XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–5)

Subsistemas singulares de un sistema lineal. Una aproximación a los subespacios cuasiinvariantes

Xavier Puerta

IOC, Univ. Politécnica de Catalunya E-mail: francisco.javier.puerta@upc.edu

Palabras clave: Sistema de control, sistema singular, subespacio (A,B)-invariante

Resumen

Dado un sistema lineal $\dot{x} = Ax + By$, se definen los subespacios cuasi-(A, B)-invariantes como aquellos tales que para cada condición inicial en el subespacio, existe un control $u(t)$ que hace que la correspondiente trayectoria, pertenezca enteramente en un entorno arbitrariamente próximo al subespacio. En este trabajo caracterizamos los subespacios cuasi-(A, B)-invariantes a través de existencia de un sistema singular, que puede interpretarse como la restricción del sistema definido por (A, B) al subespacio, pero en el cual se admiten distribuciones como 'funciones' de control.

1. Preliminares

Consideraremos a lo largo de esta nota sistemas lineales de la forma

$$E\dot{x} = Ax + Bu$$

donde las matrices A y E son $n \times n$ y B, $n \times m$. Diremos que el sistema es singular si E es singular y regular, si E es invertible, en cuyo caso, supondremos que es la matriz identidad (basta con multiplicar por la izquierda la ecuación anterior por la inversa de E).

Para sistemas regulares ($E = I$) se tienen las siguientes definiciones:

Definición 1 Un subespacio $\mathcal{S}$ del espacio de estados, R^n es (A, B)-*invariante* si para toda condición inicial $x_0 \in \mathcal{S}$ existe una función de control $u(t)$ tal que la correspondiente solución del sistema permanece en $\mathcal{S}$.

Definición 2 Un subespacio $\mathcal{S}$ del espacio de estados, R^n es *cuasi* (A, B) *-invariante* si para toda condición inicial $x_0 \in \mathcal{S}$ existe una función de control $u(t)$ tal que la correspondiente solución del sistema permanece arbitrariamente cercana a $\mathcal{S}$ (a menor distancia de $\mathcal{S}$ que un valor arbitrario prefijado).

Los subespacios (A, B)-invariantes se caracterizan por definir un subsistema lineal que viene dado por las ecuaciones diferenciales que verifican las trayectorias que pertenecen al mismo (vease, por ejemplo [2],[1])

Una caracterización algebraica simple de los subespacios (A, B)-invariantes viene dada a través de la siguiente proposición:

Proposición 1 $\mathcal{S}$ es (A, B)-invariante si y solo si $A(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}+\mathrm{Im}B$.

Tanto en la caracterización de los subespacios (A, B)-invariantes como en la descripción del conjunto de estos, juega un papel crucial el concepto de *restricción* del sistema al subespacio. Tal restricción se basa en la existencia de una matriz $m \times n$ F, llamada de *matriz de feedback*, con la propiedad de que $\mathcal{S}$ es invariante por $A + BF$.

Concretamente, se tiene la siguiente proposición

Proposición 2 $\mathcal{S}$ es (A, B)-invariante si y solo si $\mathcal{S}$ es la imagen de una matriz $n \times d$ de rango completo X, de forma que existan matrices $F, T, \overline{A}, \overline{B}$ de dimensiones adecuadas, haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R^{n+m} & \xrightarrow{(AB)} & R^n \\ \uparrow \binom{X0}{FT} & & \uparrow X \\ R^{d+m} & \xrightarrow{(\overline{AB})} & R^d \end{array}$$

Además, la pareja $(\overline{AB})$ depende únicamente de $\mathcal{S}$, módulo la equivalencia de feedback y el sistema que define lo llamamos la *restricción* de (A, B) a $\mathcal{S}$.

En el caso de subaspacios cuasi (A, B)-invariantes, tal restricción no existe, y ello es motivo de que no existan caracterizaciones para los subespacios cuasi (A, B)-invariantes similares a la dada en la proposición 1 ni de que se conozca la estructura geométrica del conjunto de estos.

