EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 3, 383 – 391 (1998)

Las Álgebras de Lie $(n-3)$-Filiformes como Extensiones por Derivaciones†

J.M. Cabezas and J.R. Gómez

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. del País Vasco, C/ Nieves Cano, 12, 01006-*Vitoria, Spain, e-mail: mapcamaj@vc.ehu.es*
Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla, Avda. Reina Mercedes, s.n., 41012-*Sevilla, Spain, e-mail: jrgomez@obelix.cica.es*

(Research paper presented by Santos González)

AMS *Subject Class.* (1991): 17B30 *Received June* 15, 1998

1. Introducción

La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema que permanece abierto y que no puede ser resuelto [6]. Aunque se conocen las clasificaciones para dimensiones 6 [7] y 7 [2], casi todos los esfuerzos en este campo se han reducido al caso particular de las filiformes (véase [1], [4] y [5]). Éstas son álgebras de Lie de índice de nilpotencia $n-1$, el máximo posible, si n es la dimensión del álgebra.

Cuando el índice de nilpotencia se separa más de la dimensión, el problema se va complicando. Surge así la necesidad de considerar invariantes distintos del nilíndice. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita n, para todo $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denota

$$c(X) = (c_1(X), c_2(X), \dots, 1)$$

a la sucesión, en orden decreciente, de las dimensiones de los subespacios característicos del operador nilpotente adX, donde dicho *operador adjunto* se define mediante

$$\begin{array}{rccl} adX : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \longrightarrow & adX(Y) = [X, Y] \end{array}$$

†Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto del PAICYT de la Junta de Andalucía 28406559-96-291 y por el proyecto de la Universidad del País Vasco UPV 066.163-EA032/98

Se denomina *invariante de Goze* o *sucesión característica* de $\mathfrak{g}$ a

$$c(\mathfrak{g}) = \sup\{c(X) \colon X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

El invariante de Goze indica las dimensiones maximales de los bloques de Jordan de una matriz nilpotente.

Para cada índice de nilpotencia $n - p \geq 1$, surgen así subfamilias interesantes de álgebras de Lie nilpotentes y que juegan un papel, en cierto sentido, análogo al de las filiformes para cada índice de nilpotencia $n - p$. Se trata de las de invariante de Goze $(n - p, 1, \overset{(p)}{\ldots}, 1)$, álgebras que se denominan p-filiformes.

Para $p = n - 1$ sólo existe el álgebra abeliana en cada dimensión y para $p = n - 2$ se ha probado en [3] que se reducen a las álgebras de Heisenberg de dimensión menor o igual a n junto a la parte abeliana correspondiente para completar la dimensión; resultan ser $E(\frac{n-1}{2})$ no isomorfas entre sí, aunque las no escindidas, por lo ya dicho, se reducen a la correspondiente álgebra de Heisenberg para las dimensiones impares, no existiendo álgebra alguna no escindida para las dimensiones pares. El caso $p = n - 3$ también se ha estudiado en [3], encontrándose $n - 2$ álgebras (escindidas o no) en cada dimensión. Estas clasificaciones se hicieron utilizando convenientemente argumentos sobre nilpotencia (generalmente, adjunto-nilpotencia), sucesión característica y p-filiformidad, junto a una adecuada selección de cambios de base sencillos. También, se han realizado dichas clasificaciones mediante extensiones centrales adecuadas de álgebras de dimensión una unidad menor.

Se describe aquí un método diferente para determinar las álgebras de Lie $(n - 3)$-filiformes por extensión por derivaciones del único álgebra de Lie filiforme de dimensión 4, la modelo L_4, cuya ley se expresa en una cierta base $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ por

$$L_4 : [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Este método parece especialmente apropiado para las álgebras p-filiformes, en los casos en que $n - p$ sea pequeño, ya que entonces el álgebra soporte resulta ser filiforme de dimensión $n - p + 1$.

2. Las álgebras $(n-3)$-filiformes

El álgebra de derivaciones del álgebra modelo L_n es bien conocida y puede encontrarse, entre otros, en [6]. En particular, se tiene el siguiente

LEMA 1. *Las aplicaciones lineales $\delta_i : L_4 \to L_4$, $1 \le i \le 7$, definidas, respecto de una base adaptada de L_4, $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$, mediante*

$$\begin{array}{lll}
\delta_1(X_0) = X_0, & \delta_1(X_i) = (i-1)X_i, & 1 \le i \le 3 \\
\delta_2(X_0) = X_1, & & \\
\delta_3(X_0) = X_2, & & \\
\delta_4(X_0) = X_3, & & \\
\delta_5(X_i) = X_i, & 1 \le i \le 3, & \\
\delta_6(X_i) = X_{i+1}, & 1 \le i \le 2, & \\
\delta_7(X_1) = X_3, & &
\end{array}$$

constituyen una base del álgebra de Lie de las derivaciones de L_4, $Der(L_4)$.

