LA CIENCIA DE LOS FILÓSOFOS, 1996, págs. 305-320.

LA MATEMÁTICA DE LAKATOS: EL PAPEL DE LA PRUEBA EN LA METODOLOGÍA

Pilar Beltrán. Murcia

Resumen: La Matemática era la Ciencia que Lakatos conocía mejor. En ella, la noción de «prueba» juega un papel central, pero también ocupa un puesto central como clave en la conexión entre la Metodología de la Matemática y la Metodología general de la Ciencia. Así, tras contrastar la existencia de dos etapas en la reflexión filosófica lakatosiana, el presente estudio ofrece las coordenadas de la perspectiva lakatosiana de la Matemática. Aborda después el carácter «cuasi-empírico» de la prueba matemática y sus tipos (informales y formales), para relacionar a continuación la prueba con los demás conceptos matemáticos lakatosianos. Por último, se utiliza la noción de «prueba» como hilo conductor para ver el nexo entre la Metodología histórica del primer período de Lakatos y la de los programas de investigación científica de su segundo período.

Abstract: Mathematics was the science which Lakatos knew best. The notion of «proof» plays in it a crucial role, but it also plays a pivotal role as the link between the methodology of mathematics and the general methodology of science. Once showed the existence of two periods in Lakatos's philosophical reflection, this study presents the framework of the Lakatosian view of mathematics. Then, it analyses the «quasi-empirical» character of the mathematical proof and provides its types (formal and informal). Later on, the paper highlights how the «quasi-empirical» proof is related to other Lakatosian mathematical concepts. Finally, this particular notion of «proof» is used to shed light on the real links between the historical methodology of Lakatos's first period and the methodology of scientific research programmes of his second period.

Lakatos comenzó trabajando en el terreno matemático. Su primera obra, *Proofs and Refutations,* refleja su reflexión sobre la Matemática como quehacer histórico. Este hecho no recibió mucha atención, debido probablemente a haber sido escrita al «estilo platónico», es decir, en forma de diálogo. Sin embargo, la Ciencia que realmente guió la reflexión de Lakatos fue —a mi juicio— la Matemática, ya que era la disciplina científica que mejor conocía y que le introdujo en el ámbito de la reflexión sobre la Ciencia en general. La noción de «prueba» matemática, dentro de la visión «cuasi-empírica» de Lakatos, aparece como el concepto clave en la conexión de sus reflexiones sobre la Matemática y la Ciencia en general.

1. El problema de las dos etapas en la reflexión filosófica lakatosiana

Acerca de la producción filosófica de Imre Lakatos hay una controversia inicial: el problema de si hay o no dos períodos claramente diferenciados en su

Pensamiento.[1] Porque, aun cuando se admita la existencia de una continuidad en su Filosofía de la Ciencia, es preciso distinguir, al menos, dos etapas temáticas distintas: la correspondiente a la reflexión sobre la Matemática, encuadrada entre 1959 y 1965, y la centrada en la Ciencia en general, que se extiende desde 1965 hasta su muerte en 1974.

La frontera de 1965 viene reforzada por el hecho de la celebración del Congreso de Londres, que Lakatos organizó junto con Alan Musgrave, y que reunió a K. Popper, que había sido hasta entonces su mentor intelectual, y a T. S. Kuhn, que fue un autor decisivo en su cambio de postura filosófica. Pero, a pesar de esta separación en etapas, la delimitación entre ellas no puede ser tan rígida, pues la ruptura con Popper no se presenta hasta finales de los años sesenta. Tampoco es del todo precisa la fecha de inicio de la primera época, pues aunque *Proofs and Refutations* fue redactado entre 1958 y 1959, el comienzo de dicha obra tiene lugar en 1956. No obstante, lo que sí resulta patente, a la vista de sus escritos, es la escasa atención que muestra Lakatos hacia la Matemática a partir de 1965.

Así pues, cronológicamente, Lakatos analizó antes la Metodología de la Matemática que la correspondiente a la Ciencia en general. En el primer caso, a pesar de ofrecer una visión original dentro del campo matemático, donde la historicidad de la prueba contrasta con la atemporalidad atribuida tradicionalmente a las pruebas matemáticas, está, sin embargo, plenamente influida por el falibilismo popperiano; mientras que, en el segundo período, las influencias de otros autores juegan un papel importante en su visión de la Ciencia.[2]

Sus análisis metodológicos fueron tanto de la Matemática como de la Ciencia en general, pero la mayoría de sus escritos y de los estudios sobre su concepción se centran habitualmente en su «Metodología de los Programas de Investigación Científica». Esta propuesta sobre la Ciencia en general aporta diversas novedades en su alternativa a Popper. Porque, para Lakatos, si se sigue el criterio popperiano de demarcación entre Ciencia y no-Ciencia, se darían situaciones sorprendentes: i) una teoría podría ser científica incluso si no contase con prueba alguna favorable, simplemente por el hecho de no haber sido refutada; ii) podría haber teorías consideradas como «pseudocientíficas» por tener una única refutación, aun cuando contasen con abundantes pruebas a su favor; iii) podrían darse «refutaciones» que en realidad fueran simples anomalías solucionables con el tiempo.[3]

También modifica algunos planteamientos respecto de Kuhn al menos en los siguientes puntos: a) el modelo kuhniano de cambio científico —la sustitución de unos paradigmas por otros tras un período de crisis— impide la posibilidad de comparar paradigmas —la inconmensurabilidad—, mientras que, según Lakatos, hay criterios para comparar cambios de programas de investigación científica (los

---

[1] Cfr. Berkson, W.: «Lakatos one and Lakatos two: an appreciation», en Cohen, R. S. Feyerabend, P. K. y Wartofsky, M. W. (eds.): *Essays in Memory of I. Lakatos*, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 39-54.

[2] Cfr. Berkson, W.: «Lakatos one and Lakatos two: an appreciation», pp. 49-51.

[3] Cfr. González, W. J.: «Ámbito y características de la Filosofía y Metodología de la Ciencia», en González, W. J. (ed.): *Aspectos metodológicos de la investigación científica*, 2ª ed., Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid y Publicaciones Universidad de Murcia, Murcia, 1990, pp. 49-78, pp. 64-65.

hay progresivos y regresivos); b) las revoluciones científicas kuhnianas, que provocan el cambio completo de paradigma son —para Lakatos— irracionales, por lo que, en tal caso, no cabría hablar de una «Lógica de la investigación científica» sino, a lo sumo, de una «Psicología del descubrimiento».[4]

Visto retrospectivamente, la importancia y novedad de la «Metodología de los Programas de Investigación Científica» eclipsó la reflexión lakatosiana sobre la Matemática, que era la primera cronológicamente y, probablemente, la más genuinamente lakatosiana. Algunos autores, como Berkson,[5] han señalado a este respecto que la verdadera revolución de Lakatos fue el establecimiento de la «Metodología histórica», que aplicó a un ámbito inicialmente «ahistórico»: el campo del desarrollo de teoremas en Matemáticas. Piensa, además, que debió continuar su reflexión por ese camino, en lugar de hacerlo por la ruta trazada por los «Programas».

