UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

EXTENSIONES DE ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

ANTONIO FERNÁNDEZ CARRIÓN

TESIS DOCTORAL

Memoria que presenta
D. Antonio Fernández Carrión
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo: Antonio Fernández Carrión.

Vladimír Müller, miembro del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Checoslovaquia

CERTIFICA: Que la presente memoria "Extensiones de Álgebras Topológicas", ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas, D. Antonio Fernández Carrión, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Fdo: Vladimír Müller.

$V^\circ B^\circ$: Tutor de tesis.

Fdo: Miguel Florencio Lora.
Catedrático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Octubre de 1.990.

Quiero expresar mi agradecimiento a los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Sevilla por el ánimo y apoyos recibidos. Y, especialmente, a los Drs. Vladimír Müller y Miguel Florencio Lora, por la ayuda que de ellos recibí en la realización de este trabajo.

A Paqui

Contenido

Introducción

F. Riesz es probablemente (ver [28, vol II, p. 956–989]) el primer matemático en considerar un álgebra (el conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los endomorfismos continuos de un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, con la topología fuerte operador) en su estudio sobre teoría espectral de operadores de 1.913.

Sin embargo, el origen de la teoría de álgebras normadas se fija con el trabajo de I.M. Gelfand *Normierte Ringe* (ver [11]) de 1.941. Desde la aparición de este trabajo fundamental, la teoría de álgebras normadas (anillos normados en la terminología anterior a los años sesenta) ha experimentado considerables desarrollos, con los trabajos del propio I.M. Gelfand [12], [13], [14], y otros autores como G.E. Shilov [30], M.A. Naimark [25], C.E. Rickart [27], y otros más recientes, entre los que cabe destacar a F.F. Bonsall y J. Duncan [7].

Por otra parte, como comenta E. Michael en [21], pocos esfuerzos se han hecho para extender esta teoría a clases más generales de álgebras topológicas.

No podemos pasar sin mencionar los trabajos del propio E. Michael [21] y R. Arens sobre álgebras localmente m–convexas, y los de W. Żelazko sobre álgebras localmente convexas y, fundamentalmente, álgebras localmente acotadas. Ambas clases son generalizaciones naturales de las álgebras normadas. Como puede verse en [33] las álgebras localmente acotadas completas tienen las mismas propiedades (los mismos teoremas son ciertos) que las álgebras normadas completas (álgebras de Banach), de hecho, W. Żelazko llega a comentar en [33] que ... *en la teoría de álgebras de Banach la propiedad de convexidad local no es esencial, el hecho verdaderamente importante es la acotación local.*

Uno de los aspectos que marca la estructura, tanto algebraica como topológica, de un álgebra (vease por ejemplo el teorema clásico de Gelfand–Mazur [20]) es la *cantidad* de elementos invertibles que posea, y el comportamiento topológico del grupo de los elementos invertibles. De hecho, el álgebra compleja más simple que existe es $\mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos, donde todos sus elementos, salvo el cero, tienen inverso.

Por esta razón, desde el comienzo de la teoría se prestó gran interés, con vistas a la estructuración y clasificación de álgebras normadas primero y álgebras topológicas posteriormente, al estudio y caracterización (desde el punto de vista topológico) de los elementos invertibles. Una de las primeras álgebras en ser estudiadas fue $\mathcal{C}[0,1]$, el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con valores complejos.

Desde el punto de vista algebraico, en un anillo R, un divisor de cero (un elemento x de R para el que el producto con un elemento $y \neq 0$ es cero) no puede ser, obviamente, invertible. Sin embargo, en $\mathcal{C}[0,1]$ existen elementos que no son invertibles ni tampoco son divisores de cero (por ejemplo, una función que se anule únicamente en un punto de $[0,1]$). Por otra parte, es fácil comprobar que un elemento x de $\mathcal{C}[0,1]$ no tiene inverso si y sólo si es un *divisor toplógico de cero* (en terminología de G.E. Shilov *divisor generalizado de cero*), es decir, existe una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathcal{C}[0,1]$ que no converge a cero, pero que $(xx_n)_n$ converge a cero en $\mathcal{C}[0,1]$. Sin embargo, no todas las álgebras poseen esta propiedad.

El concepto de divisor topológico de cero es uno de los más útiles y fructíferos en el marco de la teoría de álgebras topológicas, y está intimamente relacionado con la propia estructura algebraica y topológica del álgebra. De hecho, se puede llegar al concepto de divisor topológico de cero desde los siguientes argumentos. Dada un álgebra de Banach A con unidad, podemos considerar la multiplicación por un elemento x de A como un operador lineal continuo T_x de A con valores en una parte de A. Tenemos los siguientes casos:

1. La aplicación $T_x : A \to A$ no es inyectiva. En este caso x es un divisor de cero.

2. La aplicación $T_x : A \to A$ es biyectiva. En este caso x tiene inverso en A.

3. La aplicación $T_x : A \to A$ es inyectiva y no es sobreyectiva, pero $T_x(A) \subset A$ es un subespacio completo. Por el teorema de la aplicación abierta, la aplicación inversa T_x^{-1} es también continua, es decir, $xy_n \to 0$ implica que $y_n \to 0$. Esto indica que x no es divisor topológico de cero.

4. La aplicación $T_x : A \to A$ es inyectiva pero $T_x(A)$ no es completo en A. En este caso, la aplicación inversa no es continua (de serlo $T_x(A)$ sería homeomorfo a A, y consecuentemente completo), es decir, existe una sucesión $(y_n)_n$ en A que no converge a cero, pero $xy_n \to 0$. En este caso, x es un divisor topológico de cero.

R. Arens demuestra en [2] (y antes que él, para algunos casos especiales G.E. Shilov en [30]) que tales elementos, y sólo estos, tienen inverso en una *extensión* de A. No obstante, la idea de *extensión* es anterior, y ya aparece en otro trabajo de R. Arens y K. Hoffman [5], en el que se estudia el problema de obtener una extensión normada de un álgebra normada A, donde la ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in A \tag{0.1}$$

tenga solución. En el trabajo citado anteriormente se investiga la aplicación del método clásico de extensión de cuerpos (considerando el anillo de polinomios $A[x]$ y reduciendo módulo el ideal principal J generado por (0.1)) al caso de álgebras normadas. El método consiste en definir una norma en el álgebra de polinomios $A[x]$ de forma que el ideal J sea cerrado (para poder definir la norma cociente en $B = A[x]/J$) y que la inyección natural de A en B sea una isometría. Comentemos que, con esta idea, nosotros abordaremos en el capítulo tercero de esta memoria la caracterización de elementos permanentemente singulares en álgebras semitopológicas.

La línea de buscar inversos de elementos en ciertas extensiones del álgebra es continuada por el propio R. Arens, y está relacionada con la obtención de soluciones de ecuaciones del tipo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 1,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son elementos dados de un álgebra normada. A su vez, la búsqueda de soluciones está relacionada con el problema, más reciente, de la eliminabilidad de ideales (ver la sección primera del capítulo III de esta memoria). El problema de la eliminabilidad se plantea, con toda generalidad, por R. Arens en [3], y posteriormente es tratado por otros autores como V. Müller en el caso de álgebras de Banach, y W. Żelazko en otras clases más amplias de álgebras toplógicas.

El objetivo fundamental de nuestro trabajo consiste en estudiar tres aspectos sobre extensiones de álgebras topológicas. Son los siguientes:

1. RENORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS.

2. ESTUDIO DE SINGULARIDAD DE ELEMENTOS Y ELIMINABILIDAD DE IDEALES.

3. ESTUDIO DE EXTENSIONES FINITAMENTE GENERADAS.

Para ello, hemos dividido esta memoria en cuatro capítulos, cada uno de los cuales está dividido, a su vez, en secciones.

En el primer capítulo recogemos aspectos generales de la teoría de álgebras topológicas. Lo esencial de un álgebra topológica es el producto, que siempre lleva aparejado una hipótesis de continuidad. Dependiendo del tipo de continuidad que exijamos al producto obtenemos dos clases de álgebras: topológicas o semitopológicas. Ambas serán consideradas en el desarrollo de esta memoria. Estos comentarios aparecen con detalle en la primera sección del capítulo.

Las álgebras topológicas se clasifican en clases, de la misma forma que los espacios vectoriales topológicos: álgebras normadas, álgebras localmente acotadas, álgebras localmente convexas,...

En la segunda sección describimos la topología (mediante normas, seminormas, pseudonormas,...) y concretamos en qué términos se expresa la continuidad del producto en las distintas clases de álgebras topológicas que aparecen en este trabajo.

Las dos últimas secciones de este capítulo tienen un caracter descriptivo y en ellas recogemos los resultados conocidos referentes a ideales eliminables y elementos permanentemente singulares.

En el segundo capítulo abordamos el problema de la renormalización de álgebras topológicas. Si A es una subálgebra de un álgebra topológica B y la topología que A hereda de B está dada por un sistema Φ_A de funciones reales definidas en A (normas, p-normas, seminormas,...) probaremos que, para ciertas clases de álgebras topológicas, la topología de B se puede describir por un sistema Φ_B, donde los elementos de Φ_B extienden a los elementos de Φ_A a todo el álgebra B.

Fue J.A. Lindberg el primero en obtener un resultado de este tipo para álgebras normadas conmutativas. En la primera sección de este capítulo lo exponemos y comentamos su prueba.

En las secciones segunda y tercera establecemos unos resultados similares al de J.A. Lindberg para álgebras normadas y álgebars localmente acotadas, sin la hipótesis de conmutatividad, utilizando técnicas diferentes y más simples.

El objeto de las secciónes cuarta y quinta es generalizar los resultados de las secciones anteriores al marco de las álgebras localmente convexas, en general no conmutativas. Esto nos permite, posteriormente, dar una respuesta afirmativa a un problema propuesto por W. Żelazko: la topología de un álgebra localmente convexa con unidad e se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ de seminormas que verifica $|e|_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Cerramos el capítulo con la sección sexta, donde comentamos un resultado reciente de W. Żelazko [42] para álgebras localmente pseudoconvexas, que generaliza y unifica los que nosotros presentamos en las secciones anteriores.

En el tercer capítulo abordamos el estudio, por una parte, de la singularidad de elementos tanto en álgebras topológicas como en álgebras semitopológicas, y por otra, de la eliminabilidad de ideales en álgebras topológicas. Como veremos, estos conceptos están muy relacionados entre sí.

En la primera sección establecemos una condición suficiente para que un ideal de un álgebra topológica sea eliminable, y la relacionamos con otra, propuesta por W. Żelazko en [39], resultando ser la nuestra más general. Esta condición, se traduce en condiciones suficientes para la singularidad permanente de un elemento en distintas clases de álgebras topológicas. Sin embargo, queda abierto el problema de si es necesaria.

En la segunda sección construimos una $\mathcal{B}_0$–álgebra que posee un ideal eliminable (verifica nuestra condición) y no verifica la condición suficiente propuesta por W. Żelazko, que hasta ahora se conjeturaba que era necesaria.

Los resultados que presentamos en las secciones primera y segunda ponen de manifiesto que no es fácil encontrar una caracterización simple de ideales eliminables o elementos permanentemente singulares en álgebras topológicas.

Sin embargo, esta caracterización si existe para álgebras de Banach, dada por R. Arens para elementos permanentemente singulares, y por V. Müler para ideales eliminables.

En la tercera sección mostramos que el resultado de R. Arens (que no es cierto en $\mathcal{B}_0$–álgebras m–convexas) es válido para álgebras semitopológicas, es decir, en un álgebra semitopológica un elemento es permanentemente singular si y sólo si es un divisor topológico de cero.

Terminamos este capítulo con la sección cuarta, en la que relacionamos los resultados que hemos obtenido en el capítulo y hacemos comentarios de una posible extensión del resultado de V. Müller, mencionado anteriormente, al marco de las álgebras semitopológicas.

En el cuarto, y último, capítulo de esta memoria abordamos el problema de construir extensiones de un álgebra dada, con la estructura algebraica más simple posible. Resultados similares han sido estudiados por K.C. O'Meara [26] para anillos numerables, en sentido puramente algebraico, y por V. Müller para álgebras de Banach separables con involución. No obstante, la idea de inyectar un álgebra dada en otra con estructura más simple o conocida es antigua y fue I.M. Gelfand el primero en obtener resultados de este tipo. Es clásico el resultado que afirma que si A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces existe un compacto K (el espacio de ideales maximales de A con la topología que hereda del dual toplógico A') y existe un homomorfismo continuo

$$G : x \in A \to Gx \in \mathcal{C}(K),$$

donde G es la transformación de Gelfand y $\mathcal{C}(K)$ el álgebra de las funciones continuas en K con valores complejos. El homomorfismo G es inyectivo si el álgebra A es semisimple. En este caso podemos considerar A como una subálgebra de $\mathcal{C}(K)$.

Este problema lo atacamos con dos técnicas distintas, que dependen de la clase de álgebras topológicas con la que trabajamos.

En la primera sección presentamos definiciones básicas y realizamos una construcción algebraica que utilizaremos en secciones posteriores.

En las secciones segunda y tercera probamos que para el caso de álgebras localmente acotadas y localmente convexas separables, existe una extensión generada por dos elementos, localmente acotada para el primer caso y localmente convexa para el segundo. Sin embargo, aparece una dificultad en este tipo de construcciones, que consiste en que la unidad del álgebra original (si existe) no se transforma en la unidad de la extensión.

En la sección cuarta introducimos la hipótesis de metrizabilidad en el álgebra de partida, lo que nos permite construir, con una técnica diferente de la usada anteriormente, una extensión metrizable generada por dos elementos, donde la unidad del álgebra original (en caso de que exista) se transforma en la unidad de la extensión.

Terminamos el capítulo con la sección quinta, donde comentamos las hipótesis y resultados que hemos obtenido en las secciones anteriores. Por otra parte, indicamos una generalización de los resultados de las secciones segunda y tercera al marco de las álgebras localmente pseudoconvexas.

Terminología y notación

Esta memoria está dividida en cuatro capítulos, cada uno de los cuales está dividido a su vez en número variable de secciones. La referencia a la sección n del capítulo m viene expresada por $m.n$. Algunas expresiones de esta memoria están etiquetadas con dos números entre paréntesis: $(p.k)$. De esta forma, una referencia $(p.k)$ indica la expresión k–ésima del capítulo p.

En este trabajo usaremos la siguiente notación:

1. Si A y B son dos conjuntos $A \setminus B$ denotará la diferencia conjuntista entre A y B.

2. Si A es un álgebra topológica con unidad e:

   i) $z_\gamma \to z$ significa que la red $(z_\gamma)_\gamma$ de A converge al elemento z de A.

   ii) Si H es un subconjunto de A, $\overline{H}$ designará la clausura de H en A.

   iii) $\mathbb{C}e$ denotará la subálgebra generada por e.

   iv) Si x es un elemento de A pondremos, $A - x$ para denotar el conjunto $\{a - x, a \in A\}$, y Ax para denotar el conjunto $\{ax, a \in A\}$.

3. El conjunto vacio se designará por el símbolo $\emptyset$.

4. Como es habitual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ denotará el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

5. Por último, el final de una demostración se indicará por el símbolo $\blacksquare$.

Capítulo I

Aspectos generales sobre álgebras topológicas

En este capítulo preparatorio recogemos los resultados básicos necesarios sobre álgebras topológicas con el propósito de establecer notaciones y podernos referir a ellos durante el transcurso de esta memoria.

En toda la memoria consideraremos álgebras complejas, y supondremos que $\mathbb{C}$ lleva la topología normada del módulo de números complejos.

Comenzaremos el capítulo introduciendo conceptos básicos y descripciones generales sobre la topología y el producto de un álgebra topológica, por medio de un sistema de entornos del origen.

Continuaremos con una exposición de las diferentes clases de álgebras topológicas, sus caracteristicas y diferencias, que aparecerán a lo largo de este trabajo. También expondremos algunos ejemplos.

Por último presentaremos la noción de extensión, y haremos una descripción de los resultados existentes sobre elementos permanentemente singulares e ideales eliminables.

1.1 El producto de un álgebra topológica

Comenzamos con la definición algebraica de lo que entenderemos por álgebra compleja.

Definición 1.1.1 *Un álgebra compleja A es un espacio vectorial complejo con un producto*

$$(a, b) \in A \times A \to a \cdot b \in A$$

que verifica las siguientes propiedades

A1. $(ab)c = a(bc)$

A2. $(a+b)c = ac + bc$ *y* $a(b+c) = ab + ac$

A3. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$

para todos $a, b, c \in A$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Si existe* $e \in A$ *tal que* $ae = ea = a$ *para todo* $a \in A$ *diremos que* A *tiene unidad y a* e *se le llama unidad de* A.

Definición 1.1.2 *Un álgebra topológica compleja A es un espacio vectorial topológico A que es un álgebra compleja con un producto que es continuo, si dotamos a $A \times A$ de la topología producto.*

Observación

Sea A un álgebra topológica. Denotemos por $\mathcal{U}(A)$ a una base de entornos del origen formada por conjuntos equilibrados.

La continuidad del producto en A significa que:

$$\text{Para cada } U \in \mathcal{U}(A) \text{ existe } V \in \mathcal{U}(A) \text{ tal que } VV \subseteq U. \tag{1.1}$$

La relación (1.1) es exactamente la continuidad del producto en el origen, pero como veremos seguidamente, de ésta sigue la continuidad del producto en todo $A \times A$.

Concretamente, si $x_0, y_0 \in A$ y $V \in \mathcal{U}(A)$ debemos encontrar $W \in \mathcal{U}(A)$ tal que si $x \in x_0 + W, y \in y_0 + W$, entonces $xy \in x_0y_0 + V$, o equivalentemente,

$$(x_0 + W)(y_0 + W) \subseteq x_0y_0 + V.$$

Observemos que esta última inclusión se verifica siempre que

$$x_0W + Wy_0 + WW \subseteq V.$$

Por la continuidad de la suma en A, podemos encontrar $U \in \mathcal{U}(A)$ tal que $U + U + U \in V$, ahora por (1.1) existe $N \in \mathcal{U}(A)$ tal que $NN \subseteq U$. Por la continuidad del producto por escalares podemos encontrar $\lambda \in (0, 1]$ tal que $\lambda x_0, \lambda y_0 \in N$, y por la misma razón existe $W \in \mathcal{U}(A)$ tal que $\frac{1}{\lambda}W \subseteq N$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} x_0W + Wy_0 + WW &\subseteq \lambda x_0\frac{1}{\lambda}W + \frac{1}{\lambda}W\lambda y_0 + \lambda^2 NN \\ &\subseteq NN + NN + NN \\ &\subseteq U + U + U \\ &\subseteq V, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Teniendo en cuenta esta observación, la topología de un álgebra topológica se puede definir por una base de entornos del origen $\mathcal{U}(A)$ que verifica las siguientes propiedades:

T1) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$, U es absorvente y equilibrado.

T2) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $V + V \subseteq U$.

T3) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $VV \subseteq U$.

La definición de álgebra topológica que hemos presentado es demasiado restrictiva en algunos aspectos. Esto hace que cierto tipo de álgebras, con topologías no metrizables, que poseen interés, se escapen fuera de este contexto, como es el caso del álgebra, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, de los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita, con la topología fuerte operador. En este álgebra, el producto habitual de operadores (la composición) no es continuo con esta topología, puesto que el conjunto de los operadores nilpotentes de índice 2 es denso en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la topología fuerte operador. Ver [15, Problema 91].

Por esta razón, algunos autores introducen una definición de álgebra topológica un poco más débil. La idea es asegurar tan sólo la continuidad del producto en cada variable y no necesariamente en las dos simultaneamente. Nosotros, a este tipo de álgebras topológicas las llamaremos, para evitar confusiones, álgebras semitopológicas (s–álgebras topológicas). Su definición precisa es la siguiente

Definición 1.1.3 *Una s–álgebra topológica compleja A es un espacio vectorial topológico A que es un álgebra compleja con un producto*

$$(a,b) \in A \times A \to a \cdot b \in A$$

que verifica que, para todo $a \in A$ las aplicaciones

$$L_a : x \in A \to L_a(x) = ax \in A \quad y \quad R_a : x \in A \to R_a(x) = xa \in A$$

son continuas.

En términos de entornos del origen, la diferencia entre álgebras y s– álgebras topológicas es que para las segundas, además de verificarse las condiciones T1 y T2, la continuidad del producto equivale a una condición más débil que T3. Es la siguiente:

(TS3) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$ y para todo $a \in A$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $Va + aV \subseteq U$.

De esta forma, la topología de una s–álgebra topológica A se puede definir por un sistema de entornos del origen $\mathcal{U}(A)$ que verifica las siguientes condiciones:

TS1) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$, U es absorvente y equilibrado.

TS2) Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $V + V \subseteq U$.

TS3) Para todos $U \in \mathcal{U}(A)$ y $a \in A$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $aV + Va \subseteq U$.

Si el álgebra A es conmutativa la condición TS3 equivale, en virtud de TS2, a:

(TSC3) Para todos $U \in \mathcal{U}(A)$ y $a \in A$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $aV \subseteq U$.

Observemos que la completación de un álgebra topológica es un álgebra topológica, sin embargo, esto es falso para álgebras semitopológicas. La razón es que la continuidad separada del producto no es suficiente, en general, para extender éste a un producto en la completación de un álgebra de este tipo. Ver [41], [19, I.4]. Teniendo en cuenta este hecho, supondremos que todas las álgebras topológicas de este trabajo son completas, si no se especifica lo contrario.

Observación

En el caso de que un álgebra topológica A no tiene unidad podemos añadirle una unidad formando una nueva álgebra, la unitización de A,

$$A_1 = A \oplus \mathbb{C}e = \{(a, \lambda), a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

con la topología producto y las operaciones usuales de suma y producto por escalares. El producto en A_1 se define por

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$$

Obviamente $(0,1)$ es la unidad de A_1.

Si $\mathcal{U}(A)$ es un sistema de entornos del origen para la topología de A que verifica T1, T2 y T3, entonces un sistema de entornos del origen para la topología de A_1, que verifica T1, T2 y T3 viene dado por

$$\mathcal{U}(A_1) = \{(V, \epsilon),\ V \in \mathcal{U}(A),\ \epsilon > 0\},$$

donde

$$(V, \epsilon) = \{(x, \lambda) \in A_1,\ x \in V,\ |\lambda| \leq \epsilon\}$$

1.2 Algunas clases de álgebras topológicas

Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios vectoriales toplógicos. Diremos que un álgebra topológica es de la clase $\mathcal{K}$ si está en la clase $\mathcal{K}$ como espacio vectorial topológico. En este caso, utilizaremos el término $\mathcal{K}$–álgebra para designar que un álgebra pertenece a la clase $\mathcal{K}$.

Como clases $\mathcal{K}$ consideraremos las siguientes.

$\mathcal{LC}$: ALGEBRAS LOCALMENTE CONVEXAS.

Un álgebra localmente convexa es un álgebra topológica, que como espacio vectorial topológico es localmente convexo. Por tanto, la topología de un álgebra localmente convexa A se puede describir por un sistema

$$\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$$

de seminormas que, por la continuidad del producto en A, verifica la propiedad LC1:

Para todo $\alpha \in \Delta$ existe $\beta \in \Delta$ tal que

$$|xy|_\alpha \leq |x|_\beta \, |y|_\beta \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in A$.

Podemos suponer que para cada subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Delta$ existe $\beta \in \Delta$ tal que

$$|x|_{\alpha_i} \leq |x|_\beta \,, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

para todo $x \in A$.

Esta propiedad tiene un caracter técnico y en el desarrollo de esta memoria nos referiremos a ella como la propiedad LC2. A su vez, LC2 es equivalente a que:

Para cada subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Delta$ la seminorma continua

$$|x| = \max\left\{|x|_{\alpha_1}, |x|_{\alpha_2}, \ldots, |x|_{\alpha_n}\right\} \tag{1.3}$$

pertenece también a Δ.

Si el sistema Δ no verificase la propiedad LC2 podemos añadir a Δ todas las seminormas de la forma (1.3). El nuevo sistema también verifica la relación (1.2), puesto que la seminorma (1.3) aplicada a un producto $xy, x, y \in A$ se puede mayorar por un producto $|x|_1 \, |y|_1$, donde $|\cdot|_1$ es una seminorma de la forma (1.3), pero con α_i reemplazado por β_i, donde α_i está asociado con β_i en la fórmula (1.2).

Bajo la condición LC2, una seminorma $\|\cdot\|$ en A es continua si y sólo si existen un índice $\alpha \in \Delta$ y una constante positiva C tal que

$$\|x\| \leq C \, |x|_\alpha$$

para todo $x \in A$. En este caso diremos que la seminorma $|\cdot|_\alpha$ *domina* a la seminorma $\|\cdot\|$.

Dos familias de seminormas $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ y $\{\|\cdot\|_\beta, \beta \in \Phi\}$, en un álgebra A, se dice que son *equivalentes* si generan la misma topología en A. En el caso de que los dos sistemas verifican la condición LC2, son equivalentes si y sólo si cada seminorma de un sistema está dominada por alguna seminorma del otro sistema, y reciprocamente.

Sea A un álgebra localmente convexa y sea $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ un sistema de seminormas que define la topología de A. Si el sistema Δ verifica las propiedades LC1 y LC2, para cada $\alpha \in \Delta$ existe $\beta \in \Delta$ tal que

$$\begin{aligned} &1) \quad |abc|_\alpha \leq |a|_\beta \, |b|_\beta \, |c|_\beta \\ &2) \quad |a|_\alpha \leq |a|_\beta \end{aligned} \qquad (1.4).$$

para todo $a, b, c \in A$.

Un álgebra localmente convexa se llama multiplicativamente convexa (m–convexa) si su topología se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas submultiplicativas, es decir, para todo $\alpha \in \Delta$

$$|xy|_\alpha \leq |x|_\alpha \, |y|_\alpha$$

para todo $x, y \in A$.

La clase de las álgebras localmente m–convexas la denotaremos por la letra $\mathcal{M}$.

Ejemplo

Sea $0 < p < 1$, y sea $\Sigma(p)$ el conjunto de todas las sucesiones no crecientes $\alpha = (\alpha_k)_{-\infty}^{\infty}$ de términos positivos tales que $\alpha_k = p^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces (ver [33, Lema 10.10]) para cada $\alpha \in \Sigma(p)$ existe $\beta \in \Sigma(p)$ tal que

$$\alpha_{k+i} \leq \beta_k \beta_i$$

para todos $i, k \in \mathbb{Z}$. Denotemos por W_p el espacio de todas las series de potencias formales con coeficientes complejos

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^n$$

tales que

$$\|x\|_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| \alpha_n < \infty$$

para todo $\alpha \in \Sigma(p)$.

Entonces W_p es un álgebra localmente convexa con el producto de convolución de series de potencias.

Cualquier elemento x de W_p tiene sólo un número finito de coeficientes no nulos con índice negativo, y la parte regular de la serie x, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$, es convergente en un círculo de radio p. Así que W_p consiste en el álgebra de las funciones meromorfas que no tienen polos en el disco $\{z \in \mathbb{C}, |z| < p\}$, excepto para $z = 0$. Por otra parte, $W_p \subset W_q$ para $q < p$, y esta inclusión es continua. De esta forma

$$W = \bigcup_{0<p<1} W_p$$

es el conjunto de las funciones (gérmenes de funciones) meromorfas en $z = 0$, que es un álgebra localmente convexa con la topología límite inductivo. En realidad W es un cuerpo.

