

# Análisis de la Convergencia del M.E.F. en Algoritmos de Descomposición de Dominio con Adaptación de Mallado

M. SIMÕES<sup>1</sup>, L. FERRAGUT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico da Guarda, Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, nº 50, 6300-559 Guarda, Portugal. E-mail: msimoes@ipg.pt.*

<sup>2</sup> *Inst. Universitario de Física Fundamental y Matemáticas Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, Plaza Merced, s/n 37008 Salamanca, España. E-mail: ferragut@usal.es.*

**Palabras clave:** Descomposición Dominio, Adaptación Mallado

## Resumen

En este trabajo se presenta un algoritmo numérico para la resolución de problemas elípticos lineales y no lineales combinando técnicas de descomposición de dominios con el método de elementos finitos adaptativo. La principal aportación de este trabajo es, pues, la combinación de técnicas de descomposición de dominio con técnicas de adaptación de mallado. La ventaja de usar descomposición de dominios está en el hecho de que podemos considerar un problema que presente características distintas en distintas partes del dominio, como por ejemplo la no linealidad. Considerando la descomposición de dominio adecuada se ahorra tiempo de cálculo y recursos del ordenador, ya que sólo vamos a resolver un problema no lineal en el subdominio correspondiente. Por otra parte, la formulación mediante operadores permite incorporar de manera sencilla la adaptación del mallado a cada subdominio. Para finalizar mostramos algunos experimentos numéricos.

## 1. Introducción

La adaptación de mallado regido por un estimador de error a-posteriori es un instrumento esencial para la resolución numérica de PDEs, en particular de problemas no lineales.

Las técnicas de descomposición de dominio son de gran utilidad cuando se aplican a problemas que presenten distintas características en distintas partes del dominio, como sea la no linealidad. Distintas técnicas de descomposición de dominio, con y sin solapamiento, pueden ser encontradas en los trabajos de J.L. Lions and O. Pironneau (ver, [5], [6]) así como ejemplos de aplicación de esas mismas técnicas de descomposición a distintos

tipos de problemas (ver, [3], [4]).

En este trabajo construimos un algoritmo que combina un método de elementos finitos (M.E.F.) adaptativo (método modificado de Uzawa adaptativo) con técnicas de descomposición de dominio, para problemas elípticos. Es decir, hacemos la descomposición de dominio que nos parezca adecuada a las características del problema que queremos resolver y calculamos separadamente la solución, mallando cada subdominio de forma independiente. En cada subdominio vamos a aplicar un método de elementos finitos adaptativo (M.E.F.A.) regido por un estimador de error a-posteriori.

Vamos a considerar, un problema modelo lineal estacionario con condiciones de contorno tipo Dirichlet y descomponer el dominio, en dos subdominios (notar que con base en las hipótesis que hemos hecho anteriormente es sencillo generalizar este algoritmo al caso no lineal y a problemas de evolución).

Nuestro objetivo principal es demostrar la convergencia del método con respecto a la solución discreta en el espacio correspondiente a un mallado uniforme muy fino.

El resultado de convergencia que hemos obtenido se puede escribir en la forma: *Sea  $(U_j, P_j)$  la secuencia de soluciones obtenida por el método de elementos finitos del problema modelo y la correspondiente secuencia de multiplicadores de Lagrange producida por el algoritmo adaptativo de Uzawa modificado, existen constantes positivas  $C$  y  $\delta < 1$  tales que*

$$\|u - U_j\|_{\mathbb{V}} + \|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq C\delta^j$$

donde  $\Gamma_{12}$  es la frontera interna entre los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ ;  $\|v\|_{\mathbb{V}} = (\sum_{i=1}^2 |v|_{1,\Omega_i}^2)^{1/2}$  donde  $\mathbb{V}$  está definido en el apartado 2;  $u$  y  $p$  son las soluciones discretas en un mallado suficientemente fino.

