XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple un valor propio prescrito

Juan-Miguel Gracia[1], Francisco E. Velasco[1],

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad del País Vasco, Facultad de Farmacia, Paseo de la Universidad, 7, 01006 Vitoria-Gasteiz, Spain. E-mail:* `juanmiguel.gracia@ehu.es`, `franciscoenrique.velasco@ehu.es`.

Palabras clave: Kalman, Moore-Penrose, Schur, Wilkinson, continuidad y derivadas direccionales de valores singulares, controlable, observable

Resumen

Dadas cuatro matrices complejas A, B, C y D, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$, estudiamos el problema de Wilkinson generalizado: ¿Cuál es la distancia desde D al conjunto de matrices $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

tenga algún valor propio múltiple? En esta comunicación resolvemos este problema, salvo en un caso, y damos una conjetura sobre la solución completa.

1. Introducción

Utilizando ideas sobre el radio de estabilidad de matrices reales de Qiu y otros [8], Malyshev [6] logró una fórmula elegante que resolvió el problema de Wilkinson: Dada una matriz $G \in \mathbb{C}^{q\times q}$ con todos sus valores propios simples hallar la matriz más próxima a G, en la norma espectral, que tenga algún valor propio múltiple. Este problema esperó solución durante tres décadas.

Malyshev [6, Section 6] observó que su fórmula permitía hallar el valor crítico de flameo “flutter analysis” de una matriz $G \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Este análisis se utiliza en el estudio de vibraciones peligrosas de estructuras mecánicas tales como las alas de un avión o el tablero de un puente suspendido [9]. Si los valores propios de G son reales y simples, entonces todas las matrices reales suficientemente próximas a G tienen sus valores propios simples y reales. El valor crítico de flameo de la estructura representada por G viene dado por $\mathrm{f}_{\mathrm{crit}} := \min\{\|Y-G\| : Y \in \mathbb{R}^{q\times q}$ tiene un valor propio múltiple real$\}$, que coincide con

$$\mathrm{f}_{\mathrm{crit}} = \min_{x\in\mathbb{R}} \max_{t\geq 0} \sigma_{2q-1} \left(\begin{smallmatrix} xI-G & tI \\ 0 & xI-G \end{smallmatrix}\right).$$

A partir de $\mathrm{f}_{\mathrm{crit}}$ el valor propio real doble (genéricamente) de Y se bifurca en dos valores propios complejos con parte imaginaria no nula y simples.

En esta comunicación resolvemos el problema de Wilkinson cuando se perturban únicamente los elementos de una submatriz sudeste de G (perturbación estructurada), salvo en un caso especial. Supongamos que G está partida en la forma $G = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $q = n + m$.

Empezamos por la cuestión: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ ¿cuál es la distancia desde D al conjunto $\mathcal{M}$ de matrices $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que z_0 es valor propio múltiple de $G = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right)$ en el caso de que este conjunto no sea vacío? Para analizar en qué casos $\mathcal{M} = \emptyset$ utilizamos elementos de teoría de control (descomposición de Kalman, par controlable, par observable, forma canónica controladora). En el caso particular en el que z_0 recorra los números imaginarios puros y G sea una matriz estable, averiguamos la distancia mínima d de D a X tal que $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right)$ tiene un valor propio imaginario múltiple. Este valor d da un margen de seguridad que permite asegurar la acotación de todas las soluciones del sistema diferencial $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right) x$, siempre que $\|X - D\| < d$. Más pertinente aun sería resolver el problema de hallar la distancia desde D al conjunto de matrices X tales que $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right)$ tiene algún valor propio imaginario $\omega\mathrm{i}$ puro de índice $\nu(\omega\mathrm{i}) \geq 2$.

