UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

ESPACIO DE FUNCIONES INTEGRABLES RESPECTO DE UNA MEDIDA VECTORIAL CON VALORES EN UN ESPACIO DE FRÉCHET

FCO. JOSÉ NARANJO NARANJO
TESIS DOCTORAL

163 44

Memoria presentada por Fco. José Naranjo Naranjo para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº del Director:

Fdo: Fco. José Naranjo Naranjo.

Fdo: Antonio Fernández Carrión.

Sevilla, Julio de 1997

Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todos y cada uno de los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II por el ánimo y apoyo recibidos.

En particular, debo especial gratitud al profesor Dr. D. Pedro J. Paúl, que colaboró, supervisó y corrigió, de forma desinteresada, todos los trabajos que surgieron de esta memoria, así como a los profesores Dres. D. Manuel Contreras y D. Fernando Mayoral, por las sugerencias recibidas.

También quiero agradecer a todos los profesores de Matemáticas de la Escuela Politécnica, la colaboración en trabajos que no les correspondía para facilitarme la labor de investigación. En particular, estoy muy agradecido a los profesores Dr. D. Jorge López y Dña. Ana B. Sánchez, que me ayudaron en mi lucha personal con el ordenador.

Pero sobre todo, debo gratitud inmensa al profesor Dr. D. Antonio Fernández, director de esta memoria, por su dedicación, sus enseñanzas y por la confianza que depositó en mí. Sin su ayuda constante, su paciencia y su optimismo no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Por último, reconocer, con admiración y cariño, la labor paciente de María Rosa, su apoyo y su silenciosa comprensión en unos momentos en los que las responsabilidades familiares no permitían una dedicación tan intensa al estudio como la que requiere un trabajo de investigación.

A María Rosa y Paco

Índice

Introducción iii

Terminolgía y Notación xvii

1 Propiedades del espacio $L^1(\nu, X)$. 1

1.1 Integración de funciones escalares. 1

1.2 Completitud. Propiedad de Lebesgue. 4

1.3 Generación débil compacta. 10

1.4 Átomos. 12

1.5 Separabilidad. 17

1.6 Un teorema de representación. 20

1.7 Completitud débil sucesional. 31

2 Espacios de Fréchet con norma continua. 37

2.1 El teorema de Rybakov en espacios de Fréchet. 37

2.2 Elementos del dual de $L^1(\nu, X)$. 45

2.3 Convergencia débil en $L^1(\nu, X)$ 52

2.4 Funcionales estrictamente positivos. 60

2.5 Otro teorema de representación. 64

2.6 La propiedad (u) de Pełczynski. 70

3 ¿Cuándo $\mathrm{L}^1(\nu, X)$ es AL- o AM-espacio? 77

3.1 Sobre los AL-espacios de Fréchet. 77

3.2 ¿Cuándo $L^1(\nu, X)$ es AL-espacio? 82

3.3 Sobre los AM-espacios de Fréchet. 95

4 Operadores en $L^1(\nu, X)$. **111**

4.1 L-débil compacidad en $L^1(\nu, X)$. 111

4.2 Operadores con valores en $L^1(\nu, X)$. 121

4.3 Operadores definidos en $L^1(\nu, X)$. 130

Referencias **137**

Introducción

En 1902 Lebesgue crea una teoría de integración que permite integrar, respecto de una medida positiva numerablemente aditiva, una amplia clase de funciones escalares. Esta teoría de integración ha sido generalizada en dos direcciones fundamentalmente.

Por una parte, en 1933 Bochner desarrolla una teoría de integración que permite integrar funciones vectoriales con valores en un espacio de Banach, respecto de una medida positiva numerablemente aditiva. En 1958 Dunford y Schwartz desarrollan una teoría de integración para funciones vectoriales con valores en un espacio de Banach, respecto de una medida positiva finitamente aditiva. La integración de funciones vectoriales con valores en un espacio localmente convexo, respecto de una medida positiva numerablemente aditiva, es realizada por diversos autores, entre los que destacamos: Bourbaki, Blondia, Thomas, Gilliam.

Por otra parte, en 1955 Bartle, Dunford y Schwartz [10] desarrollan una teoría de integración que permite integrar funciones escalares, respecto de medidas numerablemente aditivas con valores en un espacio de Banach. Esta teoría de integración se desarrolla en relación con la teoría espectral de operadores. En particular, los autores antes citados, la aplican al estudio de operadores continuos $T : \mathcal{C}(K) \longrightarrow X$ definidos en un espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto K con valores en un espacio de Banach X. Demuestran [10, Teorema 3.2] que si T es un operador débil compacto, entonces existe un única medida vectorial numerablemente aditiva ν, definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de K y con valores en el espacio de Banach X tal que

$$T(f) = \int_K f d\nu.$$

Las funciones integrables, son aquellas funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ para las que existe una sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_n$ que converge puntualmente a f y tales que $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)_n$ converge en X para cada conjunto medible A. Es claro que esta integral generaliza la integral de Lebesgue de funciones medibles respecto de una medida positiva. El Teorema 3.2 de [10], antes citado, no es más que una generalización del Teorema de Representación de Riesz. Observemos que esta definición de integral es (formalmente) simétrica de la definición de integral de funciones vectoriales, respecto de medidas positivas, dada por Bochner.

En 1965, Gould [44] generaliza la integral de Bartle, Dunford y Schwartz. En este trabajo estudia la integración de funciones escalares respecto de medidas vectoriales finitamente aditivas con valores en un espacio de Banach.

En 1970, Thomas [77] desarrolla, en relación con la teoría espectral de operadores lineales, una teoría de integración de funciones escalares, respecto de medidas de Radon con valores en un espacio localmente convexo.

Lewis, a principios de los años 70, en [57] y [58], estudia operadores definidos sobre espacios de funciones continuas que toman valores en un espacio localmente convexo X. Introduce, para una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en X, una definición de integral que le permite representar a dichos operadores. Con este nuevo concepto, las funciones integrables son aquellas funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifican $f \in L^1(x'\nu)$ para cada $x' \in X'$ y para las que existe un elemento $x_A \in X$ verificando $x'(x_A) = \int_A f d(x'\nu)$, para cada conjunto medible A. Dicha definición recuerda a la integral de Pettis para funciones vectoriales respecto de una medida positiva. Lewis demuestra en [57, Teorema 2.4] que para espacios sucesionalmente completos la integral introducida por Bartle, Dunford y Schwartz y la estudiada por él mismo coinciden.

En 1975, Kluvánek y Knowles publican el libro "*Vector measures and control systems*" donde, siguiendo la definición de integral de Lewis, realizan un estudio sistemático del espacio de funciones escalares integrables, respecto de una medida vectorial con valores en un espacio localmente convexo. Los resultados más importantes que obtienen están relacionados con el estudio de la completitud de dicho espacio. Introducen el concepto de medida vectorial cerrada y prueban que, bajo condiciones de completitud muy generales para el espacio X, el espacio de funciones integrables, con la topología de la convergencia uniforme de las integrales indefinidas, es completo si y sólo si la medida vectorial es cerrada [53, Teoremas IV.4.1 y IV.7.1].

En la primera mitad de los años 90, Curbera en [21], [22] y [23] realiza un estudio profundo del espacio de funciones integrables, respecto de una medida vectorial con valores en un espacio de Banach. El trabajo realizado, surge, inicialmente, como respuesta a una pregunta planteada por Diestel acerca de si para este espacio también se verifica el análogo del Teorema de Talagrand sobre la completitud débil sucesional del espacio $\mathrm{L}^1(\mu, X)$, de funciones Bochner integrables en X respecto de una medida positiva μ, cuando el espacio de Banach X es débil sucesionalmente completo.

Posteriormente el mismo autor estudia la relación que existe entre la medida vectorial ν, el espacio de Banach X y el espacio de funciones integrables $L^1(\nu, X)$. En dicho estudio, Curbera combina de forma inteligente la teoría de espacios de Banach, la teoría de medidas vectoriales y la teoría de retículos de Banach, obteniendo importantes resultados sobre el espacio de las funciones reales integrables, respecto de una medida vectorial. A su vez, las propiedades que obtiene del espacio $L^1(\nu, X)$, le permite aportar nuevos resultados sobre la teoría de operadores en retículos de Banach [21, Teoremas

9 y 10].

Dos hechos son básicos en el estudio que Curbera realiza del espacio $L^1(\nu, X)$. Por una parte, el Teorema de Rybakov [74], que afirma que cualquier medida vectorial numerablemente aditiva ν, definida en una σ-álgebra Σ y con valores en un espacio de Banach X, tiene una medida de control del tipo $|x'\nu|$ para algún $x' \in X'$, donde $|x'\nu|$ es la variación de la medida escalar $x'\nu$. Por otra, el hecho de que el espacio $L^1(\nu, X)$ sea un retículo de Banach, orden continuo y con unidad débil [21, Teorema 1], lo cual le permite representar al espacio $L^1(\nu, X)$ como un espacio de Banach de funciones respecto de un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, siendo λ del tipo $|x'\nu|$. Este último resultado proporciona una información importante sobre el dual del espacio $L^1(\nu, X)$ a través del α-dual de Köthe del espacio de Banach de funciones. Además, permite probar que cualquier retículo de Banach orden continuo y con unidad débil es orden isomorfo al espacio $L^1(\nu, X)$ para alguna medida ν [21, Teorema 8], resultado clave para las aplicaciones.

En 1993 Okada [65], siguiendo ideas de Egghe [34], obtiene una representación para elementos del dual del espacio $L^1(\nu, X)$ sin usar la representación como α-dual de un espacio de Banach de funciones, utilizada por Curbera. Esta representación es usada para el estudio de la convergencia débil en el espacio $L^1(\nu, X)$, obteniendo el mismo resultado que Curbera [65, Corolario 16].

En 1994, Okada y Ricker en [66] y [67], realizan nuevas aportaciones al estudio del espacio $L^1(\nu, X)$. En los trabajos citados, los autores analizan el comportamineto de la aplicación integración $I_\nu : L^1(\nu, X) \longrightarrow X$, dando condiciones bajo las que dicha aplicación, que siempre es continua, resulta ser débil compacta, compacta, nuclear, etc...

Otros aspectos del espacio $L^1(\nu, X)$ han sido estudiados por diversos autores. En los años 80, en relación con la teoría espectral de operadores, destacan los trabajos realizados por Dodds, Pagter y Ricker [29], [30], [31], [69] y [70].

El punto de partida de nuestro trabajo ha sido el realizado por Curbera. Si se tienen en cuenta los trabajos de Lewis y Kluvánek y Knowles, se observa que los mejores resultados sobre la teoría de integración de funciones escalares, respecto de medidas vectoriales con valores en un espacio localmente convexo, se obtienen cuando el espacio X, en el que la medida toma sus valores, es metrizable y completo. Por otra parte, como se pone de manifiesto en [53, página 101], la solución de muchos problemas de la Física Matemática viene dada en términos de transformaciones integrales, que pueden ser interpretadas como integración respecto de una medida vectorial. En [53], se dedica una buena parte del capítulo V a estudiar dichos problemas. En muchos de los ejemplos allí estudiados [53, Ejemplos V.7.2, V.7.3 y V.7.4], las medidas que aparecen toman sus valores en espacios de Fréchet. Esto nos ha llevado a preguntarnos: ¿Cuáles de los resultados obtenidos acerca del espacio $L^1(\nu, X)$ siguen siendo válidos cuando el espacio en el que la medida toma sus valores es un espacio de Fréchet?

Un problema aparece de forma inmediata a la hora de realizar dicho estudio. El teorema de Rybakov no es cierto, en general, para espacios de Fréchet (Ejemplos 2.1 y 2.2 de esta memoria). Esto nos ha obligado, por una parte, a realizar un estudio detallado del teorema de Rybakov en espacios de Fréchet, llegando a caracterizar los espacios de Fréchet que verifican dicho teorema (Teorema 2.4) y, por otra parte, a obtener, en algunos casos, nuevas técnicas de prueba para resultados que sí se consevan cuando cambiamos el espacio de Banach por el espacio de Fréchet. Por ejemplo, el espacio $L^1(\nu, X)$ es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue (orden continuo en la terminología de retículos de Banach) y con unidad débil (Teorema 1.7), también es cierto que cualquier retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil es reticularmente isomorfo a un espacio $L^1(\nu, X)$ para una determinada medida ν (Teorema 1.22). Vemos pues, que hay aspectos básicos del espacio $L^1(\nu, X)$ que se mantienen, aunque las técnicas de pruebas son distintas.

También, siguiendo la linea de trabajo de Curbera en el estudio del espacio $L^1(\nu, X)$, se entrelazan las teorías sobre medidas vectoriales con valores en un espacio localmente convexo y la de retículos localmente convexo-sólidos, notablemente menos desarrolada que la de retículos de Banach. Ello nos ha obligado a plantearnos cuestiones que están bien establecidas para los retículos de Banach y de las que no sabíamos si eran ciertas para retículos de Fréchet.

Por otra parte, siguiendo las ideas de Kakutani, hemos obtenido teoremas que permiten representar ciertos retículos de Fréchet (Teorema 1.22), por medio de espacios $L^1(\nu, X)$. De esta forma ha sido posible obtener resultados sobre la teoría general de retículos de Fréchet a través de propiedades conocidas de $L^1(\nu, X)$. Resultados de este tipo han sido probados por Bade [9] y Curbera [21].

La Memoria consta de cuatro capítulos y cada uno de ellos de un número variable de secciones. Pasamos a continuación a realizar un breve resumen de los mismos.

El capítulo primero se dividide en siete secciones. En la primera se recogen los resultados básicos sobre teoría de integración de funciones escalares, respecto de una medida vectorial con valores en un espacio de Fréchet, que serán de uso constante a lo largo de la memoria.

En la sección segunda se introduce el espacio $L^1(\nu, X)$. Se prueba que es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil (Teorema 1.7). Kluvánek y Knowles [53, Teoremas IV.4.1 y IV.7.1] probaron que el espacio $L^1(\nu, X)$ es completo. En el Teorema 1.5 presentamos una prueba nueva de la completitud, más sencilla y directa, que la dada por dichos autores.

De la sección tercera a la quinta se estudian diversas propiedades del espacio $L^1(\nu, X)$: generación débil compacta, átomos y separabilidad, usando, esencialmente, las técnicas que Curbera utiliza para los espacios de Banach. El espacio $L^1(\nu, X)$ es de generación débil compacta, independientemente de cuál sea la medida ν y el espacio de Fréchet X (Teorema 1.10). La posibilidad de que el espacio sea un retículo atómico depende de la medida: $L^1(\nu, X)$ es un retículo atómico si y sólo si la medida es puramente atómica (Teorema 1.13). En este caso, el espacio $L^1(\nu, X)$ será un espacio de sucesiones (Proposición 1.16). En el Teorema 1.17 se prueba que $L^1(\nu, X)$ será un espacio Montel sólo si la medida es puramente atómica. La separabilidad del espacio depende, esencialmente, de la medida. Se siguen las técnicas de Saks y se prueba, en la Proposición 1.18, que $L^1(\nu, X)$ es separable si y sólo si lo es el espacio métrico asociado $[\Sigma, d_\nu]$. Cuando el espacio $L^1(\nu, X)$ es separable, el espacio X sobre el que se define la medida puede considerarse separable (Proposición 1.19).

En la sección sexta se responde a la pregunta: ¿Qué retículos de Fréchet se obtienen como espacios de funciones escalares e integrables respecto de una medida vectorial con valores en un espacio de Fréchet? Identificamos esta clase como la de los retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil (Teorema 1.22). Este resultado también fue obtenido por Curbera, para retículos de Banach, pero la técnica de prueba es esencialmente distinta. En nuestro caso se usan las ideas que Kakutani desarrolla para probar que los retículos de Banach AL-espacios son isomorfos a espacios de funciones escalares integrables respecto de una medida positiva. El Teorema 1.22 es la herramienta clave para las aplicaciones del espacio $L^1(\nu, X)$ a la teoría general de retículos de Fréchet. Una primera aplicación de este teorema permite probar que la clase de los espacios de Fréchet con base incondicional coincide con la clase de los retículos de Fréchet atómicos, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil (Teorema 1.24).

En la última sección del primer capítulo se estudia la completitud débil sucesional. Se demuestra que esta propiedad se traslada del espacio X al espacio $L^1(\nu, X)$ independientemente de la medida (Corolario 1.26). Para un retículo de Banach E, es conocido que E es débil sucesionalmente completo si y sólo si E no tiene una copia de c_0 (el espacio de las sucesiones nulas). Los resultados de esta sección, combinados con el Teorema 1.22, permiten extender dicho resultado a retículos de Fréchet (Teorema 1.28).

Ya hemos mencionado que el teorema de Rybakov no es cierto, en general, para espacios de Fréchet. En el capítuo segundo de esta memoria nos hemos planteado el estudio de los espacios de Fréchet que verifican dicho teorema. En la primera sección (Teorema 2.4) se desarrolla dicho estudio y se caracterizan los espacios de Fréchet para los que es cierto el teorema de Rybakov: *son aquellos que admiten una norma continua.* Los espacios de Fréchet que admiten una norma continua fueron caracterizados por Bessaga y Pełzcynski, como aquellos que no tienen una copia de w (espacio de todas las sucesiones escalares). Hemos comprobado que esta propiedad la hereda el espacio $L^1(\nu, X)$ del espacio X. Es decir, si X no tiene una copia de w, entonces $L^1(\nu, X)$ tampoco la tiene (Teorema 2.5). Walsh [81] mejoró el resultado de Rybakov, probando que el conjunto de elementos $x' \in X'$, para los $|x'\nu|$ es una medida de control de ν es, de hecho, denso en X', cuando se dota a X' de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de X, es decir, la topología fuerte. El Teorema 2.7 generaliza el resultado de Walsh a espacios de Fréchet. Nuestro trabajo se realiza sobre espacios vectoriales reales. Recientemente, Ricker [72, Teorema 2] ha extendido el Teorema 2.4 de nuestra memoria a espacios vectoriales complejos y lo ha usado magistralmente para probar la existencia de funcionales de Bade para álgebras Booleanas de proyecciones completas en espacios de Fréchet.

Una vez que tenemos identificados los espacios para los que existe una medida de control de Rybakov se extraen importantes consecuencias para tales espacios. No es conocida ninguna representación del dual del espacio $L^1(\nu, X)$. Sin embargo, Okada [65, Teorema 8] da una representación de elementos del dual de $L^1(\nu, X)$ en términos de la medida ν y del espacio de Banach X. Una vez obtenida dicha representación es usada para dar condiciones que garanticen la convergencia débil en el espacio $L^1(\nu, X)$. La sección segunda del capítulo segundo se dedica a este problema. Comprobamos que la representación que da Okada para los elementos del dual del espacio $L^1(\nu, X)$, cuando X es un espacio de Banach, es válida también cuando el espacio X es un espacio de Fréchet con norma continua (Teorema 2.11).

En [22] Curbera introduce la propiedad de la *convergencia casi-débil* para redes acotadas, con objeto de dar condiciones más suaves que implicasen la convergencia débil en $L^1(\nu, X)$. En la sección tercera se siguen las técnicas de Okada, en el estudio de la convergencia casi-débil en el espacio $L^1(\nu, X)$, cuando X admite norma continua. Se demuestra que si el espacio $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia complementada de l_1 (el espacio de las sucesiones absolutamente sumables), entonces las redes acotadas casi débil nulas coinciden con las débil-nulas (Corolario 2.16). Cuando el espacio X tiene la propiedad de Schur, las sucesiones casi-débil y las débil nulas de $L^1(\nu, X)$ coinciden (Proposición 2.17).

Moore [64, Teoremas 1 y 5] estudia la existencia de funcionales estrictamente positivos en relación con la existencia de normas reticulares estrictamente monótonas. Es conocido que para retículos de Banach con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil siempre existen funcionales estrictamente positivos. En la sección cuarta de este capítulo se ven ejemplos de retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil para los que no existen funcionales estrictamente positivos. A continuación se caracterizan los retículos de Fréchet con unidad débil, con la propiedad de Lebesgue y que admiten norma continua, como aquellos para los que existen funcionales estrictamente positivos (Teorema 2.16).

Los retículos de Banach con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil admiten una representación como espacios de Banach de funciones [59, Teorema 1.b.14]. Una herramienta básica en la demostración de este resultado es la existencia de funcionales estrictamente positivos. Como hemos comentado en el párrafo anterior, en los retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue, con unidad débil y que admiten norma continua se dispone de ella. Ésto nos ha llevado a preguntarnos si la representación como espacio de Banach de funciones, era válida para estos espacios. Vemos en el Teorema 2.23 que la respuesta es afirmativa. Las herramientas necesarias para la demostración de este resultado conforman la sección quinta.

La última sección de este capítulo se dedica al estudio de la conocida propiedad (u) introducida por Pełczynski en [68] para el estudio de la convergencia débil en los espacios de Banach. Probó que todo espacio de Banach con base incondicional tiene la propiedad (u). Tzafriri [80], extendió el resultado a retículos de Banach con la propiedad de Lebesgue. Es conocido, que todo espacio de Banach con base incondicional puede dotarse de estructura de retículo de Banach con la propiedad de Lebesgue. Díaz [24] ha probado que los espacios de Fréchet con base incondicional pueden dotarse de estructura de retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue. Si comparamos con el resultado obtenido por Tzafriri, el siguiente paso es preguntarse ¿Los retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue tiene la propiedad (u)? La respuesta es afirmativa. De hecho, hemos probado que en los retículos de Fréchet σ-orden completos, la propiedad (u) y la propiedad de Lebesgue son equivalentes (Teorema 2.27), hecho que era conocido para espacios de Banach.

Kakutani y Bohnenblust estudian la clase de los AL y AM-espacios de Banach en [48], [49] y [13]. Prueban que un AL-espacio es reticularmente isométrico a un espacio del tipo $L^1(\mu)$ y que un AM-espacio lo es a uno del tipo $\mathcal{C}(K)$. Los AL-espacios han sido generalizado a espacios localmente convexo por Wong [83]. Por otra parte, no todos los espacios $L^1(\nu, X)$ son AL- o AM-espacios. En el tercer capítulo de la memoria estudiamos cuándo $L^1(\nu, X)$ es un AL- o un AM-espacio.

En la primera sección se han generalizado algunos resultados, conocidos para retículos de Banach, de los que no hemos encontrado referencia en la bibliografía consultada y que serán necesarios en las secciones siguientes. En concreto, hemos probado que cuando E es un AL-espacio de Fréchet, los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados y orden acotados de E', coinciden (Proposición 3.4). Por otra parte, es conocido que los operadores regulares entre retículos de Fréchet son continuos. El recíproco, en general, no es cierto. Hemos probado que los operadores continuos son regulares, cuando el dominio y el rango del operador son AL-espacios de Fréchet (Proposición 3.6).

En la sección segunda introducimos un nuevo espacio de (clases de) funciones integrables. El espacio $L^1(|\nu|)$ (límite proyectivo de la familia de espacios de Banach $(L^1(|\nu|_k))_k$). Este espacio no es relevante en el estudio general del espacio $L^1(\nu, X)$, pero sí es importante cuando se investiga la posibilidad de que el espacio $L^1(\nu, X)$ sea AL-espacio. Probamos, entre otras equivalencias, que $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio si y sólo si la aplicación identidad $I : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu, X)$ es un isomorfismo reticular (Teorema 3.10). En este caso la variación de la medida ν es acotada. Ya hemos comentado que Kakutani probó que un AL-espacio es reticularmente isomorfo a un $L^1(\mu)$ para una determinada medida positiva μ. Cuando el AL-espacio tiene unidad débil, la medida μ es finita. Para un AL-espacio de Fréchet con unidad débil, hemos probado que es orden isomorfo a un límite proyectivo de una sucesión de espacios $(L^1(\mu_k))_k$, donde cada medida μ_k es una medida positiva finita (Teorema 3.11). Schaefer [76, Corolario 8.8] utiliza la representación de Kakutani para probar que los AL-espacios de Banach son espacios débil sucesionalmente completos. El resultado anterior, junto a otros vistos en esta memoria, nos permiten afirmar lo mismo para AL-espacios de

Fréchet (Corolario 3.12). Probamos que, cuando la medida ν toma valores en un AL-espacio E, el operador integración es regular si y sólo si $L^1(\nu, E)$ es AL-espacio (Teorema 3.13). Acabamos esta sección con otro teorema de representación. Si E es un AL-espacio con unidad débil entonces es reticularmente isomorfo al espacio $L^1(\mu, w)$ donde μ es una medida positiva con valores en el espacio w de todas las sucesiones reales (Teorema 3.16).

En la sección tercera se responde a la pregunta ¿Puede ser $L^1(\nu, X)$ un AM-espacio? Igual que en el caso de los AL-espacios, la teoría general no está muy desarrollada. En los AM-espacios de Banach es muy importante el hecho de que el espacio posea una unidad fuerte, es decir, *un elemento que genera reticularmente todo el espacio.* Hemos probado que no existen retículos de Fréchet con unidad fuerte, salvo que sean retículos de Banach (Proposición 3.19). En el Teorema 3.22 establecemos que un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue debe ser reticularmente isomorfo al espacio de Köthe $\lambda_0(I, A)$. Este teorema nos permite dar respuesta a la pregunta planteada antes: $L^1(\nu, X)$ es AM-espacio si y sólo si es reticularmente isomorfo a $\lambda_0(\mathbb{N}, A)$, para alguna matriz de Köthe A (Teorema 3.23).

El capítulo cuarto se dedica al estudio de operadores con dominio en $L^1(\nu, X)$ así como al de operadores con rango en $L^1(\nu, X)$. Previamente hemos estudiado la compacidad reticular en el espacio $L^1(\nu, X)$. Los conjuntos L-débil compactos fueron introducidos por Meyer-Nieberg [63] para retículos de Banach. Hemos extendido este concepto a retículos de Fréchet. Después, hemos caracterizados los conjuntos L-débil compactos del espacio $L^1(\nu, X)$, como aquellos que son equi-integrables (Teorema 4.6). Si tenemos en cuenta que para una medida positiva λ, los conjuntos L-débil compactos y los relativamente débil compactos del espacio $L^1(\lambda)$ coinciden, el teorema citado anteriormente puede entenderse como una generalización del resultado de Dunford-Pettis [27, Teorema VII.13(bis)]. Cuando el espacio X tiene la propiedad de Schur, los conjuntos L-débil compactos y los relativamente débil compactos de $L^1(\nu, X)$ coinciden (Corolario 4.7). De este corolario, se deduce que si X tiene la propiedad de Schur, entonces $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad débil de Schur (Corolario 4.8). Como consecuencia de los resultados de L-débil compacidad hemos obtenido algunas propiedades del rango de una medida vectorial. Es conocido que el rango de una medida vectorial numerablemente aditiva es un conjunto relativamente débil compacto. Cuando la medida toma sus valores en un retículo de Fréchet y es positiva, se puede precisar más. En este caso, la envolvente sólida del rango es un conjunto L-débil compacto (Teorema 4.9).

En la segunda sección se estudian operadores definidos sobre $L^1(\nu, X)$. Se utiliza la técnica clásica de asociar a cada operador un medida con valores en un espacio de operadores y estudiar las propiedades del operador a través de las propiedades de la medida. A continuación, se estudia la relación que hay entre la existencia de copias de l_∞ (el espacio de las sucesiones acotadas) en $L_b(Y, E)$, siendo Y un DF-espacio y E un retículo de Fréchet, y la coincidencia de este espacio con algún ideal de operadores compactos. En concreto, se prueba que si E es un retículo de Fréchet atómico, con la propiedad de Lebesgue, Y un DF-espacio y $L_b(Y, E)$ no tiene copia l_∞, entonces los operadores continuos de Y en E son compactos (Teorema 4.17), generalizando así un resultado de Curbera, que contiene como caso particular un conocido teorema de Kalton [47, Teorema 6]. Resultados similares han sidos estudiados en un contexto más general por Bonet, Domanski, Lindström y Ramanujan [14],[15] y [17].

En la última sección se estudian operadores definidos en $L^1(\nu, X)$. Se demuestra que, bajo ciertas condiciones sobre la medida, los operadores definidos en $L^1(\nu, X)$, con valores en un espacio de Fréchet Y, que sean débiles compactos, transforman conjuntos L-débil compactos en conjuntos relativamente compactos (Teorema 4.24). Este teorema nos permite demostrar, que si X es un espacio de Fréchet con la propiedad de Schur y admite norma continua, entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (Corolario 4.25). Grothendieck había probado que los AL-espacios de Banach tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Este resultado podemos extenderlo a los AL-espacios de Fréchet con unidad débil y norma continua (Corolario 4.26).

Las secciones primera y segunda del capítulo segundo constituyen el trabajo [36]. La sección sexta del capítulo primero y las secciones cuarta, quinta y sexta del capítulo segundo conforman el trabajo [37]. El trabajo [38] se ha realizado con el capítulo cuarto. Todos estos trabajos han sido realizados en colaboración con A. Fernández, director de esta memoria. La sección sexta del capítulo primero es una parte del trabajo [35] realizado en colaboración con A. Fernández, F. Mayoral y P.J. Paúl.

Terminología y Notación

En esta memoria es estudian espacios de funciones reales, integrables respecto de una medida vectorial con valores en un espacio de Fréchet. Los espacios que se obtienen poseen estructuras de retículos de Fréchet. Confluyen, de forma natural, resultados de la teoría general de espacios localmente convexos, de la teoría de medidas vectoriales, con valores en un espacio localmente convexo y de la teoría de espacios localmente convexo-sólidos.

Espacios localmente convexos.

Para los conceptos y resultados de la teoría de espacios localmente convexos, nos remitimos a las monografías de Jarchow [46], Köthe [54] y Schaefer [75].

Durante toda la memoria X será un espacio de Fréchet real, es decir, un espacio localmente convexo, metrizable y completo.

El conjunto de todos los entornos del origen de X se denotará por $\mathcal{U}_0(X)$. El funcional de Minkowski de un entorno del origen U se denotará por p_U.

$\mathcal{P}(X)$ denotará una familia de seminormas continuas que genera la topología de X. Si $p \in \mathcal{P}(X)$, $U_p = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$. Si $(p_n)_n$ es una sucesión creciente de seminormas que genera la topología de X, entonces U_{p_n}, se denotará, simplemente, por U_n.

El dual topológico de X se denotará por X'. La polar de un conjunto U se denotará por U°.

Ocasionalmente trabajaremos con espacios localmente convexos arbitrarios. En esos casos, $\sigma(Y, Y')$ y $\beta(Y, Y')$ indicarán, respectivamente, las topologías débil y fuerte sobre Y.

Medidas vectoriales.

Para los conceptos y resultados de la teoría general de medidas vectoriales nos remitimos a las monografías de Diestel y Uhl [27] y de Kluvánek y Konwles [53].

Un espacio medible es un par (Ω, Σ), donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío y Σ es una σ-álgebra de partes de Ω. Los elementos de Σ se llaman conjuntos medibles.

Para un conjunto $A \in \Sigma$, se denotará con Σ_A al conjunto

$$\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$$

Dado un espacio de Fréchet X y un espacio medible (Ω, Σ), una función de conjunto

$$\nu : \Sigma \longrightarrow X,$$

diremos que es una medida vectorial:

1. *Finitamente aditiva*, si $\nu(\emptyset) = 0$ y $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$, para cualesquiera A y B conjuntos medibles disjuntos.

2. *Fuertemente aditiva*, si para cualquier sucesión disjunta $(A_n)_n$ de conjuntos medibles la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

converge en X.

3. *Numerablemente aditiva*, si para cualquier sucesión disjunta $(A_n)_n$ de conjuntos medibles se verifica

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

donde la convergencia de la serie es en la topología de X.

Las medidas numerablemente aditivas son fuertemente aditivas, y el rango de éstas es un conjunto acotado de X. Salvo que se especifique lo contrario, todas las medidas vectoriales que aparezcan en esta memoria serán numerablemente aditivas.

Para una medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ y un entorno U del origen de X, la U-semivariación de ν es la función de conjunto $\|\nu\|_U : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\|\nu\|_U(A) = \sup\{|x'\nu|(A) : x' \in U^\circ\},$$

donde $|x'\nu|$ es la variación de la medida escalar

$$x'\nu(A) = \langle x', \nu(A)\rangle, \quad A \in \Sigma.$$

Las semivariaciones $\|\nu\|_U$ son crecientes, numerablemente subaditivas y verifican

$$\sup\{p_U(\nu(B)) : B \in \Sigma_A\} \leq \|\nu\|_U(A) \leq 2\sup\{p_U(\nu(B)) : B \in \Sigma_A\} \quad (0.1)$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y cualquier $A \in \Sigma$.

Un conjunto medible $A \in \Sigma$ diremos que es ν-nulo si $\|\nu\|_U(A) = 0$, para todo $U \in \mathcal{U}_0(X)$.

Las desigualdades (0.1) permiten afirmar que $A \in \Sigma$ es ν-nulo si y sólo si $\nu(B) = 0$, para todo conjunto medible $B \subset A$.

Una medida positiva, finita $\lambda : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ es una medida de control de la medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ si verifica:

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \|\nu\|_U (A) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\|\nu\|_U(A)\to 0} \lambda(A) = 0, \quad U \in \mathcal{U}_0(X). \tag{0.2}$$

La condición (0.2) equivale a decir que la medida vectorial y la medida de control tienen los mismos conjuntos nulos.

Kluvánek y Knowles [53, Corolario 2 del Teorema II.1.1], probaron que para medidas vectoriales con valores en espacios de Fréchet siempre existen medidas de control. Para espacios de Banach, Rybakov [74] probó que existen funcionales x' en la bola unidad de X' tal que $|x'\nu|$ es una medida de control para ν. A las medidas de control del tipo $|x'\nu|$ se les llama medidas de control de Rybakov.

Diremos que una propiedad se cumple *puntualmente en casi todo*, respecto a ν, si se cumple en todos los puntos de Ω salvo en un conjunto ν-nulo. Equivale, por tanto, a que la propiedad se cumpla puntualmente en casi todo respecto a una medida de control λ. En lo que sigue se usará la notación *ν-a.e.*, para indicar que una propiedad se cumple en casi todo respecto de la medida ν.

Espacios localmente convexo-sólidos.

Para los conceptos y resultados de la teoría de espacios localmente convexo-sólidos nos remitimos a las monografias de Aliprantis y Burkinshaw [2], Luxemburg y Zaanen [61] y Zaanen [84].

Un *retículo localmente convexo-sólido* E, es un espacio localmente convexo real, dotado de una relación de orden $\leq$, que verifica:

1. Si $x, y, z \in E$ y $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

2. Si $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, y $x \leq y$, entonces $\lambda x \leq \lambda y$.

3. Si $x, y \in E$, entonces existen $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

4. Existe un sistema fundamental de seminormas $\mathcal{P}(E)$, que genera la topología de E, que cumplen la condición

$$p(x) \leq p(y) \tag{SR}$$

para toda $p \in \mathcal{P}(E)$ y para todos $x, y \in E$ tales que $|x| \leq |y|$, donde $|x| = \sup\{x, (-x)\}$, es *el valor absoluto* del elemento x.

Un *retículo de Fréchet* es un retículo localmente convexo-sólido que es espacio de Fréchet.

Se usará la notación clásica $x \vee y, x \wedge y$, para indicar, respectivamente, el supremo y el ínfimo de los elementos x e y.

Las seminormas que verifican la condición (SR) anterior, se llaman *seminormas reticulares*.

Dos elementos $x, y \in E$, se llaman disjuntos si $|x| \wedge |y| = 0$.

Un conjunto $A \subset E$ es sólido, si $x \in A$ siempre que $|x| \leq |y|$ para algún $y \in A$. Un ideal de E es un subespacio vectorial sólido. Una banda F de E es un ideal que cumple la condición que $\sup A \in E$, siempre que $\sup A$ exista para $A \subset F$.

Si $(u_\alpha)_\alpha$ es una red, escribimos $u_\alpha \uparrow\leq v$ para indicar que es creciente y está acotada superiormente por v, y $u_\alpha \uparrow u$ para indicar que es creciente y tiene por supremo u.

Dados $x, y \in E, x \leq y$, se denotará por $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$. Un conjunto A se dice orden acotado si existe un elemento positivo $x \in E$ tal que $|z| \leq x$, para todo $z \in A$. Equivale a decir que $A \subset [x, y]$ para algún intervalo $[x, y]$.

E es orden completo si cualquier conjunto no vacío, acotado superiormente, tiene supremo. E es orden completo si y sólo para cualquier red $(u_\alpha)_\alpha$ tal que $0 \leq u_\alpha \uparrow\leq v$, existe $u \in E$ tal que $u_\alpha \uparrow u$.

Un elemento $u \in E$ se llama unidad débil si la banda generada por u, B_u coincide con E. Equivale a decir que $u \wedge x = 0$ implica $x = 0$.

Si E y F son dos retículos de Fréchet, una aplicacion lineal $T : E \longrightarrow F$ se llama:

1. *Positiva*, si $x \geq 0$ en E implica $Tx \geq 0$ en F.
2. *Homomorfismo reticular*, si $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$, para todos $x, y \in E$.

Se dice que dos retículos de Fréchet E y F son reticularmente isomorfos si existe $T : E \longrightarrow F$ lineal, biyectiva y homomorfismo reticular.

Una aplicación lineal positiva $T : E \longrightarrow F$ entre dos retículos de Fréchet E y F siempre es continua [2, Teorema 16.6]. De aquí se deduce que dos retículos de Fréchet que sean reticularmente isomorfos, son también topológicamente isomorfos.