$\mathcal{LPC}$: ALGEBRAS LOCALMENTE PSEUDOCONVEXAS.

Sea X un espacio vectorial real o complejo. Una función

$$x \in X \to \|x\| \in [0, \infty)$$

se dice que es una seminorma p–homogénea, o una seminorma con exponente $p, 0 < p \leq 1$ si

$$1) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$$

para todos $x, y \in X$ y para todo escalar λ.

Observemos que si $\|\cdot\|$ es una seminorma de exponente p, y q es un número real que verifica $0 < q \leq 1$, entonces $\|\cdot\|^q$ es una seminorma de exponente pq.

Un espacio localmente pseudoconvexo X (ver [29, Cap. 3]) es un espacio vectorial topológico Hausdorff cuya topología está definida por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas $p(\alpha)$–homogéneas, $0 < p(\alpha) \leq 1$.

Un álgebra localmente pseudoconvexa es un álgebra toplógica que, como espacio vectorial topológico, es localmente pseudoconvexo.

Análogamente, como en el caso de álgebras localmente convexas, la topología de un álgebra localmente pseudoconvexa A se puede describir por una sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas $p(\alpha)$–homogéneas, $0 < p(\alpha) \leq 1$, que verifican la propiedad LPC1:

> Para cada $\alpha \in \Delta$ existe $\beta \in \Delta$ tal que
>
> $$|xy|_\alpha^{p(\beta)} \leq |x|_\beta^{p(\alpha)} |y|_\beta^{p(\alpha)} \tag{1.5}$$
>
> para todo $x, y \in A$.

Diremos que el sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas $p(\alpha)$–homogéneas verifica la propiedad LPC2 si

> Para cada subconjunto finito de índices $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Delta$ la seminorma
>
> $$|x| = \max\left\{|x|_{\alpha_1}^{s_1}, |x|_{\alpha_2}^{s_2}, \ldots, |x|_{\alpha_n}^{s_n}\right\} \tag{1.6}$$

pertenece también a Δ.

Aquí hemos puesto $s_i = \frac{s}{p(\alpha_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $s = p(\alpha_1)p(\alpha_2)\cdots p(\alpha_n)$, así que s es el exponente de la seminorma dada por (1.6).

Puesto que todas las seminormas de la forma (1.6) son continuas, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el sistema Δ tiene la propiedad LPC2. En otro caso, podemos añadir a Δ todas las seminormas de la forma (1.6). El nuevo sistema también verifica la relación (1.5), puesto que la seminorma (1.6) aplicada a un producto $xy, x, y \in A$ se puede mayorar por un producto $|x|_1 |y|_1$, donde $|\cdot|_1$ es una seminorma de la forma (1.6), pero con α_i reemplazado por β_i, donde α_i está asociado con β_i en la fórmula (1.5).

La propiedad LPC2 implica que si $|\cdot|$ es una seminorma p–homogénea continua en A, entonces existen un índice $\alpha \in \Delta$ y una constante positiva C tales que

$$|x|^{p(\alpha)} \leq C\,|x|_\alpha^p$$

para todo $x \in A$.

Ejemplo

Sea $a_{i,n}, n = 1, 2, \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots$ una matriz infinita de números reales positivos, y sea $(q_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales que verifica $0 < q_n \leq 1, n = 1, 2, \ldots$ tales que

$$[a_{i+j,n}]^{q_{n+1}} \leq a_{i,n+1}a_{j,n+1}$$

para todos $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ y $n = 1, 2, \ldots$ Pongamos $p_1 = q_1$ y $p_n = q_n p_{n-1}$ para $n = 2, 3, \ldots$ Sea A el conjunto de todas las sucesiones $x = (x_i)_{i\geq 0}$ de términos complejos tales que

$$\|x\|_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n}\,|x_i|^{p_n} < \infty \tag{1.7}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

La fórmula (1.7) define en A una sucesión de seminormas p_n–homogéneas, así que A es un espacio localmente pseudoconvexo con la topología que define el sitema de seminormas dadas por (1.7). Con el producto de convolución A es un álgebra localmente pseudoconvexa (ver [42]). Un ejemplo concreto se obtiene tomando

$$a_{i,n} = e^{\frac{i}{2^n}} \quad \text{y} \quad q_n = \frac{1}{2}.$$

Se puede comprobar que el álgebra de este ejemplo no es localmente convexa.

$\mathcal{F}$: ALGEBRAS TOPOLÓGICAS METRIZABLES.

Sabemos que la topología de un espacio vectorial topológico metrizable X se puede definir por una base de entornos del origen numerable, $\mathcal{U}(X) = (U_n)_{n\geq 1}$. Si A es una $\mathcal{F}$–álgebra topológica y $\mathcal{U}(A)$ es un sistema de entornos que define su topología, la continuidad del producto en A se traduce en

$$\text{Para cada } n = 1, 2, \ldots \text{ existe } k_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } U_{k_n} U_{k_n} \subseteq U_n.$$

Pasando a una subsucesión de $(U_n)_{n\geq 1}$ podemos suponer que $\mathcal{U}(A) = (U_n)_{n\geq 1}$ verifica las siguientes propiedades

F1) $U_{n+1}U_{n+1} \subseteq U_n$ para $n = 1, 2, \ldots$

F2) $U_{n+1} \subseteq U_n$ para $n = 1, 2, \ldots$

El resultado, quizas más sorprendente, relativo a la clase de las $\mathcal{F}$–álgebras es el siguiente. Ver [1] y [33, 1.5]

Sea A un álgebra semitopológica metrizable y completa. Entonces A es una $\mathcal{F}$-álgebra topológica.

Quiza este resultado sea otra de las razones para considerar el estudio de álgebras semitopológicas.

$\mathcal{B}_0$: ALGEBRAS LOCALMENTE CONVEXAS METRIZABLES.

Como $\mathcal{B}_0 = \mathcal{LC} \cap \mathcal{F}$ la toplogía de una $\mathcal{B}_0$–álgebra se puede definir por un sistema numerable $\{|\cdot|_n\,, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas con las siguientes propiedades

$B_0 1)$ $|xy|_n \leq |x|_{n+1}\,|y|_{n+1}$ para todos $x, y \in A, n = 1, 2, \ldots$

$B_0 2)$ $|x|_n \leq |x|_{n+1}$ para todos $x, y \in A, n = 1, 2, \ldots$

Ejemplos

1. El álgebra $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$, de todas las funciones continuas en la recta real con valores complejos, con las operaciones habituales y la topología que define la sucesión de seminormas dadas por

$$\|x\|_n = \max\{|x(t)|\,,\ -n \leq t \leq n\},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

   es una $\mathcal{B}_0$–álgebra m–convexa. Ver [33].

2. El álgebra $\mathcal{E}$, de todas las funciones enteras de una variable compleja, con las operaciones habituales y la topología que define la sucesión de seminormas dadas por

$$\|x\|_n = \max\{|x(z)|\,,\ |z| \leq n\},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

   es una $\mathcal{B}_0$–álgebra m–convexa. Ver [33].

3. Denotemos por $L^\omega(0,1)$ el conjunto de todas las funciones (clases de equivalencia) medibles en el intervalo $(0,1)$ tales que

$$\|x\|_n = \left[\int_0^1 |x(t)|^n \, dt\right]^{\frac{1}{n}} < \infty$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $L^\omega(0,1)$ es un álgebra definiendo las operaciones de funciones punto a punto. De la desigualdad de Schwartz sigue que

$$\|xy\|_n \leq \|x\|_{2n} \|y\|_{2n}, n = 1, 2, \ldots, x, y \in L^\omega(0,1).$$

Por tanto, $L^\omega(0,1)$ es una $\mathcal{B}_0$–álgebra que no es m–convexa. Ver [33].

4. El álgebra $\mathcal{C}^\infty(0,1)$ de todas las funciones infinitamente derivables en el intervalo $[0,1]$, con las operaciones usuales de funciones y la topología que define la sucesión de seminormas dadas por

$$\|x\|_n = 2^n \max\left\{2^k \max\left\{\left|x^{k)}(t)\right|, 0 \leq t \leq 1\right\}, k = 0, 1, \ldots, n\right\},$$

para $n = 0, 1, 2 \ldots$, es una $\mathcal{B}_0$–álgebra m–convexa. Se puede comprobar que no existe una topología que haga de $\mathcal{C}^\infty(0,1)$ un álgebra de Banach. Ver [33].

5. Sea $a_{n,k}$, donde $n = 1, 2, \ldots$, y $k \in \mathbb{Z}$ una matriz infinita de números reales positivos. Supongamos que para todo $n = 1, 2, \ldots$ existe $n' \geq n$ tal que

$$a_{n,k+l} \leq a_{n',k} a_{n',l} \tag{1.8}$$

para todo $k, l \in \mathbb{Z}$. Denotemos por A el conjunto de todas las series formales de Laurent con coeficientes complejos

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^k$$

tales que

$$\|x\|_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} |x_k| < \infty \tag{1.9}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Con el producto de convolución y la topología definida por las seminormas de (1.9) A es una $\mathcal{B}_0$–álgebra. En el caso en que $n = n'$ en (1.8) A es un álgebra m–convexa. Si ponemos, como caso particular

$$a_{n,k} = \begin{cases} (1-k)^{n(1-k)} & \text{para} \quad k \leq -1 \\ 1 & \text{para} \quad k = 0, 1 \\ (1+k)^{-\frac{1+k}{n}} & \text{para} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

obtenemos el álgebra de Williansons. En este caso, la relación (1.8) es válida para $n' = 4n$.

$\mathcal{LB}$: ALGEBRAS LOCALMENTE ACOTADAS.

Un espacio vectorial topológico X se dice localmente acotado (ver [29, Cap. 3]) si posee un entorno U que es acotado. En este caso $(\frac{1}{n}U)_{n\geq 1}$ forma una base de entornos del origen para la topología de X, y por tanto, X es metrizable.

El resultado de Aoki–Rolewicz (ver [29, 3.2.1]) que caracteriza la topología de un espacio localmente acotado es el siguiente teorema:

> *Un espacio vectorial topológico X es localmente acotado si y sólo si su topología se puede definir por una norma p–homogénea $\|\cdot\|$, con $0 < p \leq 1$.*

Un teorema análogo al anterior para $\mathcal{LB}$–álgebras, debido a W. Żelazko (ver [29, 3.11.1] ó [33, 2.3]) es el siguiente:

> *Sea A una $\mathcal{F}$–álgebra completa con unidad e. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una métrica d en A que define su topología tal que*

$$d(xy,0) \leq d(x,0)d(y,0)$$

para todos $x, y \in A$.

2. *A es una $\mathcal{LB}$-álgebra.*

3. *La topología de A se puede definir por una norma p-homogénea $\|\cdot\|$, $0 < p \leq 1$, que verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

para todos $x, y \in A$ y $\|e\| = 1$.

Ejemplo

Sea $(\omega_n)_n, n \in \mathbb{Z}$ una sucesión de números reales positivos que verifica

$$\omega_{n+k} \leq \omega_n \omega_k$$

para todos $n, k \in \mathbb{Z}$. Para $0 < p \leq 1$, denotemos por $\ell_p(\omega)$ al conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$ tales que

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega \, |x_n|^p < \infty \tag{1.10}$$

Entonces $\ell_p(\omega)$ con el producto de convolución y la topología que define la p–norma dada por (1.10) es un álgebra localmente acotada.

$\mathcal{N}$: ALGEBRAS NORMADAS.

Es bien conocido, por un teorema de Kolmogorov (ver [29, 3.2.2]), que $\mathcal{N} = \mathcal{LC} \cap \mathcal{LB}$, así que tanto $\mathcal{LC}$ como $\mathcal{LB}$ son generalizaciones naturales de los espacios normados.

Si A es un álgebra normada, y $|\cdot|$ es una norma en A que define su topología, la continuidad del producto en A se traduce en la existencia de una constante positiva C tal que

$$|xy| \leq C\,|x|\,|y| \tag{1.11}$$

para todos $x, y \in A$.

No obstante, renormalizando el álgebra A, mediante

$$\|x\| = \sup\{|xy|\,, y \in A, |y| \leq 1\} \tag{1.12}$$

podemos suponer que la constante C de (1.11) es igual a 1 para la nueva norma de A (1.12). Además se verifica que $\|e\| = 1$, si el álgebra A tiene unidad e.

Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la clase de las álgebras de Banach.

Ejemplos

1. Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales tales que

   $$\alpha_0 = 1 \leq \alpha_{m+n} \leq \alpha_m \alpha_n$$

   para todos $m, n = 1, 2, \ldots$ Sea $\ell(\alpha)$ el conjunto de las series de potencias formales

   $$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

   con coeficientes complejos tales que

   $$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,|x_n| < \infty \tag{1.13}$$

   Entonces $\ell(\alpha)$ con el producto de convolución y la norma dada por (1.13) es un álgebra de Banach.

   Este tipo de álgebras han sido estudiado ampliamente por G.E. Shilov. Observemos que $\ell(\alpha)$ es una álgebra con un generador, el elemento $x = z \in \ell(\alpha)$.

2. Sea $[X, \|\cdot\|]$ un espacio de Banach. El conjunto $B(X)$ de todos los operadores linelaes y continuos en X, con el producto definido por la composición de operadores y la norma dada por

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\}$$

es un álgebra de Banach.

3. Sea M un conjunto, entonces $B(M, \mathbb{C})$, el conjunto de las funciones acotadas en M con valores complejos, con las operaciones usuales y la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(m)|,\ m \in M\}$$

es un álgebra de Banach.

4. Sea T un conjunto compacto Hausdorff, entonces $\mathcal{C}(T)$, el conjunto de las funciones continuas en T con valores complejos, con las operaciones usuales y la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|,\ t \in T\}$$

es un álgebra de Banch.

5. El conjunto $H^\infty(D)$ de todas las funciones analíticas en

$$D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$$

y continuas en $\overline{D}$ con valores complejos, con las operaciones usuales y la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(z)|,\ z \in D\}$$

es un álgebra de Banach.

6. El conjunto $L^1(\mathbb{R})$ de todas las funciones (clases de equivalencia) medibles y absolutamente integrables en la recta real es un álgebra de Banach con el producto de convolución, y la norma definida por

$$\|x\| = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\, dt.$$

Denotanto por $\mathcal{T}$ a la clase de todas las algebras topológicas tenemos el siguiente diagrama de inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{B} & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{LC} & \subset & \mathcal{LPC} & \subset & \mathcal{T} \\ \mathcal{B} & \subset & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{LC} & \subset & \mathcal{LPC} & \subset & \mathcal{T} \\ \mathcal{B} & \subset & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{F} & \subset & \mathcal{T} & & \\ \mathcal{B} & \subset & \mathcal{LB} & \subset & \mathcal{LCP} & \subset & \mathcal{T} & & \\ \mathcal{B} & \subset & \mathcal{LB} & \subset & \mathcal{F} & \subset & \mathcal{T} & & \end{array}$$

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras topológicas, y sea $A \in \mathcal{K}$. Diremos que un álgebra topológica B es una *$\mathcal{K}$–extensión* del álgebra A, o una *superálgebra* en la clase $\mathcal{K}$ para el álgebra A, si $B \in \mathcal{K}$ y existe un isomorfismo topológico de A en B, es decir, un homeomorfismo $f : A \to B$ que es un isomorfismo de álgebras. Si las álgebras A y B tienen unidades e_A y e_B respectivamente, exigiremos además que $f(e_A) = e_B$.

Podemos identificar A con $f(A)$ y tratar A como una subálgebra de B, con la topología que A hereda de B.

En el caso de álgebras normadas, se dice que una $\mathcal{N}$–extensión $[B, \|\cdot\|_B]$ de un álgebra normada $[A, \|\cdot\|_A]$ es isométrica, si $\|f(a)\|_B = \|a\|_A$ para todo $a \in A$.

1.3 Resultados sobre elementos permanentemente singulares

En esta sección se recogen los resultados que existen hasta el momento, relativos a la caracterización de elementos permanentemente singulares.

Todas las álgebras de esta sección supondremos que son conmutativas y que tienen elemento unidad.

Definición 1.3.1 *Sean $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ dos clases de álgebras topológicas. Un elemento x de una $\mathcal{K}_1$–álgebra A se dice $\mathcal{K}_2$–singular si es singular en cualquier $\mathcal{K}_2$–extensión de A. A los elementos $\mathcal{T}$–singulares les llamaremos permanentemente singulares.*

Los resultados que presentamos responden todos al siguiente esquema.

Sea A un álgebra topológica, y sea G un conjunto de elementos de A. ¿ Bajo que condiciones sobre los elementos de G y el álgebra A podemos construir una extensión B de A, donde los elementos de G tienen inverso?

La primera de las condiciones satisfactorias que apareció fue la noción de divisor topológico de cero.

Definición 1.3.2 *Sea A un álgebra topológica. Un elemento $x \in A$ se dice que es un divisor topológico de cero en A si existe un entorno de cero U en A tal que*

$$0 \in \overline{x(A \setminus U)},$$

o equivalentemente, si existe una red $(u_\gamma)_\gamma$ en A tal que $u_\gamma \not\to 0$ pero $u_\gamma x \to 0$.

El concepto original de divisor topológico de cero se debe a G.E. Shilov [30] y la generalización a álgebras topológicas a R. Arens [1].

El resultado más conocido, sobre la posibilidad de añadir inverso de un elemento a un álgebra de Banach, es el clásico de G.E. Shilov [30]:

> *Sea A un álgebra de Banach con un generador. Entonces existe una $\mathcal{B}$-extensión de A que contiene al inverso de un elemento $x \in A$ si y sólo si x no es un divisor topológico de cero en A.*

Posteriormente, R. Arens [2], generaliza este resultado al marco de las álgebras de Banach, y prueba que:

> *Un elemento x de un álgebra de Banach A es $\mathcal{B}$-singular si y sólo si es un divisor topológico de cero en A.*

Varios matemáticos han contribuido a la generalización de estos resultados, por una parte en la ampliación del número de elementos del conjunto G, y por otra al campo de otras clases de álgebras topológicas.

B. Bollobàs [6] prueba, en el marco de las álgebras de Banach, que si A es un álgebra de Banach y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es un conjunto numerable de elementos de A, que no son divisores topológicos de cero, entonces existe una $\mathcal{B}$–extensión del álgebra A donde los elementos x_k, $k = 1, 2, \ldots$ son invertibles.

Además construye, en el mismo trabajo, un álgebra de Banach A con un conjunto no numerable de elementos que no son divisores topológicos de cero tal que, en ninguna extensión del álgebra A se pueden obtener los inversos de los elementos de este conjunto.

W. Żelazko [32] y E. Michael [21] estudian al problema en el campo de las álgebras localmente m–convexas.

E. Michael obtiene una caracterización de los elementos $\mathcal{M}$–singulares utilizando un nuevo concepto de divisor topológico de cero, que en el caso de álgebras normadas coincide con el que nosotros hemos presentado, pero que, en el caso de álgebras topológicas, es diferente. La noción de divisor topológico de cero de la definición 1.3.2 se llama en [21] divisor topológico de cero fuerte.

W. Żelazko reduce el estudio de los elementos $\mathcal{M}$–singulares al marco de los elementos $\mathcal{B}$–singulares, puesto que toda álgebra localmente m–convexa completa es un límite proyectivo inverso de álgebras de Banach (ver [33, 11.6]).

El siguiente ejemplo, debido a M.E. Kuczma [17] pone de manifiesto que existen elementos $\mathcal{M}$–singulares, que son además $\mathcal{T}$–singulares, pero no son divisores topológicos de cero. Es decir, la caracterización de R. Arens [2] no es válida, ni si quiera, para álgebras localmente m–convexas metrizables.

Ejemplo

Denotemos por ω el espacio vectorial de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n \geq 0}$ con términos complejos. Consideremos en ω las seminormas definidas por

$$\|x\|_k = |x_0| + |x_1| + \cdots + |x_k|\,, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.14}$$

ω es un álgebra localmente m–convexa del tipo $\mathcal{B}_0$ con el producto de convolución y la topología que define el sistema de seminormas dadas por (1.14).

En [17] se demuestra que en ω no existen divisores topológicos de cero distintos de cero. Por otra parte, cualquier elemento del ideal

$$M = \{x \in \omega : x_0 = 0\}$$

es $\mathcal{M}$–singular, es más, en [32] se establece que cualquier elemento de M es permanentemente singular.

En el mismo trabajo [32], W. Żelazko obtiene una condición suficiente para la $\mathcal{LC}$–singularidad de elementos en álgebras localmente convexas. Es la siguiente:

> *Sea A un álgebra localmente convexa y sea $\{|\cdot|_\alpha\,, \alpha \in \Delta\}$ un sistema de seminormas que define la topología de A. Si $z \in A$ no es $\mathcal{LC}$–singular, entonces para todo $\alpha \in \Delta$ existe $\beta \in \Delta$ tal que para todo $n = 1, 2\ldots$ se verifica que*
>
> $$\inf\left\{|z^n x|_\beta\,,\ x \in A,\ |x|_\alpha \geq 1\right\} > 0$$

El ejemplo de M.E. Kuczma sugiere buscar otra clase de elementos, distinta de la de los divisores topológicos de cero, que sean permanentemente singulares.

Definición 1.3.3 *Sea A un álgebra topológica. Un elemento $x \in A$ se dice que tiene potencias pequeñas si para cada entorno de cero U en A existe un natural* *n tal que*

$$\lambda x^n \in U \tag{1.15}$$

para todo escalar complejo λ.

En [40] se prueba que si $x \in A$ es de potencias pequeñas (1.15) es cierto para todo exponente mayor que un cierto $n(U, x)$.

Si A es un álgebra localmente convexa, un elemento $x \in A$ tiene potencias pequeñas si y sólo si para cada seminorma continua $|\cdot|$ existe un natural n_0 tal que

$$|x^n| = 0$$

para todo $n \geq n_0$.

Observemos que un elemento x de un álgebra de Banach A tiene potencias pequeñas si y sólo si x es nilpotente.

En el mismo trabajo [40] se establece que el conjunto $I_S(A)$ de todos los elementos de un álgebra topológica A que tienen potencias pequeñas es un ideal de A, en general no cerrado.

Si $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ son dos clases de álgebras topológicas y $x \in A \in \mathcal{K}_1$ tiene potencias pequeñas, entonces x es singular en $\mathcal{K}_2$, y por tanto es permanentemente singular.

Como veremos después, en las secciones 3.1 y 3.2 de esta memoria, estas dos clases de elementos (divisores topológicos de cero y elementos de potencias pequeñas) no cierran el problema de la caracterización de elementos permanentemente singulares en álgebras topológicas.

1.4 Ideales eliminables

Como en la sección anterior, supondremos que todas las álgebras son conmutativas y tienen elemento unidad.

El término ideal, en el contexto de un álgebra topológica A, lo usaremos en el sentido puramente algebraico, es decir, un ideal propio ($I \neq A$) sin ninguna hipótesis sobre su estructura topológica.

Definición 1.4.1 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras topológicas, y sea $A \in \mathcal{K}$. Diremos que un ideal $I \subset A$ es eliminable en la clase $\mathcal{K}$, o $\mathcal{K}$-eliminable, si existe una $\mathcal{K}$-extensión B de A tal que I no está contenido en ningún ideal propio de B. En este caso diremos que el álgebra B elimina al ideal I. En otro caso, diremos que el ideal I es no eliminable en la clase $\mathcal{K}$, o no $\mathcal{K}$-eliminable.*

Si $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son dos clases de álgebras topológicas, con $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, entonces cualquier ideal $\mathcal{K}_1$-eliminable de un álgebra A es también $\mathcal{K}_2$-eliminable.

El concepto de ideal eliminable fue introducido y estudiado por R. Arens en [3] y [4]. Sin embargo, R. Arens sólo considera el caso de álgebras normadas y extensiones isométricas. En principio, para la clase de las álgebras normadas, la clase de ideales eliminables de R. Arens es formalmente más amplia que la que nosotros presentamos en la definición 1.4.1. No obstante, con el trabajo de J.A. Lindberg [18] (ver corolario 2.2.1 de esta memoria) se tiene que las dos clases coinciden.

En el trabajo de W. Żelazko [34] se introduce y se estudia una clase de ideales no eliminables, la clase de los ideales formados conjuntamente por divisores topológicos de cero.

Definición 1.4.2 *Diremos que un ideal I de un álgebra de Banach A está formado conjuntamente por divisores topológicos de cero si para todo conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq I$ se verifica que*

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|zx_i\| \,,\ z \in A,\ \|z\| = 1 \right\} = 0$$

Esto equivale a que exista una red $(z_\gamma)_\gamma \subseteq A$, $\|z_\gamma\| = 1$ tal que $z_\gamma x \to 0$ para todo $x \in I$.

El resultado que se obtiene en [34] es el siguiente:

Sea A un álgebra de Banach. Si I es un ideal cerrado de A formado conjuntamente por divisores topológicos de cero, entonces I es no eliminable en la clase $\mathcal{B}$.

Los ideales en álgebras de Banach, eliminables en la clase $\mathcal{LC}$ se estudian en [37]. El resultado que se establece es el siguiente:

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y sea $I \subset A$ un ideal. Entonces I es no eliminable en la clase $\mathcal{LC}$ si y sólo si I está formado conjuntamente por divisores topológicos de cero.

Como consecuencia de este resultado se deduce que la clase de los ideales $\mathcal{LC}$–eliminables coincide con la clase de los ideales $\mathcal{T}$–eliminables.

Comentemos que, hasta este momento no se conocían caracterizaciones satisfactorias para que un ideal fuese eliminable en la clase $\mathcal{B}$. Del resultado anterior sigue que, en todo caso, esta caracterización debe ser análoga a la de [37], o bien existen ideales en álgebras de Banach, que son no eliminables en $\mathcal{B}$–extensiones, pero son eliminables en extensiones localmente convexas.

Con estas ideas, que ya aparecen en el trabajo de R. Arens [3] con una formulación diferente, V. Müller [22] caracteriza los ideales no eliminables en la clase $\mathcal{B}$, de la siguiente forma:

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Un ideal $I \subset A$ es no eliminable en la clase $\mathcal{B}$ si y sólo si está formado conjuntamente por divisores topológicos de cero.

Resultados sobre $\mathcal{T}$–eliminabilidad de ideales en álgebras topológicas se pueden encontrar en [39]. Uno de ellos es este:

Sea A un álgebra topológica con unidad. Si $I \subset A$ es un ideal formado conjuntamente por divisores topológicos de cero, entonces I es no eliminable en la clase $\mathcal{T}$.