TEOREMA 2. *En dimensión n, $(n \ge 5)$, hay exactamente $n-2$ álgebras de Lie nilpotentes $(n-3)$-filiformes, reales o complejas, dos a dos no isomorfas y que se pueden obtener como extensiones por derivaciones del único álgebra de Lie filiforme de dimensión 4. Siendo $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-4}\}$ una base adaptada, se pueden expresar sus leyes mediante*

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{g}_n^{2q-1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \qquad 1 \le q \le E(\frac{n-2}{2}) \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \le k \le q-1 \\
 & & & & \\
\mathfrak{g}_n^{2s}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \qquad 1 \le s \le E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \le k \le s-1 \\
 & & & & \\
\mathfrak{g}_n^{n-2}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\
 & [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} &
\end{array}$$

Demostración. Si se designa por $\mathfrak{g}$ a un álgebra de Lie $(n-3)$-filiforme de dimensión n, una base suya puede expresarse como $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-4}\}$, donde $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ es una base adaptada del álgebra soporte L_4 y los vectores Y_i, $1 \le i \le n-4$, están asociados a derivaciones adecuadas de L_4.

Entre éstas no se pueden admitir δ_3, δ_4 o δ_6, por ser las derivaciones interiores, ni δ_1 o δ_5, porque, al ser diagonalizables, no darían lugar a un vector Y_i adjunto-nilpotente.

Tampoco es adecuada δ_2 ya que en tal caso existiría algún vector Y_j, $1 \leq j \leq n-4$, tal que $[X_0, Y_j] = X_1$ y el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0^* &= X_0 \\ X_1^* &= Y_j \\ X_i^* &= X_{i-1} \qquad 2 \leq i \leq 4 \\ Y_k^* &= Y_k \qquad 1 \leq k \leq n-4 \quad , \quad k \neq j \end{cases}$$

permite afirmar que el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$ es mayor o igual que $(4, 1, \ldots, 1)$, luego $\mathfrak{g}$ no sería $(n-3)$-filiforme.

Finalmente, como máximo un vector de los Y_i, $1 \leq i \leq n-4$, puede estar asociado a δ_7 ya que, si existieran dos Y_j, Y_k, $j \neq k$, se tendría que $[X_1, Y_j] = X_3$ y $[X_1, Y_k] = X_3$ y el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t \qquad 0 \leq t \leq 3 \\ Y_j^* &= Y_j - Y_k \\ Y_r^* &= Y_r \qquad 1 \leq r \leq n-4 \quad , \quad r \neq j \end{cases}$$

hace que sea $[X_1^*, Y_j^*] = 0$.

En consecuencia, se ha de verificar que

$$\begin{array}{lcll} [X_k, Y_i]|_{L_4} &=& 0 & 1 \leq i \leq n-4 \qquad k = 0, 2, 3 \\ [X_1, Y_i]|_{L_4} &=& 0 & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_1, Y_{n-4}]|_{L_4} &=& \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0, 1\} \end{array}$$

dependiendo de que todos los vectores Y_j, $1 \leq j \leq n-4$ estén asociados a la derivación nula ($\epsilon = 0$) o $n-5$ de los vectores Y_j asociados a la derivación nula y uno (sin pérdida de generalidad, puede suponerse Y_{n-4}) asociado a δ_7 ($\epsilon = 1$).

Y la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar, respecto de la base adaptada anterior, mediante

$$\begin{array}{lcll} [X_i, X_j] &=& [X_i, X_j]|_{L_4} + \sum_{k=1}^{n-4} b_{ij}^k Y_k & 0 \leq i < j \leq 3 \\ [X_i, Y_j] &=& \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} d_{ij}^k Y_k & 0 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq j \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &=& \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} \beta_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4 \end{array}$$

y donde los escalares a_{ij}^k, $1 \leq k \leq 3$, vienen determinados por las derivaciones ($a_{1,n-4}^3 = \epsilon$ y $a_{ij}^k = 0$ en otro caso).

