XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Realizaciones positivas de determinados sistemas singulares

R. Cantó[1], B. Ricarte[1], A.M. Urbano[1]

[1] *Institut de Matemàtica Multidisciplinar, Universidad Politécnica de Valencia, E-46022 Valencia.*
E-mails: rcanto@mat.upv.es, bearibe@mat.upv.es, amurbano@mat.upv.es.

Palabras clave: Sistemas singulares de control, realizaciones positivas, propiedad normal.

Resumen

En este trabajo se estudian los sistemas singulares lineales de control a partir de las propiedades obtenidas para los sistemas estándares. Se obtienen realizaciones positivas de ciertas matrices de trasferencia con polos reales, analizando las condiciones para que la dimensión de la realización positiva sea minimal.

1. Introducción

Los *sistemas generalizados* lineales de control [9] se pueden representar mediante un modelo espacio-estado, que relaciona las tres variables del sistema: entradas, estados y salidas. Así, en tiempo discreto, un sistema invariante con n estados, s entradas y r salidas viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Ex(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) + Du(k) \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^s$ el vector de entrada o control, $y(k) \in \mathbb{R}^r$ el vector de salida y E, A, B, C y D son matrices reales de tamaños $n \times n$, $n \times n$, $n \times s$, $r \times n$ y $r \times s$, respectivamente. Si $E = I$, el sistema se llama *estándar*, si E es no invertible el sistema se llama *singular*. Denotaremos el sistema por (E, A, B, C, D). En el caso en que D sea la matriz nula, $D = 0$, el sistema se denota por (E, A, B, C).

Otra manera de representar estos sistemas es a partir de la relación existente entre las entradas y las salidas. El inconveniente de este modelo es que sólo describe la dinámica del sistema y no su estructura interna, que viene dada por un modelo espacio-estado. No obstante, es posible averiguar una representación espacio-estado de un sistema a partir de su modelo entrada-salida. A la determinación de una descripción interna del sistema a partir de un modelo entrada-salida se le denomina realización.

En el modelo entrada-salida, la relación existente entre las entradas y las salidas viene dada por una matriz racional, llamada matriz de transferencia, que relaciona la transformada $\mathcal{Z}$ de las entradas y las salidas del sistema. Dada una matriz de transferencia $G(z) \in \mathbb{R}^{r\times s}(z)$, se llama realización de $G(z)$ al conjunto de matrices (E, A, B, C, D) que satisface

$$G(z) = C(zE - A)^{-1}B + D$$

Se llama dimensión de la realización al tamaño de la matriz A. La realización será minimal si es la de mínima dimensión.

Dada una matriz de transferencia $G(z)$, encontrar una realización es trivial. El problema viene cuando imponemos ciertas restricciones como que la realización represente a un sistema positivo ya que, en este caso, la realización minimal puede ser de dimensión mayor que el orden de la matriz de transferencia [1].

Basándonos en resultados previos obtenidos para sistemas estándares [2, 3, 4, 7, 8, 10], en este trabajo consideramos sistemas singulares y pretendemos obtener realizaciones positivas de ciertas matrices de trasferencia con polos reales. Además, en determinados casos, establecemos condiciones para que la dimensión de la realización positiva (E, A, B, C, D) sea minimal.

2. Sistemas equivalentes

Dadas dos matrices $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el par (E, A) se dice que es *regular* si existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\det(\alpha E + A) \neq 0$. La solución de un sistema generalizado de control (1), siempre que se cumpla la condición de regularidad, puede obtenerse a partir de la inversa de Drazin de las matrices de estados [6]. La siguiente proposición caracteriza cuándo un par de matrices (E, A) es regular [6].

Proposición 1 *Dadas dos matrices $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el par (E, A) es regular si y sólo si existen dos matrices no singulares P y Q tales que*

$$QEP = \mathrm{diag}(I_{n_1}, N)$$
$$QAP = \mathrm{diag}(A_1, I_{n_2})$$

donde $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ y $N \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ es nilpotente.

