Thémata. Revista de Filosofía. Número 45. 2012

CÓMO HACER METAFÍSICA A PARTIR DE LA LÓGICA

Laureano Luna Cabañero, Siles.

Resumen: Presentamos un número de argumentos a favor o en contra de determinadas tesis metafísicas. Todos ellos se basan en fenómenos o resultados de la lógica matemática, entendida en un sentido amplio, y se ofrecen como ejemplos de la posibilidad de argumentar en metafísica a partir de resultados de este tipo.

Abstract: We offer a number of arguments for or against particular metaphysical theses. All of them are based in phenomena or results in mathematical logic, broadly conceived, and are offered as exemplification of the possibility of arguing in metaphysics from such results.

Históricamente ciertos descubrimientos lógico-matemáticos han tenido gran influencia sobre la filosofía. El primer caso de este tipo se produjo en la antigua Grecia, cuando Hipaso de Metaponto descubrió que $\sqrt{2}$ es irracional; esto implica que la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado no puede expresarse como la razón entre dos enteros porque en el cuadrado de lado 1 esa razón es $\sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$, según se deduce del teorema de Pitágoras. El descubrimiento provocó una crisis entre los filósofos pitagóricos, que creían que todas las relaciones del universo podían representarse como relaciones entre números.

Otro caso es el famoso *teorema de incompletitud* de Gödel de 1931; se considera que ese teorema refuta la versión más generalizada de una tesis fundamental del *positivismo lógico,* a saber, que todas las verdades no empíricas son verdaderas sólo en virtud de convenciones lingüísticas (cf. Raatikainen 2005).

Vamos a examinar aquí las implicaciones metafísicas de ciertos hechos lógico-matemáticos. Algunos de estos hechos fueron descubiertos a finales del siglo XIX o en la primera mitad del XX; otros se conocen desde antiguo pero sus consecuencias metafísicas no se han estudiado hasta el siglo XX.

Este artículo pretende ser divulgativo, en él se han evitado todos los tecnicismos prescindibles así como aquellos desarrollos que hubieran exigido demasiados tecnicismos; su lectura no requiere ningún conocimiento especializado previo. Eso y la limitación de espacio condicionan significativamente la presentación del material. Los argumentos que se presentan no pretenden ser concluyentes; tampoco pretenden simplemente aplicar la lógica formal para formalizar argumentos metafísicos;lo que pretenden es más bien ilustrar cómo resulta posible argumentar en metafísica utilizando descubrimientos realizados en diversos campos de la lógica matemática.

1. El argumento de las paradojas contra el platonismo

El Platonismo, en su concepción más usual, entiende que los objetos lógico-matemáticos existen objetiva e intemporalmente con independencia de toda mente que pudiera conocerlos o construirlos. Uno de los creadores de la moderna teoría de conjuntos, el matemático Paul Bernays (1994), afirmó en 1934:

> Algunos matemáticos y filósofos interpretan los métodos del platonismo en el sentido de un realismo de los conceptos, postulando la existencia de un mundo de objetos ideales que contendría a todos los objetos y relaciones de las matemáticas. Es este platonismo absoluto el que las paradojas han hecho insostenible, especialmente las paradojas relacionadas con la paradoja de Russell-Zermelo. (La traducción es mía)

La paradoja de Russell-Zermelo es la siguiente. Definimos así el conjunto R:

para todo conjunto x, x es elemento de R si y sólo si x no es elemento de x

Como eso vale para todo conjunto *x,* vale también para R, y entonces tenemos:

R es elemento de R si y sólo si R no es elemento de R

Esto es una contradicción. Es evidente que la contradicción surge porque consideramos que el mismo conjunto R que estamos definiendo es uno de los conjuntos *x* a los que nos referimos en la definición. Esto sugiere que cuando en la definición de R decimos *para todo conjunto x*, en realidad no nos podemos estar refiriendo al mismo R que estamos definiendo, porque ese R *todavía no está dado, está todavía en construcción.* Parece que los conjuntos se distribuyen en una jerarquía de niveles de construcción, por ejemplo:

conjuntos de individuos;
conjuntos de conjuntos de individuos;
conjuntos de conjuntos de conjuntos de individuos;etc.

De modo que en cada nivel de construcción hay conjuntos que ya están dados y otros que todavía no lo están: cuando estamos construyendo R, R todavía no está dado y por eso en su definición no podemos referirnos a él mismo.

La tesis de que no podemos referirnos simultáneamente a la totalidad del universo matemático se desprende de un principio de la *teoría de modelos* usual, que afirma que sólo un conjunto no vacío es un posible *universo de discurso,* es decir un posible ámbito de referencia. La teoría de modelos es la teoría lógico-matemática que estudia las propiedades semánticas de los lenguajes lógicos formales. La tesis de que las paradojas sugieren que no podemos referirnos a la totalidad del universo matemático fue defendida ya por Michael Dummett (1981). Rayo y Uzquiano (2006) ofrece una buena perspectiva sobre el estado de la discusión.