El objetivo del siguiente apartado es definir una restricción a un subespacio cuasi (A, B)-invariante en términos de un sistema singular. Para ello necesitamos la siguiente generalización de la equivalencia de feedback para sistemas singulares

Definición 3 Dos sistemas singulares definidos por ternas de matrices (E, A, B) y $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B})$ son feedback equivalentes si existen matrices S, F, T, P, donde S, T, P son invertibles haciendo conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} R^{n+m} & \xrightarrow{(AB)} & R^n \\ \uparrow \binom{S0}{FT} & & \uparrow P \\ R^{n+m} & \xrightarrow{(\overline{AB})} & R^n \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{E} & R^n \\ \uparrow S & & \uparrow P \\ R^n & \xrightarrow{\overline{E}} & R^n \end{array}$$

2. Restricción singular de un subespacio cuasi (A, B)-invariante

En este apartado demostramos la siguiente generalización de la proposición 2

Teorema 1 $\mathcal{S}$ es cuasi (A, B)-invariante si y solo si $\mathcal{S}$ es la imagen de una matriz $n \times d$ de rango completo X, de forma que existan matrices $F, T, \overline{E}, \overline{A}, \overline{B}$ de dimensiones adecuadas, haciendo conmutar el diagrama

$$
(1)\qquad \begin{array}{ccc}
R^{n+m} & \stackrel{(AB)}{\longrightarrow} & R^{n} \\
\uparrow \begin{pmatrix} X\overline{E} & 0 \\ F & T \end{pmatrix} & & \uparrow X \\
R^{d+m} & \stackrel{(\overline{A}\overline{B})}{\longrightarrow} & R^{d}
\end{array}
$$

Además, la terna $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B})$ depende únicamente de $\mathcal{S}$, módulo la equivalencia de feedback (definición 3) y el sistema singular que define lo llamamos la *restricción* del sistema definido por (A, B) a $\mathcal{S}$.

Demostración: La unicidad de la restricción salvo equivalencia de feedback depende de la siguiente observación

Observación 1 La existencia del diagrama conmutativo (1) es equivalente a la existencia de la pareja de diagramas conmutativos

$$
\begin{array}{ccc}
R^{n+m} & \stackrel{(AB)}{\longrightarrow} & R^{n} \\
\uparrow \binom{S0}{FT} & & \uparrow X \\
R^{d+m} & \stackrel{(\overline{A}\overline{B})}{\longrightarrow} & R^{d}
\end{array}
\qquad y \qquad
\begin{array}{ccc}
R^{n} & \stackrel{I}{\longrightarrow} & R^{n} \\
\uparrow S & & \uparrow X \\
R^{d} & \stackrel{\overline{E}}{\longrightarrow} & R^{d}
\end{array}
$$

para una matiriz S adecuada.

Por otro lado, la conmutatividad del diagrama (1) equivale a las ecuaciones $AX\overline{E} + BF = X\overline{A}$ y $BT = X\overline{B}$. Ahora bien, la segunda ecuación tiene siempre solución (las columnas de BT generan Im$B\cap$ImX, y $\overline{B}$ son las componentes de dichas columnas respecto las columnas de X). Por tanto, la proposición queda probada a partir del lema siguiente.

Lema 1 ImX es cuasi (A, B)-invariante si y solo si la ecuación $AX\overline{E} + BF = X\overline{A}$ tiene solución para ciertas matrices $F, T, \overline{E}, \overline{A}, \overline{B}$.

Demostración: La demostración se basa en dos resultados sobre observadores, que pueden encontrarse en [3].

1. Existe un observador parcial para una función lineal V del espacio de estados del sistema $\dot{x} = Fx + Gu$, $y = Hx$ si y solo si Ker$V$ es cuasi (H, F)-invariante (noción dual de la dada en la definición 2).

2. El sistema $E\dot{v} = Kv + Ly + Mu$ es un observador parcial de la función V (es decir, $v(t)$ tiende asintóticamente a $Vx(t)$ si $y(t)$ y $u(t)$ son la salida y la entrada del sistema $\dot{x} = Fx + Gu$, $y = Hx$) si y solo si se verifican las ecuaciones $EVG - KV = LH$ y $M = EVG$

En efecto, supongamos que se verifica la ecuación $AX\overline{E} + BF = X\overline{A}$. Definmos $M = \overline{E}'X'A'$. aplicando 2) $\overline{E}'\dot{v} = \overline{A}'v - F'y + Mv$ es un observador parcial de $\overline{x} = A'x + Mu$, $y = B'x$. Aplicando ahora 1), KerX' es cuasi (B', A')-invariante, y por lo tanto, ImX cuasi (A, B)-invariante.

