Emilio P. DIEZ DE CASTRO
Enrique MARTIN ARMARIO
Universidad de Sevilla

LA TOMA DE DECISIONES ORIENTADA HACIA LA OPTIMIZACION BAJO RESTRICCIONES EN AMBIENTES BORROSOS

1.- Introducción.

2.- Objetivos, restricciones y Decisiones Borrosas.

3.- Optimización bajo restricciones. La programación lineal 3.-

4.- Desarrollo de un caso ilustrativo.

5.- Consideraciones finales.

6.- Notas y Bibliografia.

1.- INTRODUCCION

El problema de la toma de decisiones orientada hacia la optimización bajo restricciones puede ser descrito en los siguientes términos: Dado,

- un conjunto de alternativas (variables de decisión),
- un conjunto de restricciones, que limita la elección en el conjunto de las alternativas, y
- una función objetivo, que traduce en valor (utilidad) los resultados de cada decisión,

se trata de operar una elección en el conjunto de las alternativas que, respetando las restricciones impuestas, permita optimizar el valor de la función objetivo.

La Programación Matemática se muestra como un instrumento de gran valía en la modelización de este tipo de problema. La importancia que este conjunto de técnicas tiene en la Economía de la Empresa es de todos conocida y esta fuera de toda duda; en efecto, hay un gran número de problemas, propios de la gestión empresarial, que encuentran solución adecuada con la aplicación de la Programación Matemática. La planificación económica de la producción, la programación de inversiones, la programación de almacenes, constituyen ejemplos relavantes de lo que afirmamos. No es de extrañar, por lo tanto, que la Programación Matemática tenga un sitio destacado en el método operativo de la Economía de la Empresa.

Pero es necesario poner de manifiesto que la aplicación de estas técnicas exige un ambiente de certeza (1), en el cual los objetivos y las restricciones son claramente definidos. Esto obliga al modelizador a precisar ciertos datos que, con bastante frecuencia, en la realidad no se presentan con estas características.

Así, cuando el ambiente en el que actuamos se califica de borroso (2), es decir, cuando los objetivos y/o las restricciones se definen de una forma vaga, imprecisa, se hace necesario revisar el planteamiento anterior (3).

El objeto de este artículo se centra precisamente en la revisión de ese planteamiento y en la descripción de la Programación Lineal Borrosa como un instrumento de modelización válido del problema de optimización bajo restricciones en ambientes borrosos.

2.- OBJETIVOS, RESTRICCIONES Y DECISIONES BORROSAS

Las técnicas de decisión tradicionales (todas aquellas que no tratan la borrosidad) requieren que la información sobre objetivos, restricciones, etc., sea precisa y concreta. Sin embargo, en el mundo real se observa, con bastante frecuencia, la tendencia a definir estos elementos con una gran vaguedad, con poca o ninguna precisión. Por esta razón, para tratar estos casos, es para lo que surge una nueva Teoría de la Decisión en la que se encuadra, como instrumentos de ayuda a la decisión, la Programación Lineal Borrosa.

Tres conceptos básicos deben ser explicitados en esa nueva teoría: el de OBJETIVO BORROSO, el de RESTRICCION BORROSA y el de DECISION BORROSA.

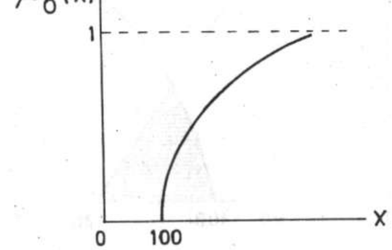
El OBJETIVO BORROSO es aquel cuyo nivel no se establece con precisión, definiéndose entonces por un conjunto borroso (5) en un espacio determinado (X). Por ejemplo: "los beneficios deben ser sustancialmente superiores a 100 u.m.". El término "sustancialmente mayor" establece na fuente de imprecisión que será considerada y tratada por medio de un conjunto borroso, el cual, como tal, lleva asociado una función de pertenencia $\mu_O(x)$ que mide la intensidad con que cualquier x (valor del beneficio alcanzado) pertenece a nuestro objetivo. Así pues, en este ejemplo, el objetivo O se define de la siguiente forma:

$$O = \left\{ x,\ \mu_O(x) \,/\, x \geq 100 \right\} \quad [1]$$

definiéndose la función de pertenencia $\mu_O(x)$ tal como se indica:

$$\begin{aligned} \mu_O(x) &= 0 \text{ para } x \leq 100 \\ \mu_O(x) &= \left[1 + (x - 100)^{-2} \right]^{-1} \text{ para } x > 100 \end{aligned} \quad [2]$$

gráficamente:



La RESTRICCION BORROSA, por su parte, puede definirse en los siguientes términos:

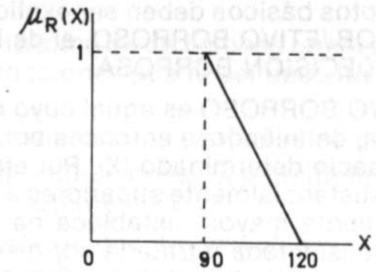
$$90 \lesssim x \lesssim 120 \quad [3]$$

donde los símbolos $\lesssim$ indican que x (el beneficio) debe estar comprendido "aproximadamente" entre 90 y 120.