Pero si los objetos matemáticos -y entre ellos los conjuntos- existen desde siempre en un mundo objetivo con independencia de las construcciones que nosotros hagamos de ellos, como afirma el Platonismo, no se entiende bien por qué no están todos los conjuntos dados de una vez y por qué no nos podemos referir de una vez a todos ellos al construir R. La tesis, sugerida por las paradojas, de que el universo lógico-matemático no está nunca totalmente dado es una de las claves metafísicas fundamentales que parecen desprenderse sólo de hechos lógicos. La volveremos a encontrar.

2. El argumento de Gödel contra el materialismo

2.1. Una versión informal del teorema de Gödel de 1931

El teorema de incompletitud de Gödel de 1931 (Gödel 1989) es uno de los resultados más importantes de las matemáticas del siglo XX y, sin duda, el de mayor importancia para la filosofía, en campos como la teoría del conocimiento o la filosofía de la mente. La que sigue es una versión muy débil del teorema, que además asume la *tesis de Church-Turing*.

Teorema: no existe un programa de ordenador capaz de generar todas las verdades matemáticas en una lengua como el castellano sin generar ninguna falsedad.

Demostración.

Si un programa no genera falsedad, lo llamamos *correcto*. Si genera todas las verdades matemáticas, lo llamamos *completo*. Escogemos como lengua el castellano. Entonces el enunciado del teorema se puede expresar así:

no existe un programa correcto y completo para el castellano

Primero hay que advertir que, dado un programa P cualquiera que genere secuencias de símbolos, la cuestión de si P generará una secuencia particular S es una cuestión matemática. Tomamos entonces un programa P cualquiera para demostrar que no es a la vez correcto y completo para el castellano.Para eso planteamos ahora una cuestión matemática: si P genera o no la siguiente secuencia de símbolos, a la que llamamos G (por Gödel):

P no genera esta secuencia de símbolos

Debe quedar claro que G habla la secuencia de símbolos a la que llamamos G.O bien P genera G o bien no lo hace.

Supongamos que P genera G: entonces G es falsa, de modo que P genera una falsedad matemática y no es correcto.

Supongamos que P no genera G: entonces G es verdadera, con lo que hay una verdad matemática que P no genera y no es completo.

Por lo tanto, o P no es correcto o P no es completo. Es evidente que podemos repetir esta prueba para cualquier P y cualquier lengua en la que se pueda expresar G.

2.2. La Gibbs Lecture. 1951

En 1951 Gödel dio una conferencia, llamada la *Gibbs Lecture* (Gödel 1994). En ella, basándose en una versión de su teorema, argumenta contra la posibilidad del intento materialista de reducir tanto el mundo ideal de las verdades matemáticas como el mundo mental al cerebro.

Gödel asume tres cosas en su argumento:

1ª. Su teorema.

2ª. Que la inteligencia humana es correcta en última instancia.

3ª. Que el cerebro es funcionalmente un ordenador.

A partir de ahí argumenta que o bien no es posible reducir los objetos ideales a objetos mentales o bien no es posible reducir éstos últimos a estructuras o acontecimientos cerebrales.Es decir, que no son posibles estas dos reducciones:

1. De los objetos ideales (verdades matemáticas) a los objetos mentales (objetos de la inteligencia humana)

2. De los objetos mentales a objetos materiales (cerebro/ordenador)

Gödel argumenta que si la inteligencia humana fuera sólo el funcionamiento de un cerebro/ordenador (por la segunda reducción) y además pudiera conocer todas las verdades matemáticas (por la primera reducción), habría un ordenador correcto capaz de generar todas las verdades matemáticas, lo que contradiría su teorema de 1931.

Para Gödel, esto hace improbable el proyecto materialista de reducir tanto los objetos ideales como la mente humana al cerebro. Gödel, que era un platonista, creía que ninguna de las dos reducciones es posible. Aunque se inclinaba por pensar que la inteligencia humana puede conocer en principio todas las verdades matemáticas (y, por tanto, no es un ordenador), opinaba que los objetos matemáticos poseen una existencia objetiva independiente de la mente humana.

3. El segundo teorema de Gödel y los límites de la inteligencia artificial

Gödel, en el mismo artículo de 1931 en el que demostró el teorema de incompletitud del que hemos ofrecido antes una versión informal, obtuvo un resultado que suele llamarse *segundo teorema de Gödel.* Una versión informal de este segundo teorema podría ser:

ningún programa consistente capaz de tratar la aritmética elemental demuestra su propia consistencia.