La propuesta de Lakatos, que cabría denominar «Metodología histórica» de la Matemática, consiste en el establecimiento de los resultados matemáticos con carácter siempre provisional; y se diferencia de la propuesta kuhniana en cuanto a un menor énfasis en el papel adjudicado a la comunidad científica. Mientras en Kuhn el papel desempeñado por la comunidad es fundamental para que se produzca el cambio de paradigma, en Lakatos la comunidad no es fundamento último del quehacer matemático,[6] es decir, no es la encargada de decidir qué resultados son válidos; ahora bien, sí es la que tiene que establecer las *reglas* a seguir para llegar a los resultados válidos.

Si se intenta buscar una justificación de esa postura de Berkson, que va contra la opinión comúnmente aceptada —a la que cabría añadir incluso al propio Lakatos[7]—, se podría señalar que es precisamente en el campo de la Ciencia Matemática aquel que domina mejor. Lakatos era, en efecto, profesor de Pedagogía de la Matemática y realizó su Tesis Doctoral en el campo de la Matemática.[8] Todo lo anterior le cualificaba, en principio, para hacer una reflexión más rigurosa de este campo que del ámbito científico en general.

Otra interpretación, mantenida por Currie,[9] señala que la idea central de la Filosofía de la Ciencia de Lakatos ya está desarrollada en *Proofs and Refutations*, esto es, que la «Reconstrucción Racional de la Historia» está íntimamente ligada a la «Metodología histórica» propuesta en su Matemática. Porque, para Lakatos, la prueba de un teorema es un proceso que se desarrolla en el tiempo y a través del tiempo: es una «Metodología histórica». En consecuencia, la comprensión de la

[4] Cfr. González, W. J., *Loc. cit.*, pp. 58-59.

[5] Berkson, W.: «Lakatos one and Lakatos two: an appreciation», pp. 39-54.

[6] «In any case, my aim in this paper is not to show that proofs must be grounded in a community, but only to show how the community context matters to our concept of proof», Tymoczko, Th.: «Making Room for Mathematics in the Philosophy of Mathematics», *Mathematical Intelligencer*, v. 8, (1986), p. 49

[7] Al menos, desde el punto de vista de la producción de Lakatos se aprecia con claridad que es cuantitativamente mayor en el campo de la Ciencia en general que en la Ciencia Matemática.

[8] Lakatos. I.: *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, Tesis Doctoral, no publicada, Cambridge, 1961. Supervisada por el profesor R. B. Braithwaite.

[9] Cfr. Currie, G.: «Lakatos' Philosophy of Mathematics», *Synthese*, v. 42, (1979), pp. 339-40.

prueba de un determinado teorema pasa por la reconstrucción racional de la historia de la prueba.

En este caso, al intentar estudiar el análisis de la Ciencia que guiaba a Lakatos, conviene comenzar atendiendo a su formación científica, que era —como ya se apuntó— matemática, pues la visión resultante de la reflexión del autor está condicionada, a mi juicio, por esta perspectiva científica inicial. Además, si, en general, la reflexión filosófica y la Ciencia deben ir de la mano o, cuando menos, estar cerca, en el caso de la Matemática este hecho se agudiza, ya que sólo el conflicto entre teorías matemáticas es el que hace levantar la disputa filosófica dentro del campo matemático mismo. Un claro ejemplo de este fenómeno se puede encontrar a principios de este siglo con la famosa disputa sobre los fundamentos de la Matemática a cargo de las corrientes de pensamiento Formalista, Logicista e Intuicionista. Mientras no quedaron establecidas matemáticamente las teorías no-euclidianas, las distintas anticipaciones filosóficas de lo que constituirían las visiones formalista, logicista e intuicionista (como fue, por ejemplo, la kantiana) no fueron tenidas en consideración en el terreno matemático. La misma imposibilidad de realizar una demostración del quinto postulado de Euclides —el célebre de las paralelas—, que se venía arrastrando desde el mismo momento de la recopilación matemática llevada a cabo por este autor, había sido ignorada durante muchos siglos.[10]

Haciendo un recorrido histórico, se puede apreciar que todos los grandes filósofos de la Matemática (se podría decir incluso que todos los pensadores de la Matemática) han sido, al mismo tiempo, grandes matemáticos, y sus aportaciones, tanto al campo de la Matemática como al ámbito de la Filosofía de la Matemática, han sido cruciales. Así sucede en los casos de G. Frege, B. Russell, H. Poincaré o K. Gödel.

La Matemática fue la Ciencia que Lakatos más estudió y fue también la primera que abordó —con las características especiales que se han resaltado en cuanto a las reflexiones filosóficas sobre esta Ciencia—, por lo que cabe colegir que debió condicionar sus reflexiones posteriores sobre la Ciencia en general. A este respecto, si se admiten tres supuestos: i) que la Matemática era la Ciencia que mejor conocía; ii) que la reflexión sobre esta Ciencia tiene un carácter diferente al del resto de las Ciencias; y iii) que la visión y la reflexión de la Matemática que adoptó le condicionaron en su visión posterior, entonces parece que el estudio de la Ciencia de Lakatos ha de comenzar centrándose en los escritos que pertenecen a la época matemática. Esto supone atender sucesivamente a: *Proof and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*,[11] y a los artículos «*What does a Mathe-*

---

[10] Cfr. Körner, S.: «On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy», *Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science*, North-Holland, Amsterdam, 1967. Versión castellana, con traducción de Eli de Gortari: «La Matemática gödeliana y sus implicaciones filosóficas», *Suplementos III/11*, U.N.A.M., Dirección General de Publicaciones, México, 1972.