Sin embargo, en el álgebra de las funciones complejas continuas en la recta real, $C(-\infty, \infty)$, con la topología dada por las seminormas

$$\|x\|_i = \max\{|x(t)|,\ |t| \leq i\},\ i = 1, 2, \ldots$$

todos los ideales son no eliminables en la clase $\mathcal{T}$, sin embargo, no todos los ideales de este álgebra están formados conjuntamente por divisores topológicos de cero. Por ejemplo

$$I = \max\{\ x \in C(-\infty, \infty),\ \text{tal que existe } t(x) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x(t) = 0 \\ \text{para todo } t \geq t(x)\}$$

Observemos que $C(-\infty, \infty)$ es un álgebra localmente m–convexa del tipo $\mathcal{B}_0$.

Esto demuestra que existe una clase de ideales no eliminables en la clase $\mathcal{T}$ *mayor* que la clase de los ideales formados conjuntamente por divisores topológicos de cero. Este hecho sugiere a W. Żelazko a considerar la siguiente definición

Definición 1.4.3 *Un ideal I de un álgebra topológica A se dice que está formado localmente por divisores topológicos de cero si para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset I$ existe una red $(z_\gamma)_\gamma$ en A, con $z_\gamma \not\to 0$, tal que $z_\gamma x_i \to 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Es claro, que cualquier ideal formado conjuntamente por divisores topológicos de cero está formado localmente por divisores topológicos de cero. Por otra parte se establece que:

Cualquier ideal formado localmente por divisores topológicos de cero es no eliminable en la clase $\mathcal{T}$.

Combinando los resultados de [22] y [36] se obtiene en [39] una caracterización de los ideales no eliminables en la clase $\mathcal{M}$ y en la clase $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap \mathcal{B}_0$.

El resultado más eficaz de [39], a pesar de ser solamente una condición suficiente, es el siguiente:

Sea A un álgebra topológica, y sea I un ideal contenido en un ideal de la forma $I_1 + I_S(A)$, donde I_1 está formado localmente por divisores topológicos de cero e $I_S(A)$ es el ideal de los elementos de A con potencias pequeñas. Entonces I es no eliminable en la clase $\mathcal{T}$.

Por último, en el mismo trabajo [39], se obtiene una caracterización, bastante formal y no muy cómoda para ser aplicada, de ideales no eliminables en la clase $\mathcal{LC}$, que es similar a la caracterización de ideales no $\mathcal{B}$–eliminables dada por R. Arens en [4].

Capítulo II

Renormalización de álgebras topológicas

Sea $[B, \|\cdot\|]$ un álgebra normada y A una subálgebra de B. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma en A que genera la topología que A hereda de B. Entonces existen dos constantes positivas k_1 y k_2 tales que:

$$k_1|a| \leq \|a\| \leq k_2|a|$$

para todo $a \in A$.

Este resultado pone de manifiesto que, en la medida que las constantes k_1 y k_2 sean próximas a 1, las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ serán parecidas en el álgebra A.

En este sentido, podemos plantear la siguiente pregunta. Fijada la norma $|\cdot|$ en A, ¿Es posible encontrar otra norma $\|\cdot\|_1$ en B, equivalente a $\|\cdot\|$, de forma que $\|a\|_1 = |a|$ para todo $a \in A$? Es decir, ¿podemos tomar $k_1 = k_2 = 1$ para la nueva norma en B?

Una primera respuesta a este tipo de preguntas fue dada por J.A. Lindberg en [18] para álgebras conmutativas en el año 1969. El resultado que él obtiene es el siguiente:

Sea $[B, \|\cdot\|]$ un álgebra normada conmutativa y sea A una subálgebra de B. Si $|\cdot|$ es una norma en A equivalente a la restrición de $\|\cdot\|$

a A, entonces $|\cdot|$ se puede extender a una norma en el álgebra B equivalente a $\|\cdot\|$.

y se utiliza para establecer condiciones suficientes para que la ecuación $expx = a, a \in A$ tenga solución en una extensión B de A.

En este capítulo, se obtienen resultados de este tipo para diferentes clases de álgebras topológicas: álgebras normadas, álgebras localmente acotadas, álgebras localmente convexas y álgebras localmente convexas metrizables, todas ellas sin la hipótesis de conmutatividad.

Como consecuencia de estos resultados damos una respuesta afirmativa a un viejo problema propuesto por W. Żelazko en [31]. Este problema es, en cierta forma, similar al resultado de renormalización de álgebras normadas que aparece en la sección 1.2 de esta memoria. De hecho, se trata de la generalización de éste al marco de las álgebras localmente convexas.

PROBLEMA. *La topología de un álgebra localmente convexa B con unidad e se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas que verifica LC1 y LC2 tal que $|e|_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$.*

2.1 El resultado de Lindberg

Comentaremos ahora, con cierto detalle, el resultado de J.A. Lindberg, al que haciamos referencia en los comentarios previos de este capítulo. Si bien la prueba que él ofrece es muy técnica, nuestra idea de extender la norma de la subálgebra a todo el álgebra surge de ella. Comenzaremos primero con una observación.

Observación

Sea $[A, \|\cdot\|]$ un álgebra normada conmutativa con unidad e. Sean $X = \{x_a, a \in U\}$ un conjunto de indeterminadas conmutativas y $T = \{t_a, a \in U\}$ un conjunto de números reales no negativos.

Denotemos por $A[X]$ el álgebra de los polinomios en X con coeficientes en el álgebra A. Un elemento de $A[X]$ es una suma finita de la forma

$$\sum_{r\in D} p_r x^r = \sum p_{r_1,r_2,\ldots,r_k} x_{a_1}^{r_1} x_{a_2}^{r_1} \cdots x_{a_1}^{r_1}$$

donde $p_r = p_{r_1,r_2,\ldots,r_k} \in A$ para todo $r \in D$, con

$$D = \{r = (r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathbb{N}^k, k = 1, 2, \ldots\}$$

Por comodidad, denotaremos a los elementos de $A[X]$ por $p(x)$ o bien por $p(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_k})$. También pondremos p_0 para denotar el término independiente del polinomio $p(x)$.

En $A[X]$ se puede definir una norma, $\|\cdot\|_T$, como

$$\|p(x)\|_T = \|p(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_k})\|_T = \sum \|p_{r_1,r_2,\ldots,r_k}\| \, t_{a_1}^{r_1} t_{a_2}^{r_2} \cdots t_{a_k}^{r_k}$$

Entonces $[A[X], \|\cdot\|_T]$ es un álgebra normada que es una extensión de A, si identificamos los elementos de A con los polinomios constantes de $A[X]$.

El resultado de J.A. Lindberg es el siguiente.

Teorema 2.1.1 *Sea $\left[B, \|\cdot\|'\right]$ un álgebra normada conmutativa con unidad e, y sea A una subálgebra de B que contiene a e. Sea $\|\cdot\|$ una norma en A que verifica*

$$\alpha \|a\| \leq \|a\|' \leq \beta \|a\|$$

para todo $a \in A$, donde $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$. Entonces $\|\cdot\|$ se puede extender a una norma en B, equivalente a $\|\cdot\|'$ (que seguimos denotando por $\|\cdot\|$) que verifica

$$\frac{\alpha}{\beta} \|b\| \leq \|b\|' \leq \beta \|b\|$$

para todo $b \in B$.

Las ideas que se desarrollan en la prueba de este resultado son las siguientes.

Consideremos el conjunto $U = B \setminus A$, y sea $t_b = \|b\|'$ para todo $b \in B$. Pongamos $T = \{t_b, b \in U\}$.

El homomorfismo de álgebras $\psi : \left[A[X], \|\cdot\|'_T\right] \to \left[B, \|\cdot\|'\right]$ definido por

$$\psi(p(x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k})) = p(b_1, b_2, \ldots, b_k), \ \ b_1, b_2, \ldots, b_k \in U$$

es sobreyectivo y continuo.

Llamemos $J = \psi^{-1}(\{0\})$, el núcleo de ψ, y definimos en B la norma $\|\cdot\|'_Q$ de la siguiente forma. Si $b \in B$ es tal que $b = \psi(p(x))$ ponemos

$$\|b\|'_Q = \inf \left\{\|p(x) + j(x)\|'_T : j(x) \in J\right\}$$

Observemos que $\|\cdot\|'_Q$ no es más que la norma cociente del álgebra $A[X]/J$ trasladada al álgebra B. Por tanto se verifica que $\|b\|'_Q = \|b\|'$ para todo $b \in B$.

Definimos ahora otra norma $\|\cdot\|''_Q$ en $A[X]$ de la siguiente forma

$$\left\|\sum_{r\in D} a_r x^r\right\|''_T = \|a_0\| + \frac{\alpha}{\beta}\left\|\sum_{r\in D-\{0\}} a_r x^r\right\|_T$$

De esta forma, mediante el homomorfismo ψ, podemos trasladar esta nueva norma al álgebra B de la siguiente forma. Si $b \in B$ es tal que $b = \psi(p(x))$ ponemos

$$\|b\|_Q = \inf \left\{\|p(x) + j(x)\|''_T : j(x) \in J\right\}$$

Por último, se establece la equivalencia de las normas $\|\cdot\|'_Q$ y $\|\cdot\|_Q$ en B y la igualdad $\|a\|_Q = \|a\|$ para todo $a \in A$. Esto completa la prueba del resultado.

La prueba que se ofrece de este resultado es sorprendente en dos aspectos. El primero, la definición de la norma $\|\cdot\|'_Q$ en B, que no es más que la vieja norma, $\|\cdot\|'$, que ya se tenía en B. No obstante es necesario, por la construcción, la redefinición que se hace de $\|\cdot\|'$ para poder compararla con $\|\cdot\|_Q$, que se define después. El segundo es que, si se quiere extender la norma de A al álgebra B ¿por qué construir una extensión "mayor", como es $A[X]$?

Esto nos sugirió la posibilidad de extender la norma de A utilizando sólo la extensión dada B. Por otra parte, esto nos permitirá eliminar la hipótesis de conmutatividad.

La idea está en la definición de $\|\cdot\|_Q$.

$$\begin{aligned}\|b\|_Q &= \inf\left\{\|p(x)+j(x)\|''_T\,,\ j(x)\in J\right\}\\ &= \inf\left\{\|p_0+j_0\|+\frac{\alpha}{\beta}\|p(x)+j(x)-(p_0+j_0)\|_T\,,\ j(x)\in J\right\}\end{aligned}$$

Utilizando sólo el álgebra B podemos definir

$$\|b\| = \inf\left\{\|a\|+\frac{\alpha}{\beta}\|b-a\|',a\in A\right\} \tag{2.1}$$

que será la norma que nosotros utilizaremos para extender $\|\cdot\|$ a todo B.

2.2 Renormalización de álgebras normadas

Aprovechando las ideas que hemos comentado en la sección anterior podemos formular un resultado análogo al de J.A. Lindberg, sin la hipótesis de conmutatividad.

Teorema 2.2.1 *Sea $[B,\|\cdot\|]$ un álgebra normada y sea A una subálgebra de B. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma en A que verifica*

$$\alpha|a| \leq \|a\| \leq \beta|a|$$

para todo $a\in A$, donde $0<\alpha\leq 1\leq\beta$. Entonces existe una norma $\|\cdot\|'$ en B tal que $\|a\|'=|a|$ para todo $a\in A$, y además:

$$\frac{\alpha}{\beta^2}\|b\|' \leq \|b\| \leq \beta\,\|b\|'$$

para todo $b\in B$.

DEMOSTRACIÓN:

Podemos suponer que B tiene unidad $e \in A$ y $|e| = \|e\| = 1$. Si alguna de estas condiciones no se verificasen bastaría considerar las unitizaciones de álgebras B y A:

$$B_1 = \{(b, \lambda) : b \in B, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

con la norma $\|(b,\lambda)\|_1 = \|b\| + |\lambda|$, y

$$A_1 = \{(a, \lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

con la norma $\|(a,\lambda)\|_1 = |a| + |\lambda|$, que son extensiones unitarias de A y B respectivamente. Además A_1 es subálgebra de B_1.

La prueba que realizaremos está estructurada en dos partes. En la primera, utilizando las ideas de [7, I.§.4.1], se renormaliza previamente el álgebra B, pues si se pretende definir la extensión de la norma de la subálgebra A directamente como en (2.1) existen problemas para establecer la submultiplicatividad en B de la extensión. En la segunda parte de la prueba se extiende la norma de A con la nueva norma de B y se establecen los resultados del teorema.

1. Construcción de una norma en B, $\|\cdot\|_1$, equivalente a $\|\cdot\|$, tal que $\|a\|_1 \leq |a|$ para todo $a \in A$.

Definimos, para $b \in B$

$$\|b\|_2 = \sup\{\|ab\| : a \in A, |a| \leq 1\}$$

Como $e \in A$ y $|e| = 1$, si $b \in B$ se tiene que $\|b\| \leq \|b\|_2$. Por otra parte tenemos que

$$\|b\|_2 \leq \|b\| \sup\{\|a\| : a \in A, |a| \leq 1\} \leq \beta \|b\|$$

Por tanto tenemos que $\|b\| \leq \|b\|_2 \leq \beta \|b\|$, para todo $b \in B$. De hecho se verifica que $\|\cdot\|_2$ es una norma en B equivalente a $\|\cdot\|$.

La norma $\|\cdot\|_2$ es submultiplicativa en B. Si $b_1, b_2 \in B$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|_2 &= \sup\{\|ab_1b_2\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&\leq \|b_2\| \sup\{\|ab_1\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&= \|b_2\| \, \|b_1\|_2 \\
&\leq \|b_1\|_2 \, \|b_2\|_2
\end{aligned}$$

Además, si $a_0 \in A$, $|a_0| = 1$ y $b \in B$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|a_0 b\|_2 &= \sup\{\|aa_0b\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|ab\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&= \|b\|_2
\end{aligned}$$

Por tanto se verifica que

$$\|ab\|_2 \leq |a| \, \|b\|_2$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

Definimos ahora, para un elemento $b \in B$

$$\|b\|_1 = \sup\{\|bc\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\}$$

Entonces $\|\cdot\|_1$ es la norma que estabamos buscando. Observemos que, por definición de $\|\cdot\|_1$, se verifica que

$$\|bc\|_2 \leq \|b\|_1 \, \|c\|_2$$

para todo $b, c \in B$.

La norma $\|\cdot\|_1$ es submultiplicativa. Si $b_1, b_2 \in B$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|_1 &= \sup\{\|b_1b_2c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \|b_1\|_1 \sup\{\|b_2c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&= \|b_1\|_1 \, \|b_2\|_1
\end{aligned}$$

Las otras propiedades de norma se establecen de forma similar.

Si $a \in A$ entoces se verifica que:

$$\begin{aligned} \|a\|_1 &= \sup\{\|ac\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|a| \, \|c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\ &\leq |a|. \end{aligned}$$

Por último, comprobemos que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en el álgebra B. Si $b \in B$ se verifica que

$$\begin{aligned} \|b\|_1 &= \sup\{\|bc\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\beta \, \|bc\| : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\ &\leq \beta \, \|b\| \sup\{\|c\|, c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\ &\leq \beta \, \|b\|, \end{aligned}$$

y además se tiene que

$$\|b\| \leq \|b\|_2 = \|be\|_2 \leq \|b\|_1 \|e\|_2 \leq \beta \, \|b\|_1 .$$

De las desigualdades anteriores obtenemos que

$$\frac{1}{\beta} \|b\|_1 \leq \|b\| \leq \beta \, \|b\|_1$$

para todo $b \in B$.

2. Definición de la norma en B, $\|\cdot\|'$, que extiende a la norma de A, $|\cdot|$.

Si $b \in B$ definimos

$$\|b\|' = \inf \left\{ |a| + \frac{\beta}{\alpha} \|b - a\|_1 , a \in A \right\}.$$

Entonces $\|\cdot\|'$ es una norma submultiplicativa en B. Para establecer la submultiplicatividad procedemos de la siguiente forma. Si $b_1, b_2 \in B$ y $a_1, a_2 \in A$, de la igualdad

$$b_1 b_2 = a_1 a_2 + a_1(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)a_2 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

sigue que

$$\begin{aligned}
\|b_1b_2\|' &= \|a_1a_2 + a_1(b_2-a_2) + (b_1-a_1)a_2 + (b_1-a_1)(b_2-a_2)\|' \\
&\leq |a_1a_2| + \frac{\beta}{\alpha}\|a_1(b_2-a_2) + (b_1-a_1)a_2 + (b_1-a_1)(b_2-a_2)\|_1 \\
&\leq |a_1||a_2| + \frac{\beta}{\alpha}[\|a_1\|_1\|b_2-a_2\|_1 + \|b_1-a_1\|_1\|a_2\|_1 \\
&\quad + \|b_1-a_1\|_1\|b_2-a_2\|_1] \\
&\leq |a_1||a_2| + \frac{\beta}{\alpha}\|a_1\|_1\|b_2-a_2\|_1 + \frac{\beta}{\alpha}\|b_1-a_1\|_1\|a_2\|_1 \\
&\quad + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\|b_1-a_1\|_1\|b_2-a_2\|_1 \\
&\leq |a_1||a_2| + \frac{\beta}{\alpha}|a_1|\,\|b_2-a_2\|_1 + \frac{\beta}{\alpha}\|b_1-a_1\|_1|a_2| \\
&\quad + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\|b_1-a_1\|_1\|b_2-a_2\|_1 \\
&= \left[|a_1| + \frac{\beta}{\alpha}\|b_1-a_1\|_1\right]\left[|a_2| + \frac{\beta}{\alpha}\|b_2-a_2\|_1\right].
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos en a_1 y $a_2 \in A$ se tiene que

$$\|b_1b_2\|' \leq \|b_1\|'\|b_2\|'.$$

De la definición de $\|\cdot\|'$ se tiene que $\|a\|' \leq |a|$ para todo $a \in A$. Por otra parte, se tiene que si $a_0, a \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}
|a| &\leq |a_0| + |a-a_0| \\
&\leq |a_0| + \frac{1}{\alpha}\|a-a_0\| \\
&\leq |a_0| + \frac{\beta}{\alpha}\|a-a_0\|_1.
\end{aligned}$$

Así tenemos que $\|a\|' = |a|$ para todo $a \in A$. Es decir $\|\cdot\|'$ extiende $|\cdot|$ a todo el álgebra B.

Por último, comprobemos que $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en B. Por una parte tenemos que, para todo $b \in B$

$$\|b\|' \leq \frac{\beta}{\alpha}\|b\|_1 \leq \frac{\beta^2}{\alpha}\|b\|,$$

y por otra, para todo $a \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\|b\| &\leq \frac{1}{\beta}[\|a\| + \|b-a\|] \\ &\leq \frac{1}{\beta}\|a\| + \frac{1}{\alpha}\|b-a\| \\ &\leq |a| + \frac{\beta}{\alpha}\|b-a\|_1 . \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\frac{\alpha}{\beta^2}\|b\|' \leq \|b\| \leq \beta\|b\|'$$

para todo $b \in B$, como queríamos ver. ∎

Corolario 2.2.1 *Los conceptos de extensión isomorfa y extensión isométrica son equivalentes para álgebras normadas.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean $[A, \|\cdot\|_A]$ y $[B, \|\cdot\|_B]$ dos álgebras normadas, y sea $f : A \to B$ un isomorfismo de álgebras sobre la imagen. Entonces existen dos constantes positivas k_1 y k_2 tales que:

$$k_1\|a\|_A \leq \|f(a)\|_B \leq k_2\|a\|_A$$

para todo $a \in A$.

En $f(A)$, que es una subálgebra de B, podemos definir la siguiente norma

$$\|f(a)\|_{f(A)} = \|a\|_A .$$

Entonces se tiene que

$$k_1\|f(a)\|_{f(A)} \leq \|f(a)\|_B \leq k_2\|f(a)\|_{f(A)},$$

y por tanto, $\|\cdot\|_{f(A)}$ define la topología que $f(A)$ hereda de B.

Si tomamos $\alpha = \min\{1, k_1\}$ y $\beta = \max\{1, k_2\}$ obtenemos que

$$\alpha \|f(a)\|_{f(A)} \leq \|f(a)\|_B \leq \beta \|f(a)\|_{f(A)}$$

para todo $a \in A$, y además se tiene que $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$.

Por el teorema anterior, existe una norma $\|\cdot\|'$ en B, equivalente a $\|\cdot\|_B$ tal que

$$\|f(a)\|' = \|f(a)\|_{f(A)} = \|a\|_A$$

para todo $a \in A$, es decir, $f : [A, \|\cdot\|_A] \to [B, \|\cdot\|']$ es una isometría. ∎

2.3 Renormalización de LB–álgebras

Sea A un álgebra localmente acotada. Sean $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ dos normas en A con exponentes p, q, $(0 < p, q \leq 1)$ respectivamente, que generan la topología de A. Esto significa que existen:

$\epsilon_1 > 0$ tal que $\{a \in A : \|a\| \leq \epsilon_1\} \subseteq \{a \in A : |a| \leq 1\}$, es decir, para todo $a \in A$ se verifica que

$$\epsilon_1^p |a|^q \leq \|a\|^p,$$

$\epsilon_2 > 0$ tal que $\{a \in A : |a| \leq \epsilon_2\} \subseteq \{a \in A : \|a\| \leq 1\}$, es decir, para todo $a \in A$ se verifica que

$$\epsilon_2^q \|a\|^p \leq |a|^q.$$

En definitiva, $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ generan la misma topología en el álgebra A si y sólo si existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 |a|^q \leq \|a\|^p \leq C_2 |a|^q$$

para todo $a \in A$.

El teorema de renormalización para álgebras normadas de la sección anterior, permite formular un resultado análogo para álgebras localmente acotadas. Es el siguiente:

Teorema 2.3.1 *Sea B un álgebra localmente acotada y sea A una subálgebra de B (que también será localmente acotada). Supongamos que $|\cdot|$ es una p–norma $(0 < p \leq 1)$ en A que define la topología que A hereda de B. Entonces existe una s–norma $\|\cdot\|'$, $0 < s \leq 1$, en B tal que $\|a\|' = |a|^t$ para todo $a \in A$, y algún t tal que $0 < t \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\|\cdot\|$ una q–norma $(0 < q \leq 1)$ en B que define la topología de B.

Podemos suponer que B tiene unidad $e \in A$ y $|e| = \|e\| = 1$. Si alguna de estas condiciones no se verificasen bastaría considerar las unitizaciones de álgebras B y A:

$$B_1 = \{(b, \lambda) : b \in B, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

con la q–norma $\|(b, \lambda)\|_1 = \|b\| + |\lambda|^q$, y

$$A_1 = \{(a, \lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

con la p–norma $\|(a, \lambda)\|_1 = |a| + |\lambda|^p$, que son extensiones unitarias de A y B respectivamente. Además A_1 es subálgebra de B_1.

Como $|\cdot|$ define la topología que A hereda de B existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1|a|^q \leq \|a\|^p \leq C_2|a|^q$$

para todo $a \in A$. Además podemos suponer que $0 < C_1 \leq 1 \leq C_2$.

El esquema que seguiremos para la prueba de este teorema es análogo al del teorema 2.2.1 de la sección anterior, y está estructura también en dos partes.

1. Construcción de una q–norma en B, $\|\cdot\|_1$, equivalente a $\|\cdot\|$, tal que $\|a\|_1^p \leq |a|^q$ para todo $a \in A$.

Definimos, para $b \in B$

$$\|b\|_2 = \sup\{\|ab\| : a \in A, |a| \leq 1\}.$$

Como $e \in A$ y $|e| = 1$, si $b \in B$ se tiene que $\|b\| \leq \|b\|_2$. Por otra parte tenemos que

$$\|b\|_2 \leq \|b\| \sup\{\|a\| : a \in A, |a| \leq 1\} \leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\|.$$

De esta forma obtenemos que

$$\|b\| \leq \|b\|_2 \leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\|$$

para todo $b \in B$. De hecho se verifica que $\|\cdot\|_2$ es una q–norma en B equivalente a $\|\cdot\|$.

La q–norma $\|\cdot\|_2$ es submultiplicativa en B. Si $b_1, b_2 \in B$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|_2 &= \sup\{\|ab_1b_2\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&\leq \|b_2\| \sup\{\|ab_1\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&= \|b_2\| \|b_1\|_2 \\
&\leq \|b_1\|_2 \|b_2\|_2
\end{aligned}$$

Además, si $a_0 \in A$, $|a_0| = 1$ y $b \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
\|a_0 b\|_2 &= \sup\{\|aa_0b\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|ab\| : a \in A, |a| \leq 1\} \\
&= \|b\|_2 .
\end{aligned}$$

Por tanto se verifica que

$$\|ab\|_2^p \leq |a|^q \|b\|_2^p$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

Definimos ahora, para un elemento $b \in B$

$$\|b\|_1 = \sup\{\|bc\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\}.$$

Entonces $\|\cdot\|_1$ es la q–norma que estabamos buscando. Observemos que, por definición de $\|\cdot\|_1$, se verifica

$$\|bc\|_2 \leq \|b\|_1 \|c\|_2$$

para todo $b, c \in B$.

La q–norma $\|\cdot\|_1$ es submultiplicativa. Si $b_1, b_2 \in B$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|_1 &= \sup\{\|b_1 b_2 c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \|b_1\|_1 \sup\{\|b_2 c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&= \|b_1\|_1 \|b_2\|_1 .
\end{aligned}$$

Las otras propiedades de q–norma se establecen de forma similar.

Si $a \in A$ entoces se verifica que

$$\begin{aligned}
\|a\|_1 &= \sup\{\|ac\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \sup\{|a|^{\frac{q}{p}} \|c\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq |a|^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $\|a\|_1^p \leq |a|^q$, para todo $a \in A$.

Por último comprobemos que las q–normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en el álgebra B. Si $b \in B$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|b\|_1 &= \sup\{\|bc\|_2 : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \sup\{C_2^{\frac{1}{p}} \|bc\| : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\| \sup\{\|c\| : c \in B, \|c\|_2 \leq 1\} \\
&\leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\| ,
\end{aligned}$$

y además, se tiene que

$$\|b\| \leq \|b\|_2 = \|be\|_2 \leq \|b\|_1 \|e\|_2 \leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\|_1 .$$

De las desigualdades anteriores obtenemos

$$\frac{1}{C_2^{\frac{1}{p}}} \|b\|_1 \leq \|b\| \leq C_2^{\frac{1}{p}} \|b\|_1$$

para todo $b \in B$.