Al aplicar los cambios de base definidos por

$$\begin{cases} X_i^* &= X_i & 0 \leq i \leq 3 & i \neq j \\ X_j^* &= X_j + \sum\limits_{k=1}^{n-4} b_{0j-1}^k Y_k & & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-4 & \end{cases}$$

para $j \in \{1,2\}$ y exigiendo que la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ no sea mayor o igual que $(4,1,\dots,1)$, se demuestra que

$$b_{0j}^k = 0, \ 1 \leq j \leq 3, \ 1 \leq k \leq n-4$$

Se puede suponer, igualmente, que $d_{0j}^k = 0$ para $1 \leq j,k \leq n-4$ ya que, en otro caso, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i^* &= X_i & 0 \leq i \leq 3 & \\ Y_1^* &= Y_j & & \\ Y_2^* &= \sum\limits_{t=1}^{n-4} d_{0j}^t Y_t & & \\ Y_j^* &= Y_1 & & \\ Y_k^* &= Y_2 & & \\ Y_r^* &= Y_r & 1 \leq r \leq n-4 & r \notin \{1,2,j,k\} \end{cases}$$

muestra que $X_0^* \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y

$$\begin{array}{rcll} [X_0^*, X_i^*] &=& X_{i+1}^* & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0^*, Y_1^*] &=& Y_2^* & \end{array}$$

y el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$ sería mayor o igual que $(3,2,1,\dots,1)$

A partir de las identidades de Jacobi en las que interviene X_0 se demuestra que

$$\begin{array}{ll} b_{13}^k = b_{23}^k = d_{2j}^k = b_{3j}^k = 0, & 1 \leq j,k \leq n-4 \\ c_{ij}^1 = 0 = c_{ij}^2, & 1 \leq i < j \leq n-4 \end{array}$$

y también, por la $(n-3)$-filiformidad, que $d_{1j}^k = 0$ para $1 \leq j, k \leq n-4$, resultando ser el álgebra $\mathfrak{g}$ inicial isomorfa a una de ley determinada por

$$
\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-4} b_k Y_k & (b_k = b_{12}^k) \\
[X_1, Y_{n-4}] & = & \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0,1\} \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \beta_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4 \qquad (c_{ij} = c_{ij}^3)
\end{array}
$$

Se cumple que $X_0 + Y_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-5$, y como la sucesión característica es $(3, 1, 1, \ldots, 1)$ no puede haber menores de orden 3 no nulos. Esta propiedad, acompañada de un proceso de inducción finita, permite asegurar que

$$\beta_{ij}^k = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i < j \leq n-4, \ 1 \leq k \leq n-4$$

Al ser el vector X_1 adjunto-nilpotente y

$$
ad(X_1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \epsilon \\
0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & b_{n-4} & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}
$$

se debe verificar que

$$
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \epsilon \\
0 & b_k & 0
\end{vmatrix} = \epsilon b_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n-4
$$

De las restantes identidades de Jacobi se obtienen las restricciones que más abajo se especifican, con lo que se ha demostrado que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que sea $(n-3)$-filiforme de dimensión n y que se obtenga por extensiones por derivaciones de L_4 es isomorfa a una de la familia

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-4} b_k Y_k & \\
[X_1, Y_{n-4}] & = & \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0,1\} \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4
\end{array}
\right.
$$

con las restricciones

$$\begin{cases} \epsilon b_k = 0 & 1 \leq k \leq n-4 \\ \sum_{k=2}^{n-4} b_k c_{1k} = 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-4} b_k c_{ik} = \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-5 \\ \sum_{k=1}^{n-5} b_k c_{k,n-4} = 0 & \end{cases}$$

Hay que distinguir distintos casos.

CASO $\epsilon = 0$ Y $b_k = 0$, $1 \leq k \leq n-4$.
Se cumple que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4 \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq n-4$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^1$.