En [6] Malyshev dio la fórmula

$$\min_{\substack{Y\in\mathbb{C}^{q\times q} \\ \mathrm{m}(z_0,Y)\geq 2}} \|Y - G\| = \max_{t\geq 0} \sigma_{2q-1} \begin{pmatrix} z_0 I_q - G & tI_q \\ 0 & z_0 I_q - G \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde $G \in \mathbb{C}^{q\times q}$ es una matriz dada con valores propios simples y z_0 es un número complejo dado. Aquí σ_{2q-1} denota el $(2q-1)$-ésimo valor singular cuando estos valores están ordenados en sentido decreciente; la norma $\|\cdot\|$ es la espectral, y $\mathrm{m}(z_0, Y)$ denota la multiplicidad algebraica de z_0 como valor propio de Y.

En este trabajo vamos a estudiar un problema similar, pero perturbando una parte de la matriz. Concretamente, abordamos el problema siguiente: dadas cuatro matrices complejas A, B, C, D, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$, nos preguntamos por la distancia desde D al conjunto de matrices $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

tenga algún valor propio múltiple.

Vamos a concretar más este problema, e introducir algunas notaciones. Dada $G \in \mathbb{C}^{q\times q}$, denotamos por $\Lambda(G)$ su espectro y por $\Lambda_2(G)$ el conjunto de valores propios múltiples. Denotaremos por $L_{n,m}$ el producto cartesiano $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{m\times n}$. Dada una terna de matrices $\alpha := (A, B, C) \in L_{n,m}$, para toda $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ denotaremos por

$$M(\alpha, X) := \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}. \tag{2}$$

De ahora en adelante D será una matriz de $\mathbb{C}^{m\times m}$. Los problemas que vamos a abordar en este trabajo son los siguientes:

Problema 1. Hallar el mínimo

$$\min_{\substack{X\in\mathbb{C}^{m\times m}\\ \Lambda_2(M(\alpha,X))\neq\emptyset}} \|X-D\|, \tag{3}$$

siempre que el conjunto $\mathcal{M}_2(\alpha):=\{X\in\mathbb{C}^{m\times m}\,|\,\Lambda_2(M(\alpha,X))\neq\emptyset\}$ no sea vacío.

Problema 2. Dado $z_0\in\mathbb{C}$ hallar el mínimo

$$\min_{\substack{X\in\mathbb{C}^{m\times m}\\ \mathrm{m}(z_0,M(\alpha,X))\geq 2}} \|X-D\|, \tag{4}$$

siempre que el conjunto $\mathcal{M}_2(z_0,\alpha):=\{X\in\mathbb{C}^{m\times m}\mid \mathrm{m}(z_0,M(\alpha,X))\geq 2\}$ no sea vacío.

A la hora de abordar el Problema 2, podemos suponer que $z_0=0$. Para el Problema 1, una primera cuestión que surge es si el conjunto $\mathcal{M}_2(\alpha)$ es no vacío.

2. Existencia del espectro de multiplicidad ≥ 2

Definimos el conjunto

$$\hat{\Lambda}_2(\alpha):=\bigcup_{X\in\mathbb{C}^{m\times m}}\Lambda_2(M(\alpha,X)),$$

que llamaremos espectro extendido múltiple de la terna de matrices α.

Definición 1. Dadas dos matrices $N_1,N_2\in\mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$, diremos que son (n,m)-semejantes si existen matrices $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $Q\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ tales que

$$N_1=\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}N_2\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}^{-1}.$$

Lema 1. *Sean $\alpha,\alpha'\in L_{n,m}$. Si las matrices $M(\alpha,0)$ y $M(\alpha',0)$ son (n,m)-semejantes, entonces $\hat{\Lambda}_2(\alpha)=\hat{\Lambda}_2(\alpha')$.*