[11] Lakatos, I.: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, en la edición de J. Worrall y E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Versión castellana de Carlos Solís: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1986. El capítulo 1 de este libro está basado en el capítulo 2 de la Tesis Doctoral de Lakatos, leída en la Universidad de Cambridge en 1961.

matical Proof Prove?»,[12] *«The Method of Analysis-Synthesis»*,[13] *«Infinite Regress and Foundations of Mathematics»*,[14] *«A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?»*,[15] y *«Cauchy and the Continum»*.[16]

Siguiendo con el criterio adoptado aquí para interpretar a Lakatos— la existencia de dos períodos marcados por intereses temáticos diferentes—, el siguiente paso debe ser considerar cómo se caracteriza la forma en que se conectan estas dos épocas. Desde el prisma de la supuesta *continuidad* entre las dos etapas podrían abrirse dos vías interpretativas: por una parte, mantener que la primera época fuera el germen de la segunda, y, por otra parte, estaría el sostener que la reflexión lakatosiana de la Matemática no es más que la ejemplificación de lo que más tarde denominó la «Metodología de los Programas de Investigación Científica». Así, aun cuando la perspectiva sobre la Matemática elaborada por Lakatos no parece estar relacionada con su «Metodología» posterior, no se debe abandonar totalmente la posibilidad de la existencia de una continuidad en la obra de Lakatos, aunque sólo sea por el mero hecho de que ambas son obra del mismo autor.

La primera interpretación se centra en la reflexión sobre la Matemática como germen de la posterior Filosofía general la Ciencia. Berkson lo expone del modo siguiente: la Filosofía de la Matemática de Lakatos es una aplicación de la Filosofía falibilista de Popper al terreno matemático, mientras que la Filosofía lakatosiana de la Ciencia es un intento de reconstrucción de la teoría del desarrollo del conocimiento de Popper tras las críticas de J. Agassi, P. K. Feyerabend y T. S. Kuhn.[17] Así, la primera etapa sería el inicio de la segunda, en la que Lakatos terminaría su inacabada propuesta matemática.

Berkson considera que Lakatos tuvo en cuenta las ideas de Kuhn y Agassi al dar su nueva regla de elección teórica en cuanto que, por una parte, admitió que muchos científicos han sostenido algunos supuestos fundamentales mediante el acuerdo; y, por otra, en la medida en que acepta que los científicos asumen una determinada Metafísica, que sirve de base a las teorías científicas, de modo que

[12] Escrito durante los años 1959-60. Publicado en: *Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers. Volume 2*, en la edición de J. Worrall y G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge, 1978, pp. 61-69. Versión castellana de Diego Ribes: «¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?», en Lakatos, I.: *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, pp. 91-102.

[13] *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 70-101. Versión castellana: «El método de análisis-síntesis», *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, pp. 103-144. Este artículo se divide en dos secciones: la primera redactada entre 1956-61, se corresponde con el capítulo final de su Tesis; la segunda de 1974, es una réplica al profesor Jaakko Hintikka.

[14] *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 3-20. Versión castellana: «Regresión infinita y fundamentos de la Matemática», en: *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, pp. 15-41.

[15] *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 24-41. Versión castellana: «¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente Filosofía de la Matemática?», en: *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*,, pp. 42-66.

[16] *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 43-59. Versión castellana: «Cauchy y el problema del continuo: La importancia del análisis no estándar para la Historia y la Filosofía de la Matemática», en: *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, pp. 67-90.

[17] Cfr. Berkson, W., *Loc. cit.*, pp. 49-51

difícilmente puede ser encuadrada en los marcos metafísicos competidores.[18] De esta forma, al establecer su regla de elección, Lakatos se separa —según Berkson— de la visión popperiana, pues la comprobación de datos pasados para poder decidir si son verdaderos o falsos y, por tanto, para ver si hay progreso científico, no tiene que llevarse a cabo dentro de una teoría más progresista en el sentido popperiano. En cambio, en el ámbito matemático la postura de Lakatos sigue de cerca la posición metodológica de Popper, porque al establecer una teoría se tienen en cuenta los antiguos problemas y éstos aparecen modificados en muchos casos por los nuevos descubrimientos o los nuevos problemas resueltos.

Ahora bien, esta interpretación de Berkson resulta poco plausible si se admite que la visión falibilista adoptada por Lakatos en sus escritos sobre la Matemática fue criticada y abandonada posteriormente en su «Metodología».[19] De ahí que haya que acudir a una segunda interpretación, la defendida por M. Hallett.[20] Este autor mantiene la posibilidad de la reflexión sobre la Matemática como anticipación de la «Metodología de los Programas de Investigación Científica». A su juicio, en Lakatos las teorías científicas deben ser evaluadas atendiendo a sus consecuencias, lo que denomina «criterio de Hilbert».[21] Así, el criterio de progreso matemático propuesto en *Proofs and Refutations*, donde los cambios conceptuales son generados por las pruebas, dan como resultado nuevos marcos teóricos que se incorporan a los ya existentes. Estos se evalúan de acuerdo con sus consecuencias, según el criterio de Hilbert,[22] de modo que al establecer esta pauta para evaluar teorías se hace posible que Lakatos lo amplíe hasta el campo matemático.

Esta interpretación tropieza con dificultades, tales como la existencia o no de un núcleo duro en las teorías matemáticas, así como la dificultad en cuanto a la existencia de programas de investigación similares a los propios de las Ciencias Empíricas. La afirmación de Lakatos sobre su intención de realizar su reflexión sobre la Matemática al modo como realizó, posteriormente, su «Metodología de los Programas de Investigación Científica»,[23] es un dato demasiado pobre y que no apoya suficientemente esta postura.

Las dos interpretaciones más significativas sobre la posible continuidad en Lakatos dejan numerosos problemas abiertos, de modo que lo más coherente resulta —a mi juicio— mantener una clara distinción entre la perspectiva sobre la Matemática —primera etapa—, y la reflexión sobre la Ciencia en general —segunda etapa. Cabría, con todo, una continuidad, que consistiría en la evolución progresiva del autor a lo largo de su obra, pues las diferencias no resultan tan

---

[18] Cfr. Berkson, W., *Ibidem.*

[19] «... but he (Lakatos) now critically scrutinized Popper's Philosophy itself and found within it some open problems», Worral, J.: «Imre Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science», en Cohen, R. S. et al. (eds.), *Essays in Memory of Imre Lakatos*, p. 4.

[20] Cfr. Hallett, M.: «Towards a Theory of Mathematical Research Programmes(II)», *British Journal for the Philosophy of Science,* v. 30 (1979), pp. 135-159.

[21] Cfr. Hallett, M., *Loc. cit.*, p. 135.

[22] Cfr. Hallett, M., *Loc. cit.*, p. 141.

[23] «Unafortunately in 1963-4 that not yet made a clear terminological distinction between theories and research programmes, and this impaires my exposition of a research programme in informal, quasi-empirical mathematics», Lakatos, I.., *The Methodology of Scientific Research Programmes - Philosophical Papers Volume I,* Cambridge University Press, Cambridge, 1978, p. 52, nota 1.

cruciales como las similitudes (por ejemplo, lo relativo a la historicidad de la Ciencia).