Dos sistemas (E, A, B, C) y $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ son *equivalentes* si existen dos matrices no singulares P y Q tales que al utilizar la relación $x = P\tilde{x}$ se obtiene que

$$QEP = \tilde{E} \quad QAP = \tilde{A} \quad QB = \tilde{B} \quad CP = \tilde{C}.$$

Dado un sistema (E, A, B, C), siempre que se cumpla que el par (E, A) sea regular, existen dos matrices no singulares P y Q que lo transforman en un sistema equivalente $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ mediante

$$\tilde{E} = QEP = \mathrm{diag}(I_{n_1}, N)$$
$$\tilde{A} = QAP = \mathrm{diag}(A_1, I_{n_2})$$
$$\tilde{B} = QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{C} = CP = [C_1 \;\; C_2]$$

donde $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ y $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es nilpotente. El sistema $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ se llama *sistema progresivo-regresivo*. El sistema progresivo-regresivo es equivalente a los siguientes dos subsistemas,

- *Subsistema progresivo*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & A_1 x_1(k) + B_1 u(k) \\ y_1(k) & = & C_1 x_1(k) \end{array} \right. \tag{2}$$

- *Subsistema regresivo*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} N x_2(k+1) & = & x_2(k) + B_2 u(k) \\ y_2(k) & = & C_2 x_2(k) \end{array} \right. \tag{3}$$

con la transformación de coordenadas

$$\left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \end{array} \right] = P^{-1} x(k)$$

y la salida $y(k) = y_1(k) + y_2(k)$.

La solución del sistema progresivo-regresivo se obtiene mediante las ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} x_1(k) & = & A_1^k x_1(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-i-1} B_1 u(i) \\ x_2(k) & = & -\sum\limits_{i=0}^{q-1} N^i B_2 u(k+i) \end{array}$$

donde q es el índice de nilpotencia de la matriz N, es decir, $N^{q-1} \neq 0$ y $N^q = 0$. Obsérvese que el estado correspondiente al subsistema progresivo $x_1(k)$ está únicamente determinado por un estado inicial $x_1(0)$ y una sucesión de controles $u(j)$, mientras que el estado correspondiente al subsistema regresivo $x_2(k)$ se encuentra determinado por la sucesión de controles $u(j)$.

3. Sistemas singulares débilmente positivos

La matriz de transferencia de un sistema (E, A, B, C) es la matriz racional no propia

$$G(z) = C(zE - A)^{-1} B \in \mathbb{R}^{r \times s}(z)$$

que se puede descomponer como

$$G(z) = G_p(z) + G_r(z) \tag{4}$$

donde $G_p(z)$ es la matriz de transferencia estrictamente propia del subsistema progresivo (2), es decir,

$$G_p(z) = C_1(zI_{n_1} - A_1)^{-1} B_1$$

y $G_r(z)$ es la matriz de transferencia polinomial del subsistema regresivo (3) dada por

$$\begin{aligned} G_r(z) &= C_2(zN - I_{n_2})^{-1}B_2 = -C_2(I_{n_2} + zN + \cdots + z^{q-1}N^{q-1})B_2 = \\ &= -C_2B_2 - zC_2NB_2 - \cdots - z^{q-1}C_2N^{q-1}B_2 \end{aligned}$$

siendo q el índice de nilpotencia de N.

El sistema singular dado por las matrices (E, A, B, C) se llama *débilmente positivo* [9] si $E \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times s}$, $C \in \mathbb{R}_+^{r\times n}$. Consideremos la descomposición (4)

$$G(z) = G_p(z) + G_r(z) = C_1(zI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 + C_2(zN - I_{n_2})^{-1}B_2 \tag{5}$$

Si todas las matrices $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1\times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1\times s}$, $B_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2\times s}$, $N \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_2}$, $C_1 \in \mathbb{R}_+^{r\times n_1}$ y $C_2 \in \mathbb{R}_+^{r\times n_2}$ son no negativas, se dice que forman una realización débilmente positiva en la *forma canónica de Weierstrass* (realización positiva WCF) de la matriz $G(z)$ [9]. A continuación vamos a estudiar el problema de obtener una realización positiva WCF.

3.1. Existencia de realizaciones positivas WCF

Cualquier matriz racional $G(z) \in \mathbb{R}^{r\times s}(z)$ puede descomponerse en suma de una matriz estrictamente propia $\dfrac{M(z)}{d(z)}$ y de una matriz polinomial $W(z) \in \mathbb{R}(z)^{r\times s}[z]$

$$G(z) = \frac{M(z)}{d(z)} + W(z) \tag{6}$$

donde $M(z) \in \mathbb{R}(z)^{r\times s}[z]$, $d(z) = z^{n_1} + d_{n_1-1}z^{n_1-1} + \cdots + d_1z + d_0$ es el mínimo común denominador de todos los elementos de la matriz $G(z)$ y $W(z) = W_{t-1}z^{t-1} + \cdots + W_1z + W_0$ siendo $W_i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$.