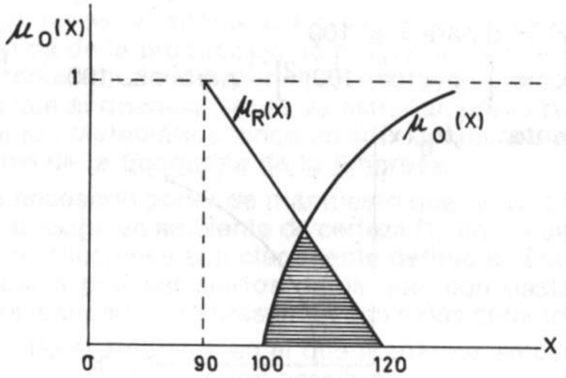
La restricción así considerada actúa sobre el espacio de las alternativas y se define, asimismo, a través de un conjunto borroso, el cual lleva implícita una función de pertenencia $\mu_R(x)$ que adopta, en nuestro ejemplo, la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu_R(x) &= 0 \text{ para } x < 90 \\ \mu_R(x) &= 1 \text{ para } x = 90 \\ \mu_R(x) &= \frac{120-x}{30} \text{ para } 90 \leq x \leq 120 \end{aligned} \quad [4]$$

gráficamente:



La DECISION BORROSA "D" supone una elección en el espacio de las alternativas, teniendo en cuenta los objetivos "0" y las restricciones "R" establecidas sobre ese mismo espacio. La decisión vendrá dada por la intersección entre los conjuntos 0 y R, es decir, la decisión borrosa supone la confluencia entre objetivos y restricciones. Siguiendo con nuestro ejemplo, la decisión se operaria en el area rayada de la siguiente figura:



En definitiva, la decisión puede definirse también a través de un conjunto borroso "D", resultante de la intersección entre objetivos y restricciones:

$$D = 0 \cap R \qquad [5]$$

La función de pertenencia asociada a este conjunto $\mu_D(x)$ viene dada por la resultante de la intersección entre $\mu_0(x)$ y $\mu_R(x)$:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_0(x),\ \mu_R(x)) = \mu_0(x) \wedge \mu_R(x) \qquad [6]$$

La decisión óptima D* será un subconjunto de D, con una función de pertenencia definida por:

$$\mu_{D^*}(x) = \max\ \mu_D(x) \qquad x \in S \qquad [7]$$

siendo S el conjunto de valores de x en los cuales $\mu_D(x)$ alcanza su máximo valor. En conclusión, la decisión óptima es aquella alternativa del espacio X que hace máximo $\mu_D(x)$.

Operando en la forma indicada en el ejemplo que venimos desarrollando obtendremos:

Valores de x	$\mu_0(x)$	$\mu_R(x)$	$\mu_D(x)$
90	0	1	0
95	0	0.83	0
100	0	0.66	0
101	0.5	0.63	0.5
102	0.80	0.60	0.60
103	0.90	0.56	0.56
104	0.94	0.53	0.53
105	0.96	0.50	0.50
106	0.97	0.46	0.46
107	0.98	0.43	0.43
108	0.984	0.40	0.40
109	0.987	0.36	0.36
110	0.99	0.33	0.33
111	0.991	0.30	0.30
112	0.993	0.26	0.26
113	0.994	0.23	0.23
114	0.995	0.20	0.20
115	0.995	0.16	0.16
116	0.996	0.13	0.13
117	0.996	0.10	0.10
118	0.9965	0.06	0.06
119	0.997	0.03	0.03
120	0.998	0.00	0.00

La decisión óptima D* corresponde pues a aquel valor de x para el cual $\mu_D(x)$ sea máximo. Esto ocurre para:

$$\text{Max. } \mu_D(x) = 0.60 \quad \text{para } x^* = 102 \qquad [8]$$

Una característica de este nuevo marco conceptual de la decisión es que los objetivos y las restricciones reciben un tratamiento simétrico, definiéndose ambos como conjuntos borrosos en el espacio de las alternativas. El proceso de decisión supone, en este nuevo marco, una operación sobre tales conjuntos.

Por otra parte, es necesario señalar, como hacen Bellman y Zadeh (6), que si en el proceso de decisión convencional, la función de resultados opera una ordenación en el conjunto de las alternativas, esta tarea es asumida, en el nuevo marco de decisión definido, por la función de pertenencia de los objetivos borrosos. En efecto, la normalización de los valores de $\mu_0(x)$ (dividir todos y cada uno de estos valores por el supremo de ellos) permite homogeneizar los objetivos y las alternativas.

3.- OPTIMIZACION BAJO RESTRICCIONES, LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA.

La representación analítica de un modelo estandar de Programación Lineal puede establecerse en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= C.X \\ A.X. &\leq b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \qquad [9]$$

donde:

$C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ vector de coefientes de la función objetivo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$ vector de variables decisionales

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matriz de coeficientes técnicos-económicos

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$ vector de coeficientes que representan el nivel permitido a las restricciones (vector de existencias).

La resolución de este problema exige el conocimiento de los niveles de X que, satisfaciendo las restricciones impuestas, minimicen la función objetivo Z.

Ahora bien, cuando objetivo y/o restricciones no se establecen de una forma clara y precisa es evidente, entonces, que el modelo anterior no puede ser aplicado. No son extraños los casos donde los objetivos se definen de una forma análoga a este ejemplo: "estimo que el beneficio de este período será satisfactorio a partir de 40.000 u.m. y totalmente inadmisible por debajo de 25.000 u.m.".

En situaciones como la descrita se debe recurrir a este otro planteamiento: (7,8):

$$A.X \lesssim b \qquad \begin{aligned} Z &\lesssim C.X \\ X &\lesssim 0 \end{aligned} \qquad [10]$$

donde el símbolo $\lesssim$, que debe leerse "aproximadamente menor o igual que", representa la borrosificación del problema recogido en [9], con objetivo y restricciones definidos como conjuntos borrosos.

Tal como vimos en el epígrafe anterior, la resolución de [10] exige la formación del conjunto de decisiones borrosas, que vendrá dado por la intersección entre el objetivo y las restricciones. Es decir:

$$D = 0 \cap R \qquad [11]$$

Y puesto que D es un conjunto borroso, su función de pertenencia μ_D, se obtiene de la siguiente forma:

$$D = \mu_0 \wedge \mu_R = \min.(\mu_0, \mu_R) \qquad [12]$$

La decisión óptima se obtendrá con aquella alternativa (perteneciente al conjunto D) a la que le corresponde el valor máximo de μ_D:

$$D^* = \max. \mu_D \qquad \text{para } x \geq 0 \qquad [13]$$

La obtención de la función de pertenencia $_D$ se muestra, por lo tanto, como algo necesario para la resolución del problema que hemos planteado. A este objeto estableceremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} B.X &\leq b^* \\ X &\geq O \end{aligned} \qquad [14]$$

donde:

$$B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{a_{2n}} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matriz formada por la incorporación del vector fila C a la matriz A.

$$b^* = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$ vector formado por la incorporación de b_o (nivel satisfactorio del objetivo) al vector b.