Un programa es consistente si y sólo si no genera un enunciado y su negación, es decir, si no es contradictorio. Este resultado puede usarse para argumentar contra la posibilidad de un ordenador que reproduzca fielmente la inteligencia lógico-matemática humana, entendida ésta en un sentido amplio. Para proceder es primero necesario asumir que 'inteligencia lógico-matemática humana' designa algo bien definido; si no fuese así, la cuestión de si esa inteligencia puede ser reproducida en un ordenador carecería de sentido. La cuestión se plantea porque, en general, tendemos a creer que todos los seres humanos, en cuanto seres racionales, compartimos una misma razón lógico-matemática (a pesar de que la habilidad lógico-matemática de unos sea muy diferente de la de otros), de modo que cabe pensar que esa razón es algo bien definido.

Supongamos que la inteligencia lógico-matemática humana puede ser reproducida en un programa de ordenador. Llamémoslo H. Con seguridad esa inteligencia incluye la aritmética elemental y probablemente una de nuestras convicciones lógico-matemáticas es que nuestra inteligencia lógico-matemática es consistente: casi nadie cree posible que nuestras matemáticas demuestren algún día una contradicción.

Por tanto, si H existe, H probablemente demostrará su propia consistencia y entonces, por el segundo teorema de Gödel, será inconsistente. Esto implica que probablemente, si H existe, nuestra inteligencia lógico-matemática es inconsistente y esto último resulta difícil de aceptar. El argumento sugiere, pues, que si existe algo bien definido a lo que podamos llamar 'inteligencia lógico-matemática humana', ésta no puede ser reproducida en un ordenador. Sin embargo, según J. R. Lucas (1961, nota 9), Hilary Putnam sugiere una conclusión diferente: nuestra creencia en la consistencia de nuestra razón puede ser un indicio de que en realidad somos inconsistentes.

Naturalmente, si el cerebro es funcionalmente un ordenador, esto implica que la inteligencia lógico-matemática humana no se reduce al funcionamiento del cerebro humano, de manera que este argumento puede convertirse en un argumento contra el materialismo. Hay dos objeciones más o menos evidentes que pueden plantearse contra la tesis de que el cerebro sea funcionalmente equivalente a un ordenador y, por tanto, contra la posibilidad de convertir el argumento anterior en un argumento contra el materialismo:

1. El cerebro está en interacción con el mundo exterior y su comportamiento depende de esta interacción, en cambio los ordenadores están totalmente determinados por su diseño interno.
2. El cerebro podría utilizar para procesar información sucesos *cuánticos* y los sucesos cuánticos podrían no ser reproducibles en un ordenador convencional. Esta es la tesis que propuso el célebre físico británico Roger Penrose (1991).

La primera objeción encuentra el siguiente problema: si la inteligencia lógico-matemática humana se reduce al comportamiento del cerebro humano y el entorno físico que el cerebro humano necesita para desarrollarla es finito, entonces cerebro y entorno pueden ser reproducidos ambos conjuntamente en un ordenador convencional (de enorme tamaño, probablemente) y entonces estamos expuestos de nuevo a los problemas que se derivan del segundo teorema de Gödel. Parece muy improbable que el cerebro humano, si es que en él reside nuestra inteligencia lógico-matemática, necesite interaccionar con un entorno físico infinito para desarrollarla.

La segunda objeción encuentra este problema: no está claro que los fenómenos característicos del mundo cuántico sean independientes de la conciencia humana, en concreto, de la mente del observador; algunos intérpretes de la física cuántica, como el premio nobel de Física Eugene Wigner, han sostenido que esos fenómenos surgen en la interacción entre el mundo físico y la mente del observador. Wigner (1970) escribió que *no era posible formular las leyes (de la mecánica cuántica) de manera totalmente consistente sin hacer referencia a la conciencia.* (Paréntesis mío).

Wigner se refiere a una parte de la teoría cuántica -al *colapso de la función de onda*-, que resulta difícil de explicar sin echar mano del papel de la conciencia del observador. Los sistemas cuánticos pueden estar en una *superposición de estados* hasta que un observador realiza una medición: en ese momento salen de la superposición y aparecen en un estado concreto y en esto consiste el colapso de la función de onda. Este colapso resulta tan difícil de explicar sin el recurso a la conciencia del observador que los físicos que quieren evitarlo se ven obligados a postular teorías tan exóticas como la *teoría de los muchos mundos,* según la cual cada vez que una función de onda se colapsa el mundo se divide en una pluralidad de universos.

El mismo Werner Heisenberg –que propuso en 1927 el *principio de incertidumbre,* el principio que subyace a estos fenómenos cuánticos– sugirió en algunos de sus escritos que la mecánica cuántica no puede explicarse sin la intervención del observador (Heisenberg 1985):

> En la medida en que en nuestro tiempo puede hablarse de una imagen de la Naturaleza propia de la ciencia natural exacta, la imagen no lo es en último análisis de la Naturaleza en sí; se trata de una imagen de nuestra relación con la Naturaleza. (…). La ciencia natural no es ya un espectador situado ante la Naturaleza, antes se reconoce a sí misma como parte de la interacción de hombre y Naturaleza. (…). La imagen del Universo propia de la ciencia natural no es pues ya la que corresponde a una ciencia cuyo objeto es la Naturaleza.