2. Definición de la s–norma en B, $\|\cdot\|'$, que "extiende" a la p–norma de A, $|\cdot|$.

Si $b \in B$ definimos

$$\|b\|' = \inf \left\{ |a|^q + \frac{C_2}{C_1} \|b-a\|_1^p , a \in A \right\}.$$

Entonces $\|\cdot\|'$ es una $s = pq$–norma submultiplicativa en B. Para establecer la submultiplicatividad procedemos de la siguiente forma. Si $b_1, b_2 \in B$ y $a_1, a_2 \in A$, de la igualdad

$$b_1 b_2 = a_1 a_2 + a_1(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)a_2 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

sigue que

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|' &= \|a_1 a_2 + a_1(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)a_2 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\|' \\
&\leq |a_1 a_2|^q + \frac{C_2}{C_1} \|a_1(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)a_2 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\|_1^p \\
&\leq |a_1|^q |a_2|^q + \frac{C_2}{C_1} [\|a_1\|_1^p \|b_2 - a_2\|_1^p + \|b_1 - a_1\|_1^p \|a_2\|_1^p \\
&\quad + \|b_1 - a_1\|_1^p \|b_2 - a_2\|_1^p] \\
&\leq |a_1|^q |a_2|^q + \frac{C_2}{C_1} \|a_1\|_1^q \|b_2 - a_2\|_1^p + \frac{C_2}{C_1} \|b_1 - a_1\|_1^p \|a_2\|_1^q \\
&\quad + \frac{C_2^2}{C_1^2} \|b_1 - a_1\|_1^p \|b_2 - a_2\|_1^p \\
&= \left[|a_1|^q + \frac{C_2}{C_1} \|b_1 - a_1\|_1^p \right] \left[|a_2|^q + \frac{C_2}{C_1} \|b_2 - a_2\|_1^p \right].
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos en a_1 y $a_2 \in A$ se tiene que

$$\|b_1b_2\|' \leq \|b_1\|' \|b_2\|'.$$

De la definición de $\|\cdot\|'$ se tiene que $\|a\|' \leq |a|^q$ para todo $a \in A$. Por otra parte, se tiene que si $a_0, a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} |a|^q &\leq |a_0|^q + |a - a_0|^q \\ &\leq |a_0|^q + \frac{1}{C_1}\|a - a_0\|^p \\ &\leq |a_0|^q + \frac{C_2}{C_1}\|a - a_0\|_1^p. \end{aligned}$$

Así tenemos que $\|a\|' = |a|^q$ para todo $a \in A$, o sea $t = q$.

Por último, comprobemos que $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en B, es decir, generan la misma topología en el álgebra B. Por una parte tenemos que

$$\|b\|' \leq \frac{C_2}{C_1}\|b\|_1^p \leq \frac{C_2^2}{C_1}\|b\|^p$$

para todo $b \in B$, por tanto tenemos que

$$\|b\|'^q \leq \frac{C_2^{2q}}{C_1^q}\|b\|^s$$

para todo $b \in B$.

Por otra parte, para todo $a \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_2}\|b\|^p &\leq \frac{1}{C_2}[\|a\|^p + \|b - a\|^p] \\ &\leq \frac{1}{C_2}\|a\|^p + \frac{1}{C_1}\|b - a\|^p \\ &\leq |a|^q + \frac{C_2}{C_1}\|b - a\|_1^p. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\frac{1}{C_2^q}\|b\|^s \leq \|b\|'^q \leq \frac{C_2^{2q}}{C_1^q}\|b\|^s.$$

Esto completa la prueba del teorema. ∎

Observaciones

1. En la prueba del teorema anterior hemos utilizado el siguiente resultado elemental. Concretamente es necesario para establecer la desigualdad triangular de cualquiera de las r–normas que aparecen en la demostración.

   Si $0 < r \leq 1$ *y* $x \in \mathbb{R}, x > 0$, *entonces se verifica que*

   $$(1+x)^r \leq 1 + x^r$$

   y en general, si $x_k \in \mathbb{R}, x_k > 0$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$, *entonces*

   $$\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]^r \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^r$$

2. La formulación del teorema 2.3.1 no puede ser idéntica a la del teorema 2.2.1 de la sección anterior (no se puede extender la p–norma $|\cdot|$ de A a todo B). La razón es que un álgebra localmente acotada con unidad e, que no sea un álgebra normada, tiene una subálgebra ($\mathbb{C}e$) que es normada, y la norma de esta subálgebra no se podría extender a una norma en todo el álgebra. Si esto fuese posible, el álgebra de partida sería también normada. Si el álgebra localmente acotada de partida no tiene unidad basta considerar su unitización. Con el mismo argumento, obtendríamos que el álgebra localmente acotada sería normada.

2.4 Renormalización de LC–álgebras

En esta sección se extienden los resultados de las secciones anteriores al marco de las álgebras localmente convexas.

Sea A un álgebra localmente convexa. Sabemos que la topología de A se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ de seminormas que verifica las condiciones LC1 y LC2. En este caso, una seminorma $|\cdot|$ en A es continua si existe $\alpha \in \Delta$ y una constante positiva C tales que

$$|x| \leq C|x|_\alpha$$

para todo $x \in A$.

Presentamos ahora el resultado fundamental de esta sección.

Teorema 2.4.1 *Sea B un álgebra localmente convexa y sea A una subálgebra de B. Sea $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ un sistema de seminormas en A que verifican LC1 y LC2 y genera la topología que A hereda de B. Entonces existe un sistema $\{\|\cdot\|'_\beta,\ \beta \in \Gamma\}$ de seminormas en B, que verifica LC1 y LC2, genera la topología de B, y además para cada $\beta \in \Gamma$, la restricción de $\|\cdot\|'_\beta$ a A pertenece al sistema Δ, es decir, para cada $\beta \in \Gamma$ existe $\alpha \in \Delta$ tal que $|a|_\alpha = \|a\|'_\beta$ para todo $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos el sistema $\{\|\cdot\|_\beta, \beta \in \Phi\}$ de todas las seminormas continuas en B. Se verifica entonces que el sistema formado por la restricción al álgebra A de las seminormas de $\{\|\cdot\|_\beta, \beta \in \Phi\}$ define la misma topología en A que el sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$. Por tanto tenemos que:

1. Para todo $\beta \in \Phi$ existen $\alpha \in \Delta$ y una constante positiva $k(\beta, \alpha)$ tal que $\|a\|_\beta \leq k(\beta, \alpha)|a|_\alpha$ para todo $a \in A$.

2. Para todo $\alpha \in \Delta$ existe $\gamma \in \Phi$ tal que $|a|_\alpha \leq \|a\|_\gamma$ para todo $a \in A$.

Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Phi \text{ tal que } |a|_\alpha \leq \|a\|_\beta \text{ para todo } a \in A\}.$$

Para $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ definimos la seminorma $\|\cdot\|'_{\alpha\beta}$ en B por la igualdad

$$\|b\|'_{\alpha\beta} = \inf\{|a|_\alpha + \|b-a\|_\beta \,, a \in A\}.$$

Comprobemos que el sistema $\{\|\cdot\|_{\alpha\beta} \,, (\alpha,\beta) \in \Gamma\}$ verifica la tesis del teorema.

a) $\|a\|'_{\alpha\beta} = |a|_\alpha$ para todo $a \in A$.

Sea $a_0 \in A$. Por definición de $\|\cdot\|'_{\alpha\beta}$ se tiene que $\|a_0\|'_{\alpha\beta} \leq |a_0|_\alpha$. Por otra parte, si $a, a_0 \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} |a_0|_\alpha &\leq |a|_\alpha + |a_0 - a|_\alpha \\ &\leq |a|_\alpha + \|a_0 - a\|_\beta \,. \end{aligned}$$

Tomando ínfimos en la desigualdad anterior se obtine que $\|a_0\|'_{\alpha\beta} \geq |a_0|_\alpha$ y por tanto la igualdad de **a)**.

b) Los sitemas de seminormas Φ y Γ son equivalentes.

Puesto que $\|b\|'_{\alpha\beta} \leq \|b\|_\beta$ para todo $b \in B$ y para todo $(\alpha,\beta) \in \Gamma$, se tiene que $\|\cdot\|'_{\alpha\beta}$ es una seminorma continua en B respecto de la topología que genera el sistema Φ.

Por otra parte, si $\beta \in \Phi$, por 1. existe $\lambda \in \Delta$ y existe una constante positiva $k(\beta,\lambda) \geq 1$ tal que $\|a\|_\beta \leq k(\beta,\lambda)|a|_\lambda$ para todo $a \in A$.

Ahora, para $\beta \in \Phi$ y $\lambda \in \Delta$ existe $\gamma \in \Phi$ tal que:

$$\begin{aligned} |a|_\lambda &\leq \|a\|_\gamma \text{ para todo } a \in A, \text{ y} \\ \|b\|_\beta &\leq \|b\|_\gamma \text{ para todo } b \in B. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que $(\lambda, \gamma) \in \Gamma$.

Si $a \in A$ y $b \in B$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(\beta,\lambda)}\|b\|_\beta &\leq \frac{1}{k(\beta,\lambda)}\|a\|_\beta + \|b-a\|_\beta \\ &\leq |a|_\lambda + \|b-a\|_\gamma \,. \end{aligned}$$

Tomando ínfimos se tiene que

$$\|b\|_\beta \leq k(\beta,\lambda)\,\|b\|'_{\lambda\gamma}$$

para todo $b \in B$.

Por tanto

$$\|b\|'_{\alpha\beta} \leq \|b\|_\beta \leq k(\beta,\lambda)\,\|b\|'_{\lambda\gamma}$$

para todo $b \in B$ y se tiene **b)**.

c) El sistema Γ verifica LC1 y LC2.

LC1. Sea $(\alpha,\beta) \in \Gamma$. Entonces se verifica que:

Existe $\alpha_1 \in \Delta$ tal que $|a_1a_2|_\alpha \leq |a_1|_{\alpha_1}|a_2|_{\alpha_1}$ para todos $a_1,a_2 \in A$.

Existe $\beta_1 \in \Phi$ tal que $\|b_1b_2\|_\beta \leq \|b_1\|_{\beta_1}\,\|b_2\|_{\beta_1}$ para todos $b_1,b_2 \in B$.

Existe $\alpha_2 \in \Delta$ y existe una constante positiva $k(\beta_1,\alpha_2)$ tal que:

$|a_1|_{\alpha_1} \leq |a_1|_{\alpha_2}$, y $\|a_1\|_{\beta_1} \leq k(\beta_1,\alpha_2)|a_1|_{\alpha_2}$ para todo $a_1 \in A$.

Existe $\beta_2 \in \Phi$ tal que:

$\max\{1,k(\beta_1,\alpha_2)\}\,\|b_1\|_{\beta_1} \leq \|b_1\|_{\beta_2}$ para todo $b_1 \in B$, y

$|a_1|_{\alpha_2} \leq \|a_1\|_{\beta_2}$ para todo $a_1 \in A$.

Observemos que $(\alpha_2,\beta_2) \in \Gamma$.

Ahora, si $b_1,b_2 \in B$ y $a_1,a_2 \in A$, de la igualdad

$$b_1b_2 = a_1a_2 + a_1(b_2-a_2) + (b_1-a_1)a_2 + (b_1-a_1)(b_2-a_2)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\|b_1b_2\|'_{\alpha\beta} &\leq |a_1a_2|_\alpha + \|a_1(b_2-a_2)+(b_1-a_1)a_2+(b_1-a_1)(b_2-a_2)\|_\beta \\ &\leq |a_1|_{\alpha_1}|a_2|_{\alpha_1} + \|a_1\|_{\beta_1}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_1} + \|b_1-a_1\|_{\beta_1}\,\|a_2\|_{\beta_1} \\ &\quad + \|b_1-a_1\|_{\beta_1}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |a_1|_{\alpha_2}|a_2|_{\alpha_2} + k(\beta_1,\alpha_2)|a_1|_{\alpha_2}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_1} \\
&\quad + \|b_1-a_1\|_{\beta_1}\,k(\beta_1,\alpha_2)|a_2|_{\alpha_2} + \|b_1-a_1\|_{\beta_1}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_1} \\
&\leq |a_1|_{\alpha_2}|a_2|_{\alpha_2} + |a_1|_{\alpha_2}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_2} + \|b_1-a_1\|_{\beta_2}\,|a_2|_{\alpha_2} \\
&\quad + \|b_1-a_1\|_{\beta_2}\,\|b_2-a_2\|_{\beta_2} \\
&= \left[|a_1|_{\alpha_2} + \|b_1-a_1\|_{\beta_2}\right]\left[|a_2|_{\alpha_2} + \|b_2-a_2\|_{\beta_2}\right].
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos sobre $a_1, a_2 \in A$ se tiene que

$$\|b_1b_2\|'_{\alpha\beta} \leq \|b_1\|'_{\alpha_2\beta_2}\,\|b_2\|'_{\alpha_2\beta_2}.$$

LC2. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Delta$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Phi$ que verifican

$$|a|_{\alpha_i} \leq \|a\|_{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

para todo $a \in A$, es decir, $(\alpha_i, \beta_i) \in \Gamma$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Como Δ y Φ verifican la condición LC2 se tiene que:

Existe $\alpha \in \Delta$ tal que $|a|_{\alpha_i} \leq |a|_\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$ para todo $a \in A$.

Existe $\beta \in \Phi$ tal que :

$\|b\|_{\beta_i} \leq \|b\|_\beta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para todo $b \in B$, y

$|a|_\alpha \leq \|a\|_\beta$ para todo $a \in A$.

Entonces la pareja $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ verifica la condición LC2 para la n–tupla $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$, puesto que

$$|a|_{\alpha_i} + \|b-a\|_{\beta_i} \leq |a|_\alpha + \|b-a\|_\beta, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

■

Damos ahora una respuesta afirmativa, utilizando el resultado anterior, al problema propuesto por W. Żelazko que planteabamos en la introducción de este capítulo.

Corolario 2.4.1 *Sea B un álgebra localmente convexa con elemento unidad e. Entonces existe un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ de seminormas en B que genera su topología, verifica LC1 y LC2 tal que $|e|_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la subálgebra $A = \mathbb{C}e$, de B. La topología de A está determinada por una sola seminorma, $|\lambda e| = |\lambda|$, puesto que, para cada seminorma $\|\cdot\|$ continua en B, se tiene que $\|\lambda e\| = |\lambda| \, \|e\| = |\lambda e| \, \|e\|$. Por el teorema anterior, existe un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ de seminormas en B, que verifica LC1 y LC2, que genera la topología de B y extiende a la seminorma de A, es decir, $|e|_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$. ∎

2.5 Renormalización de B_0–álgebras

Si A es un álgebra localmente convexa metrizable, su topología se puede determinar por un sistema numerable $\{|\cdot|_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas que verifican las condiciones $B_0$1 y $B_0$2. El teorema que presentamos a continuación es análogo al de la sección anterior. En el caso metrizable no se extienden todas las seminormas de la subálgebra, sino sólo un subconjunto numerable, que no obstante, determina la misma topología que todo el sistema numerable.

Teorema 2.5.1 *Sea B un álgebra localmente convexa metrizable y sea A una subálgebra de B. Sea $\{|\cdot|_n, n = 1, 2, \ldots\}$ un sistema de seminormas que define la topología que A hereda de B y verifica las condiciones $B_0$1 y $B_0$2. Entonces existe un sistema $\{\|\cdot\|'_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas que genera la topología del álgebra B y verifica $B_0$1 y $B_0$2, y existe una sucesión $(r_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\|a\|'_n = |a|_{r_n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ y para todo $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\{p_n, n = 1, 2, \ldots\}$ un sistema de seminormas continuas en B que genera la topología de B.

Definiremos dos conjuntos $\{\|\cdot\|_n, n = 1, 2, \ldots\}$ y $\{\|\cdot\|'_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas en B y los términos de la sucesión $(r_n)_n$ por inducción en n.

Tomemos $r_1 = 1$ y sea $\|\cdot\|_1$ un seminorma continua en B tal que

$$|a|_1 \leq \|a\|_1 \tag{2.2}$$

para todo $a \in A$.

Definimos, para $b \in B$

$$\|b\|'_1 = \inf\{|a|_1 + \|b - a\|_1 : a \in A\}$$

Entonces $\|\cdot\|'_1$ es una seminorma continua en B puesto que

$$\|b\|'_1 \leq \|b\|_1$$

para todo $b \in B$.

Además la senimorma $\|\cdot\|'_1$ extiende a la seminorma de A, $|\cdot|_1$, es decir, se tiene que

$$\|a\|'_1 = |a|_1$$

para todo $a \in A$. En efecto, de la definición de $\|\cdot\|'_1$ se tiene que $\|a\|'_1 \leq |a|_1$ para todo $a \in A$, y de (2.2) sigue la desigualdad contraria.

Supongamos que ya hemos definido seminormas continuas $\|\cdot\|_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, en B, los valores $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ y además:

$$\|b\|'_k = \inf\{|a|_{r_k} + \|b - a\|_k : a \in A\}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$ y $b \in B$.

Vamos a definir ahora, r_{n+1}, $\|\cdot\|_{n+1}$ y $\|\cdot\|'_{n+1}$.

Tomemos una seminorma continua q_n en B que verifique:

$$\begin{aligned} \|b_1 b_2\|_n &\leq q_n(b_1) q_n(b_2) \text{ para todo } b_1, b_2 \in B, \text{ y} \\ p_{n+1}(b) &\leq q_n(b) \text{ para todo } b \in B. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tomamos $r_{n+1} > r_n$ y una constante $C_n > 1$ tales que

$$q_n(a) \leq C_n |a|_{r_{n+1}} \tag{2.4}$$

para todo $a \in A$.

La última elección es posible porque q_n es una seminorma continua en el álgebra A.

Escojamos ahora una seminorma continua $\|\cdot\|_{n+1}$ en B tal que:

$$\begin{aligned} \|b\|_n &\leq \|b\|_{n+1} \text{ para todo } b \in B, \\ |a|_{r_{n+1}} &\leq \|a\|_{n+1} \text{ para todo } a \in A, \text{ y} \\ C_n q_n(b) &\leq \|b\|_{n+1} \text{ para todo } b \in B. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Definimos, por último, para $b \in B$

$$\|b\|'_{n+1} = \inf\{|a|_{r_{n+1}} + \|b-a\|_{n+1}\,,\ a \in A\}.$$

Observemos que, de la definición de $\|\cdot\|'_{n+1}$ se tiene que

$$\|b\|'_{n+1} \leq \|b\|_{n+1} \tag{2.6}$$

para todo $b \in B$. Además, si $a \in A$ y $b \in B$ se tiene de (2.3), (2.4), y (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_n} p_{n+1}(b) &\leq \frac{1}{C_n}[p_{n+1}(a) + p_{n+1}(b-a)] \\ &\leq \frac{1}{C_n} q_n(a) + C_n q_n(b-a) \\ &\leq \frac{1}{C_n} q_n(a) + \|b-a\|_{n+1} \\ &\leq |a|_{r_{n+1}} + \|b-a\|_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tomando ínfimo en la cadena de desigualdades (2.7) y de la desigualdad (2.6) se tiene que

$$\frac{1}{C_n} p_{n+1}(b) \leq \|b\|'_{n+1} \leq \|b\|_{n+1}$$

para todo $b \in B$.

Por tanto $\{\|\cdot\|'_n, n = 1, 2, \ldots\}$ genera la topología de B.

Además es inmediato comprobar que $\|a\|'_n = |a|_{r_n}$ para todo $a \in A$ y todo $n = 1, 2, \ldots$

Por otra parte, puesto que $r_n < r_{n+1}$ y $\|b\|_n \leq \|b\|_{n+1}$ para todo $b \in B$ y todo $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que

$$\|b\|'_n \leq \|b\|'_{n+1}$$

para todo $b \in B$, es decir, el sistema $\{\|\cdot\|'_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas verifica $B_0 2$.

Comprobemos ahora que este sistema de seminormas verifica $B_0 1$. Para ello, sean $b_1, b_2 \in B$ y $a_1, a_2 \in A$. De la igualdad

$$b_1 b_2 = a_1 a_2 + a_1(b_2 - a_2) + (a_1 - b_1) a_2 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

sigue que

$$\begin{aligned}
\|b_1 b_2\|'_n &\leq |a_1 a_2|_{r_n} + \|b_1 b_2 - a_1 a_2\|_n \\
&\leq |a_1|_{r_n+1} |a_2|_{r_n+1} + \|a_1(b_2 - a_2)\|_n + \|(b_1 - a_1) a_2\|_n \\
&\quad + \|(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\|_n \\
&\leq |a_1|_{r_{n+1}} |a_2|_{r_{n+1}} + q_n(a_1) q_n(b_2 - a_2) + q_n(a_2) q_n(b_1 - a_1) \\
&\quad + q_n(b_1 - a_1) q_n(b_2 - a_2) \\
&\leq |a_1|_{r_{n+1}} |a_2|_{r_{n+1}} + C_n |a_1|_{r_{n+1}} q_n(b_2 - a_2) + C_n |a_2|_{r_{n+1}} q_n(b_1 - a_1) \\
&\quad + C_n^2 q_n(b_1 - a_1) q_n(b_2 - a_2) \\
&\leq |a_1|_{r_{n+1}} |a_2|_{r_{n+1}} + |a_1|_{r_{n+1}} \|b_2 - a_2\|_{n+1} + |a_2|_{r_{n+1}} \|b_1 - a_1\|_{n+1} \\
&\quad + \|b_1 - a_1\|_{n+1} \|b_2 - a_2\|_{n+1} \\
&= \left[|a_1|_{r_{n+1}} + \|b_1 - a_1\|_{n+1}\right] \left[|a_2|_{r_{n+1}} + \|b_2 - a_2\|_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos en $a_1, a_2 \in A$ se tiene que

$$\|b_1 b_2\|'_n \leq \|b_1\|'_{n+1} \|b_2\|'_{n+1}$$

para todo $b_1, b_2 \in B$. ∎

2.6 Comentarios al capítulo

Los teoremas 2.3.1 y 2.4.1 han sido generalizados recientemente por W. Żelazko en [42], estableciendo un resultado similar a los de las secciones 2.3 y 2.4, que puede ser aplicado a la clase de las álgebras localmente pseudoconvexas. En este sentido, el resultado de W. Żelazko proporciona un marco común a nuestros resultados de las secciones 2.3 y 2.4

Como ocurre en el teorema 2.3.1 (ver observaciones finales de la sección 2.3) el resultado de W. Żelazko no podrá enunciarse, literalmente igual, al teorema 2.2.1. Sin embargo, con algunas variaciones, se pueden obtener fórmulas análogas a LC1 y LC2.

El resultado que aparece en [42] es el siguiente:

Sea B un álgebra localmente pseudoconvexa y sea A una subálgebra de B. Sea $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ un sistema de seminormas $p(\alpha)$-homogéneas que define la topología que A hereda de B y verifica LPC1 y LPC2. Entonces, la topología de B se puede determinar mediante un sistema $\{\|\cdot\|'_\gamma, \gamma \in \Phi\}$, de seminormas $q(\gamma)$-homogéneas, que verifica LPC1 y LPC2 tal que para todo $\gamma \in \Phi$ existe $\alpha \in \Delta$ tal que

$$\|a\|'_\gamma = |a|_\alpha^{r_\gamma}$$

para todo $a \in A$ y $0 < r_\gamma \leq 1$.

Para la prueba, la idea es considerar un sistema $\{\|\cdot\|_\beta, \beta \in \Gamma\}$, de seminormas $s(\beta)$–homogéneas, que generan la topología de B y que verifica LPC1 y LPC2.

Como el sistema formado por las restricciones de las seminormas del sistema Γ al álgebra A genera la topología que A hereda de B se tiene que:

> Para todo $\alpha \in \Delta$ existe $\beta \in \Gamma$ y existe una constante positiva C tal que
> $$|a|_\alpha^{s(\beta)} \leq C\,\|a\|_\beta^{p(\alpha)} \tag{2.8}$$
> para todo $a \in A$.

Se considera el conjunto

$$\Phi = \{\gamma = (\alpha, \beta, C, r),\ \ \alpha \in \Delta,\ \ \beta \in \Gamma,\ \ C > 0,\ \ 0 < r \leq 1\}$$

donde α, β y C verifican la condición (2.8).

Para cada $\gamma \in \Phi$ definimos en B la seminorma $\|\cdot\|'_\gamma$ de la siguiente forma. Si $b \in B$ se define

$$\|b\|'_\gamma = \inf\left\{|a|_\alpha^{rs(\beta)} + C^r\,\|b-a\|_\beta^{rp(\alpha)},\ \ a \in A\right\},$$

que es una seminorma $t(\gamma) = rp(\alpha)s(\beta)$–homogénea.

Ahora, siguiendo los pasos de los teoremas 2.3.1 y 2.4.1 se demuestra que

$$\{\|\cdot\|'_\gamma, \gamma \in \Phi\}$$

es el sistema de seminormas que anuncia el resultado.

De este teorema sigue que:

> *La topología de un álgebra localmente pseudoconvexa A con unidad e se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, de seminormas $p(\alpha)$–homogéneas, que verifica LPC1 y LPC2 tal que $|e|_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$.*

Capítulo III

Ideales no eliminables y elementos permenantemente singulares en álgebras topológicas.

Este capítulo está dedicado al estudio de eliminabilidad de ideales en álgebras topológicas.

En la primera sección formulamos una condición suficiente para que un ideal de un álgebra topológica sea eliminable. Esta condición, para el caso de ideales principales, da una condición suficiente para que un elemento de un álgebra topológica sea permanentemente singular.

En la segunda sección construimos un ejemplo, que pone de manifiesto que la condición anterior es más general que las existentes hasta ahora en la literatura. Ver el comentario posterior de [39, 2.18].

Por último, probamos que en la clase de las álgebras semitopológicas es posible establecer una condición equivalente, análoga a la formulada por R. Arens en [2] para álgebras de Banach, para que un elemento sea permanentemente singular.

3.1 Ideales no eliminables en álgebras topológicas

Consideremos un álgebra topológica A, y denotemos por $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen de A que verifica las propiedades T1, T2 y T3. En toda esta sección supondremos que el álgebra A es conmutativa y tiene unidad, que denotaremos por e. Asímismo todas las extensiones que consideraremos en este capítulo serán conmutativas y con elemento unidad.

Recordemos, que un ideal I de un álgebra topológica A es eliminable en una $\mathcal{T}$–extensión B de A si I no está contenido en ningún ideal própio de B. Por comodidad pondremos eliminable en lugar de $\mathcal{T}$–eliminable.

El siguiente lema ofrece una formulación, más cómoda de manejar, del concepto de ideal eliminable.

Lema 3.1.1 *Sea A un álgebra topológica y sea $I \subseteq A$ un ideal de A. Entoces I es eliminable en una extensión B de A si y sólo si existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ tales que*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = e. \tag{3.1}$$

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que I es eliminable en B y sea J el ideal generado por I en B, es decir,

$$J = \left\{\sum_{k=1}^{n} x_ky_k,\ x_k \in I,\ y_k \in B,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots\right\}$$

Como $I \subseteq J$ se tiene que $J = B$. Como B tiene unidad existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ tales que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = e.$$

Recíprocamente, supongamos que para unos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ se verifica (3.1).

En este caso, si J es un ideal de B que contiene a I se tiene que $e \in J$. Por tanto $J = B$ y el ideal I es eliminable en B. ■

La condición suficiente que mencionabamos en la introducción de este capítulo es la siguiente.

Teorema 3.1.1 *Sea A un álgebra topológica conmutativa con unidad e. Denotemos por $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen para la topología de A, que verifica T1, T2 y T3. Sea $I \subseteq A$ un ideal de A que verifica la condición:*

> *(CET) Para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que para todo $W \in \mathcal{U}(A)$ existe $n \geq 1$ tal que para todo $r > 0$ existe $u \in A \setminus V$ tal que $ux_i^n \in rW$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Entonces I es no eliminable.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una extensión B de A y existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in I$ y existen $y_1, y_2, \ldots, y_k \in B$ tales que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k = e.$$

Sea $\mathcal{U}(B)$ un sistema de entornos del origen para la topología del álgebra B que verifica las condiciones T1, T2 y T3.