Es evidente que el sistema dado por]14] recoge tanto al objetivo como a las restricciones, y dado que estos se definen como conjuntos borrosos, las funciones de pertenencia asociadas se establecen tal y como se indica:

$$f(AX, CX) = f(BX) = \min_{i} f_i((BX)_i) \quad [15]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 0, 1, 2, ..., m$$

siendo $f_i((BX)_i)$ la función de pertenencia de la iesima fila del sistema BX (para i = 0, 1, 2, ..., m) ya que suponemos m restricciones y una función objetivo). Resulta entonces obvio que:

$$\min_{i} f_i((BX)_i) = \mu_D \quad [16]$$

Conviene ahora definir los valores que tomará la función $\mu_D = \min f_i((BX)_i)$, teniendo en cuenta que suponemos la linealidad de las mismas:

- Tomará valor "uno" $\left[f_i((BX)_i) = 1\right]$ cuando se cumpla que $(BX)_i \leq b_i$, es decir, cuando la iesima fila del sistema $BX \leq b^*$ (corresponda a un objetivo o a una restricción, puesto que ambos reciben un tratamiento análogo) se cumpla en los términos establecidos.
- Tomará valor "cero" $\left[f_i((BX)_i) = 0\right]$ cuando la iesima fila del sistema BX sea superior al nivel establecido b_i más una constante k_i de violación subjetivamente admitida por el decisor. Es decir, cuando se cumpla $(BX)_i > b_i + k_i$.
- Los valores de $f_i(BX)_i)$ para los cuales $(BX)_i$ está comprendido entre b_i y $b_i + k_i$ se calculan por una simple interpolación lineal entre los casos anteriores. Es decir:

$$f_i((BX)_i) = 1 - \frac{(BX)_i - b_i}{k_i}$$

$$\text{para } b_i < (BX)_i \leq b_i + k_i$$

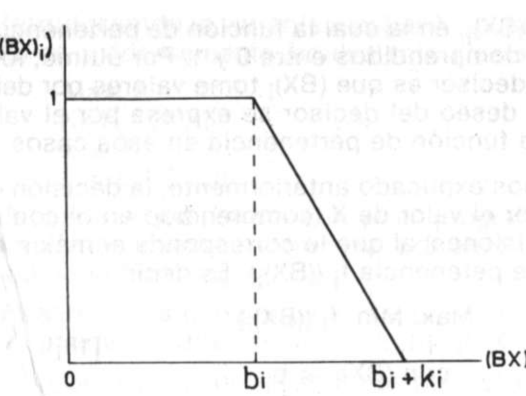
Resumiendo:

$$f_i((BX)_i) = \begin{cases} 1 & \text{para } (BX)_i \leq b_i \\ 1 - \dfrac{(BX)_i - b_i}{k_i} & \text{para } b_i < (BX)_i \leq b_i + k_i \\ 0 & \text{para } (BX)_i > b_i + k_i \end{cases} \quad [17]$$

$$x \geq 0$$
$$i = 0, 1, ... m$$

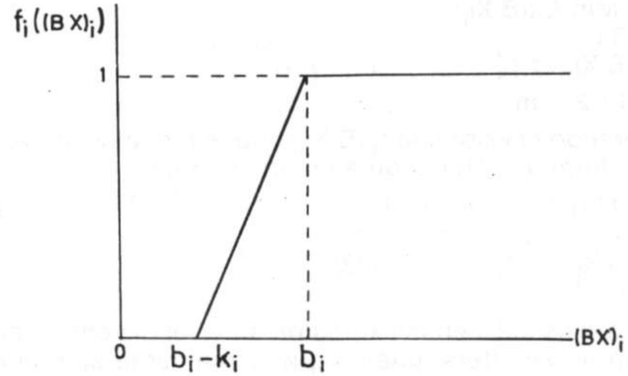
La representación gráfica de estas funciones de pertenencia es la que se indica a continuación:

a) Caso de una restricción del tipo "menor o igual" $((BX)_i \leq b_i)$ o de una función objetivo que se intenta minimizar (Mín. Z = CX):



Cuando se represente a una restricción podemos concluir que, para todos aquellos valores de $(BX)_i$ que no superan el límite b_i, el valor de la función de petenencia $f_i((BX)_i)$ que le corresponde es 1; se admite, no obstante, una violación de ese límite hasta alcanzar el valor $b_i + k_i$, punto en el cual la función de pertenencia toma valor 0. Si la figura representase (en forma de restricción) a una función objetivo, los valores de $(BX)_i$ inferiores o iguales a b_i serian considerados como satisfactorios, lo que se refleja en el valor de la función de pertenencia $f_i((BX)_i) = 1$. El valor máximo que se tolera para esa función objetivo $(BX)_i$ es $b_i + k_i$, punto a partir del cual $f_i((BX)_i) = 0$.

b) Caso de una restricción del tipo "mayor o igual" $((BX)_i \geq b_i)$ o de una función objetivo que se intenta maximizar (Max. Z = CX) (9):



En esta ilustración, se representa una restricción o una función objetivo, es evidente que se define una zona "satisfactoria" para los valores de $(BX)_i \geq b_i$ en la cual la función de pertenencia $f_i((BX)_i) = 1$. Se admite, asimismo, una violación (k_i) hasta el punto b_{i-k_i}, que define una zona borrosa para $(BX)_i$, en la cual la función de pertenencia tomará valores comprendidos entre 0 y 1. Por último, lo que no admite el decisor es que $(BX)_i$ tome valores por debajo de b_i-k_i; este deseo del decisor se expresa por el valor 0 que adopta la función de pertenencia en esos casos.