## 2. El problema continuo y la descomposición de dominio

Sean  $\Omega$  un abierto de frontera poligonal de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=2,3$  con frontera suficientemente regular  $\partial\Omega$ ;  $L^2(\Omega)$  el espacio de Lebesgue de funciones de cuadrado integrable. Definimos  $H := H_0^1(\Omega)$ , donde  $H_0^1(\Omega)$  es el espacio de Sobolev de funciones de  $L^2(\Omega)$  en que las primeras derivadas en el sentido de las distribuciones están en  $L^2(\Omega)$  y que se anulan en la frontera  $\partial\Omega$ ;  $\mathbb{M} := L^2(\Gamma_{12})$ , son las funciones de  $L^2$  definidas en la frontera interna  $\Gamma_{12}$ . A continuación denotemos por  $(\cdot, \cdot)$  el producto interno en  $L^2$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad entre los correspondientes espacios.

Sea  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal real y continua en  $H$ ,

$$\begin{aligned} a : H &\times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &, v &\rightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

Convenimos, además, en que  $a(\cdot, \cdot)$  es elíptica en  $H$ , es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H$$

y a partir de esta se define el operador lineal y continuo

$$A : H \rightarrow H^*$$

que viene dado por

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v)$$

donde  $H^*$  es el espacio dual de  $H$ .

Dada  $f$  en  $L^2(\Omega)$  el problema en su forma variacional es,

**Problema 2.1** *Determinar  $u$  en  $H$  tal que*

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H$$

donde  $(f, v) = \int_{\Omega} f v dx$ .

El problema 2.1 bajo las consideraciones anteriores tiene solución única, siendo esta solución la que queremos aproximar.

A continuación sin pérdida de generalidad, consideraremos la descomposición de  $\Omega$  en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  es decir, vamos a considerar que el dominio  $\Omega$  está constituido por dos partes distintas  $\Omega_1, \Omega_2$  (ver figura 1), denotemos por  $\Gamma_{12}$  la frontera común entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Y por  $\Gamma_i$  la intersección de  $\partial\Omega$  con  $\partial\Omega_i$ ,

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad \Gamma_{12} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \quad \Gamma_i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \quad i = 1, 2$$

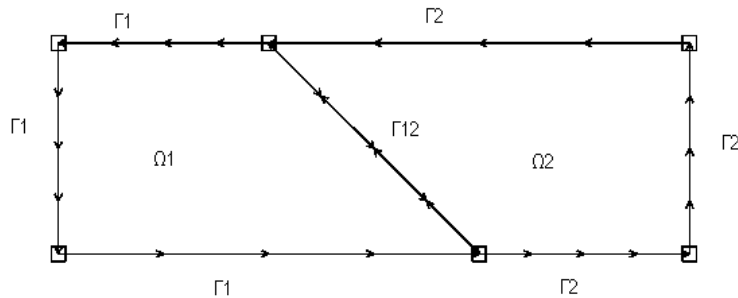


Figura 1: Descomposición del dominio  $\Omega$

Resolver el problema modelo en  $H_0^1(\Omega)$  es equivalente a determinar el par  $\{u_1, u_2\}$  tal que

$$u_i \in H^1(\Omega_i) \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (2)$$

$$u_i = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1,2} \nabla_i u_i \cdot n_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (4)$$

donde en (4)  $n_i$  denota el vector unitario, normal a la frontera  $\partial\Omega_i$  (en  $\Gamma_{12}$  tenemos que  $n_1 + n_2 = 0$ ). Vamos a introducir algunas notaciones que usaremos a continuación. Definimos los espacios

$$H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i) = \{v_i \in H^1(\Omega_i) : v|_{\Gamma_i} = 0\}$$

donde

$$\mathbb{V} := \prod_{i=1,2} H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$$

y

$$\Lambda = \prod H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{ij})$$

siendo  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{ij})$  es el espacio dual del espacio de las trazas  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{ij})$  definido por

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{ij}) = \{ \mu : \mu = v|_{\Gamma_{ij}}, \quad v \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1) \} \quad (= \{ \mu : \mu = v|_{\Gamma_{ij}}, \quad v \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2) \})$$

Consideremos ahora la formulación Híbrida Primal del problema (1)-(4) que se puede escribir,

**Problema 2.2** Hallar  $(u,p) \in \mathbb{V} \times \Lambda$  tales que

$$\sum_i \int_{\Omega_i} k(x) \nabla u \nabla v + \sum_i \int_{\partial\Omega_i} p v = \sum_i \int_{\Omega_i} f v \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_{12}} [u] \mu = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda \quad (6)$$

con  $i = 1, 2$ ,  $k(x) \in L^\infty(\Omega)$  y  $[u] = u_1 - u_2$ .