Un retículo de Fréchet E, se dice que verifica la propiedad de Lebesgue (orden continuo en la terminología de los espacios de Banach) si cualquier red $(u_\alpha)_\alpha$ que verifique $u_\alpha \downarrow 0$, converge a cero en la topología de E. Recordemos que un retículo de Fréchet E tiene la propiedad de Lebesgue si y sólo si cualquier sucesión $(u_n)_n$ que cumpla la condición $0 \leq u_n \uparrow\leq v$ convege en E. Los retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue son orden completos [2, Teorema 10.3].

A lo largo de la memoria irán apareciendo otras propiedades en relación con los retículos de Fréchet, que se introducirán en las secciones correspondientes, previas a su utilización.

Ya hemos dicho antes que la memoria está dividida en cuatro capítulos, que a su vez se dividen en secciones. Los resultados están ordenados por medio de dos números, el primero de los cuales se refiere al capítulo en el que aparece y el segundo hace referencia al propio resultado dentro del capítulo .

Finalmente, hemos recogido en la memoria teoremas clásicos, bien conocidos, simplemente con el ánimo de facilitar la lectura y la escritura del trabajo. Éstos aparacen en letra pequeña a lo largo de la memoria y nos referiremos a ellos, generalmente por el nombre de su autor. Por ejemplo, veanse las páginas dos y tres.

Capítulo 1

Propiedades del espacio $L^1(\nu, X)$.

1.1 Integración de funciones escalares.

Dedicaremos esta primera sección a recoger los resultados básicos sobre integración de funciones medibles reales, respecto de una medida vectorial, que se usarán a lo largo de esta memoria.

En esta sección X será un espacio de Fréchet real, (Ω, Σ) un espacio medible y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva.

Bartle, Dunford y Schwartz [10] son los primeros en considerar la integración de funciones escalares respecto de medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach, para representar operadores débilmente compactos con valores en un espacio de Banach X, definidos en un espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(K)$ sobre un espacio compacto K. La acción del operador es representada mediante una integral respecto de una medida vectorial, definida en los borelianos de K y con valores en el espacio de Banach X.

Posteriormente, Lewis [57] estudió una situación más general considerando integración de funciones escalares, respecto de medidas vectoriales con valores en un espacio localmente convexo, Hausdorff. La definición de integral que introduce es la siguiente.

Definición 1.1 *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Se dice que f es integrable respecto a ν (f es ν-integrable) si verifica las siguientes condiciones:*

1. *f es $x'\nu$-integrable para cada $x' \in X'$.*
2. *Para cada $A \in \Sigma$, existe un elemento de X que denotaremos por $\int_A f d\nu$, tal que*

$$\left\langle x', \int_A f d\nu \right\rangle = \int_A f d(x'\nu), \quad x' \in X'.$$

Las funciones simples son ν-integrables y la integral está dada por

$$\int_A \varphi d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A \cap A_i),$$

para cada conjunto $A \in \Sigma$, siendo $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Esta definición de integral es independiente de la representación de φ como combinación lineal de funciones características.

Lewis [57, Teorema 2.4], demostró el siguiente teorema que proporciona una definición equivalente de función integrable a la dada en la Definición 1.1. Ambas se usarán indistintamente en esta memoria.

TEOREMA I (LEWIS) Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable respecto a ν si y sólo si existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones simples que converge a f puntualmente en casi todo respecto a ν y $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)_n$ converge en la topología de X para cada $A \in \Sigma$.

Cuando estas condiciones se cumplen la integral de f respecto de ν sobre A es

$$\int_A f d\nu = \lim_n \int_A \varphi_n d\nu.$$

Las propiedades básicas de esta teoría de integración fueron demostradas por Bartle, Dunford y Schwartz [10, Teorema 3.6] y por Lewis [57, Teorema 2.2]. Nosotros las recogemos en el siguiente teorema.

TEOREMA (BDSL) Sea X un espacio de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible.

1. Si $A \in \Sigma$ y f es ν-integrable, entonces $\int_A f d\nu$ no depende de la sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_n$ que converge puntualmente a f *ν-a.e.*

2. Las funciones ν-integrables constituyen un espacio vectorial, que se denotará por $\mathcal{L}^1(\nu, X)$, y la integral es una aplicación lineal del espacio $\mathcal{L}^1(\nu, X)$ en X.

3. Si f es esencialmente acotada respecto de ν, entonces f es ν-integrable. Además:
$$p_U\left(\int_A f d\nu\right) \leq \text{supess}\left\{|f(w)| : w \in A\right\} \cdot \|\nu\|_U(A),$$
para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y cualquier $A \in \Sigma$.

4. Si f es ν-integrable, entonces la función de conjunto $\nu_f(A) = \int_A f d\nu$ es una medida vectorial numerablemente aditiva, llamada medida con densidad f respecto a ν. Las semivariaciones de estas medidas están dadas por
$$\|\nu_f\|_U(A) = \sup\left\{\int_A |f|\, d\,|x'\nu| : x' \in U^\circ\right\}, \quad U \in \mathcal{U}_0(X).$$
Además, se verifica
$$\lim_{\|\nu\|_U(A)\to 0} \|\nu_f\|_U(A) = 0, \quad U \in \mathcal{U}_0(X).$$

5. Si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal y continua, siendo Y otro espacio de Fréchet y f es ν-integrable, entonces f es $T\nu$-integrable y verifica

$$\int_A f d(T\nu) = T \int_A f d\nu,$$

para cada conjunto medible A.

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ medible se dice escalarmente integrable si f es $x'\nu$-integrable para cada $x' \in X'$. Lewis [58] dá ejemplos de funciones $x'\nu$-integrables que no son ν-integrables y establece una condición suficiente para que las funciones escalarmente integrables sean ν-integrables. A saber, que el espacio X verifique la que se denomina condición B-P, es decir, que cualquier sucesión $(x_n)_n$ de X que verifique $\sum\limits_n |\langle x', x_n\rangle| < +\infty$, para todo $x' \in X'$, sea sumable. En particular, los espacios débil sucesionalmente completos verifican esta condición.

1.2 Completitud. Propiedad de Lebesgue.

En esta sección se define $L^1(\nu, X)$ y se prueban algunas propiedades de este espacio. Destacamos, por el uso que se hará de ella, la comprobación de que $L^1(\nu, X)$ verifica la propiedad de Lebesgue. Esta propiedad ha sido demostrada por Curbera [21], cuando X es un espacio de Banach, utilizando, como herramienta básica, medidas de control de Rybakov. En nuestro caso esta técnica no puede utilizarse y se ha obtenido como una aplicación sencilla del teorema de convergencia dominada para medidas vectoriales.

Bartle, Dunford y Schwartz [10] y Lewis [57] probaron que el conjunto de las funciones ν-integrables $\mathcal{L}^1(\nu, X)$, es un espacio vectorial. Posteriormente, Kluvánek y Konwles [53] introducen una topología en este espacio, considerando medidas con valores en un espacio localmente convexo y estudian las primeras propiedades. Los mejores resultados se obtienen cuando el espacio es metrizable y completo. Curbera [21] realiza un estudio mucho más a fondo y completo en el caso particular de que las medidas tomen sus valores en un espacio de Banach, utilizando para ello técnicas de retículos de Banach.

En lo que sigue X será un espacio de Fréchet cuya topología está determinada por una familia numerable creciente de seminormas $(p_k)_k$, (Ω, Σ) un espacio medible y $\nu : \Omega \longrightarrow X$ será una medida vectorial numerablemente aditiva.

Kluvánek y Konwles [53, Lema II.2.1], probaron que el espacio $\mathcal{L}^1(\nu, X)$ es un retículo vectorial cuando se le dota del orden puntual, es decir,

$$f \leq g \quad \text{si} \quad f(w) \leq f(w),$$

para todo $w \in \Omega$. Además, establecen en [53, Lema II.2.2] que

$$\|f\|_U = \|\nu_f\|_U(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d|x'\nu| : x' \in U^\circ\right\} \tag{1.1}$$

define una seminorma reticular sobre el espacio $\mathcal{L}^1(\nu, X)$.

Nota 1.2 *Si* $U_k = \{x \in X : p_k(x) \leq 1\}$, *entonces la seminorma correspondiente a* U_k, *se denotará, simplemente, por* $\|\cdot\|_k$ *es decir,*

$$\|f\|_k = \|\nu_f\|_k(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d|x'\nu| : x' \in U_k^\circ\right\}. \tag{1.2}$$

Una función $f \in \mathcal{L}^1(\nu, X)$ es ν-nula si $f = 0$, ν-*a.e.*, es decir, si el conjunto

$$\{w \in \Omega : f(w) \neq 0\}$$

es ν-nulo. La definición de seminormas dada en (1.1), permite probar que una función $f \in \mathcal{L}^1(\nu, X)$ es ν-nula si y sólo si

$$\|f\|_U = 0, \quad \text{para todo } U \in \mathcal{U}_0(X).$$

Nota 1.3 *Utilizando las acotaciones para la semivariación, dadas en la introducción, es inmediato probar que f es ν-nula si y sólo si $\int_A f d\nu = 0$, para cada conjunto $A \in \Sigma$.*

Si denotamos con $\mathcal{N}(\nu, X)$ el conjunto de todas las funciones ν-integrables que son ν-nulas, es decir,

$$\mathcal{N}(\nu, X) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\nu, X) : \|f\|_U = 0, \quad \text{para todo } U \in \mathcal{U}_0(X) \right\},$$

entonces $\mathcal{N}(\nu, X)$ es un ideal de $\mathcal{L}^1(\nu, X)$.

El espacio cociente de $\mathcal{L}^1(\nu, X)$, módulo el ideal $\mathcal{N}(\nu, X)$, es un espacio de clases de funciones, que se denotará por $L^1(\nu, X)$, es decir,

$$L^1(\nu, X) = \mathcal{L}^1(\nu, X) / \mathcal{N}(\nu, X).$$

Entonces, $L^1(\nu, X)$ es un retículo vectorial con el orden inducido por la aplicación cociente [2, Teorema 1.18]. Si se le dota de la topología cociente se tiene que $L^1(\nu, X)$ es un espacio Hausdorff, localmente convexo-sólido y metrizable. Salvo que expresamente se explicite otra topología, siempre que hagamos referencia a $L^1(\nu, X)$ lo supondremos dotado de la topología antes descrita.

Nota 1.4 *Es claro que si X es un espacio de Fréchet cuya topología está generada por una sucesión creciente de seminormas $(p_k)_k$, entonces la sucesión creciente de seminormas $(\|\cdot\|_k)_k$, donde*

$$\|f\|_k = \sup \left\{ \int_\Omega |f| \, d|x'\nu| : x' \in U_k^\circ \right\}. \tag{1.3}$$

genera la topología de $L^1(\nu, X)$.

Las acotaciones dadas para la semivariación en (0.1), nos permiten dar una familia $(\|\cdot\|_U^\infty)_{U \in \mathcal{U}_0(X)}$ de seminormas equivalentes. Estas nuevas seminormas están definidas por

$$\|f\|_U^\infty = \sup \left\{ p_U \left(\int_A f d\nu \right) : A \in \Sigma \right\}, \quad f \in L^1(\nu, X). \tag{1.4}$$

Una herramienta que se usará con frecuencia en el estudio del espacio $L^1(\nu, X)$, es el operador integración $I_\nu : L^1(\nu, X) \longrightarrow X$, definido por

$$I_\nu(f) = \int_\Omega f d\nu.$$

El operador I_ν es lineal y puesto que

$$\begin{aligned} p_U\left(\int_\Omega f d\nu\right) &= \sup\left\{\left|\left\langle x', \int_\Omega f d\nu\right\rangle\right| : x' \in U^\circ\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d\,|x'\nu| : x' \in U^\circ\right\} \\ &= \|f\|_U, \quad U \in \mathcal{U}_0(X), \end{aligned}$$

se deduce que es continuo.

Kluvánek y Knowles [53, Teorema IV.4.1] prueban que, para un espacio X localmente convexo completo, el espacio $L^1(\nu, X)$, con la topología descrita más arriba, es completo si y sólo si la medida ν es una medida vectorial cerrada. Cuando el espacio X es metrizable todas las medidas vectoriales que se definen sobre X son medidas cerradas [53, Teorema IV.7.1]. Por tanto, cuando X es un espacio de Fréchet, el espacio $L^1(\nu, X)$ es completo.

Hemos comprobado que puede darse una prueba de la completitud del espacio $L^1(\nu, X)$, cuando X es un espacio de Fréchet, distinta y más sencilla que la dada por Kluvánek. La prueba, que se realiza a continuación, utiliza el siguiente teorema de Beppo Levi para medidas vectoriales [53, Corolario II.4.1].

TEOREMA (BEPPO LEVI) Sea $(g_n)_n$ una sucesión de funciones ν-integrables tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega h_n d\nu$$

converge en X, para toda sucesión positiva $(h_n)_n \subset L^1(\nu, X)$ tal que $0 \leq h_n \leq |g_n|$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge puntualmente ν-*a.e.* Si $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(w)$ para cada $w \in \Omega$ para los que exista, entonces $g \in L^1(\nu, X)$, $\int_\Omega g d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n d\nu$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge a g en $L^1(\nu, X)$.

Teorema 1.5 *El espacio $L^1(\nu, X)$ es completo.*

PRUEBA: Sea $(\|\cdot\|_k)_k$ la sucesión creciente de seminormas (1.3) que genera la topología de $L^1(\nu, X)$.

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $L^1(\nu, X)$. Entonces existe una subsucesión $(f_n^1)_n$ de $(f_n)_n$ tal que

$$\left\|f_{n+1}^1 - f_n^1\right\|_1 < \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Como $(f_n^1)_n$ es una sucesión de Cauchy, se puede seleccionar una subsucesión $(f_n^2)_n$ de $(f_n^1)_n$ tal que

$$\left\|f_{n+1}^2 - f_n^2\right\|_2 < \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Repitiendo este procedimiento se puede seleccionar una subsucesión $\left(f_n^k\right)_n$ de $\left(f_n^{k-1}\right)_n$ tal que

$$\left\|f_{n+1}^k - f_n^k\right\|_k < \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Si fijamos k, para cada $n, p = 1, 2, ...$, se verifica:

$$\begin{aligned}
\left\|f_{n+p}^k - f_n^k\right\|_k &\leq \left\|f_{n+1}^k - f_n^k\right\|_k + \cdots + \left\|f_{n+p}^k - f_{n+p-1}^k\right\|_k \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n+p)}} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Usando el procedimiento de la diagonal extraemos la subsucesión $(f_n^n)_n$ de $(f_n)_n$ y definimos la siguiente sucesión de funciones ν-integrables: $g_1 := f_1^1$ y, para $n \geq 2$, $g_n := f_n^n - f_{n-1}^{n-1}$. Veamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ es convergente en $L^1(\nu, X)$.

Sea $(h_n)_n$ una sucesión cualquiera de funciones de $L^1(\nu, X)$ verificando $0 \leq h_n \leq |g_n|$. Veamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_\Omega h_n d\nu$ es convergente en X. De hecho comprobaremos que es absolutamente convergente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_k\left(\int_\Omega h_n d\nu\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \||g_n|\|_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|f_n^n - f_{n-1}^{n-1}\right\|_k \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left\|f_n^n - f_{n-1}^{n-1}\right\|_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left\|f_n^n - f_{n-1}^{n-1}\right\|_k \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} \left\|f_n^n - f_{n-1}^{n-1}\right\|_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Beppo Levi se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge puntualmente ν-*a.e.* a una función medible g, que pertenece a $L^1(\nu, X)$ y la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)_n$ converge a g en $L^1(\nu, X)$. Como $f_n^n = \sum_{k=1}^{n} g_k$, se verifica que la sucesión $(f_n^n)_n$ es convergente y, por tanto, $(f_n)_n$ también. ∎

Esta teoría de integración posee un teorema de convergencia dominada probado por Lewis [57, Teorema 2.2] y mejorado por Kluvánek y Knowles [53, Teorema II.4.2], del que se extraen importantes consecuencias.

TEOREMA (CONVERGENCIA DOMINADA) Sea g una función positiva ν-integrable. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones ν-integrables, que convergen puntualmente a una función f, y verifican $|f_n| \leq g$, para todo $n = 1, 2, \ldots$ Entonces f es una función ν-integrable. Además, $(f_n)_n$ converge a f en $L^1(\nu, X)$ y para cada conjunto medible A, se tiene $\int_A f d\nu = \lim_n \int_A f_n d\nu$.

El siguiente corolario fue obtenido por Lewis [58, Teorema 3.5]. Nosotros lo deducimos como una consecuencia inmediata del teorema de convergencia dominada.

Corolario 1.6 *El conjunto de funciones simples es denso en* $L^1(\nu, X)$.

PRUEBA: Si $f \in L^1(\nu, X)$ entonces f es medible. Por [45, Teorema 11.35], existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones simples que converge puntualmente a

f y tal que $|\varphi_n| \leq |f|$, para todo n. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se tiene que φ_n converge a f en $L^1(\nu, X)$. ■

Teorema 1.7 *El espacio $L^1(\nu, X)$ verifica la propiedad de Lebesgue.*

PRUEBA: Sean $(f_n)_n$ una sucesión de funciones ν-integrables y f una función ν-integrable verificando $0 \leq f_n \uparrow\leq f$ en $L^1(\nu, X)$. Como f_n converge puntualmente a $\sup_n f_n$ y $f_n \leq f$, para todo n, entonces, por el teorema de la convergencia dominada, se verifica que $\sup_n f_n \in L^1(\nu, X)$ y $(f_n)_n$ converge a $\sup_n f_n$ en $L^1(\nu, X)$. ■

Nota 1.8 *Si $f \in L^1(\nu, X)$ y $f \wedge \chi_\Omega = 0$, entonces $f = 0$, es decir, la función característica χ_Ω es una unidad débil para $L^1(\nu, X)$. Por tanto, $L^1(\nu, X)$ es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil.*

1.3 Generación débil compacta.

En esta sección demostramos que el espacio $L^1(\nu, X)$ puede generarse a partir de un conjunto relativamente débil compacto, es decir, es un espacio de generación débil compacta.

Bartle, Dunford y Schwartz [10, Teorema 2.9] demostraron que el rango de una medida vectorial con valores en un espacio de Banach es un conjunto relativamente débil compacto. Este resultado es generalizado por Kluvánek y Knowles [53, Teorema IV.6.1], para medidas con valores en espacios localmente convexo casi-completos. Para espacios de Fréchet, puede darse una prueba, distinta a la dada por Kluvánek y Knowles, siguiendo la prueba que aparece en [27, Corolario I.2.7].

Lema 1.9 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces, el rango de ν es un conjunto relativamente débil compacto de X.*

PRUEBA: Sea $\lambda : \Sigma \longrightarrow [0,\infty)$ una medida de control para la medida ν. Como las funciones medibles esencialmente acotadas son ν-integrables, se cumple

$$L^{\infty}(\lambda) \subset L^{1}(\nu, X).$$

Veamos que el operador integración I_{ν}, restringido al espacio $L^{\infty}(\lambda)$, es $\sigma\left(L^{\infty}(\lambda), L^{1}(\lambda)\right) - \sigma(X, X')$ continuo.

Para cada $x' \in X'$, se verifica que $x'\nu$ es absolutamente continua respecto de λ. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe $g_{x'} \in L^{1}(\lambda)$ tal que

$$x'\nu(A) = \int_{A} g_{x'} d\lambda,$$

para cada conjunto $A \in \Sigma$ y

$$\int_{A} f d(x'\nu) = \int_{A} f g_{x'} d\lambda,$$

para cada conjunto $A \in \Sigma$ y para cada $f \in L^{1}(\nu, X)$.

Sea $f \in L^{\infty}(\lambda)$, consideremos una red $(f_{\alpha})_{\alpha} \subset L^{\infty}(\lambda)$ que converja a f en la topología $\sigma\left(L^{\infty}(\lambda), L^{1}(\lambda)\right)$. Entonces,

$$\lim_{\alpha} \int_{\Omega} f_{\alpha} g_{x'} d\lambda = \int_{\Omega} f g_{x'} d\lambda, \quad x' \in X',$$

es decir,

$$\lim_{\alpha} \int_{\Omega} f_{\alpha} d(x'\nu) = \int_{\Omega} f d(x'\nu), \quad x' \in X'.$$

Puesto que $\displaystyle\int_{\Omega} f d(x'\nu) = \left\langle x', \int_{\Omega} f d\nu \right\rangle$ para todo $x' \in X'$, se tiene,

$$\lim_{\alpha} \left\langle x', \int_{\Omega} f_{\alpha} d\nu \right\rangle = \left\langle x', \int_{\Omega} f d\nu \right\rangle, \quad x' \in X'.$$

Por tanto $I_{\nu}(f_{\alpha}) \longrightarrow I_{\nu}(f)$ en la topología $\sigma(X, X')$. Ahora, como el conjunto $\{f \in L^{\infty}(\lambda) : \|f\|_{\infty} \leq 1\}$ es $\sigma\left(L^{\infty}(\lambda), L^{1}(\lambda)\right)$-compacto, el conjunto $\{I_{\nu}(f) : f \in L^{\infty}(\lambda), \|f\|_{\infty} \leq 1\}$ es $\sigma(X, X')$-compacto.

Por último, de $\nu(A) = \displaystyle\int_{\Omega} \chi_{A} d\nu = I_{\nu}(\chi_{A})$, obtenemos

$$\nu(\Sigma) \subset \{I_{\nu}(f) : f \in L^{\infty}(\lambda), \|f\|_{\infty} \leq 1\}.$$

Por tanto, $\nu(\Sigma)$ es un conjunto relativamente débil compacto en X. ∎

Teorema 1.10 *El espacio $L^1(\nu, X)$ es de generación débil compacta.*

PRUEBA: Consideremos la función de conjunto $\mu : \Sigma \longrightarrow L^1(\nu, X)$ definida por

$$\mu(A) = \chi_A.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, μ es una medida vectorial numerablemente aditiva.

Por el lema anterior el conjunto $\{\mu(A) : A \in \Sigma\} = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$ es relativamente débil compacto en $L^1(\nu, X)$. Como las funciones simples son densas en $L^1(\nu, X)$, se deduce que la clausura de la envolvente lineal del conjunto $\{\chi_A : A \in \Sigma\}$ es el espacio $L^1(\nu, X)$, es decir, $L^1(\nu, X)$ es de generación débil compacta. ■

1.4 Átomos.

En esta sección estudiamos los átomos de la medida ν y la relación que tienen con los átomos del retículo vectorial $L^1(\nu, X)$. Veremos que $L^1(\nu, X)$ es un retículo atómico si y sólo si la medida ν es puramente atómica.

Recordemos que un elemento positivo e de un retículo de Fréchet E, se llama átomo si para cualesquiera dos elementos positivos y disjuntos $x, y \in E$, tales que $e = x + y$ se verifica que $x = 0$ o $y = 0$.

Un conjunto $\{e_i\}_{i \in I}$ de elementos de E tales que $e_i \wedge e_j = 0$, para todo $i \neq j$ y que $u \wedge e_j = 0$, para todo $j \in I$ implique que $u = 0$, se llama sistema completo disjunto de E. Un retículo de Fréchet E que tenga un sistema completo disjunto de átomos se llama atómico. Observemos que un retículo E es atómico si y sólo si para cualquier $0 < u \in E$ existe un átomo v de E tal que $0 < v \leq u$.

Sea ν una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en un espacio de Fréchet X. Dos conjuntos $A, B \in \Sigma$ se dice que son ν-equivalentes si, la diferencia simétrica, $A \triangle B$ es un conjunto ν-nulo, es decir,

$$\|\nu\|_U (A \triangle B) = 0,$$

para todo $U \in \mathcal{U}_0 (X)$, o equivalentemente, $\chi_A = \chi_B$ en $L^1 (\nu, X)$

Un conjunto $A \in \Sigma$ se llama un átomo de ν, si $\nu (A) \neq 0$ y para cualquier $B \in \Sigma_A$ se verifica que $\nu (B) = 0$ o $\nu (B) = \nu (A)$

Una medida ν, que no tenga ningún átomo se dice no atómica y, es puramente atómica si para cualquier conjunto medible $C \in \Sigma$ no ν-nulo existe un átomo A de ν tal que $A \subset C$.

Teorema 1.11 *Para un conjunto $A \in \Sigma$ con $\nu (A) \neq 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un átomo de ν.*
2. *Para cada $B \in \Sigma_A$, se verifica que B es ν-nulo o $A \backslash B$ es ν-nulo.*
3. *χ_A es un átomo de $L^1 (\nu, X)$.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $B \in \Sigma_A$ no ν-nulo. Entonces existe $C \in \Sigma_B$ tal que $\nu (C) \neq 0$. Como A es un átomo de ν, se tiene que $\nu (C) = \nu (A)$.

Sea $D \in \Sigma_{A \backslash B}$. Entonces $D \cup C \subset A$ y ha de verificarse $\nu (D \cup C) = 0$ o $\nu (D \cup C) = \nu (A)$. Si fuese $\nu (D \cup C) = 0$, entonces $\nu (D) = -\nu (C) = -\nu (A)$, pero esto no puede ocurrir, pues $\nu (D)$ sólo puede ser 0 o $\nu (A)$. Si $\nu (D \cup C) = \nu (A)$, entonces $\nu (D) + \nu (C) = \nu (A)$. Por tanto $\nu (D) = 0$, y se deduce que $A \backslash B$ es ν-nulo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si χ_A no es átomo de $L^1 (\nu, X)$, existen funciones positivas disjuntas $f, g \in L^1 (\nu, X)$ tal que $f + g = \chi_A$. Los conjuntos medibles, no ν-nulos, $B = \{w \in \Omega : f (w) > 0\}$ y $C = \{w \in \Omega : g (w) > 0\}$ cumplen $B \cup C = A, B \cap C = \emptyset$. Por tanto, no se cumple (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $B \subset A$ tal que $\nu(B) \neq 0$. Si $\nu(B) \neq \nu(A)$, entonces $\nu(A \backslash B) \neq 0$. En este caso, las funciones positivas χ_B y $\chi_{A\backslash B}$, verifican que $\chi_B + \chi_{A\backslash B} = \chi_A$ y $\chi_B \wedge \chi_{A\backslash B} = 0$. Por tanto, χ_A no sería átomo. Se tiene, pues, que $\nu(B) = \nu(A)$. ■

Proposición 1.12 *Sea $f \in L^1(\nu, X)$. Entonces f es un átomo de $L^1(\nu, X)$ si y sólo si f es múltiplo de χ_A, siendo A un átomo de ν.*

PRUEBA: Sólo una implicación necesita prueba.

($\Rightarrow$) Sea $f > 0$ un átomo de $L^1(\nu, X)$ y sea $A = \{w \in \Omega : f(w) > 0\}$. Veamos que A es un átomo de ν. Claramente $A \in \Sigma$ y A no es ν-nulo, pues $f > 0$ en $L^1(\nu, X)$.

Si A no es un átomo de ν, entonces existe $B \in \Sigma_A$ tal que B y $A \backslash B$ son no ν-nulos. Las funciones $f\chi_B$ y $f\chi_{A\backslash B}$ verifican: $0 < f\chi_B < f$, $0 < f\chi_{A\backslash B} < f$, $f\chi_B \wedge f\chi_{A\backslash B} = 0$ y $f = f\chi_B + f\chi_{A\backslash B}$. Por tanto, f no es un átomo de $L^1(\nu, X)$, en contra de lo supuesto.

Veamos ahora que $f = \alpha\chi_A$ para algún $\alpha > 0$. Si f no fuese constante en A, existiría un número positivo a tal que los conjuntos $A_1 = \{w \in A : f(w) \leq a\}$ y $A_2 = \{w \in A : f(w) > a\}$ serían no ν-nulos, pero $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y A es un átomo de ν, lo cual no es posible. ■

Teorema 1.13 *$L^1(\nu, X)$ es atómico si y sólo si la medida ν es puramente atómica.*

PRUEBA: ($\Rightarrow$) Si $A \in \Sigma$ es un conjunto no ν-nulo, entonces $\chi_A > 0$. Por ser $L^1(\nu, X)$ atómico existe un átomo $f > 0$ de $L^1(\nu, X)$ tal que $0 < f \leq \chi_A$. Por la Proposición 1.12, $f = \alpha\chi_B$ para un átomo B de ν. De $0 < \alpha\chi_B \leq \chi_A$ se deduce que $B \subset A$ y, por tanto, ν es puramente atómica.

($\Leftarrow$) Sea $f > 0$ una función de $L^1(\nu, X)$ y sea $A = \{w \in \Omega : f(w) > 0\}$. Entonces A no es ν-nulo. Por ser ν puramente atómica, existe un átomo $B \subset A$. Veamos que $f\chi_B$ es un átomo de $L^1(\nu, X)$. Si no lo fuese, existirían funciones h, g positivas, disjuntas y tal que $g + h = f\chi_B$. Los conjuntos $C = \{w \in \Omega : h(w) > 0\}$ y $D = \{w \in \Omega : g(w) > 0\}$ son no ν-nulos, disjuntos y

$C \cup D = B$, que está en contra de ser B un átomo. De $0 < f\chi_B < f$ se deduce que $L^1(\nu, X)$ es atómico. ■

Lema 1.14 *Si A y B son dos átomos de ν, entonces $\chi_A = \chi_B$ en $L^1(\nu, X)$ o bien $\chi_A \wedge \chi_B = 0$.*

PRUEBA: Si $\chi_A \neq \chi_B$ entonces $A \triangle B$ no es ν-nulo y, por tanto, $A \backslash B$ o $B \backslash A$ no es ν-nulo. Si $A \backslash B$ no es ν-nulo, entonces $A \cap B$ es ν-nulo. Si $B \backslash A$ no es ν-nulo, entonces $A \cap B$ es ν-nulo. En ambos casos, $\chi_A \wedge \chi_B = \chi_{A \cap B} = 0$. ■

Proposición 1.15 *Sea X un espacio de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el número de átomos de ν es numerable.*

PRUEBA: Por el Teorema 1.11, sabemos que un conjunto A es átomo de ν si y sólo si χ_A es átomo de $L^1(\nu, X)$. Sea $(\|\cdot\|_k)_k$ la familia numerable de seminormas que genera la topología de $L^1(\nu, X)$.

El conjunto

$$H_{jn} := \left\{ A \in \Sigma : A \text{ es átomo de } \nu, \|\chi_A\|_j \geq \frac{1}{n} \right\}$$

es finito. Si no lo fuese, existiría una sucesión $(A_k)_k$ de átomos de ν disjuntos verificando

$$\|\chi_{A_k}\|_j \geq \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Sea $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\chi_A = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}$$

en $L^1(\nu, X)$. Por tanto, $\chi_{A_k} \xrightarrow{k} 0$ en $L^1(\nu, X)$, es decir, $\|\chi_{A_k}\|_j \xrightarrow{k} 0$, en contradicción con (1.5)

Ahora, $H_j := \left\{ A \in \Sigma : A \text{ es átomo de } \nu, \ \|\chi_A\|_j \neq 0 \right\} = \bigcup_{n=1} H_{jn}$ es numerable. Por tanto, $H := \{A \in \Sigma : A \text{ es átomo de } \nu\} = \bigcup_{j=1} H_j$ es numerable. ■

Según hemos visto en la proposición anterior el número de átomos de una medida vectorial con valores en un espacio de Fréchet es, a lo más, numerable. Entonces, una medida vectorial puramente atómica queda determinada cuando se conoce el valor que toma la medida en cada uno de sus átomos. De aquí que, para este tipo de medidas, sea suficiente considerarlas definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$,

$$\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow X$$

es decir, $\nu(\{n\}) = x_n$, siendo $\sum_n x_n$ es una serie incondicionalmente convergente en X.

En estos casos se tendrá que el espacio $L^1(\nu, X)$ será un espacio de sucesiones. En concreto se tiene:

Proposición 1.16 *Si X es un espacio de Fréchet y $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva entonces*

$$L^1(\nu, X) = \left\{ (a_n)_n \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ es incondicionalmente convergente} \right\}.$$

Además

$$\|(a_n)_n\|_U = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', a_n x_n \rangle| : x' \in U^\circ \right\}, \quad U \in \mathcal{U}_0(X).$$

PRUEBA: Para $x' \in X'$ consideremos la medida escalar $x'\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$, que viene dada por

$$x'\nu(A) = \sum_{n \in A} \langle x', x_n \rangle, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Su variación es la medida $|x'\nu| : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, \infty)$ determinada por

$$|x'\nu|(A) = \sum_{n \in A} |\langle x', x_n \rangle|, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Una sucesión de números reales $(a_n)_n$ es ν-integrable si es, por una parte, escalarmente integrable, es decir, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', a_n x_n \rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |\langle x', x_n \rangle| < \infty,$$

para cada $x' \in X'$. Y, por otra, si para cada conjunto $A \in \Sigma$, existe $x_A \in X$ tal que

$$\langle x', x_A \rangle = \sum_{n \in A} a_n \langle x', x_n \rangle \in \mathbb{R}, \quad x' \in X',$$

es decir, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es débil subserie convergente. Por el teorema de Orlicz-Pettis, esta condición equivale a que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ sea subserie convergente, lo cual es equivalente a la convergencia incondicional de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

La fórmula para la seminorma U-ésima se obtiene directamente de la definición de seminorma U-ésima y de la expresión de la medida $|x'\nu|$. ■

Como hemos comentado antes, la clase de espacio de Fréchet que obtengamos para $L^1(\nu, X)$ dependerá, lógicamente, de las propiedades que tenga la medida y del espacio X en el que ésta se define. El siguiente teorema pone de manifiesto que si queremos que $L^1(\nu, X)$ sea Montel, entonces ν debe ser puramente atómica.

Teorema 1.17 *Si $L^1(\nu, X)$ es un Fréchet Montel, entonces $L^1(\nu, X)$ es atómico (por tanto, ν es puramente atómica).*

PRUEBA: Sea $f \in L^1(\nu, X)$ una función positiva. Por [2, Teoremas 21.1 y 2.5.4(i)], el intervalo $[0, f]$ es un conjunto cerrado y acotado de $L^1(\nu, X)$.

Como $L^1(\nu, X)$ es un espacio de Montel, el intervalo $[0, f]$ es un conjunto compacto de $L^1(\nu, X)$. Por [2, Corolario 21.13], $L^1(\nu, X)$ es un retículo atómico. ■

1.5 Separabilidad.

La separabilidad del espacio $L^1(\nu, X)$, igual que en el caso escalar, está directamente relacionada con la separabilidad del espacio métrico $[\Sigma, d_\nu]$ que construimos a continuación.

Dados el espacio medible (Ω, Σ) y una medida vectorial numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ definimos, la métrica de Saks, $d_\nu : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_\nu(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\nu\|_n (A \triangle B)}{2^n (1 + \|\nu\|_n (\Omega))}$$

y consideramos el espacio métrico $[\Sigma, d_\nu]$, donde se identifican como iguales conjuntos cuya diferencia simétrica es ν-nula.

El subconjunto $H = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$ de $L^1(\nu, X)$, con la topología relativa, es un espacio métrico. Sea $(\|\cdot\|_n)_n$ la sucesión de seminormas que genera la topología de $L^1(\nu, X)$.

La aplicación $T : [\Sigma, d_\nu] \longrightarrow [H, \|\cdot\|_n]$, definida por

$$T(A) = \chi_A$$

es un isomorfismo topológico.

Proposición 1.18 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ es separable si y sólo si $[\Sigma, d_\nu]$ es separable.*

PRUEBA: Si $L^1(\nu, X)$ es separable, entonces H es separable por [33, Teorema I.6.12]. Por tanto, $[\Sigma, d_\nu]$ es separable.

Recíprocamente, si $[\Sigma, d_\nu]$ es separable entonces existe un conjunto numerable $\{B_n\}_n$ denso en $[\Sigma, d_\nu]$. El conjunto $\{\chi_{B_n}\}_n$ es denso en H. Como las funciones simples son densas en $L^1(\nu, X)$, el conjunto de funciones simples con coeficientes racionales, y soportadas en los conjuntos $\{B_n\}_n$ es numerable y denso en $L^1(\nu, X)$. Por tanto éste es separable. ■

En la introducción de esta memoria hemos comentado que para cada medida vectorial ν con valores en un espacio de Fréchet X, existen medidas de control λ. El espacio métrico $[\Sigma, d_\lambda]$, con $d_\lambda(A, B) = \lambda(A \triangle B)$ (identificando como iguales conjuntos con diferencia simétrica λ-nula) es isomorfo al espacio $[\Sigma, d_\nu]$. Por tanto, $[\Sigma, d_\nu]$ es separable si y sólo si $[\Sigma, d_\lambda]$ es separable.

Esto permite tener numerosos ejemplos de espacios $L^1(\nu, X)$ que sean separables. Siempre que la σ-álgebra sobre la que se define la medida esté numerablemente generada el espacio $[\Sigma, d_\lambda]$ es separable [19, Poposición 3.4.5]. Por tanto, el espacio $L^1(\nu, X)$ también será separable.