Tal como hemos explicado anteriormente, la decisión óptima vendrá dada por el valor de X (comprendido en el conjunto borroso de las decisiones) al que le corresponda el máximo valor de la función de petenencia f_i $((BX)_i)$. Es decir:

$$\underset{x \geq 0}{\text{Max.}}\ \underset{i}{\text{Min.}}\ f_i\,((BX)_i) \quad \text{con } (BX)_i \leq b_i \qquad [18]$$

Ahora bien, es posible operar ciertos cambios en la función de pertenencia f_i $((BX)_i)$. En efecto, si hacemos:

$$b'_i = \frac{b_i}{k_i}$$

$$B' = \frac{B}{k_i} \qquad [19]$$

obtenemos:

$$f_i\,((B'X)_i) = \begin{cases} 1 & \text{para } (B'X)_i \leq b'_i \\ 1 - \left[(B'X)_i - b'_i\right] & \text{para } b'_i < (B'X)_i \leq b'_i + 1 \\ 0 & \text{para } (B'X)_i \geq b'_i + 1 \end{cases} \qquad [20]$$

Teniendo en cuenta la expresión (19), la norma de decisión definida en (18) queda ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Max. Min } f_i\,((B'X)_i) \\ &x \geq 0 \ \ i \\ &\text{con } (B'X)_i \leq b'_i \qquad (21) \\ &i = 0,1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

Y considerando el valor que $f_i((B'X)_i)$ puede tomar (vease expresión (20), la formula (21) quedará como se indica:

$$\begin{aligned} &\text{Max. Min. } [\,1 - (\,(B'X)_i - b'_i)] \\ &x \geq 0 \ \ i \\ &\text{con } (B'X)_i \leq b'_i \qquad (22) \\ &i = 0,1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

Si prescindimos del 1 en la expresión anterior el sentido de la optimización no se altera, puesto que unicamente se omite una constante. La norma de decisión definitiva será, entonces, la siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Max. Min. } f_i\,(b'_i - (B'X)_i) \\ &x \geq 0 \ \ i \\ &\text{con } (B'X)_i \leq b'_i \qquad (23) \\ &i = 0,1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

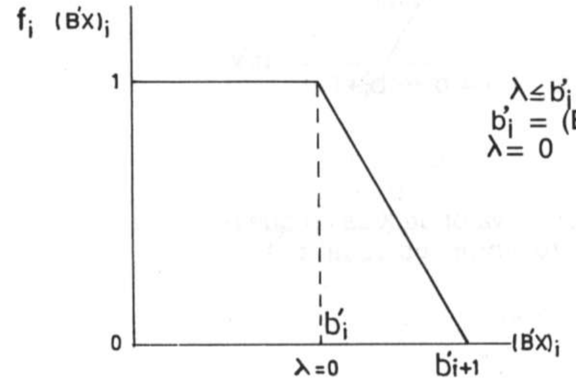
Introduciendo la variable auxiliar λ, el problema planteado en (23) es, evidentemente, equivalente a este otro:

$$\begin{aligned} &\text{Max. } \lambda \\ &\lambda \leq b'_i - (B'X)_i \qquad (24) \\ &x \geq 0 \\ &i = 0,1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

Adviertase que (24) constituye un programa lineal estandar, cuya solución puede encontrarse por algoritmos bien conocidos, como el Dantzing.

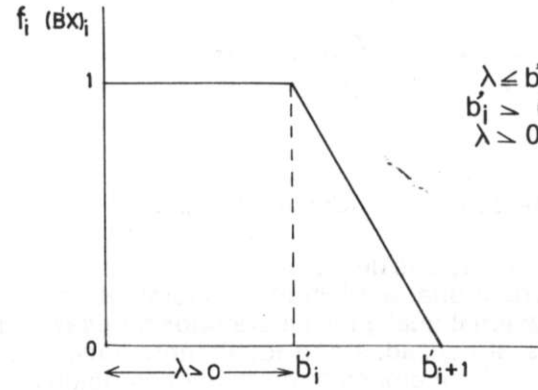
Pasaremos a continuación a definir los diferentes valores que λ puede tomar en función de $(b'_i - (B'X)_i)$:

1) Si la solución encontrada para el vector de variables decisionales X, en el problema (24), hace que $b'_i = (B'X)_i$, es evidente, entonces, que $\lambda = 0$.



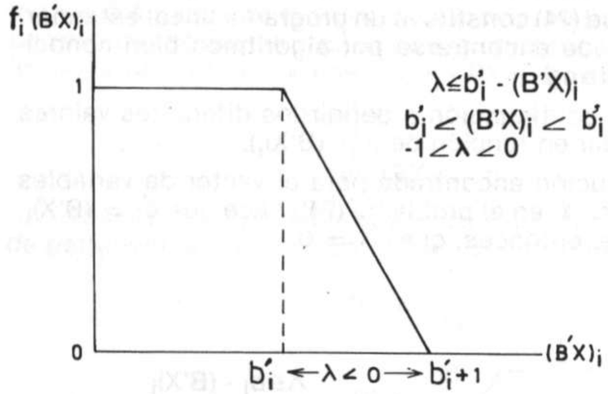
$$\begin{aligned} &\lambda \leq b'_i - (B'X)_i \\ &b'_i = (B'X)_i \qquad (25) \\ &\lambda = 0 \end{aligned}$$

2) Si el valor del vector X es tal que, en el tipo de restricción (o función objetivo) reflejada se cumple que $b'_i > (B'X)_i$, la variable auxiliar $\lambda > 0$.