Si eso fuese así, al reducir la inteligencia humana a un cerebro *con sucesos cuánticos incluidos,* tal vez no estaríamos reduciéndola a algo puramente material.

4. El argumento de las paradojas contra el materialismo

Vamos a ver ahora cómo la paradoja del Mentiroso puede usarse para argumentar contra el materialismo. Hay que tener en cuenta que aquí, igual que en los demás apartados, se trata sólo de un argumento, no lo presentamos como una demostración.

Consideramos la oración M

este juicio es falso

Debe quedar claro que la oración M pretende referirse a sí misma. Calculamos y vemos que no podemos atribuirle ningún valor de verdad sin contradicción: si M es verdadero, debe ser verdad lo que dice y entonces es falso; si M es falso, resulta que eso es precisamente lo que M dice, de modo que M es verdadero. Nos vemos obligados a reconocer que M no es verdadero ni falso; decimos entonces que, aunque se trata de una oración con la estructura sintáctica de las oraciones que usualmente expresan enunciados o proposiciones, M no expresa una proposición; si la expresara tendría un valor de verdad porque toda proposición es verdadera o falsa -esta afirmación se llama *principio de bivalencia*-. Llamaremos *paradójicas* a las oraciones que no expresan proposiciones. Este curso de razonamiento ha sido defendido convincentemente entre otros por S. Kripke (1975), H. Gaifman (1992, 2000) y L. Goldstein (1992, 2000), y hasta ahora parece capaz de superar las objeciones que otros han planteado.

Parece obvio que lo que hace que M provoque una paradoja es que su carácter autorreferente da lugar a una circularidad en la determinación de su valor de verdad (esto no implica que la autorreferencia sea la causa de todas las paradojas). Para verlo mejor, conviene considerar esta otra oración a la que llamaremos V:

este juicio es verdadero

Al hacer los cálculos, se comprueba que no llegamos a ninguna contradicción suponiendo que V es verdadero y tampoco suponiendo que es falso, de modo que es imposible atribuirle un valor de verdad concreto; solemos considerar que V es semejante a M y que carece de valor de verdad. Es instructivo comparar V con este juicio, al que llamaremos N:

la nieve es blanca

Para saber si N es verdadero, vamos y miramos la nieve. Pero para saber si V es verdadero tenemos que decidir precisamente si V es verdadero o no, con lo que estamos en un círculo vicioso. La lección que parece deducirse es que un juicio no puede referirse a sí mismo porque *no está dado para sí mismo,* no es un *dato* para sí mismo. Parece que a los juicios hay que distribuirlos en niveles lógicos para que hablen de cosas *previamente dadas.* Así:

la nieve es banca habla de la nieve;

'*la nieve es blanca* es verdadero' habla del juicio *la nieve es blanca;*

" '*la nieve es blanca* es verdadero' es verdadero" habla del juicio '*la nieve es blanca* es verdadero';etc.

Ahora bien, parece claramente imposible dar lugar a una paradoja al referirnos a algo que existe objetivamente, que está objetivamente dado para cualquier pensamiento, como lo están los objetos materiales. Por tanto, si los juicios fuesen objetos materiales -por ejemplo, estructuras neuronales- deberían poder referirse a sí mismos sin problemas lógicos y las paradojas como la del Mentiroso no existirían.

Otra forma de plantear el argumento es la siguiente. Suponga el lector que X es su nombre y considere esta oración, a la que llamaremos H:

X no sabe que este juicio es verdadero

Vamos a demostrar que H es una oración paradójica, que no es verdadera ni falsa. Si fuese falsa, X (es decir, el lector) sabría que es verdadera; pero nadie puede *saber* que una oración falsa es verdadera, puede como mucho *creerlo.* Luego H no puede ser falsa.

Si H no fuese paradójica, de ahí se deduciría que es verdadera; pero entonces X (es decir, el lector) podría deducirlo igualmente y sabría que H es verdadera, con lo que H sería automáticamente falsa y estaríamos de nuevo en una contradicción. Por tanto, H es paradójica.

Ahora bien, si X (es decir, el lector) fuese un objeto material y su conocimiento fuese sólo un proceso material objetivamente dado, debería resultarnos imposible construir una paradoja refiriéndonos a él, como hemos hecho por medio de H.