Para $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$, sea $V \in \mathcal{U}(A)$ el entorno de la condición (CET). Tomemos V' y W' en $\mathcal{U}(B)$ tales que

$$V' \cap A \subseteq V \quad \text{y} \quad W'W' + \overset{k)}{\cdots} + W'W' \subseteq V'.$$

Sea $W \in \mathcal{U}(A)$ tal que $W \subseteq W' \cap A$, y sea n el natural de (CET) para los entornos V y W. Tomemos $m = nk$. Entonces

$$e = e^m = \left[\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right]^m = \sum_{i_1+\cdots+i_k=m} \frac{m!}{i_1! \cdots i_k!}(x_1y_1)^{i_1} \cdots (x_k y_k)^{i_k} \tag{3.2}$$

Observemos que cualquier término de la suma (3.2) contiene un exponente $i_p \geq n$. De esta forma, existen $v_1, v_2, \ldots, v_k \in B$ tales que

$$e = x_1^n v_1 + x_2^n v_2 + \cdots + x_k^n v_k.$$

Sea $s > 0$ tal que $v_i \in sW'$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ y sea $r = \frac{1}{s} > 0$. Tomemos $u \in A \setminus V$, dado por la condición (CET) para el r anterior. Es claro entonces que $u \in A \setminus V \subseteq B \setminus V'$.

Pero por otra parte, se tiene que

$$ux_i^n v_i = (ux_i^n)v_i \in rWsW' \subseteq W'W'$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

Así que

$$u = ue = ux_1^n v_1 + ux_2^n v_2 + \cdots + ux_k^n v_k \in W'W' + W'W' + \cdots + W'W' \subseteq V'.$$

Esta contradicción prueba el teorema. ∎

Observación

Para un álgebra localmente convexa A, cuya topología viene dada por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas, la condición (CET) se puede reformular de la forma siguiente:

(CELC) Para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$ existe $\alpha \in \Delta$ tal que para todo $\beta \in \Delta$ existe $n \geq 1$ tal que

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{k} |ux_i^n|_\beta,\ u \in A,\ |u|_\alpha = 1\right\} = 0.$$

Si se verifica (CET), para comprobar que (CELC) también es cierta basta tomar $|\cdot|_\alpha$ como el calibrador de Minkowsky del entorno V y para cada $\beta \in \Delta$ poner,

$$W = \{a \in A : |a|_\beta \leq 1\}.$$

Aplicando directamente la condición (CET) existe $n \geq 1$ tal que para todo $r > 0$ existe $u \in A$, con $|u|_\alpha > 1$, tal que

$$\sum_{i=1}^{k} |ux_i^n|_\beta < kr.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$ y consideremos $r = \frac{\epsilon}{k}$, entonces existe $v \in A$, con $|v|_\alpha > 1$, tal que

$$\sum_{i=1}^{k} |vx_i^n|_\beta < kr.$$

Sea $u = \frac{v}{|v|_\alpha} \in A$. Entonces $|u|_\alpha = 1$ y además se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} |ux_i^n|_\beta = \frac{1}{|v|_\alpha} \sum_{i=1}^{k} |vx_i^n|_\beta < \frac{kr}{|v|_\alpha} = \frac{\epsilon}{|v|_\alpha} < \epsilon.$$

Por tanto,

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} |ux_i^n|_\beta, \; u \in A, \; |u|_\alpha = 1 \right\} = 0.$$

El recíproco es análogo.

Esta observación nos permite formular el siguiente

Corolario 3.1.1 *Sea A un álgebra localmente convexa conmutativa con unidad e y sea $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ un sistema de seminormas que determina la topología de A. Si I es un ideal de A que verifica:*

(CELC) Para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$ existe $\alpha \in \Delta$ tal que para todo $\beta \in \Delta$ existe $n \geq 1$ tal que

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} |ux_i^n|_\beta, \; u \in A, \; |u|_\alpha = 1 \right\} = 0,$$

entonces I es no eliminable.

Observación

Para un álgebra de Banach conmutativa $[A, \|\cdot\|]$ la condición (CELC) se puede reformular como:

(CEB) Para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$ existe $n \geq 1$ tal que

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \|ux_i^n\|, \ u \in A, \ \|u\| = 1 \right\} = 0.$$

W. Żelazko, en [39], establece la siguiente condición suficiente (ver sección 1.4) para que un ideal I, de un álgebra topológica A, sea no eliminable:

(CETW) I está contenido en un ideal de la forma $J = I_1 + I_S(A)$, donde I_1 está formado localmente por divisores topológicos de cero, e $I_S(A)$ es el ideal de todos los elementos de A que tienen potencias pequeñas.

El siguiente teorema establece que la condición (CET) es más general que (CETW). De la no equivalencia de estas condiciones nos ocuparemos en la siguiente sección.

Teorema 3.1.2 *Sea A un álgebra topológica y sea $I \subseteq A$ un ideal que verifica la condición (CETW). Entonces I verifica la condición (CET).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen de A que verifica las condiciones T1, T2 y T3 y define la topología del álgebra A. Para comprobar que I verifica (CET) sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$.

Puesto que I verifica (CETW) podemos encontrar $y_1, y_2, \ldots, y_k \in I_1$ y $z_1, z_2, \ldots, z_k \in I_S(A)$ tales que $x_i = y_i + z_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

(a) Los elementos $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ verifican la siguiente condición:

> Existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que para todo $W \in \mathcal{U}(A)$ existe $u \in A \setminus V$ tal que $uy_i \in W$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

En efecto, al estar I_1 formado localmente por divisores topológicos de cero, existe una red, $(u_\gamma)_\gamma$, en A, tal que $u_\gamma \not\to 0$ y $u_\gamma y_i \to 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Tomando una subred de $(u_\gamma)_\gamma$, si fuese necesario, podemos suponer que $u_\gamma \notin V$ para todo γ. Ahora es claro que se verifica **(a)**.

(b) Los elementos $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ verifican la siguiente condición:

> Para todo $U \in \mathcal{U}(A)$ existe $n \geq 1$ tal que $z_i^n \in \bigcap_{r>0} rU$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

En efecto, dado $U \in \mathcal{U}(A)$, sea $V' \in \mathcal{U}(A)$ tal que $V'V' \subseteq U$. Puesto que z_i tiene potencias pequeñas, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ existe $n_i \geq 1$ tal que $\lambda z_i^{n_i} \in V'$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Sea $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ y sea $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, k$ tal que $\lambda_i z_i^{n-n_i} \in V'$. Entonces, para todo $r > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{r} z_i^n = \lambda_i z_i^{n-n_i} \frac{1}{r\lambda_i} z_i^{n_i} \in V'V' \subseteq U.$$

En consecuencia, $z_i^n \in rU$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, como queríamos ver.

Sea V el entorno de la condición **(a)**. Para cada $W \in \mathcal{U}(A)$ sea $U \in \mathcal{U}(A)$ tal que $UU + UU \subseteq W$. Sea $n \geq 1$ el natural de la condición **(b)** para el entorno U. Observemos que

$$x_i^n = (y_i + z_i)^n = z_i^n + y_i \left[\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} y_i^{p-1} z_i^{n-p} \right] = z_i^n + y_i v_i,$$

donde
$$v_i = \left[\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} y_i^{p-1} z_i^{n-p}\right]$$
para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

Sea $s > 0$ tal que $v_i \in sU$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Por la condición **(a)**, fijado $r > 0$, podemos encontrar $u \in A \setminus V$ tal que $uy_i \in \frac{r}{s}U$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Por tanto, podemos escribir

$$ux_i^n = uz_i^n + (uy_i)v_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

donde, para algún $t > 0$, se tiene que

$$uz_i^n \in (tU)\left(\bigcap_{r'>0} r'U\right) \subseteq \bigcap_{r'>0} r'UU \subseteq rUU,$$

y por otra parte

$$(uy_i)v_i \in \frac{r}{s}UsU \subseteq rUU.$$

Entonces

$$ux_i^n \in rUU + rUU \subseteq rW$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Esto demuestra que I verifica la condición (CET). ■

Abordamos ahora el caso particular de ideales principales, lo que da lugar al concepto de elemento permanentemente singular.

Observación

Es fácil comprobar que un elemento x en un álgebra topológica A es permanentemente singular si y sólo si el ideal principal $xA = \{xa, \ a \in A\}$, generado por x, es no eliminable. De esta forma, del teorema 3.1.1 obtenemos el siguiente

Corolario 3.1.2 *Sea A un álgebra topológica conmutativa con unidad e y sea $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen de A que verifica las condiciones T1, T2 y T3. Supongamos que x verifica la siguiente condición:*

> *(PST) Existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que para todo $W \in \mathcal{U}(A)$ existe $n \geq 1$ tal que $(A \setminus V)x^n \cap rW \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.*

Entonces x es permanentemente singular.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que x verifica la condición (PST). Comprobaremos que el ideal principal xA es no eliminable. Para ello, sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$. Dado $W \in \mathcal{U}(A)$, sea $W' \in \mathcal{U}(A)$ tal que $W'W' \subset W$. Sea $n \geq 1$ el natural de la condicón (PST) para V y W', y sea $\lambda > 0$ tal que $a_i^n \in \lambda W'$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Por la condición (PST), para $s = \frac{r}{\lambda}$, existe $u \in A \setminus V$ tal que $ux^n \in \frac{r}{\lambda}W'$. Entonces se tiene que

$$ux^n a_i^n \in \frac{r}{\lambda}W'\lambda W' = rW'W' \subseteq rW$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Por el teorema 3.1.1 el ideal generado por x es no eliminable y x es permanentemente singular. ∎

Observaciones

1. Si A es un álgebra localmente convexa y $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ es un sistema de seminormas que define la topología de A y verifica LC1 y LC2, la condición (PST) se puede reformular de la siguiente forma:

   (PSLC) Existe $\alpha \in \Delta$ tal que para todo $\beta \in \Delta$ existe $n \geq 1$ tal que $\inf\{|zx^n|_\beta,\ z \in A,\ |z|_\alpha = 1\} = 0$.

Por tanto, un elemento x de un álgebra localmente convexa A que verifique la condición (PSLC) es permanentemente singular.

2. Si A es un álgebra localmente convexa y x es un divisor topológico de cero, entonces x verifica la condición (PSLC), y por tanto es permanentemente singular. Análogamente, si y es un elemento de A con potencias pequeñas, entonces y verifica la condición (PSLC), así que y es permanentemente singular. Es más, la suma de un divisor topológico de cero con un elemento de potencias pequeñas verifica (PSLC) y en consecuencia es permanentemente singular. Sin embargo, el reciproco de esta última afirmación no es cierto, como veremos en la siguiente sección. Por otra parte, no conocemos si la condición (PSLC) es necesaría para que un elemento sea permanentemente singular.

3.2 Construcción de un ejemplo

Pasamos ahora a construir un ejemplo que pone de manifiesto que, en el caso de álgebras localmente convexas, la condición (CET) es más general que la condición (CETW), aún en el caso de ideales principales, es decir, ideales generados sólo por un elemento.

Lema 3.2.1 *Existe una sucesión de conjuntos*

$$M_k \subseteq \{0,1,2,\ldots\},\ k=1,2,\ldots$$

tales que $0 \in M_k$ *y verifican, para* $k=1,2,\ldots$, *las siguientes propiedades:*

a) $M_{k+1} \subseteq M_k$,

b) $(M_{k+1} \setminus \{0\}) - 1 \subseteq M_k$, *c)* $M_{k+1} + M_{k+1} \subseteq M_k$, *y*

d) *Para todos* $k \geq 1$ *y* $n \geq k$ *existe* m *tal que*

$$m, m+1, \ldots, m+n \notin M_1 \text{ y } m+n+k \in M_k.$$

DEMOSTRACIÓN:

Los conjuntos M_k se construyen de la siguiente forma. Pongamos

$$N_k^{(0)} = \left\{2^{2^i},\ i = k, k+1, \ldots\right\} \text{ para } k = 1, 2, \ldots$$

y construimos por inducción

$$N_k^{(r)} = N_{k+1}^{(r-1)} \cup \left(N_{k+1}^{(r-1)} - 1\right) \cup \bigcup_{p=0}^{r-1} \left(N_{k+1}^{(r-1)} + N_{k+1}^{(p)}\right) \text{ para } k, r = 1, 2, \ldots$$

Ahora definimos

$$M_k = \bigcup_{r=0}^{\infty} N_k^{(r)} \cup \{0\}.$$

Comprobemos que los conjuntos M_k, definidos de esta forma, verifican las propiedades que afirma el lema.

a) Puesto que $N_{k+1}^{(r-1)} \subseteq N_k^{(r)}$ para $r = 1, 2, \ldots$ se tiene que

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} N_{k+1}^{(r-1)} \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} N_k^{(r)} \subseteq \bigcup_{r=0}^{\infty} N_k^{(r)},$$

y por tanto, que $M_{k+1} \subseteq M_k$.

b) Dado $n \in (M_{k+1} \setminus \{0\})$ existe $r_n \geq 0$ tal que $n \in N_{k+1}^{(r_n)}$. De esta forma

$$n - 1 \in N_{k+1}^{(r_n)} - 1 \subseteq N_k^{(r_n+1)} \subseteq M_k,$$

y por tanto, $(M_{k+1} \setminus \{0\}) - 1 \subseteq M_k$.

c) Sean $m, n \in M_{k+1}$. Si alguno de los números m ó n es cero es claro que $m + n \in M_k$, puesto que $M_{k+1} \subseteq M_k$. Si m y n son distintos de cero existen $r_m \geq 0$ y $r_n \geq 0$ tales que $m \in N_{k+1}^{(r_m)}$ y $n \in N_{k+1}^{(r_n)}$. De aqui se tiene que

$$m + n \in N_{k+1}^{(r_m)} + N_{k+1}^{(r_n)} \subseteq N_k^{(\max\{r_m, r_n\}+1)} \subseteq M_k,$$

y por tanto, $M_{k+1} + M_{k+1} \subseteq M_k$.

d) Sean $k \geq 1$ y $n \geq k$. Pongamos $m = 2^{2^n} - 2n$. Comprobemos que

$$m + n + k = 2^{2^n} - n + k \in M_k.$$

Es claro que si $n = k$, entonces

$$m + n + k = 2^{2^n} \in N_n^{(0)} \subseteq M_n = M_k.$$

Basta comprobar entonces que $m + n + k \in M_k$ para $n > k$.

Como la sucesión $\left(2^{2^n} - n\right)_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente se verifica que $2^{2^n} - n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Por tanto $2^{2^n} - r > 0$ para $r = 0, 1, \ldots, n-k-1$. Ahora, del hecho de que $2^{2^n} \in N_n^{(0)} \subseteq M_n$, aplicando $n - k$ veces la propiedad **b)** que acabamos de probar, obtenemos que

$$m + n + k = 2^{2^n} - (n - k) \in M_k.$$

Para terminar, es necesario comprobar que $m, m+1, \ldots, m+n \notin M_1$.

Primero observemos que, para $j = 1, 2, \ldots$ y $r = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que

$$\min N_j^{(r)} = \min N_{j+1}^{(r-1)} - 1 = \cdots = \min N_{j+r}^{(0)} - r = 2^{2^{j+r}} - r$$

Por otra parte es claro que

$$N_j^{(0)} \cap \left(2^{2^{n-1}}, 2^{2^n}\right) = \emptyset \tag{3.3}$$

para $j = 1, 2, \ldots$

Ahora probaremos, por inducción en r, que

$$N_j^{(r)} \cap \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right) = \emptyset \tag{3.4}$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots$, y $j = 1, 2, \ldots$

Observemos que (3.4) es cierto, para $r = 0$, por (3.3). Supongamoslo cierto para $s = 0, 1, \ldots, r-1$ y probémoslo para r. Basta demostrar que si $m \in N_j^{(r)}$, entonces $m \notin \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right)$.

Si llamamos $I_r = \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right)$ y $r < r'$ entonces $I_{r'} \subseteq I_r$.

Como

$$N_j^{(r)} = N_{j+1}^{(r-1)} \cup \left(N_{j+1}^{(r-1)} - 1\right) \cup \bigcup_{p=0}^{r-1} \left(N_{j+1}^{(r-1)} + N_{j+1}^{(p)}\right),$$

tenemos tres casos:

1) si $m \in N_{j+1}^{(r-1)}$ por hipótesis de inducción

$$m \notin \left(2^{r-1} 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - (r-1)\right) = I_{r-1}.$$

Como $I_r \subseteq I_{r-1}$ se tiene que

$$m \notin I_r = \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right).$$

2) si $m \in N_{j+1}^{(r-1)} - 1$ entonces $m + 1 \in N_{j+1}^{(r-1)}$, por tanto

$$m + 1 \notin \left(2^{r-1} 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - (r-1)\right) = I_{r-1},$$

así que

$$m \notin \left(2^{r-1} 2^{2^{n-1}} - 1, 2^{2^n} - r\right),$$

y por tanto,

$$m \notin \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right),$$

puesto que $2^r 2^{2^{n-1}} > 2^{r-1} 2^{2^{n-1}} - 1$.

3) si $m \in \bigcup_{p=0}^{r-1} \left(N_{j+1}^{(r-1)} + N_{j+1}^{(p)}\right)$ existe $p \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ tal que

$$m \in N_{j+1}^{(r-1)} + N_{j+1}^{(p)}.$$

De esta forma se tiene que $m = m_1 + m_2$, donde

$$m_1 \in N_{j+1}^{(r-1)} \quad \text{y} \quad m_2 \in N_{j+1}^{(p)},$$

con lo que

$$m_1 \notin \left(2^{r-1}2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - (r-1)\right) \text{ y } m_2 \notin \left(2^p 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - p\right).$$

Ahora tenemos que $I_{r-1} \subseteq I_p$, y de nuevo tenemos dos posibilidades:

3.1) si $m_1 > 2^{2^n} - (r-1)$ ó $m_2 > 2^{2^n} - p$ es evidente que $m > 2^{2^n} - r$.

3.2) si $m_1 < 2^{r-1}2^{2^{n-1}}$ y $m_2 < 2^p 2^{2^{n-1}}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} m &< 2^{r-1}2^{2^{n-1}} + 2^p 2^{2^{n-1}} \\ &\leq 2^{r-1}2^{2^{n-1}} + 2^{r-1}2^{2^{n-1}} \\ &= 2^r 2^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

En cualquier caso, se tiene que $m \notin \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right)$.

Por último observemos que, puesto que $\min N_1^{(r)} = 2^{2^{r+1}} - r$ se tiene que

$$\begin{aligned} M_1 \cap [m, m+n] &= M_1 \cap \left[2^{2^n} - 2n, 2^{2^n} - n\right] \\ &= \left[\bigcup_{r=0}^{\infty} N_1^{(r)}\right] \cap \left[2^{2^n} - 2n, 2^{2^n} - n\right] \\ &= \bigcup_{r=0}^{n-1} \left(N_1^{(r)} \cap \left[2^{2^n} - 2n, 2^{2^n} - n\right]\right) \end{aligned}$$

Ahora, para $r = 0, 1, \ldots, n-1$ se verifica que

$$\left[2^{2^n} - 2n, 2^{2^n} - n\right] \subseteq \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right),$$

puesto que

$$2^{n-1}2^{2^{n-1}} \leq 2^{2^n} - 2n \quad \text{y} \quad 2^{2^n} - n < 2^{2^n} - (n-1)$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Así pues

$$M_1 \cap \left[2^{2^n} - 2n, 2^{2^n} - n\right] \subseteq \bigcup_{r=0}^{n-1} \left[N_1^{(r)} \cap \left(2^r 2^{2^{n-1}}, 2^{2^n} - r\right)\right] = \emptyset$$

Por tanto tenemos que $m = 2^{2^n} - 2n, m+1, \ldots, m+n = 2^{2^n} - n \notin M_1$, como queríamos ver.

■

Lema 3.2.2 *Existe una matriz de números reales positivos* $(c_{k,i}), k = 1, 2, \ldots,$ $i = 0, 1, 2, \ldots,$ *que verifica las siguientes propiedades:*

1) $c_{k,0} = 1$

2) $c_{k,i+j} \leq c_{k+1,i} c_{k+1,j}$

3) $c_{k,i} \leq c_{k+1,i}$

4) $c_{k,i} \leq c_{k+1,i+1}$

5) $\inf \left\{ \frac{c_{k,k+j}}{c_{1,j}} : j = 0, 1, 2, \ldots \right\} = 0$

para todos $k = 1, 2, \ldots,$ $i = 0, 1, 2, \ldots$

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la sucesión de conjuntos $(M_k)_k, k = 1, 2, \ldots$ del lema anterior, y definimos

$$c_{k,i} = 2^{i - \max\{j \leq i,\ j \in M_k\}}$$

para $k = 1, 2, \ldots,$ $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Los números $c_{k,i}$ así definidos verifican las condiciones del lema.

1. $c_{k,0} = 2^{0 - \max\{p \leq 0,\ p \in M_k\}} = 2^0 = 1$, puesto que $0 \in M_k$.

2. Como $M_{k+1} + M_{k+1} \subseteq M_k$ se tiene que

$$\max\{p \leq i, p \in M_{k+1}\} + \max\{p \leq j, p \in M_{k+1}\} \leq \max\{p \leq i+j, p \in M_k\},$$

así tenemos que

$$2^{i+j-\max\{p\leq i+j,\ p\in M_k\}} \leq 2^{i-\max\{p\leq i,\ p\in M_{k+1}\}}2^{j-\max\{p\leq j,\ p\in M_{k+1}\}}$$

y por tanto, tenemos que $c_{k,i+j} \leq c_{k+1,i}c_{k+1,j}$.

3. Como $M_{k+1} \subseteq M_k$ se tiene que

$$\max\{p \leq i,\ p \in M_{k+1}\} \leq \max\{p \leq i,\ p \in M_k\},$$

así tenemos que

$$2^{i-\max\{p\leq i,\ p\in M_k\}} \leq 2^{i-\max\{p\leq i,\ p\in M_{k+1}\}}$$

y por tanto, que $c_{k,i} \leq c_{k+1,i}$.

4. La desigualdad $c_{k,i} \leq c_{k+1,i+1}$ es equivalente a

$$\max\{p \leq i+1,\ p \in M_{k+1}\} \leq 1 + \max\{p \leq i,\ p \in M_k\} \tag{3.5}$$

Llamemos $p_0 = \max\{p \leq i+1,\ p \in M_{k+1}\}$.

Si $p_0 = 0$ es claro que se verifica la desigualdad (3.5).

Si $p_0 \neq 0$ se tiene que $p_0 \in M_{k+1} \setminus \{0\}$, así que $p_0 - 1 \leq i$ y

$$p_0 - 1 \in (M_{k+1} \setminus \{0\}) - 1 \subseteq M_k,$$

de esta forma

$$p_0 \leq 1 + \max\{p \leq i,\ p \in M_k\},$$

como queríamos comprobar.

5. Sabemos, por el apartado d) del lema anterior, que para todos $k \geq 1, n \geq k$ existe m tal que $m, m+1, \ldots, m+n \notin M_1$ y $m+n+k \in M_k$. Para estos valores de k, n y m se verifica que:

$$\begin{aligned} c_{k,n+m+k} &= 2^{n+m+k-\max\{p \leq n+m+k,\ p \in M_k\}} = 2^0 = 1 \\ c_{1,m+n} &= 2^{n+m-\max\{p \leq m+n,\ p \in M_1\}} > 2^n, \end{aligned}$$

puesto que $\max\{p \leq m+n,\ p \in M_1\} < m$.

Tomando infimo sólo en los elementos de la forma $j = m+n$, donde m y n son los anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \inf\left\{\frac{c_{k,k+j}}{c_{1,j}} : j = 0, 1, \ldots\right\} &\leq \inf\left\{\frac{c_{k,n+m+k}}{c_{1,m+n}} : n \geq k\right\} \\ &\leq \inf\left\{\frac{1}{2^n} : n \geq k\right\} = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.1 *Existe un álgebra localmente convexa conmutativa A con unidad y existe un ideal $I \subseteq A$ que verifica (CET) y no verifica (CETW).*

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos por A el álgebra de los polinomios en la variable x con coeficientes complejos. Consideremos en A la topología vectorial definida por el sistema $\{|\cdot|_k, k = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas, definidas en A por

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i\right|_k = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}|\alpha_i|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Observemos que todas las sumas son finitas.

Los números $c_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ son los del lema anterior.

Considerando como producto en A el producto habitual de polinomios, las condiciones **2** y **3** del lema anterior establecen, respectivamente, que

$$\begin{aligned} |p(x)q(x)|_k &\leq |p(x)|_{k+1}\,|q(x)|_{k+1}, \; k=1,2,\ldots, \; p,q\in A, \text{ y} \\ |p(x)|_k &\leq |p(x)|_{k+1}, \; k=1,2,\ldots, \; p\in A. \end{aligned}$$

Para la primera desigualdad, si $p,q\in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} |p(x)q(x)|_k &= \left|\left[\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j x^j\right]\right|_k = \left|\sum_{p=0}^{\infty}\left[\sum_{i+j=p}\alpha_i\beta_j\right]x^p\right|_k \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}c_{k,p}\left|\sum_{i+j=p}\alpha_i\beta_j\right| \leq \sum_{p=0}^{\infty}c_{k,p}\sum_{i+j=p}|\alpha_i|\,|\beta_j| \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty}c_{k+1,i}c_{k+1,j}\sum_{i+j=p}|\alpha_i|\,|\beta_j| = \sum_{p=0}^{\infty}\left[\sum_{i+j=p}c_{k+1,i}\,|\alpha_i|\,c_{k+1,j}\,|\beta_j|\right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{\infty}c_{k+1,i}\,|\alpha_i|\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}c_{k+1,j}\,|\beta_j|\right] = |p(x)|_{k+1}\,|q(x)|_{k+1}. \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se obtiene de **3** de forma análoga.

Consideremos ahora el ideal principal I de A generado por x, es decir

$$I=\{p(x)\in A, \text{ tal que } p(0)=0\}.$$

Es claro, de ser $c_{k,i}>0$ para todo $i=0,1,2,\ldots,k=1,2,\ldots$, que para todo polinomio no nulo $p(x)\in A$ y para todo $k=1,2,\ldots$ se verifica que

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i\right|_k > 0.$$

Esto significa que en A no hay elementos no nulos con potencias pequeñas.

De la condición **4** del lema anterior sigue sin dificultad que

$$|p(x)|_k \leq |xp(x)|_{k+1} \tag{3.6}$$

para todo $p(x)\in A$ y $k=1,2,\ldots$ De (3.6) se tiene que

$$\inf\left\{|xp(x)|_{k+1}, \; p(x)\in A, \; |p(x)|_k=1\right\}>0$$

para todo $k = 1, 2, \ldots$

Es decir, $x \in A$ no es un divisor topológico de cero en A. Por tanto, el ideal I no verifica la condición (CETW).