Comparando las ecuaciones (5) y (6) se sigue que el problema de obtener una realización positiva WCF se reduce al estudio de los siguientes dos subproblemas:

1. Obtener una realización positiva (A_1, B_1, C_1) de la matriz de transferencia estrictamente propia del subsistema progresivo (2).

2. Obtener una realización positiva (N, B_2, C_2) de la matriz de transferencia polinomial del subsistema regresivo (3).

El primer subproblema ha sido resuelto en [5] para ciertas matrices de transferencia con polos reales. Los procedimientos descritos en dicho artículo permiten obtener una realización positiva (A_1, B_1, C_1).

Ahora intentaremos resolver el segundo subproblema. En [6] se obtiene una realización minimal (N, B_2, C_2) de $W(z) = W_{t-1}z^{t-1} + \cdots + W_1z + W_0$ utilizando el algoritmo de Silverman-Ho.

Algoritmo 1
Paso 1. *Definir*

$$M_0 = \begin{bmatrix} -W_0 & -W_1 & \cdots & -W_{t-2} & -W_{t-1} \\ -W_1 & -W_2 & \cdots & -W_{t-1} & O \\ & \cdots & & \cdots & \\ -W_{t-2} & -W_{t-1} & \cdots & O & O \\ -W_{t-1} & O & \cdots & O & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{tr\times ts}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -W_1 & -W_2 & \cdots & -W_{t-1} & O \\ -W_2 & -W_3 & \cdots & O & O \\ & \cdots & & \cdots & \\ -W_{t-1} & O & \cdots & O & O \\ O & O & \cdots & O & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{tr\times ts}$$

Paso 2. *Sea* $m = \operatorname{rank} M_0$*. Obtener la descomposición de rango completo* $M_0 = L_1L_2$ *donde* $L_1 \in \mathbb{R}^{tr\times m}$ *y* $L_2 \in \mathbb{R}^{m\times ts}$ *son matrices con rango completo columna y fila, respectivamente.*

Paso 3. *Construir* B_2 *como la matriz obtenida con las primeras* s *columnas de* L_2*.*
Construir C_2 *como la matriz obtenida con las primeras* r *filas de* L_1*.*
Calcular $N = (L_1^TL_1)^{-1}L_1^TM_1L_2^T(L_2L_2^T)^{-1}$*.*
Las matrices (N, B_2, C_2) *forman una realización minimal de* $W(z)$*.*

Por otro lado, en [9] se establecen condiciones suficientes para obtener una realización (N, B_2, C_2) que sea positiva.

Proposición 2 *Dada* $W(z) = W_{t-1}z^{t-1}+\cdots+W_1z+W_0$ *con las matrices* $-W_i \in \mathbb{R}_+^{r\times s}$*, para todo* $i = 0, 1, \ldots, t-1$*, entonces existe una realización positiva* (N, B_2, C_2) *tal que* $W(z) = C_2(zN - I_{n_2})^{-1}B_2$*.*

Ejemplo 1 *Consideremos*

$$W(z) = \begin{bmatrix} -z-1 & -1 \\ 0 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = W_1z + W_0$$

siendo $W_0 \le 0$ *y* $W_1 \le 0$ *(Proposición 2). Vamos a aplicar el Algoritmo 1 para obtener una realización minimal positiva* (N, B_2, C_2) *de* $W(z)$*.*

Paso 1. *Definimos*

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Paso 2. *Sea* $m = \operatorname{rank} M_0 = 4$*. Obtenemos la descomposición de rango completo* $M_0 = L_1L_2$ *considerando, por ejemplo,* $L_1 = M_0$ *y* $L_2 = I_4$*.*

Paso 3. *Sea B_2 la matriz obtenida con las primeras $s = 2$ columnas de L_2 y sea C_2 la matriz obtenida con las primeras $r = 2$ filas de L_1, es decir,*

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además, obtenemos que

$$N = (L_1^T L_1)^{-1} L_1^T M_1 L_2^T (L_2 L_2^T)^{-1} = (M_0^T M_0)^{-1} M_0^T M_1 = M_0^{-1} M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices (N, B_2, C_2) son una realización minimal positiva de $W(z)$.