Lo que este razonamiento sugiere es que las cosas materiales están siempre objetivamente dadas para cualquier pensamiento pero el pensamiento no está siempre objetivamente dado para sí mismo; por ejemplo, mientras pensamos que la nieve es blanca, no podemos pensar a la vez que pensamos que la nieve es blanca; no parece posible que un acto de pensamiento sea su propio objeto; esto explicaría los problemas que plantean las oraciones autorreferentes (cf. Luna 2008). Según este planteamiento, el pensamiento, puesto que no está siempre objetivamente dado para el pensamiento, difícilmente podría ser una cosa material.

Algo semejante ocurría con la paradoja de Russell-Zermelo y los objetos ideales: si los objetos ideales existiesen en un mundo platónico deberían estar siempre dados para el pensamiento; vimos, sin embargo, que parece que, cuando definimos el conjunto R, el mismo conjunto R no nos está dado.

Desde una cierta interpretación de la física cuántica se podría argumentar que no es cierto que todos los objetos físicos estén objetivamente dados al pensamiento: los objetos sometidos a fenómenos cuánticos podrían no estarlo; de hecho el *principio de incertidumbre* de Heisenberg prohíbe que todas las propiedades de un objeto físico –por ejemplo, la posición y el impulso de una partícula– nos estén dadas simultáneamente. El problema es que para argumentar así es necesario admitir que la partícula en cuestión tiene objetivamente una posición y un impulso definidos, aunque a nosotros nos resulte imposible medirlos; y parece que esta posición sólo puede adoptarse si se admite que la incertidumbre cuántica resulta de una interacción entre el mundo físico y el observador, esto es, que no pertenece al mundo físico en sí mismo. Ahora bien, si se admite esto, lo que llamamos *mundo físico* en física cuántica podría no ser ya algo puramente material, sino más bien el resultado de la interacción entre la conciencia del observador y el objeto observado.

5. LA PARADOJA DE BENARDETE Y EL COMIENZO DEL TIEMPO

Ofrecemos a continuación un argumento contra la posibilidad de un tiempo sin un primer instante. El argumento está basado en una versión de la paradoja de Benardete (1964), un filósofo estadounidense contemporáneo y ha sido planteado antes por el autor en (Luna 2009). Es posible ofrecer una formulación informal mediante la siguiente versión de la paradoja.

Supongamos que hay una cadena infinita de unidades de tiempo hacia el pasado. Supongamos además que en cada unidad de tiempo suena un gong y que en cada tañido está presente una misma persona P. Suponemos finalmente que cada tañido es tan fuerte que deja sordo a P para siempre si P no ha quedado antes sordo por un tañido anterior. Podemos demostrar que P está sordo y que no está sordo. Demostramos que P está sordo en cualquier día D del tiempo: supongamos que P no está sordo en D; entonces tampoco lo estaba el día anterior a D; entonces el tañido del día anterior lo dejó sordo; entonces está sordo en D:

contradicción; luego P está sordo desde siempre. Pero, como P está sordo desde siempre no ha podido oír ningún tañido; por tanto, P no está sordo. Esta contradicción demuestra que la situación es imposible. Parece que lo único que podría ser imposible en esta situación es la existencia de un pasado sin primer instante; y, en efecto, la contradicción desaparece si existe un primer día del tiempo: P se habría quedado sordo en ese primer día.

Damos a continuación una versión más formal del argumento.

Supongamos que existe una serie S de unidades de tiempo t_n sin una primera unidad. Cada elemento t_n de S puede estar determinado de diversa manera; para simplificar asumamos que cada t_n de S puede estar en el estado 1 ó en el estado 0.

Escojamos un elemento cualquiera t_0 de S. Demostramos que la siguiente ley L determina efectivamente el estado de t_0:

L)para todo t_n, t_n está en 1 si y sólo todos los instantes anteriores a t_n están en 0.

Lo único necesario para que el estado de t_0 quede determinado por L es que, cuando L tenga que determinar ese estado, esté previamente determinado si todos los elementos anteriores a t_0 estuvieron en 0 ó no; ahora bien, cuando L determina el estado de t_0 los estados de los elementos anteriores a t_0 son acontecimientos pasados en el tiempo, de modo que están definitivamente determinados: por el principio de tercio excluso, o bien estuvieron todos en el estado 0 y entonces el estado de t_0 queda determinado en 1, ó bien alguno estuvo en estado 1 y entonces t_n estará en el estado 0. Si los estados de los elementos anteriores a t_0 no estuvieran determinados, no existirían y entonces t_0 no existiría; pero hemos supuesto que existe puesto que hemos supuesto que existe la serie S de la que t_0 es un elemento. Por tanto, L determina efectivamente el estado de t_0.

Demostramos igualmente que L no determina el estado de t_0.