Por otra parte, x verifica la condición (PSLC). Basta tomar $\alpha = 1$, y para cada seminorma $|\cdot|_k$ tomar $n = k$. Por la condición **5** del lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\inf\left\{\left|ux^k\right|_k, u \in A, |u|_1 = 1\right\} &\leq \inf\left\{\left|ux^k\right|_k, u \in A, u = \frac{x^j}{|x^j|_1}, j = 0, 1, 2\ldots\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{\left|x^{k+j}\right|_k}{|x^j|_1}, j = 0, 1, 2\ldots\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{c_{k,k+j}}{c_{1,j}}, j = 0, 1, 2\ldots\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Puesto que x verifica la condición (PSLC) se tiene que I verifica la condición (CET). En efecto, sean $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$. Para $\alpha = 1$ y $k = 1, 2, \ldots$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|ux^{k+1}a_i^{k+1}\right|_k, u \in A, |u|_1 = 1\right\} \\
\leq\ &\inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|ux^{k+1}\right|_{k+1}\left|a_i^{k+1}\right|_{k+1}, u \in A, |u|_1 = 1\right\} \\
=\ &\left[\sum_{i=1}^{m}\left|a_i^{k+1}\right|_{k+1}\right]\inf\left\{\left|ux^{k+1}\right|_{k+1}, u \in A, |u|_1 = 1\right\} = 0.
\end{aligned}$$

■

3.3 Elementos permanentemente singulares

En esta sección trabajaremos con álgebras topológicas que tienen producto separadamente continuo. Sabemos que la topología de una s–álgebra topológica A se puede describir por un sistema de entornos del origen $\mathcal{U}(A)$ que verifica las condiciones TS1, TS2 y TS3. Comenzaremos con algunas definiciones y observaciones.

Definición 3.3.1 *Sea A una s–álgebra topológica conmutativa. Un elemento $x \in A$ se dice que es un divisor topológico de cero en A si existe una red $(u_\gamma)_\gamma$ en A tal que $u_\gamma \not\to 0$ pero $u_\gamma x \to 0$.*

Observación

Si A es una s–álgebra topológica es claro que $x \in A$ no es un divisor topológico de cero si y soló si la aplicación

$$L_x : a \in A \to L_x(a) = xa \in xA \subseteq A$$

es un isomorfismo sobreyectivo de A en xA.

La noción de s–extensión se define análogamente al concepto de extensión de álgebras topológicas. Concretamente

Definición 3.3.2 *Sea A una s–álgebra topológica. Se dice que una s–álgebra topológica B es una s–extensión de A si existe un isomorfismo de álgebras inyectivo $f : A \to B$. En caso de que A y B tengan unidades e_A y e_B respectivamente, se exigirá además que $f(e_A) = e_B$.*

De esta forma, si B es una s–extensión de A podemos identificar A con $f(A) \subseteq B$ y considerar A como una subálgebra de B. Así lo haremos en lo que sigue.

Observación

Sea A una s–álgebra topológica con unidad y sea $x \in A$ un divisor topológico de cero. Entonces x es singular en cualquier s–extensión B de A.

Si no fuese así, podriamos encontrar una s–extenxión B de A y un elemento $y \in B$ tal que $xy = e$, e denota la unidad de B. Pero para $(u_\gamma)_\gamma$, la red que existe en A tal que $u_\gamma \not\to 0$ y $u_\gamma x \to 0$, tendriamos, por la continuidad separada del producto en B, que

$$u_\gamma = u_\gamma e = u_\gamma(xy) = (u_\gamma x)y \to 0,$$

que es una contradición.

El propósito de esta sección es probar el recíproco de la observación anterior. Esto significará que, en la clase de las s–álgebras topológicas conmutativas con unidad, hay una caracterización simple para los elementos permanentemente singulares, similar a la dada por R. Arens en el contexto de las álgebras de Banach en [2]. Para establecer esta caracterización necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 3.3.1 *Sea A una s–álgebra topológica conmutativa con unidad e. Sea $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen para la topología de A que verifica TS1, TS2 y TS3. Sea $A[x]$ el álgebra de los polinomios en la variable x con coeficientes en el álgebra A. Sea $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ el conjunto de las sucesiones de elementos de $\mathcal{U}(A)$, es decir*

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}) = \{V = (V_i)_{i\geq 0} \text{ tal que } V_i \in \mathcal{U}(A), i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Para cada $V \in S(U)$ sea

$$N_V = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x] \text{ tal que } a_i \in V_i, i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

El conjunto $\mathcal{V} = \{N_V, V \in \mathcal{S}(\mathcal{U})\}$ es un sistema de entornos del origen que verifica TS1, TS2 y TS3 para una topología vectorial que hace de $A[x]$ una s-álgebra topológica. Además, si A es localmente convexa, entonces $A[x]$, con esta topología, también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

Es fácil comprobar que $\mathcal{V}$ es una base de filtro que verifica TS1 y TS2. Vamos a comprobar que $\mathcal{V}$ verifica la condición TS3. Para ello, sea

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in A[x] \quad \text{y} \quad V = (V_0, V_1, \ldots, V_k, \ldots) \in \mathcal{S}(\mathcal{U}).$$

Debemos encontrar $W = (W_0, W_1, \ldots, W_k \ldots) \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ tal que $p(x)N_W \subseteq N_V$.

Puesto que $\mathcal{U}(A)$ verifica TS1 podemos encontrar $(V'_m)_{m \geq 0} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ tal que

a) $V'_m + V'_m + \overset{m+1)}{\cdots} + V'_m \subseteq V_m$, para $m = 0, 1, \ldots, k$.

b) $V'_m + V'_m + \overset{k+1)}{\cdots} + V'_m \subseteq V_m$, para $m = k+1, k+2, \ldots$

Observemos que k es el grado del polinomio $p(x)$ y $V'_0 = V_0$.

Como la aplicación

$$z \in A \to a_0 z + a_1 z + \cdots + a_k z \in A$$

es continua, para cada $m = 0, 1, \ldots$ existe $W_m \in \mathcal{U}(A)$ tal que

$$a_0 W_m + a_1 W_m + \cdots + a_k W_m \subseteq \bigcap_{i=m}^{m+k} V'_i$$

Comprobemos ahora que, si $W = (W_m)_{m \geq 0} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$, entonces $p(x)N_W \subseteq N_V$.

Para ello, sea

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in N_W.$$

De esta forma se tiene que $b_j \in W_j, j = 0, 1, \ldots, n$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= \sum_{m=0}^{k+n}\left[\sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}\right] x^m \\
&= \sum_{m=0}^{k}\left[\sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}\right] x^m + \sum_{m=k+1}^{k+n}\left[\sum_{i=0}^{k} a_i b_{m-i}\right] x^m \\
&= \sum_{m=0}^{k} \left[a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0\right] x^m \\
&\quad + \sum_{m=k+1}^{k+n} \left[a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_k b_{m-k}\right] x^m .
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a_{m-r} W_r \subseteq a_0 W_r + a_1 W_r + \cdots + a_k W_r \subseteq \bigcap_{i=r}^{r+k} V_i'$$

para $r = 0, 1, \ldots, m$ se verifica, por una parte, que

$$\begin{aligned}
a_m b_0 + a_{m-1} b_1 + \cdots + a_0 b_m &\in a_m W_0 + a_{m-1} W_1 + \cdots + a_0 W_m \\
&\subseteq \bigcap_{i=0}^{k} V_i' + \bigcap_{i=1}^{k+1} V_i' + \overset{m+1)}{\cdots} + \bigcap_{i=m}^{k+m} V_i' \\
&\subseteq V_i' + V_i' + \overset{m+1)}{\cdots} + V_i' \subseteq V_m
\end{aligned}$$

para $m = 0, 1, \ldots, k$,

y por otra parte que

$$\begin{aligned}
a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_k b_{m-k} &\in a_0 W_m + a_1 W_{m-1} + \cdots + a_k W_{m-k} \\
&\subseteq \bigcap_{i=m}^{k+m} V_i' + \bigcap_{i=m-1}^{k+m-1} V_i' + \overset{k+1)}{\cdots} + \bigcap_{i=m-k}^{m} V_i' \\
&\subseteq V_i' + V_i' + \overset{k+1)}{\cdots} + V_i' \subseteq V_m
\end{aligned}$$

para $m = k+1, k+2, \ldots$, con lo que $p(x)q(x) \in N_V$ y por tanto $p(x)N_W \subseteq N_V$, como queríamos ver. ∎

Observaciones

1. Si identificamos $A[x]$ con la suma directa de una cantidad numerable de copias de A, por medio de
$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in A[x] \to (a_0, a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots) \in \bigoplus_{m=0}^{\infty} A$$
la topología definida anteriormente es precisamente la topología de la suma directa.

2. Si identificamos los elementos de A con los polinomios constantes de $A[x]$ observamos que $A[x]$ es una s–extensión de A.

Lema 3.3.1 *Sea A una s–álgebra topológica y sea $I \subseteq A$ un ideal cerrado de A. Entoces A/I es una s–álgebra topológica con la topología del cociente.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen para la topología de A que verifica TS1, TS2 y TS3. Entoces
$$\mathcal{U}(A/I) = \{U + I,\ U \in \mathcal{U}(A)\}$$
es un sistema de entornos para la topología del cociente en A/I que verifica las condiciones TS1, TS2 y TS3. Para comprobar TS3, sean $a + I \in A/I$ y $V + I \in \mathcal{U}(A/I)$. Tomemos $W \in \mathcal{U}(A)$ tal que $aW \subseteq V$. Entonces se tiene que
$$(a + I)(W + I) \subseteq aW + aI + WI + I^2 \subseteq V + I.$$
Por último, puesto que I es cerrado, la topología que genera $\mathcal{U}(A/I)$ es una topología Hausdorff. ∎

Teorema 3.3.2 *Sea A una s–álgebra topológica conmutativa con unidad e y sea $u \in A$. Entonces u es invertible en alguna s–extensión B de A si y sólo si u no es un divisor topológico de cero.*

DEMOSTRACIÓN:

Una implicación está probada con la observación anterior al teorema 3.3.1. Recíprocamente, supongamos que $u \in A$ no es divisor topológico de cero. Sabemos que esto equivale a que la aplicación

$$a \in A \to ua \in uA$$

es un isomorfismo de álgebras. Por tanto, para cada $W \in \mathcal{U}(A)$ existe $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que

$$V \cap uA = uW. \tag{3.7}$$

Consideremos la s–álgebra del teorema 3.3.1 $A[x]$ y el ideal I generado por $e - ux$, es decir,

$$I = (e - ux)A[x].$$

Probaremos primero que I es un ideal cerrado de $A[x]$. Para ello sea $(p_\alpha)_\alpha$ una red de elementos de I, donde

$$p_\alpha(x) = (e - ux)\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(\alpha)} x^i = b_0^{(\alpha)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i^{(\alpha)} - ub_{i-1}^{(\alpha)}\right) x^i.$$

Observemos que, para cada α, sólo un número finito de coeficientes $b_i^{(\alpha)}$ son distintos de cero.

Supongamos que la red $(p_\alpha)_\alpha$ converge a un polinomio p:

$$p_\alpha \to p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

en la topología de $A[x]$. Entonces tenemos, coordenada a coordenada, que

$$\begin{aligned} &b_0^{(\alpha)} \to a_0 \\ &b_i^{(\alpha)} - ub_{i-1}^{(\alpha)} \to a_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \\ &b_i^{(\alpha)} - ub_{i-1}^{(\alpha)} \to 0, \text{ para } i = n+1, n+2, \ldots \end{aligned}$$

Puesto que $b_0^{(\alpha)}u \to a_0u$, tenemos que $b_1^{(\alpha)} \to a_1 + a_0u$, y fácilmente se tiene, por inducción, que

$$\begin{aligned} b_i^{(\alpha)} &\to c_i = a_i + a_{i-1}u + \cdots + a_0u^i, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n. \\ b_i^{(\alpha)} &\to a_nu^{i-n} + a_{n-1}u^{i-n+1} + \cdots + a_0u^i = c_nu^{i-n}, \text{ para } i = n+1, n+2, \ldots \end{aligned}$$

donde $c_n = a_n + a_{n-1}u + \cdots + a_0u^n$.

Observemos que si $c_n = 0$, de la igualdad

$$c_i = a_i + a_{i-1}u + \cdots + a_0u^i, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_i &= c_i - uc_{i-1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ y} \\ a_n &= uc_{n-1}. \end{aligned}$$

Por tanto se verifica que

$$\begin{aligned} p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i &= c_0 + \sum_{i=1}^{n-1} c_ix^i - \sum_{i=1}^{n-1} uc_{i-1}x^i - uc_{n-1}x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_ix^i - \sum_{i=0}^{n-1} uc_ix^{i+1} \\ &= (e - ux)\sum_{i=0}^{n-1} c_ix^i \in I, \end{aligned}$$

con lo que estaría probado que I es cerrado.

Basta probar entonces que $c_n = 0$. Por reducción al absurdo supongamos que $c_n \neq 0$. Sea $V_0 \in \mathcal{U}(A)$ tal que $c_n \notin V_0$ y sea $W_0 \in \mathcal{U}(A)$ tal que $W_0 + W_0 \subseteq V_0$.

Construimos ahora $V_i, W_i \in \mathcal{U}(A), i = 0, 1, 2, \ldots$ tales que

$$V_{i+1} \cap uA = uW_i \ \text{ y } \ W_{i+1} + W_{i+1} \subseteq V_{i+1}. \tag{3.8}$$

Esto es posible, utilizando reiteradamente (3.7), puesto que u no es divisor topológico de cero en A y puesto que $\mathcal{U}(A)$ verifica TS2.

Consideremos el entorno N_W en $A[x]$ dado por la sucesión

$$(W_0, \overset{n)}{\ldots}, W_0, W_1, W_2, \ldots)$$

Puesto que $p_\alpha \to p$ y $b_n^{(\alpha)} \to c_n$ existe un índice α tal que

$$\begin{aligned} & b_{n+i}^{(\alpha)} - u b_{n+i-1}^{(\alpha)} \in W_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, \text{ y} \\ & b_n^{(\alpha)} - c_n \in W_0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ahora se tiene que $b_n^{(\alpha)} \notin W_0$, de lo contrario, por construcción de W_0 y (3.9) se tendría que $c_n \in V_0$, lo cual es imposible.

Probaremos ahora, por inducción, que $b_{n+i}^{(\alpha)} \notin W_i$ para $i = 0, 1, 2 \ldots$.

Supongamos que $b_{n+i}^{(\alpha)} \notin W_i$, entonces $u b_{n+i}^{(\alpha)} \notin u W_i$, y por (3.8) se tiene que

$$u b_{n+i}^{(\alpha)} \notin V_{i+1}.$$

Observemos que

$$u b_{n+i}^{(\alpha)} = \left(-b_{n+i+1}^{(\alpha)} + u b_{n+i}^{(\alpha)}\right) + b_{n+i+1}^{(\alpha)}.$$

Como

$$(-b_{n+i+1}^{(\alpha)} + u b_{n+i}^{(\alpha)}) \in W_{i+1}$$

se tiene que

$$b_{n+i+1}^{(\alpha)} \notin W_{i+1},$$

puesto que si $b_{n+i+1}^{(\alpha)} \in W_{i+1}$ se tendría por (3.8) que $u b_{n+i}^{(\alpha)} \in V_{i+1}$, que como hemos visto, no puede ser.

Hemos probado que $b_{n+i}^{(\alpha)} \notin W_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$, lo cual implica que $b_{n+i}^{(\alpha)} \neq 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$ Esto contradice el hecho de que

$$p_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(\alpha)} x^i$$

es un polinomio, y por tanto tiene sólo un número finito de coeficientes no nulos.

Ahora sea, $\pi : A[x] \to A[x]/I$ el homomorfismo canónico y sea $g : A \to A[x]$ la inyección natural. Denotemos por $f = \pi \circ g$. Puesto que $e - ux \in I$ tenemos que

$$(u + I)(x + I) = (e + I)$$

por tanto $f(u) = u + I$ es invertible en $A[x]/I$.

Finalmente, debemos probar que $A[x]/I$ es una s–extensión de A. Obviamente f es un homomorfismo de álgebras continuo. Queda probar que f es inyectivo y que $f(A)$ es topológicamente isomorfo con A. Para ello, es suficiente demostrar que:

> Para todo $V \in \mathcal{U}(A)$ existe $N_W \in V$ tal que si $f(a) \in N_W + I$, entonces $a \in V$.

Para $V \in \mathcal{U}(A)$ sea $W_0 \in \mathcal{U}(A)$ tal que $W_0 + W_0 \subseteq V$. Escojamos $V_1 \in \mathcal{U}(A)$ tal que si $ua \in V_1$, entonces $a \in W_0$. Esto es posible puesto que u no es divisor topológico de cero. Sea $W_1 \in \mathcal{U}(A)$ tal que $W_1 + W_1 \subseteq V_1$.

Definimos ahora, de forma inductiva, entornos $V_i, W_i \in \mathcal{U}(A)$ tales que

$$\begin{aligned} &\text{Si } ua \in V_{i+1}, \text{ entonces } a \in W_i, \text{ y} \\ &W_{i+1} + W_{i+1} \subseteq V_{i+1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sea $N_W \in V$ el entorno correspondiente a la sucesión $(W_i)_{i \geq 0}$.

Probaremos que si $f(a) \in N_W + I$, entonces $a \in V$.

Observemos que si $f(a) \in N_W + I$ existe un polinomio

$$p(x) = (e - ux) \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in I$$

tal que $a + p(x) \in N_W$. De esta forma se tiene que

$$a + p(x) = (a + b_0) + (b_1 - ub_0)x + (b_2 - ub_1)x^2 + \cdots + (b_n - ub_{n-1})x^n - ub_n x^{n+1}.$$

Por otra parte, como $a + p(x) \in N_W$ tenemos que:

$$\begin{aligned} a + b_0 &\in W_0, \\ b_i - ub_{i-1} &\in W_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n, \text{ y} \\ -ub_n &\in W_{n+1}. \end{aligned}$$

Puesto que $ub_n \in W_{n+1} \subseteq V_{n+1}$ se tiene por (3.10) que $b_n \in W_n$. Además, de

$$ub_{n-1} = (ub_{n-1} - b_n) + b_n \in W_n + W_n \subseteq V_n$$

sigue que $b_{n-1} \in W_{n-1}$. Continuando de esta forma obtenemos que $b_i \in W_i$ para $i = n-1, \ldots, 1, 0$. Finalmente, puesto que $b_0 \in W_0$ se verifica que

$$a = a + b_0 - b_0 \in W_0 + W_0 \subseteq V,$$

como queríamos ver. ■

3.4 Comentarios al capítulo

Como hemos visto en este capítulo, los conceptos *ideal no eliminable* y *elemento permanentemente singular* guardan una fuerte relación. Los resultados, relativos a estos conceptos los recogemos en el siguiente diagrama.

Para ideales en álgeras topológicas, de los teoremas 3.1.1, 3.1.2 y 3.2.1 se tiene la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccc} \text{CETW} & \Rightarrow & \text{CET} & \Rightarrow & \mathcal{T}-\text{ELIMINABLE} \\ \text{CETW} & \not\Leftarrow & \text{CET} & \overset{?}{\Leftarrow} & \mathcal{T}-\text{ELIMINABLE} \end{array}$$

Para elementos, en álgebras topológicas, se traduce en

$$\begin{array}{ccccc} \text{DTC} + \text{PP} & \Rightarrow & \text{PST} & \Rightarrow & \mathcal{T}-\text{SINGULAR} \\ \text{DTC} + \text{PP} & \not\Leftarrow & \text{PST} & \overset{?}{\Leftarrow} & \mathcal{T}-\text{SINGULAR} \end{array}$$

Aquí hemos puesto DTC, PP para denotar divisor topológico de cero y elemento con potencias pequeñas, respectivamente. El significado de DTC + PP es un elemento que es suma de un DTC con un PP.

Sin embargo, no sabemos si son ciertas las implicaciones con interrogación.

Por otra parte, para álgebras semitopológicas, hemos establecido una caracterización de los elementos permanentemente singulares (teorema 3.3.2).

El concepto de ideal eliminable en s–álgebras topológicas se define de forma similar, como en el caso de álgebras topológicas, es decir, un ideal I de una s–álgebra topológica A es s–eliminable si existe una s–extensión B de A tal que I no está contenido en ningún ideal propio de B.

Considerando s–álgebras conmutativas con elemento unidad, el lema 3.1.1 es cierto también para s–álgebras topológicas.

De la misma forma, tiene sentido el concepto de ideal formado localmente por divisores topológicos de cero, en s–álgebras topológicas:

Un ideal I de una s–álgebra topológica A se dice que está formado localmente por divisores topológicos de cero si para cada subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq I$ existe una red $(z_\gamma)_\gamma$ en A, con $z_\gamma \not\to 0$, tal que $z_\gamma x_k \to 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Se establece sin dificultad que, un ideal, en una s–álgebra topológica, formado localmente por divisores topológicos de cero es no s–eliminable.

Probablemente, el recíproco también sea cierto.

Capítulo IV

Extensiones finitamente generadas

La inyección de una estructura dada en una estructura más simple es una cuestión estudiada en diferentes situaciones. Por ejemplo en [24] y [26]. En [26] se prueba que cualquier anillo numerable con unidad se puede inyectar en un anillo con dos generadores y la inyección conserva las unidades. Las técnicas de [26] se pueden adaptar para establecer un resultado similar para álgebras de Banach, a saber:

Si A es un álgebra de Banach separable con unidad, entonces existe un álgebra de Banach con unidad B, generada por dos elementos, y existe un isomorfismo isométrico $f : A \to B$ que conserva las unidades.

Es claro que, si el álgebra A no es conmutativa, no es posible encontrar una extensión de A generada por un sólo elemento, puesto que cualquier álgebra con un generador es conmutativa.

El resultado mencionado anteriormente se mejora en [24] para *–álgebras de Banach. En este trabajo se establece el siguiente teorema:

*Cualquier *–álgebra de Banach separable con involución continua se puede inyectar isométricamente en una *–álgebra de Banach, con* *involución continua, generada por un elemento y su adjunto. La inyección conserva las unidades.*

En este capítulo obtendremos resultados similares para diferentes clases de álgebras topológicas: álgebras localmente acotadas, álgebras localmente convexas y álgebras localmente convexas metrizables, todas con la hipótesis de separabilidad. Para la dos primeras, las extensiones se construyen utilizando un álgebra de polinomios en dos variables. Para la segunda, construimos una extensión utilizando un álgebra de matrices, que goza de propiedades similares a la anterior pero que permite, por la estructura de sus elementos, trabajar con la topología de forma más cómoda.

4.1 Definiciones y observaciones previas

Sea A un álgebra compleja sin topología. Sea $S \subset A$ un subconjunto de A. Denotemos por $\langle S \rangle$ la menor subálgebra de A que contiene a S.

Diremos que S es un conjunto de generadores algebraicos de A, o que A está generada algebraicamente por S, si $\langle S \rangle = A$.

Esto significa que cualquier elemento de A es una combinación lineal finita cuyos términos son productos finitos de elementos de S.

Para álgebras topológicas podemos considerar otro concepto de generación más general que el anterior.

Sea A un álgebra topológica. Diremos que $S \subset A$ es un conjunto de generadores topológicos de A, o que A está generada topológicamente por S, si $\langle S \rangle$ es denso en A.

Esto significa que cualquier elemento de A es el límite de una red en A cuyos términos son combinaciones lineales finitas de productos finitos de elementos de S.

En lo que sigue tendremos en cuenta las siguientes observaciones relativas a los conceptos descritos anteriormente.

Observaciones

1. Si A es un álgebra topológica y $S \subset A$ es un conjunto de generadores algebraicos de A, entonces S es un conjunto de generadores topológicos de A.

2. Si A es un álgebra topológica y S es un conjunto de generadores algebraicos de A, entonces S es un conjunto de generadores topológicos de la completación de A.

3. Si A es un álgebra topológica separable (posee un subconjunto denso y numerable), entonces A está generada topológicamente por un conjunto numerable.

UNA CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA.

En las secciones 4.2 y 4.3 utilizaremos la siguiente construcción algebraica. La idea es construir un álgebra de polinomios en dos variables que será el soporte algebraico para las extensiones que aparecen en las dos secciones siguientes. La diferencia entre las extensiones de una sección y otra reside en la distinta forma de "trasladar" la topología del álgebra original, localmente acotada en la sección 4.2, y localmente convexa en la sección 4.3, al álgebra de polinomios. No obstante, las técnicas que se utilizan para "trasladar" la topología son similares en ambos casos. El álgebra de polinomios se construye de la siguiente forma.

Sean x, y dos indeterminadas tales que $x^2 = x$. Denotemos por $x^0 = y^0 = 1$ y sean $X^0 = \{1\}$ y $X^1 = \{x, y\}$. Pongamos $X^n = X^1 \cdot X^{n-1}$ para $n = 2, 3, \ldots$

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned}
X^2 &= \{x, xy, yx, y^2\} \\
X^3 &= \{x, xy, xyx, xy^2, yx, yxy, y^2x, y^3\} \\
X^4 &= \{x, xy, yx, xyx, y^2x, xy^2, yxy, xy^2x, yxyx, y^3x, xyxy, xy^3, yxy^2, y^2xy, y^4\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Sea $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$, y consideremos el espacio vectorial $B(S)$ de todas las combinaciones lineales finitas, con escalares complejos, de elementos de S. Observemos que $B(S)$, como espacio vectorial, está generado por el conjunto:

$$\left\{y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k} : i_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots k,\ k = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Establecemos el convenio siguiente: si $k = 1$ entonces $y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k} = y^{i_1}$.

Definimos el producto de los elementos: $y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k}$ y $y^{j_1}xy^{j_2}x\cdots xy^{j_r}$ como

$$(y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k})(y^{j_1}xy^{j_2}x\cdots xy^{j_r}) = y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k+j_1}xy^{j_2}x\cdots xy^{j_r}.$$

Extendiendo este producto por bilinealidad tenemos que $B(S)$ es un álgebra compleja, generada algebraicamente por el conjunto $\{x, y\}$.

De esta forma, cualquier elemento $b \in B(S)$ se puede escribir, de forma única, como una suma finita de la forma:

$$b = \sum_{i \in D} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} y^{i_1}xy^{i_2}x\cdots xy^{i_k} + \sum_{p \geq 0} \alpha_p y^p,$$

donde

$$D = \left\{i = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : k \geq 2,\ i_1, i_k \geq 0,\ i_j > 0,\ j = 2, \ldots, k-1\right\}$$

y $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ y α_p son escalares complejos.

Consideremos $M = x \cdot B(S) \cdot x = \{xbx : b \in B(S)\}$. Es claro que M es una subálgebra de $B(S)$ que está generada algebraicamente por el conjunto

$$\left\{xy^k x,\ k = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Observemos que $xy^0x = x$.

La subálgebra M nos permitirá expersar los elementos de $B(S)$ de forma más cómoda. Así, si $b \in B(S)$, se tiene que:

$$b = \sum_{i,k} y^i m_{ik} y^k + \sum_{p \geq 0} \alpha_p y^p$$

para unos únicos $m_{ik} \in M$ y $\alpha_p \in \mathbb{C}$, que dependen de b. Las dos sumas anteriores son finitas.