3.2. Computación de realizaciones positivas WCF

Si las condiciones anteriores se verifican, entonces una realización positiva WCF de la matriz $G(z) \in \mathbb{R}(z)^{r\times s}(z)$ puede ser obtenida utilizando el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2
Paso 1. *Dada la matriz $G(z)$ descomponerla en suma de una matriz estrictamente propia y de una matriz polinomial como en la ecuación (6).*

Paso 2. *Obtener la realización positiva (A_1, B_1, C_1) de la matriz estrictamente propia siguiendo los procesos desarrollados en [5].*

Paso 3. *Obtener la realización minimal positiva (N, B_2, C_2) siguiendo el Algoritmo 1.*

Paso 4. *Componer la realización (E, A, B, C) débilmente positiva en la* forma canónica de Weierstrass *a partir de las realizaciones obtenidas en los pasos 2 y 3.*

Si en el Paso 2 conseguimos una realización minimal, entonces la realización obtenida en el Paso 4 es minimal.

Ejemplo 2 *Obtener una realización positiva WCF de la matriz de transferencia $G(z)$*

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}}{z-0.7} + \begin{bmatrix} -z-1 & -1 \\ 0 & -z \end{bmatrix}$$

Paso 1. $G(z) = G_p(z) + G_r(z)$ *siendo*

$$G_p(z) = \frac{M(z)}{d(z)} = \frac{1}{(z-1)(z-0.7)} \begin{bmatrix} 2z-1.7 & 4z-3.4 \\ 0.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

y

$$G_r(z) = \begin{bmatrix} -z-1 & -1 \\ 0 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = W_1 z + W_0$$

con $W_0 \leq 0$ *y* $W_1 \leq 0$ *(Proposición 2).*

Paso 2. *Siguiendo los procesos desarrollados en [5] se obtiene la realización positiva* (A_1, B_1, C_1) *de* $G_p(z)$ *que, en este caso, es minimal*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Paso 3. *Obtenemos la realización minimal positiva* (N, B_2, C_2) *mediante el Algoritmo 1 (ver el Ejemplo 1)*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Paso 4. *Componemos la realización minimal débilmente positiva* (E, A, B, C) *en la* forma canónica de Weierstrass *a partir de las realizaciones obtenidas en los pasos 2 y 3*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agradecimientos

Trabajo financiado por los proyectos DGI AGL2004-03263/AGR y GV06/118, y por el Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo (PAID-04-07) de la Universidad Politécnica de Valencia.

Referencias

[1] L. Benvenuti; L. Farina, *A Tutorial on the Positive Realization Problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 5 (2004), 651-664.

[2] L. Benvenuti; L. Farina; B.D.O. Anderson; F. De Bruyne, *Minimal Positive Realizations of Transfer Functions with Positive Real Poles*, IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol. 47, no. 9 (2000), 1370-1377.

[3] R. Cantó; B. Ricarte; V. Rumchev, *A Basic Canonical Form Of Discrete-Time Compartmental Systems*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, vol. 2, no. 6 (2007), 261-273.

[4] R. Cantó; B. Ricarte; A. M. Urbano, *On Positive Realizations of Irreducible Transfer Matrices*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, vol. 341 (2006), 41-48.

[5] R. Cantó; B. Ricarte; A. M. Urbano, *Positive Realizations of Transfer Matrices with real poles*, IEEE Trans. Circuits Syst. II, Expr. Briefs, (2007), accepted.

[6] L. Dai, *Singular Control Sistems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, vol. 118 (1989).

[7] C. Hadjicostis, *Bounds on the size of minimal nonnegative realizations for discrete-time LTI systems*, Systems and Control Letters, vol. 37 (1999), 39-43.

[8] A. Halmschlager; M. Matolcsi, *Minimal Positive Realizations for a Class of Transfer Functions*, IEEE Trans. Circuits Syst. II, Expr. Briefs, vol. 52, no. 4 (2005), 177-180.

[9] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D Systems*, Springer, London, 2002.

[10] B. Nagy; M. Matolcsi, *Minimal Positive Realizations of Transfer Functions with Nonnegative Multiple Poles*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 9 (2005), 1447-1450.