Cuando el espacio $L^1(\nu, X)$ es separable, el espacio X sobre el que se define la medida puede tomarse también separable. En concreto se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.19 *Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva tal que el espacio $L^1(\nu, X)$ sea separable. Entonces existe un espacio de Fréchet $Y \subset X$ separable tal que el rango $\nu(\Sigma) \subset Y$ y $L^1(\nu, Y)$ es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, X)$.*

PRUEBA: Sea Y la envoltura lineal cerrada del rango $\nu(\Sigma)$. Consideremos en Y la topología que hereda de X. El operador integración $I_\nu : L^1(\nu, X) \longrightarrow X$ es continuo, el conjunto $H = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$ es separable y $I_\nu(\chi_A) = \nu(A), A \in \Sigma$. Utilizando el mismo razonamiento que antes sobre las funciones simples con coeficientes racionales se tiene que Y es separable. Veamos que la aplicación identidad $J : L^1(\nu, Y) \longrightarrow L^1(\nu, X)$ es isomorfismo reticular. Es claro que $J(f) \in L^1(\nu, X)$ para cada $f \in L^1(\nu, Y)$. Como la semivariación no cambia al considerar que ν toma valores en Y, la aplicación J es inyectiva. Sólo falta ver que J es sobreyectiva. Sea $f \in L^1(\nu, X)$, una función positiva. Entonces existe una sucesión de funciones simples positivas $(\varphi_n)_n$ tal que $\varphi_n \uparrow f$ ν-*a.e.* y tal que $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)_n$ es convergente en X para cada $A \in \Sigma$. Como $\int_A \varphi_n d\nu \in Y$ para cada n, se verifica que $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)_n$ es convergente en Y para cada $A \in \Sigma$. Por el teorema I de Lewis $f \in L^1(\nu, Y)$. Por último, el orden en los espacio $L^1(\nu, X)$ y $L^1(\nu, Y)$ es el mismo. Por tanto, $L^1(\nu, Y)$ es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, X)$. ■

1.6 Un teorema de representación.

Existen muchos casos en los que un espacio localmente convexo-sólido, puede ser representado por medio de espacios concretos de funciones medibles, construidos sobre determinados espacios medibles (Ω, Σ). Los teoremas más conocidos, en este sentido, son los de Kakutani [48] y Bohnenblust [12], sobre representación concreta de AL-espacios

Estas representaciones son muy útiles, ya que permiten aplicar muchos resultados de la teoría de la medida al estudio de espacios localmente convexo-sólidos.

Curbera en [21, Teorema 8] demuestra que cualquier retículo de Banach orden continuo y con unidad débil es reticularmente isométrico a un cierto espacio $L^1(\nu, X)$ para una cierta medida vectorial ν con valores en un espacio de Banach X. En la demostración utiliza un teorema [59, Teorema I.b.14] que le permite representar cualquier retículo de Banach orden continuo con unidad débil mediante un espacio de Banach de funciones respecto de un espacio de medida escalar $(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

En esta sección generalizamos el resultado de Curbera a retículos de Fréchet, construyendo directamente el espacio medible (Ω, Σ) y la medida vectorial ν, sin recurrir a un espacio de Banach de funciones respecto a una medida escalar.

En la introducción de esta memoria se han considerado medidas vectoriales $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ con valores en un espacio de Fréchet arbitrario X. Cuando el espacio en el que la medida toma sus valores sea un retículo de Fréchet E, tiene sentido considerar medidas $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ para las que $\nu(A) \geq 0$ para todo conjunto $A \in \Sigma$, a las que, lógicamente, llamaremos medidas positivas.

Sea E un retículo de Fréchet cuya topología esta determinada por una familia creciente de seminormas reticulares $(p_k)_k$. Ahora denotemos por $\mathcal{U}_0(E)$

a un sistema fundamental de entornos sólidos del origen de E y consideremos una medida vectorial numerablemente aditiva y positiva $\nu : \Sigma \longrightarrow E$. Teniendo en cuenta que para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$, la polar U° es un conjunto sólido se establece que

$$p_U(x) = \sup\{\langle x', x\rangle : x' \in U^\circ, x' \geq 0\}.$$

Si $x' \in U^\circ$, observemos que

$$\begin{aligned}|x'\nu|(A) &= \sup_\pi \left\{\sum_{B\in\pi} |x'\nu(B)|\right\} \leq \sup_\pi \left\{\sum_{B\in\pi} \langle |x'|, \nu(B)\rangle\right\} \\ &= ||x'|\nu|(A) \leq \sup\{|x'\nu|(A) : x' \in U^\circ, x' \geq 0\},\end{aligned}$$

donde π recorre las particiones finitas de A. Se deduce, por tanto, que

$$\|\nu\|_U(A) = \sup\{|x'\nu|(A) : x' \in U^\circ, x' \geq 0\}. \tag{1.6}$$

En la demostración del siguiente teorema se hará uso de los lemas que probamos a continuación. Sabemos, que la U-semivariación verifica la condición $p_U(\nu(A)) \leq \|\nu\|_U(A)$, para cada conjunto $A \in \Sigma$ y para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$. Cuando la medida es positiva se puede precisar más.

Lema 1.20 *Sea E un retículo de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial numerablemente aditiva y positiva. Entonces para cada conjunto medible A y para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$ se tiene*

$$p_U(\nu(A)) = \|\nu\|_U(A).$$

PRUEBA: Utilizando la expresión (1.6) se tiene para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$ y para cada $A \in \Sigma$

$$\begin{aligned}\|\nu\|_U(A) &= \sup\{|x'\nu|(A) : x' \in U^\circ, x' \geq 0\} \\ &= \sup\left\{\sup_\pi \left\{\sum_{B\in\pi} |x'\nu(B)|\right\} : x' \in U^\circ, x' \geq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\left\{\sup_{\pi}\left\{\sum_{B\in\pi}\varepsilon_B x'\nu(B)\right\} : x' \in U^\circ, x' \geq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\sup_{\pi}\left\{x'\left(\sum_{B\in\pi}\varepsilon_B \nu(B)\right)\right\} : x' \in U^\circ, x' \geq 0\right\} \\
&\leq \sup\left\{x'\nu(A) : x' \in U^\circ, x' \geq 0\right\} = p_U(\nu(A)),
\end{aligned}$$

donde ε_B vale ± 1, dependiendo del signo de $x'\nu(B)$. Se ha tenido en cuenta que $\sum_{B\in\pi}\varepsilon_B\nu(B) \leq \nu(A)$ y, por tanto, que $x'\left(\sum_{B\in\pi}\varepsilon_B\nu(B)\right) \leq x'\nu(A)$, para todo $x' \geq 0$. ■

Kluvánek [50] (ver [27, Corlario 2 de página 37]) generaliza el teorema de extensión de Carathéodory-Hahn a espacios localmente convexos. Demuestra que una medida numerablemente aditiva definida sobre un álgebra Σ_0, con valores en un espacio localmente convexo, cuyo rango sea débil sucesionalmente completo, admite una extensión numerablemente aditiva (necesariamente única) a la σ-álgebra Σ, generada por Σ_0. En el Teorema 1.22, que probaremos a continuación se hará uso de este resultado. También se hará uso, en el transcurso de la prueba del siguiente lema de carácter técnico.

Lema 1.21 *Sea $\nu_0 : \Sigma_0 \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva definida en un álgebra Σ_0. Supongamos que el rango $\nu_0(\Sigma_0)$ es un conjunto relativamente débil sucesionalmente compacto de X. Si $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es la extensión de Carathéodory-Hahn-Kluvánek de ν_0 a la σ-álgebra Σ generada por Σ_0. Entonces*

$$\|\nu_0\|_U(A) = \|\nu\|_U(A)$$

para cada conjunto medible A y para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$.

PRUEBA: Para cada $x' \in X'$ la medida escalar $x'\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, es la extensión de Carathéodory-Hahn a la σ-álgebra Σ generada por Σ_0, de la medida numerablemente aditiva $x'\nu_0 : \Sigma_0 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ya que $x'\nu$ es numerablemente aditiva y de variación acotada, por [27, Corolario I.1.10], se verifica, $|x'\nu_0|(A) = |x'\nu|(A)$, para cada conjunto medible A. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|\nu_0\|_U(A) &= \sup\{|x'\nu_0|(A) : x' \in U^\circ\} \\ &= \sup\{|x'\nu|(A) : x' \in U^\circ\} = \|\nu\|_U(A).\end{aligned}$$

■

Antes de enunciar el teorema de representación, necesitamos cierta preparación respecto a dos resultados clásicos que constituyen ingredientes esenciales en la prueba del mencionado teorema de representación: el teorema de representación de Stone y el teorema espectral de Freudenthal.

Recordemos que un álgebra booleana es un retículo distributivo y complementario. Dos álgebras booleanas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfas si existe una aplicación biyectiva entre ellas, que conserva las operaciones reticulares y la complementación.

Si Ω es un espacio topológico, entonces la colección de los subconjuntos que son a la vez abiertos y cerrados es un álgebra booleana respecto de las operaciones habituales.

Un álgebra booleana se dice que es orden completa si cualquier subconjunto no vacío del álgebra tiene supremo.

Un espacio topológico Ω se llama extremadamente disconexo si la clausura de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto. La relación entre álgebras booleanas orden completas y espacios topológicos Hausdorff extremadamente disconexos la proporciona el teorema de Stone.

TEOREMA (STONE) Un álgebra booleana es orden completa si y sólo si es isomorfa al álgebra de todos los conjuntos abiertos y cerrados de un (único salvo homeomorfismo) espacio topológico compacto, Hausdorff, extremadamente disconexo.

Sea e un elemento positivo de un retículo de Fréchet E. Un elemento positivo $x \in E$ se dice que es una componente de e si $x \wedge (e - x) = 0$. El conjunto de todas las componentes de e, se denota por $\mathcal{C}_e$ y constituye un álgebra booleana con las operaciones que hereda de E. Es orden completo cuando E es orden completo [3, Teorema 3.15].

Sea e un elemento positivo de E. Una función e-escalonada es cualquier elemento $s \in E$ para el que existen $x_1, ..., x_n$ componentes disjuntas de e, verificando $e = x_1 + \cdots + x_n$ y, existen números reales $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Esta expresión se dice que es una representación de s como función e-escalonada. Claramente cualquier componente de e es una función e-escalonada y cualquier función e-escalonada pertenece al ideal generado por e.

El siguiente teorema fue probado por Freudenthal [39] (ver [61, Teorema 40.3]).

TEOREMA (FREUDENTHAL) Sea E un retículo vectorial y e un elemento positivo de E. Si x es un elemento de la banda generada por e, entonces existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones e-escalonadas tal que s_n converge a x, respecto al orden. Es decir, existe una sucesión de elementos positivos $(v_n)_n$ verificándo: $|x - s_n| \leq v_n \downarrow 0$. Además, $s_n^+ \uparrow x^+$.

Teorema 1.22 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil. Entonces, existe un espacio medible (Ω, Σ) y una medida positiva $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ tal que E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. El conjunto Ω es un espacio topológico compacto, Hausdorff, extremadamente disconexo y tiene la propiedad de que cualquier conjunto Σ-medible es equivalente a un conjunto que es abierto y cerrado de Ω.*

PRUEBA: Sea $(p_k)_k$ una familia creciente de seminormas reticulares que generan la topología de E. Sea $e > 0$ una unidad débil de E y consideremos el conjunto $\mathcal{C}_e = \{x \in E^+ : x \wedge (e-x) = 0\}$ de todas las componentes de e. Según el teorema de Stone, existe un espacio topológico Ω, compacto, Hausdorff, extremadamente disconexo y un isomorfismo de álgebras de Boole, que denotamos por ν_0, del álgebra Σ_0 de todos los conjuntos abiertos y cerrados de Ω en $\mathcal{C}_e$

$$\nu_0 : \Sigma_0 \longrightarrow \mathcal{C}_e.$$

Observemos que si $A, B \in \Sigma_0$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces,

$$0 = \nu_0 (A \cap B) = \nu_0 (\inf \{A, B\}) = \nu_0 (A) \wedge \nu_0 (B),$$

ya que ν_0 un isomorfismo de álgebras de Boole. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nu_0 (A \cup B) &= \nu_0 (\sup \{A, B\}) \\ &= \nu_0 (A) \vee \nu_0 (B) = \nu_0 (A) + \nu_0 (B). \end{aligned}$$

Además, para cualquier $A \in \Sigma_0$ se tiene que $\nu_0 (A) \geq 0$, por ser una componente de e. Por tanto, ν_0 es una medida, finitamente aditiva y positiva, sobre el álgebra Σ_0.

Ya que cualquier conjunto $A \in \Sigma_0$ es cerrado y Ω es compacto, Hausdorff se tiene que A es compacto. Por tanto, si $(A_n)_n$ es una sucesión disjunta de elementos de Σ_0 tal que $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \Sigma_0$, deberá ser $A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_{n_i}$ para cierto $N \in \mathbb{N}$, de donde se obtiene

$$\nu_0 (A) = \sum_{i=1}^{N} \nu_0 (A_{n_i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0 (A_n).$$

Por otra parte, como $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n \subset A$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{N} \nu_0 (A_n) \leq \nu_0 (A)$ y, puesto que E tiene la propiedad de Lebesgue, se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_0 (A_n) = \sup_N \left\{ \sum_{n=1}^{N} \nu_0 (A_n) \right\} \leq \nu_0 (A).$$

Por tanto, $\nu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0(A_n)$ y la medida ν_0 es numerablemente aditiva.

Además, el rango $\nu_0(\Sigma_0)$ es relativamente débil (sucesionalmente) compacto pues $\nu_0(\Sigma_0) \subset [0, e]$, que es débil compacto en E, por [2, Teorema 21.1]. Entonces, por el teorema de extensión de Carathédory-Hahn-Kluvánek comentado anteriormente, la medida ν_0 puede ser extendida a la σ-álgebra Σ, generada por Σ_0, por medio de una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ que es numerablemente aditiva.

Veamos ahora que la σ-álgebra Σ no difiere esencialmente de Σ_0 y, que la extensión ν también es positiva. Para ello, consideremos la colección de conjuntos

$$\Sigma_1 = \{B \in \Sigma : \text{existe } A \in \Sigma_0, B \bigtriangleup A \text{ es } \nu\text{-nulo}\}.$$

Comprobemos que constituyen una σ-álgebra que contiene, evidentemente, a Σ_0. Una vez comprobado esto, como $\Sigma_1 \subset \Sigma$ y Σ es la menor σ-álgebra que contiene a Σ_0, se tendrá que $\Sigma = \Sigma_1$.

Sean $B_1, B_2 \in \Sigma_1$. Comprobemos que $B_1 \cup B_2$ y $\Omega \backslash B_1 \in \Sigma_1$. Esto se deduce inmediatamente si tenenos en cuenta que

$$(B_1 \cup B_2) \bigtriangleup (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \bigtriangleup A_1) \cup (B_2 \bigtriangleup A_2) \tag{1.7}$$

y que

$$(\Omega \backslash B_1) \bigtriangleup (\Omega \backslash A_1) = B_1 \bigtriangleup A_1.$$

Veamos ahora que si $(B_n)_n$ es una sucesión creciente en Σ_1 y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces $B \in \Sigma_1$, lo que probará que Σ_1 es una σ-álgebra.

Podemos elegir una sucesión creciente $(A_n)_n$ en Σ_0 tal que $B_n \bigtriangleup A_n$ es ν-nulo para cada $n = 1, 2, \ldots$ Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y observamos que, puesto que Ω es totalmente disconexo, la clausura $\overline{A}$ de A es abierto. Por tanto $\overline{A}$ es un conjunto abierto y cerrado de Ω, esto es $\overline{A} \in \Sigma_0$.

Ya que $\overline{A} \backslash A \subset \overline{A} \backslash A_k$, para cada $k = 1, 2, \ldots$ y, puesto que la semivariación de ν es monótona, se verifica teniendo en cuenta el Lema 1.21, que

$$\|\nu\|_n \left(\overline{A} \backslash A\right) \leq \|\nu\|_n \left(\overline{A} \backslash A_k\right) = \|\nu_0\|_n \left(\overline{A} \backslash A_k\right),$$

para cada k y cada n.

Utilizando ahora el Lema 1.20 tenemos

$$\|\nu\|_n\left(\overline{A}\backslash A_k\right) = p_n\left(\nu_0\left(\overline{A}\backslash A_k\right)\right).$$

Observemos que $A_k \uparrow\leq \overline{A}$ en Σ_0. De hecho $\overline{A} = \sup_k A_k$. En efecto, si $C \in \Sigma_0$ cumpliese que $A_k \leq C$ se tendría $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset C$, y como C es cerrado, por estar en Σ_0, se tendría que $\overline{A} \subseteq C$, es decir, $\overline{A}$ es la menor cota superior.

Como $A_k \uparrow\leq \overline{A}$ en Σ_0 y $\mathcal{C}_e$ es orden completo, se verifica que $\nu_0(A_k) \uparrow \nu_0\left(\overline{A}\right)$ en E. Puesto que E tiene la propiedad de Lebesgue $\nu_0(A_k) \to \nu_0\left(\overline{A}\right)$. Por tanto, $\overline{A}\backslash A$ es ν-nulo.

Por último, observando que

$$B \bigtriangleup \overline{A} \subset (B \bigtriangleup A) \cup \left(\overline{A}\backslash A\right),$$

y que

$$B \bigtriangleup A \subset \bigcup_{n\geq 1} (B_n \bigtriangleup A_n)$$

se obtiene que $B \bigtriangleup \overline{A}$ es ν-nulo, pues lo son $\overline{A}\backslash A$ y $B \bigtriangleup A$. Se concluye que $B \in \Sigma_1$, como queríamos demostrar.

Hemos comprobado pues, que la σ-álgebra Σ generada por Σ_0, coincide con Σ_1. Entonces, para cada $B \in \Sigma$ existe $A \in \Sigma_0$ tal que $B \bigtriangleup A$ es ν-nulo. Por consiguiente, $\nu(B) = \nu(A) = \nu_0(A)$. De esta forma obtenemos

$$\nu(\Sigma) = \mathcal{C}_e.$$

Esto nos permite afirmar que la medida ν es también una medida positiva.

Veamos ahora que si $B_1, B_2 \in \Sigma$, entonces

$$\nu(B_1 \cap B_2) = \nu(B_1) \wedge \nu(B_2). \tag{1.8}$$

Sabemos que existe $C \in \Sigma_0$ tal que $(B_1 \cap B_2) \bigtriangleup C$ es ν-nulo y $\nu(B_1 \cap B_2) = \nu_0(C)$. Por otra parte existen $A_1, A_2 \in \Sigma_0$ tal que $B_1 \bigtriangleup A_1$ y $B_2 \bigtriangleup A_2$ son ν-nulos y verifican $\nu(B_1) = \nu_0(A_1)$ y $\nu(B_2) = \nu_0(A_2)$.

Ya que

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2) \triangle C &\subset ((A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2)) \bigcup ((B_1 \cap B_2) \triangle C) \\ &\subset (B_1 \triangle A_1) \cup (B_2 \triangle A_2) \cup ((B_1 \cap B_2) \triangle C)\end{aligned}$$

se tiene que $(A_1 \cap A_2) \triangle C$ es ν-nulo. Por tanto,

$$\nu_0(C) = \nu(C) = \nu(A_1 \cap A_2) = \nu_0(A_1 \cap A_2) = \nu_0(A_1) \wedge \nu_0(A_2)$$

y se verifica (1.8).

A continuación consideramos el espacio $L^1(\nu, E)$. Veamos que la aplicación integración $I_\nu : L^1(\nu, E) \longrightarrow E$ es un isomorfismo reticular.

Llamemos $S(\Sigma)$ al subretículo de funciones simples. Si $\varphi \in S(\Sigma)$ está escrita en la forma estándar, es decir, $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, con $a_i \in \mathbb{R}$ y $(A_i)_{i=1}^n$ una partición de Ω, entonces $I_\nu(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i)$. De (1.8) se deduce que

$$|I_\nu(\varphi)| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i) \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \nu(A_i) = I_\nu(|\varphi|),$$

puesto que los conjuntos A_i son disjuntos y ν es positiva.

Sea $f \in L^1(\nu, E)$, sabemos que existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ en $S(\Sigma)$ que converge a f en $L^1(\nu, E)$. Así que $|\varphi_n|$ converge a $|f|$, pues las operaciones reticulares son continuas. Obtenemos entonces

$$|I_\nu(f)| = \left| \lim_n I_\nu(\varphi_n) \right| = \lim_n |I_\nu(\varphi_n)| = \lim_n I_\nu(|\varphi_n|) = I_\nu(|f|),$$

es decir, la aplicación integración es un homomorfismo reticular.

Como ν es una medida positiva, para cada función $f \in L^1(\nu, E)$, la medida con densidad $|f|$

$$\nu_{|f|} : \Sigma \longrightarrow E$$

también es positiva. Aplicando el Lema 1.21, y el hecho de ser la aplicación integración un homomorfismo reticular, se obtiene para cada $U \in \mathcal{U}_0(E)$ que

$$\begin{aligned}\|f\|_U &= \||f|\|_U = \left\|\nu_{|f|}\right\|_U(\Omega) = p_U\left(\nu_{|f|}(\Omega)\right) \\ &= p_U(I_\nu(|f|\chi_\Omega)) = p_U(I_\nu(|f|)) \\ &= p_U(|I_\nu(f)|) = p_U(I_\nu(f)).\end{aligned}$$

Por tanto, I_ν es una isometría.

Sólo falta comprobar que la aplicación I_ν es sobreyectiva. Observemos que I_ν transforma exactamente el espacio $S(\Sigma)$ en el conjunto de las funciones e-escalonadas de E.

Sea $x \in E$ un elemento positivo. Teniendo en cuenta que E coincide con la banda principal generada por e, por el teorema de Freudenthal, existe una sucesión $(s_k)_k$ de funciones e-escalonadas de E tal que $0 < s_k \uparrow x$. Como E verifica la propiedad de Lebesgue, s_k converge a x. Ya que I_ν es homomorfismo reticular e $I_\nu(S(\Sigma))$ es el conjunto de las funciones e-escalonadas de E, existe una sucesión creciente $(\varphi_k)_k$ en $S(\Sigma)$ tal que $I_\nu(\varphi_k) = s_k$, para $k = 1, 2...$

Como I_ν es una isometría la sucesión $(\varphi_k)_k$ es de Cauchy en $L^1(\nu, E)$ y, por tanto, tiene límite $f \in L^1(\nu, E)$. Ahora es claro que

$$I_\nu(f) = \lim_n I_\nu(\varphi_n) = \lim_n s_n = x.$$

Para un elemento arbitrario $x \in E$, ponemos $x = x^+ - x^-$. Por el razonamineto anterior existen $f, g \in L^1(\nu, E), f, g \geq 0$ tal que $I_\nu(f) = x^+$ y $I_\nu(g) = x^-$. Entonces, $f - g \in L^1(\nu, E)$ e $I_\nu(f - g) = x$. ■

Del teorema anterior haremos uso frecuentemente en esta memoria. Como primera aplicación a la teoría general de retículos de Fréchet, obtenemos una caracterización de los retículos de Fréchet atómicos, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil.

En [24, Proposición 5] se demuestra que un espacio de Fréchet con base incondicional puede dotarse, de forma natural, de un orden respecto del cual es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue.

Veremos, a continuación, que la clase de los espacios de Fréchet con base incondicional, coincide con la clase de los retículos de Fréchet atómicos, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil.

Previamente demostramos el siguiente lema

Lema 1.23 *Sea E un retículo de Fréchet separable. Entonces E tiene unidad débil.*

PRUEBA: Sea $(p_k)_k$ una sucesión creciente de seminormas reticulares que generan la topología de E y sea $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0,1)$ la F-norma definida por

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{2^n(1+p_n(x))}, \quad x \in E.$$

Por el lema de Zorn existe una familia maximal $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de elementos positivos de E, mutuamente disjuntos, tal que $\|x_\alpha\| > \frac{1}{2}$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Puesto que E es separable, el conjunto de indices Λ debe ser, a lo más numerable. Supongamos, pues, que Λ es el conjunto de los números naturales.

Para cada natural n, elegimos un escalar $a_n > 0$ tal que $p_n(x_n) \leq a_n$. Entonces, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n a_n}$$

es absolutamente convergente en E. Consideremos el elemento $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n a_n}$ y veamos que es una unidad débil de E.

Supongamos que $x \in E$ es tal que $x \wedge e = 0$. Entonces $x \wedge x_n = 0$, para todo $n = 1, 2, ...$ De la maximalidad de $(x_n)_n$ se deduce que $x = 0$ y, por tanto, e es unidad débil. ■

Teorema 1.24 *Sea E un espacio de Fréchet. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es un retículo atómico, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil.*

2. *E tiene una base incondicional.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea E un retículo de Fréchet atómico, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil. Por el Teorema 1.22, existe una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$, tal que $L^1(\nu, E)$ es reticularmente isomorfo a E. Por el Teorema 1.13, la medida ν es puramente atómica. Finalmente, por la Proposición 1.16, la sucesión $\chi_{\{n\}}$ es una base incondicional de $L^1(\nu, E)$. Es decir, $L^1(\nu, E)$ y, por tanto, E es un espacio de Fréchet con base incondicional.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea E un espacio de Fréchet con una base incondicional. Por [24, Proposición 5], E es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue. Por el Lema 1.23, E tiene unidad débil. Se comprueba sin dificultad que los elementos de la base constituyen un sistema completo de átomos. ∎

1.7 Completitud débil sucesional.

En esta sección probaremos que si X es un espacio de Fréchet débil sucesionalmente completo, entonces $L^1(\nu, X)$ también lo es. De esto deduciremos (utilizando el teorema de representación) la relación que existe entre tener *copias (reticlares o no) de* c_0 y ser *débil sucesionalmente completo*, para un retículo de Fréchet. Curbera en [21, Teorema 3] estableció el resultado de completitud para $L^1(\nu, X)$, cuando X es un espacio de Banach, respondiendo así a la pregunta de Diestel acerca de si $L^1(\nu, X)$ cumplía el análogo del famoso teorema de Talagrand sobre la completitud sucesional débil del espacio de las funciones integrables en el sentido de Bochner.

Con posterioridad, hemos abordado junto con Fernández, Mayoral y Paúl [35], en el marco de los espacios de Fréchet el problema de la completitud sucesional débil en las dos situaciones formalmente simétricas. A saber, funciones vectoriales integrables respecto de una medida de probabilidad (teorema de Talagrand) y funciones escalares integrables respecto de una medida vectorial (teorema de Curbera). Recogemos en la memoria todo lo relativo al segundo punto.

Empezamos estudiando condiciones en X bajo las cuales el espacio $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Levi, ya que esta propiedad, sumada a la propiedad de Lebesgue, implica la completitud débil sucesional del espacio $L^1(\nu, X)$.

Recordemos que un retículo de Fréchet E tiene la propiedad de Levi si cualquier red positiva creciente y acotada en la topología, tiene supremo. Es claro que un retículo de Fréchet tiene la propiedad de Levi si y sólo si cualquier sucesión creciente, positiva y acotada para la topología, tiene supremo.

Teorema 1.25 *Sea X un espacio de Fréchet que no tiene copia de c_0 y sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Levi.*

PRUEBA: Sea $0 < f_n \uparrow$ una sucesión de $L^1(\nu, X)$ que verifica $\sup_n \|f_n\|_U \leq M_U$, para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Veamos que existe $\sup_n f_n \in L^1(\nu, X)$.

Consideramos la sucesión $(h_n)_n$ de $L^1(\nu, X)$ dada por $h_1 := f_1$ y $h_k := f_k - f_{k-1}$ para $k = 2, 3, \ldots$ Observemos que $f_n = \sum_{k=1}^{n} h_k$. Puesto que f_n es creciente, se tiene que $\sup_n f_n = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$, siempre que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ exista. Para establecer el teorema basta probar entonces que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \in L^1(\nu, X)$. Por el teorema de Beppo Levi, se verifica que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \in L^1(\nu, X)$, siempre que para cualquier sucesión $(g_k)_k$ de $L^1(\nu, X)$, tal que $0 \leq g_k \leq h_k$ para $k = 1, 2, \ldots$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega g_k d\nu$ sea convergente en X.

Sea $x' \in X'$ y $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal $x' \in U^\circ$. Entonces si $n \geq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \left| \left\langle x', \int_\Omega g_k d\nu \right\rangle \right| &= \sum_{k=1}^{m} \left| \int_\Omega g_k d(x'\nu) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \int_\Omega g_k d|x'\nu| \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{m} g_k \right) d|x'\nu| \leq \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{m} h_k \right) d|x'\nu| \\
&= \int_\Omega f_m d|x'\nu| \leq \|f_m\|_U \leq \sup_m \|f_m\|_U \leq M_U.
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier m, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle x', \int_{\Omega} g_k d\nu \right\rangle \right| \leq \sup_m \|f_m\|_U \leq M_U.$$

Como X no tiene copia de c_0, por [73, Teorema 4(9)] la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_k d\nu$ es convergente en X. ■

Corolario 1.26 *Si X no tiene una copia de c_0 entonces $L^1(\nu, X)$ es débil sucesionalmente completo. En particular, $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia de c_0.*

PRUEBA: Por el teorema anterior, si X no tiene una copia de c_0, entonces $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad Levi. Sabemos también que $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Lebesgue. Por [2, Teorema 20.26], $L^1(\nu, X)$ es débil sucesionalmente completo. ■

Este corolario permite, con ayuda del Teorena 1.22, dar alguna información sobre la teoría general de los retículos de Fréchet. En concreto permite establecer la equivalencia entre copias de c_0 y la completitud débil sucesional.

La versión, para retículos de Banach, del siguiente teorema aparece en los trabajos de varios autores, Lozanovskii [60], Meyer-Nieberg [63, Teorema 2.5.6] (ver también [59, Teorema 1.c.4]).

Previamente a la demostración del citado resultado (Teorema 1.28), necesitamos probar el siguiente resultado que, para retículos de Banach, ha sido obtenido por Meyer-Nieberg [63].

Proposición 1.27 *Un retículo de Fréchet E que no es σ-orden completo contiene una copia reticular de c_0.*

PRUEBA: Sea $(p_k)_k$ una familia creciente de seminormas reticulares que generan la topología de E.

Si E no es σ-orden completo, por [2, Teoremas 10.1 y 10.3], existe una sucesión positiva disjunta, orden acotada $(x_k)_k$ que no converge a cero. Pasando a una subsucesión, si fuese necesario, existen $\delta > 0$ y un natural m tales que

$$p_n(x_k) > \delta,$$

para todo $k = 1, 2, ...$ y para todo $n \geq m$.

Para cualesquiera escalares $a_1, ..., a_k$, sea $|a_{k_0}| = \max\{|a_1|, ..., |a_k|\}$. Si x es la cota superior de $(x_k)_k$ se obtiene, por ser $(x_k)_k$ disjunta,

$$\begin{aligned}\delta \max\{|a_1|, ..., |a_k|\} &\leq |a_{k_0}| p_m(x_{k_0}) \leq p_m\left(\sum_{r=1}^{k} a_r x_r\right) \\ &\leq p_n\left(\sum_{r=1}^{k} a_r x_r\right) \leq \max\{|a_1|, ..., |a_k|\} p_n(x).\end{aligned}$$

Si definimos $T : c_0 \longrightarrow E$ por

$$T((a_k)_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

entonces T es un isomorfismo sobre su rango. Por tanto, E contiene una copia de c_0.

De $\left|\sum_{r=1}^{k} a_r x_r\right| = \sum_{r=1}^{k} |a_r| x_r$ y de la continuidad de las operaciones reticulares, se deduce que

$$\begin{aligned}|T(a)| &= \left|\lim_k \sum_{r=1}^{k} a_r x_r\right| = \lim_k \left|\sum_{r=1}^{k} a_r x_r\right| \\ &= \lim_k \sum_{r=1}^{k} |a_r| x_r = \sum_{r=1}^{\infty} |a_r| x_r = T(|a|).\end{aligned}$$

Por tanto, T es un homomorfismo reticular. ■

El recíproco de la proposición anterior es evidentemente falso ya que c_0 es σ-orden completo.

Teorema 1.28 *Sea E un retículo de Fréchet. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es débil sucesionalmente completo.*
2. *E no tiene una copia de c_0.*
3. *E no tiene copia una reticular de c_0.*

PRUEBA:

(1) $\Rightarrow$ (2) Es la prueba de [73, Teorema 5].

(2) $\Rightarrow$ (3) Es evidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Una aplicación sencilla del teorema de Hahn-Banach, permite suponer que el espacio E es separable. Por el Lema 1.23, E tiene unidad débil. Por otro lado, por la Proposición 1.27, E es σ-orden completo y claramente E no tiene una copia reticular de l_∞. De esta forma, por [2, Teorema 10.7], E tiene la propiedad de Lebesgue. Entonces, por el Teorema 1.22, E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. Como E no tiene una copia de c_0, por el Corolario 1.25, $L^1(\nu, E)$ es débil sucesionalmente completo. En consecuencia E, también lo es. ■

En [35], aparece una prueba directa de este resultado que no hace uso del isomorfismo entre E y $L^1(\nu, E)$. Sin embargo, hemos preferido presentar ésta en la memoria porque realza el papel que juega el espacio $L^1(\nu, E)$ en el marco de los retículos de Fréchet.

Capítulo 2

Espacios de Fréchet con norma continua.

2.1 El teorema de Rybakov en espacios de Fréchet.

Bartle, Dunford y Schwartz [10, Corolario 2.4] demostraron que cualquier medida vectorial ν, con valores en un espacio de Banach X, tiene una medida de control λ. Posteriormente Rybakov [74] probó que la medida λ puede tomarse de la forma $|x'\nu|$ para un cierto x' en el dual del espacio de Banach X.

El resultado de Bartle, Dunford y Schwartz también es válido cuando la medida toma valores en un espacio de Fréchet X [53, Corolario II.1.2], pero el teorema de Rybakov no es cierto, como se pone de manifiesto con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1 *Sea $X = w$, el espacio de Fréchet de todas las sucesiones reales con la topología producto y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la σ-álgebra de los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Sea $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow w$ la medida vectorial dada por $\nu(A) = \chi_A$.*

El espacio dual $X' = \phi$ es el espacio de las sucesiones que son eventualmente nulas, es decir, aquellas que tienen todos sus términos nulos, salvo un número finito. Entonces, cada $x' \in X'$ puede escribirse como

$$x' = \sum_{j \in F} \alpha_j e_j,$$

con $\alpha_j \in \mathbb{R}$, F un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $e_j = \left(0, \ldots, 1^{j)}, \ldots, 0, \ldots\right) \in \phi$. Entonces

$$|x'\nu|(A) = \sum_{j \in F \cap A} |\alpha_j|.$$

Es claro que dado x' existen conjuntos $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que $|x'\nu|(A) = 0$ y A no es ν-nulo. Por lo tanto, $|x'\nu|$ no es una medida de control para ν para ningún x'.

Obsérvese que la medida ν es puramente atómica.

Ejemplo 2.2 *[53, Ejemplo VI.3.1]*

Sea $X = w$, Σ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel del conjunto $[0,1]$ y λ la medida de Lebesgue. La medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ dada por

$$\nu(A) = \left(\lambda\left(A \cap \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]\right)\right)_n$$

es una medida no atómica, para la que no es posible encontrar $x' \in X'$ tal que $|x'\nu|$ sea una medida de control. Éste se basa en que el rango de ν está contenido en $(\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \cdots \times (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \times \cdots$ y ningún funcional de ϕ puede exponer ningún elemento de este conjunto. Los detalles se verán en la prueba del Teorema 2.4

En esta sección caracterizaremos aquellos espacios de Fréchet que verifican el teorema de Rybakov, es decir, si $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva, entonces existe $x' \in X'$ tal que $|x'\nu|$ es una medida de control para ν.

En lo que sigue, consideraremos un espacio de Fréchet X, un espacio medible (Ω, Σ). Diremos que X verifica la *propiedad de Rybakov* si para cualquier medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ existe algún elemento $x' \in X'$ tal que $|x'\nu|$ es una medida de control para ν (lo que denotaremos por $\nu \ll |x'\nu|$). En lo que sigue denotaremos con D_ν al siguiente subconjunto de X'

$$D_\nu = \{x' \in X' : \nu \ll |x'\nu|\}.$$

Veremos que los espacios de Fréchet que tienen la propiedad de Rybakov son aquellos que admiten una norma continua. Observemos que en los ejemplos dados anteriormente, las medidas toman valores en w. Este espacio es, en cierto sentido, el prototipo de los espacios de Fréchet que no verifican la propiedad de Rybakov, ya que por un resultado clásico de Bessaga y Pełczynski [11], [46, Teorema 7.2.7], un espacio de Fréchet tiene norma continua si y sólo si no tiene una copia (complementada) de w.

En la prueba del resultado combinaremos la idea de Anantharaman [6] de reducir el teorema de Rybakov a la existencia de puntos expuestos en el rango de la medida con el teorema de Amir y Lindenstrauss [5, Teorema 4] que establece que en un espacio de Banach cualquier conjunto convexo y débil compacto tiene puntos expuestos.

Recordemos que un punto $x \in K \subset X$ es un *punto expuesto* de K si existe un funcional $x' \in X'$ tal que $\langle x', y\rangle < \langle x', x\rangle$, para todo $y \in K \setminus \{x\}$.

Posteriormente, han sido obtenidas pruebas más simples y directas del teorema de Rybakov en espacios de Fréchet (reales o complejos). Por ejemplo, vease la dada en [72]. Nosotros presentamos aquí la prueba original que aparece en [36].