Por otra parte, la subálgebra M nos permitirá reconocer el álgebra original en la extensión que de ella construyamos.

4.2 Extensión de un álgebra localmente acotada

En esta sección construiremos una extensión generada por dos elementos de un álgebra localmente acotada completa. El resultado es el siguiente.

Teorema 4.2.1 *Sea A un álgebra localmente acotada separable completa. Entonces existe un álgebra localmente acotada con unidad B, generada topológicamente por dos elementos, y existe un isomorfismo isométrico $F : A \to B$.*

DEMOSTRACIÓN:

Podemos suponer que el álgebra A tiene unidad, que denotaremos por 1_A. En otro caso basta considerar su unitización A_1.

Sabemos que la topología de A se puede describir por una norma q–homogénea $\|\cdot\|_A$, $(0 < q \leq 1)$, que verifica

$$\|ab\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A \quad \text{para todos} \quad a, b \in A \quad \text{y} \quad \|1_A\|_A = 1.$$

Como el álgebra A es separable, podemos suponer que A está generada topológicamente por $\{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$ con $\|g_k\|_A = 1$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $g_0 = 1_A$.

Denotemos por A_0 la subálgebra de A generada algebraicamente por el subconjunto $\{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$. Siguiendo la notación de la construcción algebraica podemos definir

$$f : M \to A_0 \quad \text{tal que} \quad xy^k x \mapsto f(xy^k x) = g_k, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

extendido por linealidad a un homomorfismo de álgebras.

Es claro que f es sobreyectivo. Sin embargo, en general f no es inyectivo. Esto último depende fuertemente del producto del álgebra A y puede ocurrir que $g_i g_k = 0$ en A, pero siempre se tiene que $xy^i xy^k x \neq 0$ en $B(S)$.

Mediante el homomorfismo de álgebras $f : M \to A_0$ podemos definir una seminorma q–homogénea en $B(S)$ de la siguiente forma. Si $b \in B(S)$ es tal que

$$b = \sum_{i,k} y^i m_{ik} y^k + \sum_{p \geq 0} \alpha_p y^p,$$

con $m_{ik} \in M$ y $\alpha_p \in \mathbb{C}$ ponemos

$$\|b\|_{B(S)} = \sum_{i,k} \|f(m_{ik})\|_A + \sum_{p \geq 0} |\alpha_p|^q.$$

Se comprueba, sin dificultad, que $\|\cdot\|_{B(S)}$ es una seminorma q–homogénea submultiplicativa en $B(S)$. En general no es una norma, pues f no es inyectivo.

Para establecer la submultiplicatividad de $\|\cdot\|_{B(S)}$ en $B(S)$ basta comprobar los siguientes resultados:

1. Para todos $i, j, k, l = 0, 1, \ldots$ y $m, n \in M$,

$$\left\|(y^i m y^k)(y^j n y^l)\right\|_{B(S)} \leq \left\|y^i m y^k\right\|_{B(S)} \left\|y^j n y^l\right\|_{B(S)}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left\|(y^i m y^k)(y^j n y^l)\right\|_{B(S)} &= \left\|y^i m y^{k+j} n y^l\right\|_{B(S)} \\ = \left\|y^i m x y^{k+j} x n y^l\right\|_{B(S)} &= \left\|f(m x y^{k+j} x n)\right\|_A \\ = \left\|f(m) f(x y^{k+j} x) f(n)\right\|_A &\leq \|f(m)\|_A \|g_{k+j}\|_A \|f(n)\|_A \\ = \|f(m)\|_A \|f(n)\|_A &= \left\|y^i m y^k\right\|_{B(S)} \left\|y^j n y^l\right\|_{B(S)}. \end{aligned}$$

2. Para todos $i, k, n = 0, 1, \dots$ y $m \in M$

$$\begin{aligned}\left\|y^n(y^i m y^k)\right\|_{B(S)} &\leq \|y^n\|_{B(S)} \left\|y^i m y^k\right\|_{B(S)}, \text{ y} \\ \left\|(y^i m y^k) y^n\right\|_{B(S)} &\leq \left\|y^i m y^k\right\|_{B(S)} \|y^n\|_{B(S)}.\end{aligned}$$

3. Si $p_1(y)$ y $p_2(y)$ son dos polinomios en y, entonces

$$\|p_1(y)p_2(y)\|_{B(S)} \leq \|p_1(y)\|_{B(S)} \|p_2(y)\|_{B(S)}$$

Los apartados 2. y 3. se comprueban de forma análoga a 1.

Llamemos $H = \{b \in B(S) : \|b\|_{B(S)} = 0\}$. Entonces H es un ideal cerrado de $B(S)$, que contiene a $N(f)$, el núcleo de $f : M \to A_0$.

Consideremos el álgebra cociente $\left[B(S)/H, \|\cdot\|_{B(S)/H}\right]$, que es un álgebra localmente acotada, con unidad, y está generada algebraicamente por el conjunto $\{x + H, y + H\}$. La q–norma en $B(S)/H$ está definida por:

$$\|b + H\|_{B(S)/H} = \inf\{\|b + z\|_{B(S)} : z \in H\}.$$

Definimos ahora una aplicación $F : A_0 \to B(S)/H$ como

$$a \in A_0 \mapsto F(a) = m + H \in B(S)/H, \quad \text{si} \quad f(m) = a.$$

Puesto que $H \cap M = N(f)$, la aplicación F está bien definida y es homomorfismo de álgebras inyectivo. Además se tiene que $F(A_0) = M + H$.

Es más, F es una isometría: $\|F(a)\|_{B(S)/H} = \|a\|_A$, para todo $a \in A_0$.

Observemos que si $f(m) = a, m \in M$ y $a \in A$

$$\|F(a)\|_{B(S)/H} = \|m + H\|_{B(S)/H} = \inf\{\|m + z\|_{B(S)} : z \in H\}.$$

Es claro entonces que

$$\|F(a)\|_{B(S)/H} \leq \|m\|_{B(S)} = \|a\|_A$$

para todo $a \in A_0$.

Por otra parte, si $f(m) = a$ se tiene, para todo $z \in H$, que:

$$\|m + z\|_{B(S)} = \|a\|_A .$$

En efecto, si $z \in H$ es tal que:

$$z = \sum_{i,k} y^i z_{ik} y^k + \sum_{p \geq 0} \beta_p y^p,$$

con $z_{ik} \in M$ y $\beta_p \in \mathbb{C}$, de la igualdad

$$0 = \|z\|_{B(S)} = \sum_{i,k} \|f(z_{ik})\|_A + \sum_{p \geq 0} |\beta_p|^q$$

sigue que

$$\beta_p = \|f(z_{ik})\|_A = 0 \quad \text{para todos} \quad i, k, p = 0, 1, \ldots$$

es decir, $z_{ik} \in N(f)$, para todos $i, k = 0, 1, \ldots$

Entonces

$$\|m + z\|_{B(S)} = \|f(m)\|_A + \sum_{i,k} \|f(z_{ik})\|_A = \|f(m)\|_A = \|a\|_A .$$

En consecuencia, obtenemos que $\|F(a)\|_{B(S)/H} = \|a\|_A$, para todo $a \in A_0$.

Por último, podemos extender F a una isometría, que seguimos denotando por F, de A (la completación de A_0) a B, donde B es la completación del álgebra $\left[B(S)/H, \|\cdot\|_{B(S)/H}\right]$.

Observemos que B es un álgebra localmente acotada, con unidad, generada topológicamente por dos generadores: $x + H$ e $y + H$.

■

4.3 Extensión de un álgebra localmente convexa

En esta sección construiremos una extensión, generada topológicamente por dos elementos, de un álgebra localmente convexa separable. Para ello utilizamos la misma técnica de la sección anterior. El resultado que presentamos es el siguiente.

Teorema 4.3.1 *Sea A un álgebra localmente convexa completa separable. Entonces existe un álgebra localmente convexa B con unidad, generada topológicamente por dos elementos y existe un isomorfismo $F : A \to B$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que la topología de A se puede describir por un sistema de seminormas $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ que verifica LC1 y LC2.

Como el álgebra A es separable podemos suponer que está generada topológicamente por $\{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\} \subset A$.

Denotemos por A_0 la subálgebra de A generada algebraicamente por el subconjunto $\{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$.

Siguiendo la notación de la construcción algebraica y del teorema de la sección anterior, consideremos el álgebra $B(S)$, la subálgebra M de $B(S)$ y el homomorfismo de álgebras $f : M \to A_0$.

Definimos seguidamente un topología localmente convexa en $B(S)$ mediante una familia de seminormas. Para ello procedemos de la siguiente forma.

Aplicando reiteradamente las fórmulas de (1.4), para cada $\alpha = \alpha_0 \in \Delta$, podemos encontrar una sucesión de seminormas $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \Delta$, tales que:

$$\begin{array}{ll} (1) & |abc|_{\alpha_n} \leq |a|_{\alpha_{n+1}} |b|_{\alpha_{n+1}} |c|_{\alpha_{n+1}} \\ (2) & |a|_{\alpha_n} \leq |a|_{\alpha_{n+1}} \end{array}$$

para cada $a, b, c \in A$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$

Denotemos por

$$S(\Delta) = \{\Lambda = (\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \Delta \text{ que verifican (1) y (2)}\}.$$

Para cada $\Lambda = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in S(\Delta)$ definimos por inducción en n unas constantes reales positivas $C_{ij}^{(\Lambda,n)}, i,j = 0,1,\ldots$ y $D_k^{(\Lambda,n)}, k = 0,1,\ldots$ de la siguiente forma. Ponemos

$$C_{ij}^{(\Lambda,0)} = D_k^{(\Lambda,0)} = 1 \text{ para } i,j,k = 0,1,2,\ldots$$

Supuesto que ya tenemos construidas las constantes $C_{ij}^{(\Lambda,r)}, D_i^{(\Lambda,r)}$ para todo $i,j = 0,1,2,\ldots$ y $r = 0,1,2,\ldots,n$ definimos:

$$C_{ij}^{(\Lambda,n+1)} = \max\left\{1, \left[C_{rs}^{(\Lambda,n)}\right]^2, |g_r|^2_{\alpha_{n+1}} : 0 \leq r+s \leq 2(i+j)\right\} \quad i,j = 0,1,\ldots$$

$$D_k^{(\Lambda,n+1)} = \max\left\{1, C_{rs}^{(\Lambda,n)}, D_p^{(\Lambda,n)} : 0 \leq r+s \leq 3k,\ 0 \leq p \leq 2k\right\} \quad k = 0,1,\ldots$$

Comprobaremos ahora que, para todo $i,j,k,l,n, = 0,1,2,\ldots$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$(a) \qquad C_{il}^{(\Lambda,n)}|g_{j+k}|_{\alpha_{n+1}} \leq C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}$$

$$(b) \qquad C_{k+ij}^{(\Lambda,n)} \leq D_k^{(\Lambda,n+1)}C_{ij}^{(\Lambda,n+1)} \quad \text{y} \quad C_{ij+k}^{(\Lambda,n)} \leq D_k^{(\Lambda,n+1)}C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}$$

$$(c) \qquad D_{i+k}^{(\Lambda,n)} \leq D_i^{(\Lambda,n+1)}D_k^{(\Lambda,n+1)}$$

En efecto:

(a). Para $i,j = 0,1,\ldots$ consideremos el conjunto finito

$$M_{ij} = \left\{1, \left[C_{rs}^{(\Lambda,n)}\right]^2, |g_r|^2_{\alpha_{n+1}} : 0 \leq r+s \leq 2(i+j)\right\}$$

Puesto que $i+l \leq 2(i+j)$ ó $i+l \leq 2(k+l)$ se verifica que

$$\left[C_{il}^{(\Lambda,n)}\right]^2 \in M_{ij} \cup M_{kl} \quad \text{y} \quad |g_r|^2_{\alpha_{n+1}} \in M_{ij} \cup M_{kl}$$

Por tanto, tenemos que

$$\left[C_{il}^{(\Lambda,n)}\right] \leq \max\left\{\left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \text{ y}$$

$$|g_{j+k}|_{\alpha_{n+1}} \leq \max\left\{\left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

De estas dos desigualdades se obtiene que

$$C_{il}^{(\Lambda,n)}|g_{j+k}|_{\alpha_{n+1}} \leq \left[\max\left\{\left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^2 \leq C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}.$$

La última desigualdad se debe a que $C_{ij}^{(\Lambda,n+1)} \geq 1$ para $i,j = 0,1,\ldots$

(b). Para $i,j,k = 0,1,\ldots$ consideremos el conjunto M_{ij} del apartado (a) y el conjunto finito

$$M_k = \max\left\{1, C_{rs}^{(\Lambda,n)}, D_p^{(\Lambda,n)} : 0 \leq r+s \leq 3k, \quad 0 \leq p \leq 2k\right\}.$$

Puesto que $i+j+k \leq 2(i+j)$ ó $i+j+k \leq 3k$ se tiene que $\left[C_{k+ij}^{(\Lambda,n)}\right]^2 \in M_{ij}$ ó bien $C_{k+ij}^{(\Lambda,n)} \in M_k$, y por tanto

$$C_{k+ij}^{(\Lambda,n)} \leq \max\left\{\left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, D_k^{(\Lambda,n+1)}\right\} \leq C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}D_k^{(\Lambda,n+1)}.$$

La última desigualdad se tiene puesto que $C_{ij}^{(\Lambda,n)}, D_k^{(\Lambda,n)} \geq 1$ para todo $i,j,k = 0,1,\ldots$

Análogamente se obtiene la desigualdad

$$C_{ij+k}^{(\Lambda,n)} \leq C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}D_k^{(\Lambda,n+1)}$$

(c). Para $k = 0,1,\ldots$ consideremos el conjunto M_k del apartado (b). Puesto que $i+k \leq 2k$ ó $i+k \leq 2i$ se tiene que $D_{i+k}^{(\Lambda,n)} \in M_i \cup M_k$, y por tanto

$$D_{i+k}^{(\Lambda,n)} \leq \max\left\{D_i^{(\Lambda,n+1)}, D_k^{(\Lambda,n+1)}\right\} \leq D_i^{(\Lambda,n+1)}D_k^{(\Lambda,n+1)}.$$

La última desigualdad se tiene puesto que $D_k^{(\Lambda,n)} \geq 1$ para todo $k = 0,1,\ldots$.

Mediante el homomorfismo $f : M \to A_0$ y las constantes construidas anteriormente podemos definir las siguientes seminormas en el álgebra $B(S)$.

Si $b \in B(S)$ es tal que

$$b = \sum_{i,k} y^i m_{ik} y^k + \sum_{p\geq 0} \lambda_p y^p$$

y $(\Lambda, n) \in S(\Delta) \times \mathbb{N}$ ponemos

$$\|b\|_{(\Lambda,n)} = \sum_{i,k} C_{ik}^{(\Lambda,n)} |f(m_{ik})|_{\alpha_n} + \sum_{p \geq 0} D_p^{(\Lambda,n)} |\lambda_p|.$$

Entonces

$$\{\|\cdot\|_{(\Lambda,n)}, \ \Lambda \in S(\Delta), \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

es un sistema de seminormas en $B(S)$ que, como veremos seguidamente, verifica LC1, y por tanto define una topología localmente convexa en $B(S)$, que en general no es Hausdorff, pues el homomorfismo $f : M \to A_0$ no es inyectivo.

Para establecer LC1 para esta familia de seminormas basta comprobar los siguientes resultados:

1. Para todos $i, j, k, l = 0, 1, 2, \ldots$ y $m, m' \in M$,

$$\left\|(y^i m y^j)(y^k m' y^l)\right\|_{(\Lambda,n)} \leq \left\|y^i m y^j\right\|_{(\Lambda,n+1)} \left\|y^k m' y^l\right\|_{(\Lambda,n+1)}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left\|(y^i m y^j)(y^k m' y^l)\right\|_{(\Lambda,n)} &= \left\|y^i m y^{j+k} m' y^l\right\|_{(\Lambda,n)} \\ &= C_{il}^{(\Lambda,n)} |f(m y^{j+k} m')|_{\alpha_n} = C_{il}^{(\Lambda,n)} |f(m x y^{j+k} x m')|_{\alpha_n} \\ &= C_{il}^{(\Lambda,n)} |f(m) g_{j+k} f(m')|_{\alpha_n} \leq C_{il}^{(\Lambda,n)} |f(m)|_{\alpha_{n+1}} |g_{j+k}|_{\alpha_{n+1}} |f(m')|_{\alpha_{n+1}} \\ &\leq C_{ij}^{(\Lambda,n+1)} |f(m)|_{\alpha_{n+1}} C_{kl}^{(\Lambda,n+1)} |f(m')|_{\alpha_{n+1}} \\ &= \left\|y^i m y^j\right\|_{(\Lambda,n+1)} \left\|y^k m' y^l\right\|_{(\Lambda,n+1)}. \end{aligned}$$

2. Para todos $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$ y $m \in M$,

$$\left\|y^k (y^i m y^j)\right\|_{(\Lambda,n)} \leq \left\|y^k\right\|_{(\Lambda,n+1)} \left\|y^i m y^j\right\|_{(\Lambda,n+1)}.$$

3. Para todos $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$ y $m \in M$,

$$\left\|(y^i m y^j) y^k\right\|_{(\Lambda,n)} \leq \left\|y^i m y^j\right\|_{(\Lambda,n+1)} \left\|y^k\right\|_{(\Lambda,n+1)}.$$

4. Para todos $i, k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\left\|y^i y^j\right\|_{(\Lambda,n)} \leq \left\|y^i\right\|_{(\Lambda,n+1)} \left\|y^j\right\|_{(\Lambda,n+1)}.$$

Los apartados 2., 3. y 4. se demuestran de forma análoga a 1.

Denotemos por

$$H = \{b \in B(S) : \|b\|_{(\Lambda,n)} = 0 \text{ para todo } (\Lambda, n) \in S(\Delta) \times \mathbb{N}\}.$$

Entonces H es un ideal cerrado de $B(S)$. Es más, es fácil comprobar que $H \cap M = N(f)$, donde $N(f)$ denota el núcleo del homomorfismo $f : M \to A_0$.

Consideremos el álgebra cociente $B(S)/H$, con las seminormas definidas por:

$$\|b + H\|'_{(\Lambda,n)} = \inf\{\|b + z\|_{(\Lambda,n)} : z \in H\},$$

si $b \in B(S)$.

Con esta familia de seminormas, $B(S)/H$ es un álgebra localmente convexa Hausdorff, generada algebraicamente por dos elementos: $\{x + H, y + H\}$.

Definimos ahora la aplicación:

$$F : A_0 \to B(S)/H \quad a \mapsto F(a) = m + H, \quad \text{si} \quad f(m) = a.$$

Se verifica que F está bien definida, es homomorfismo de álgebras inyectivo y además:

$$\|F(a)\|'_{(\Lambda,n)} = C_{00}^{(\Lambda,n)} |a|_{\alpha_n}$$

para cada $(\Lambda, n) \in S(\Delta) \times \mathbb{N}$ y $a \in A_0$.

Por tanto, F es un isomorfismo sobre la imagen $F(A_0) = M + H$. La prueba de estas afirmaciones es similar a la del teorema 4.2.1 de la sección anterior.

Por último, podemos extender F a un isomorfismo de álgebras, que seguiremos denotando por F, de A (la completación de A_0) a B (la completación de $B(S)/H$).

Observemos que B es un álgebra localmente convexa, con unidad, generada topológicamente por dos elementos $\{x + H, y + H\}$. ∎

4.4 Extensión de una B_0–álgebra

Las inyecciones construidas en los teoremas de las secciones 4.2 y 4.3 tienen la desventaja de que no conservan las unidades de las álgebras A y B, si el álgebra A tiene unidad.

Para el caso, por ejemplo, de un álgebra localmente convexa A con unidad 1_A el homomorfismo $f : M \to A$ verifica que $f(x) = 1_A$, y por tanto, $F : A \to B$ verifica que $F(1_A) = x + H \neq 1_B + H$, pues $\|x - 1_B\|_{(\Lambda,n)} = C_{00}^{(\Lambda,n)} + D_0^{(\Lambda,n)} \neq 0$ para todo $(\Lambda, n) \in S(\Delta) \times \mathbb{N}$.

En esta sección, para un álgebra localmente convexa y metrizable separable A, construiremos usando técnicas matriciales, una extensión de A localmente convexa metrizable B con unidad 1_B. Además si A tiene unidad 1_A entonces $1_A = 1_B$.

Para ello establecemos primero el siguiente:

Lema 4.4.1 *Sea A un álgebra topológica generada topológicamente por n elementos. Entonces $\mathcal{M}_{n+2}(A)$, el cojunto de matrices cuadradas de orden $n+2$ con elementos de A y las operaciones usuales, es una extensión de A generada topológicamente por dos elementos.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que A se puede inyectar en su unitización A_1, y si A es separable A_1 también lo es, podemos suponer que A tiene unidad, que denotaremos por 1.

Sea $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un conjunto de generadores topológicos de A.

Sea $\mathcal{U}(A)$ un sistema de entornos del origen que define la topología de A y verifica T1, T2 y T3. Para cada $U \in \mathcal{U}(A)$ consideremos el conjunto

$$U_{\mathcal{M}} = \left\{M = [m_{ik}]_{i,k=1}^{n+2} \in \mathcal{M}_{n+2}(A) : m_{ik} \in U, i, k = 1, 2, \ldots, n+2\right\}.$$

Entonces

$$\mathcal{U}(\mathcal{M}_{n+2}(A)) = \{U_{\mathcal{M}} : U \in \mathcal{U}(A)\}$$

es un sistema de entornos del origen en $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ que verifica las condiciones T1, T2 y T3, y por tanto define en $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ una topología vectorial, para la cual $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es un álgebra topológica.

Para establecer T3 procedemos de la siguiente forma:

Sea $U_{\mathcal{M}} \in \mathcal{U}(\mathcal{M}_{n+2}(A))$, con $U \in \mathcal{U}(A)$. Podemos encontrar $V \in \mathcal{U}(A)$ tal que $VV + \overset{n+2)}{\cdots} + VV \subset U$. Ahora tenemos que $V_{\mathcal{M}} V_{\mathcal{M}} \subset U_{\mathcal{M}}$. Las condiciones T1 y T2 se obtinen de forma similar.

Comprobemos ahora que $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es una extensión de A. Para ello definimos:

$$F : a \in A \to F(a) = \operatorname{diag}(a, a, \ldots, a) \in \mathcal{M}_{n+2}(A),$$

donde $\operatorname{diag}(a, a, \ldots, a)$ denota la matriz diagonal de orden $n+2$ cuyos elementos diagonales son todos iguales a a.

Es claro que F es un isomorfismo de álgebras que verifica

$$F(1) = I_{n+2} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{M}_{n+2}(A).$$

Además F es un isomorfismo topológico sobre la imagen. Este hecho se obtiene de la siguiente relación:

$$F(U) = U_{\mathcal{M}} \cap F(A)$$

para todo $U \in \mathcal{U}(A)$.

Para terminar, basta comprobar que $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ está generada topológicamente por dos elementos.

Sean

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$ y cada $a \in A$ denotemos por $E_{ij}(a)$ la matriz de $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ cuyo elemento ij es a y el resto de los elementos son ceros. Por comodidad, pongamos $E(a) = E_{11}(a)$. La siguiente relación de afirmaciones y observaciones se obtiene sin más que realizar algunos cálculos.

1. La matriz S es invertible y $S^{-1} = S^{n+1}$.

2. $E(1_A) = [S^{-1}G]^2$, por tanto $E(1_A) \in \langle G, S\rangle$.

3. $E(g_k) = GS^k E(1_A)$ para $k = 1, 2, \ldots n$, así que $E(g_k) \in \langle G, S\rangle$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. Para cada $a \in A$ se tiene que
$$E_{ij}(a) = S^{j-1}E(a)S^{-(i-1)}$$
para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$.

5. Para todo $b \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ se verifica que $E(b) \in \langle G, S\rangle$. Observemos que si
$$b = \sum \alpha_{p_1 \ldots p_r}^{k_1 \ldots k_r} g_{p_1}^{k_1} \cdots g_{p_r}^{k_r},$$
entonces
$$E(b) = \sum \alpha_{p_1 \ldots p_r}^{k_1 \ldots k_r} [E(g_{p_1})]^{k_1} \cdots [E(g_{p_r})]^{k_r}.$$
Ahora, de 3 se tiene 5.

6. Para todo $b \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ se verifica que $E_{ij}(b) \in \langle G, S\rangle$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$. Esto se tiene inmediatamente de 4 y 5.

7. Si $b_{ij} \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$ entonces, por 6, la matriz $B = [b_{ij}]_{ij=1}^{n+2} \in \langle G, S\rangle$, puesto que
$$B = \sum_{i,j=1}^{n+2} E_{ij}(b_{ij}).$$

Ahora es fácil probar que $\{G, S\}$ es un conjunto de generadores topológicos para $\mathcal{M}_{n+2}(A)$.

Dada $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n+2} \in \mathcal{M}_{n+2}(A)$ y dado $U_{\mathcal{M}} \in \mathcal{U}(\mathcal{M}_{n+2}(A))$, puesto que el conjunto $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ genera topológicamente A, se tiene que para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$ existe $b_{ij} \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ tal que $m_{ij} - b_{ij} \in U$. Por tanto, por 7, $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n+2} \in \langle G, S \rangle$, y además $M - B \in U_{\mathcal{M}}$. ■

De este lema obtenemos los siguiente corolarios.

Corolario 4.4.1 *Si el álgebra A es localmente convexa, entonces la extensión $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es localmente convexa.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta observar que si $U \in \mathcal{U}(A)$ es convexo, entonces $U_{\mathcal{M}}$ también lo es. ■

Corolario 4.4.2 *Si el álgebra A es metrizable, entonces la extensión $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $\mathcal{U}(A)$ es un sistema de entornos numerable, entonces $\mathcal{U}(\mathcal{M}_{n+2}(A))$ también es numerable. ■

Corolario 4.4.3 *Si el álgebra A es localmente acotada, entonces la extensión $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es localmente acotada. Es más, es una extensión isométrica de A.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $U \in \mathcal{U}(A)$ es un entorno acotado en A, entonces $U_{\mathcal{M}}$ es un entorno acotado en $\mathcal{M}_{n+2}(A)$.

Para la segunda afirmación, observemos que si $|\cdot|$ es una norma p–homogénea, $(0 < p \leq 1)$, en A, entonces

$$\|\cdot\| : M \in \mathcal{M}_{n+2}(A) \to \|M\| = \max\left\{\sum_{i=1}^{n+2} |m_{ij}| : j = 1, 2, \ldots, n+2\right\} \in \mathbb{R}$$

es una norma p–homogénea en $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ que define su topología, y además

$$\|\mathrm{diag}(a, a, \ldots, a)\| = |a|$$

para todo $a \in A$. ∎

Corolario 4.4.4 *Si el álgebra A es normada, entonces la extensión $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es normada. Es más $\mathcal{M}_{n+2}(A)$ es una extensión isométrica de A.*

Observación

Esta observación tiene un caracter preparatorio para el teorema siguiente. Las ideas que aqui recogemos pueden consultarse en [8].