Lema 2. *Supongamos que B y C son matrices no nulas. Entonces, la matriz $M(\alpha,0)$ es (n,m)-semejante, con matrices de paso unitarias, a una matriz de la forma*

$$\left(\begin{array}{cccc|c}A_{11}&0&0&0&0\\A_{21}&A_{22}&0&0&0\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}&B_3\\A_{41}&A_{42}&0&A_{44}&B_4\\\hline C_1&0&0&C_4&0\end{array}\right), \tag{5}$$

siendo

$$\left(\begin{array}{cc|c}A_{33}&A_{34}&B_3\\0&A_{44}&B_4\end{array}\right)$$

un par controlable. Además, si $C_i\neq 0$, el par (C_i,A_{ii}) es observable, $i=1,4$. Por el contrario, si $C_i=0$, entonces en la forma (5) eliminamos los bloques $(i,k),(k,i)$, $i=1,2,3,4$.

Un resultado sobre el conjunto $\hat{\Lambda}_2(\alpha)$, es el siguiente:

Teorema 3. *Sea una terna $\alpha = (A, B, C) \in L_{n,m}$ en la forma* (5). *Entonces:*
(i) *Si $m = 1$, el conjunto $\hat{\Lambda}_2(\alpha)$ es no vacío y finito.*
(ii) *Si $m > 1$, $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A_{44}) \subset \hat{\Lambda}_2(\alpha)$.*

3. Resultados auxiliares

Un primer resultado básico, utilizado en nuestro trabajo, es el siguiente:

Teorema 4. *Dada una terna $\alpha = (\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}) \in L_{n,m}$ y $\mathsf{D} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, denotemos por*

$$\rho := \operatorname{rg}[\mathsf{A}, \mathsf{B}] + \operatorname{rg}\begin{bmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{C} \end{bmatrix} - \operatorname{rg} \mathsf{A}.$$

Entonces $\rho \leq \operatorname{rg} M(\alpha, \mathsf{X})$, para toda matriz $\mathsf{X} \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Ahora sean $\mathsf{M} := (I - \mathsf{A}\mathsf{A}^\dagger)\mathsf{B}$ y $\mathsf{N} := \mathsf{C}(I - \mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})$. Entonces, para toda $\mathsf{X} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\operatorname{rg} M(\alpha, \mathsf{X}) = \rho + \operatorname{rg} S(\mathsf{X})$, donde

$$S(\mathsf{X}) := (I - \mathsf{N}\mathsf{N}^\dagger)(\mathsf{X} - \mathsf{C}\mathsf{A}^\dagger\mathsf{B})(I - \mathsf{M}^\dagger\mathsf{M}). \tag{6}$$

Además, para todo entero r tal que $\rho \leq r < \operatorname{rg} M(\alpha, \mathsf{D})$, se cumple

$$\text{mín}\{\|\mathsf{X} - \mathsf{D}\| : \ \mathsf{X} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \ \operatorname{rg}\ M(\alpha, \mathsf{X}) \leq r\} = \sigma_{p+1}\big(S(\mathsf{D})\big),$$

donde $p = r - \rho$.

Por $Z^\dagger$ se denota la inversa Moore-Penrose de una matriz $Z \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La demostración del Teorema 4 puede verse en [7, Theorem 19,(8.1), (8.2) and (8.6)], [2, Theorem 3], [11, Theorem 2.1] y Theorem 6.3.7, pág. 102, del libro [1]. También necesitamos resultados sobre derivadas direccionales de valores singulares de matrices que dependen de varias variables reales.

Definición 2. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ abierto y $d \in \mathbb{R}^p$, $\|d\|_2 = 1$. Sea la función $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Se llama *derivada direccional* de f en el punto $x_0 \in \Omega$ respecto de d al límite

$$f'(x_0, d) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}.$$

siempre que exista.