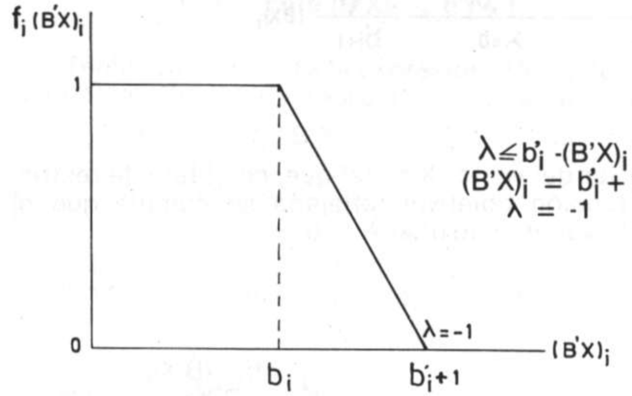
$$\begin{aligned} &\lambda \leq b'_i - (B'X)_i \\ &b'_i > (B'X)_i \qquad (26) \\ &\lambda > 0 \end{aligned}$$

3) Cuando la solución del vector X permite que la ecuación $(B'X)_i$ tome un valor comprendido entre b_i y $b_i + 1$, la variable λ tomará, entonces, un valor negativo, pero inferior a -1:



$$\begin{aligned} \lambda &\leq b'_i - (B'X)_i \\ b'_i < (B'X)_i &< b'_i + 1 \qquad (27) \\ -1 < \lambda &< 0 \end{aligned}$$

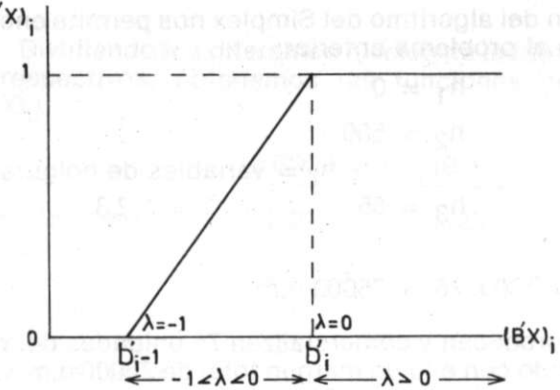
4) Por último, si el valor de X es tal que $(B'X)_i = b'_i + 1$, la variable λ será, entonces, igual a -1:



$$\begin{aligned} \lambda &\leq b'_i - (B'X)_i \\ (B'X)_i &= b'_i + 1 \qquad (28) \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

5) Es evidente que para valores de $(B'X)_i \geq b'_i + 1$, $\lambda < -1$.

6) Aunque en el análisis de los cinco casos anteriores hemos considerado una restricción (o función objetivo) del tipo "menor o igual que" (que se pretende minimizar), las conclusiones al canzadas son igualmente válidas para otros tipos de restricciones (o de funciones objetivo):



Con el objeto de facilitar la comprensión de todo lo explicado hasta el momento, desarrollaremos en el siguiente punto un ejemplo ilustrativo.

4. DESARROLLO DE UN CASO ILUSTRATIVO

La empresa Tartesos S.A. fabrica los productos A,B,C y D. La venta de estos productos proporciona un margen unitario de 1000, 1600 y 1000 y 1400 u.m. respectivamente.

Asimismo, se sabe que para la comercialización de cada unidad de los productos considerados se requiere una inversión mínima en publicidad y en fuerza de venta. Esta inversión unitaria es la que se indica en la siguiente tabla:

Producto	A	B	C	D
Publicidad	2 u.m.	4 u.m.	2 u.m.	3 u.m.
Fuerza de Venta	20 u.m.	20 u.m.	20 u.m.	20 u.m.

La cantidad total disponible a aplicar en publicidad y fuerza de venta esta limitada, por periodo, a 150 y 2000 u.m. respectivamente.

Teniendo en cuenta que el mercado exige atender una demanda minima de 20 unidades del producto A, se trata de determinar el programa de producción y comercialización que permita a Tartesos maximizar su margen total.

El texto anterior refleja un sencillo problema que puede ser planteado y resuelto por medio de un programa lineal. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 1000\, x_a + 1600\, x_b + 1000\, x_c + 1400\, x_d \\ 2\, x_a + 4\, x_b + 2\, x_c + 3\, x_d &\leq 150 \\ 20\, x_a + 20\, x_b + 20\, x_c + 20\, x_d &\leq 2000 \\ x_a &\geq 20 \qquad x_a, x_b, x_c, x_d \geq 0 \end{aligned}$$

La aplicación del algoritmo del Simplex nos permite encontrar una solución al problema anterior:

$x_a = 75 \qquad h_1 = 0$

$x_b = 0 \qquad h_2 = 500$

h_i = variables de holgura

$x_c = 0 \qquad h_3 = 55 \qquad i = 1,2,3.$

$x_d = 0$

$$Z = 1000.\,75 = 75000 \text{ u.m.}$$

Es decir, se producen y comercializan 75 unidades del producto A, alcanzando con ello un margen total de 75000 u.m. Con esta solución quedan disponibles 500 u.m. de fuerza de venta, y las exigencias del mercado en cuanto al nivel de producción del producto A se superan en 55 unidades.

Pero el gerente de Tartesos podia (cosa bastente frecuente) haber planteado el problema anterior en los siguientes términos:

"Nuestro interés es encontrar aquel programa que cumpla mejor nuestros deseos o aspiracines. En concreto, pensamos que 40.000 u.m. sería el mínimo aceptable para el margen total que a partir de 72.000 u.m. comenzaría a ser satisfactorio. En cuento a los recursos de publicidad podriamos aplicar no mas de 190 u.m., aunque 150 sería lo más adecuado. En fuerza de venta esa aplicación de recursos no debería superar las 2100 u.m., aunque lo presupuestado es 2000 u.m. Por último, aunque el mercado nos exige atender una demanda de 20 unidades, como mínimo, del producto A, consideraremos que a partir de 30 se obtendrá el nivel más satisfactorio, atendiendo a las características de nuestra empresa".

Es evidente que esta nueva forma de exponer el problema está más cerca de la realidad que la anterior. Podemos comprobar que tanto el objetivo como las restricciones no se han definido con precisión, sino con cierta vaguedad. La Programación lineal Borrosa es el instrumento que nos va a permitir plantear y resolver la "nueva forma del problema".