Observemos que si la topología del espacio de Fréchet X está determinada por una familia creciente de seminormas $(p_k)_k$ y éste admite una norma continua $\|\cdot\|$ entonces, su topología también está determinada por la familia creciente de normas

$$q_n(\cdot) := p_n(\cdot) + \|\cdot\|, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

En lo que sigue denotaremos por X_n al espacio (normado) X dotado con la topología generada por la norma q_n. Es claro que si X_n' denota el dual del espacio X_n y X' el dual del espacio de Fréchet X, entonces $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n'$.

En la prueba del siguiente teorema será de utilidad el siguiente lema de carácter técnico.

Lema 2.3 *Para cualquier subconjunto K de un espacio de Fréchet X que admite norma continua se verifica:*

1. *La clausura de K en X es igual a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K^n}$, donde $\overline{K^n}$ denota la clausura de K en X_n.*

2. $\mathrm{Exp}(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Exp}_n(K)$, *donde* $\mathrm{Exp}(K)$ *es el conjunto de puntos expuestos de K en X y* $\mathrm{Exp}_n(K)$ *es el conjunto de puntos expuestos de K en X_n.*

PRUEBA: (1) Como la topología de X es más fina que la de cada X_n, se tiene que la clausura $\overline{K}$ de K en X está contenida en $\overline{K^n}$, para cada n. Por tanto, $\overline{K} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K^n}$

Por otra parte, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K^n}$ y U es un entorno del origen en X entonces, para algún n, existe un entorno del origen U_n en X_n tal que $U_n \subset U$. Entonces

$$\emptyset \neq (x + U_n) \cap K \subset (x + U) \cap K.$$

Por tanto, $x \in \overline{K}$.

(2) Si $x \in \operatorname{Exp}(K)$, entonces existe $x' \in X'$ tal que $\langle x', y\rangle < \langle x', x\rangle$ para todo $y \in K \setminus \{x\}$. Ya que $x' \in X'_n$ para algún n, se tiene que $x \in \operatorname{Exp}_n(K)$. Por tanto, $\operatorname{Exp}(K) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Exp}_n(K)$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Exp}_n(K)$ entonces, $x \in \operatorname{Exp}_n(K)$ para algún n. Por tanto, existe $x' \in X'_n$ tal que $\langle x', y\rangle < \langle x', x\rangle$ para todo $y \in K \setminus \{x\}$. Como $x' \in X'$, entonces $x \in \operatorname{Exp}(K)$. Se concluye que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Exp}_n(K) \subset \operatorname{Exp}(K)$. ■

Teorema 2.4 *Para cualquier espacio de Fréchet X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X admite una norma continua.*

2. *Cualquier subconjunto convexo débil compacto de X es la envolvente convexa cerrada de sus puntos expuestos.*

3. *X tiene la propiedad de Rybakov.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $(q_n)_n$ una sucesión creciente de normas que define la topología de X, como se ha descrito en (2.1).

Sea K un subconjunto convexo y $\sigma(X, X')$-compacto de X. Puesto que $X'_n \subset X'$ y la aplicación identidad es $\sigma(X, X') - \sigma(X_n, X'_n)$ continua para cada n, se tiene que K es convexo y $\sigma(X_n, X'_n)$-compacto para cada n. Denotamos por $\widehat{X_n}$ al espacio de Banach, compleción del espacio normado X_n. Como $\widehat{X_n}' = X'_n$, K es un conjunto convexo y $\sigma\left(\widehat{X_n}, \widehat{X_n}'\right)$-compacto de $\widehat{X_n}$. Aplicando [5, Teorema 4] al espacio de Banach $\widehat{X_n}$ se obtiene

$$K = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{Exp}_n(K))}^n, \text{ para cada } n, \tag{2.2}$$

donde la clausura está tomada en $\widehat{X_n}$. Observemos que los puntos expuestos de K en X_n y $\widehat{X_n}$ coinciden.

Ya que $\widehat{X_n}' = X'_n \subset X'$, tenemos que $\operatorname{Exp}_n(K) \subset \operatorname{Exp}(K)$ para cada n. Aplicando (2.2) y el apartado (1) del Lema 2.3 obtenemos

$$K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\operatorname{co}(\operatorname{Exp}_n(K))}^n = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{Exp}(K))}. \tag{2.3}$$

Por otra parte, $\operatorname{Exp}(K) \subset K$. Como K es convexo y $\sigma(X, X')$-compacto, entonces $\overline{\operatorname{co}(\operatorname{Exp}(K))} \subseteq K$, que junto con (2.3) nos da

$$\overline{\operatorname{co}(\operatorname{Exp}(K))} = K. \tag{2.4}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Por [53, Corolario VI.3.2], la medida ν tiene una medida de control de Rybakov si el rango $\nu(\Sigma)$ tiene al menos un punto expuesto. Además, por [53, Teorema VI.6.1], el conjunto $\overline{\operatorname{co}(\nu(\Sigma))}$ es convexo y $\sigma(X, X')$-compacto. Por hipótesis se tiene que

$$\operatorname{Exp}\left(\overline{\operatorname{co}(\nu(\Sigma))}\right) \neq \emptyset.$$

Por [53, Teorema VI.4.1], los conjuntos $\overline{\operatorname{co}(\nu(\Sigma))}$ y $\nu(\Sigma)$ tienen exactamente los mismos puntos expuestos. Por tanto, $\nu(\Sigma)$ tiene, al menos, un punto expuesto.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que X no admite una norma continua. Entonces X tiene una copia complementada de w. Podemos definir una medida con valores en X (los Ejemplos 2.1 y 2.2, entre otros, dan prueba de ello) que no tiene medida de control de Rybakov, luego no se cumple (3) . ■

El teorema anterior garantiza que el espacio $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia de w si X no la tiene.

Teorema 2.5 *Sea X un espacio de Fréchet que no tiene una copia de w, y sea ν una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en X. Entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia de w.*

PRUEBA: Por [46, Teorema 7.2.7], si X no tiene una copia de w entonces X admite una norma continua. Por el Teorema 2.4, la medida ν tiene una medida de control de Rybakov λ.

Si definimos

$$\|f\| = \int_\Omega |f| \, d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X),$$

es claro que ésta es una norma continua sobre $L^1(\nu, X)$. Una nueva utilización del Teorema 2.4, prueba que $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia de w. ■

Nota 2.6 *Es claro que existen medidas vectoriales $\nu : \Sigma \longrightarrow w$ para las que $L^1(\nu, w)$ no tiene copia de w. De hecho, pueden conseguirse medidas $\nu : \Sigma \longrightarrow w$, tales que $\overline{\mathrm{sp}}(\nu(\Sigma)) = w$ y $L^1(\nu, w)$ sea un espacio de Banach (que no tiene una copia de w). Por ejemplo, la medida $\nu(A) = \left(\int_A r_n d\lambda\right)_n \in w$ [21, Teorema 3. Ejemplo], donde Σ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $[0,1]$, λ la medida de Lebesgue y r_n las funciones de Rademacher, definidas en $[0,1]$, verifica $\overline{\mathrm{sp}}(\nu(\Sigma)) = w$ mientras que $L^1(\nu, w)$ es el espacio de Banach de las funciones integrables Lebesgue $L^1(\lambda)$.*

Walsh [81] mejora el resultado de Rybakov probando que para una medida vectorial con valores en un espacio de Banach X, el conjunto de los funcionales $x' \in X'$ tales que $|x'\nu|$ es una medida de control para ν es un conjunto denso en X', cuando se considera en X' la topología de la norma.

El siguiente resultado es la versión del teorema de Walsh para espacios de Fréchet con norma continua.

Teorema 2.7 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva tal que $D_\nu \neq \emptyset$. Entonces se verifican*

1. *D_ν es $\beta(X', X)$-denso en X'.*
2. *Existe una base de entornos del origen $\mathcal{U} = (U_n)_n$ en X tal que $D_\nu \cap U_n^\circ$ es $\beta(X', X)$-denso en U_n°, para cada $n = 1, 2, ...$*

PRUEBA: (1) Sea $x' \in X'$ y H un subconjunto acotado de X. Tomamos $z' \in D_\nu$. Entonces $x' - z' \in X'$ y, puesto que H es acotado, existe $\alpha > 1$, tal que

$$|\langle x' - z', x\rangle| \leq \alpha,$$

para todo $x \in H$.

Consideramos las medidas reales numerablementes aditivas $x'\nu$ y $z'\nu$. Por [27, Lema IX.2.1], existe $t_0 \in \left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1\right)$ tal que

$$y' = t_0 x' + (1 - t_0) z' \in D_\nu.$$

Ahora, observemos que para cualquier $x \in H$ se verifica

$$\begin{aligned} |\langle x' - y', x\rangle| &= |\langle x' - t_0 x' - (1 - t_0) z', x\rangle| \\ &= (1 - t_0) |\langle x' - z', x\rangle| \\ &\leq (1 - t_0) \leq 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $(x' + H^\circ) \cap D_\nu \neq \emptyset$ y se concluye que D_ν es $\beta(X', X)$-denso en X'.

(2) Sea $\mathcal{V} = (V_n)_n$ una base decreciente de entornos de cero de X y $z' \in D_\nu$. Ya que $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^\circ$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $z' \in V_n^\circ$ para todo $n \geq p$. Sea $H \subset X$ un conjunto acotado arbitrario.

Fijemos el conjunto H y el entero positivo $n \geq p$. Para $x' \in V_n^\circ$ arbitrario, construimos el elemento $y' = t_0 x' + (1 - t_0) z'$ como en (1). Igual que antes $y' \in D_\nu$. Además,

$$\begin{aligned} |\langle y', x\rangle| &= |\langle t_0 x' + (1 - t_0) z', x\rangle| \\ &\leq t_0 |\langle x', x\rangle| + (1 - t_0) |\langle z', x\rangle| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

para todo $x \in V_n$. Por tanto, $y' \in V_n^\circ$. Esto es $y' \in V_n^\circ \cap D_\nu$.

Tomando ahora $U_n = V_{p+n-1}$, para todo $n \geq 1$, se concluye el resultado.
■

Nota 2.8 *Si X admite una norma continua, entonces según el Teorema 2.4 la hipótesis $D_\nu \neq \emptyset$ se verifica para cualquier medida ν con valores en X.*

2.2 Elementos del dual de $L^1(\nu, X)$.

Uno de los problemas más importantes en el estudio del espacio $L^1(\nu, X)$ es la identificación de su espacio dual. Muchos han sido los intentos para obtener una representación útil de los elementos del dual de $L^1(\nu, X)$.

Cuando X es un espacio de Banach, $L^1(\nu, X)$ es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, donde λ es una medida de control de Rybakov [21, Teorema 1]. Esto permite tener una representación del dual de $L^1(\nu, X)$ como el α-dual de Köthe de un espacio de Banach de funciones, aunque la representación no es de gran utilidad, pues no depende del espacio de Banach X en el que la medida toma sus valores.

Anteriormente, Egghe [34] creyó erroneamente, como pondría de manifiesto posteriormente Okada en [65, Ejemplo 2], que podía identificar $L^1(\nu, X)'$ con el espacio de las funciones medibles, con valores en X', esencialmente acotadas.

Okada [65, Teorema 8], siguiendo las ideas de Egghe, obtiene una representación, en el marco de los espacios de Banach, de los elementos del dual de $L^1(\nu, X)$ en función de la medida ν y de elementos de X'.

Finalmente comentamos que Ricker [71], obtiene representaciones concretas del dual de $L^1(\nu, X)$ para cierto tipo de medidas ν.

En esta sección seguimos las ideas de Okada y aportamos una representación similar a la obtenida por él de los elementos del dual de $L^1(\nu, X)$, cuando X es un espacio de Fréchet con norma continua. En la siguiente sección se utilizará esta representación para el estudio de la convergencia débil en $L^1(\nu, X)$.

Los siguientes lemas, de carácter técnico, se usarán en la prueba del teorema principal de esta sección que describe los elementos del dual de $L^1(\nu, X)$.

Si T es un elemento del espacio dual de $L^1(\nu, X)$, definimos la función de conjunto $\lambda_T : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\lambda_T(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

El teorema de la convergencia dominada y la continuidad de T garantizan que λ_T es una medida escalar numerablemente aditiva. A la medida λ_T se le suele llamar *medida asociada al funcional* T. Posteriormente, en el capítulo IV volvemos a trabajar con estos elementos, pero en el caso vectorial.

Lema 2.9 *Sea X un espacio de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $T : L^1(\nu, X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe una constante $K > 0$ y un número natural $p \geq 1$ tal que*

$$|\lambda_T|(A) \leq K \|\nu\|_n (A), \quad A \in \Sigma,$$

para todo $n \geq p$.

2. *La inclusión $L^1(\nu, X) \subset L^1(\lambda_T)$, se tiene como espacios vectoriales, y*

$$T(f) = \int_\Omega f d\lambda_T, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

3. *Si $D_\nu \neq \emptyset$, entonces la inclusión $L^1(\nu, X) \subset L^1(\lambda_T)$ es continua.*

PRUEBA: Sea $(\|\cdot\|_k)_k$ la sucesión creciente de seminormas que genera la topología de $L^1(\nu, X)$.

(1) La continuidad de T garantiza la existencia de una constante $K > 0$ y de un $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|T(f)| \leq K \|f\|_p, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Sea $A \in \Sigma$ un conjunto medible y $\{A_1, ..., A_m\}$ una partición cualquiera de A en conjuntos medibles. Entonces, eligiendo $\theta_j \in \{-1, 1\}$, según el signo de $|\lambda_T(A_j)|$ y, teniendo en cuenta la linealidad de T, se verifica

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |\lambda_T(A_j)| &= \sum_{j=1}^{m} \theta_j \lambda_T(A_j) = T\left(\sum_{j=1}^{m} \theta_j \chi_{A_j}\right) \\ &= \left|T\left(\sum_{j=1}^{m} \theta_j \chi_{A_j}\right)\right| \leq K \left\|\sum_{j=1}^{m} \theta_j \chi_{A_j}\right\|_p \\ &= K \|\chi_A\|_p = K \|\nu\|_p (A),\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\||f|\|_p = \|f\|_p$, para todo $f \in L^1(\nu, X)$ y para todo $p \geq 1$.

Como la partición tomada de A es arbitraria, se tiene

$$|\lambda_T|(A) \leq K \|\nu\|_p (A).$$

Finalmente, como $\|\nu\|_p (A) \leq \|\nu\|_n (A)$ para todo $n \geq p$, se obtiene (1).

(2) Para probar que $L^1(\nu, X)$ está contenido en $L^1(\lambda_T)$ es suficiente ver que si $f \in L^1(\nu, X)$, es una función positiva, entonces $f \in L^1(\lambda_T)$.

Sea $f \in L^1(\nu, X)$, con $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_n$ tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow f$. De aquí que $0 \leq \varphi_n \chi_A \uparrow f\chi_A$ para cada $A \in \Sigma$. Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\varphi_n \chi_A \longrightarrow f\chi_A \text{ en } L^1(\nu, X).$$

Por otro lado, la continuidad de T, implica que $T(\varphi_n \chi_A)$ converge a $T(f\chi_A)$ en $\mathbb{R}$. Para las funciones simples se tiene, trivialmente, que $T(\varphi_n \chi_A) = \int_A \varphi_n d\lambda_T$. Concluimos que $\left(\int_A \varphi_n d\lambda_T\right)_n$ es convergente en $\mathbb{R}$. De $0 \leq \varphi_n \uparrow f$ y de la convergencia de $\left(\int_A \varphi_n d\lambda_T\right)_n$ en $\mathbb{R}$, se deduce, por el teorema I de Lewis que $f \in L^1(\lambda_T)$.

Aplicando ahora, el teorema de la convergencia dominada en el espacio $L^1(\lambda_T)$, obtenemos $\int_A \varphi_n d\lambda_T \longrightarrow \int_A f d\lambda_T$, para cada $A \in \Sigma$. En particular,

$$T(f) = \lim_n T(\varphi_n) = \lim_n \int_\Omega \varphi_n d\lambda_T = \int_\Omega f d\lambda_T.$$

(3) Sea $J : L^1(\nu, X) \longrightarrow L^1(\lambda_T)$ la inclusión natural. Sea $(f_k)_k$ una sucesión de $L^1(\nu, X)$ que converge a $f \in L^1(\nu, X)$ y tal que $(Jf_k)_k$ converge en $L^1(\lambda_T)$ a un elemento $g \in L^1(\lambda_T)$.

Sea $x' \in D_\nu$, entonces $x' \in U_n^\circ$ para algún número natural n. Como

$$\int_\Omega |f - f_k| \, d|x'\nu| \leq \|f - f_k\|_n$$

y $\lim_k \|f - f_k\|_n = 0$, se deduce que $f_k \to f$ en el espacio $L^1(|x'\nu|)$. Por tanto, existe una subsucesión que converge $|x'\nu|$-*a.e.* a f. En particular, teniendo en cuenta que $|x'\nu|$ es una medida de control de Rybakov, también converge ν-*a.e.* Como λ_T es absolutamente continua respecto de ν, se tiene que $g = Jf$ en $L^1(\lambda_T)$. Aplicando el teorema de la gráfica cerrada, se obtiene la continuidad de J. ■

Lema 2.10 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva tal que $D_\nu \neq \emptyset$. Si $B \in \Sigma$ entonces,*

$$\|\nu\|_n(B) = \sup\{|x'\nu|(B) : x' \in D_\nu \cap U_n^\circ\},$$

para cada $n \geq 1$.

PRUEBA: Es claro que

$$\sup\{|x'\nu|(B) : x' \in D_\nu \cap U_n^\circ\} \leq \|\nu\|_n(B).$$

Para obtener la desigualdad contraria, es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ se verifica

$$\|\nu\|_n(B) \leq \sup\{|x'\nu|(B) : x' \in D_\nu \cap U_n^\circ\} + \varepsilon.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la definición de semivariación existe $z' \in U_n^\circ$ tal que

$$\|\nu\|_n(B) \leq |z'\nu|(B) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

El conjunto $H = \{\nu(A \cap B) - \nu(C \cap B) : A, C \in \Sigma\}$ es un acotado de X. Entonces, por el apartado (2) del Teorema 2.7, existe $x' \in D_\nu \cap U_n^\circ$ tal que

$$|\langle z', h \rangle| \leq |\langle x', h \rangle| + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.6}$$

para todo $h \in H$.

Si $\{A_1, ..., A_m\}$ es una partición finita de B en conjuntos medibles y ponemos

$$A^+ = \bigcup_{z'\nu(A_k) \geq 0} A_k \quad \text{y} \quad A^- = \bigcup_{z'\nu(A_k) < 0} A_k$$

entonces, teniendo en cuenta (2.6), se verifica la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} |z'\nu(A_k)| &= \left\langle z', \sum_{k=1}^{m} \mathrm{sg}(z'\nu(A_k))\, \nu(A_k) \right\rangle \\ &= \left\langle z', \nu\left(A^+\right) - \nu\left(A^-\right) \right\rangle \\ &\leq \left| \left\langle x', \nu\left(A^+\right) - \nu\left(A^-\right) \right\rangle \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |x'\nu(A_k)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sup\{|y'\nu|(B) : y' \in D_\nu \cap U_n^\circ\} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.7) obtenemos que

$$|z'\nu|(B) \leq \sup\{|y'\nu|(B) : y' \in D_\nu \cap U_n^\circ\} + \frac{\varepsilon}{2},$$

que junto a (2.5) nos da el resultado. ■

Para una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ denotamos con $L^\infty(\nu)$ el espacio de (clases de) funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son esencialmente acotadas respecto de la medida ν.

Teorema 2.11 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva tal que $D_\nu \neq \emptyset$. Sea T un elemento del dual del* *espacio* $L^1(\nu, X)$. *Entonces existe un elemento* $g \in L^\infty(\nu)$, *una partición de* Ω *en conjuntos medibles* $(A_n)_n \subset \Sigma$ *y una sucesión* $(x'_n)_n$ *en* X' *tal que*

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} fgd(x'_n \nu), \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} gd(x'_n \nu)$ *es incondicionalmente convergente en la topología* $\sigma\left(L^1(\nu, X)', L^1(\nu, X)\right)$.

PRUEBA: De acuerdo con el apartado (2) del Teorema 2.7, podemos considerar una base de entornos del origen de X, $(U_n)_n$, para la que $D_\nu \cap U_n^\circ$ sea $\beta(X', X)$-denso en U_n°, para cada n.

Por el Lema 2.9 sabemos que la medida λ_T asociada al funcional T es absolutamente continua respecto a la medida $|x'\nu|$, para cualquier $x' \in D_\nu$.

Ahora, para cada $x' \in D_\nu$, por ser $|x'\nu|$ medida de control de Rybakov, sabemos que los conjuntos ν-nulos y $|x'\nu|$-nulos son los mismos. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función $g_{x'} \in L^1(x'\nu)$ tal que

$$\lambda_T(A) = \int_A g_{x'} d|x'\nu|, \tag{2.8}$$

para cada conjunto medible A.

Ahora usaremos un procedimiento de exhaución, similar al que se usa en [65, Lema 6], para construir las sucesiones $(A_n)_n$ y $(x'_n)_n$ y, simultáneamente, definir la función g.

Consideremos el conjunto medible

$$A(x') = \{w \in \Omega : |g_{x'}(w)| \leq 2K\},$$

donde K es la constante que hemos obtenido en el apartado (1) del Lema 2.9 y fijemos una medida de control μ para la medida ν. Diremos que un conjunto medible tiene la propiedad (P) si está contenido en $A(x')$ para algún $x' \in D_\nu$.

A continuación, veremos que se verifica:

(i): cualquier subconjunto medible de un conjunto medible con la propiedad (P) también tiene la propiedad (P), y

(ii): si B es un conjunto medible tal que $\mu(B) > 0$, entonces existe un conjunto medible $C \subset B$ tal que $\mu(C) > 0$ y C tiene la propiedad (P).

La prueba de (i) es inmediata.

Veamos (ii). Como $\mu(B) > 0$ y μ es una medida de control para ν existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|\nu\|_k(B) > 0$ para todo $k \geq p$.

Tomando $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, por el apartado (1) del Lema 2.9 también se cumple, $|\lambda_T|(B) \leq K\|\nu\|_k(B)$.

Por el Lema 2.10, existe $x' \in D_\nu \cap U_k^\circ$ tal que

$$\|\nu\|_k(B) < 2|x'\nu|(B). \tag{2.9}$$

Veamos que $|x'\nu|(B \cap A(x')) > 0$. Como $B = (B \cap A(x')) \cup (B \backslash A(x'))$ se verifica

$$2|x'\nu|(B \cap A(x')) = 2|x'\nu|(B) - 2|x'\nu|(B \backslash A(x')). \tag{2.10}$$

Si $w \in B \backslash A(x')$ entonces, $|g_{x'}(w)| > 2K$. Integrando respecto de $|x'\nu|$ y usando (2.8) se tiene

$$\begin{aligned} |\lambda_T|(B \backslash A(x')) &= \int_{B \backslash A(x')} |g_{x'}|\, d|x'\nu| \\ &\geq 2K|x'\nu|(B \backslash A(x')). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por el apartado (1) del Lema 2.9, deducimos

$$|\lambda_T|(B \backslash A(x')) \leq K\|\nu\|_k(B \backslash A(x')),$$

que junto con la desigualdad anterior (2.11) nos da

$$2|x'\nu|(B \backslash A(x')) \leq \|\nu\|_k(B \backslash A(x')).$$

Usando esta última desigualdad y las relaciones obtenidas, (2.9) y (2.10) tenemos que

$$2|x'\nu|(B \cap A(x')) > \|\nu\|_k(B) - \|\nu\|_k(B \backslash A(x')) \geq 0.$$

Como $|x'\nu|(B\cap A(x'))>0$ y $|x'\nu|$ es medida de control de Rybakov, se verifica que $\mu(B\cap A(x'))>0$. Es claro que el conjunto $C=B\cap A(x')$ verifica la tesis de (ii).

Con (i) y (ii) usamos un procedimiento de exhaución [65, Lema 6], para obtener una sucesión disjunta de conjuntos medibles $(A_n)_n$ con la propiedad (P), y un conjunto μ-nulo N tal que $\Omega=N\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

Definimos ahora, la función g por la expresión

$$g(w)=\begin{cases}\varphi_n(w)\,g_{x'_n}(w), & w\in A_n,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

donde φ_n denota la derivada de Radon-Nikodym de $x'_n\nu$ respecto de $|x'_n\nu|$.

Para cada $n=1,2,..,$ observemos que $|\varphi_n|=1$ ν-*a.e.* en A_n. Por tanto, se tiene $|g|\leq 2K$, es decir, $g\in L^\infty(\nu)$.

Por último, teniendo en cuenta las definiciones de la función g y de la medida λ_T, se tiene

$$\begin{aligned}T(f) &= \int_\Omega f d\lambda_T=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n} f d\lambda_T\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f d\lambda_T=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f g_{x'_n} d\,|x'_n\nu|\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f g_{x'_n}\varphi_n d\,(x'_n\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f g d\,(x'_n\nu),\end{aligned}$$

para cualquier $f\in L^1(\nu,X)$.

Es claro que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} gd\,(x'_n\nu)$ converge incondicionalmente a T, en la topología $\sigma\left(L^1(\nu,X)',L^1(\nu,X)\right)$. ■

2.3 Convergencia débil en $L^1(\nu,X)$.

En [65, Sección 4], se recogen las ideas de Curbera [22] y se dan condiciones que implican la convergencia débil en el espacio $L^1(\nu,X)$, cuando X es un espacio de Banach. En esta sección se generalizan los resultados de [65] a espacios de Fréchet que admiten una norma continua. El concepto de red casi-débil nula es introducido por Curbera [22].

En esta sección X será un espacio de Fréchet que admite una norma continua y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ será una medida vectorial numerablemente aditiva.

Decimos que una red $(f_\alpha)_\alpha$ de $L^1(\nu, X)$ es casi-débil nula si f_α converge a cero en la topología débil de $L^1(x'\nu)$, para cada $x' \in X'$.

Es claro que cualquier red débil nula es casi-débil nula.

Nota 2.12 *Una red casi-débil nula no tiene que ser acotada, pero una sucesion $(f_n)_n$ casi-débil nula si lo es. Para comprobar ésto, consideramos la sucesión de medidas $\nu_n : \Sigma \longrightarrow X$ con densidad f_n, respecto a ν. Para cada conjunto $A \in \Sigma$, se verifica*

$$\lim_n \nu_n(A) = 0,$$

en la topología $\sigma(X, X')$. Por tanto, $(\nu_n(A))_n$ es $\sigma(X, X')$ acotado. Es decir, existe y es finito

$$\sup_n p_U(\nu_n(A)),$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Aplicando el teorema de acotación de Nikodym [27, Teorema I.3.1], a la familia de medidas escalares, $\{x'\nu_n : x' \in U^\circ, n \geq 1\}$ se obtiene

$$\sup_n \{|x'\nu_n|(\Omega) : x' \in U^\circ\} = \sup_n \{\|f_n\|_U\} < \infty.$$

Para redes acotadas tenemos la siguiente caracterización.

Lema 2.13 *Una red acotada $(f_\alpha)_\alpha$ de $L^1(\nu, X)$ es casi-débil nula si y sólo si la red $(\nu_{f_\alpha}(A))_\alpha$ converge débilmente a cero en X, para cada $A \in \Sigma$.*

PRUEBA: $\Rightarrow$) Sea $(f_\alpha)_\alpha$ una red acotada de $L^1(\nu, X)$ y supongamos que es casi-débil nula. Observemos que si $x' \in X'$, entonces

$$\langle x', \nu_{f_\alpha}(A)\rangle = \int_A f_\alpha d(x'\nu) = \int_\Omega \chi_A f_\alpha d(x'\nu) = \langle \chi_A, f_\alpha\rangle_{L^1(x'\nu)}.$$

Como $\chi_A \in L^\infty(x'\nu)$, de la convergencia a cero de $\langle \chi_A, f_\alpha\rangle_{L^1(x'\nu)}$, sigue la convergencia débil a cero de $(\nu_{f_\alpha}(A))_\alpha$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora, que $(\nu_{f_\alpha}(A))_\alpha$ converge a cero en la topología $\sigma(X, X')$ para todo $A \in \Sigma$. Veamos que $(f_\alpha)_\alpha$ converge a cero en $L^1(x'\nu)$, para cada $x' \in X'$.

Sea $x' \in X'$ y $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $x' \in U^\circ$. Sea $g \in L^\infty(x'\nu)$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Puesto que $(f_\alpha)_\alpha$ es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_\alpha \{\|f_\alpha\|_U\} \leq M.$$

Puesto que la medida $|x'\nu|$ es finita, podemos tomar una función simple φ tal que

$$\|g - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

De la convergencia débil a cero de $(\nu_{f_\alpha}(A))_\alpha$ en X para cada $A \in \Sigma$, se deduce que

$$\lim_\alpha \int_\Omega f_\alpha \varphi d(x'\nu) = 0.$$

Por tanto, existe un α_0 tal que

$$\left|\int_\Omega f_\alpha \varphi d(x'\nu)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f_\alpha g d(x'\nu)\right| &\leq \left|\int_\Omega f_\alpha (g - \varphi) d(x'\nu)\right| + \left|\int_\Omega f_\alpha \varphi d(x'\nu)\right| \\
&\leq \int_\Omega |g - \varphi| |f_\alpha| d|x'\nu| + \left|\int_\Omega f_\alpha \varphi d(x'\nu)\right| \\
&\leq \|g - \varphi\|_\infty \int_\Omega |f_\alpha| d|x'\nu| + \left|\int_\Omega f_\alpha \varphi d(x'\nu)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como ésto ocurre para todo $x' \in X'$ se tiene que $(f_\alpha)_\alpha$ es casi-débil nula. ■

Para una función $g \in L^\infty(\nu)$ y un funcional $x' \in X'$, la aplicación $T_{x'g} : L^1(\nu, X) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$T_{x'g}(f) = \int_\Omega fgd(x'\nu)$$

es lineal y continua. La linealidad es clara y la continuidad sigue de

$$|T_{x'g}(f)| = \left|\int_\Omega fgd(x'\nu)\right| \leq \int_\Omega |f|\,|g|\,d\,|x'\nu| \leq \|g\|_\infty \|f\|_U,$$

para algún $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $x' \in U^\circ$.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{H} = \{T_{x'g} : x' \in X', g \in L^\infty(\nu)\} \subset L^1(\nu, X)'.$$

En [65, Ejemplo 4], se muestra que $\mathcal{H}$ no es necesariamente un subespacio vectorial de $L^1(\nu, X)'$. Sin embargo, como pondremos de manifiesto más adelante, el subespacio que genera juega un papel importante en el estudio de la convergencia de redes casi-débil nulas.

En el Teorema 2.11 hemos comprobado que cualquier funcional $T \in L^1(\nu, X)'$ está definido mediante una función $g \in L^\infty(\nu)$, una partición $(A_n)_n$ de Ω y una sucesión $(x'_n)_n$ de X' tal que $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} fgd(x'_n\nu)$. Con la notación introducida más arriba, podemos escribir que

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{x'_n g\chi_{A_n}}(f) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} T_{x'_n g\chi_{A_n}}(f) = \lim_N \left(\sum_{n=1}^{N} T_{x'_n g\chi_{A_n}}\right)(f).$$

Puesto que $\sum_{n=1}^{N} T_{x'_n g\chi_{A_n}} \in \mathrm{sp}(\mathcal{H})$, tenemos que el subespacio generado por $\mathcal{H}$ es denso en $L^1(\nu, X)'$ dotado éste de la topología $\sigma\left(L^1(\nu, X)', L^1(\nu, X)\right)$.

A continuación comprobaremos que la densidad del subespacio generado por $\mathcal{H}$, en el espacio $L^1(\nu, X)'$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $L^1(\nu, X)$, equivale a la convergencia débil de las redes acotadas casi-débil nulas. Antes, necesitamos el siguiente lema, que no hemos encontrado en la bibliografía consultada.

Lema 2.14 *Sea Y un espacio de Fréchet y Z un subespacio $\sigma(Y', Y)$-denso en Y'. Entonces $\sigma(Y, Y')|_H = \sigma(Y, Z)|_H$, para todo acotado H de Y si y sólo si Z es $\beta(Y', Y)$-denso en Y'.*

PRUEBA: Denotemos por $J : Y \longrightarrow Y''$ la inclusión canónica de Y en su bidual Y''.

$\Leftarrow$) Sea $Z \subset Y'$ un subespacio $\beta(Y', Y)$-denso y $H \subset Y$ un conjunto acotado. Entonces H° es un entorno del origen de Y' para la topología $\beta(Y', Y)$. Por tanto, $H^{\circ\circ} \subset Y''$ es un conjunto equicontinuo para la topología $\beta(Y', Y)$.

De $J(H) \subset H^{\circ\circ}$ se deduce que $J(H)$ es equicontinuo. Por [78, Teorema 32.5], se tiene que

$$\sigma(Y'', Y')|_{J(H)} = \sigma(Y'', Z)|_{J(H)}.$$

Por tanto, $\sigma(Y, Y')|_H = \sigma(Y, Z)|_H$.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $Z \subset Y'$ es un subespacio $\sigma(Y', Y)$-denso en Y' que no es $\beta(Y', Y)$-denso en Y'. Entonces, existe $y_0' \in Y'$ tal que $y_0' \notin \overline{Z}^{\beta(Y', Y)}$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $y'' \in Y''$ tal que

$$\langle y'', y_0' \rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle y'', z \rangle = 0, \quad z \in Z.$$

Por [46, Proposición 11.2.3], existe una red acotada $(y_\alpha)_\alpha \subset Y$ tal que $Jy_\alpha \longrightarrow y''$ en la topología $\sigma(Y'', Y')$.

Como $Jy_\alpha \longrightarrow y''$ en la topología $\sigma(Y'', Y')$ y $Z \subset Y'$, se tiene que $Jy_\alpha \longrightarrow y''$ para la topología $\sigma(Y'', Z)$. Puesto que $\langle y'', z \rangle = 0$ para todo $z \in Z$, se tiene que $Jy_\alpha \longrightarrow 0$ en la topología $\sigma(Y'', Z)$. En particular, $y_\alpha \longrightarrow 0$ en la topología $\sigma(Y, Z)$.

Razonando de la misma forma vemos que y_α no converge a cero en la topología $\sigma(Y, Y')$.

Si llamamos $H = \{y_\alpha\}_\alpha \cup \{0\}$, entonces H es un conjunto acotado en Y, para el que existen redes convergentes a cero en la topología $\sigma(Y, Z)|_H$, que no son convergentes a cero en la topología $\sigma(Y, Y')|_H$. Por tanto, estas dos topologías no coinciden. Finalizamos así la prueba del lema. ∎

Proposición 2.15 *Sea X un espacio de Fréchet con norma continua y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces son equivalentes:*

1. *Las redes acotadas casi-débil nulas y las redes acotadas débil nulas de $L^1(\nu, X)$ coinciden.*
2. $\operatorname{sp}(\mathcal{H})$ *es un subespacio denso de $L^1(\nu, X)'$ cuando se le dota de la topología $\beta\left(L^1(\nu, X)', L^1(\nu, X)\right)$.*

PRUEBA:

(1) $\Rightarrow$ (2) Por el lema anterior es suficiente probar que las topologías $\sigma\left(L^1(\nu, X), L^1(\nu, X)'\right)$ y $\sigma(L^1(\nu, X), \operatorname{sp}(\mathcal{H}))$ coinciden sobre los conjuntos acotados de $L^1(\nu, X)$. La topología $\sigma(L^1(\nu, X), \operatorname{sp}(\mathcal{H}))$ siempre es menos fina que la topología $\sigma\left(L^1(\nu, X), L^1(\nu, X)'\right)$. Veamos ahora el recíproco. Sea H un conjunto acotado de $L^1(\nu, X)$ y $(f_\alpha)_\alpha$ una red de H convergente en la topología $\sigma(L^1(\nu, X), \operatorname{sp}(\mathcal{H}))$ a una función $f \in H$. Para obtener la coincidencia de las topologías basta demostrar que f_α converge a f en la topología débil de $L^1(\nu, X)$. Tenemos que $(f_\alpha - f)_\alpha$ es una red acotada que converge a cero en la topología $\sigma(L^1(\nu, X), \operatorname{sp}(\mathcal{H}))$. Sean $x' \in X'$, y $g \in L^\infty(x'\nu)$ arbitrarios. Sea $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $x' \in U^\circ$. Como H es acotado, $\sup\{\|h\|_U : h \in H\} = M < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, como la función $g \in L^\infty(x'\nu)$, existe una función simple φ tal que

$$\|g - \varphi\|_{L^\infty(x'\nu)} \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Puesto que $T_{x'\varphi} \in \mathcal{H}$, existe α_0 tal que

$$|T_{x'\varphi}(f_\alpha - f)| = \left|\int_\Omega \varphi(f_\alpha - f)\, d(x'\nu)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega g\,(f_\alpha - f)\,d\,(x'\nu)\right| &\leq \left|\int_\Omega (g-\varphi)\,(f_\alpha - f)\,d\,(x'\nu)\right| + |T_{x'\varphi}\,(f_\alpha - f)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M}\int_\Omega |f_\alpha - f|\,d\,|x'\nu| + |T_{x'\varphi}\,(f_\alpha - f)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.12}$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. De (2.12), se deduce que $(f_\alpha - f)_\alpha$ es casi-débil nula. Por hipótesis, $(f_\alpha - f)_\alpha$ es débil nula y, por tanto, $f_\alpha \to f$ en la topología débil de $L^1(\nu, X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $(f_\alpha)_\alpha$ una red acotada casi-débil nula. Entonces $f_\alpha \to 0$ en la topología $\sigma\left(L^1(\nu, X), \mathrm{sp}(\mathcal{H})\right)$. Como $H = \{f_\alpha\} \cup \{0\}$ es acotado y las topologías $\sigma\left(L^1(\nu, X), \mathrm{sp}(\mathcal{H})\right)$ y $\sigma\left(L^1(\nu, X), L^1(\nu, X)'\right)$ coinciden sobre H, entonces $f_\alpha \to 0$ débilmente. ■

Corolario 2.16 *Sea X un Fréchet con norma continua, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva tal que $L^1(\nu, X)$ no tiene una copia complementada de l_1. Entonces las redes acotadas casi-débil nulas coinciden con las débil nulas.*

PRUEBA: Por el Teorema 2.11, y teniendo en cuenta la notación introducida más arriba, si $T \in L^1(\nu, X)'$ entonces podemos escribir,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_{x'_n g \chi_{A_n}}, \tag{2.13}$$

donde $x'_n \in X', g \in L^\infty(\nu)$ y $(A_n)_n$ es una partición de Ω. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} T_{x'_n g \chi_{A_n}}$ converge incondicionalmente en la topología $\sigma\left(L^1(\nu, X)', L^1(\nu, X)\right)$. Por [17, Lemas 8 y 10], la igualdad (2.13) también es cierta en la topología $\beta\left(L^1(\nu, X)', L^1(\nu, X)\right)$. Es decir, $\mathrm{sp}(\mathcal{H})$ es denso en $L^1(\nu, X)'$ para dicha topología. Por la proposición anterior se obtiene el resultado. ■

Recordemos que un espacio de Fréchet X, se dice que tiene la propiedad de Schur, si las sucesiones débiles convergentes, son convergentes.