Sea la función $F \colon \Omega \to \mathbb{C}^{m\times n}$ de clase C^1. Para cada $x \in \Omega$, sean

$$s_1(x) := \sigma_1\big(F(x)\big) \geq \cdots \geq s_q(x) := \sigma_q\big(F(x)\big), \text{ con } q := \text{mín}(m, n),$$

los valores singulares de $F(x)$. Supongamos que

$$s_{k-i_k}(x_0) > \overbrace{s_{k-i_k+1}(x_0) = \cdots = s_k(x_0)}^{i_k} = \overbrace{s_{k+1}(x_0) = \cdots = s_{k+j_k}(x_0)}^{j_k} > s_{k+j_k+1}(x_0)$$

con $r_k = i_k + j_k$ la multiplicidad del valor singular $s_k(x_0)$. Sean $U_2 := [u_{k-i_k+1}, \dots, u_{k+j_k}] \in \mathbb{C}^{m\times r_k}$ y $V_2 := [v_{k-i_k+1}, \dots, v_{k+j_k}] \in \mathbb{C}^{n\times r_k}$ matrices cuyas columnas son pares de vectores singulares de $F(x_0)$ para $s_k(x_0)$. La *parte real* de una matriz $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se define por $\operatorname{Re}(G) := (G + G^*)/2$; la matrix $\operatorname{Re}(G)$ es hermítica.

Teorema 5 (Hiriart-Urruty and Ye, Sun, Lippert). *Para cada $k \in \{1, \ldots, q\}$, $d = (d_1, \ldots, d_p) \in \mathbb{R}^p$ unitario, $s'_k(x_0, d) = \mu_{i_k}$, con $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{i_k} \geq \cdots \geq \mu_{r_k}$ los valores propios de la matriz*

$$\operatorname{Re}\left[U_2^* \left(\sum_{j=1}^{p} d_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0)\right) V_2\right].$$

Lema 6 ([6]). *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $F : \Omega \to \mathbb{C}^{m\times n}$ una función analítica en Ω. Si la función $\sigma_i\big(F(t)\big)$ tiene un máximo local (o mínimo) en $t_0 \in \Omega$, entonces existe un par de vectores singulares $u \in \mathbb{C}^{m\times 1}$, $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ de $F(t_0)$ asociados a $\sigma_i\big(F(t_0)\big)$ tales que*

$$\operatorname{Re}\left(u^* \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t_0) v\right) = 0.$$

4. Cota inferior del mínimo (4)

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 0$. Consideremos la terna $\alpha = (A, B, C) \in L_{n,m}$ y $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Sea X tal que $\mathrm{m}(z_0, M(\alpha, X)) \geq 2$. Entonces, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} A & tI_n & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ \hline C & 0 & X & tI_m \\ 0 & C & 0 & X \end{array}\right) \leq 2(n+m) - 2. \tag{7}$$

Ahora, utilizando las notaciones del Teorema 4, consideremos

$$\rho(t) := \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} A & tI_n & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \end{array}\right) + \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc} A & tI_n \\ 0 & A \\ \hline C & 0 \\ 0 & C \end{array}\right) - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

$$p(t) := 2n + 2m - 2 - \rho(t), \tag{8}$$

$$M(t) := \left(I_{2n} - \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^{\dagger}\right)\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$N(t) := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\left(I_{2n} - \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$$

$$S_2(t) := \big(I_{2m} - N(t)N(t)^{\dagger}\big)\times \\ \left(\begin{pmatrix} D & tI_m \\ 0 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)\big(I_{2m} - M(t)^{\dagger}M(t)\big) \tag{9}$$

Con estas notaciones se tiene:

Proposición 7 (Acotación inferior de (4)).

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sigma_{p(t)+1}\big(S_2(t)\big) \leq \min_{X\in\mathcal{M}_2(0,\alpha)} \|X-D\|.$$

Conjetura 8.

$$\min_{\substack{X\in\mathbb{C}^{m\times m}\\ \mathrm{m}(0,M(\alpha,X))\geq 2}} \|X-D\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sigma_{p(t)+1}\big(S_2(t)\big), \tag{10}$$

donde

$$\sigma_j\big(S_2(t)\big) := \begin{cases} \infty & \text{si } j<1,\\ 0 & \text{si } j>2m. \end{cases}$$

Si no existe ninguna matriz $X\in\mathbb{C}^{m\times m}$ tal que $\mathrm{m}(z_0, M(\alpha,X))\geq 2$, podemos interpretar que $\min \|X-D\| = \infty$.