DEFINICION DE LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA $f_i\ ((BX)_i)$:

	$f_i\ ((BX)_i) = 0$	$f_i((BX)_i = 1$	k_i
Función objetivo (Z)	40.000	72.000	32.000
Restriccion de publicidad	190	150	40
Restricción de fuerza de venta	2.100	2.000	100
Restricción sobre x_a	20	30	10

Dividiendo los diferentes niveles de la tabla anterior por los k_i respectivos, obtenemos las funciones de pertenencia f_i $((B'X)_i)$:

	$f_i((B'X)_i) = 0$	$f_i((B'X)_i) = 1$	k_i
Función objetivo (Z)	1,25	2,25	1
Restricción de publicidad	4,75	3,75	1
Restricción de Fuerza de venta	21	20	1
Restricción sobre x_a	2	3	1

Teniendo en cuenta lo anterior podemos establecer el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } \lambda \\
&\lambda \leq (-72.000 + 1000x_a + 1600x_b + 1000x_c + 1400x_d)\frac{1}{32.000} \\
&\lambda \leq (150\text{-}2x_a\text{-}4x_b\text{-}2x_c\text{-}3x_d)\frac{1}{40} \\
&\lambda \leq (2000\text{-}20x_a\text{-}20x_b\text{-}20x_c\text{-}20x_d)\frac{1}{100} \\
&\lambda \leq (-30 + x_a)\frac{1}{10} \\
&\qquad x_a, x_b, x_c, x_d \geq 0
\end{aligned}$$

operando:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } \lambda \\
&\lambda \leq -2{,}25 + 0{,}3125\ x_a + 0{,}05\ x_b + 0{,}03125\ x_c + 0{,}035\ x_d \\
&\lambda \leq 3{,}75\text{-}0{,}05x_a\text{-}0{,}1\ x_b\text{-}0{,}05\ x_c\text{-}0{,}075\ x_d \\
&\lambda \leq 20\text{-}0{,}2\ x_a\text{-}0{,}2\ x_b\text{-}0{,}2\ x_c\text{-}0{,}2\ x_d \\
&\lambda \leq -3 + 0{,}1\ x_a \\
&\qquad x_a, x_b, x_c, x_d \geq 0
\end{aligned}$$

Introduciendo las variables de holgura (h_i) y artificiales (a_i) correspondientes, el programa anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } \lambda \\
&0{,}03125\ x_a + 0{,}05\ x_b + 0{,}03125\ x_c + 0{,}035\ x_d - \lambda - h_1 + a_1 = 2{,}25 \\
&0{,}05\ x_a + 0{,}1\ x_b + 0{,}05\ x_c + 0{,}075\ x_d + \lambda + h_2 = 3{,}75 \\
&0{,}2\ x_a + 0{,}2\ x_b + 0{,}2\ x_c + 0{,}2\ x_d + \lambda + h_3 = 20 \\
&0{,}1\ x_a - \lambda - h_4 + a_2 = 3 \\
&x_a, x_b, x_c, x_d \geq 0
\end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo del Simplex obtenemos la siguiente solución:

$$x_a = 73{,}8464 \qquad h_1 = 0$$
$$x_b = 0 \qquad h_2 = 0$$
$$x_c = 0 \qquad h_3 = 5{,}17302$$
$$x_d = 0 \qquad h_4 = 4{,}32694$$

$\lambda = 0{,}0577$; $Z = 1000 \,.\, 73{,}8464 = 73.846{,}4$ u.m.

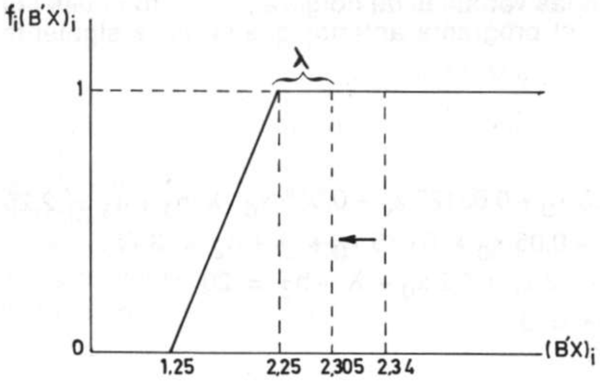
	Solución no borrosa	Solución borrosa
Objetivo	Z = 75.000 u.m.	Z = 73.846,4 u.m.
Restricción publicidad	150 u.m.	147,6928 u.m.
Restricción fuerza de venta	1500 u.m.	1476,928 u.m.
Restricción sobre x_a	75	73,8464

Analicemos graficamente la solución encontrada y comparémosla con la obtenida en el planteamiento original:

1) Función objetivo Z:

Solución P.L.	Solución P.L.B.
$x_a = 75$	$x_a = 73{,}8464$
$Z = 75.000$	$(B'X) = 0{,}03125 \,.\, 73{,}8464 = 2{,}305$
$Z^* = \dfrac{75.000}{32.000} = 2{,}34$	$\lambda \leq -2{,}25 + 2{,}305 = 0{,}0577$
	$Z = 1000 \,.\, 73{,}8464 = 73{,}846{,}4$ u.m.

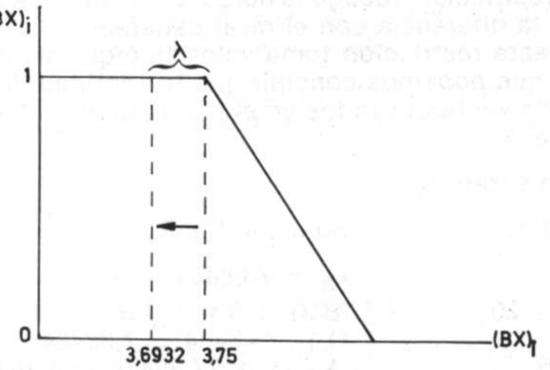
Z^* = Z normalizado; P.L. = Programación Lineal
P.L.B. = Programación Lineal Borrosa



Observamos que en la solución con P.L.B., el nivel alcanzado en el objetivo (B'X) es 2,305 (equivalente a 73,846,4 u.m.), existiendo, por lo tanto, una holgura positiva de 0,0577 (valor de λ) sobre el nivel 2,25 (equivalente a 72.000 u.m.) a partir del cual el volumen de beneficios se considera satisfactorio. En definitiva, aquí λ representa (en términos normalizados) la holgura con que el volumen de beneficios alcanzado supera el nivel satisfactorio.