Proposición 2.17 *Sea X un espacio de Fréchet con norma continua y con la propiedad de Schur y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces cualquier sucesión casi-débil nula de $L^1(\nu, X)$ es débil nula.*

PRUEBA: Sea λ una medida de control de Rybakov. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de $L^1(\nu, X)$ casi-débil nula. Consideremos la sucesión de medidas $(\nu_{f_n})_n$. Observemos que para cada conjunto $A \in \Sigma$ se verifica

$$\langle x', \nu_{f_n}(A)\rangle = \int_\Omega f_n \chi_A d(x'\nu) = \langle \chi_A, f_n\rangle_{L^1(x'\nu)}.$$

Ahora, puesto que $(f_n)_n$ es una sucesión casi-débil nula, $(\nu_{f_n}(A))_n$ converge débilmente en X. Como X tiene la propiedad de Schur, $(\nu_{f_n}(A))_n$ converge en la topología de X. Ya que $\nu_{f_n} \ll \lambda$ para cada n, por el teorema de Vitali-Hahn-Saks, se tiene que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup\{\|f_n\chi_A\|_U : n = 1, 2, ...\} = 0, \tag{2.14}$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$.

Sea $T \in L^1(\nu, X)'$, entonces existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que

$$|T(f)| \leq \|f\|_U, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Por otra parte, por el Teorema 2.11, existe una función $g \in L^\infty(\nu)$, una partición de Ω en conjuntos medibles $(A_n)_n$ y una sucesión $(x'_n)_n$ en X' tal que

$$T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} fgd(x'_i\nu), \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (2.14), existe $\delta > 0$ tal que si $\lambda(A) \leq \delta$, entonces

$$\sup\{\|f_n\chi_A\|_U : n = 1, 2, ...\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) < \infty$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda\left(\bigcup_{i=N_0+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=N_0+1}^{\infty} \lambda(A_i) < \delta.$$

Llamemos $A = \bigcup\limits_{i=N_0+1}^{\infty} A_i$.

Además, por ser $(f_n)_n$ casi-débil nula y $g\chi_{A_i} \in L^\infty(x_i'\nu)$ para cada i, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{A_i} f_n g d(x_i'\nu)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2N_0},$$

para todo $n \geq p$ y para todo $i = 1, ..., N_0$.

Finalmente, de

$$\begin{aligned}
|T(f_n)| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f_n g d(x_i'\nu)\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{N_0} \int_{A_i} f_n g d(x_i'\nu)\right| + \left|\sum_{i=N_0+1}^{\infty} \int_{A_i} f_n g d(x_i'\nu)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_0} \left|\int_{A_i} f_n g d(x_i'\nu)\right| + |T(f_n\chi_A)| \\
&\leq N_0 \frac{\varepsilon}{2N_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq p$, se deduce que $f_n \to 0$ en la topología débil de $L^1(\nu, X)$. ■

2.4 Funcionales estrictamente positivos.

Un funcional positivo x' sobre un retículo de Fréchet se dice estrictamente positivo si para cualquier $x > 0$ se tiene $\langle x', x\rangle > 0$. Los retículos de Fréchet que admiten funcionales estrictamente positivos son útiles en diversos contextos [1, Teorema 4.1] y han sido estudiados por diversos autores. Nuestro interés se centra no obstante en la linea seguida en [64, Teoremas 1 y 5], donde Moore estudia la existencia de funcionales estrictamente positivos en conexión con la existencia de normas reticulares estrictamente monótonas.

En el teorema central de esta sección vamos a caracterizar los retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil que admiten funcionales estrictamente positivos. El interés de este resultado se pondrá de manifiesto en la siguiente sección donde lo usaremos para obtener otro teorema de representación para retículos de Fréchet.

Es conocido que un retículo de Banach con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil admite funcionales estrictamente positivos [3, Teorema 12.14]. Por otra parte, recordemos que el espacio w de todas las sucesiones reales, con el orden puntual y con la topología producto es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil. Sin embargo, no admite funcionales estrictamente positivos. En efecto, cualquier funcional positvo en w es de la forma

$$x' = \sum_{j \in F} \alpha_j e_j,$$

donde los α_j son números reales positivos y F un subconjunto finito arbitrario de $\mathbb{N}$. Si tomamos $x \in w$ de la forma

$$x = \sum_{i \in A} x_i e_i,$$

con x_i números reales positivos, y A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tal que $A \cap F = \emptyset$, entonces $x > 0$, mientras que $\langle x', x \rangle = 0$.

Ya hemos visto, en el Teorema 2.4, que el espacio w es el prototipo de los retículos de Fréchet que no admiten norma continua. Veamos ahora que, en cierto sentido, también es el prototipo de los retículos de Fréchet que no tienen funcionales estrictamente positivos.

Sea E un retículo de Fréchet y sea $(p_k)_k$ una sucesión creciente de seminormas reticulares que generan la topología de E. Si E tuviese un funcional estrictamente positivo x', entonces

$$\|x\| := \langle x', |x| \rangle, \quad x \in E$$

define una norma reticular continua sobre E. En este caso, la topología de E también vendría determinada por la sucesión creciente de normas reticulares

$$\|\cdot\|_n = \|\cdot\| + p_n(\cdot)$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Además, cada norma $\|\cdot\|_n$ es estrictamente creciente. De esta forma, todo retículo de Fréchet que admite un funcional estrictamente positivo también admite norma continua.

El teorema de caracterización al que nos referíamos antes es el siguiente.

Teorema 2.18 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil $e > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E admite una norma reticular continua.*
2. *E admite una norma continua.*
3. *E admite un funcional estrictamente positivo.*
4. *e es un punto expuesto del intervalo $[0, e]$.*
5. *El conjunto de todas las componentes de e tiene puntos expuestos.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Es inmediato.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por el Teorema 1.22, E es reticularmente isomorfo al espacio $L^1(\nu, E)$, para una cierta medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$. Como E admite norma continua, entonces por el Teorema 2.4, la medida ν tiene una medida de control de Rybakov λ.

Si definimos $T : L^1(\nu, E) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(f) = \int_\Omega f d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, E),$$

entonces, T es un funcional estrictamente positivo sobre $L^1(\nu, E)$. Por el isomorfismo reticular entre E y $L^1(\nu, E)$, existe un funcional estrictamente positivo sobre E.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si x' es un funcional lineal estrictamente positivo sobre E, entonces e es un punto expuesto del conjunto $[0, e]$ ya que

$$\langle x', x \rangle < \langle x', e \rangle ,$$

para todo x tal que $0 \leq x < e$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Es inmediato si se tiene en cuenta que el conjunto de las componentes $\mathcal{C}_e$ está contenido en el intervalo $[0, e]$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Como E tiene la propiedad de Lebesgue y unidad débil, de nuevo por el Teorema 1.22, existe una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ tal que $L^1(\nu, E)$ es reticularmente isomorfo a E. En la prueba de dicho teorema vimos que el rango de la medida $\nu(\Sigma)$ coincide con el conjunto de las componentes $\mathcal{C}_e$. Por (5), el rango de la medida tiene un punto expuesto. Por [53, Corolario VI.3.2], la medida ν tiene una medida de control de Rybakov λ. Definiendo ahora

$$\|f\| = \int_\Omega |f| \, d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, E),$$

obtenemos una norma reticular sobre $L^1(\nu, E)$ y, por tanto, sobre E. ∎

Nota 2.19 *En la hipótesis del teorema anterior es necesario exigir que el retículo de Fréchet posea unidad débil. Consideremos un conjunto de índices no numerable I y el retículo de Banach $c_0(I)$. Entonces, este espacio tiene la propiedad de Lebesgue [64, Ejemplo 6], no tiene unidad débil y no admite funcionales estrictamente positivos, ya que su dual es el espacio $l_1(I)$.*

Corolario 2.20 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y que admite norma continua. Entonces, para cada $x > 0$ existe un funcional estrictamente positivo sobre el intervalo $[0, x]$.*

PRUEBA: Consideremos la banda principal E_x generada por el elemento x y sea P_x la orden proyección asociada a la banda E_x. Entonces, E_x es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil x que admite norma continua. Por el Teorema 2.18, existe un funcional estrictamente positivo x' sobre E_x. El funcional positivo $x' \circ P_x$ es estrictamente positivo sobre el intervalo $[0, x]$. ■

2.5 Otro teorema de representación.

A continuación damos una versión para retículos de Fréchet de un teorema de representación que, para retículos de Banach, ha sido desarrollado en el trabajo de diversos autores: [9], [63] y [80], entre otros. La herramienta principal en la prueba de dicho teorema [59, Teorema 1.b.14] es la existencia de funcionales estrictamente positivos. Como hemos visto en la sección anterior ésto ocurre si el retículo de Fréchet admite una norma continua.

Antes de establecer este resultado necesitamos alguna preparación, que se recoge en el siguiente lema.

Lema 2.21 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Si $\lambda : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ es una medida de control de Rybakov de la medida ν y $T \in L^1(\nu, X)'$, entonces existe una única función $f_T \in L^1(\lambda)$ tal que*

$$|T|(f) = \int_\Omega f\, |f_T|\, d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X),$$

donde $|T|$ denota el módulo del funcional T.

PRUEBA: Sea $T \in L^1(\nu, X)'$. Definimos

$$\lambda_T(A) = T(\chi_A).$$

Por el apartado (1) del Lema 2.9, λ_T es una medida escalar numerablemente aditiva y absolutamente continua respecto de la medida de control λ. Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym, existe una única función $f_T \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\lambda_T(A) = \int_A f_T d\lambda, \quad A \in \Sigma. \tag{2.15}$$

De la igualdad (2.15) y del apartado (2) del Lema 2.9 obtenemos

$$T(f) = \int_\Omega f f_T d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Veremos, a continuación, que se verifica

$$|\lambda_T|(A) = |T|(\chi_A), \quad A \in \Sigma,$$

donde $|T|$ denota el módulo del funcional T y $|\lambda_T|$ denota, como es usual, la variación de la medida λ_T.

Sea $A \in \Sigma$ y $\{A_1, ..., A_m\}$ cualquier partición de A en conjuntos medibles. Entonces, tomando $\beta_j = \pm 1$, dependiendo del signo de $\lambda_T(A_j)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m |\lambda_T(A_j)| &= \sum_{j=1}^m \beta_j \lambda_T(A_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j T(\chi_{Aj}) \\
&= \left| T\left(\sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{Aj}\right)\right| \leq |T|(\chi_A).
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre el conjunto de las particiones tenemos

$$|\lambda_T|(A) \leq |T|(\chi_A).$$

Por otra parte, si $f \in L^1(\nu, X)$ y $|f| \leq \chi_A$, entonces

$$\begin{aligned}
|T(f)| &= \left|\int_\Omega f f_T d\lambda\right| \leq \int_\Omega |f| |f_T| d\lambda \\
&\leq \int_A |f_T| d\lambda = |\lambda_T|(A).
\end{aligned}$$

De la definición de $|T|$ se obtiene

$$|T|(\chi_A) = \sup\left\{|T(f)| : f \in L^1(\nu, X), |f| \leq \chi_A\right\} \leq |\lambda_T|(A).$$

Por último, si tenemos en cuenta que

$$|\lambda_T|(A) = \int_A |f_T| d\lambda, \quad A \in \Sigma$$

entonces, para cualquier función simple φ, se verifica

$$|T|(\varphi) = \int_\Omega \varphi |f_T| d\lambda.$$

Como las funciones simples son densas en $L^1(\nu, X)$ y $|T|$ es un elemento del dual de $L^1(\nu, X)$ se obtiene

$$|T|(f) = \int_\Omega f\, |f_T|\, d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Esto finaliza la prueba. ■

Proposición 2.22 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva que tiene una medida de control de Rybakov λ. Entonces:*

1. *Las inyecciones I_1 e I_2*

$$L^\infty(\lambda) \xrightarrow{I_1} L^1(\nu, X) \xrightarrow{I_2} L^1(\lambda)$$

son continuas. Además $L^\infty(\lambda)$ es un ideal denso en $L^1(\nu, X)$ y éste a su vez es un ideal denso en $L^1(\lambda)$.

2. *Si dotamos a $L^1(\nu, X)'$ de la topología fuerte, entonces existen dos aplicaciones lineales inyectivas y continuas*

$$L^\infty(\lambda) \xrightarrow{J_1} L^1(\nu, X)' \xrightarrow{J_2} L^1(\lambda)$$

tal que $J_2 \circ J_1$ es la inclusión natural de $L^\infty(\lambda)$ en $L^1(\lambda)$. Además, $J_1(L^\infty(\lambda))$ es un ideal orden denso en $L^1(\nu, X)'$ y $J_2\left(L^1(\nu, X)'\right)$ es un ideal denso en $L^1(\lambda)$.

PRUEBA: Sea x' tal que $\lambda = |x'\nu|$ y consideremos $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $x' \in U^\circ$.

(1) La continuidad de I_1 se deduce del apartado (3) del teorema (BDSL). Por [53, Teorema II.3.1], $L^\infty(\lambda)$ es un ideal de $L^1(\nu, X)$. La densidad de $L^\infty(\lambda)$ en $L^1(\nu, X)$ es consecuencia inmediata del Corolario 1.6.

Por la Definición 1.1, las funciones de $L^1(\nu, X)$ están en $L^1(\lambda)$. Obsérvese que I_2 está bien definida, ya que los conjuntos λ-nulos y ν-nulos coinciden. La continuidad de I_2 y la densidad de $L^1(\nu, X)$ en $L^1(\lambda)$ son evidentes.

(2) Definimos la aplicación

$$J_1 : g \in L^\infty(\lambda) \longrightarrow J_1(g) \in L^1(\nu, X)',$$

donde

$$\langle J_1(g), f\rangle := \int_\Omega f g d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Claramente, $J_1(g)$ es lineal y también es continuo ya que

$$\begin{aligned} |\langle J_1(g), f\rangle| &= \left|\int_\Omega f g d\lambda\right| \leq \int_\Omega |f|\,|g|\,d\lambda \\ &\leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\,d\,|x'\nu| \\ &\leq \|g\|_\infty \sup\left\{\int_\Omega |f|\,d\,|y'\nu| : y' \in U^\circ\right\} \\ &= \|g\|_\infty \|f\|_U . \end{aligned}$$

Esto demuestra que J_1 está bien definida. Veamos ahora que J_1 es continua si dotamos a $L^1(\nu, X)'$ de su topología fuerte. Sea H un conjunto acotado de $L^1(\nu, X)$ y sea p_H la seminorma que genera H sobre $L^1(\nu, X)'$. Entonces

$$p_H(J_1(g)) = \sup\{|\langle J_1(g), f\rangle| : f \in H\} \leq \|g\|_\infty \sup\{\|f\|_U : f \in H\}.$$

Veamos ahora que J_1 es inyectiva. Si $J_1(g) = 0$, como las funciones características pertenecen a $L^1(\nu, X)$, se tiene que

$$\langle J_1(g), \chi_A\rangle = \int_A g d\lambda = 0, \quad A \in \Sigma.$$

Por tanto $g = 0$, luego J_1 es inyectiva.

Por último, veamos que $J_1(L^\infty(\lambda))$ es un ideal orden denso en $L^1(\nu, X)'$. En primer lugar, comprobemos que es un ideal. Para ello, sea $g \in L^\infty(\lambda)$ y $T \in L^1(\nu, X)'$ tal que $|T| \leq |J_1(g)|$. Con la notación del Lema 2.21 obtenemos que

$$\int_\Omega f\,|f_T|\,d\lambda \leq \int_\Omega f\,|g|\,d\lambda,$$

para cualquier función positiva $f \in L^1(\nu, X)$. Por tanto, $|f_T| \leq |g|$ y, por consiguiente, $f_T \in L^\infty(\lambda)$. Además, $T = J_1(f_T)$ luego $J_1(L^\infty(\lambda))$ es un ideal de $L^1(\nu, X)'$.

En segundo lugar, establecemos la orden densidad de $J_1(L^\infty(\lambda))$ en $L^1(\nu, X)'$. Elegimos $T > 0$ en $L^1(\nu, X)'$, debemos comprobar que existe $g \in L^\infty(\lambda)$, tal que $0 < J_1(g) \leq T$. Si $T > 0$, entonces $f_T > 0$ en $L^1(\lambda)$. Tomando $g \in L^\infty(\lambda)$ tal que $0 < g \leq f_T$, obtenemos

$$0 < \int_\Omega fg d\lambda \leq \int_\Omega f f_T d\lambda,$$

para cualquier función positiva $f \in L^1(\nu, X)$. Por tanto $0 < J_1(g) \leq T$ como queríamos probar.

Ahora, definimos la aplicación $J_2 : L^1(\nu, X)' \longrightarrow L^1(\lambda)$ mediante

$$J_2(T) := f_T.$$

donde f_T es la derivada de Radon-Nikodym, respecto a λ, de la medida λ_T asociada a T. Es claro que J_2 está bien definida y es lineal. Probemos que es una inyección. Sabemos que $T(f) = \int_\Omega f f_T d\lambda$, para todo $f \in L^1(\nu, X)$. Si $J_2(T) = 0$, entonces $T(f) = 0$, para todo $f \in L^1(\nu, X)$. Por tanto $T = 0$.

Veamos ahora que J_2 es continua cuando a $L^1(\nu, X)'$ se le dota de la topología fuerte. Observemos que el conjunto $H = [-\chi_\Omega, \chi_\Omega]$ es un conjunto acotado de $L^1(\nu, X)$ y se verifica

$$\begin{aligned}
\|J_2(T)\|_{L^1(\lambda)} &= \|f_T\|_{L^1(\lambda)} = \int_\Omega |f_T| \, d\lambda = |\lambda_T|(\Omega) \\
&= |T|(\chi_\Omega) = \sup\left\{|T(g)| : g \in L^1(\nu, X), |g| \leq \chi_\Omega\right\} \\
&= p_H(T).
\end{aligned}$$

Para finalizar, veamos que $J_2\left(L^1(\nu, X)'\right)$ es un ideal denso en $L^1(\lambda)$.

En primer lugar, para cada conjunto $A \in \Sigma$, definimos un elemento del dual de $L^1(\nu, X)$ mediante

$$T_A(f) = \int_\Omega f \chi_A d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym se tiene que

$$J_2(T_A) = \chi_A, \quad A \in \Sigma,$$

obteniendo así que el rango de J_2 contiene todas las funciones características y por tanto que $J_2\left(L^1(\nu, X)'\right)$ es denso en $L^1(\lambda)$.

Sólo falta probar que $J_2\left(L^1(\nu, X)'\right)$ es un ideal de $L^1(\lambda)$. Sea $T > 0$ un elemento de $L^1(\nu, X)'$ y sea g una función de $L^1(\lambda)$ tal que

$$|g| \leq J_2(T) = f_T.$$

Entonces la aplicación $G : L^1(\nu, X) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$G(f) = \int_\Omega fg d\lambda$$

está bien definida y es lineal. De las desigualdades

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left|\int_\Omega fg d\lambda\right| \leq \int_\Omega |f|\, |g|\, d\lambda \\ &\leq \int_\Omega |f|\, |f_T|\, d\lambda = T(|f|), \quad f \in L^1(\nu, X), \end{aligned}$$

se deduce que G es continua. Por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym se tiene que $J_2(G) = g$. ∎

Teorema 2.23 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil que admite una norma continua. Entonces existe un espacio de medida finita $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ verificándose:*

1. *Existen dos aplicaciones lineales I_1 e I_2 inyectivas y continuas*

$$L^\infty(\lambda) \xrightarrow{I_1} E \xrightarrow{I_2} L^1(\lambda),$$

tal que $I_2 \circ I_1$ es la inclusión natural de $L^\infty(\lambda)$ en $L^1(\lambda)$. Además, $I_1(L^\infty(\lambda))$ es un ideal denso de E e $I_2(E)$ es un ideal denso de $L^1(\lambda)$.

2. *Existen dos aplicaciones lineales J_1 y J_2 inyectivas y continuas cuando se considera en E' la topología fuerte*

$$L^{\infty}(\lambda) \xrightarrow{J_1} E' \xrightarrow{J_2} L^1(\lambda)$$

tal que $J_2 \circ J_1$ es la inclusión natural de $L^{\infty}(\lambda)$ en $L^1(\lambda)$. Además, $J_1(L^{\infty}(\lambda))$ es un ideal orden denso en E' y $J_2(E')$ es un ideal denso en $L^1(\lambda)$

Además,

$$\langle x', x\rangle = \int_{\Omega} J_2(x')\, I_2(x)\, d\lambda,$$

para todo $x \in E$ y $x' \in E'$.

PRUEBA: Puesto que E tiene la propiedad de Lebesgue y unidad débil, por el Teorema 1.22, existe una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ tal que E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. Como E admite una norma continua, la medida ν tiene una medida de control de Rybakov λ. Ahora basta aplicar la proposición anterior. ■

2.6 La propiedad (u) de Pełczynski.

Recordemos que un espacio X se dice que tiene la propiedad (u) si, para cualquier sucesión $(x_n)_n$ que sea débil-Cauchy en X, existe una sucesión $(y_n)_n$ en X que verifica:

(1) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ es débil incondicionalmente de Cauchy, es decir, se verifica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x', y_n\rangle| < \infty$, para todo $x' \in X'$.

(2) La sucesión $\left(x_n - \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)_n$ converge débilmente a cero.

Pełczynski [68] probó que cualquier espacio con una base incondicional verifica la propiedad (u). Posteriormente Tzafriri [80] extendió este resutado, probando que todo retículo de Banach con la propiedad de Lebesgue verifica la propiedad (u). Es conocido que todo espacio de Banach con una base incondicional puede dotarse de una estructura reticular, respecto de la cual, el espacio resultante es un retículo de Banach con la propiedad de Lebesgue. En [24, Proposición 5], se demuestra que los espacios de Fréchet con base incondicional también pueden dotarse de una estructura reticular, respecto de la cual, el espacio resultante es un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue. En esta sección extendemos el resultado de Tzafriri, a retículos de Fréchet con la propiedad de Lebesgue. De hecho, probaremos, que para retículos de Fréchet que sean σ-orden completos, la propiedad de Lebesgue y la propiedad (u) son equivalentes. Este resultado es conocido para espacios de Banach [3, Teorema 14.9].

Teorema 2.24 *Sea X un espacio de Fréchet con norma continua y sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva. Entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ verifica la propiedad (u).*

PRUEBA: Como X tiene una norma continua, la medida ν tiene una medida de control de Rybakov $\lambda = |x'\nu|$.

Sea $(f_n)_n$ una sucesión débil-Cauchy en $L^1(\nu, X)$. Entonces, por la Proposición 2.22, también es débil-Cauchy en $L^1(\lambda)$. Como $L^1(\lambda)$ es débil sucesionalmente completo, existe una función $f \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\int_\Omega f_n g d\lambda \to \int_\Omega f g d\lambda, \tag{2.16}$$

para toda $g \in L^\infty(\lambda)$. Los conjuntos

$$A_n = \{w \in \Omega : n-1 \leq |f(w)| < n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

son medibles y disjuntos. Llamemos

$$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

y observemos que $\lim_n \lambda(B_n) = 0$.

Definamos las funciones

$$g_n = f\chi_{A_n}, \quad n = 1, 2, ...$$

Entonces $g_n \in L^\infty(\lambda)$ y, por tanto, $g_n \in L^1(\nu, X)$, para todo n. Tenemos que probar, en primer lugar, que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ es incondicionalmente débil-Cauchy en $L^1(\nu, X)$ y, en segundo lugar, que la sucesión $\left(f_n - \sum_{k=1}^{n} g_k\right)_n$ converge débilmente a cero en $L^1(\nu, X)$.

Sea $T > 0$ un elemento de $L^1(\nu, X)'$. Por el Lema 2.21, existe $f_T > 0$ de $L^1(\lambda)$ tal que

$$T(h) = \int_\Omega h f_T d\lambda, \tag{2.17}$$

para todo $h \in L^1(\nu, X)$. A continuación, probaremos que $f f_T \in L^1(\lambda)$.

Para ello, consideremos la sucesión de medidas $\mu_n : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\mu_n(A) = T(f_n \chi_A), \quad n = 1, 2, ...$$

Es claro que las medidas μ_n son numerablemente aditivas y λ-continuas. Puesto que $(f_n)_n$ es débil-Cauchy, existe $\lim_n \mu_n(A)$, para cada $A \in \Sigma$. Sea $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$. Por el teorema de Vitali-Hahn-Saks, la medida $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ es numerablemente aditiva y λ-continua. Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym, existe una única función $f_\mu \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\mu(A) = \int_A f_\mu d\lambda, \quad A \in \Sigma. \tag{2.18}$$

Ahora, de (2.17) y de (2.18) se deduce

$$\int_A f_\mu d\lambda = \lim_n \int_A f_n f_T d\lambda, \tag{2.19}$$

para cualquier conjunto $A \in \Sigma$.

Por otra parte, para cualquier $A \in \Sigma$ sobre el que f_T sea una función acotada se tiene, usando (2.16), que

$$\int_A f f_T d\lambda = \lim_n \int_A f_n f_T d\lambda,$$

que junto a (2.19) nos da

$$\int_A f f_T d\lambda = \int_A f_\mu d\lambda, \tag{2.20}$$

para cualquier $A \in \Sigma$ sobre el que f_T sea una función acotada. Teniendo en cuenta que $f_T > 0$, sigue de (2.20), que

$$\int_A |f| \, f_T d\lambda = \int_A |f_\mu| \, d\lambda, \tag{2.21}$$

para cualquier $A \in \Sigma$ sobre el que f_T sea una función acotada.

Ahora, de (2.21) y del hecho de que $f_\mu \in L^1(\lambda)$ deducimos, a continuación, que $f f_T \in L^1(\lambda)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $f f_T \notin L^1(\lambda)$ y consideremos los conjuntos medibles y disjuntos

$$C_n = \{w \in \Omega : n-1 < f_T(w) \leq n\}, \quad n = 1, 2, ...$$

Entonces se tiene que

$$|f| \, f_T = \sum_{n=1}^{\infty} |f| \, f_T \chi_{C_n}, \quad \text{puntualmente.}$$

Si $f f_T \notin L^1(\lambda)$, entonces, por el teorema de Levi [4, Teorema 18.9], se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f| \, f_T \chi_{C_n} d\lambda = +\infty.$$

De esta forma, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente $(n_m)_m \subset \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n_m+1}^{n_{m+1}} \int_\Omega |f| \, f_T \chi_{C_n} d\lambda > \varepsilon,$$

para todo m. Sea $D_m = \bigcup_{j=n_m+1}^{n_{m+1}} C_j$. Entonces, $(D_n)_n$ es una partición de Ω, que verifica

$$\varepsilon < \int_{D_n} |f| \, f_T d\lambda, \quad n = 1, 2, ...$$

Como f_T está acotada sobre cada D_n, entonces

$$\varepsilon < \int_{D_n} |f| \, f_T d\lambda = \int_{D_n} |f_\mu| \, d\lambda, \quad n = 1, 2, ...$$

Esto contradice el hecho de que $f_\mu \in L^1(\lambda)$. Realmente, sabiendo ahora que $ff_T \in L^1(\lambda)$, de (2.20) tenemos que

$$ff_T = f_\mu, \quad \text{en } L^1(\lambda).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $ff_T \in L^1(\lambda)$ deducimos lo siguiente: (i) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ es incondicionalmente débil-Cauchy en $L^1(\nu, X)$, ya que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |T(g_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |T(f\chi_{A_n})| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} ff_T d\lambda \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| f_T d\lambda = \int_\Omega |f| f_T d\lambda < \infty\end{aligned}$$

y, por otra parte,

(ii) la sucesión $\left(f_n - \sum_{k=1}^{n} g_k\right)_n$ converge débilmente a cero en $L^1(\nu, X)$, puesto que

$$\begin{aligned}T\left(f_n - \sum_{k=1}^{n} g_k\right) &= T(f_n - f) + T(f\chi_{B_n}) \\ &= \int_\Omega (f - f_n) f_T d\lambda + \int_{B_n} ff_T d\lambda \to 0,\end{aligned}$$

ya que $\int_{B_n} ff_T d\lambda$ converge a cero, pues $\lim_n \lambda(B_n) = 0$ y $\int_\Omega (f - f_n) f_T d\lambda$ converge a cero por (2.19). ■

Corolario 2.25 *Cualquier retículo de Fréchet E, con la propiedad de Lebesgue, que admite una norma continua verifica la propiedad (u).*

PRUEBA: Es suficiente probar la afirmación para espacios que sean separables, ya que podemos trabajar en el subespacio cerrado, generado por la sucesión débil-Cauchy $(x_n)_n$ de partida. En este caso, por el Lema 1.23, E tiene unidad débil. Aplicamos ahora el Teorema 1.22 y el Teorema 2.24, para obtener el resultado. ■

A continuación, probamos que para retículos de Fréchet σ-orden completos, la propiedad (u) equivale a la propiedad de Lebesgue. Las equivalencias, que se demuestran en el siguiente teorema, en el caso de retículos de Banach, forman parte del trabajo de varios autores, [60], [63] y [80], entre otros. Ver también [3, Nota del Teorema 14.9].

Necesitamos establecer previamente el siguiente lema.

Lema 2.26 *Sea $(E_k)_k$ una sucesión de espacios de Fréchet con la propiedad (u). Entonces, el espacio producto $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$ tiene la propiedad (u).*

PRUEBA: Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión débil-Cauchy, donde $x_n = \left(x_n^k\right)_k$. Entonces $\left(x_n^k\right)_n$ es débil-Cauchy en E_k, para cada k. Como E_k tiene la propiedad (u), existe una sucesión $\left(y_n^k\right)_n \subset E_k$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left\langle x', y_n^k\right\rangle\right| < \infty$, para cada $x' \in E_k'$ y tal que $\left(x_n^k - \sum_{j=1}^{n} y_j^k\right)_n$ converge a cero en la topología débil de E_k. Ponemos $y_n = \left(y_n^k\right)_k$ y consideramos la sucesión $(y_n)_n$. Como E' puede ser identificado con la suma directa $\bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k'$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', y_n\rangle| < \infty$, para cada $x' \in E'$ y $\left(x_n - \sum_{j=1}^{n} y_j\right)_n$ converge a cero en la topología débil de E. Por tanto, E tiene la propiedad (u). ■

Teorema 2.27 *Sea E un retículo de Fréchet σ-orden completo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad de Lebesgue.*

2. *E tiene la propiedad (u).*

3. *E no tiene una copia de l_∞.*

4. *E no tiene una copia reticular de l_∞.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Por [24, Teorema 1, Nota 2], E tiene una norma continua o E es isomorfo al producto de una sucesión de retículos de Fréchet, cada uno de ellos con norma continua. Entonces, E tiene la propiedad (u) por el Corolario 2.25 o E tiene la propiedad (u) por el Lema 2.26 y el Corolario 2.25.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como la propiedad (u) se conserva por subespacios, por la versión para espacios de Fréchet de [3, Teorema 14.7], si E tuviese una copia de l_∞, entonces l_∞ tendría la propiedad (u), en contra de [3, Ejemplo 14.8].

(3) $\Rightarrow$ (4) Es obvio.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sigue de [2, Teorema 10.7 y 10.3], teniendo en cuenta que E es σ-orden completo. ■

Capítulo 3

¿Cuándo $\mathrm{L}^1(\nu, X)$ es AL- o AM-espacio?

3.1 Sobre los AL-espacios de Fréchet.

Los AL-espacios de Banach fueron estudiados por Kakutani en [48], en relación con la teoría ergódica de operadores. Constituyen una clase importante de espacios dentro de la teoría de los retículos de Banach. Kakutani y Bonhenblust establecieron teoremas de representación, [48, Teorema 7] (ver también [3, Teorema 12.26]) para AL-espacios que vienen a afirmar que el prototipo de esta clase es $L^1(\mu)$, siendo μ una medida positiva numerablemente aditiva. De esta forma, se pueden aplicar resultados de $L^1(\mu)$ a la clase, más amplia, de retículos de Banach que son AL-espacios. Posteriormente, Wong [82], [83] introduce el concepto de los AL-espacios en la clase de los retículos localmente convexo-sólidos. Es interesante señalar que la clase de los AL-espacios de Fréchet ha sido considerada por Grosse-Erdman [40] en relación con la versión vectorial del teorema de diferenciación de Lebesgue.

En esta sección consideramos AL-espacios de Fréchet y recogemos algunas de sus propiedades, que usaremos más adelante en el estudio del espacio

$L^1(\nu, X)$. Algunas de las propiedades tienen interés, no sólo por las aplicaciones al estudio del espacio $L^1(\nu, X)$, sino también porque constituyen una aportación a la teoría general de retículos de Fréchet.

Definición 3.1 *Se dice que un retículo de Fréchet E es un AL-espacio si su topología está generada por una sucesión de seminormas $(p_k)_k$ que es aditiva sobre el cono positivo de E, es decir, si se verifica la siguiente condición:*

$$p_k(x+y) = p_k(x) + p_k(y), \quad k = 1, 2, ..., \tag{AL}$$

para todos $x, y \in E, x, y \geq 0$.

En lo que sigue, a los retículos de Fréchet que sean AL-espacios, los llamaremos AL-espacios de Fréchet.

Nota 3.2 *Si E es un AL-espacio de Fréchet y $(p_k)_k$ es una familia de seminormas que cumple la condición (AL), entonces $(p'_k)_k$, con $p'_k = p_1 + \cdots + p_k$, es otra familia equivalente creciente de seminormas, que sigue verificando la condición (AL). Por tanto, en lo que sigue, supondremos que la sucesión de seminormas que define la topología del AL-espacio E, es creciente y verifica la condición (AL).*

Sea E un retículo de Fréchet y consideremos un funcional $x' \in E'$. Definimos la función $p_{x'} : E \longrightarrow \mathbb{R}$, por la fórmula

$$p_{x'}(x) := \langle |x'|, |x| \rangle .$$

Es inmediato comprobar que $p_{x'}$ es una seminorma reticular, aditiva sobre el cono positivo de E. La familia de seminormas $\{p_{x'} : x' \in E'\}$ genera una topología Hausdorff, localmente convexa-sólida y compatible con el par dual $\langle E, E' \rangle$, llamada *topología débil absoluta* y que se denotada por $|\sigma|(E, E')$

[2, Teorema 6.7] (topología normal en el contexto de los espacios de Köthe). De hecho, la topología $|\sigma|(E, E')$ es la de convergencia uniforme sobre los orden intervalos de E' [3, Teorema 11.11].

El espacio E dotado de la topología $|\sigma|(E, E')$ es un AL-espacio. Es más, si E es un AL-espacio entonces $|\sigma|(E, E')$ coincide con la topología de E [82, Teorema 4.2].

Una prueba similar a la que se realiza para retículos de Banach, permite probar que los AL-espacios de Fréchet tienen la propiedad de Lebesgue y, por tanto, que son orden completos.

Proposición 3.3 *Sea E un AL-espacio de Fréchet. Entonces E verifica la propiedad de Lebesgue.*

PRUEBA: Por [2, Teoremas 10.3 y 10.1], es suficiente probar que cualquier sucesión disjunta y orden acotada, converge a cero.

Sea p una seminorma reticular aditiva sobre el cono positivo E^+. Sea $(x_n)_n \subset E$ una sucesión disjunta tal que $0 \leq x_n \leq x$. Entonces, se verifica

$$\sum_{j=1}^{n} p(x_j) = p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = p(\sup\{x_j, 1 \leq j \leq n\}) \leq p(x),$$

para todo $n \geq 1$. De aquí se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \leq p(x).$$

Por tanto, $p(x_n) \xrightarrow{n} 0$, es decir, $x_n \xrightarrow{n} 0$ en E. ■

Si E es un retículo de Fréchet, entonces el dual topológico E', dotado del orden usual y de la topología fuerte $\beta(E', E)$ (que coincide con la de la convergencia uniforme sobre los conjutos sólidos-acotados de E), es un retículo vectorial localmente convexo-sólido [2, página 59]. Por tanto, los conjuntos orden acotados de E' son $\beta(E', E)$-acotados [2, Teorema 5.4]. Para la clase de los AL-espacios de Fréchet el recíproco también es cierto.