5. Caso $0\notin\Lambda(A)$

En este caso, la Conjetura 8 es cierta. Además, como $0\notin\Lambda(A)$, de (8) obtenemos inmediatamente que $p(t)+1=2m-1$. Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 9. *Supongamos que* 0 *no es valor propio de* A*. Entonces*

$$\min_{X\in\mathcal{M}_2(0,\alpha)} \|X-D\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sigma_{2m-1}\big(S_2(t)\big). \tag{11}$$

Como $0\notin\Lambda(A)$, denotando por $\mathcal{M} := D-CA^{-1}B$ y $\mathcal{N} := I_m + CA^{-2}B$, de (9) resulta

$$S_2(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N}\\ 0 & \mathcal{M}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

En la demostración del Teorema 9, el caso $m=1$ se puede hacer directamente. Para $m>1$ distinguimos tres casos: (1) cuando el supremo se alcanza en un $t_0>0$; (2) cuando sólo se alcanza en $t_0=0$; (3) cuando no se alcanza en ningún $t\in\mathbb{R}$. En este caso (3) $\operatorname{rg}\mathcal{N}=1$, además

$$\ell := \sup_{t\in\mathbb{R}} \sigma_{2m-1}\big(S_2(t)\big) < \infty.$$

El valor ℓ lo podemos determinar así: como $\operatorname{rg}\mathcal{N}=1$ existen matrices unitarias U,V tales que

$$U^*\mathcal{N}V = \begin{pmatrix} s_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, s_1>0.$$

Sean

$$U^*\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^1_{11} & \mathcal{M}^1_{12}\\ \mathcal{M}^1_{21} & \mathcal{M}^1_{22}\end{pmatrix},\quad \mathcal{M}V = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^2_{11} & \mathcal{M}^2_{12}\\ \mathcal{M}^2_{21} & \mathcal{M}^2_{22}\end{pmatrix},$$

con $\mathcal{M}^1_{11}, \mathcal{M}^2_{11}\in\mathbb{C}^{1\times 1}$. Entonces

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \sigma_{2m-1}\big(S_2(t)\big) = \sigma_{2m-2}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}^1_{21} & \mathcal{M}^1_{22}\\ \mathcal{M}^2_{12} & 0 & 0\\ \mathcal{M}^2_{22} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Caso $0 \in \Lambda(A)$

Para esta situación, vamos a considerar varias opciones:

6.1. Caso $B = 0$ ó $C = 0$.

Para este caso, la Conjetura 8 es cierta, además la distancia es 0.

6.2. Caso $B \neq 0$ y $C \neq 0$.

Por el Lema 2, podemos suponer que la terna (A, B, C) está en la forma (5). Por simplificación, vamos a denotar por

$$\tilde{A} := \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, A_{33}), \qquad A_4 := A_{44} \in \mathbb{C}^{n_4 \times n_4}.$$

Ahora, consideramos los casos siguientes:

$$\begin{array}{l} \text{(I) } 0 \in \Lambda_2(\tilde{A}) \\ \text{(II) } 0 \notin \Lambda_2(\tilde{A}),\ C_4 = 0, \\ \text{(III) } 0 \notin \Lambda_2(\tilde{A}),\ C_4 \neq 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{(III-a) } 0 \in \Lambda(\tilde{A})/\Lambda_2(\tilde{A}) \\ \text{(III-b) } 0 \notin \Lambda(\tilde{A}),\ m = 1 \\ \text{(III-c) } 0 \notin \Lambda(\tilde{A}),\ m > 1. \end{array} \right. \end{array}$$

6.2.1. I.- $0 \in \Lambda_2(\tilde{A})$

La Conjetura 8 es cierta, concretamente la distancia es 0 .