Para resolver el problema 2.2 podemos usar el bien conocido método de Uzawa que aplicado a nuestro caso particular teniendo en cuenta la descomposición de dominios se escribe: dado  $p^n \in \Lambda$ , se calcula  $u^n$  resolviendo

$$\sum_i \int_{\Omega_i} k(x) \nabla u^n \nabla v = \sum_i \int_{\Omega_i} f v - \sum_i \int_{\partial\Omega_i} p^n v \quad (7)$$

se actualiza el multiplicador  $p^n$ , resolviendo

$$\int_{\Gamma_{12}} p^{n+1} \mu = \int_{\Gamma_{12}} p^n \mu - \rho \int_{\Gamma_{12}} [u^n] v \quad (8)$$

Considerando la formulación en términos de operadores y la descomposición en dos subdominios tendremos,

$$A_1 u_1 + \gamma_1^* p = f_1 \quad \text{en } \Omega_1 \quad (9)$$

$$A_2 u_2 - \gamma_2^* p = f_2 \quad \text{en } \Omega_2 \quad (10)$$

$$B u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{12} \quad (11)$$

donde  $\gamma_i$  es una aplicación lineal y continua definida por

$$\begin{aligned} \gamma_i : H^1(\Omega_i) &\rightarrow L^2(\Gamma_{12}) \\ u_i &\rightarrow \gamma_i u_i = u_i|_{\Gamma_{12}} \end{aligned}$$

y  $\gamma_1^*$ ,  $\gamma_2^*$  son las correspondientes aplicaciones adjuntas que verifican

$$\langle \gamma^* \mu, v \rangle =_{H^{-\frac{1}{2}}} \langle \mu, \gamma v_i \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} \quad \forall v_i \in H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$$

Así que considerando las siguientes igualdades

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = (\gamma_1, -\gamma_2) \quad B^* = \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ -\gamma_2^* \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

la ecuación (11) se puede aún escribir en la forma,

$$Bu = 0 \iff (\gamma_1, -\gamma_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 = 0$$

Es decir, el problema (9)-(11) es equivalente a (12)-(13) que como vamos a ver a continuación se puede escribir en una sola iteración recursiva de punto fijo.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ -\gamma_2^* \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$(\gamma_1, -\gamma_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

En efecto, si eliminamos  $u$  en (12) tendremos,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ -\gamma_2^* \end{pmatrix} p \quad (14)$$

consideremos aún la siguiente relación en  $p$  :

$$p = p + \rho Bu \quad \text{para} \quad \rho > 0 \quad (15)$$

Sustituyendo, ahora,  $Bu$  en (15) tendremos

$$p = p + \rho(\gamma_1, -\gamma_2) \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - (\gamma_1, -\gamma_2) \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ -\gamma_2^* \end{pmatrix} p \quad (16)$$

Vamos definir ahora el operador  $S : \Lambda \rightarrow \Lambda$

$$S := BA^{-1}B^*$$

considerando la definición de  $S$  en la ecuación (16) tendremos en  $\Lambda$  la siguiente iteración de punto fijo

$$p = (I - \rho S)p + \rho BA^{-1}f \quad (17)$$

dando esta relación origen al algoritmo adaptativo que vamos a aplicar en cada subdominio  $\Omega_1, \Omega_2$  para el cálculo de la solución del problema estacionario.

**Algoritmo 2.1** Dado  $p_0 \in \Lambda$  y obtenido  $p_{j-1} \in \Lambda$ , se calcula  $p_j$  para  $j \geq 1$

$$p_j = (I - \rho S)p_{j-1} + \rho BA^{-1}f \quad (18)$$

Este algoritmo será convergente se existe  $\rho > 0$  tal que el operador  $S$  verifique

$$\sigma := \|I - \rho S\|_{\mathcal{L}(\Lambda, \Lambda)} < 1, \quad (19)$$

Es decir la convergencia del algoritmo anterior está asegurada en espacios de dimensión finita ya que en estos espacios  $S$  es simétrica definida positiva.

