1
PL63	9.100	1	12.100	1
PT11	12.400	1	14.600	1
PT15	16.800	2	20.800	2
PT16	13.100	1	15.600	1
PT17	21.700	2	26.200	2
PT18	14.200	2	17.500	1
PT30	17.300	2	24.700	2
RO11	4.400	1	8.500	1
RO12	5.100	1	8.900	1
RO21	3.400	1	5.700	1

RO22	4.500	1	7.700	1
RO31	4.000	1	7.500	1
RO32	10.900	1	20.500	2
RO41	4.000	1	7.000	1
RO42	5.100	1	10.200	1
SE11	33.700	1	39.500	1
SE12	20.700	2	24.900	2
SE21	21.900	2	25.700	2
SE22	22.200	2	25.700	2
SE23	23.200	2	28.100	2
SE31	20.900	2	25.000	2
SE32	22.000	2	26.000	2
SE33	20.900	2	27.900	2
SI01	12.900	1	17.000	1
SI02	18.000	2	25.000	2
SK01	20.700	2	34.800	2
SK02	9.000	1	14.800	1
SK03	7.900	1	11.600	1
SK04	7.200	1	10.300	1
UKC1	15.800	2	20.100	2
UKC2	16.300	2	23.700	2
UKD1	17.300	2	23.000	2
UKD3	19.800	2	25.800	2
UKD4	17.700	2	21.700	2
UKD6	23.300	2	31.300	2
UKD7	16.700	2	21.900	2
UKE1	17.100	2	22.500	2
UKE2	19.500	2	24.900	2
UKE3	15.400	2	21.100	2
UKE4	20.400	2	26.000	2
UKF1	18.100	2	23.300	2
UKF2	20.900	2	25.700	2
UKF3	15.400	2	19.800	2
UKG1	20.200	2	25.700	2
UKG2	17.500	2	22.000	2
UKG3	21.400	2	25.100	2
UKH1	20.200	2	26.600	2
UKH2	25.900	2	31.000	2
UKH3	18.700	2	24.000	2
UKI1	62.700	1	80.100	1
UKI2	22.700	2	25.500	2
UKJ1	32.300	2	38.800	1
UKJ2	25.300	2	30.100	2
UKJ3	22.100	2	27.600	2
UKJ4	18.700	2	23.400	2
UKK1	23.700	2	29.100	2



---

<b>UKK2</b>	18.500	2	23.000	2
<b>UKK3</b>	12.900	1	18.500	2
<b>UKK4</b>	17.100	2	23.000	2
<b>UKL1</b>	13.700	2	17.700	1
<b>UKL2</b>	20.600	2	26.200	2
<b>UKM2</b>	21.200	2	28.400	2
<b>UKM3</b>	19.100	2	25.600	2
<b>UKM5</b>	29.600	2	40.200	1
<b>UKM6</b>	16.400	2	21.800	2
<b>UKN0</b>	18.100	2	22.800	2

---



## B. Anexo relativo al capítulo 3.

Familia de índices de Atkinson (según el estudio empírico desarrollado en 3.8.2)

$\varepsilon = 0.5$

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergrupala	Residuo	Porcentaje intergrupala máximo
2000	32.8	66.1	1.2	68.6
2001	33.7	65.1	1.1	67.2
2002	35.6	63.3	1.1	65.2
2003	36.9	62.0	1.1	63.9
2004	38.3	60.7	1.0	62.6
2005	40.8	58.1	1.0	60.0
2006	42.4	56.6	1.0	58.5
2007	46.1	52.9	0.9	54.6
2008	51.4	47.7	0.9	49.3
2009	53.5	45.6	0.9	47.0
2010	54.6	44.6	0.9	46.0
2011	55.9	43.3	0.9	44.7

$\varepsilon = 0.7$

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergrupala	Residuo	Porcentaje intergrupala máximo
2000	30.9	67.3	1.7	70.7
2001	31.8	66.5	1.7	69.4
2002	33.8	64.6	1.7	67.3
2003	33.8	63.3	1.6	66.0
2004	36.6	61.9	1.5	64.5
2005	39.2	59.3	1.5	61.9
2006	40.9	57.6	1.5	60.1
2007	44.7	53.9	1.4	56.2
2008	50.0	48.7	1.4	50.8
2009	52.1	46.6	1.3	48.5
2010	53.3	45.4	1.3	47.3
2011	54.7	44.0	1.3	45.8

$\varepsilon = 0.9$

	Porcentaje intragrupal	Porcentaje intergrupala	Residuo	Porcentaje intergrupala máximo
2000	29.9	68.0	2.1	71.9
2001	30.8	67.2	2.0	70.7

---

2002	32.7	65.3	2.0	68.5
2003	34.1	62.5	1.8	65.7
2004	35.6	59.9	1.9	63.0
2005	38.3	58.1	1.8	61.1
2006	40.1	57.6	1.5	60.1
2007	43.9	54.4	1.7	57.1
2008	49.2	49.2	1.6	51.6
2009	51.3	47.2	1.6	49.3
2010	52.6	45.9	1.6	48.0
2011	54.1	44.3	1.6	46.5