6.2.2. II.- $0 \notin \Lambda_2(\tilde{A})$, $C_4 = 0$.

También para este caso la Conjetura 8 es cierta. Además, la distancia es $\sigma_m(D)$.

6.2.3. III-a.- $C_4 \neq 0$, $0 \in \Lambda(\tilde{A})/\Lambda_2(\tilde{A})$

Denotando por $\alpha_4 = (A_4, B_4, C_4)$, vamos a considerar la matriz $M(\alpha_4, D)$. Ahora, tenemos tres opciones:

$\underline{\operatorname{rg} M(\alpha_4, D) < n_4 + m}$: en este caso la Conjetura 8 es cierta, y la distancia es 0.

Supongamos ahora que $\operatorname{rg} \mathsf{G}_D = n_4 + m$. Como (A_4, B_4) es controlable $\nu(A_4) = \dim \ker(A_4) \leq m$.

$\underline{\text{Si } \nu(A_4) = m}$: la distancia es infinita, pero la Conjetura 8 no está probada.

$\underline{\text{Si } \nu(A_4) < m}$: el Problema 2 se resuelve en téminos del Teorema 4, mas la Conjetura 8 no está probada.

6.2.4. III-b.- $C_4 \neq 0$, $0 \notin \Lambda(\tilde{A})$, $m = 1$

Para este caso la Conjetura 8 es cierta, y la distancia es infinita.

6.2.5. III-c.- $C_4 \neq 0$, $0 \notin \Lambda(\tilde{A})\, m > 1$

Como (A_4, B_4) es controlable, entonces $\nu(A_4) \leq m$. Este caso no está resuelto, aunque se pueden avanzar algunos hechos, aplicando el Teorema 4:

- Si $\nu(A_4) = m$, entonces la distancia es infinita.
- Si $\nu(A_4) \leq m - 2$, la distancia es finita.
- Si $\nu(A_4) = m - 1$, la distancia puede ser finita o infinita. Dos ejemplos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right) \text{ infinita ; } \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \text{ finita , } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agradecimientos

Este material fue presentado en seminarios del Grupo de Álgebra Lineal de la Universidad del País Vasco, a cuyos miembros agradecemos el interés prestado y sus comentarios. Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto MTM2004–06389–CO2–01.

Referencias

[1] S. L. Campbell and C. D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations.* Pitman, London, 1979.

[2] J. Demmel. The smallest perturbation of a submatrix which lowers the rank and constrained total least squares problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1):199–206, 1987. .

[3] J.-M. Gracia. Nearest matrix with two prescribed eigenvalues. *Linear Algebra Appl.*, 401:277–294, 2005.

[4] J. B. Hiriart-Urruty and D. Ye. Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix. *Numer. Math.*, 70:45–72, 1995.

[5] Ross A. Lippert. Fixing two eigenvalues by a minimal perturbation. *Linear Algebra Appl.*, 406: 177–200, 2005.

[6] A.-N. Malyshev. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues. *Numer. Math.*, 83(3):443–454, 1999.

[7] G. Marsaglia and G. P. Styan. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 2:269–292, 1974.

[8] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young, J.C. Doyle. *A formula for computation of the real stability radius.* Automatica 31 (6) (1995), 879–890.

[9] A.P. Seyranian and A.A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications.* World Scientific, Sinpapore, 2003.

[10] Ji-Guan Sun. Sensitivity analysis of zero singular values and multiple singular values. *J. Comput. Math.*, 6(4)70:325–335, October 1988.

[11] M. Wei. Perturbation theory for the Eckart-Young-Mirsky theorem and the constrained total least squares problem. *Linear Algebra Appl.*, 280:267–287, 1998.

[12] J. H. Wilkinson. Sensitivity of eigenvalues. *Utilitas Mathematica*, 25:5–76, 1984.