### 3. Algoritmo Adaptativo

En esta sección describimos el método de Uzawa adaptativo-modificado con descomposición de dominios. Para simplificar notaciones llamamos  $T_j$  al mallado obtenido por refinamiento del mallado  $T_{j-1}$  y que los correspondientes espacios de funciones de elementos finitos son denotados por  $(\mathbb{V}_j, \mathbb{M}_j)$  y  $(\mathbb{V}_{j-1}, \mathbb{M}_{j-1})$ . Consideremos el par de sucesiones de espacios de elementos finitos, encajados de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{M}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &\subset \mathbb{V}_1 \subset \dots \subset \mathbb{V}_{j-1} \subset \mathbb{V}_j \subset \dots \subset \mathbb{V}_J \\ \mathbb{M}_0 &\subset \mathbb{M}_1 \subset \dots \subset \mathbb{M}_{j-1} \subset \mathbb{M}_j \subset \dots \subset \mathbb{M}_J \end{aligned} \quad (20)$$

Para  $P_0 \in \mathbb{M}_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Dado  $P_{j-1} \in \mathbb{M}_{j-1}$ ,  $u_j \in \mathbb{V}_j$  es solución del problema auxiliar,

$$Au_j = f - B^*P_{j-1} \quad (21)$$

que se puede escribir en la forma equivalente

$$a(u_j, v) = \langle f, v \rangle - (P_{j-1}, Bv) \quad \forall v \in \mathbb{V}_j \quad (22)$$

La ecuación (22) se resuelve mediante un MEF adaptativo, es decir, fijada una tolerancia  $\varepsilon_j$ , hallar una aproximación  $U_j$  en  $\mathbb{V}_j$  solución de la ecuación discretizada de (22) es decir resolvemos

$$a(U_j, V) = \langle f, V \rangle - (P_{j-1}, BV) \quad \forall V \in \mathbb{V}_j \quad (23)$$

tal que

$$\|u_j - U_j\|_{\mathbb{V}} < \varepsilon_j \quad (24)$$

Es decir, construimos  $\mathbb{V}_j$  tal que  $\mathbb{V}_{j-1} \subset \mathbb{V}_j \subset \mathbb{V}_J$  y  $U_j \in \mathbb{V}_j$ , solución discreta de (22), verificando,

$$\|U_j - u_j\|_{\mathbb{V}} \leq C\varepsilon_j, \quad (25)$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $j$  y  $\varepsilon_j < \gamma\varepsilon_{j-1}$ .

Una vez obtenido  $U_j$  actualizamos  $P_{j-1}$  en  $\mathbb{M}_j$  donde  $\mathbb{M}_{j-1} \subset \mathbb{M}_j \subset \mathbb{M}_J$ , a través del calculo,

$$P_j = P_{j-1} + \rho B_j U_j \quad (26)$$

siendo  $B_j : \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{M}_j$  el operador definido por

$$B_j = B|_{\mathbb{V}_j} \quad (27)$$

es decir, la expresión (26) se puede volver a escribir de forma equivalente por,

$$P_j = P_{j-1} + \rho B U_j \quad (28)$$

Con el propósito de clarificar el algoritmo, exponemos brevemente las etapas que realiza en la siguiente tabla, el paso 2 del algoritmo es aplicado de forma independiente a cada un de los subdominios.

**Algoritmo Uzawa Modificado Adaptativo con Descomposición de Dominios (AMUADD)**

Escoger parámetros  $\rho > 0$  verificando (19),  $0 < \gamma < 1$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ; Fijar  $j = 1$ .

1. Dado un espacio de dimensión finita  $\mathbb{V}_0$  y aproximación inicial  $P_0 \in \mathbb{M}_0$ .
2. Calcular  $U_j$  en  $\mathbb{V}_j$ .
3. Actualizar  $P_j$  en  $\mathbb{M}_j$  usando  $P_{j-1}$  y  $U_j$ .
4.  $\varepsilon_j \leftarrow \gamma \varepsilon_{j-1}$ .
5. Obtener  $T_j$  por adaptación del mallado  $T_{j-1}$ .
6.  $j \leftarrow j + 1$ .
7. Ir al paso 2.