Si bien en un primer momento Lakatos admitía como válida la postura falibilista de Popper, que le llevó al intento de adaptar dicha visión al campo matemático, en un segundo momento, al internarse en el terreno de la Ciencia en general, Lakatos consideró un error el falibilismo popperiano, y como primer paso no adoptó la noción popperiana de *progreso*. Pero nada apunta al abandono de dicha visión dentro del campo matemático, salvo la afirmación del propio Lakatos sobre su intención en la primera etapa (matemática), esto es, que su intento primero en el terreno matemático no pretendía más que lo que, posteriormente, desarrolló en la «Metodología». Pero en este punto, y debido a la temprana muerte de Lakatos, las hipótesis con respecto a la viabilidad o no de dicho proyecto (el desarrollo específico en el campo matemático de lo elaborado para la Ciencia en general) quedan en entredicho (¿poseen las teorías matemáticas un núcleo duro y unos programas de investigación al estilo de las teorías empíricas?) y, por tanto, lo único verdaderamente sólido es la visión sobre la Matemática que Lakatos presentó en su primera etapa.

Así, aunque pueda darse una visión de continuidad, no podrá serlo en sentido fuerte (las interpretaciones de Berkson y Hallett podrían ser consideradas como interpretaciones en sentido fuerte), ya que en la segunda etapa —de la Ciencia en general, que incluye, naturalmente, a la Ciencia Matemática—, la orientación adoptada por Lakatos mira a las Ciencias de la Naturaleza. Se podrán encontrar, pues, teorías científicas con programas de investigación y núcleos duros, que difícilmente serán adaptables y delimitables en las teorías matemáticas.

2. *Coordenadas de la perspectiva lakatosiana de la Matemática*

Lakatos enfoca su reflexión sobre la Matemática desde una punto de vista radicalmente diferente al adoptado por las corrientes fundacionalistas (Logicismo, Intuicionismo y Formalismo). Porque si las concepciones anteriores sobre la Matemática habían sido meros intentos de fundamentación que atendían al «deber ser» de la Matemática sobre bases sólidas y seguras, en Lakatos, en cambio, lo importante es el «ser» de esta Ciencia. Modifica así por completo la perspectiva anterior para pasar a ofrecer una justificación racional del quehacer matemático, de modo que las reglas se basan en la realidad de la actividad matemática.

Ante la Matemática Lakatos adopta una perspectiva metodológica. Lo que propone es un conjunto de normas o pautas para la actuación dentro del campo matemático. Ofrece, en efecto, una línea de actuación para *guiar* el desarrollo y progreso en el campo matemático, pero desde la perspectiva de la actividad matemática vista históricamente, que es, además y al mismo tiempo, una pedagogía; esto es, señala también cómo se enseña correctamente la Matemática. En ambos casos —el del «deber ser» y el del «ser»— hay un elemento de convergencia: el interés por el aumento en el conjunto de conocimientos de esta Ciencia, que no es más que el intento de establecer y delimitar con la mayor nitidez posible todos los resultados obtenidos, los caminos y formas de obtención, y las definiciones dadas. Pero, mientras la visión de los programas fundacionalistas adopta unas reglas fijas para el aumento cuantitativo y lineal de la Matemática, la concepción lakatosiana propone reglas orientativas para el aumento y desarrollo cualitativos, que no han de ser, necesariamente, lineales.

En su Metodología para la Matemática, Lakatos propone la reconstrucción racional de la Historia de esta Ciencia. Consiste en elaborar una prueba de una hipótesis-teorema, o problema-teorema (conjetura inicial), para buscar más tarde los posibles contraejemplos. Estos contraejemplos conducirán de forma indefectible, según Lakatos, al refinamiento de los conceptos que aparecían en la primera propuesta. Los conceptos, a su vez, harán que la conjetura sea reformulada más detalladamente y más exactamente.[24] La prueba se convierte, de este modo, en una parte crucial del proceso de desarrollo y aumento de la Matemática.[25] Si se acepta esta visión del desarrollo y aumento de la Matemática, se está admitiendo que se puede hacer Matemática de modo diferente al habitual, que la ve como Ciencia formalizada y exacta, de manera que existiría así la Matemática inexacta, sujeta a historicidad, sin dejar de ser Matemática.

Como elementos constitutivos de esta Matemática aparecen los siguientes: el método entendido en clave falibilista, la pedagogía como función que acompaña a esta Ciencia, la necesidad de definir, y los contraejemplos como factores del progreso matemático. Todos ellos giran en torno a un concepto aún más básico dentro de su visión matemática: la noción de *prueba*, desde una perspectiva cuasi-empírica de la Matemática.

Cada uno de esos elementos aparece en íntima relación con los demás. En cierto modo tienen una ordenación circular, pues todos los conceptos giran alrededor de la noción de *prueba*. Porque ante la prueba surgen los contraejemplos y, mediante el método de pruebas y refutaciones, se puede llegar a desvelar lemas hasta entonces «ocultos». Este método consiste, básicamente, en lo siguiente: dada una conjetura, su aceptación deberá ser el resultado del desarrollo de un determinado proceso. Así, si se sospecha que la conjetura es verdadera, se procederá a derivarla y probarla desde premisas aceptadas. Si, por el contrario, se sospecha que es falsa, entonces se intentará derivar su negación de un contraejemplo.[26] El progreso matemático proviene precisamente del uso de este método, mediante el que se van realizando refinamientos sucesivos de la primera prueba presentada de un teorema. Así, el desarrollo matemático no se deberá al número creciente de teoremas establecidos, sino al perfeccionamiento de conjeturas por medio de dicho método,[27] esto es, mediante el refinamiento de las definiciones de los conceptos, para hacer más precisas las conjeturas y, con ello, la formulación exacta que presenta el teorema al final. Este proceso aporta, por último, un criterio de progreso y desarrollo matemáticos, en el que todo teorema es, cuando

---

[24] Cfr. Davies, Ph. J. y Hersh, R.: «Lakatos and the Philosophy of Dubitability», en Davies, Ph. y Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Birckhäuser, Boston, 1981, pp. 345-359.

[25] Cfr. Agassi, J.: «The Lakatosian Revolution», en Cohen, R. S. et al. (eds.) *Essays in Memory of Imre Lakatos*, pp. 9-21.

[26] «How can we decide whether to accept the conjecture or not? If thinks that the conjecture is true we can try to prove it, taht is, derive it from accepted premisses. If we suspect that is false we can try to derive a counterexemple to it.», Currie, G., *loc. cit.*, p. 336.

[27] Steiner, M.: «The Philosophy of Mathematics of I. Lakatos», *Journal of Philosophy*, v. 80, (1983), pp. 502-3.

menos, matizable. Esto se traduce en un falibilismo en el campo de la Matemática —donde ningún resultado es definitivo. Esto es, si toda prueba de un teorema, obtenida por el método de pruebas y refutaciones, puede ser revisada en cualquier momento, entonces los resultados matemáticos serán siempre provisionales, es decir, estarán sujetos a la historicidad.