2) Restricción de publicidad

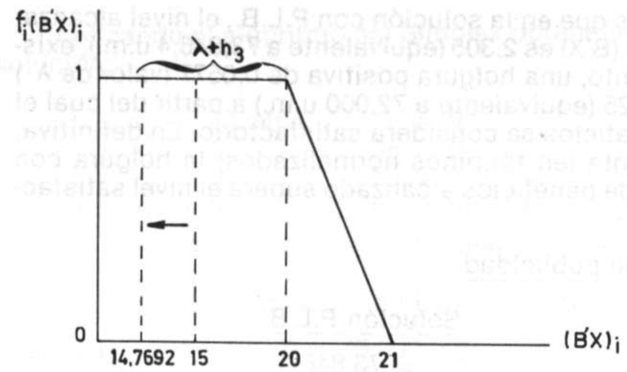
Solución P.L.	Solución P.L.B.
$x_a = 75$	$x_a = 73{,}8464$
$2\,x_a = 150 \leq 150$	$(B'X)_i = 0{,}05\,x_a = 0{,}05 \,.\, 73{,}8464 = 3{,}6932$
$\dfrac{150}{40} = 3{,}75$	$\lambda \leq 3{,}75 - 3{,}6932 = 0{,}0577$



En la restricción sobre gasto publicitario, y en el planteamiento de P.L.B., el nivel satisfactorio se situa en 3,75 (equivalente a 150 u.m.), aunque se admite una violación hasta 4,75 (equivalente a 190 u.m.). Aquí λ representa también la holgura sobre el nivel satisfactorio, y dado que toma el valor 0,0577, significa que esta restricción se situa en 3,6932 (equivalente a 147,728 u.m.), lo que indica que con esta solución no se agotan todos los recursos de publicidad.

3) Restricción de fuerza de venta

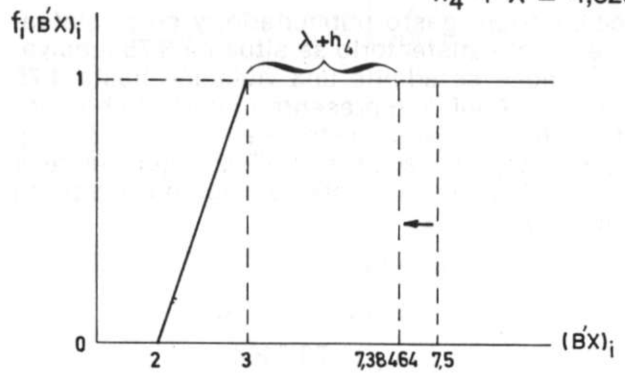
Solución P.L.	Solución P.L.B.
$x_a = 75$	$x_a = 73{,}8464$
$20\,x_a = 1500 \leq 2000$	$(B'X)_i = 0{,}2 \,.\, x_a = 0{,}2 \,.\, 73{,}8464 = 14{,}76928$
$\dfrac{1500}{100}$ 15	$\lambda \leq 20 - 14{,}76928 = 5{,}23072 = h_3 + \lambda = 5{,}17302 + 0{,}0577$



En la solución de P.L.B. el consumo de fuerza de venta se situa en 14,76928 (equivalente a 1476,928 u.m.), existiendo, por lo tanto, una holgura de 5,23072 sobre el nivel satisfactorio de 20 (equivalente a 2000 u.m.). La variable h_3 = 5,17302, correspondiente a esta restricción, recoge la holgura que sumada a λ = 0,0577 explica la diferencia con el nivel satisfactorio. En la solución de P.L. esta restricción toma valor 15 (equivalente a 1500 u.m.) con lo que podemos concluir que la cantidad de recursos de fuerza de venta utilizados en el planteamiento P.L.B. es menor que en el P.L.

4) Restricción sobre x_a

Solución P.L.	Solución P.L.B.
$x_a = 75$	$x_a = 73{,}8464$
$x_a = 75 \geq 20$	$(B'X) = 0{,}1 \cdot x_a =$
	$0{,}1 \cdot 73{,}8464 = 7{,}38464$
$\frac{75}{10} = 7{,}5$	$\lambda \leq -3 + 77{,}38464 = 4{,}38464 =$
	$h_4 + \lambda = 4{,}32694 + 0{,}0577$



El valor que alcanza esta restricción en P.L. de 7,5 (equivalente a 75 unidades). En el planteamiento de P.L.B. se considera que el nivel aceptable es a partir de 3 (equivalente a 30 unidades), tomando la restricción el valor 7,38464 (equivalente a 73,8464 unidades), y la diferencia de esta con el nivel satisfactorio se explica por el valor tomado por h_4 y λ.

En definitiva, la solución del planteamiento de P.L.B. satisface los deseos del empresario, pero no llega al nivel óptimo alcanzado por la solución de P.L. Esto es debido, logicamente, al hecho de admitir ciertas violaciones sobre las restricciones establecidas y a trabajar con un enfoque de "satisfacción" y no "optimizante". De cualquier forma, hemos de señalar que en la práctica estas situaciones comparativas, como la que hemos expuesto, no se presentan, pues el problema se resuelve, en virtud del ambiente en que se plantee y según el grado de información disponible, con una u otra técnica.

5. CONSIDERACIONES FINALES

El desarrollo de todo lo anterior nos ha permitido establecer las siguientes conclusiones:

1.- La P.L.B. se muestra como un instrumento de gran utilidad en la modelización de los problemas de decisión orientados hacia la optimización bajo restricciones cuando objetivos y/o restricciones (expresados por ecuaciones lineales) no se definen con exactitud.

2.- Tales objetivos y/o restricciones pueden definirse, entonces, como conjuntos borrosos, y como tales llevan implícitas sendas funciones de pertenencia.

3.- Es obvio que estas funciones de pertenencia suponen una aproximación a la función de utilidad del decisor.