#### 4. Convergencia del AMUADD

En este apartado demostraremos que el AMUADD, propuesto es convergente, es decir, genera una sucesión de soluciones discretas  $\{(U_j, P_j)\}_{j \geq 0}$  tales que,

$$\|u - U_j\|_{\mathbb{V}} + \|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq C\delta^j \quad (29)$$

para una constante  $C > 0$  independiente de  $j, f, P_{j-1}, \mathbb{V}_j$  y  $0 < \delta < 1$ .

Para probar la convergencia de AMUADD hemos de suponer que nuestro algoritmo, con la estrategia de refinamiento que consideramos, satisface la siguiente condición

$$\|u_j - U_j\|_{\mathbb{V}} \leq C\varepsilon_j \quad (30)$$

que expresa la convergencia del procedimiento que hemos utilizado en el cálculo de las aproximaciones  $U_j$ .

**Teorema 4.1** *Sea  $\rho > 0$  verificando (19),  $0 < \theta < 1$ , y el procedimiento definido por nuestro algoritmo en el cálculo de  $U_j \in \mathbb{V}_j$ . Entonces existen constantes positivas,  $C$  y  $\delta < 1$ , tales que las soluciones  $(U_j, P_j)$  generadas por AMUADD verifican,*

$$\|u - U_j\|_{\mathbb{V}} + \|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq C\delta^j$$

donde  $(u, p) \in \mathbb{V}_J \times \mathbb{M}_J$  son solución del correspondiente problema 2.2, donde se han sustituido  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{M}$  por  $\mathbb{V}_J$  y  $\mathbb{M}_J$ .

A continuación vamos a demostrar que el resultado anterior es cierto, lo que es lo mismo que decir que nuestro algoritmo es convergente.

En cada etapa  $j \geq 1$  se resuelve,

$$U_j \in \mathbb{V}_j : \quad a(U_j, V) = \langle f, V \rangle - (P_{j-1}, BV), \quad \forall V \in \mathbb{V}_j \quad (31)$$

que aproxima el problema,

$$u_j \in \mathbb{V} : \quad a(u_j, v) = \langle f, v \rangle - \langle B^* P_{j-1}, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (32)$$

es decir

$$u_j \in \mathbb{V} : \quad Au_j = f - B^* P_{j-1}, \quad \text{en } \mathbb{V}^* \quad (33)$$

Eliminando  $u_j$  en (33) y considerando la definición del operador  $S$  se tiene,

$$u_j \in \mathbb{V} : \quad Bu_j = BA^{-1}f - SP_{j-1}, \quad \in \mathbb{M} \quad (34)$$

y recordemos que  $p$  es solución de la ecuación

$$p = (I - \rho S)p + \rho BA^{-1}f \quad (35)$$

Sean  $U_j$  y  $P_j$  definidos en (23) y (28). Sumando y restando  $\rho Bu_j$  en (28) tendremos que,

$$P_j = P_{j-1} + \rho B(U_j - u_j) + \rho Bu_j$$

Como se verifica la igualdad (34), substituyendo  $\rho Bu_j$  en la expresión anterior viene

$$P_j = (I - \rho S)P_{j-1} + \rho B(U_j - u_j) + \rho BA^{-1}f \quad (36)$$

Restando (35) y (36) obtenemos,

$$p - P_j = (I - \rho S)(p - P_{j-1}) - \rho B(U_j - u_j) \quad (37)$$

aplicando la desigualdad triangular y poniendo  $\sigma := \|I - \rho S\|_{\mathcal{L}(M, M)}$  se tiene,

$$\|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq \sigma \|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}} + \rho \|B(U_j - u_j)\|_{\mathbb{M}} \quad (38)$$

Como  $B$  es un operador lineal y continuo existe una  $C_1 > 0$  tal que

$$\|Bv\|_{\mathbb{M}} \leq C_1 \|v\|_{\mathbb{V}} \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (39)$$

donde

$$\|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq \sigma \|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}} + \rho C_1 \|U_j - u_j\|_{\mathbb{V}} \quad (40)$$