El seguimiento de la Metodología expuesta para el progreso matemático es, al mismo tiempo, una enumeración minuciosa de los pasos a seguir en el establecimiento definitivo de cada teorema. Esto hace más comprensible la formulación y demostración finales del teorema, y no es otra cosa que la pedagogía a aplicar en la enseñanza de las Matemáticas. Es decir, si al exponer la prueba de un teorema se enumeran todos los pasos históricos (los referidos a la historia de la prueba del teorema), su comprensión resultará más sencilla. Además, de forma paralela a la postura sostenida por H. Poincaré,[28] el alumno podrá reproducir con mayor desteza la prueba si conoce la finalidad que la guía, y los fallos que se han ido sucediendo antes de la presentación de la prueba tal como él la ha conocido. Por contra, la simple memorización de los pasos de la prueba (con el aspecto que la encuentra el alumno) no implica ni asegura su compresión.

Así pues, las coordenadas de la perspectiva de la Matemática de Lakatos abarcan, a mi entender, los términos *método, falibilismo, pedagogía, definición, contraejemplo, progreso* y *prueba,* y sus relaciones Ahora bien, tal como se expuso anteriormente, el análisis debe comenzar con la noción fundamental: la *prueba.*

3. *La prueba matemática en Lakatos y sus tipos*

De la misma caracterización lakatosiana de «prueba» matemática se desprende que es una noción compleja. Existen, a su juicio, tres tipos de pruebas matemáticas: «preformales», «formales» y «postformales». Estos tres tipos se pueden reunir en dos: «informales» y «formales».[29] Cada uno de ellos versan sobre un determinado ámbito de la Matemática, y posee unas características concretas. Así, «el primer y tercer tipo prueban algo sobre aquel material a veces claro y empírico, a veces vago y "cuasi-empírico", que constituye el objeto real, aunque bastante evasivo, de la Matemática. Esta especie de prueba está siempre expuesta a cierta incertidumbre respecto a la explicación de posibilidades no previstas hasta el presente. El segundo tipo de prueba matemática es absolutamente fiable; es una pena que no sea totalmente seguro —aunque sí aproximadamente seguro— acerca de qué es fiable dicha prueba».[30]

Las pruebas «preformales» son experimentos mentales que siguen las reglas de una teoría pre-formal. Estas reglas no son como las deducciones lógicas admitidas matemáticamente; las pruebas realizadas usándolas poseen por ello un rigor pre-

---

[28] «Si je le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'oeil l'ensemble du raisonnement, je ne dois pas caindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire», Poincaré, H.: *Science et Méthode,* Flammarion, Paris, 1908, p. 47.

[29] Lakatos, I.: «What does a mathematical proof prove?», p. 61.

[30] Lakatos, I: «What does a mathematical proof prove?», p. 69. La cita textual está tomada de la traducción de Diego Ribes, p. 102.

formal.[31] Son las reglas o pruebas que, según Lakatos, se desarrollan en el estadio preformal de las teorías, que después serán formalizadas. Por lo tanto, si terminan adquiriendo la categoría de «pruebas formales», serán consideradas dentro del mismo grupo que las «formales»; si la teoría en la que aparecen no se formaliza finalmente, serán entonces pruebas «informales».

Por su parte, las pruebas «formales» (por ejemplo, el *Teorema de Lagrange* para grupos finitos: «El orden de cualquier subgrupo divide al orden del grupo»), son demostraciones realizadas dentro de una teoría formal, y son las que la mayor parte de los matemáticos calificarían sin más como «demostraciones».[32] En ellas se da una secuencia finita de fórmulas. Cada uno de los pasos que en ella intervienen es o bien un axioma de la teoría en la que se incardina, o bien una fórmula derivada de las precedentes mediante reglas del cálculo mismo.[33] Según Lakatos, el segundo tipo —la prueba formal— se da en los sistemas formalizados en los que «la imaginación se encuentra amarrada a un pobre conjunto recursivo de axiomas y a unas pocas reglas».[34] Por esta razón, dedica su estudio a otro tipo de pruebas,[35] aquellas que se llevan a cabo en teorías que todavía no están axiomatizadas; esto es, teorías en las que sus términos básicos aún no han sido definidos y delimitados con la nitidez que tienen sus correspondientes formales.

Ahora bien, con la expresión «correspondientes formales» no se debe interpretar que toda teoría informal o preformal tenga su equivalente formal, ni que la relación entre términos sea biunívoca; se admite, por tanto, la existencia de teorías informales o preformales que todavía no tienen su correspondiente formal, y que tal vez no lo tengan nunca. Aquí, tal como se señaló antes, se entiende por «teorías informales» tanto las preformales (esto es, las que no han sido aún formalizadas) como las teorías metamatemáticas que, en un nivel de abstracción superior a las preformales, tampoco han recibido un tratamiento último formalizador.

Están, por último, las pruebas «postformales». Entre ellas hay dos clases diferentes: la que corresponde a la prueba de validez de los axiomas o principios de una teoría axiomatizada (como puede ser cualquier prueba que tenga como finalidad mostrar que el conjunto de axiomas propuesto sea modelo de una estructura matemática), y la correspondiente a las pruebas tales como la indecidibilidad de un sistema también formalizado completamente[36] (el *X problema de Hilbert*, que repercute sobre el conjunto de axiomas de la Aritmética: «No se puede decidir si un polinomio con n incógnitas con coeficientes enteros tiene alguna solución en Z^n»).

Así pues, la prueba matemática puede ser, para Lakatos, básicamente de dos tipos: formal e informal. La prueba formal no difiere de lo que comúnmente se

---

31 Lakatos, I.: «What does a mathematical proof prove?», pp. 65-66.

32 Cfr. Beltrán, P.: «Semántica de las nociones matemáticas de «prueba» y «demostración»», en Martín Vide, C. (ed.): *Actas del VIII Congreso de Lenguajes naturales y lenguajes formales*, PPU, Barcelona, 1992, pp. 181-188.

33 Lakatos, I.: «What does a mathematical proof prove?», p. 62.

34 Lakatos, I.: «What does a mathematical proof prove?», p. 61.

35 Por ejemplo la del teorema de Euler, que sirve de hilo conductor de su libro *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.*

36 «What does a mathematical proof prove?», pp. 68-69.

entiende por «demostración» matemática. Pero, mientras que la demostración o prueba formal se encuentra sometida a unas reglas fijas de deducción, de modo que sus resultados son predecibles e inamovibles, la prueba informal, en cambio, no necesita una teoría perfectamente formalizada para que sea considerada como una prueba matemática válida. La visión de la «prueba» matemática propuesta por Lakatos se aleja, así, de las anteriores pruebas realizadas por los fundacionalistas.