4.- Frente al enfoque optimizante de la P.L., la P.L.B. utiliza un enfoque de "satisfacción".

5.- El lector habrá sin duda, detectado la similitud entre el enfoque de P.L.B. y el de la Programación por Objetivos (P.P.O.). En efecto, la P.L.B. puede considerarse como un caso de P.P.O., pero a nuestro juicio, la aproximación sobre la función de utilidad del decisor es mayor en aquella que en esta. En un próximo artículo esperamos poder desarrollar el análisis comparativo entre la P.L.B. y la P.P.O.

6.- Queremos resaltar que no se trata de enfrentar una técnica con otra: P.L. versus P.L.B., sino de aplicar la más adecuada en función del ambiente en el que se toma la decisión y de la información disponible sobre objetivos y restricciones.

7.- Por último, y en virtud de todo lo expuesto, pensamos que la P.L.B., y en general la Programación Matemática Borrosa, reclaman un sitio importante en el método operativo de la economía de la empresa.

6. NOTAS Y BIBLIOGRAFIA

(1) No obstante, cuando el ambiente se define como aleatorio puede hacerse uso de la denominada Programación Matemática Estocástica.

(2) Aunque hablamos de ambientes borrosos, sólo objetivos y restricciones seran, en este artículo, considerados como tales, mientrás que el sistema sobre el que se opere se considere no borroso.

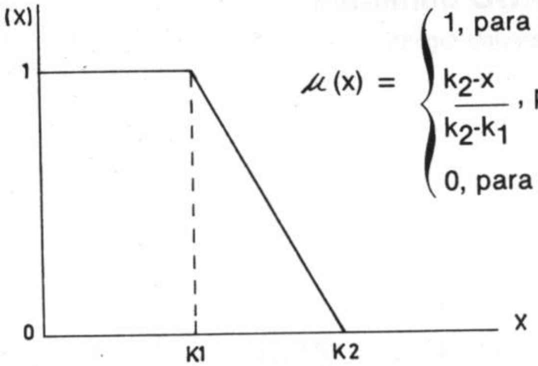
(3) A este respecto veáse: MARTIN ARMARIO, E.: "La Teoría de los Conjuntos Borrosos y la toma de Decisiones", III Coloquios sobre temas empresariales, Universidad Hispanoamericana Santa María de La Rábida, Publicaciones del C.U.R. (en prensa).

(4) Para una profundización en la Programación Matemática Borrososa puede consultarse:

- TANAKA, H.; OKUDA, T,; ASAI, K.: "On Fuzzy-Mathematical Programming", Journal of Cybernetics, vol. 3, n.° 4 1974, págs 37-46.
- DUBOIS, D.: "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications", Academic Press, San Francisco, 1980.

(5) En la primitiva teoría de conjuntos se establece que, dado un conjunto $A = \{x\}$, perteneciente al espacio universal E, se denomina función característica de A a aquella función $\mu_A(x)$ que toma valor 1 para todo elemento de A que satisfaga la siguiente condición: $x \not\in E$; y toma valor 0 para los valores de x E. Es decir, esta función establece si el elemento en cuestión pertenece o no al conjunto A. En la teoría de los conjuntos borrosos esa función se denomina de "pertenencia" y toma valores comprendidos entre 0 y 1. Así, un conjunto B será borroso si, para cualquier elemento del espacio universal E, se dá un intervalo de niveles de pertenencia, es decir, de la no pertenencia absoluta hasta la pertenencia nitida. Un ejemplo de este tipo de conjunto puede ser el siguiente: $B = \{(5, 0.8), (6, 1), (7, 0.5), (8, 0.1)\}$ donde observamos que los números 5,6,7 y 8 integran el conjunto B, pero cada uno de ellos pertenece al mismo con un grado de intensidad diferente; así, el 5 tiene una intensidad de pertenencia de 0.8, mientras que para el 7 es sólo de 0.5. En definitiva, todo conjunto borroso puede definirse, entonces, por una pareja de valores, tal y como se indica: $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in E\}$.

Aunque la función de pertenencia puede adoptar diversas formas, en este artículo utilizaremos esencialmente las lineales, uno de cuyos ejemplos puede ser el siguiente:



$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ para } 0 \leq x \leq k_1 \\ \dfrac{k_2 - x}{k_2 - k_1}, \text{ para } k_1 \leq x \leq k_2 \\ 0, \text{ para } x \geq k_2 \end{cases}$$

Para una ampliación de los conceptos de "conjunto borroso"y de "función de pertenencia" veáse:

- ZADEH, L.: "Fuzzy Sets", Information and Control, vol. 8, 1965, págs. 338-353.
- KAUFMANN, A.: "Introduction a la theorie des sous-ensembles flous, 1. Eleménte theoriques de base", Masson, Paris 1977.
- AZORIN POCH, F.: "Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la estadística", Instituto Nacional de Estadística, Madrid 1979.

(6) BELLMAN, R.E.: ZADEH, L.A.: "Decisión-Making a Fuzzy Environment", Mamagement Science vol. 17, n.° 4, 1970 págs 141-164.

(7) A este respecto puede consultarse:

- KICKERT, W.J.: "Fuzzy Theories on Decisión-Making", Eindhoven University of Technology, 1978.
- ZIMMERMANN, H.J.: "Descripction and Optimazation of Fuzzy Systems" International Journal General Systems, vol. 2 1976, págs 209-215.
- NEGOITA, C.U.; SULARIA, M.: "On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning", ECECSR Journal, vol. 1, 1976, págs 3-14.

(8) Hemos de señalar de nuevo, que en este planteamiento sólo consideramos como borroso el objetivo y las restricciones pero no el sistema sobre el que se actúa. Asimismo, los coeficientes de la matriz A podrian ser definidos como conjuntos borrosos, aunque en este caso no ha sido así.

(9) Veáse DYSON, R.G.: "Maximin Programming, Fuzzy Linear Programming and Multicriteria Decisión-Making", Journal of the Operational Research Society, vol. 31, n.° 3, Marzo 1980, pág. 263-267.