Supongamos que L determina el estado de t_0. Supongamos que L pone a t_0 en 1; entonces L pone a todos los elementos anteriores en 0; en concreto pone al elemento t_{-1}, inmediatamente anterior a t_0, en 0; pero también pone en 0 a todos los elementos anteriores a t_{-1}, luego pone a t_{-1} en 1. Contradicción. Luego L no pone a t_0 en 1 sino en 0. Pero, como t_0 era un elemento cualquiera de S, L pone en 0 a todos los elementos de S. Ahora bien, si el estado de t_0 es 0, hay algún elemento anterior a t_0 al que L pone en 1, contra lo que acabamos de demostrar. Contradicción. Luego L no determina el estado de t_0.

Entonces L a la vez determina y no determina el estado de t_0. Para evitar la contradicción, hay que admitir que existe un primer elemento de S.

Si existe un primer elemento de S, como no tiene elementos anteriores, L determina que estará en 0; el segundo elemento estará en 1 y todos los siguientes estarán en 0. La existencia de un primer elemento evita la contradicción. Lo que esto muestra es que nuestra concepción habitual del tiempo, según la cual el pasado está definitivamente determinado, es incompatible con la ausencia de un primer instante.

6. Teoría de conjuntos y teología

El creador de la disciplina lógico-matemática conocida como *teoría de conjuntos* fue el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918). Cantor concibió esta teoría como una manera de tratar matemáticamente el infinito y llegó a relacionarla con la teología: Cantor descubrió que el universo matemático es "tan grande" que no cabe en un conjunto, es decir, que no forma una totalidad acabada, y a esa "magnitud" la llamó el *infinito absoluto* y la consideró una forma de definir la infinitud de Dios.

Recientemente el lógico Patrick Grim (2003) ha usado la teoría cantoriana de conjuntos para desarrollar un argumento contra la posibilidad de un ser omnisciente. Grim plantea su demostración como un argumento contra la existencia de Dios, puesto que a Dios suele atribuírsele la omnisciencia.

La forma original del argumento se basa en el teorema de Cantor (1891), que afirma que los elementos de un conjunto C cualquiera no pueden emparejarse con los conjuntos de elementos de C. Pero la idea de Grim puede expresarse sin necesidad de utilizar el teorema de Cantor. En realidad, es una variante del argumento contra el Platonismo que hemos visto en el apartado 1.

En esencia Grim argumenta que si existiese un ser omnisciente -por ejemplo, Dios- todas las verdades matemáticas y todos los objetos matemáticos estarían dados de una vez por todas en su mente y entonces formarían una totalidad acabada, un conjunto, lo que no parece posible: vimos en el apartado 1 que no parece que todos los conjuntos puedan estar dados en una totalidad acabada y formar un conjunto. La siguiente formulación es una versión del argumento de Grim.

Supongamos que existe Dios y es omnisciente; entonces Dios conoce todos los objetos matemáticos y, en concreto, todos los conjuntos; sea C_D el conjunto de todos los conjuntos que Dios conoce y sea R_D el conjunto de todos los elementos de C_D que no son elementos de sí mismos; de la definición de R_D se deduce que para todo conjunto *x*:

1. Para todo conjunto x es elemento de R_D si y sólo si x elemento de C_D y x no es elemento de x

Como eso vale para todo conjunto *x,* vale también para R_D:

2. R_D es elemento de R_D si y sólo si R_D es elemento de C_D y R_D no es elemento de R_D

Para llegar a una contradicción supongamos que R_D es elemento de C_D. Entonces los enunciados:

3. R_D es elemento de C_D y R_D no es elemento de R_D

y

4. R_D no es elemento de R_D

son equivalentes: son ambos verdaderos o ambos falsos. Podemos comprobar que 3 es el segundo miembro de 2. Entonces, como 3 es equivalente a 4, podemos sustituir 3 por 4 en 2 y tenemos que:

5. R_D es elemento de R_D si y sólo si R_D no es elemento de R_D

Y esto es una contradicción. Por tanto, R_D no es elemento de C_D. Entonces C_D -el conjunto de todos los conjuntos que Dios conoce- no contiene todos los conjuntos; es decir, hay un conjunto que Dios no conoce, a saber, R_D.

Tradicionalmente la teología ha utilizado dos vías para definir la naturaleza de Dios: la *via excellentiae* (o *eminentiae*)y la *via negationis.* La primera consiste en atribuir a Dios todas las perfecciones que encontramos en el mundo y en nosotros mismos pero llevadas a su grado máximo. La segunda consiste en negar de Dios cuanto encontramos en los seres finitos. La primera tiene un carácter más racionalista y la segunda tiene un carácter más místico, porque, al negar de Dios, todo lo que encontramos en los seres finitos, subraya el carácter misterioso e incognoscible de Dios.

Lo que el argumento de Grim sugiere es que la *via excellentiae* no puede utilizarse para definir a Dios en el caso del conocimiento: el conocimiento -tal como lo encontramos en nosotros- no tiene un grado máximo, para cada grado de conocimiento realizado en una mente concreta, hay un grado superior que incluye el conocimiento de objetos que esa mente no conoce.