Las características que, según Lakatos, debe reunir una *prueba* para que sea una auténtica «prueba matemática» son las siguientes: i) no requiere estar hecha siguiendo las reglas de una teoría formalizada, pues acepta que hay pruebas matemáticas informales; ii) sus consecuencias no se podrán predecir con precisión, ya que no acepta que haya un dominio restringido donde pueden intervenir las reglas; iii) está sujeta a futuras revisiones y modificaciones, lo cual le confiere un carácter temporal, una *historicidad* que es ajena por completo a la demostración.[37] Esta delimitación de la «prueba» matemática guarda ciertas similitudes con la noción de experimento (prueba empírica) que tiene lugar en las Ciencias de la Naturaleza. La «prueba» matemática está, de forma paralela al experimento, sujeta a revisiones posteriores, sus resultados no son siempre predecibles y no sigue unas reglas fijas; puede ser considerada, por tanto, como «cuasi-empírica». Todo ello posibilita que la visión lakatosiana de la Matemática mediatizada por el concepto de «prueba», sea considerada, también, como «cuasi-empírica». La visión lakatosiana de la prueba va, de este modo, más allá que otras concepciones como puede ser la de Wittgenstein, para quien las demostraciones matemáticas son meros cálculos estrictamente matemáticos. El único paralelismo posible con los experimentos de las Ciencias de la Naturaleza se produce cuando se juzga si las reglas del cálculo han sido empleadas de forma correcta, es decir, cuando se revisa la corrección del uso que se ha hecho de tales reglas. Pero el resultado obtenido de este «experimento» en el campo matemático no es una proposición matemática (un enunciado matemático), sino uno psicológico.[38]

Esta caracterización de la «prueba» matemática aproximaría la visión lakatosiana de la Matemática a posiciones «anti-realistas» de la verdad, tales como la defendida por M. Dummett, para quien la noción de verdad es reemplazada por la de aserción justificada.[39] Así, «sólo se considera verdadero un enunciado matemático cuando hay una prueba de él, y falso en el caso de estar en posesión de algo que lo refuta».[40]

[37] Beltrán, P.: «Semántica de las nociones matemáticas de «prueba» y «demostración»», pp. 181-188.

[38] Cfr. González, W. J.: «Mathematics as Activity», *Daimon*, v. 3, (1991), pp. 113-131.

[39] «Dummett reemplaza la concepción realista de verdad, que se centra en la idea de objetividad (la verdad es algo que cada enunciado matemático posee de modo determinado o carece de él, al margen de los medios que tengamos para reconocer su valor de verdad), por la anti-realista de aserción justificada, según la cual aceptamos un enunciado en virtud de que hay una prueba que lo garantiza o puede ser construida», González, W. J.: «Semántica anti-realista: intuicionismo matemático y concepto de verdad», *Theoria*, v. 12-13, (1990), p. 151.

[40] Cfr. González, W. J.: «Semántica anti-realista: intuicionismo matemático y concepto de verdad», p. 157.

4. *La relación de la prueba matemática con otros conceptos matemáticos*

La definición de «prueba» matemática propuesta por Lakatos lleva a las demás nociones claves de su visión de la Matemática. Así, con respecto al concepto de *definición*, el proceso sería el siguiente: dado el enunciado de un problema-teorema o una hipótesis-teorema, se lleva a cabo una primera prueba. Una vez concluida dicha prueba, se realiza un análisis de la misma, que tendrá como finalidad la extracción de toda la información (teórica) usada y no declarada en la prueba; esto es, los lemas ocultos que han dado lugar a la aceptación de forma implícita de algunos de los pasos de la prueba. En muchos casos, el resultado de este análisis conduce a la reformulación de la primera presentación del teorema. Esta reformulación conlleva la redefinición de los términos a los que se refería la primera formulación. Así, algunas de las definiciones de los «objetos» matemáticos son generadas por las pruebas.[41]

Respecto de la noción de *contraejemplo*, otro de los conceptos a los que da lugar la revisión de la prueba matemática, Lakatos distingue tres tipos: i) los contraejemplos globales y no locales; ii) los contraejemplos locales y no globales; iii) los contraejemplos locales y globales.[42] En cada caso, los contraejemplos empiezan a aparecer después de realizar la primera prueba del teorema. Según Currie,[43] los contraejemplos globales y locales son los que producen la ampliación y cambio de las definiciones; esto es, los que son contraejemplos de algún lema usado y, a la vez, lo son de la conjetura inicial.

Sobre la noción de *pedagogía*, que también es clave para entender la concepción de la Matemática, Lakatos la relaciona con su concepto de *prueba* y, más en concreto, con su método de pruebas y refutaciones. A su juicio, los textos matemáticos serían más sencillos si su redacción fuese histórica,[44] porque en la historia se ven reflejados todos los *desarrollos* previos de la prueba, que se presenta finalmente con un aspecto acabado. Por tanto, la Matemática debe seguir el proceso histórico en sus exposiciones, lo que haría que su comprensión resultara mucho más sencilla.[45]

Del mismo modo que los anteriores, los conceptos de *progreso, método* y *falibilismo* matemáticos se encuentran también íntimamente relacionados con la noción de prueba, y entre sí. Según Lakatos, existe un reino perteneciente a la

---

[41] «Such is the lesson of History, according to Lakatos, and if we want better Mathematics, we had better start letting proofs generate our definitions for us, and we should abandon the (formalist inspired) strict insistence on nominal definitions», J. R. Brown: «Proofs and truth in Lakatos's masterpiece», *International Studies in the Philosophy of Science*, v. 4 (1990), p. 126.

[42] «ALPHA: ...There are three possible types of counterexamples. We have already discussed the first, which is local but not global - it certainly would not refute the theorem. The second, which is both global and local, does not require any action: far from refuting the theorem, it confirms it. Now there may be third type, which is global but not local. This would refute the theorem...», Lakatos, I.: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, p. 43.

[43] Cfr. Currie, G.: «Lakatos' Philosophy of Mathematics», *Synthese*, v. 42, (1979), pp. 339-40.

[44] «Lakatos thinks mathematics would be much easier to learn if textbooks were written historically», Brown, J. R, «Proofs and truth in Lakatos's masterpiece», *International Studies in the Philosophy of Science*, v. 4, (1990), p. 118.