El recíproco se demuestra de forma análoga.

3. Extensión asociada a un subespacio cuasi (A, B)-invariante

Una realimentación dinámica del sistema definido por la pareja (A, B) puede describirse formalmente como una realimentación estática de un sistema obtenido a partir del anterior añadiendo nuevas variables de estado (variables externas), con las cuales podemos realimentar la entrada del sistema original.

De forma intuitiva, un subespacio cuasi (A, B)-invariante es invariante por un sistema obtenido a partir del original mediante una realimentación que contemple ganancias 'infinitas'. Tal realimentación la describiremos formalmente como una realimentación estática de un sistema singular obtenido ampliando el original con nuevas variables de estado. De forma precisa, introducimos la siguiente definición:

Definición 4 El sistema definido por las matrices $(n+n')\times(n+n')$, $(n+n')\times(n+n')$, $(n+n')\times(m+m')$ de la terna $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$, es una *extensión* del definido por (A, B) si Existen matrices X, Y, F_1, F_2, T de dimensiones apropiadas haciendo conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} R^{n+n'+m+m'} & \overset{(\mathcal{A},\mathcal{B})}{\longrightarrow} & R^{n+n'} \\ \downarrow \begin{pmatrix} I & Y & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & T_1 & T_2 \end{pmatrix} & & \downarrow (IX) \\ R^{n+m} & \overset{(AB)}{\longrightarrow} & R^n \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} R^{n+n'} & \overset{\mathcal{E}}{\longrightarrow} & R^{n+n'} \\ \downarrow (IY) & & \downarrow (IX) \\ R^n & \overset{I}{\longrightarrow} & R^n \end{array}$$

En esta sección probamos el siguiente resultado.

Teorema 2 $\mathcal{S} \in R^n$ es quasi (A, B)-invariante si y solo si existe una extensión $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ de (A, B) con matriz de feedback $\mathcal{F} = (F_1 F_2)$, tal que $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{S}') \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})^{-1}(\mathcal{S}')$, con $\mathcal{S}' = \mathrm{Im}\binom{X}{I}$.

Observación 2 Si la extensión en no singular $(\mathcal{E} = I)$, $\mathcal{S}' \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})^{-1}(\mathcal{S}')$ equivale a $(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}'$, esto es, $\mathcal{S}'$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-invariante. Puede probarse que, entonces, $\mathcal{S}$ es (A, B)-invariante y que, por tanto, puede tomarse la estensión trivial (I, A, B).

Demostración del teorema 2: Supongamos que una extensión $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ de (A, B) con matriz de feedback $\mathcal{F} = (F_1 F_2)$, tal que $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{S}') \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})^{-1}(\mathcal{S}')$. Puesto que $\mathcal{S} = (IX)\mathcal{S}'$, aplicando el teorema 1 tenemos que $\mathcal{S}$ es cuasi (A, B)-invariante.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{S}$ es quasi (A, B)-invariante. Entonces, aplicando el teorema 1, existen matrices $F, T, \overline{E}, \overline{A}, \overline{B}$ haciendo conmutar el diagrama (1). Definimos

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \overline{B} \end{pmatrix} y \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \overline{E} \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que tomando la proyección (IX) con $\mathrm{Im}X = \mathcal{S}$, $Y = X\overline{E}$, $F_1 = 0, F_2 = F, T_1 = I$ y $T_2 = T$, la terna anterior es una extensión de (A, B).

Asímismo, se comprueba que $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{S}') = \mathrm{Im}\binom{X\overline{E}}{I}$. Finalmente, se prueba aplicando el lema 1 que $\mathrm{Im}\mathcal{A}\binom{X\overline{E}}{I} \subset \mathcal{S}'$

Referencias

[1] J.Ferrer, F.Puerta, X.Puerta, *Differentiable structure of the set of controllable (A,B)-invariant subspaces* Lin.Alg.Appl. v.275-276 pp.161-177 , 1998.

[2] F.Puerta, X.Puerta, *On the geometry of the set of controllability subspaces of a pair (A,B)* Lin.Alg.Appl. v.351-352 pp.585-599, 2002

[3] J.C.Willems *Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design - Part II* IEEE Transactions on Automatic control, AC-27(5):1071-1084, 1982