Utilizando la condición (30),

$$\begin{aligned} \|p - P_j\|_{\mathbb{M}} &\leq \sigma \|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}} + C\varepsilon_j \leq \\ &\leq \sigma \|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}} + C\varepsilon_0 \gamma^j \end{aligned}$$

Por inducción se obtiene,

$$\|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq \sigma^j \|p - P_0\|_{\mathbb{M}} + C\varepsilon_0 \sum_{l=0}^{j-1} \sigma^l \gamma^{j-l}$$

y tomando  $\vartheta := \max\{\sigma, \gamma\}$ , se sigue que,

$$\|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq \vartheta^j \|p - P_0\|_{\mathbb{M}} + Cj\vartheta^j \quad (41)$$



Si  $\delta > 0$  es tal que  $\vartheta < \delta < 1$  entonces  $j\vartheta^j < \delta^j$  para  $j$  suficientemente grande, ( $xa^x \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot a^x = 0$ , para  $0 < a < 1$ ) se tiene,

$$\|p - P_j\|_{\mathbb{M}} \leq C\delta^j \quad (42)$$

para ciertas constantes positivas  $C$  y  $\vartheta < \delta < 1$ . Para obtener una cota similar para  $\|u - U_j\|_{\mathbb{V}}$ , observar que,

$$\|u - u_j\|_{\mathbb{V}} \leq C\|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}}$$

entonces,

$$\|u - U_j\|_{\mathbb{V}} \leq \|u - u_j\|_{\mathbb{V}} + \|U_j - u_j\|_{\mathbb{V}} \leq C\|p - P_{j-1}\|_{\mathbb{M}} + C\varepsilon_j$$

y se concluye con (42).

## 5. Experimentos Numéricos

En esta sección presentamos un ejemplo numérico obtenido por aplicación de nuestro algoritmo AMUADD a la resolución de un problema lineal estacionario, que ha sido desarrollado con el freefem++ [1], en una máquina con un procesador Intel Pentium M740 y con 1024MB de RAM.

Consideremos 2 subdominios, un rectángulo menos un triángulo unitario  $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 1, x + y > 1\}$  y un círculo unitario  $\Omega_1$  centrado en el esquina izquierda inferior del rectángulo. Este problema presenta distintas características en cada uno de los subdominios: en  $\Omega_1$  tenemos un problema fuertemente convectivo y en  $\Omega_2$  un problema lineal, con condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas. El problema está definido por las siguientes ecuaciones,

$$-\Delta u + \vec{v} \nabla u = 0 \quad \text{en } \Omega_1 \quad (43)$$

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } \Omega_2 \quad (44)$$

$$u = 1 \quad \text{en } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \quad (45)$$

con  $\vec{v} = (100x, -100y)$ .

En la figura 2, podemos ver en el dibujo de arriba la recomposición de las soluciones finales de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , en el dibujo de abajo la recomposición de los correspondientes mallados finales. En cada paso hemos mallado cada subdominio de forma independiente y que los mallados obtenidos son distintos en cada subdominio. Se puede observar que al final tenemos la continuidad de la solución en la frontera interna  $\Gamma_{12}$ . El tiempo de cálculo y el numero de iteraciones para obtener esta solución ha sido 9,5 segundos y 12 iteraciones. En la ultima iteración la diferencia entre las dos aproximaciones sucesivas verifica,

$$\frac{\|U_1^{j+1} - U_1^j\|_{1,\Omega_1}}{\|U_1^{j+1}\|_{1,\Omega_1}} = 0 \cdot 2220E - 2 \quad \frac{\|U_2^{j+1} - U_2^j\|_{1,\Omega_2}}{\|U_2^{j+1}\|_{1,\Omega_2}} = 0 \cdot 5420E - 2$$

lo que certifica la rápida convergencia del método.