Proposición 3.4 *Sea E un AL-espacio de Fréchet. Entonces, los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados de E' son conjuntos orden acotados de E'.*

PRUEBA: Por [82, Teorema 4.2], la topología de E coincide con la topología $|\sigma|(E, E')$. Por ser E un espacio de Fréchet, los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados de E' son equicontinuos. Por [3, Teorema 11.11], los conjuntos equicontinuos son orden acotados de E'. ■

De forma simétrica a lo hecho más arriba, la topología en E' de la convergencia uniforme sobre los orden intervalos de E, se llama *débil-$\star$ absoluta* y se denota por $|\sigma|(E', E)$. Una consecuencia inmediata de la proposición anterior, es el corolario que probamos a continuación.

Corolario 3.5 *El bidual E'' de un AL-espacio de Fréchet E es un AL-espacio de Fréchet.*

PRUEBA: Como E es AL-espacio, por el lema anterior, los conjuntos orden acotados de E' y los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados coinciden. Entonces, las topologías $\beta(E'', E')$ y $|\sigma|(E'', E')$ coinciden sobre E''. Pero E'' con la topología $|\sigma|(E'', E')$ es un AL-espacio. ■

Concluimos esta sección con algunos comentarios y resultados relativos a operadores regulares.

Una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ entre dos retículos de Fréchet E y F, se llama regular si es la diferencia de dos operadores lineales positivos, es decir, si $T = U - S$, donde U y S son dos operadores positivos.

Es sencillo comprobar que si $T : E \longrightarrow F$ es regular, entonces el operador adjunto $T' : F' \longrightarrow E'$, también es regular. En efecto, si $T = U - S$, con U y S positivos, entonces :

$$\begin{aligned}\langle T'(x'), x\rangle &= \langle x', T(x)\rangle = \langle x', U(x) - S(x)\rangle \\ &= \langle x', U(x)\rangle - \langle x', S(x)\rangle = \langle U'(x'), x\rangle - \langle S'(x'), x\rangle,\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. De aquí se obtiene

$$T'(x') = U'(x') - S'(x') = (U' - S')(x'),$$

para todo $x' \in F'$. Por tanto, $T' = U' - S'$.

Finalmente observemos que, si U es positivo, entonces U' es positivo, ya que si $x \geq 0$ y $x' \geq 0$ entonces

$$\langle U'x', x\rangle = \langle x', Ux\rangle \geq 0.$$

Es conocido [2, Teorema 16.6] que los operadores positivos entre retículos de Fréchet son continuos. Por lo tanto, los operadores regulares también son continuos. El recíproco, en general, no es cierto, ni siquiera para retículos de Banach [3, Ejemplo 15.1]. Veremos a continuación que si E y F son AL-espacios de Fréchet, el recíproco es cierto. Un resultado similar al que se prueba en la siguiente proposición, pero para retículos de Banach, puede verse en [3, Teorema 15.2].

Antes de realizar la prueba introducimos alguna terminología que será necesaria. Recordemos que una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$, entre dos retículos vectoriales localmente convexo-sólidos, se llama *orden acotada*, si transforma conjuntos orden acotados de E en conjuntos orden acotados de F. El espacio $E^{\sim}$, de todas las aplicaciones orden acotadas de E en $\mathbb{R}$, es un retículo vectorial, orden completo, cuando se le dota del orden usual [2, Teorema 3.3].

Proposición 3.6 *Sean E y F AL-espacios de Fréchet y $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal y continuo. Entonces T es regular.*

PRUEBA: Teniendo en cuenta [2, Teorema 3.3], es suficiente probar que T es orden acotado, puesto que F es orden completo.

Sea $[0, x]$ un intervalo de E. Tenemos que probar que existe $z \in F$ tal que

$$-z \leq Ty \leq z, \quad y \in [0, x].$$

Veamos primero, que el operador adjunto $T' : F' \longrightarrow E'$ es orden acotado.

Como $T : E \longrightarrow F$ es continuo, por [46, Teorema 8.6.1 y Corolario 8.6.6], $T' : F' \longrightarrow E'$ es $\beta(F', F) - \beta(E', E)$ continuo.

Sea $H \subset F'$ un conjunto orden acotado, entonces H es $\beta(F', F)$-acotado. Por tanto, $T'(H)$ es $\beta(E', E)$-acotado en E'. Por la Proposición 3.4, $T'(H)$ es orden acotado en E'.

Por [3, Teorema 5.8], su adjunto $T'' : E'^{\sim} \longrightarrow F'^{\sim}$ es orden acotado. Como $[0, x] \subset E \subset E'^{\sim}$, existe $x'' \in F'^{\sim}$ tal que

$$-x'' \leq Ty \leq x'', \quad y \in [0, x].$$

El espacio F es una banda de $F'^{\sim}$, por ser un AL-espacio [2, Teorema 22.2]. Sea $P : F'^{\sim} \longrightarrow F$ la orden proyección sobre la banda F. Entonces

$$-Px'' \leq PTy \leq Px'', \quad y \in [0, x].$$

Llamando $z = Px'' \in F$, se tiene

$$-z \leq Ty \leq z, \quad y \in [0, x].$$

como se quería demostrar. ■

3.2 ¿Cuándo $L^1(\nu, X)$ es AL-espacio?

En el Teorema 1.22, demostramos que cualquier retículo de Fréchet E, con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil es reticularmente isomorfo a un espacio $L^1(\nu, E)$, para una determinada medida ν. Una cuestión aparece de forma natural: ¿cuándo el espacio $L^1(\nu, E)$ es un AL-espacio de Fréchet? En esta sección damos respuesta a esta pregunta.

Comenzamos introduciendo un nuevo espacio de funciones integrables, que aunque no es relevante en el estudio general del espacio $L^1(\nu, X)$, sí que juega un papel esencial a la hora de determinar si el espacio $L^1(\nu, X)$, es un AL-espacio.

Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Sea $\mathcal{U}_0(X)$ la familia de entornos del origen de X y $U \in \mathcal{U}_0(X)$. La U-variación de la medida ν se define como la función de conjunto $|\nu|_U : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ dada por

$$|\nu|_U(A) := \sup_{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_U(\nu(A_j)) \right\},$$

donde $\pi = \{A_1, ..., A_n\}$ recorre el conjunto de las particiones de finitas de A en conjuntos medibles.

Nota 3.7 *Si la topología de X está generada por una familia creciente de seminormas $(p_k)_k$ y ponemos $U_k = \{x \in X : p_k(x) \leq 1\}$, la U_k-variación se denotará, simplemente, por $|\nu|_k(\cdot)$.*

En [28, Teorema I.3.2] se demuestra que $|\nu|_U$ es la menor de las medidas positivas, no necesariamente finita, para las que se verifica

$$p_U(\nu(A)) \leq |\nu|_U(A),$$

para cada $A \in \Sigma$.

Es inmediato comprobar, por una parte, que

$$\|\nu\|_U(A) \leq |\nu|_U(A), \tag{3.1}$$

para cada $A \in \Sigma$ y para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y, por otra, que $|\nu|_k(A) \leq |\nu|_{k+1}(A)$, para cada $k \geq 1$ y para cada $A \in \Sigma$.

Diremos que una medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es de *variación acotada*, si cada U-variación de ν es finita, es decir, si $|\nu|_U(\Omega) < \infty$, para todo $U \in \mathcal{U}_0(X)$.

Diremos que un conjunto medible A es $|\nu|$-nulo si $|\nu|_U(A) = 0$, para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Es inmediato comprobar que un conjunto es $|\nu|$-nulo si y sólo si es ν-nulo.

Dada una medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, denotamos con $L^1(|\nu|)$ al espacio de funciones (clases ν-*a.e.*)

$$L^1(|\nu|) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0(X)} L^1(|\nu|_U).$$

Como es usual, $L^1(|\nu|_U)$ es el espacio de funciones (clases $|\nu|_U$-casi en todo) reales integrables respecto a la medida positiva $|\nu|_U$.

Es fácil probar que $L^1(|\nu|)$, con el orden natural y dotado de la topología dada por la familia de seminormas

$$|f|_U := \int_\Omega |f|\, d\,|\nu|_U$$

es un AL-espacio de Fréchet. De hecho, $L^1(|\nu|)$ es isomorfo al límite proyectivo de la familia de espacios de Banach $(L^1(|\nu|_U))_{U \in \mathcal{U}_0(X)}$.

Nota 3.8 *La sucesión creciente de seminormas reticulares* $(|f|_k)_k$, *donde*

$$|f|_k := \int_\Omega |f|\, d\,|\nu|_k,$$

genera la topología del espacio $L^1(|\nu|)$.

La relación entre los espacios $L^1(|\nu|)$ y $L^1(\nu, X)$ ha sido estudiada por Lewis [58, Teorema 4.1 y 4.2]. Nosotros recogemos esta información en el siguiente teorema.

TEOREMA II (LEWIS) Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. $L^1(|\nu|) \subset L^1(\nu, X)$.

2. Si ν_f es la medida con densidad $f \in L^1(\nu, X)$, respecto a la medida ν, entonces $f \in L^1(|\nu|)$ si y sólo si ν_f tiene variación acotada. En este caso, su U-variación viene dada por
$$|\nu_f|_U(A) = \int_A |f|\, d|\nu|_U, \quad A \in \Sigma.$$

Observemos que a partir de la desigualdad (3.1) y del teorema anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \|f\|_U &= \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d|x'\nu| : x' \in U^\circ\right\} = \|\nu_f\|_U(\Omega) \\ &\leq |\nu_f|_U(\Omega) = \int_\Omega |f|\, d|\nu|_U \leq |f|_U, \end{aligned}$$

para cada $f \in L^1(|\nu|)$. Por tanto, la inclusión natural

$$J : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu, X)$$

es una aplicación continua.

Como los conjuntos ν-nulos y $|\nu|$-nulos coinciden, la inclusión J es inyectiva.

La posibilidad de que la aplicación J sea sobreyectiva es estudiada por Lewis [58, Corolario 4.3], obteniendo el siguiente resultado.

TEOREMA III (LEWIS) Sea X un espacio de Fréchet. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Cualquier sucesión sumable en X es absolutamente sumable en X, es decir, X es un espacio de Fréchet nuclear.

2. Todas las medidas vectoriales con valores en X son de variación acotada.

3. $L^1(\nu, X) \subseteq L^1(|\nu|)$, para cualquier medida vectorial numerablemente aditiva ν con valores en X.

La equivalencia de los apartados (1) y (2) del teorema anterior, fue probada por Grothendiek [43].

Como hemos comentado antes, el espacio $L^1(|\nu|)$ no es relevante en el estudio general del espacio $L^1(\nu, X)$, como se pone de manifiesto en [22] con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9 *Sea Σ la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $[0,1]$. Para $1 < p < \infty$, consideramos la medida $\nu : \Sigma \longrightarrow L^p[0,1]$, dada por $\nu(A) = \chi_A$. Entonces $L^1(\nu, L^p[0,1])$ es isomorfo e isométrico a $L^p[0,1]$, mientras que $L^1(|\nu|) = \{0\}$, puesto que para cualquier $A \in \Sigma$, se verifica $|\nu|(A) = +\infty$.*

La importancia del espacio $L^1(|\nu|)$ aparece cuando se investiga la posibilidad de que $L^1(\nu, X)$ sea un AL-espacio.

Teorema 3.10 *Sea (Ω, Σ) un espacio medible, X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio.*

2. *La inclusión natural $J : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu, X)$ es un isomorfismo reticular.*

3. *El transpuesto del operador integración transforma conjuntos $\beta(X', X)$ acotados de X' en conjuntos orden acotados de $L^1(\nu, X)'$.*

4. *Cualquier sucesión positiva sumable en $L^1(\nu, X)$ es absolutamente sumable en $L^1(\nu, X)$.*

5. *El operador integración transforma sucesiones positivas sumables de $L^1(\nu, X)$ en sucesiones absolutamente sumables de X.*

PRUEBA: (2) $\Rightarrow$ (1) Puesto que la inclusión natural J es isomorfismo reticular y $L^1(|\nu|)$ es retículo de Fréchet, por [2, Teorema 16.6], también es un isomorfismo topológico. Puesto que $L^1(|\nu|)$ es un AL-espacio, entonces $L^1(\nu, X)$ también es un AL-espacio.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea $H \subset X'$ un conjunto $\beta(X', X)$-acotado. Como X es un espacio de Fréchet, existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $H \subset U^\circ$.

Ya que $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio, tenemos otra familia creciente de seminormas $(|\cdot|_k^*)_{k\geq 1}$ que definen la topología de $L^1(\nu, X)$ y verifican la condición (AL), es decir,

$$|f+g|_k^* = |f|_k^* + |g|_k^*, \quad k = 1, 2, ...,$$

para toda $f, g \in L^1(\nu, X), f, g \geq 0$

Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ y una constante positiva $M > 0$, tal que

$$\|f\|_U \leq M\,|f|_n^*, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Definamos $R : L^1(\nu, X)^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$R(f) = M\,|f|_n^*.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} R(f+g) &= M\,|f+g|_n^* = M\,|f|_n^* + M\,|g|_n^* \\ &= R(f) + R(g), \quad f, g \in L^1(\nu, X)^+, \end{aligned}$$

por el teorema de Kantorovic [3, Teorema 1.7], R se extiende a una función lineal sobre $L^1(\nu, X)$, mediante la fórmula

$$R(f) = R(f^+) - R(f^-).$$

Las desigualdades

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \left|R(f^+)\right| + \left|R(f^-)\right| \\ &= M\left|f^+\right|_n^* + M\left|f^-\right|_n^* = M\,|f|_n^*, \end{aligned}$$

prueban que R es un funcional continuo sobre $L^1(\nu, X)$.

Veamos ahora que el conjunto $I'_\nu(H) \subset L^1(\nu,X)'$ es orden acotado. Será suficiente comprobar que $|T| \leq R$, para cualquier $T \in I'_\nu(H)$. Es decir, tenemos que probar que si $T \in I'_\nu(H)$, entonces $|T|(f) \leq R(f)$ para toda $f \in L^1(\nu,X)^+$.

Para ello, observemos que

$$\begin{aligned}
|T|(f) &= \sup\left\{|T(g)| : g \in L^1(\nu,X), |g| \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{|\langle I'_\nu(x'), g\rangle| : g \in L^1(\nu,X), |g| \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_\Omega g d(x'\nu)\right| : g \in L^1(\nu,X), |g| \leq f\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int_\Omega |g|\, d\,|x'\nu| : g \in L^1(\nu,X), |g| \leq f\right\} \\
&\leq \int_\Omega |f|\, d\,|x'\nu| \leq \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d\,|x'\nu| : x' \in H\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int_\Omega |f|\, d\,|x'\nu| : x' \in U^\circ\right\} \leq \|f\|_U \\
&\leq M\,|f|_n^* = R(f).
\end{aligned}$$

(3) $\Longrightarrow$ (2) Ya hemos visto antes que la inclusión natural $J : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu,X)$ es inyectiva y continua. Además, como el orden en $L^1(|\nu|)$ y en $L^1(\nu,X)$ es el mismo, si probamos que J es sobre, se tendrá que es un isomorfismo reticular.

Sea $f \in L^1(\nu,X)$ y ν_f la medida con densidad f, respecto a ν. Por el apartado (2) del teorema II de Lewis, será suficiente probar que ν_f tiene variación acotada. Sea $U \in \mathcal{U}_0(X)$, entonces U° es un conjunto $\beta(X',X)$-acotado de X'. Por hipótesis, existe un funcional positivo $R \in L^1(\nu,X)'$ tal que

$$|I'_\nu(x')| \leq R, \quad x' \in U^\circ.$$

Ahora, por la definición de módulo de un operador, tenemos

$$|I'_\nu(x')|(h) = \sup\left\{|\langle I'_\nu(x'), g\rangle| : |g| \leq h\right\}, \quad h \in L^1(\nu,X)^+.$$

En particular, si tomamos $h = |f|\,\chi_B$, con $B \in \Sigma$ obtenemos que

$$|\langle I'_\nu(x'), f\chi_B\rangle| \leq R(|f|\,\chi_B), \tag{3.2}$$

para todo $x' \in U^\circ$ y para todo $B \in \Sigma$.

Ahora, si $\pi = \{A_1, ..., A_n\}$ es una partición cualquiera de Ω, usando (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} p_U(\nu_f(A_j)) &= \sum_{j=1}^{n} \sup\{|x'\nu_f(A_j)| : x' \in U^\circ\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sup\left\{\left|\left\langle I'_\nu(x'), f\chi_{A_j}\right\rangle\right| : x' \in U^\circ\right\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} R\left(|f|\chi_{A_j}\right) = R\left(\sum_{j=1}^{n} |f|\chi_{A_j}\right) \\
&= R(|f|).
\end{aligned}$$

Por tanto, $|\nu_f|_U(\Omega) = \sup_\pi \left\{\sum_{j=1}^{n} p_U(\nu(A_j))\right\} \leq R(|f|) < \infty$.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) Es consecuencia inmediata de [40, Teorema 5].

(4) $\Rightarrow$ (5) Consideremos el operador integración $I_\nu : L^1(\nu, X) \longrightarrow X$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión positiva sumable. De la continuidad de I_ν y de la hipótesis se deduce que

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_U(I_\nu(f_n)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty,$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} I_\nu(f_n)$ es absolutamente sumable en X.

(5) $\Rightarrow$ (4) Sea $(f_n)_n$ una sucesión positiva sumable en $L^1(\nu, X)$. Considerando la familia de seminormas equivalentes

$$\|f\|_U^\infty = \sup\{p_U\left(\int_A f d\nu\right) : A \in \Sigma\}, \quad U \in \mathcal{U}_0(X),$$

y recordando las desigualdades (1.4)

$$\|f\|_U^\infty \leq \|f\|_U \leq 2\|f\|_U^\infty, \quad f \in L^1(\nu, X), U \in \mathcal{U}_0(X),$$

podemos elegir, para cada n, un conjunto $A_n \in \Sigma$ tal que

$$\|f_n\|_U \leq 4p_U\left(\int_{A_n} f_n d\nu\right) = 4p_U(I_\nu(f_n\chi_{A_n})).$$

La sucesión $(f_n\chi_{A_n})_n$ es claramente positiva. Veamos que también es sumable. Como

$$\sum_{j\in F} f_j\chi_{Aj} \leq \sum_{j\in F} f_j,$$

para cualquier subconjunto finito F de $\mathbb{N}$, aplicando la monotonía de las seminormas se tiene que

$$\left\|\sum_{j\in F} f_j\chi_{Aj}\right\|_U \leq \left\|\sum_{j\in F} f_j\right\|_U,$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$. La sumabilidad de la sucesión $(f_n\chi_{A_n})_n$, se deduce de la sumabilidad de $(f_n)_n$.

Por (5), $(I_\nu(f_n\chi_{A_n}))_{n\geq 1}$ es absolutamente sumable en X. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_U \leq 4\sum_{n=1}^{\infty} p_U(I_\nu(f_n\chi_{A_n})) < +\infty,$$

para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Por consiguiente, $(f_n)_n$ es absolutamente sumable en $L^1(\nu, X)$. ■

La condición (2) del teorema anterior permite afirmar que si $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio, entonces la medida ν es de variación acotada. En efecto, como la inclusión natural $J : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu, X)$ es un isomorfismo topológico se tiene que, para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$, existe $V \in \mathcal{U}_0(X)$ y una constante $C > 0$ tal que

$$|f|_U \leq C\,\|f\|_V, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Por ser $L^1(\nu, X)$ un AL-espacio, la función característica $\chi_\Omega \in L^1(|\nu|)$. Aplicando la desigualdad anterior obtenemos $|\chi_\Omega|_U \leq C\,\|\chi_\Omega\|_V$, es decir, $|\nu|_U(\Omega) \leq C\,\|\nu\|_V(\Omega) < +\infty$.

De la misma forma, para cada conjunto medible A, se tiene

$$|\nu|_U(A) \leq C\,\|\nu\|_V(A). \tag{3.3}$$

La dominación de la variación por la semivariación, expresada en (3.3), es condición necesaria para que $L^1(\nu, X)$ sea un AL-espacio, pero no suficiente, como se demuestra en [22, Ejemplo 1], donde se pone de manifiesto que existen medidas de variación acotada para las que $L^1(\nu, X)$ y $L^1(|\nu|)$ no son isomorfos. Sin embargo, teniendo en cuenta la densidad de las funciones simples, es claro que $L^1(|\nu|)$ es denso en $L^1(\nu, X)$, para cualquier medida ν de variación acotada con valores en un espacio de Fréchet.

En el citado ejemplo se pone de manifiesto que cuando X es un espacio de Banach, siempre es posible encontrar medidas para las que $L^1(\nu, X)$ no es AL-espacio. Por otra parte, de los teoremas II y III de Lewis se deduce que $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio cuando X es un espacio de Fréchet nuclear.

Ya hemos comentado anteriormente, que Kakutani probó que para cualquier AL-espacio de Banach E, existe un espacio medible (Ω, Σ) y una medida $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$, tal que E es reticularmente isométrico al espacio $L^1(\mu)$. Cuando el AL-espacio E tiene unidad débil, la medida μ puede tomarse finita. El siguiente teorema puede entenderse como una generalización del de Kakutani para AL-espacios de Fréchet.

Teorema 3.11 *Sea E un AL-espacio de Fréchet con unidad débil. Entonces existe un espacio medible (Ω, Σ) y una sucesión de medidas finitas $\mu_k : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$, tal que E es reticularmente isomorfo al límite proyectivo de la familia de espacios de Banach $(L^1(\mu_k))_k$.*

PRUEBA: Por la Proposición 3.3, E tiene la propiedad de Lebesgue. Por el Teorema 1.22, existe una medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ tal que E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. Como E y, por tanto, $L^1(\nu, E)$ es un AL-espacio, por el Teorema 3.10, E es reticularmente isomorfo a $L^1(|\nu|)$, que es el límite proyectivo de la familia de espacios de Banach $(L^1(|\nu|_k))_k$, siendo cada $|\nu|_k$ una medida finita. ■

En [76, Corolario 8.8], se usa el teorema de representación de Kakutani para demostrar que los AL-espacios de Banach son débil sucesionalmente completos. El teorema anterior, combinado con el Teorema 1.28 que relaciona la existencia de copias de c_0 y la completitud sucesional débil, permite generalizar este resultado a los AL-espacios de Fréchet.

Corolario 3.12 *Los AL-espacios de Fréchet son espacios débil sucesionalmente completos.*

PRUEBA: Bastará probarlo para AL-espacios separables. Por tanto, podemos suponer que E tiene unidad débil. Sea E un AL-espacio de Fréchet con unidad débil. Entonces E es reticularmente isomorfo a $L^1(|\nu|)$. El espacio $L^1(|\nu|)$ no tiene una copia isomorfa de c_0, ya que no la tiene $L^1(|\nu|_k)$ para cada k. Por el Teorema 1.28, $L^1(|\nu|)$ es débil sucesionalmente completo. ∎

Con objeto de obtener condiciones suficientes que garanticen que $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio pasamos ahora a estudiar medidas con valores en un AL-espacio.

Teorema 3.13 *Sea E un AL-espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$L^1(\nu, E)$ es un AL-espacio.*
2. *El operador integración $I_\nu : L^1(\nu, E) \longrightarrow E$ es regular.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.6, ya que $L^1(\nu, E)$ y E son AL-espacios de Fréchet e I_ν es continuo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Como I_ν es regular se tiene que I'_ν también es regular. Por tanto, I'_ν transforma conjuntos orden acotados de E' en conjuntos orden acotados de $L^1(\nu, E)'$.

Sea $H \subset E'$ un conjunto $\beta(E', E)$-acotado. Por la Proposición 3.4, H es orden acotado. Entonces $I'_\nu(H)$ es orden acotado en $L^1(\nu, X)'$. Finalmente, por el apartado (3) del Teorema 3.10, $L^1(\nu, X)$ es un AL-espacio. ∎

Observemos que la aplicación integración asociada a cualquier medida ν con una descomposición de Jordan ($\nu = \nu_1 - \nu_2$, siendo ν_1 y ν_2 medidas vectoriales positivas) o a una medida con descomposición de Hahn (existe $A \in \Sigma$ tal que $\nu(B) \geq 0$ para todo $B \in \Sigma_A$ y $\nu(B) \leq 0$ para todo $B \in \Sigma_{\Omega \setminus A}$) es un operador regular. Por tanto, se verifica el siguiente corolario.

Corolario 3.14 *Sea E un AL-espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial numerablemente aditiva con descomposición de Jordan (o con descomposición de Hahn). Entonces $L^1(\nu, E)$ es un AL-espacio de Fréchet.*

Corolario 3.15 *Sea E un retículo de Fréchet nuclear y $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el operador integración $I_\nu : L^1(\nu, E) \longrightarrow E$ es regular.*

PRUEBA: Por [82, Teorema 1], E es un AL-espacio de Fréchet. Por el apartado (3) del teorema III de Lewis, $L^1(\nu, E)$ es un AL-espacio de Fréchet. Aplicando ahora el teorema anterior se obtiene el resultado. ■

En el Teorema 1.22 probamos que los retículos de Fréchet E con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil son reticularmente isomorfos a $L^1(\nu, E)$ para una cierta medida ν. Cuando E es un AL-espacio de Fréchet puede encontrarse una medida positiva μ con valores en un espacio fijo (el espacio w de todas las sucesiones reales), de forma que $L^1(\mu, w)$ y E sean reticularmente isomorfos.

Teorema 3.16 *Sea E un retículo de Fréchet con unidad débil. Entonces E es un AL-espacio si y sólo si existe un espacio medible (Ω, Σ) y una medida positiva $\mu : \Sigma \longrightarrow w$ tal que E es reticularmente isomorfo al espacio $L^1(\mu, w)$.*

PRUEBA: $\Leftarrow$) Como w es un retículo de Fréchet nuclear y μ una medida positiva, entonces $L^1(\mu, w)$ es un AL-espacio de Fréchet con unidad débil.

$\Rightarrow$) Sea E un AL-espacio de Fréchet con unidad débil. Por el Teorema 1.22, existe un espacio medible (Ω, Σ) y una medida positiva $\nu : \Sigma \longrightarrow E$

tal que E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. Como E es un AL-espacio de Fréchet, la medida ν tiene variación acotada y $L^1(\nu, E)$ es reticularmente isomorfo a $L^1(|\nu|)$.

Definamos la medida $\mu : \Sigma \longrightarrow w$, por $\mu(A) = \left(|\nu|_k(A)\right)_k$. Claramente μ es una medida vectorial numerablmente aditiva y positiva. Veamos, además, que verifica la siguiente igualdad

$$\|\mu\|_k(A) = |\nu|_k(A), \quad k \geq 1, \quad A \in \Sigma.$$

En w se considera la familia de seminormas $|x|_k = \max\{|x_i| : i = 1, ..., k\}$, para $k = 1, 2, ...$ y $x = (x_n)_n \in w$. Denotamos por $\mathcal{W}_k = \{x \in w : |x|_k \leq 1\}$ para $k = 1, 2, ...$ Sea $x' \in \mathcal{W}_k^\circ \subset \phi$, entonces $x' = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$, siendo $\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq 1$. Sea $\{B_1, ..., B_n\}$ es una partición cualquiera de A por conjuntos medibles. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x'\mu(B_j)| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i |\nu|_i(B_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \left(|\nu|_i(B_j)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right) |\nu|_k(B_j) = \sum_{j=1}^n |\nu|_k(B_j) \\ &= |\nu|_k(A), \end{aligned}$$

por tanto,

$$|x'\mu|(A) \leq |\nu|_k(A), \quad x' \in \mathcal{W}_k^\circ, \quad A \in \Sigma. \tag{3.4}$$

Además,

$$e_k\mu(A) = |\nu|_k(A), \quad A \in \Sigma, k = 1, 2, ... \tag{3.5}$$

donde $e_k = \left(0, ..., 1^{k)}, 0, ...\right) \in \mathcal{W}_k^\circ$. Por tanto, $\|\mu\|_k(A) = |\nu|_k(A)$ como queríamos probar.

Ahora, es obvio que ν y μ tienen los mismos conjuntos nulos.

Usando (3.5) tenemos que $L^1(\mu, w) \subset L^1(|\nu|)$. Obviamente el orden en estos dos espacios es el mismo. De hecho probaremos que estos dos espacios son reticularmente isomorfos, con lo que terminaremos la prueba del teorema. Para ver esto es suficiente demostrar que la inclusión $L^1(|\nu|) \subset L^1(\mu, w)$

está bien definida, es inyectiva y continua. Dada una función $f \in L^1(|\nu|)$, entonces existe una sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_n$ tal que $\varphi_n \longrightarrow f$ puntualmente ν-*a.e.* y tal que $\varphi_n \longrightarrow f$ en $L^1(|\nu|)$, es decir,

$$\int_\Omega |\varphi_n - f|\, d\,|\nu|_k \xrightarrow{n} 0, \quad k = 1, 2, ...$$

Veamos que la sucesión $\left(\int_\Omega \varphi_n d\mu\right)_n$ converge en w. Para ello es suficiente probar que es débil-Cauchy. Sea $x' \in \phi$, de acuerdo con (3.4), existe algún k tal que

$$\begin{aligned} \left|\left\langle x', \int_A \varphi_n d\mu\right\rangle - \left\langle x', \int_A \varphi_m d\mu\right\rangle\right| &\leq \int_A |\varphi_n - \varphi_m|\, d\,|x'\mu| \\ &\leq \int_A |\varphi_n - \varphi_m|\, d\,|\nu|_k \xrightarrow{m,n} 0 \end{aligned}$$

para todo $A \in \Sigma$. Finalmente, por el teorema I de Lewis, $f \in L^1(\mu, w)$.

Esto prueba que la aplicación identidad está bien definida. Además, como los conjuntos ν-nulos y los μ-nulos coinciden, es inyectiva.

Por último, de (3.4) se sigue que la inclusión es continua. ■

3.3 Sobre los AM-espacios de Fréchet.

Bohnenblust y Kakutani [49] y [13], estudian la clase de los retículos de Banach que son AM-espacios y obtienen teoremas de representación para los mismos. Prueban que un retículo de Banach AM-espacio con unidad fuerte, es reticularmente isométrico al espacio $\mathcal{C}(K)$, donde K es un espacio topológico compacto y Hausdorff. También prueban, que un retículo de Banach AM-espacio, sin unidad fuerte, es reticularmente isométrico a un subretículo cerrado de un AM-espacio $\mathcal{C}(K)$. El mismo resultado fue obtenido independientemente por Krein y Krein en [56].

En el caso de los espacios de Fréchet tan sólo es conocida una representación inductiva mediante espacios del tipo $\mathcal{C}(K_i), i \in I$ que utiliza en su prueba el propio teorema de Kakutani [75, Corolario 5.8.7].

Un hecho fundamental en la prueba del teorema de representación de Kakutani para AM-espacios de Banach es la existencia de unidad fuerte. En esta sección probamos que no es posible obtener retículos de Fréchet AM-espacios con unidad fuerte, salvo que sean retículos de Banach. También estudiamos algunas propiedades de los retículos de Fréchet AM-espacios, encaminadas a responder a la pregunta ¿cuándo $L^1(\nu, X)$ es un AM-espacio?

Definición 3.17 *Se dice que un retículo de Fréchet E es un AM-espacio si su topología está determinada por una familia de seminormas $(q_n)_n$, que verifica la condición*

$$q_n(x \vee y) = \max\{q_n(x), q_n(y)\}, \quad n = 1, 2, ... \tag{AM}$$

para todos $x, y \in E, x, y \geq 0$.

En lo que sigue, los retículos de Fréchet que son AM-espacios los llamaremos AM-espacios de Fréchet.

Nota 3.18 *Si E es AM-espacio de Fréchet y $(q_n)_n$ es una familia de seminormas que cumple la condición (AM), entonces la sucesión $(q'_k)_k$, donde $q'_k = \max\{q_j, j = 1, ..., k\}$ es otra familia creciente de seminormas que generan la misma topología y siguen verificando la condición (AM). Por lo tanto, siempre que tengamos un AM-espacio de Fréchet podrá elegirse una familia de seminormas crecientes con la condición citada.*

Recordemos que un elemento positivo e, de un retículo vectorial E se llama unidad (fuerte), si para cada $x \in E$, existe $\lambda > 0$, tal que $|x| < \lambda e$, es decir, si el ideal generado por e coincide con E.

Sea E un retículo de Fréchet, cuya topología está determinada por una sucesión de seminormas reticulares crecientes $(p_n)_n$.

Sea $x \in E$. Consideremos el ideal A_x, generado por x, es decir,

$$A_x = \{y \in E : |y| \leq \lambda |x|, \lambda > 0\}.$$

Utilizando el mismo argumento que en [3, Teorema 12.20], es fácil probar que la función

$$\|y\|_\infty = \inf \{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda |x|\}, \quad y \in A_x$$

es una norma. El espacio A_x, dotado con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un AM-espacio de Banach con unidad fuerte x. De hecho, la bola unidad de A_x, respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, es el intervalo $[-|x|, |x|]$.

Veamos que los retículos de Fréchet no pueden tener unidad fuerte salvo que sean retículos de Banach.

Proposición 3.19 *Un retículo de Fréchet E con unidad fuerte, es un retículo de Banach, es decir, su topología queda determinada por una única norma, respecto de la cual E es un AM-espacio de Banach.*

PRUEBA: Si el retículo de Fréchet E tuviese unidad fuerte e, según el procedimiento descrito antes podríamos definir en E la norma $\|\cdot\|_\infty$, para la que E sería un retículo de Banach. Como un retículo sólo admite una topología de Fréchet [2, Teorema 16.8], la topología del espacio E y la generada por la norma $\|\cdot\|_\infty$, deben coincidir. ■

Consideremos un conjunto de índices I, en general no numerable. Recordemos que una sucesión creciente $A = (a_k)_k$, de familias positivas $(a_{ki})_{i\in I}$, se llama matriz de Köthe si, para cada $i \in I$, existe algún $k \geq 1$ tal que $a_{ki} > 0$. Definimos

$$\lambda_0 (I, A) := \left\{\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} : \lim_i |\alpha_i| a_{ki} = 0, k = 1, 2, ...\right\},$$

equipado con la topología generada por la familia de seminormas

$$\|\alpha\|_k^\infty = \sup \{|\alpha_i| a_{ki} : i \in I\}.$$

Entonces $\lambda_0(I, A)$ es un retículo de Fréchet atómico, que es AM-espacio y tiene la propiedad de Lebesgue, como se puede comprobar directamente. Además tiene unidad débil si y sólo si el conjunto I es numerable.

A continuación, probaremos que si E es un AM-espacio de Fréchet con la propiedad de Lebesgue, entonces existe un conjunto de índices I y una matriz de Köthe A, tal que E es reticularmente isomorfo a $\lambda_0(I, A)$.

Antes de la prueba necesitamos alguna preparación. Probaremos un lema y una proposición que se usarán en la prueba del teorema.

Lema 3.20 *Un AM-espacio de Fréchet con la propiedad de Lebesgue es un retículo atómico.*

PRUEBA: Si E no fuese átomico (ver comentarios de la sección 1.4), existiría un elemento positivo $u \in E$ tal que en el intervalo $[0, u]$ no existirían átomos. Como $u \in E$ es un elemento positivo, $p(u) > 0$ para alguna seminorma continua p que verifica la condición (AM).

Como u no es átomo existen dos elementos positivos y disjuntos $x, y \in [0, u]$ tal que $x + y = u$, en cuyo caso $u = x \vee y$. Por la propiedad (AM), se verifica

$$p(u) = \max\{p(x), p(y)\}.$$

En definitiva, podemos encontrar $x \in E$, verificando $0 < x < u$ y tal que $p(u) = p(x)$.

Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in E : 0 < x < u, p(u) = p(x)\}.$$

Por lo visto más arriba $A \neq \emptyset$ y es claro que A está acotado inferiormente por cero. Como E es orden completo, por tener la propiedad de Lebesgue, existe $v := \inf A \geq 0$.

El conjunto $\{x\}_{x\in A}$, con el orden que hereda de E, constituye una red para la que se tiene $\{x\}_{x\in A} \downarrow v$. Como E tiene la propiedad de Lebesgue, la red es convergente a v y, por lo tanto,

$$p(v) = \lim_x p(x) = p(u) > 0,$$

luego $v \in A$.

Como v no puede ser átomo, razonando como al principio de la prueba, existe $z \in E$ tal que $0 < z < v$ verificando $p(z) = p(v)$. Puesto que $p(v) = p(u)$, se tendría también que $p(z) = p(u)$. Por lo tanto, $z \in A$ y v no sería el ínfimo. ∎

La siguiente proposición fue probada por Kakutani [48] para retículos de Banach. Ver también [59, Teorema 1.a.9.].