[45] Cfr. Berkson, W.: «Lakatos one and Lakatos two: an appreciation», pp. 47-48.

heurística matemática susceptible de análisis racional, que se sitúa entre los procesos de descubrimiento y de justificación matemática. Admite, en efecto, una «Lógica del descubrimiento matemático»,[46] esto es, una Metodología que nos conduce al descubrimiento y que se ve reflejada en su método de pruebas y refutaciones.[47]

Otro concepto clave para delimitar la perspectiva Matemática de Lakatos es el concepto de *falibilismo*. Porque, como ya se apuntó, el progreso matemático proviene del sucesivo *refinamiento de las pruebas* a que son sometidas las conjeturas, y no meramente del aumento del número de teoremas probados. Esto, junto con su clasificación de las pruebas en «formales» e «informales», podría conducir a pensar que el progreso en Matemáticas establece resultados definitivos. Pero, para Lakatos, el *progreso* matemático alcanzado por medio de este método —y por cualquier otro, según Steiner[48]— no establece verdades definitivas, de modo que el establecimiento del conocimiento definitivo en Matemáticas es imposible.

Según Steiner, esto es consecuencia directa del *método* empleado por Lakatos. Porque, si a pesar del refinamiento de las pruebas, siempre es posible seguir indefinidamente el proceso establecido por el método, ello se debe a que no hay ningún conocimiento seguro obtenible, ni siquiera en el campo matemático. El único «conocimiento» que se puede obtener es el que ofrece la conjetura, que, como tal, es provisional. Pero, como este proceso conduciría al infinito, Lakatos lo cierra afirmando: no hay nada incorrecto en una regresión infinita de conjeturas.[49]

Este tipo de falibilismo se asocia, normalmente, al propuesto por Popper,[50] a pesar de la existencia de opiniones en contra de que *Pruebas y Refutaciones* sea, efectivamente, la reconstrucción de la Matemática bajo el prisma de una Epistemología falibilista.[51] Ahora bien, el flujo y reflujo entre los distintos conceptos de

---

[46] Cfr. Worrall, J.: «I. Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science», pp. 2-8.

[47] «..the '*method of proof and refutations*'. Let me state its main aspects in three heuristic rules: *Rule 1. If you a conjecture, set out to prove it and to refute it. Inspect the proof carefully to prepare a list of non- trivial lemmas (proof-analysis); find counterexamples both to the conjecture (global counterexamples) and to the suspect lemmas (local counterexamples). Rule 2. If you have a global counterexample discard your conjecture, add to your proof-analysis a suitable lemma that will be refuted by the counterexample, and replace the discarded conjecture by an improved one that incorporates that lemma as a condition. Do not allow a refutation to be dismissed as a monster. Try to make all "hidden lemmas" explicit. Rule 3. If you have a local counterexample, check to see whether it is not also a global counterexample. If it is, you can easily apply Rule 2. [...] Rule 4. If you have a counterexample which is local but not global, try to improve yuor proof-analysis by replacing the refuted lemma by an unfalsified one.*», Lakatos, I.: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, p. 50 y p. 58.

[48] Cfr. Steiner, M.: «The Philosophy of Mathematics of Imre Lakatos», p. 505.

[49] Lakatos, I.: «Infinite regress and foundations of mathematics», p. 10.

[50] «Lakatos had so far regarded himself as extending Popperian falibilism into the domain of mathematics...», Worrall, J., «Imre Lakatos (1922-1974): «Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science», en Cohen, R. S. et al. (eds.): *Essays in Memory of Imre Lakatos*, p. 4.

[51] «It would be fair to say that *Proofs and Refutations* Lakatos argues that dogmatic philosophies of mathematics (logicist or formalist) are unacceptable, and he shows that Popperian philosophy of mathematics is possible. However, he does not actually carry out the program of reconstructing the

la Matemática lakatosiana es incesante y ajeno a los intereses popperianos, que —como es sabido— no atendieron a la Matemática.

De este modo, estas nociones —mediatizadas por la noción de «prueba» matemática— configuran la visión «cuasi-empírica» de la Matemática de Lakatos.

5. *Conclusiones*

La interpretación sobre Lakatos defendida aquí, como concepción que *evolucionó progresivamente* (esto es, sin cambios radicales en su planteamientos desde la Matemática a la Ciencia en general), se presenta como la más adecuada, pues deja patente —a mi entender— la naturaleza tan distinta de ambos tipos de reflexión, así como los problemas de la relación entre la Metodología de la Ciencia, de un lado, y la Epistemología y la Lógica de la Ciencia, de otro (entendidas éstas como ramas del dominio de la Filosofía de la Ciencia). Da paso, así, a replantear el estatuto de la Metodología respecto de la Filosofía de la Ciencia.

Al distinguir los dos planos que estudia la Metodología —el general y el especial—, se ve que hay, por una parte, una «Metodología general»: la estrategia para el aumento de conocimiento científico y la solución de problemas en la Ciencia; y, por otra parte, la «Metodología especial», que consiste en las diferentes estrategias usadas por las distintas Ciencias para alcanzar el incremento de conocimiento y la solución de problemas científicos concretos.[52] La Metodología, entendida en su aspecto general, no suele atender a las exigencias reales de cada una de las Ciencias particulares, ya que las estrategias requeridas son dispares dependiendo de la Ciencia particular a la que se aplique. Además, cuando se pretende realizar una Metodología general, se restringe, habitualmente, a las Ciencias Empíricas,[53] con lo que la(s) estrategia(s) propuesta(s) puede(n) no ser aplicable(s) a las Ciencias Formales. Porque el proceso de contrastación formal tiene una especificidad que lo distingue del llevado a cabo en la contrastación empírica.

Tal como Lakatos entiende la índole metodológica de la Matemática y de la Ciencia en general, se ve con claridad que no hace más que resaltar las Metodologías diferentes que cabe construir. En otras palabras, en su enfoque se aprecian las diferentes orientaciones metodológicas que cabe dar dependiendo de si la Ciencia es de tipo empírico o es de naturaleza formal.[54] Con todo, su enfoque de la «prueba» tiene un carácter «cuasi-empírico» y deja una puerta abierta a paralelismos entre ambos tipos de Ciencias.

Así pues, la *Metodología de índole histórica*, presentada por Lakatos en su «primera etapa matemática», estaría próxima a la orientación que asimila la refle-

---

philosophy of mathematics with a fallibilist epistemology», Davies, Ph. J. y Hersh, R.: *The Mathematical Experience*, p. 348.

[52] Cfr. González, W. J., «Ámbito y características de la Filosofía y Metodología de la Ciencia», pp. 69-70.

[53] Cfr. González, W. J., *Loc. cit.*, p. 70.