Sea X un espacio localmente convexo Hausdorff completo, y sea

$$\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$$

un sistema de seminormas que definen la topología de X.

Sea $\mathcal{K}$ un conjunto infinito numerable y denotemos por $P_f(\mathcal{K})$ el conjunto de las partes finitas de $\mathcal{K}$.

Sea $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ una familia de elementos de X. Para cada $J \in P_f(\mathcal{K})$ denotemos por

$$x_J = \sum_{k\in J} x_k \in X.$$

Ordenando $P_f(\mathcal{K})$ por la inclusión, se tiene que $(x_J)_{J\in P_f(\mathcal{K})}$ es una red en X.

Se dice que la familia $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ es *sumable* en X si la red $(x_J)_{J\in P_f(\mathcal{K})}$ es convergente en X, es decir:

> Existe $x \in X$ tal que para todo $\epsilon > 0$ y para todo $\alpha \in \Delta$, existe $J_0 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $|x - \sum_{k\in J} x_k|_\alpha < \epsilon$, para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$, con $J_0 \subseteq J$,

lo que equivale, en virtud de la completitud de X, a que:

> Para todo $\epsilon > 0$ y para todo $\alpha \in \Delta$, existe $J_0 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $|\sum_{k\in J} x_k|_\alpha < \epsilon$, para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$, con $J_0 \cap J = \emptyset$.

En este caso pondremos

$$x = \sum_{k\in K} x_k,$$

y le llamaremos suma de la familia $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$.

Se dice que la familia $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ es *absolutamente sumable* en X si las familias $(|x_k|_\alpha)_{k\in\mathcal{K}}$ son sumables en $\mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \Delta$, es decir:

> Para todo $\alpha \in \Delta$ existe $t_\alpha = \sum_{k\in\mathcal{K}} |x_k|_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $J_0 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $|t_\alpha - \sum_{k\in J} |x_k|_\alpha| < \epsilon$ para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$, con $J_0 \subseteq J$.

o equivalentemente:

> Para todo $\epsilon > 0$ y para todo $\alpha \in \Delta$, existe $J_0 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $\sum_{k\in J} |x_k|_\alpha < \epsilon$, para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$, con $J_0 \cap J = \emptyset$.

Observemos que si $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ es absolutamente sumable en X, como las familias $(|x_k|_\alpha)_{k\in\mathcal{K}}$, $\alpha \in \Delta$ son de términos positivos se verifica que

$$t_\alpha = \sum_{k\in\mathcal{K}} |x_k|_\alpha = \sup\left\{ \sum_{k\in J} |x_k|_\alpha,\ J \in P_f(\mathcal{K}) \right\}. \tag{4.1}$$

Para denotar que la familia $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ es absolutamente sumable en X escribiremos

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} |x_k|_\alpha < \infty \text{ para todo } \alpha \in \Delta.$$

Denotemos por

$$\ell^1_{\mathcal{K}}(X) = \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} : \sum_{k\in\mathcal{K}} |x_k|_\alpha < \infty \text{ para todo } \alpha \in \Delta \right\},$$

es decir, el conjunto de todas las familias absolutamente sumables en X.

$\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$ se puede dotar de una topología localmente convexa Hausdorff mediante el siguiente sistema $\{\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas en $\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$, definidas por:

$$x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} \in \ell^1_{\mathcal{K}}(X) \to \|x\|_\alpha = \sum_{k\in\mathcal{K}} |x_k|_\alpha \in \mathbb{R}, \ \ \alpha \in \Delta.$$

Con esta topología $\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$ es un espacio localmente convexo Hausdorff completo. Ver [8, 3.5.6].

En la prueba del siguiente teorema utilizaremos fuertemente la propiedad de convergencia de las secciones que poseen los elementos de $\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$, que es análoga a la que posee el espacio $\ell^1 = \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

Si $z \in X$ y $k \in \mathcal{K}$ denotemos por $x\delta_k$ el elemento de $\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$ definido por $z\delta_k = (z_i)_{i\in\mathcal{K}}$, donde:

$$z_i = \begin{cases} z & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Entonces, para todo $x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} \in \ell^1_{\mathcal{K}}(X)$, se verifica que

$$x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} = \sum_{k\in\mathcal{K}} x_k\delta_k \quad \text{en} \quad \ell^1_{\mathcal{K}}(X).$$

Para establecer esta igualdad basta comprobar que la red $(x(J))_{J\in P_f(\mathcal{K})} \subset \ell^1_{\mathcal{K}}(X)$ converge a $x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}}$ en la topología de $\ell^1_{\mathcal{K}}(X)$, donde

$$x(J) = \sum_{k\in J} x_k\delta_k$$

para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$. Ver [8, 3.3.31 y 3.5.6 a)].

Para cada $J \in P_f(\mathcal{K})$ denotemos por $y(J) = x - x(J) \in \ell^1_{\mathcal{K}}(X)$. Entonces

$$(y(J))_i = \begin{cases} x_k & \text{si } k \notin J, \\ 0 & \text{si } k \in J. \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$ y $\alpha \in \Delta$, puesto que $(x_k)_{k\in\mathcal{K}} \in \ell^1_{\mathcal{K}}(X)$ existe $J_0 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $\sum_{k\in J} |x_k|_\alpha < \epsilon$ para todo $J \in P_f(\mathcal{K})$, con $J_0 \cap J = \emptyset$.

Basta demostrar que, para todo $J_1 \in P_f(\mathcal{K})$ tal que $J_0 \subseteq J_1$, se verifica que

$$|x - x(J_1)|_\alpha = \sum_{k\in\mathcal{K}} |(y(J_1))_k|_\alpha < \epsilon.$$

Teniendo en cuenta (4.1), sea $J \in P_f(\mathcal{K})$, entonces

$$\sum_{k\in J} |(y(J_1))_k|_\alpha = \sum_{k\in J-J_1} |(y(J_1))_k|_\alpha = \sum_{k\in J-J_1} |x_k|_\alpha < \epsilon,$$

puesto que $(J - J_1) \cap J_0 = \emptyset$.

Por tanto

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} |(y(J_1))_k|_\alpha = \sup\left\{\sum_{k\in J} |(y(J_1))_k|_\alpha \, , J \in P_f(\mathcal{K})\right\} < \epsilon,$$

y la igualdad $x = \sum_{k\in\mathcal{K}} x_k\delta_k$ está probada.

Establecemos ahora el resultado al que haciamos referencia en la introducción de esta sección.

Teorema 4.4.1 *Sea A una $\mathcal{B}_0$-álgebra (localmente convexa y metrizable) separable y completa. Entonces existe una $\mathcal{B}_0$-álgebra B, generada topológicamente por dos elementos y existe un isomorfismo $F : A \to B$ que conserva las unidades, si estas existen.*

DEMOSTRACIÓN:

Como A es una B_0–álgebra su topología está determinada por un sistema $\{|\cdot|_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas que verifican las propiedades $B_0 1$ y $B_0 2$.

Podemos suponer que A tiene unidad, que denotaremos por 1. Si este no fuese el caso basta considerar su unitización A_1.

Como A es separable podemos suponer que A está generada topológicamente por un conjunto numerable $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$. Es más, puesto que A es metrizable, podemos suponer que $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ está acotado en A. Si esto no fuese así, podemos construir otro conjunto de generadores topológicos $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$, que sí es acotado en A, de la siguiente forma.

Para cada $n = 1, 2, \ldots$ sea $t_n > 0$ tal que $|g_n|_n \leq t_n$. Pongamos $y_n = \frac{1}{t_n} \cdot g_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Entonces el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ genera topológicamente A.

Como $|y_n|_n \leq 1$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ está acotado, puesto que para todos $k, n = 1, 2, \ldots$ con $n \geq k$ se tiene que

$$|y_n|_k \leq |y_n|_{k+1} \leq \cdots \leq |y_n|_n.$$

Por tanto, para todo $k = 1, 2, \ldots$ se verifica que

$$\max\{|y_1|_k, |y_2|_k, \ldots, |y_n|_k, \ldots\} \leq \max\{|y_1|_k, |y_2|_k, \ldots, |y_k|_k\}.$$

Por último, de ser $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ acotado en A, podemos suponer que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ es absolutamente sumable en A. Para ello basta reemplazar g_n por $g'_n = \frac{1}{2^n} g_n$ para $n = 1, 2, \ldots$

Con estas hipótesis adicionales la prueba del teorema queda de la siguiente forma.

Sea $\mathcal{K} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \ldots\}$. Denotemos por $M_{\mathcal{K}}(A)$ al conjunto de las matrices infinitas $M = [m_{ij}]_{i,j \in \mathcal{K}}$, con elementos del álgebra A, que verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \|M\|_{1,n} &= \sup\left\{\sum_{j\in\mathcal{K}} |m_{ij}|_n,\ i\in\mathcal{K}\right\} < \infty \\ &\text{y} \\ \|M\|_{2,n} &= \sup\left\{\sum_{i\in\mathcal{K}} |m_{ij}|_n,\ j\in\mathcal{K}\right\} < \infty \end{aligned}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ Observemos que si $M = [m_{ij}]_{i,j\in\mathcal{K}} \in M_{\mathcal{K}}(A)$, estamos suponiendo que las familias $(m_{ij})_{i\in\mathcal{K}}$ y $(m_{ij})_{j\in\mathcal{K}}$ son absolutamente sumables, para todo $j, i \in \mathcal{K}$, respectivamente.

Consideremos en $M_{\mathcal{K}}(A)$ la topología localmente convexa definida por el sistema $\{\|\cdot\|_n, n = 1, 2, \ldots\}$ de seminormas, donde

$$\|M\|_n = \max\{\|M\|_{1,n}, \|M\|_{2,n}\},\ M \in M_{\mathcal{K}}(A),\ n = 1, 2, \ldots$$

Con las operaciones usuales de matrices y la topología definida anteriormente, $M_{\mathcal{K}}(A)$ es una $\mathcal{B}_0$–álgebra completa con unidad.

Observemos que cada elemento de $M_{\mathcal{K}}(A)$ define, de forma natural, un operador lineal y continuo en $\ell^1_{\mathcal{K}}(A)$. Si $M = [m_{ij}]_{i,j\in\mathcal{K}} \in M_{\mathcal{K}}(A)$ entonces

$$M : x = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} \in \ell^1_{\mathcal{K}}(A) \to Mx = \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} m_{ij}x_j\right)_{i\in\mathcal{K}} \in \ell^1_{\mathcal{K}}(A),$$

y además se tiene que

$$\|Mx\|_n \leq \|M\|_{1,n+1}\|x\|_{n+1} \leq \|M\|_{n+1}\|x\|_{n+1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Denotemos por

$$\mathcal{K}_1 = \{(i,1) \in \mathcal{K}, i = 1, 2, \ldots\},$$

y sean $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_1$ y $u : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ una biyección.

Consideremos en $M_{\mathcal{K}}(A)$ las matrices

$$U = (u_{km})_{k,m\in\mathcal{K}}, S = (s_{km})_{k,m\in\mathcal{K}}, V = (v_{km})_{k,m\in\mathcal{K}},\ \text{y}\ G = (g_{km})_{k,m\in\mathcal{K}}$$

definidas de la siguiente forma:

$$u_{km} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \mathcal{K}_2, k = u^{-1}(m) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad v_{km} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \mathcal{K}_1, k = u(m) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$s_{km} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = (i,j), k = (i, j+1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad g_{km} = \begin{cases} g_j & \text{si } m = (i,j), k = (i,1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $a \in A$ y $p \in \mathcal{K}$, de las definiciones de las matrices U, V sigue sin dificultad que

$$U(a\delta_p) = \begin{cases} a\delta_{u^{-1}(p)} & \text{si } p \in \mathcal{K}_2 \\ 0 & \text{si } p \notin \mathcal{K}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad V(a\delta_p) = \begin{cases} a\delta_{u(p)} & \text{si } p \in \mathcal{K}_1 \\ 0 & \text{si } p \notin \mathcal{K}_1. \end{cases}$$

Además, si $p = (i,j) \in \mathcal{K}$, de la definición de S y G se tiene que:

$$S(a\delta_p) = a\delta_{(i,j+1)} \quad \text{y} \quad G(a\delta_p) = (g_j a)\delta_{(i,1)}.$$

Definimos ahora la aplicación

$$F : a \in A \to F(a) = \operatorname{diag}(a, a, \ldots, a, \ldots) \in M_{\mathcal{K}}(A).$$

Es claro que F es un isomorfismo, de A en su imagen, que conserva las unidades.

Nuestro propósito es comprobar que se verifica que

$$F(g_n) \in \langle U, V, S, G \rangle$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$ Para ello procedemos de la siguiente forma.

Para cada $n = 1, 2, \ldots$ consideremos el elemento de $\langle U, V, S, G \rangle$ definido por

$$T_n = GS^{n-1}UV + VGS^{n-1}U.$$

y sean $a \in A$ y $p \in \mathcal{K}$. Entonces:

1. Si $p \in \mathcal{K}$ es tal que $p = (i, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} T_n(a\delta_p) &= GS^{n-1}UV(a\delta_p) + VGS^{n-1}U(a\delta_p) \\ &= GS^{n-1}(a\delta_p) = GS^{n-1}\left(a\delta_{(i,1)}\right) \\ &= G\left(a\delta_{(i,n)}\right) = (g_n a)\,\delta_p \\ &= F(g_n)(a\delta_p). \end{aligned}$$

2. Si $p \in \mathcal{K}$ es tal que $p = u(i,1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} T_n(a\delta_p) &= GS^{n-1}UV(a\delta_p) + VGS^{n-1}U(a\delta_p) \\ &= VGS^{n-1}U(a\delta_p) = VGS^{n-1}\left(a\delta_{(i,1)}\right) \\ &= VG\left(a\delta_{(i,n)}\right) = V\left((g_n a)\,\delta_{(i,1)}\right) = (g_n a)\,\delta_p \\ &= F(g_n)(a\delta_p). \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $a \in A$ y $p \in \mathcal{K}$

$$T_n(a\delta_p) = F(g_n)(a\delta_p).$$

Puesto que $F(g_n)$ es un operador lineal y continuo en $\ell^1_{\mathcal{K}}(A)$, teniendo en cuenta la propiedad de convergencia de las secciones de los elementos de $\ell^1_{\mathcal{K}}(A)$ de la observación anterior, deducimos que

$$T_n(x) = F(g_n)(x)$$

para todo $x \in \ell^1_{\mathcal{K}}(A)$, y por tanto, que $T_n = F(g_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Así que

$$F(g_n) \in \langle U, V, S, G\rangle$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Por tanto, al ser $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ generadores topológicos de A se tiene que

$$F(A) \subset \overline{\langle U, V, S, G\rangle}^{M_{\mathcal{K}}(A)} = B.$$

Como el álgebra B está generada topológicamente por un número finito de generadores, podemos aplicar el lema 4.4.1 para establecer el resultado del teorema.

■

4.5 Comentarios al capítulo

Los resultados de las secciones 4.2 y 4.3 se pueden generalizar al marco común de las álgebras localmente pseudoconvexas, siguiendo los pasos de la prueba del teorema 4.3.1, con algunas modificaciones.

Como es lógico, estos cambios son necesarios para trasladar la topología del álgebra original al álgebra $B(S)$. Esto se puede hacer de la siguiente forma.

Si A es un álgebra localmente pseudoconvexa separable su topología se puede definir por un sistema $\{|\cdot|_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ de seminormas $p(\alpha)$–homogéneas, que verifica LPC1 y LPC2.

También podemos suponer que A está generada topológicamente por un conjunto numerable $\{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$.

En este caso, para cada $\alpha = \alpha_0 \in \Delta$ podemos construir una sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subseteq \Delta$, de seminormas $p(\alpha_n)$–homogéneas tales que

$$(1) \quad |abc|_{\alpha_n}^{p(\alpha_{n+1})} \leq |a|_{\alpha_{n+1}}^{p(\alpha_n)} |b|_{\alpha_{n+1}}^{p(\alpha_n)} |c|_{\alpha_{n+1}}^{p(\alpha_n)}$$

$$(2) \quad |a|_{\alpha_n}^{p(\alpha_{n+1})} \leq |a|_{\alpha_{n+1}}^{p(\alpha_n)}$$

para todo $a, b, c \in A$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$

La contrucción de las constantes de 4.3.1 se modifica de la siguiente forma.

Ponemos

$$C_{ij}^{(\Lambda,0)} = D_k^{(\Lambda,0)} = 1 \text{ para } i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Supuesto que ya tenemos construidas las constantes $C_{ij}^{(\Lambda,r)}, D_i^{(\Lambda,r)}$ para todo $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ y $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ definimos, para $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$

$$C_{ij}^{(\Lambda,n+1)} = \max\left\{1, \left[C_{rs}^{(\Lambda,n)}\right]^{\frac{2p(\alpha_{n+1})}{p(\alpha_n)}}, |g_r|_{\alpha_{n+1}}^2, \ 0 \leq r+s \leq 2(i+j)\right\}$$

$$D_k^{(\Lambda,n+1)} = \max\left\{1, \left[C_{rs}^{(\Lambda,n)}\right]^{\frac{p(\alpha_{n+1})}{p(\alpha_n)}}, \ 0 \leq r+s \leq 3k,\right.$$

$$\left[D_p^{(\Lambda,n)}\right]^{\frac{p(\alpha_{n+1})}{p(\alpha_n)}}, \ 0 \leq p \leq 2k\right\}$$

Entonces, para todo $i, j, k, l, n, = 0, 1, 2, \ldots$, se tienen la siguientes desigualdades

$$(a) \quad \left[C_{il}^{(\Lambda,n)}\right]^{p(\alpha_{n+1})} |g_{j+k}|_{\alpha_{n+1}}^{p(\alpha_n)} \leq \left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)} \left[C_{kl}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)}$$

$$(b) \quad \left[C_{k+ij}^{(\Lambda,n)}\right]^{p(\alpha_{n+1})} \leq \left[D_k^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)} \left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)} \quad \text{y}$$

$$\left[C_{ij+k}^{(\Lambda,n)}\right]^{p(\alpha_{n+1})} \leq \left[D_k^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)} \left[C_{ij}^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)}$$

$$(c) \quad \left[D_{i+k}^{(\Lambda,n)}\right]^{p(\alpha_{n+1})} \leq \left[D_i^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)} \left[D_k^{(\Lambda,n+1)}\right]^{p(\alpha_n)}$$

Estas constantes permiten construir el sistema

$$\left\{\|\cdot\|_{(\Lambda,n)}, \ \Lambda \in S(\Delta), \ n = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

de seminormas $p(\alpha_n)$–homogéneas, definidas en $B(S)$ por

$$\|b\|_{(\Lambda,n)} = \sum_{i,k} C_{ik}^{(\Lambda,n)} |f(m_{ik})|_{\alpha_n} + \sum_{q \geq 0} D_q^{(\Lambda,n)} |\lambda_q|^{p(\alpha_n)},$$

y con las desigualdades a), b) y c) establecer la propiedad LPC1 para el sistema de seminormas anterior.

Ahora podemos continuar la prueba como en el teorema 4.3.1 y establecer el siguiente resultado

Sea A un álgebra localmente pseudoconvexa separable y completa. Entonces existe un álgebra localmente pseudoconvexa B con unidad, generada topológicamente por dos elementos y existe un isomorfismo $F : A \to B$.

La hipótesis de separabilidad que hemos utilizado a lo largo de todo el capítulo es necesaria. La razón es que un álgebra topológica generada topológicamente por un conjunto finito S es separable, puesto que las combinaciones lineales finitas de elementos de S y con escalares de la forma $p + qi$, $p, q \in \mathbb{Q}$ forman un conjunto numerable y denso en el álgebra.

Sin embargo, la hipótesis de completitud tiene un caracter técnico y no es esencial. Observemos que en los teoremas 4.2.1, 4.3.1 y 4.4.1 se identifica el álgebra A con una subágebra cerrada de la extensión B. Si el álgebra A no es completa, pasando a la completación (donde se mantiene la separabilidad) y aplicando los teoremas anteriores deducimos que A se identifica con una subálgebra (no cerrada) de la extensión B.

La hipótesis de metrizabilidad que se impone en el teorema 4.4.1 permite mejorar los resultados de las secciones anteriores, en el sentido de que el isomorfismo que se construye en 4.4.1 transforma la unidad del álgebra original en la unidad de la extensión.

Sin embargo, en la prueba de este resultado es esencial el hecho de poder conseguir, gracias a que el álgebra es metrizable, un conjunto acotado de generadores, lo que permite suponer que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ es absolutamente sumable, y por tanto, que la matriz G esté bien definida para construir la extensión $M_K(A)$.

Teniendo en cuenta este comentario, un resultado análogo es cierto para la clase de las álgebras localmente acotadas, puesto que toda álgebra localmente acotada es metrizable. Por otra parte, no es previsible que el resultado sea cierto para la clase de las álgebras localmente convexas, sin la hipótesis adicional de acotación del conjunto de generadores.

Por último, como comentamos en la introducción de este capítulo, si el álgebra original no es conmutativa, el número mínimo de generadores para la extensión es dos. Un solo generador no basta puesto que, en este caso, se tendría automáticamente la conmutatividad del álgebra de partida. En este sentido, no sabemos que ocurre si se le añade la hipótesis de conmutatividad al álgebra de partida. En otras palabras, si suponemos, además de las hipótesis habituales, que el álgebra de partida es conmutativa ¿son ciertos los resultados que hemos presentado en este capítulo cambiando la expresión *"generada por dos elementos"* por *"generada por un elemento"*?

Referencias

[1] R. ARENS, *Linear topological division algebras,* Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 623-630.

[2] R. ARENS, *Inverse–producing extension of normed algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 536-548.

[3] R. ARENS, *Extensions of Banach Algebras,* Pacific J. Math. **10** (1960), 1-16.

[4] R. ARENS, *Ideals in Banach Algebras Extensions,* Studia Math. **31** (1968), 29-34.

[5] R. ARENS; K. HOFFMAN, *Algebraic extension of normed algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956) 203–210.

[6] B. BOLLOBÀS, *Adjointly inverses to commutative Banach algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 165-179.

[7] F.F. BONSALL; J. DUNCAN, *Complete Normed Algebras,* Springer–Verlag (1973).

[8] C. CONSTANTINESCU, *Spaces of Measures,* Walter de Gruyter. Berlin (1984).

[9] A. FERNÁNDEZ; V. MÜLLER, *Renormalizations of Banach and locally convex algebras,* Aparecerá en Studia Math. **96**.

[10] A. FERNÁNDEZ; M. FLORENCIO; P. PAÚL; V. MÜLLER, *Extensions of topological algebras,* Aparecerá en Collect. Math. **40** (1989).

[11] I.M. GELFAND, *Normierte Ringen,* Mat. Sb. (N.S.) **9** (1941), 3–24.

[12] I.M. GELFAND, *Ideale und primäre ideale in normierten ringen,* Mat. Sb. **9** (1941), 41–48.

[13] I.M. GELFAND; M.A. NAIMARK, *Embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space,* Mat. Sb. **12** (1943), 197–213.

[14] I.M. GELFAND; D.A. RAIKOV; G.E. SHILOV, *Commutative normed rings,* New York. Chelsea 1964.

[15] P.R. HALMOS, *A Hilbert Space Problem Book,* Van Nostrand (1967).

[16] H. JARCHOW, *Locally Convex Spaces,* B. G. Teubner, Stuttgart (1981).

[17] M.E. KUCZMA, *On a problem of E. Michael concerning topological divisor of zero,* Colloq. Math. **19** (1968), 295-299.

[18] J.A. LINDBERG, *Extension of Banach algebra norms and applications,* Studia Math. **40** (1973), 83-88.

[19] A. MALLIOS, *Topological Algebras Selected Topics,* North–Holland (1986).

[20] S. MAZUR, *Sur les anneaux linéaires,* C. R. Acad. Sci. Paris **207** (1938), 1025.

[21] E. MICHAEL, *Locally Multiplicative–Convex Topological Algebras,* Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).

[22] V. MÜLLER, *Non–removable ideals in commutative Banach algebras,* Studia Math. **74** (1982), 97-104.

[23] V. MÜLLER, *Removability of ideals in commutative Banach algebras,* Studia Math. **78** (1984), 297-307.

[24] V. MÜLLER, *Embeddings of separable Banach star algebras into a Banach star algebra with one generator,* Collect. Math. **39** (1988), 201-208.

[25] M.A. NAIMARK, *Normed Rings,* Erven. P. Noordhoff, Ltd., Groningen, Netherlands, 1960.

[26] K.C. O'MEARA; C.I. VINSONHALER; W.J. WICKLESS, *Identity–preserving embeddings of countable rigns into 2–generator rings,* Rocky Mountain J. Math. **19**, 4 (1989), 1095-1105.

[27] C.E. RICKART, *General theory of Banach algebras,* New York. Van Nostrand (1960).

[28] F. RIESZ, *Oeuvres Completes,* Paris, Gauthier–Villars, (1960).

[29] S. ROLEWICZ, *Metric Linear Spaces,* Warszawa (1972).

[30] G.E. SHILOV, *On normed rings possessing one generator,* Mat. Sb. **21** 963, (1947), 25-47.

[31] W. ŻELAZKO, *Metric Generalizations of Banach Algebras,* Rozprawy Mat. **47** (1965).

[32] W. ŻELAZKO, *On permanently singuar elements in commutative m–convex locally convex algebras,* Studia Math. **37** (1971), 181-190.

[33] W. ŻELAZKO, *Selected Topics in Topological Algebras,* Aarhus University. Lecture Notes No **31** (1971).

[34] W. ŻELAZKO, *On a certain class of non–removable ideals in Banach algebras,* Studia Math. **44** (1972), 87-92.

[35] W. ŻELAZKO, *Concerning a problem of Arens in commutative Banach algebras,* Collect. Math. **30** (1974), 127-131.

[36] W. ŻELAZKO, *Concerning non-removable ideals in commutative m–convex algebras*, Demonstratio Math. **11** (1978), 239-245.

[37] W. ŻELAZKO, *A caracterization of LC–non–removable ideals in commutative Banach algebras*, Pacific J. Math. **87**, 1 (1980), 241-248.

[38] W. ŻELAZKO, *On ideals theory in Banach and topological algebras*, Monografias del Instituto de Matemáticas. No **15**. Universidad Nacional Autónoma de Mexico. (1981).

[39] W. ŻELAZKO, *On non–removable ideals in commutative locally convex algebras*, Studia Math. **77** (1983), 133-154.

[40] W. ŻELAZKO, *On permanent radicals in commutative locally convex algebras*, Studia Math. **75** (1983), 265-272.

[41] W. ŻELAZKO, *Topological divisor of zero, their applications and generalization*, Seminari di Geometria. 1985. Università degli Studi di Bologna.

[42] W. ŻELAZKO, *Extending seminorms in locally pseudoconvex algebras*, Preprint.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Antonio Fernández Carrión

titulada Extensiones de álgebras topológicas

acordó otorgarle la calificación de Apto "cum laude"

Sevilla, 28 de Noviembre 1990

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

Juan Arias de Reyna M.

Angel Rodríguez

El Presidente

El Secretario,

El Doctorado,

Antonio Fernández