Si existe algún $c_{ij} \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n-4$, se puede suponer $c_{12} \neq 0$. Se puede, además, suponer $c_{12} = 1$ y $c_{1k} = 0 = c_{2k}$ $3 \leq k \leq n-4$, sin más que hacer el cambio de base expresado por

$$\begin{cases} X_t^* = X_t & 1 \leq t \leq 3 \\ Y_1^* = \frac{1}{c_{12}} Y_1 & \\ Y_2^* = Y_2 & \\ Y_k^* = Y_k + \frac{c_{2k}}{c_{12}} Y_1 - \frac{c_{1k}}{c_{12}} Y_2 & 3 \leq k \leq n-4 \end{cases}$$

y se obtiene el álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_1, Y_2] = X_3 & \\ [Y_i, Y_j] = c_{ij} X_3 & 3 \leq i < j \leq n-4 \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0$, $3 \leq i < j \leq n-4$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^3$.
Se obtienen así sucesivamente las álgebras $\mathfrak{g}_n^{2q-1}$, $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

CASO $\epsilon = 0$ Y $b_k \neq 0$ PARA ALGÚN $1 \leq k \leq n-4$.
Se puede suponer que $b_{n-4} \neq 0$ y el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* = X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_k^* = Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \\ Y_{n-4}^* = \sum_{k=1}^{n-4} b_k Y_k & \end{cases}$$

prueba que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-5 \end{cases}$$

Por ser $(3, 1, \overset{(n-3}{\ldots}, 1)$ el invariante de Goze y considerando $ad(X_1 + Y_i)$, $2 \leq i \leq n-5$, se deduce que

$$c_{ij} = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-5$$

y se obtiene la ley determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} & \end{cases}$$

que corresponde a $\mathfrak{g}_n^{n-2}$.

CASO $\epsilon = 1$.
Como debe cumplirse $\epsilon b_k = 0$, $1 \leq i \leq n-4$, se deduce que $b_k = 0$, $1 \leq k \leq n-4$. Entonces, los productos corchete no nulos, salvo antisimetría, son

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4 \end{cases}$$

Si $c_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq n-4$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^2$.

Si $c_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq n-5$ y existe algún $c_{i,n-4} \neq 0$, $1 \leq i \leq n-5$, se puede suponer $c_{1,n-4} \neq 0$ y al considerar el cambio de base expresado por las relaciones

$$\begin{cases} X_0^* & = & X_0 & \\ X_1^* & = & c_{1,n-4} X_1 - Y_1 & \\ X_t^* & = & c_{1,n-4} X_t & 2 \leq t \leq 3 \\ Y_1^* & = & Y_1 & \\ Y_i^* & = & c_{1,n-4} Y_i - c_{i,n-4} Y_1 & 2 \leq i \leq n-5 \\ Y_{n-4}^* & = & Y_{n-4} & \end{cases}$$

la ley de $\mathfrak{g}$ viene expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & \end{cases}$$

que, evidentemente es isomorfa a $\mathfrak{g}_n^3$, ya obtenida en un caso anterior.

Procediendo de forma análoga, aparecen en este caso las nuevas álgebras $\mathfrak{g}_n^{2s}$, $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$. ∎

Se observa [3] que se han obtenido todas las álgebras $(n-3)$-filiformes de dimensión n y, en consecuencia, queda también demostrado el siguiente corolario.

COROLARIO 3. *Toda álgebra de Lie nilpotente $(n-3)$-filiforme de dimensión n se puede obtener como extensión por derivaciones de la única álgebra de Lie filiforme de dimensión 4, L_4.*

REFERENCIAS

[1] ANCOCHEA BERMÚDEZ, J.M., GOZE, M., Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8, *Archiv. Math.,* **50** (1988), 511–525.

[2] ANCOCHEA BERMÚDEZ, J.M., GOZE, M., Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7, *Archiv. Math.,* **52** (2) (1989), 175–185.

[3] CABEZAS, J.M., GÓMEZ, J.R., JIMÉNEZ-MERCHÁN, A., Family of p-filiform Lie algebras, in "Algebra and Operator Theory", Proceedings of the Colloquium in Tachkent, Kluwer Academic Publishers, 1997, 93–102.

[4] GÓMEZ, J.R., ECHARTE, F.J., Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 9, *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari,,* **61** (1) (1991), 21–29.

[5] GÓMEZ, J.R., JIMÉNEZ-MERCHÁN, A., HAKIMJANOV (KHAKIMDJANOV), YU, Low dimensional Lie Algebras, *J. Pure Applied Algebra,* **130** (2) (1998), 133–158.

[6] GOZE, M., HAKIMJANOV (KHAKIMDJANOV), YU, "Nilpotent Lie Algebras", Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] MOROSOV, V., Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order, (original en ruso) *Isvestia Vyschih Uchebnyh Zavedenii, Matematika,* **4** (5) (1958), 161–171.