Tomás de Aquino propuso en el siglo XIII la teoría de la *analogía* para evitar que la *via excellentiae* condujese a una concepción antropomórfica de Dios: Dios tiene las perfecciones humanas en grado sumo pero en Dios esas cualidades no son exactamente lo mismo que en el ser humano, están relacionadas con las perfecciones del ser humano por vía de *analogía* o *proporción:* son el equivalente en Dios a lo que son en el hombre. Aplicando la doctrina de la analogía al conocimiento divino podemos conjeturar que la omnisciencia matemática de Dios no debe ser concebida, a la manera del conocimiento matemático humano, como un conocimiento de *todos* los objetos matemáticos o de *todas* las verdades matemáticas o de *todos* los hechos matemáticos: el prefijo *omni-* de *omnisciencia* debería ser entendido en el caso de la omnisciencia divina en un sentido analógico.

Es probable que esto conduzca legítimamente a la conclusión de que la omnisciencia divina es en última instancia incomprensible para el entendimiento humano. Esta conclusión puede utilizarse como un argumento contra la existencia de Dios: *el concepto mismo de Dios es absurdo y lo absurdo no existe.* O puede usarse como un argumento a favor de una interpretación mística de Dios: *Dios es efectivamente incomprensible para la razón humana pero así es como cabe esperar que sean las cosas si Dios existe.*

7. Lógica modal y teología

En el siglo XI San Anselmo de Canterbury había propuesto en el capítulo segundo de la obra conocida como *Proslogion* el siguiente argumento, que luego Kant denominó 'argumento ontológico':

1. Dios es, por definición, el ser más perfecto que podamos concebir.
2. Si Dios no existiera, podríamos concebir un ser más perfecto que Dios, a saber, un ser que tuviese todas las perfecciones de Dios y además existiera.
3. Entonces el ser más perfecto que podemos concebir no sería el ser más perfecto que podemos concebir.

4. Luego Dios existe.

Santo Tomás de Aquino y Kant rechazaron este argumento. Santo Tomás dice que de la existencia del concepto de Dios en nuestro pensamiento no se sigue la existencia real de Dios y Kant dice que la existencia no añade ninguna perfección a la esencia de un ser (por tanto, rechaza el paso 2).

El desarrollo de la lógica modal -que es la lógica de lo necesario y lo contingente- con Leibniz y luego en el siglo XX ha permitido plantear una versión modal del argumento, que parece evitar los inconvenientes del anterior. Esta versión ha sido propuesta recientemente C. Hartshorne (1965) y A. Plantinga (1974) entre otros, y es famosa la elegante formalización lógica que de ella hizo Gödel. Hartshorne afirma que el mismo San Anselmo vislumbró ya esta versión. La siguiente es una formulación de entre varias posibles del argumento ontológico modal.

1. Dios, si existe, tiene todas las perfecciones (por definición).

2. Si un ser existe, es más perfecto si existe necesariamente que si existe contingentemente.

3. Luego, si Dios existe, existe necesariamente.

4. Pero esto implica que la existencia de Dios no es un asunto contingente; es decir:

si Dios existe, es necesario que exista;

si Dios no existe, es imposible que exista.

5. Por tanto, o es necesario que Dios exista o es imposible que Dios exista.

6. Pero no es imposible que Dios exista, porque el concepto de Dios no es contradictorio como el concepto de un círculo cuadrado.

7. Luego es necesario que Dios exista.

El paso 4 se basa en la idea intuitiva de que si una proposición es necesaria si es verdadera, entonces es imposible si es falsa: la contingencia o no contingencia de una proposición es independiente de su valor de verdad. Este principio es un poco más fuerte que el axioma generalmente usado en las versiones más formales del argumento, el axioma característico del sistema modal S5. Preferimos usar aquí ese principio antes que ese axioma porque ese principio nos resulta suficientemente intuitivo y es menos técnico.

El punto débil de este argumento está probablemente en el paso 6: que el concepto de Dios no resulte contradictorio a simple vista no implica que sea posible la existencia de Dios; tampoco resulta contradictorio a simple vista el concepto de un triángulo cuyos ángulos sumen 190 grados y, sin embargo, ese triángulo es imposible. Gödel (1995), en su formulación del argumento, ofreció una fundamentación de la posibilidad de Dios esencialmente así:

1. Ser Dios -es decir, poseer todas las perfecciones- es necesariamente una perfección.

2. Hay imperfecciones que son necesariamente imperfecciones.

3. Una perfección que lo sea necesariamente no implica necesariamente ninguna propiedad que sea necesariamente una imperfección.