[54] También cabría hacer la distinción incluyendo la o las Metodologías aplicables en las Ciencias Humanas. Ahora bien, ya que en los escritos de Lakatos las Ciencias tratadas son fundamentalmente la Matemática y las Ciencias de la Naturaleza, la clasificación se reduce aquí a estos dos tipos de Ciencias.

xión metodológica a la tarea de la Lógica y entiende la Metodología como «Lógica aplicada». Ahora bien, la similitud no vendría por la línea de la historicidad, sino en cuanto que el progreso matemático es un *quehacer reglado*, esto es, regulado por unas pautas bien establecidas, donde lo relevante no es el contenido cognoscitivo sino el cumplimiento de unas pautas formales. Pruebas y refutaciones matemáticas serían entonces elementos de un proceso metodológico de tipo «lógico», esto es, bien regulado. Sería una *lógica de la investigación*, pero abierta a la historicidad, a la que sin embargo es ajena la Lógica en sentido estricto.

En cambio, la *Metodología de los Programas de Investigación Científica* —su segunda etapa, dedicada a la Ciencia en general— se podría caracterizar como cercana a la visión que entiende la Metodología de la Ciencia como una Epistemología normativa (desarrollo del conocimiento siguiendo ciertas pautas),[55] entendiendo estas «normas» en un sentido amplio: como reglas orientadoras. Esta posible identificación entre Metodología de la Ciencia y Epistemología es el fruto de la no delimitación de los planos metodológico y epistemológico; o más exactamente, resulta de la confusión entre la Metodología de la Ciencia y la Filosofía de la Ciencia.

Si se admite que el intento de realizar una «Metodología general» queda en el plano de la Filosofía de la Ciencia y que poco aporta a las «Metodologías especiales» (que son enriquecidas por contribuciones puntuales de filósofos de la Ciencia con sus estudios particulares sobre determinadas Ciencias),[56] entonces se puede deducir fácilmente que Lakatos, en su segunda etapa, pretendió realizar una Metodología general, que tuvo como consecuencia su identificación con una Epistemología normativa. No obstante, también en su primera época —la centrada en la Matemática— aparecen interrelacionados los aspectos metodológicos, epistemológicos y lógicos. Así, su *Metodología matemática en clave histórica* es, al mismo tiempo, una Epistemología normativa, pues constituye el método de aumento de conocimiento matemático, y es también el método de razonamiento adecuado (Lógica).

Los cambios apreciables que hay entre los dos tipos de Metodología en Lakatos (la histórica y la de Programas de investigación), provienen, a mi juicio, de los distintas Ciencias a las que se aplica, esto es: la Matemática (Ciencia Formal) y las Ciencias Empíricas. El papel que la noción de «prueba» matemática como «cuasi-empírica», así como los procesos de pruebas y refutaciones, aproximan la distancia entre los dos períodos y las dos Metodologías de Lakatos.

BIBLIOGRAFÍA

—AGASSI, J.: «The Lakatosian Revolution», en Cohen, R. S. et al. (eds.) *Essays in Memory of Imre Lakatos*, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 9-21.

—BELTRÁN, P.: «Semántica de las nociones matemáticas de «prueba» y «demostración»», en Martín Vide, C. (ed.): *Actas del VIII Congreso de Lenguajes naturales y lenguajes formales*, PPU, Barcelona, 1992, pp. 181-188.

---

[55] Las distinciones entre las posturas que entienden la Metodología como una aplicación de la Lógica y como una Epistemología normativa, se encontran en: González, W. J., *Loc. cit.*, p. 71.

[56] Cfr. González, W. J., *Loc. cit.*, pp. 73-74.

—BERKSON, W.: «Lakatos one and Lakatos two: an appreciation», en Cohen, R. S., Feyerabend, P. K. y Wartofsky, M. W. (eds.): *Essays in Memory of I. Lakatos*, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 39-54.
—BROWN, J. R.: «Proofs and truth in Lakatos's masterpiece», *International Studies in the Philosophy of Science*, v. 4, (1990), pp. 117-130.
—CURRIE, G.: «Lakatos' Philosophy of Mathematics», *Synthese*, v. 42, (1979), pp. 339-40.
—DAVIES, PH. J. y HERSH, R.: *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.
—DAVIES, PH. J. y HERSH, R.: «Lakatos and the Philosophy of Dubitability», en: *The Mathematical Experience*, Birckhäuser, Boston, 1981, pp. 345-359.
—GONZÁLEZ, W. J.: «Ámbito y características de la Filosofía y Metodología de la Ciencia», en: GONZÁLEZ, W. J. (ed.): *Aspectos metodológicos de la investigación científica*, (2ª ed.), Ediciones Universidad Autónoma de Madrid y Publicaciones de la Universidad de Murcia, Madrid-Murcia, 1990, pp. 49-78.
—GONZÁLEZ. W. J.: «Semántica anti-realista: intuicionismo matemático y concepto de verdad», *Theoria*, v. 12-13, (1990), pp. 149-170.
—GONZÁLEZ, W. J.: «Mathematics as Activity», *Daimon*, v. 3, (1991), pp. 113-131.
—HALLETT, M.: «Towards a Theory of Mathematical Research Programmes (II)», *British Journal for the Philosophy of Science*, v. 30, (1979), pp. 135-159.
—KÖRNER, S.: «On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy», *Proceedings of the International colloquium in the Philosophy of Science*, London, (1965), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1967. Versión castellana de Eli de Gortari: «La Matemática gödeliana y sus implicaciones filosóficas», *Suplementos III/11*, U.N.A.M., Dirección General de Publicaciones, México, 1972.
—LAKATOS, I.: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, edición de J. Worrall y E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Versión castellana de Carlos Solís: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1986. El capítulo 1 de este libro está basado en el capítulo 2 de la Tesis Doctoral de Lakatos, leída en la Universidad de Cambridge en 1961.
—LAKATOS. I.: *Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers. Volume 2*, edición de J. Worrall y G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge, 1978. Versión castellana de Diego Ribes: *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, pp. 91-102.
—LAKATOS, I.: *The Methodology of Scientific Research Programmes - Philosophical Papers Volume I*, edición de J. Worral y G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge, 1978. Versión castellana de Juan Carlos Zapatero: *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza Editorial, Madrid, 1989.
—POINCARÉ, H.: *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1908.
—STEINER, M.: «The Philosophy of Mathematics of Imre Lakatos», *Journal of Philosophy*, v. 80, (1983), pp. 502-3.
—TYMOCZKO, Th.: «Making Room for Mathematics in the Philosophy of Mathematics», *Mathematical Intelligencer*, v. 8, (1986), pp. 44-50.
—WORRALL, J.: «I. Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science», en Cohen, R.S. et al. (eds.): *Essays in Memory of Imre Lakatos.*, pp. 2-8.

* * *

Pilar Beltrán
c./ Aire, 24
30150 La Alberca. Murcia