Proposición 3.21 *Cualquier retículo de Fréchet E con la propiedad de Lebesgue puede ser descompuesto en una suma directa incondicional de una familia (en general no numerable) de bandas principales $\{E_i\}_{i\in I}$ mutuamente disjuntas, teniendo cada E_i unidad débil $e_i > 0$. Más precisamente, cada $x \in E$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_i x_i$, con $x_i \in E_i$ y la serie converge incondicionalmente.*

PRUEBA: Por el lema de Zorn, existe una familia maximal $\{e_i\}_{i\in I}$ de elementos positivos de E, dos a dos disjuntos. Sea

$$E_i = \{e_i\}^{dd} := \{x \in E : |x| \wedge |y| = 0, \text{cuando } e_i \wedge |y| = 0\}$$

la banda principal generada por e_i. Denotamos por P_i la orden proyección de E sobre la banda E_i. Por [2, Teorema 5.6], cada E_i es un subespacio cerrado de E y e_i es una unidad débil en cada E_i, ya que si $x \in E_i$ y $x \wedge e_i = 0$, entonces $x \wedge x = 0$ y, por tanto, $x = 0$.

Por ser $e_j \wedge e_i = 0$ si $j \neq i$, se deduce que $|x| \wedge |y| = 0$ para cualquier $x \in E_i$ y cualquier $y \in E_j$, es decir, E_i y E_j son disjuntos.

Por [2, Teorema 16.6], cada proyección $P_i : E \longrightarrow E_i$ es continua, ya que es positiva.

Sea $x \in E, x \geq 0$. Consideremos la familia $\mathcal{P}_f(I)$ de todos los subconjuntos finitos de I ordenados por inclusión. Para cada $F \in \mathcal{P}_f(I)$ se tiene

$$\sum_{i \in F} P_i(x) = \sup\{P_i(x) : i \in F\} \leq x.$$

Por tanto, la red $\left(\sum_{i \in F} P_i(x)\right)_F$ es de elementos positivos, creciente y orden acotada por x. Como E es orden completo, existe $\sup_F \left(\sum_{i \in F} P_i(x)\right)$. Como además, E tiene la propiedad de Lebesgue, la red es convergente a dicho supremo, es decir, existe el siguiente límite

$$\sum_{i \in I} P_i(x) = \lim_F \sum_{i \in F} P_i(x) = \sup\{P_i(x) : i \in I\} \leq x.$$

Pongamos $x_0 = \sum_{i \in I} P_i(x)$ y comprobemos que $x_0 = x$. Si fuese $x > x_0$ entonces $x - x_0 > 0$ y, de la maximalidad de $\{e_i\}_{i \in I}$ se tendría que existiría un $i_0 \in I$ tal que $(x - x_0) \wedge e_{i_0} > 0$. Por otra parte,

$$0 \leq (x - x_0) \wedge e_{i_0} = \left(x - \sum_{i \in I} P_i(x)\right) \wedge e_{i_0}$$

$$\leq (x - P_{i_0}(x)) \wedge e_{i_0} \leq P_{i_0}(x - P_{i_0}(x)) = 0,$$

en contra de lo visto antes. De esta forma hemos comprobado que la serie $\sum_{i \in I} x_i$, donde $x_i = P_i(x)$, converge incondicionalmente a x.

Veamos ahora, la unicidad de la descomposición.

Si $\sum_{i \in I} x_i = 0$, con $x_i \in E_i$ para todo i, debido a la continuidad de cada P_j, y teniendo en cuenta que los E_i son disjuntos, se verifica

$$0 = \sum_{i \in I} P_j(x_i) = P_j(x_j) = x_j$$

para todo $j \in I$.

Por último, para $x \in E$ arbitrario, $x = x^+ - x^-$. Por tanto,

$$x = \sum_{i \in I} P_i\left(x^+\right) - \sum_{i \in I} P_i\left(x^-\right) = \sum_{i \in I} P_i\left(x^+ - x^-\right) = \sum_{i \in I} P_i\left(x\right).$$

■

Probablemente Andô [8] (ver también [59, Teorema I.b.10]) establece que un AM-espacio de Banach es orden continuo (tiene la propiedad de Lebesgue) si y sólo si es reticularmente isométrico a $c_0(I)$, para algún conjunto de índices I. Posteriormente, Tskrekos prueba en [79] que cualquier AM-espacio de Banach orden completo separable es isomorfo a c_0. Observemos que un espacio orden completo (basta σ-orden completo) separable siempre tiene la propiedad de Lebesgue [2, Teorema 10.7]. El siguiente resultado constituye la versión del teorema de Andô en el marco de los retículos de Fréchet.

Teorema 3.22 *Un AM-espacio de Fréchet E tiene la propiedad de Lebesgue si y sólo si existe un conjunto de índices I y una matriz de Köthe A, tal que E es reticularmente isométrico a $\lambda_0(I, A)$.*

PRUEBA: Obviamente, si E es reticularmente isométrico a $\lambda_0(I, A)$, entonces E es un AM-espacio de Fréchet con la propiedad de Lebesgue.

Sea E un AM-espacio de Fréchet y sea $(q_k)_k$ una familia de seminormas crecientes que genera la topología de E, verificando la condición (AM).

Como E tiene la propiedad de Lebesgue, por el Lema 3.20, es un retículo atómico. Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ un sistema completo de átomos positivos y disjuntos. Consideremos el subespacio $E_i := \{\alpha e_i : \alpha \in \mathbb{R}\}$, generado por e_i. De acuerdo con [2, Teorema 2.16] y puesto que en este contexto los elementos discretos y los átomos coinciden, dicho subespacio coincide con el ideal generado por e_i y, a su vez, con la banda de proyección generada por el elemento e_i. Sea P_i la orden proyección de E sobre la banda E_i.

Por la proposición anterior, cada elemento $x \in E$ se puede escribir de forma única como

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i(x)\, e_i,$$

donde $\alpha_i(x)$ es el único escalar que verifica $P_i(x) = \alpha_i(x) e_i$. Observemos que

$$|x| = \sum_{i \in I} |\alpha_i(x)| e_i, \tag{3.6}$$

puesto que $|\alpha_i(x)| = \alpha_i(|x|)$ para todo $i \in I$ al ser P_i un homomorfismo reticular. Para cada $k = 1, 2, ...,$ definimos las familias

$$a_k := (q_k(e_i))_{i \in I}.$$

Entonces $A := (a_k)_k$ es una matriz de Köthe y podemos considerar el espacio $\lambda_0(I, A)$. A continuación veremos que E y $\lambda_0(I, A)$ son reticularmente isométricos.

Definimos la aplicación $T : E \longrightarrow \lambda_0(I, A)$ por

$$T(x) = (\alpha_i(x))_{i \in I}.$$

Veamos primero que T está bien definida. Consideremos la familia $\mathcal{P}_f(I)$ de todos los subconjuntos finitos de I ordenada por inclusión. Usando (3.6) se tiene para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $k \geq 1$, existe $F' \in \mathcal{P}_f(I)$ tal que $q_k(|\alpha_i(x)| e_i) < \varepsilon$ para cualquier $i \notin F'$, es decir,

$$\lim_i |\alpha_i(x)| a_{ki} = 0,$$

luego, $T(x) \in \lambda_0(I, A)$.

Es evidente que T es lineal e inyectiva. Veamos ahora que T es sobreyectiva.

Sea $(\alpha_i)_{i \in I} \in \lambda_0(I, A)$ y fijemos $k \geq 1$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $F' \in \mathcal{P}_f(I)$ tal que $|\alpha_i(x)| a_{ki} < \varepsilon$ para todo $i \notin F'$.

Para cada $F \in \mathcal{P}_f(I)$ tal que $F' \cap F = \emptyset$ se verifica

$$\begin{aligned} q_k\left(\sum_{i \in F} \alpha_i e_i\right) &= q_k\left(\left|\sum_{i \in F} \alpha_i e_i\right|\right) = q_k\left(\sum_{i \in F} |\alpha_i| e_i\right) \\ &= q_k(\sup\{|\alpha_i| e_i : i \in F\}) \\ &= \sup\{|\alpha_i| q_k(e_i) : i \in F\} \\ &= \sup\{|\alpha_i| a_{ki} : i \in F\} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.7}$$

luego $x := \sum\limits_{i\in I} \alpha_i e_i$ define un elemento de E. Es evidente que $T(x) = (\alpha_i)_{i\in I}$.

Finalmente de (3.6) se sigue que T es isomorfismo reticular.

Por último, veamos que para cada $x \in E$ y para cada $k \geq 1$, $\|T(x)\|_k^\infty = q_k(x)$. Dados $x \in E, i \in I$ y $k \geq 1$, observemos que

$$\begin{aligned} |\alpha_i(x)| a_{ki} &= |\alpha_i(x)| q_k(e_i) = q_k(|\alpha_i(x)| e_i) \\ &= q_k(P_i(|x|)) \leq q_k(|x|) = q_k(x). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|T(x)\|_k^\infty = \sup\{|\alpha_i(x)| a_{ki} : i \in I\} \leq q_k(x). \tag{3.8}$$

Usando un razonamiento similar al de (3.7), obtenemos para cada $F \in \mathcal{P}_f(I)$

$$q_k\left(\sum_{i\in F} |\alpha_i(x)| e_i\right) \leq \|T(x)\|_k^\infty.$$

Si llamamos $x_F = \sum\limits_{i\in F} |\alpha_i(x)| e_i$, entonces $x_F \uparrow |x|$. Como E tiene la propiedad de Lebesgue, $x_F \longrightarrow |x|$. Por tanto

$$q_k(x) = q_k(|x|) = \lim_F (q_k(x_F)) \leq \|T(x)\|_k^\infty,$$

que junto con (3.8) nos da $q_k(x) = \|T(x)\|_k^\infty$. ■

Corolario 3.23 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces $L^1(\nu, X)$ es un AM-espacio si y sólo si es reticularmente isomorfo a $\lambda_0(\mathbb{N}, A)$, para alguna matriz de Köthe A.*

PRUEBA: $\lambda_0(\mathbb{N}, A)$ es un AM-espacio de Fréchet con unidad débil. Si $L^1(\nu, X)$ es reticularmente isomorfo a $\lambda_0(\mathbb{N}, A)$, entonces $L^1(\nu, X)$ es un AM-espacio.

Por otra parte, sabemos que $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Lebesgue. Si además es AM-espacio, por la Proposición 3.22, es reticularmente isomorfo a $\lambda_0(I, A)$, para un cierto conjunto de índices I y para una cierta matriz de Köthe A. Como $L^1(\nu, X)$ tiene unidad débil se verifica que $I = \mathbb{N}$. ■

Finalizamos esta sección estableciendo otra condición suficiente para que $L^1(\nu, X)$ sea un AL-espacio. La razón para recoger este resultado en esta sección es que la medida ν toma valores en un AM-espacio de Fréchet concreto. Consideremos el espacio $\mathcal{C}(K)$ de las funciones reales continuas definidas sobre un espacio topológico K localmente compacto, Hausdorff y σ-compacto, dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos. Sabemos que existe una sucesión creciente de conjuntos compactos $(K_n)_n$, tal que la topología de $\mathcal{C}(K)$ está generada por la sucesión creciente de seminormas

$$\|f\|_n^* = \sup\{|f(t)| : t \in K_n\}, \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

El resultado que probamos generaliza el de Curbera [22, Teorema 2]. En su caso, debido al teorema de representación de Kakutani, es válido para cualquier medida que tome valores en un AM-espacio de Banach.

En la demostración del mencionado teorema haremos uso del siguiente lema de carácter técnico.

Lema 3.24 *Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{C}(K)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ un natural fijo y denotemos por $N_k = \{n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_k^* \neq 0\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante $C > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que*
$$C\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \|f_n\|_k^*\right) \leq \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n |f_n|\right\|_j^*,$$
para cualesquiera $a_1, ..., a_N$ escalares positvos.

2. *Existe una constante $C > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que*
$$\left\|\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \frac{|f_{n_i}|}{\|f_{n_i}\|_k^*}\right\|_j^* \geq C,$$

para cualesquiera $\alpha_1, ..., \alpha_M$ escalares positivos con $\sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1$ y cualesquiera $\{n_1, ..., n_M\} \subset N_k, M \in \mathbb{N}$.

3. $0 \notin \overline{\text{co}} \left\{ \frac{|f_n|}{\|f_n\|_k^*} : n \in N_k \right\}$.

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\alpha_1, ..., \alpha_M$ escalares positivos tal que $\sum\limits_{i=1}^{M} \alpha_i = 1$ y sea $\{n_1, ..., n_M\} \subset N_k$.

Para $i = 1, ..., M$ consideramos los escalares positivos

$$b_i = \frac{\alpha_i}{\|f_{n_i}\|_k^*},$$

Sea $N = \max\{n_i : i = 1, ..., M\}$ y consideremos los escalares $\{a_1, \ldots, a_N\}$ definidos por $a_{n_i} = b_i$, si $i = 1, ..., M$ y $a_n = 0$ si $n \notin \{n_1, ..., n_M\}$. Por hipótesis existe una constante $C > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \frac{|f_{n_i}|}{\|f_{n_i}\|_k^*} \right\|_j^* &= \left\| \sum_{i=1}^{M} b_i \, |f_{n_i}| \right\|_j^* = \left\| \sum_{p=1}^{N} a_p \, |f_p| \right\|_j^* \\ &\geq C \left(\sum_{p=1}^{N} a_p \, \|f_p\|_k^* \right) = C \left(\sum_{i=1}^{M} b_{n_i} \, \|f_{n_i}\|_k^* \right) \\ &= C \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \right) = C. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $a_1, ..., a_N$ un conjunto de escalares positivos.

Si $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \, \|f_n\|_k^* = 0$, entonces la condición se cumple trivialmente.

Si $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \, \|f_n\|_k^* \neq 0$, entonces existe algún n tal que $\|f_n\|_k^* \neq 0$. Consideremos el subconjunto $\{n_1, ..., n_M\} \subset \{1, ..., N\}$ tal que $\left\|f_{n_j}\right\|_k^* \neq 0$, para $j = 1, 2, ..., M$. Definimos los escalares positivos

$$\alpha_{n_j} = \frac{a_{n_j} \left\|f_{n_j}\right\|_k^*}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \, \|f_n\|_k^*}, \quad j = 1, 2, ..., M.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_{n_j} = \sum_{j=1}^{M} \frac{a_{n_j} \left\|f_{n_j}\right\|_k^*}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*} = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j \left\|f_j\right\|_k^*}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*} = 1.$$

Por hipótesis, existe una constante $C > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{M} \alpha_{n_i} \frac{\left|f_{n_i}\right|}{\left\|f_{n_i}\right\|_k^*}\right\|_j^* \geq C.$$

Por tanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{M} \frac{a_{n_i} \left\|f_{n_i}\right\|_k^*}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*} \frac{\left|f_{n_i}\right|}{\left\|f_{n_i}\right\|_k^*}\right\|_j^* = \left\|\sum_{i=1}^{M} \frac{a_{n_i} \left|f_{n_i}\right|}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*}\right\|_j^* \geq C,$$

de donde se deduce que

$$\left\|\sum_{i=1}^{M} a_{n_i} \left|f_{n_i}\right|\right\|_j^* \geq C \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*\right).$$

Por último, observemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \left|f_n\right|\right\|_j^* \geq \left\|\sum_{i=1}^{M} a_{n_i} \left|f_{n_i}\right|\right\|_j^* \geq C \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \left\|f_n\right\|_k^*\right).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Observemos que la hipótesis afirma que existe un natural $j \geq k$ y una constante $C > 0$ tal que

$$\|z\|_j^* \geq C > 0,$$

para todo $z \in \mathrm{co}\left\{\frac{|f_n|}{\|f_n\|_k^*} : n \in N_k\right\}$. Por tanto, $0 \notin \overline{\mathrm{co}}\left\{\frac{|f_n|}{\|f_n\|_k^*} : n \in N_k\right\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional continuo u sobre $C(K)$ y una constante C tal que $u(0) < C < u(z)$, para todo $z \in \overline{\mathrm{co}}\left\{\frac{|f_n|}{\|f_n\|_k^*} : n \in N_k\right\}$.

Como u es continuo existe algún $j \geq k$ y una constante $C_j > 0$ tales que

$$0 < C < u(z) \leq C_j \|z\|_j^*.$$

En particular, si $\alpha_1, ..., \alpha_M$ son escalares positivos, verificando $\sum_{n=1}^{M} \alpha_i = 1$, $\{n_1, ..., n_M\} \subset N_k$ entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \frac{|f_{n_i}|}{\|f_{n_i}\|_k^*} \right\|_j^* \geq \frac{C}{C_j} > 0.$$

■

Teorema 3.25 *Sea $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ una medida vectorial de variación acotada. Sea $\nu(\{n\}) = f_n \in \mathcal{C}(K)$. Entonces son equivalentes:*

1. *$L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es un AL-espacio.*
2. *La medida ν cumple la condición:*

$$0 \notin \overline{\text{co}} \left\{ \frac{|f_n|}{\|f_n\|_k^*} : n \in N_k \right\}, \quad k = 1, 2, ...,$$

donde $N_k = \{n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_k^* \neq 0\}$.

PRUEBA: Como ν es de variación acotada, sabemos que $L^1(|\nu|)$ es denso en $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$. Por el Teorema 3.10, $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es AL-espacio si y sólo si la inclusión natural $J : L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es sobre. Por el teorema de la aplicación abierta, la apliación J es sobre si y sólo si es abierta. Por tanto, $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es AL-espacio si y sólo si para cada $k \geq 1$ existe un natural $j \geq k$ y una constante positiva M_k tal que

$$|g|_k \leq M_k \|g\|_j, \tag{3.9}$$

para cada función g de $L^1(|\nu|)$.

Como las funciones simples son densas en $L^1(|\nu|)$ y en $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$, en la condición (3.9) puede sustituirse g por cualquier función simple φ.

Más aún, si tenemos en cuenta que para un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, que enumeramos $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$, los conjuntos $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$ verifican $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ en $L^1(|\nu|)$ y en $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$, entonces en la condición (3.9), es suficiente considerar funciones simples soportadas sobre funciones características de conjuntos finitos. Ya que las seminormas son reticulares, será suficiente considerar funciones positivas.

En definitiva, $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es un AL-espacio si y sólo si para cada $k \geq 1$, existe una constante positiva $C_k > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que

$$C_k \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right|_k \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right\|_j ,$$

para cada conjunto de números reales positivos $a_1, ..., a_N$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$. Ahora, utilizamos la familia de seminormas equivalentes dadas en (1.4).

$$\|g\|_j^{\infty} = \sup \left\{ \left\| \int_B g d\nu \right\|_j^* : B \subset \mathbb{N} \right\}.$$

Recordemos que dichas seminormas verifican las desigualdades

$$\|g\|_j^{\infty} \leq \|g\|_j \leq 2 \|g\|_j^{\infty} .$$

Entonces, modificando convenientemente la constante C_k, se verifica que $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es un AL-espacio si y sólo si para cada $k \geq 1$, existe una constante positiva $C_k > 0$ y un natural $j \geq k$ tal que

$$C_k \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right|_k \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right\|_j^{\infty} ,$$

para cada conjunto de números reales positivos $a_1, ..., a_N$.

Analicemos el valor de $\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right\|_j^{\infty}$. Observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right\|_j^{\infty} &= \sup \left\{ \left\| \int_B \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} d\nu \right\|_j^* : B \subset \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in B} a_n f_n \right\|_j^* : B \subset \{1, ..., N\} \right\}. \end{aligned}$$

Como se verifican las desigualdades

$$\sum_{n \in B} a_n f_n \leq \sum_{n \in B} a_n |f_n| \leq \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| ,$$

para cada $B \subset \{1, ..., N\}$, se obtiene que

$$\left\| \sum_{n\in B} a_n f_n \right\|_j^* \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| \right\|_j^*.$$

Por tanto,

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{n\in B} a_n f_n \right\|_j^* : B \subset \{1, ..., N\} \right\} \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| \right\|_j^*.$$

Por otra parte,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| \right\|_j^* = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| (t) : t \in K_j \right\} = \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n (t_0)|$$

para algún $t_0 \in K_j$.

Sean $B_1 = \{n \in \{1, ..., N\} : f_n (t_0) > 0\}$ y $B_2 = \{n \in \{1, ..., N\} : f_n (t_0) \leq 0\}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N} a_n |f_n (t_0)| = \sum_{n\in B_1} a_n f_n (t_0) - \sum_{n\in B_2} a_n f_n (t_0).$$

Finalmente, obtenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| \right\|_j^* \leq 2 \sup \left\{ \left\| \sum_{n\in B} a_n f_n \right\|_j^* : B \subset \{1, ..., N\} \right\}.$$

Como

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}} \right|_k = \sum_{n=1}^{N} a_n \|f_n\|_k^*,$$

se deduce que $L^1(\nu, \mathcal{C}(K))$ es un AL-espacio si y sólo si para cada $k \geq 1$ existe una constante $C_k > 0$, un natural $j \geq k$ tal que

$$C_k \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \|f_n\|_k^* \right) \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n |f_n| \right\|_j^*,$$

para cada conjunto de números reales positivos $a_1, ..., a_N$. Aplicando ahora el lema anterior, obtenemos el teorema. ∎

Capítulo 4

Operadores en $\mathbf{L}^1(\nu, X)$.

4.1 L-débil compacidad en $\mathbf{L}^1(\nu, X)$.

En esta sección obtenemos una caracterización de los conjuntos L-débil compactos del espacio $L^1(\nu, X)$. En particular, nos interesa probar que coinciden con los conjuntos equi-integrables, es decir, aquellos conjuntos $K \subset L^1(\nu, X)$ para los que se verifica $\lim_{\nu(A)\to 0} \|f\chi_A\|_U = 0$ uniformemente en K, para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$.

Los conjuntos L-débil compactos, introducidos por Meyer-Nieberg en [62], forman una subclase de los conjuntos aproximadamente orden acotados (casi-orden acotados), introducidos por Zaanen [84]. Sin embargo, en el contexto en el que nosotros los usaremos estas dos familias de conjuntos coinciden. Comenzamos recordando algunas definiciones.

Un subconjunto A de un retículo de Fréchet E se llama casi-orden acotado si para cualquier entorno sólido $U \in \mathcal{U}_0(E)$ existe un elemento positivo $x \in E$ tal que

$$A \subset [-x, x] + U.$$

Es fácil comprobar que un conjnuto A es casi-orden acotado si y sólo si para cada entorno sólido $U \in \mathcal{U}_0(E)$ existe un elemento positivo $x \in E$ tal que

$$p_U\left((|y| - x)^+\right) \leq 1, \text{ para todo } y \in A.$$

Definición 4.1 *Sea E un retículo de Fréchet y $A \subset E$ un conjunto no vacío y acotado de E. Se dice que A es L-débil compacto si cualquier sucesión disjunta de la envolvente sólida de A es convergente a cero en la topología de E.*

Nota 4.2 *Obsérvese que un conjunto A es L-débil compacto si y sólo si la envolvente sólida de A, que denotaremos $S(A)$, es L-débil compacto.*

Usando el teorema sobre sucesiones disjuntas de Burkinshaw-Dodds, ver [2, Teorema 21.7], se puede demostrar la siguiente proposición, que caracteriza a los conjuntos L-débil compactos de un retículo de Fréchet.

Proposición 4.3 *Sea A un conjunto no vacío y acotado de E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un conjunto L-débil compacto.*

2. *$x'_n(x) \to 0$ uniformemente en A, para cualquier sucesión (positiva) equicontinua disjunta $(x'_n)_n \subset E'$.*

Además, si E tiene la propiedad de Lebesgue las afirmaciones anteriores equivalen a:

3. *A es casi-orden acotado.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Si A es un conjunto L-débil compacto, entonces $S(A)$ es sólido y L-débil compacto. Sea $(x'_n)_n \subset E'$ una sucesión equicontinua y disjunta. Tomamos $U \in \mathcal{U}_0(E)$ sólido tal que $(x'_n)_n \subset U^\circ$. Aplicando la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ de [2, Teorema 21.7], con $S(A)$ y U° se tiene que $x'_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente en $S(A)$ y, por tanto, en A.

$(2) \Rightarrow (1)$ Usando de nuevo la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ de [2, Teorema 21.7] es suficiente probar que $x'_n(z) \rightarrow 0$ uniformemente en $S(A)$, para cualquier sucesión positiva, equicontinua y disjunta $(x'_n)_n \subset E'$. Teniendo en cuenta ésto, bastará probar que $x'_n(|\cdot|)$ converge a cero uniformemente en A, para cualquier sucesión positiva, equicontinua disjunta $(x'_n)_n \subset E'$. Si no fuese así, existiría una sucesión positiva $(x'_n)_n$ de E' tal que $x'_n(|\cdot|)$ no converge a cero uniformemente en A. Entonces existe $\delta > 0$ y una subsucesión de (x'_n), que enumeramos de la misma forma, tal que

$$\sup\{x'_n(|x|) : x \in A\} \geq \delta, \quad n = 1, 2, ...$$

Para cada n, existe $x_n \in A$ tal que

$$x'_n(|x_n|) \geq \delta, \quad n = 1, 2, ...$$

Ya que $x'_n(|x_n|) := \sup\{|y'(x_n)| : |y'| \leq x'_n\}$ existe, para cada n, un funcional y'_n verificando $|y'_n| \leq x'_n$ tal que $|y'_n(x_n)| \geq \delta$, para $n = 1, 2, ...$

La sucesión $(y'_n)_n$ es disjunta y equicontinua, pero $y'_n(\cdot)$ no converge a cero uniformemente en A. Ésto contradice (1).

$(1) \Rightarrow (3)$ Si A es L-débil compacto entonces $S(A)$ es sólido y L-débil compacto. Si U es un entorno sólido del origen de E, por [2, Teorema 21.7(iii)], existe un elemento positivo $x \in E$, tal que $A \subset S(A) \subset [-x, x] + U$.

$(3) \Rightarrow (1)$ En primer lugar, observemos que si $A \subset [-x, x] + U$, entonces $S(A) \subset [-x, x] + U$, para cualquier entorno sólido U del origen de E. Ahora, sea $(y_n)_n \subset S(A)$ una sucesión disjunta y U un entorno sólido del origen de E. Por (3) existe un elemento positivo $x \in E$ tal que

$$S(A) \subset [-x, x] + \frac{1}{2}U. \tag{4.1}$$

Observemos que se verifica la siguiente relación $|y_n| = |y_n| \wedge x + (|y_n| - x)^+$. Entonces

$$p_U(|y_n|) \leq p_U(|y_n| \wedge x) + p_U\left((|y_n| - x)^+\right) \tag{4.2}$$

$$\leq \; p_U\left(|y_n| \wedge x\right) + \frac{1}{2}.$$

Para la última desigualdad, tengamos en cuenta (4.1) y que se verifica la relación $(|y_n| - x)^+ \leq ||y_n| - x|$. Al ser U sólido se tiene que $(|y_n| - x)^+ \in \frac{1}{2}U$.

Por otra parte, como $(|y_n| \wedge x)_n$ es disjunta y está contenida en $[0, x]$ converge a cero, puesto que E tiene la propiedad de Lebesgue. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_U\left(|y_n| \wedge x\right) \leq \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

para todo $n \geq n_0$.

De (4.2) y (4.3), se tiene que $p_U\left(|y_n|\right) \leq 1$, para todo $n \geq n_0$, como queríamos demostrar. ■

La situación de los conjuntos L-débil compactos en relación con los conceptos clásicos de compacidad se recogen en las siguientes proposiciones.

Proposición 4.4 *Sea E un retículo de Fréchet y A un subconjunto no vacío de E. Entonces se verifica:*

1. *Si A es sólido y relativamente compacto, entonces A es L-débil compacto.*

2. *Si A es L-débil compacto y E es un retículo atómico, entonces A es relativamente compacto.*

PRUEBA: (1) y (2) se obtienen de [2, Teorema 21.15] teniendo en cuenta para (2) que $S(A)$ es sólido y L-débil compacto si A lo es. ■

Proposición 4.5 *Sea E un retículo de Fréchet y A un subconjunto no vacío de E. Entonces se verifica:*

1. *Si A es L-débil compacto, entonces A es relativamente débil compacto.*

2. *Si A es relativamente débil compacto y E es un AL-espacio, entonces A es L-débil compacto.*

PRUEBA: (1) Si A es L-débil compacto entonces $S(A)$ es sólido y L-débil compacto. Por [2, Teorema 21.8], $S(A)$ es relativamente débil compacto y, por tanto, A también lo es.

(2) Si E es un AL-espacio, y A es relativamente débil compacto, aplicando [2, Teoremas 22.2 y 20.12], la envolvente sólida convexa de A también es relativamente débil compacto.

Si $(x_n)_n \subset S(A)$ es disjunta, entonces $(|x_n|)_n \subset S(A)$ es disjunta. Por [2, Teorema 21.2],

$$|x'|(|x_n|) \to 0, \quad x' \in E',$$

es decir, $x_n \to 0$ en la topología $|\sigma|(E, E')$. Ya que E es un AL-espacio, la topología $|\sigma|(E, E')$ coincide con la topología de E, por tanto, $x_n \to 0$ en E y A es L-débil compacto. ■

Para una medida escalar $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, Dunford y Pettis caracterizaron en [32] los conjuntos relativamente débil compactos de $L^1(\lambda)$ como aquellos que son equi-integrables. Si tenemos en cuenta que en $L^1(\lambda)$ los conjuntos relativamente débil compactos y los conjuntos L-débil compactos coinciden, el teorema que demostraremos a continuación se puede considerar como una generalización del de Dunford y Pettis (ver [25, Teorema VII.13(bis)]).

Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva. Tomemos una función $f \in L^1(\nu, X)$. Como la medida ν_f, con densidad f, es numerablemente aditiva, si $(A_n)_n \downarrow \emptyset$ en Σ, entonces, por [53, Lema II.1.3], se verifica que $\lim_n \|\nu_f\|_U(A_n) = 0$, para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$, es decir, $\lim_n \|f\chi_{A_n}\|_U = 0$, para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$.

Teorema 4.6 *Sea X un espacio de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Para cualquier conjunto acotado $K \subset L^1(\nu, X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es L-débil compacto.*

2. $\lim\limits_n \sup\{\|f\chi_{A_n}\|_U : f \in K\} = 0$, *para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y para cualquier sucesión $(A_n) \downarrow \emptyset$ en Σ.*

3. $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} \sup\{\|f\chi_A\|_U : f \in K\} = 0$, *para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y para cualquier (alguna) medida de control λ de ν.*

4. $\lim\limits_{\nu(A)\to 0} \sup\{\|f\chi_A\|_U : f \in K\} = 0$, *para cualquier $U \in \mathcal{U}_0(X)$.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y $\mathcal{V} = \left\{f \in L^1(\nu, X) : \|f\|_U \leq \frac{1}{2}\right\}$. Por ser K un conjunto L-débil compacto y tener $L^1(\nu, X)$ la propiedad de Lebesgue, existe una función positva $h \in L^1(\nu, X)$ tal que $K \subset [-h, h] + \mathcal{V}$.

Entonces para cualquier $f \in K$, podemos escribir $f = u + v$, para algún $v \in \mathcal{V}$ y u tal que $|u| \leq h$.

Ahora, si $(A_n)_n \downarrow \emptyset$ en Σ y $f \in K$, entonces se verifica

$$\begin{aligned} \|f\chi_{A_n}\|_U &= \|u\chi_{A_n} + v\chi_{A_n}\|_U \\ &\leq \||u|\,\chi_{A_n}\|_U + \frac{1}{2} \\ &\leq \|h\chi_{A_n}\|_U + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente observemos que $h\chi_{A_n} \to 0$ en $L^1(\nu, X)$, puesto que $h\chi_{A_n} \downarrow \emptyset$ puntualmente ν-*a.e.* y $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Lebesgue.

(2) $\Rightarrow$ (3) Tomemos $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Consideremos la familia de medidas escalares numerablemente aditivas $\mathcal{M} := \{x'\nu_f : f \in K, x' \in U^\circ\}$.

Como K es un conjunto acotado de $L^1(\nu, X)$, se verifica

$$\begin{aligned} \sup\{|x'\nu_f|(\Omega) : f \in K, x' \in U^\circ\} &= \sup\left\{\|\nu_f\|_U(\Omega) : f \in K\right\} \\ &= \sup\{\|f\|_U : f \in K\} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}$ es una familia uniformemente acotada. De la hipótesis deducimos que la familia $\mathcal{M}$ es uniformemente numerablemente aditiva. Como λ es una medida de control para ν, se verifica $x'\nu_f$ es absolutamente continua respecto de λ. Por [27, Corolario I.2.5.], se tiene que la familia $\mathcal{M}$ es uniformemente absolutamente λ-continua, es decir,

$$\lim_{\lambda(B)\to 0} \sup \{|x'\nu_f(B)| : x' \in U^\circ, f \in K\} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{\lambda(B)\to 0} \sup \{p_U(\nu_f(B)) : f \in K\} = 0.$$

Entonces, existe $\delta > 0$, tal que $\lambda(B) < \delta$ implica $p_U(\nu_f(B)) < \frac{1}{2}$, para todo $f \in K$. De las acotaciones para la semivariación (0.1), se obtiene que existe $\delta > 0$, tal que $\lambda(B) < \delta$ implica $\|\nu_f\|_U(B) < 1$, es decir,

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup \left\{ \|\nu_f\|_U(A) : f \in K \right\} = 0. \tag{4.4}$$

Finalmente del teorema (BDSL) obtenemos $\|\nu_f\|_U(A) = \|f\chi_A\|_U$. Por tanto, (3) se obtiene de (4.4)

(3) $\Rightarrow$ (4) Si λ es cualquier medida de control de la medida ν, entonces $\lim\limits_{\nu(A)\to 0} \lambda(A) = 0$. Ahora, de (3) se obtiene inmediatmente (4).

(4) $\Rightarrow$ (2) Es inmediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $(f_n)_n$ una sucesión disjunta en la envolvente sólida de K. Entonces, existe para cada n, una función $g_n \in K$ tal que

$$|f_n| \le |g_n|, \quad n = 1, 2, ...$$

Consideremos los conjuntos medibles disjuntos

$$A_n = \{w \in \Omega : |f_n(w)| > 0\}, \quad n = 1, 2, ...$$

y observemos que $|f_n|\chi_{A_n} \le |g_n|\chi_{A_n}$, para $n = 1, 2, ...$

Sea $U \in \mathcal{U}_0(X)$, por (3) existe $\delta > 0$, tal que $\sup\{\|g\chi_A\|_U : g \in K\} \le 1$, para todo $A \in \Sigma$, que verifique $\lambda(A) < \delta$.

Como $\lim_n \lambda(A_n) = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\lambda(A_n) < \delta$ pata todo $n \geq n_0$. Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \|f_n\|_U &= \| |f_n| \|_U = \| |f_n| \chi_{A_n} \|_U \\ &\leq \| |g_n| \chi_{A_n} \|_U \leq \sup \{ \|g\chi_A\|_U : g \in K \} \leq 1, \end{aligned}$$

entonces, existe n_0 tal que $\|f_n\|_U \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. ■

Corolario 4.7 *Sea X un espacio de Fréchet con la propiedad de Schur y sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva. Entonces, en $L^1(\nu, X)$ los conjuntos relativamente débil compactos coinciden con los conjuntos L-débil compactos.*

PRUEBA: Por el apartado (1) de la Proposición 4.5, cualquier conjunto L-débil compacto es relativamente débil compacto. Supongamos ahora, que existe un conjunto K en $L^1(\nu, X)$ que es relativamente débil compacto, pero no es L-débil compacto. Por la condición (2) del Teorema 4.6, existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$, una sucesión $(A_n) \downarrow \emptyset$ en Σ y una sucesión $(f_n)_n \subset K$ tal que

$$\|f_n \chi_{A_n}\|_U \geq 1, \tag{4.5}$$

para todo $n = 1, 2, ...$

Ya que K es relativamente débil compacto, por [46, Corolario 9.8.3], existe una subsucesión de $(f_n)_n$, que denotamos de la misma forma, que converge débilmente en $L^1(\nu, X)$. Entonces la sucesión $\left(\int_A f_n d\nu \right)_n$ converge débilmente en X para cualquier conjunto $A \in \Sigma$. Como X tiene la propiedad de Schur la convergencia es en la topología de X. Sea ν_n la medida con densidad f_n con respecto a ν. Las medidas ν_n son numerablemente aditivas, absolutamente continuas con respecto a cualquier medida de control λ de ν y existe $\lim_n \nu_n(A)$ en X, para cada conjunto $A \in \Sigma$. Entonces, por el teorema de Vitali-Hahn-Saks,

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} \sup_n p_V(\nu_n(A)) = 0,$$

para cualquier $V \in \mathcal{U}_0(X)$. Por tanto,

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup \|f_n \chi_{A_n}\|_V = 0,$$

para cualquier $V \in \mathcal{U}_0(X)$, en contradicción con (4.5). ■

Recordemos que un retículo de Fréchet tiene la propiedad débil de Schur si cualquier sucesión disjunta débil nula, es nula. Del corolario anterior se deduce el siguiente.

Corolario 4.8 *Si X un espacio de Fréchet con la propiedad de Schur y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva, entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad débil de Schur.*

PRUEBA: Sea $(f_n)_n$ una sucesión disjunta y débil nula. Entonces el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil compacto en $L^1(\nu, X)$. Por el Corolario anterior, el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es L-débil compacto en $L^1(\nu, X)$, por tanto, la sucesión disjunta $(f_n)_n$, es nula. ■

Finalizamos esta sección con una aplicación del Teorema 4.6, que nos permite obtener una propiedad interesante del rango de ciertas medidas con valores en un retículo de Fréchet. Es conocido, que para espacios de Fréchet X, el rango $\nu(\Sigma)$, de cualquier medida vectorial numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, es un conjunto relativamente débil compacto [53, Teorema IV.6.1]. Veamos que cuando la medida toma valores en un retículo de Fréchet E y es positiva, el resultado puede ser mejorado.