4. Por tanto, ser Dios no implica necesariamente ninguna propiedad que sea necesariamente una imperfección.

5. Una propiedad imposible (es decir, una propiedad que ningún ser pueda poseer) implica necesariamente cualquier otra.

6. Luego ser Dios no es una propiedad imposible.

El paso 3 se justifica por el significado que tiene en lógica formal la expresión *p implica necesariamente q*. Esa expresión significa que no hay ningún mundo posible en que *p* sea verdadera y *q* falsa. Si *p* es imposible, no es verdadera en ningún mundo posible, luego no hay ningún mundo posible en el que *p* sea verdadera y *q* falsa.

Tal vez el punto débil de este segundo argumento esté en la premisa que aparece en el paso 5: no resulta evidente que una perfección que lo sea necesariamente no implique necesariamente ninguna imperfección que lo sea necesariamente; si alguna de esas perfecciones resultase ser imposible, implicaría necesariamente cualquier propiedad, de modo que estamos suponiendo implícitamente que todas las perfecciones que lo son necesariamente son posibles y esto no resulta evidente: la omnisciencia es para muchos una propiedad que es necesariamente una perfección y, sin embargo, a la vista del argumento de Grim en el apartado anterior, parece una propiedad imposible, al menos en alguna de las maneras de concebirla.

Lo que el argumento ontológico modal probablemente nos enseña es que o Dios existe necesariamente o es imposible que Dios exista: tenemos que elegir entre su necesidad y su imposibilidad. La opinión de que es posible que Dios exista y también es posible que no exista parece difícil de mantener, al menos si definimos a Dios como un ser necesario.

Referencias

Benardete, José. *Infinity: An Essay in Metaphysics,*Oxford,Clarendon Press, 1964.

Bernays, Paul. On Platonism in Mathematics. En Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds.), Philosophy of Mathematics, University of Cambridge, 1994, 258-271.

Cantor, George. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 1, 1890-1891, pp. 75-78.

Dummett, Michael. *Frege: Philosophy of Language,* London, Cambridge,Druckworth and Harvard University Press, 1981.

Gaifman, Haim."Pointers to Truth".*The Journal of Philosophy* 89, 1992, pp. 223-261.

Gaifman, Haim. Pointers to Propositions.En Chapuis, A. y Gupta, A. (eds.). Circularity, Definitions and Truth.Indian Council of Philosophical Research, 2000, 79-121.

Gödel, Kurt. Sobre Sentencias Formalmente Indecidibles en Principia Mathematica y Sistemas Afines I.En Mosterín (ed.) Kurt Gödel. Obras Completas, Madrid, Alianza Editorial, 1989, 53-89.

Gödel, Kurt. Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas. En Fonseca (ed.), Kurt Gödel. Ensayos Inéditos, Madrid, Mondadori, 1994, 149-190.

Gödel, Kurt. Ontological Proof. *Collected Works: Unpublished Essays & Lectures, Volume III.* 403-404. Oxford University Press.Oxford, 1995, 403-404.

Goldstein, L. 1992. " 'This statement is not true' is not true". Analysis 52.1, 1-5.

Goldstein, Laurence. A Unified Solution to some Paradoxes.*Proceedings of the AristotelianSociety*100, 2000. pp. 53-74.

Grim, Patrick.Logic and Limits of Knowledge and Truth. En M;artin, M. y Monnier, R. (eds),The Impossibility of God, Nueva York, Prometheus, 2003, 381-407.

Hartshorne, Charles. *Anselm's Discovery. A Re-examination of the Ontological Argument for God's Existence,* Lasalle ILL,Open Court, 1965.
Heisenberg, Werner. *La Imagen de la Naturaleza en la Física Actual,* Barcelona,Orbis, 1985.
Kripke, Saul. Outline of a Theory of Truth.*The Journal of Philosophy* 72, 1975, pp. 691-708.
Lucas, John. Minds, Machines, and Gödel.*Philosophy* 36, 1961, pp. 112-127.
Luna, Laureano. A Note on Self-Reference and Tokenism, *The Reasoner* 2008, 2(11), pp. 4-5.
Luna, Laureano. Yablo's Paradox and Beginningless Time, *Disputatio* 26, 2009, pp. 89-96.
Plantinga, Alvin. The Nature of Necessity, Oxford, Oxford University Press, 1974.
Penrose, Roger. 1991. *La Nueva Mente del Emperador.* Mondadori, Madrid.
Raatikainen, Panu. On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems.*Revue Internationale de Philosophie,* 59(4), 2005, pp. 513-534.
Rayo, Agustín y Uzquiano, Gabriel(eds.). *Absolute Generality,* Oxford, Oxford University Press, 2006.
Wigner, Eugene. *Symmetries and Reflections: Scientific Essays*, Cambridge MA, MIT Press, 1970.

Laureano Luna Cabañero,
Ctra. de la Puerta, 49,
23380, Siles, Jaén.
laureanoluna@yahoo.es