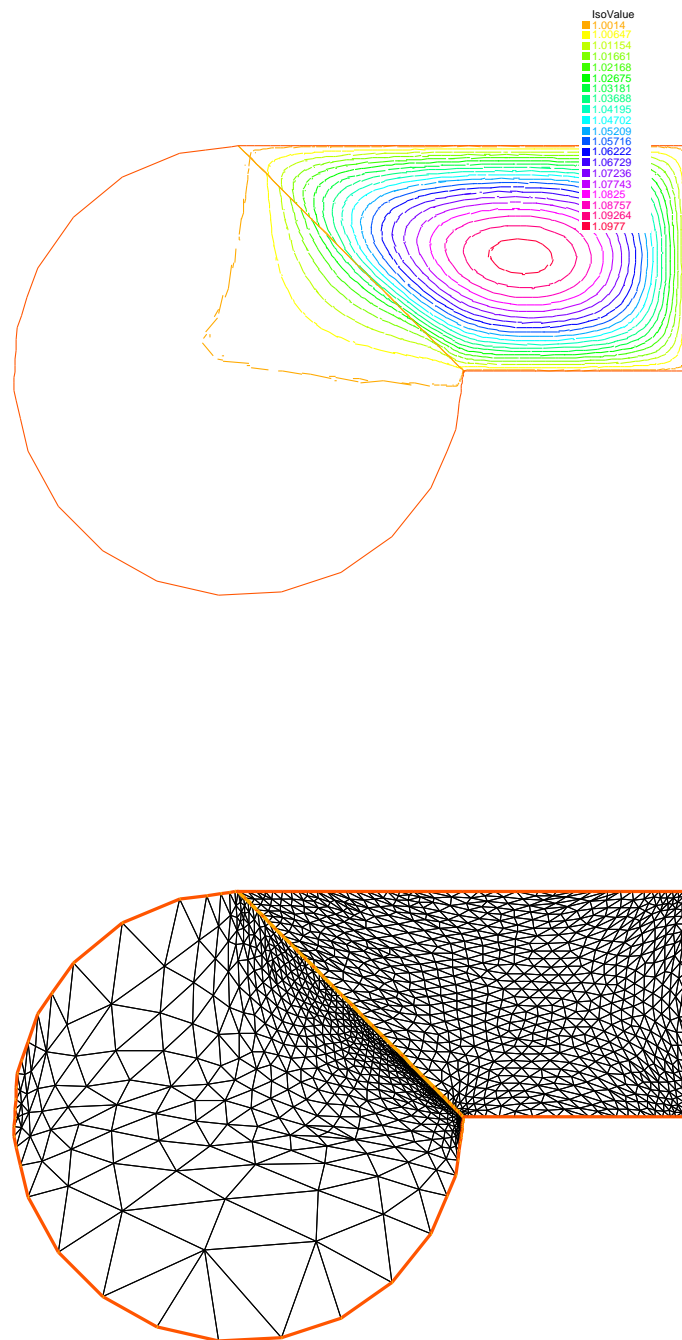


Figura 2: El dibujo de arriba representa la solución final y el de abajo el mallado final.

## Referencias

- [1] D. Bernardi, F. Hench, K.Otsuka and O. Pironneau, *Freefem++*, a finite element method software to handle several meshes, (1999). Downloadable from <ftp:ftp.ann.jussieu.fr/pub/soft/pironneau>.
- [2] R. Glowinski, *Numerical methods for fluids*. P.G.Ciarlet and J. L. Lions Editors, Vol. IX, (2003).
- [3] J.L. Lions and O. Pironneau, *Domain decomposition methods for CAD*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Sér. I (1999), 73–80.
- [4] J.L. Lions and O. Pironneau, *Virtual control, replicas and decompositon of operators*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Sér. I (2000), 47–54.
- [5] J.L. Lions and O. Pironneau, *Overlapping domain decomposition for evolution operators*. C. R. Acad. Sci. Paris t. 330, Sér. I (2000), 1–6.
- [6] J.L. Lions and O. Pironneau, *Non-overlapping domain decomposition for evolution operators*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Sér. I (2000), 943–950.
- [7] F.A. Pérez, *Métodos Adaptativos para Problemas No Lineales Asociados a Operadores Multívocos y Aplicaciones* , Tesis Doctoral, Salamanca, (2005).