Teorema 4.9 *Sea E un retículo de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial numerablemente aditiva y positiva. Entonces, la envolvente sólida del rango de ν es un conjunto L-débil compacto.*

PRUEBA: Sea S la envolvente sólida del rango de la medida ν. Usando la condición (2) de la Proposición 4.3 es suficiente probar que $x'_n(x) \to 0$ uniformemente en S, para cualquier sucesión equicontiua, positiva y disjunta $(x'_n)_n \subset E'$.

Si $x \in S$, entonces $|x| \leq \nu(A)$, para algún $A \in \Sigma$. Entonces,

$$x'(|x|) \leq x'(\nu(A)) = |x'(\nu(A))|,$$

para cualquier funcional positivo $x' \in X'$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}\sup\{|x'_n(x)| : x \in S\} &= \sup\{|x'_n(\nu(A))| : A \in \Sigma\} \\ &= \sup\{x'_n(\nu(A)) : A \in \Sigma\} \\ &\leq x'_n\nu(\Omega) = x'_n I_\nu(\chi_\Omega),\end{aligned}$$

para todo $n = 1, 2, ...$ Como hasta ahora, I_ν es la aplicación integración. El intervalo $[-\chi_\Omega, \chi_\Omega]$ es L-débil compacto, por el apartado (3) de la Proposición 4.3. Entonces, por el apartado (2) de la Proposición 4.3, la prueba acabará, si demostramos que la sucesión equicontinua de funcionales positivos $(x'_n I_\nu)_n$ es disjunta.

Si $f > 0$ en $L^1(\nu, X)$, entonces $u := I_\nu(f) \geq 0$ en E. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(x'_n I_\nu) \wedge (x'_m I_\nu)(f) &= \inf\{x'_n I_\nu(g) + x'_m I_\nu(f - g) : 0 \leq g \leq f\} \\ &\leq \inf\{x'_n(x) + x'_m(u - x) : 0 \leq x \leq u\} \\ &= (x'_n) \wedge (x'_m)(u) = 0, \quad \text{si } m \neq n.\end{aligned}$$

■

Nota 4.10 *Es conocido el hecho de que la bola unidad de l^2 es el rango de una medida vectorial [53, VII.4. Ejemplos 1 y 2]. La bola unidad de l^2 es un conjunto sólido relativamente débil compacto, pero no es L-débil compacto, ya que la sucesión $(e_n)_n$ es disjunta y no converge a cero. Por tanto, en general, no es cierto que el rango de cualquier medida con valores* *en un retículo de Fréchet sea un conjunto L-débil compacto. Sin embargo, las hipótesis del teorema anterior pueden debilitarse. Diremos que una medida vectorial $\mu : \Sigma \longrightarrow E$ está dominada por una medida positiva $\nu : \Sigma \longrightarrow E$, si $|\mu(A)| \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. En este caso, la envolvente sólida del rango de μ está contenida en la envolvente sólida del rango de ν. Por tanto, la envolvente sólida del rango de μ es un conjunto L-débil compacto.*

Observemos que cualquier medida μ con descomposición de Jordan o con una descomposición de Hahn está dominada por una medida positiva.

4.2 Operadores con valores en $L^1(\nu, X)$.

Recordemos que los DF-espacios fueron introducidos por Grothendieck en [42]. Un espacio localmente convexo Y, se dice que es un DF-espacio, si tiene una sucesión fundamental de conjuntos acotados y si cualquier subconjunto $\beta(Y', Y)$-acotado de Y' que sea unión numerable de conjuntos equicontinuos, es equicontinuo. El dual fuerte de un espacio de Fréchet es un DF-espacio completo.

En esta sección Y será un DF-espacio completo, $\mathcal{Q}(Y)$ la familia de seminormas que dan la topología de Y y X será un espacio de Fréchet. El espacio de las aplicaciones lineales continuas de Y en X con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de Y, es un espacio de Fréchet [46, Teorema 12.4.2], que se denotará por $L_b(Y, X)$. Su topología está generada por la familia de seminormas

$$\|T\|_{U,H} = \sup\{p_U(Tx) : x \in H\},$$

donde $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y H recorre los conjuntos acotados de Y.

A continuación extendemos a espacios localmente convexos, los resultados que Curbera [21, Teoremas 8 y 9] demuestra en el caso de espacios de Banach.

En concreto, estudiamos la relación que hay entre la existencia de copias de l^∞ en $L_b(Y,E)$ (siendo E un retículo de Fréchet) y la coincidencia de este espacio con algún ideal de operadores compactos.

Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $T : Y \longrightarrow L^1(\nu, X)$ un operador lineal y continuo. Asociada a la medida ν y al operador T consideramos la función de conjunto

$$\nu_T : A \in \Sigma \longrightarrow \nu_T(A) \in L(Y,X),$$

definida por

$$\nu_T(A)\, y := \int_A Ty d\nu, \quad y \in Y. \tag{4.6}$$

Proposición 4.11 *La función de conjunto $\nu_T : \Sigma \longrightarrow L(Y,X)$ es una medida vectorial finitamente aditiva, acotada y numerablemente aditiva cuando en $L(Y,X)$ se considera la topología de la convergencia puntual.*

PRUEBA: Es inmediato probar que $\nu_T(A)$ es una aplicación lineal de Y en X, para cada conjunto $A \in \Sigma$.

De la continuidad del operador T deducimos que para cada entorno $U \in \mathcal{U}_0(X)$, existe una seminorma $q \in \mathcal{Q}(Y)$, tal que

$$\|Ty\|_U \leq q(y),$$

para todo $y \in Y$. Entonces,

$$p_U(\nu_T(A)\, y) = p_U\left(\int_A Ty d\nu\right) \leq \|Ty\chi_A\|_U \leq \|Ty\|_U \leq q(y),$$

para cada $A \in \Sigma$ y para todo $y \in Y$. Por tanto, $\nu_T(A) \in L(Y,X)$.

Si A y B son conjuntos medibles disjuntos, entonces

$$\nu_T(A \cup B)\, y = \int_{A \cup B} Ty d\nu = \int_A Ty d\nu + \int_B Ty d\nu = (\nu_T(A) + \nu_T(B))\, y,$$

para cada $y \in Y$. Por tanto,

$$\nu_T(A \cup B) = \nu_T(A) + \nu_T(B),$$

es decir, $\nu_T : \Sigma \longrightarrow L(Y, X)$ es una medida finitamente aditiva.

Observemos, que para cualquier $A \in \Sigma$, $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y H, conjunto acotado de Y, existe una constante positiva $M(H)$, tal que

$$\begin{aligned} \|\nu_T(A)\|_{U,H} &= \sup\{p_U(\nu_T(A)y) : y \in H\} \\ &\leq \sup\{q(y) : y \in H\} \leq M(H). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sup\left\{\|\nu_T(A)\|_{U,H} : A \in \Sigma\right\} \leq M(H),$$

y la medida ν_T es acotada.

Por último, de las propiedades de la integración, se deduce que si $(A_n)_n$ es cualquier sucesión disjunta de conjuntos medibles y $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces

$$\nu_T(A)y = \int_A Ty d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} Ty d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_T(A_n)y,$$

para cada $y \in Y$, es decir,

$$\nu_T(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_T(A_n)$$

en la topología de la convergencia puntual. ■

En [21, Ejemplo 1], se demuestra que ν_T no es, en general, numerablemente aditiva en $L_b(Y, X)$. En lo que sigue obtendremos condiciones sobre el operador T que garanticen que ν_T es numerablemente aditiva en $L_b(Y, X)$.

Previamente obtenemos acotaciones para la (U, H)-semivariación de la medida ν_T que usaremos con posterioridad.

Lema 4.12 *Para la medida $\nu_T : \Sigma \longrightarrow L(Y, X)$, definida en (4.6), se verifica*

$$\frac{1}{2} \sup_{y \in H} \{\|Ty\chi_A\|_U\} \leq \|\nu_T\|_{U,H}(A) \leq 2 \sup_{y \in H} \{\|Ty\chi_A\|_U\},$$

para todo $A \in \Sigma$, para todo $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y para cualquier conjunto acotado H de Y.

PRUEBA: De las expresiones equivalentes, dadas para la semivariación en (0.1) se tiene:

$$\begin{aligned}
\|\nu_T\|_{U,H}(A) &\leq 2\sup\left\{\|\nu_T(B)\|_{U,H} : B \in \Sigma_A\right\} \\
&= 2\sup\left\{\sup_{y\in H}\{p_U(\nu_T(B)\,y)\} : B \in \Sigma_A\right\} \\
&= 2\sup\left\{\sup_{y\in H}\left\{p_U\left(\int_B Ty d\nu\right)\right\} : B \in \Sigma_A\right\} \\
&= 2\sup_{y\in H}\left\{\sup\left\{p_U\left(\int_B Ty\chi_A d\nu\right)\right\} : B \in \Sigma\right\} \\
&\leq 2\sup_{y\in H}\{\|Ty\chi_A\|_U\}.
\end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sup_{y\in H}\{\|Ty\chi_A\|_U\} &\leq \sup_{y\in H}\left\{\sup\left\{p_U\left(\int_B Ty\chi_A d\nu\right) : B \in \Sigma\right\}\right\} \\
&= \sup\left\{\sup_{y\in H}\left\{p_U\left(\int_B Ty d\nu\right)\right\}.B \in \Sigma_A\right\} \\
&= \sup\left\{\sup_{y\in H}\{p_U(\nu_T(B)\,y)\}.B \in \Sigma_A\right\} \\
&= \sup\left\{\|\nu_T(B)\|_{U,H} : B \in \Sigma_A\right\} \\
&\leq \|\nu_T\|_{U,H}(A),
\end{aligned}$$

con lo que se obtiene el resultado. ■

Definición 4.13 *Sea Y un DF-espacio y E un retículo de Fréchet. Un operador $T : Y \longrightarrow E$ decimos que es L-débil compacto, si transforma conjuntos acotados de Y en conjuntos L-débil compactos de E.*

Proposición 4.14 *Sea Y un DF-espacio completo, X un espacio de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $T : Y \longrightarrow L^1(\nu, X)$ un operador continuo. Entonces son equivalentes:*

1. *El operador T es L-débil compacto.*

2. *La medida* $\nu_T : \Sigma \longrightarrow L_b(Y, X)$ *es fuertemente aditiva.*

3. *La medida* $\nu_T : \Sigma \longrightarrow L_b(Y, X)$ *es numerablemente aditiva.*

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Si ν_T no es fuertemente aditiva, por la versión para espacios de Fréchet de [27, Corolario I.1.18], existen un conjunto acotado H en Y, un entorno $U \in \mathcal{U}_0(X)$ y alguna sucesión disjunta de conjuntos medibles $(A_n)_n$ tales que $\|\nu_T\|_{U,H}(A_n)$ no converge a cero. Pasando a subsucesiones, si fuese necesario, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|\nu_T\|_{U,H}(A_n) \geq \delta, \quad n = 1, 2, ...$$

Por el Lema 4.12, obtenemos que

$$\sup_{y \in H} \{\|Ty\chi_{A_n}\|_U\} \geq \frac{1}{2}\|\nu_T\|_{U,H}(A_n) \geq \frac{\delta}{2},$$

para cada n.

Ahora, para cada n, elegimos $y_n \in H$, tal que

$$\|Ty_n\chi_{A_n}\|_U \geq \frac{\delta}{2}, \quad n = 1, 2, ...$$

La sucesión $(Ty_n\chi_{A_n})_n \subset L^1(\nu, X)$, es disjunta (porque lo son las funciones χ_{A_n}), están en la envolvente sólida de $T(H)$ (pues $|Ty_n\chi_{A_n}| \leq |Ty_n|$), y no converge a cero en $L^1(\nu, X)$. Por tanto, $T(H)$ no es L-débil compacto, en contradicción con (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) Si (1) no es cierto, existe un acotado H en Y, tal que $T(H)$ no es L-débil compacto. Entonces, existe una sucesión positiva, disjunta $(g_n)_n$ de $L^1(\nu, X)$, tal que $g_n \leq |Ty_n|$, con $y_n \in H$ y que no converge a cero en $L^1(\nu, X)$.

Pasando a subsucesiones, si fuese necesario, se verifica que existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que

$$\|g_n\|_U \geq 1,$$

para todo n. Los conjuntos

$$A_n = \{w \in \Omega : g_n(w) > 0\},$$

son medibles, disjuntos y se verifica

$$1 \leq \|g_n\|_U \leq \| |Ty_n| \chi_{A_n} \|_U \leq \sup_{y \in H} \{ \|Ty\chi_{A_n}\|_U \} \leq 2 \|\nu_T\|_{U,H}(A_n),$$

para todo n. Por tanto, $\|\nu_T\|_{U,H}(A_n)$ no converge a cero. Por [27, Corolario I.1.18], ν_T no es fuertemente aditiva.

(3) $\Rightarrow$ (2) Es cierto siempre.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es cierto, por ser la medida numerablemente aditiva en la topología de la convergencia puntual. ∎

Teorema 4.15 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y con unidad débil y sea Y un DF-espacio completo. Si $L_b(Y, X)$ no tiene una copia de l_∞, entonces cualquier operador continuo $T : Y \longrightarrow E$ es un operador L-débil compacto.*

PRUEBA: Como E tiene la propiedad de Lebesgue y unidad débil, por el Teorema 1.22, existe una medida numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow E$, tal que E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$. El operador T puede considerarse definido en $L^1(\nu, E)$. Como $L_b(Y, X)$ no tiene una copia de l_∞, y la medida ν_T es aditiva y acotada, aplicando un resultado de Diestel y Faires [20, Corolario 4.1.44 y Teorema 4.7.6.], ν_T es fuertemente aditiva. La proposición anterior afirma que el operador T es L-débil compacto. ∎

Recordemos que un operador $T : Y \longrightarrow X$ entre dos espacios localmente convexos X e Y se llama compacto si transforma algún entorno de cero de Y, en un conjunto relativamente compacto de X. Se llama operador de Montel si transforma acotados de Y en conjuntos relativamente compactos de X. Por [15, Nota 1 del Corolario 19], cuando Y es un DF-espacio y X es un espacio de Fréchet las dos clases de operadores coinciden.

En la prueba del último teorema de esta sección se usará el siguiente lema, que en el caso de los retículos de Banach, aparece incluido en la prueba de Curbera [21, Teorema 10].

Lema 4.16 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue. Sea $A(E)$ un sistema maximal de átomos disjuntos de E. Para cualquier $x \in E$, el conjunto $A(x) = \{z \in A(E) : z \wedge |x| \neq 0\}$ es numerable.*

PRUEBA: Fijemos un elemento $x \in E$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier seminorma reticular q de E, el conjunto

$$\{z \in A(E) : q(P_z(|x|)) \geq \varepsilon\}$$

es finito, donde P_z es la orden proyección asociada a z, es decir, sobre la banda generada por z. Si el conjunto no fuese finito, existiría una sucesión infinita de átomos $(z_n)_n$ de $A(E)$ tal que

$$q(P_{z_n}(|x|)) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, ...$$

Consideremos ahora la sucesión creciente $u_k = P_{z_1 + \cdots + z_k}(|x|)$, $k = 1, 2, ...$, que está orden acotada por $|x|$. Ya que E tiene la propiedad de Lebesgue, la sucesión $(u_k)_k$ debe converger, pero

$$q(u_k - u_{k-1}) = q(P_{z_k}(|x|)) \geq \varepsilon,$$

para $k = 1, 2, ...$, lo cual es una contradicción.

Ahora, consideramos una sucesión creciente $(q_n)_n$ de seminormas reticulares que generan la topología de E. Si comprobamos que

$$A(x) = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \left\{z \in A(E) : q_n(P_z(|x|)) \geq \frac{1}{m}\right\},$$

quedará probado que $A(x)$ es numerable.

Es inmediato comprobar que

$$\bigcup_{n,m=1}^{\infty} \left\{z \in A(E) : q_n(P_z(|x|)) \geq \frac{1}{m}\right\} \subseteq A(x)$$

Por otra parte, si $z \notin \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \left\{z \in A(E) : q_n(P_z(|x|)) \geq \frac{1}{m}\right\}$ entonces $q_n(P_z(|x|)) \leq \frac{1}{m}$, para todo n y m, luego $P_z(|x|) = 0$. Por tanto, $z \wedge |x| = 0$. Es decir, $z \notin A(x)$. ■

Teorema 4.17 *Sea E un retículo de Fréchet con la propiedad de Lebesgue y atómico y sea Y un DF-espacio completo. Si $L_b(Y,E)$ no tiene una copia de l_∞ entonces todo operador $T : Y \longrightarrow E$ continuo es compacto.*

PRUEBA: Como E es un retículo de Fréchet atómico, por el apartado (2) de la Proposición 4.4, los conjuntos L-débil compactos son relativamente compactos.

Si E tiene unidad débil, por el teorema anterior, T transforma conjuntos acotados de Y en conjuntos L-débil compactos de E y, por tanto, relativamente compactos. En este caso, T es un operador de Montel.

Supongamos ahora que existe un operador T continuo que no es Montel. Entonces existe una sucesión acotada $(x_n)_n$ en Y, un entorno sólido $U \in \mathcal{U}_0(E)$, tal que

$$p_U(Tx_n - Tx_m) \geq 1,$$

para todo $n \neq m$. Por el lema anterior el conjunto $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(Tx_n)$ es numerable.

Sea F la banda generada por la familia H en E. Por ser los elementos de H átomos, F coincide con la clausura en E del subespacio generado por H. Entonces F, con la topología que hereda de E, es un retículo de Fréchet atómico con la propiedad de Lebesgue. Por ser F separable tiene unidad débil. Por otra parte, $Tx_n \in F$, para todo $n = 1, 2, ...$, ya que $|Tx_n| \wedge z = 0$, para todo átomo $z \notin A(Tx_n)$ y todo $n = 1, 2, ...$ Denotamos por $P_F : E \longrightarrow F$ la orden proyección sobre la banda F. Entonces $P_F \circ T : Y \longrightarrow F$ es continua y claramente $L_b(Y,F)$ no tiene una copia de l_∞. Por el razonamiento previo, $P_F \circ T$ es compacto.

Sin embargo,

$$p_U(P_F T x_n - P_F T x_m) = p_U(Tx_n - Tx_m) \geq 1,$$

para todo $n \neq m$. ■

Nota 4.18 *El recíproco del teorema anterior no es cierto, en general. (Ver la Nota 4.20 que sigue al siguiente corolario). Sin embargo, sí es cierto* *si el espacio E no es Montel. Supongamos, por reducción al absurdo, que $L_b(Y,E) = M_b(Y,E)$ (operadores de Montel de Y en E) tiene copia de l_∞. De acuerdo con [15, Corolario 19], Y debería tener una copia complementada de l_1 o E debería tener una copia de l_∞. Esta última situación no puede darse, ya que por hipótesis E tiene la propiedad de Lebesgue [2, Teorema 10.7]. Tomando una sucesión acotada $(x_n)_n$ de E sin subsucesiones convergentes, el operador $T : l_1 \longrightarrow E$ definido por*

$$T((a_n)) = \sum_{n=1} a_n x_n,$$

es un operador continuo que no es Montel.

Completamos esta sección con una aplicación a los espacios de Köthe. Resultados similares a éstos, pueden verse en [17, Teorema 3] y [15, Proposiciones 29 y 30]. Consideramos un conjunto de índices I, en general, no numerable. Sea $A = (a_k)_k$ una matriz de Köthe. Definimos, para $1 \leq p < \infty$,

$$\lambda_p(I,A) := \left\{ x = (x_i)_{i\in I} : \|x\|_k^p = \left(\sum_{i\in I} |x_i|^p a_{ki} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, k = 1,2,... \right\},$$

equipado con la topología generada por las seminormas $\|x\|_k^p, k = 1,2,...$ Entonces $\lambda_p(I,A)$ es un retículo de Fréchet atómico, con la propiedad de Lebesgue, que tiene unidad débil si y sólo si el conjunto de índices I es numerable.

Corolario 4.19 *Sea $\lambda_p(I,A)$ un espacio de Köthe e Y un DF-espacio completo. Si $L_b(Y, \lambda_p(I,A))$ no tiene una copia de l_∞, entonces cualquier operador continuo de Y en $\lambda_p(I,A)$ es compacto.*

Nota 4.20 *Condiciones equivalentes bajo las que $L_b(Y, \lambda_p(I,A))$ tiene una copia de l_∞, siendo Y un espacio de Fréchet o un DF-espacio completo y $2 \leq p < \infty$ han sido estudiadas en [14, Corolario 21].*

4.3 Operadores definidos en $L^1(\nu, X)$.

Dunford y Pettis [32] probaron que un operador débil compacto de $L^1(\mu)$ en si mismo transforma sucesiones débil convergentes en norma convergentes. Esta propiedad fue aislada por Grothendieck para espacios de Banach y la llamó propiedad de Dunford-Pettis.

Diremos que un espacio de Fréchet X, tiene la propiedad de Dunford-Pettis si cualquier aplicación lineal y continua de X en un espacio de Fréchet Y, que transforma conjuntos acotados en relativamente débil compactos, transforma conjuntos relativamente débil compactos de X en conjuntos relativamente compactos de Y.

Grothendieck probó en [41] que los AL-espacios de Banach tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Curbera [23, Teorema 4] prueba que si X e Y son espacios de Banach y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial con variación σ-finita, entonces cualquier operador $T : L^1(\nu, X) \longrightarrow Y$, que sea débil compacto, transforma conjuntos L-débil compactos en conjuntos relativamente compactos. Si tenemos en cuenta que en $L^1(\mu)$ los conjuntos relativamente débil compactos y los conjuntos L-débil compactos coinciden, el resultado de Curbera puede entenderse como una generalización del teorema de Dunford-Pettis. A continuación generalizamos el resultado de Curbera a espacios de Fréchet. Después, utilizamos dicho resultado, para probar que los AL-espacios de Fréchet que admiten una norma continua y tienen unidad débil, poseen la propiedad de Dunford-Pettis.

Primero, obtenemos algunos resultados preparatarios relacionados con la representación de operadores de $L^1(\nu, X)$ en Y. Observemos que el siguiente lema es la versión vectorial del Lema 2.9.

Lema 4.21 *Sean X e Y espacios de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $T : L^1(\nu, X) \longrightarrow Y$ un operador lineal* *y continuo. La aplicación $\mu_T : \Sigma \longrightarrow Y$, dada por $\mu_T(A) = T(\chi_A)$ define una medida numerablemente aditiva. Se verifica la inclusión $L^1(\nu, X) \subset L^1(\mu_T, Y)$, en el sentido de espacios vectoriales, y se tiene que*

$$T(f) = \int_\Omega f d\mu_T, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Nota 4.22 *Diremos que μ_T es la medida representante del operador T.*

PRUEBA: Usando el teorema de la convergencia dominada y la continuidad de T, se deduce fácilmente que μ_T es una medida vectorial numerablemente aditiva.

Para probar la inclusión $L^1(\nu, X) \subset L^1(\mu_T, Y)$, es suficiente demostrar que cualquier función $f \geq 0$ en $L^1(\nu, X)$ pertenece a $L^1(\mu_T, Y)$. Para ello escogamos una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones simples, verificando $0 \leq \varphi_n \uparrow f$. Por el teorema de la convergencia dominada $\varphi_n \chi_A \to f\chi_A$ en $L^1(\nu, X)$, para cada conjunto $A \in \Sigma$. Por la continuidad de T se tiene que $T(\varphi_n \chi_A) \to T(f\chi_A)$ en Y. Como $\int_A \varphi_n d\mu_T = T(\varphi_n \chi_A)$, para $n = 1, 2, \ldots$, se verifica que $\left(\int_A \varphi_n d\mu_T\right)_n$ es un sucesión convergente en Y, para cada $A \in \Sigma$. Por el teorema I de Lewis, $f \in L^1(\mu_T, Y)$. De nuevo, aplicando el teorema de la convergencia dominada (sabiendo que $f \in L^1(\mu_T, Y)$), se tiene

$$T(\varphi_n) = \int_\Omega \varphi_n d\mu_T \to \int_\Omega f d\mu_T.$$

La última igualdad establece que $T(f) = \int_\Omega f d\mu_T$. ■

Lema 4.23 *Sean X e Y espacios de Fréchet, $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada y $T : L^1(\nu, X) \longrightarrow Y$ un operador débil compacto. Entonces, para cualquier medida de control $\lambda : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ de ν, la medida μ_T, representate del operador T, tiene derivada de Radon-Nikodym con respecto a λ, es decir, existe una función $g : \Omega \longrightarrow Y$ λ-medible y λ-integrable, tal que*

$$\mu_T(A) = \int_A g d\lambda,$$

para todo $A \in \Sigma$. Además, para cualquier función $f \in L^1(\nu, X)$, la función fg es λ-Pettis integrable y su integral de Pettis verifica

$$T(f) = \int_A fgd\lambda,$$

para todo $A \in \Sigma$.

PRUEBA: De la continuidad de T se deduce que para cualquier $V \in \mathcal{U}_0(Y)$, existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $p_V(T(f)) \leq \|f\|_U$. Si $\{A_1, ..., A_m\}$ es cualquier partición de Ω, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} p_V(\mu_T(A_n)) &= \sum_{n=1}^{m} p_V(T(\chi_{A_n})) \leq \sum_{n=1}^{m} \|\chi_{A_n}\|_U \\ &= \sum_{n=1}^{m} \|\nu\|_U(A_n) \leq \sum_{n=1}^{m} |\nu|_U(A_n) = |\nu|_U(\Omega).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\mu_T|_V(\Omega) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} p_V(\mu_T(A)) \leq |\nu|_U(\Omega),$$

es decir, μ_T tiene variación acotada. Veamos ahora, que μ_T tiene rango λ-ponderado localmente relativamente débil compacto. Probemos para ello que, para cualquier $A \in \Sigma^+$ existe un conjunto $B \in \Sigma_A^+$ tal que

$$\mathcal{R}_B(\mu_T) = \left\{ \frac{\mu_T(C)}{\lambda(C)} : C \in \Sigma_B^+ \right\}$$

es un conjunto relativamente débil compacto. Observemos que

$$\frac{\mu_T(C)}{\lambda(C)} = T\left(\frac{\chi_C}{\lambda(C)}\right),$$

para todo $C \in \Sigma^+$, por tanto

$$\mathcal{R}_B(\mu_T) = T(\mathcal{R}_B(\mu))$$

para todo $B \in \Sigma^+$, donde $\mu : \Sigma \longrightarrow L^1(\nu, X)$ es la medida vectorial numerablemente aditiva, λ-continua, de variación acotada, dada por

$$\mu(A) = \chi_A.$$

Por [18, Lema 3.1], el conjunto $\mathcal{R}_B(\mu)$ es acotado. Como el operador T es débil compacto, el conjunto $\mathcal{R}_B(\mu_T)$ es relativamente débil compacto. Por [18, Teorema 2.1], existe una función $g : \Omega \longrightarrow Y$ λ-medible y λ-integrable (Bochner integrable en el caso de espacios de Banach) tal que

$$\mu_T(A) = \int_A g d\lambda, \quad A \in \Sigma.$$

Por las propiedades de la integral tenemos

$$\langle y', \mu_T(A)\rangle = \int_A \langle y', g\rangle d\lambda, \quad A \in \Sigma, \quad y' \in Y'. \tag{4.7}$$

Utilizando el lema anterior y, teniendo en cuenta (4.7), es fácil probar que $\langle y', fg\rangle \in L^1(\lambda)$, para cualquier $f \in L^1(\nu, X)$ y para cualquier $y' \in Y'$. Además, se verifica

$$\begin{aligned} \left\langle y', \int_A f d\mu_T \right\rangle &= \int_A f d(y'\mu_T) \\ &= \int_A f \langle y', g\rangle d\lambda = \int_A \langle y', fg\rangle d\lambda. \end{aligned}$$

Por tanto, $fg : \Omega \longrightarrow Y$ es λ-Pettis integrable y su integral de Pettis es

$$\int_A fg d\lambda = \int_A f d\mu_T, \quad A \in \Sigma.$$

Aplicando el Lema 4.21, se verifica

$$T(f) = \int_\Omega fg d\lambda.$$

■

Recordemos que dado un espacio de Fréchet X con norma continua y una medida vectorial $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, se demostró, en el Teorema 2.4, que $D_\nu = \{x' \in X' : \nu \ll |x'\nu|\} \neq \emptyset$.

Teorema 4.24 *Sean X e Y espacios de Fréchet y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva, de variación acotada y tal que $D_\nu \neq \emptyset$. Si $T : L^1(\nu, X) \longrightarrow Y$ es un operador débil compacto, entonces T transforma conjuntos L-débil compactos en conjuntos relativamente compactos.*

PRUEBA: Sea λ una medida de control de Rybakov de ν. Por el lema anterior existe una función $g : \Omega \longrightarrow Y$ λ-medible y λ-integrable tal que el operador T se puede representar como

$$T(f) = \int_\Omega fg d\lambda, \quad f \in L^1(\nu, X).$$

Sea K un conjunto L-débil compacto de $L^1(\nu, X)$. Para ver que $T(K)$ es un conjunto relativamente compacto de Y es suficiente demostrar, por [3, Teorema 9.1] y [46, Teorema 3.5.1], que para cualquier $V \in \mathcal{U}_0(Y)$, existe un conjunto relativamente compacto K_V de Y, tal que $T(K) \subset K_V + V$.

En lo que sigue fijamos $V \in \mathcal{U}_0(Y)$. El conjunto

$$\left\{\int_\Omega |f| \, d\lambda : f \in K\right\}$$

es un conjunto acotado, ya que es L-débil compacto y λ es una medida de control de Rybakov. Sea $H = \sup\left\{\int_\Omega |f| \, d\lambda : f \in K\right\}$.

Por la continuidad de T, existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $p_V(T(f)) \leq \|f\|_U$, para todo $f \in L^1(\nu, X)$. Por el apartado (3) del Teorema 4.6, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup\{\|f\chi_A\|_U : f \in K\} < \frac{1}{2},$$

para todo conjunto $A \in \Sigma$ que verifique $\lambda(A) < \delta$.

Como la función g es λ-medible, por el teorema de Egoroff, existe una función simple $\varphi : \Omega \longrightarrow Y$, un conjunto $B \in \Sigma$, verificando $\lambda(B) < \delta$, tal que

$$p_V(g(w) - \varphi(w)) \leq \frac{1}{2H},$$

para todo $w \in \Omega \backslash B$.

Si $f \in K$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(f) &= T(f\chi_B) + \int_{\Omega\backslash B} fg d\lambda \\ &= T(f\chi_B) + \int_{\Omega\backslash B} f\varphi d\lambda + \int_{\Omega\backslash B} f(g-\varphi) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p_V\left(T(f) - \int_{\Omega\setminus B} f\varphi d\lambda\right) &\leq p_V\left(T\left(f\chi_B\right)\right) + p_V\left(\int_{\Omega\setminus B} f\left(g-\varphi\right)d\lambda\right) \\ &\leq \left\|f\chi_B\right\|_U + \int_{\Omega\setminus B} |f|\, p_V\left(g-\varphi\right)d\lambda \\ &\leq \frac{1}{2} + H\frac{1}{2H} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T(K) \subset \left\{\int_{\Omega\setminus B} f\varphi d\lambda : f \in K\right\} + V.$$

Finalizamos la prueba observando que el conjunto $\left\{\int_{\Omega\setminus B} f\varphi d\lambda : f \in K\right\}$ es relativamente compacto en Y, ya que φ es una función simple y K es un conjunto acotado. ■

Corolario 4.25 *Sea X un espacio de Fréchet con la propiedad de Schur y $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada, tal que $D_\nu \neq \emptyset$. Entonces el espacio $L^1(\nu, X)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

PRUEBA: El resultado se sigue inmediatamente teniendo en cuenta el Corolario 4.7 y el teorema anterior. ■

Recordemos que los espacios de Köthe $\lambda_1(I, A)$ son AL-espacios de Fréchet y que poseen unidad débil si y sólo si el conjunto de índices es numerable. Además, admiten una norma continua, siempre que alguno de los escalones sea estrictamente positivo. Se les puede aplicar por tanto, el siguiente corolario.

Corolario 4.26 *Sea E un AL-espacio de Fréchet con unidad débil que admite una norma continua. Entonces E tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

PRUEBA: Como los AL-espacios tienen la propiedad de Lebesgue, por el Teorema 1.22, E es reticularmente isomorfo a $L^1(\nu, E)$, para una medida $\nu : \Sigma \longrightarrow E$. Como E admite una norma continua, por el Teorema 2.4, el conjunto $D_\nu \neq \emptyset$. Por ser AL-espacio la medida ν tiene variación acotada.

Ahora, cualquier operador definido sobre E puede considerarse definido sobre $L^1(\nu, E)$. Como E es un Al-espacio, por el apartado (2) de la Proposición 4.5, los conjuntos relativamente débil compactos son L-débil compactos. Aplicando el Teorema 4.24 se obtiene el resultado. ∎

Referencias

[1] C. ALIPRANTIS Y D. BROWN, Equilibria in Markets with a Riesz space of commodities, *J. Math. Econom.*, **11**, (1983), 189–207.

[2] C. ALIPRANTIS Y O. BURKINSHAW, "Locally solid Riesz spaces", Pure and Applied Mathematics, **76**, Academic Press. Orlando. Florida. 1978.

[3] C. ALIPRANTIS Y O. BURKINSHAW, "Positive operators", Pure and Applied Mathematics, **119**, Academic Press. Orlando. Florida. 1985.

[4] C. ALIPRANTIS Y O. BURKINSHAW, "Principles of real analysis", Academic Press. Orlando. Florida. 1990.

[5] D. AMIR Y L. LINDENSTRAUSS, The structure of weakly compact sets in Banach spaces, *Ann. of Math.*, **88**, (1968), 35–46.

[6] R. ANANTHARAMAN, On exposed points of the range of a vector measure, Vector and operator valued mesures and applications (Proc. Sympos. Snowbird Resort, Alta, Utah, 1972), 7–22, Academic Press. New York, 1973.

[7] R. ANANTHARAMAN Y K.M. GARG, On the range of a vector measure, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)*, **22** , (1978), 115–132.

[8] T. ANDÔ, Banachverbände und positive Projektionen, *Math. Z.*, **109**, (1969), 121–130.

[9] W.G. BADE, A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92**, (1958), 508–530.

[10] R.G. BARTLE, N. DUNFORD Y J. SCHWARTZ, Weak compactness and vector measures, *Canad. J. Math.*, **7**, (1955), 289–305.

[11] C. BESSAGA Y A. PEŁCZYNSKI, On a class of B_0-spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **5**, (1957), 357–377.

[12] H.F. BOHNENBLUST, On axiomatic characterization of L_p spaces, *Duke Math. J.*, **6**, (1940), 627–640.

[13] H.F. BOHNENBLUST Y S. KAKUTANI, Concrete representation of (M)-spaces, *Ann. of Math.*, **42**, (1941), 1025–1028.

[14] J. BONET, P. DOMÁNSKI Y M. LINDSTRÖM, Cotype and complemented copies of c_0 in spaces of operators, *Czech. Math. J.*, **46**, (1996), 271–289.

[15] J. BONET, P. DOMÁNSKI, M. LINDSTRÖM Y M.S. RAMANUJAN, Operator spaces containing c_0 or l_∞, *Results. Math.*, **28**, (1995), 250–269.

[16] J. BONET Y M. LINDSTRÖM, Convergent sequences in duals of Fréchet spaces, *Functional Analysis (K.D. Bierstedt, A. Pietsch, W. Ruess, D. Vogt, eds.) Proc. Essen. Conf. 1991,* Marcel Dekekr, New York, (1993), 391–404.

[17] J. BONET Y M. LINDSTRÖN, Spaces of operators between Fréchet spaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **115**, (1994), 133–144.

[18] G.Y.H. CHI, A geometric characterization of Fréchet spaces with the Radon-Nikodym property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**, (1975), 371–380.

[19] D.L. COHN, "Measure Theory", Birkhäuser, Boston, 1980.

[20] C. Constantinescu, "Spaces of Measures", Studies in Mathematics **4**, Walter de Gruyter, Berlín, New York, 1984.

[21] G. Curbera, Operators into L^1 of a vector measure and aplications to Banach lattices, *Math. Ann.*, **292**, (1992), 317–330.

[22] G. Curbera, When L^1 of a vector measure is an AL-space?, *Pac. J. Math.*, **162**, (1994), 287–303.

[23] G. Curbera, Banach space properties of L^1 of a vector measure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**, (1995), 1797–3806.

[24] J.C. Díaz, Continuous norms on Fréchet lattices, *Arch. Math.*, **52**, (1989), 155–158.

[25] J. Diestel, "Sequences and Series in Banach Spaces", Springer- Verlag, New York, Berlín, Heidelberg, Tokio. 1984.

[26] J. Diestel y B. Faires, On vector measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **198**, (1974), 253–271.

[27] J. Diestel y J.J. Uhl Jr., "Vector measures", Mathematical Surveys, **15**, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1977.

[28] N. Dinculeanu, "Vector Measures", Pergamon Press. New York. 1967.

[29] P.G. Doods y B. de Pagter, Orthomorphisms and Booleam algebras of projections, *Math. Z.*, **187**, (1984), 361–381.

[30] P.G. Doods, B. de Pagter y W. Ricker, Reflexivity and order properties of scalar-type spectral operators in locally convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**, (1986), 355–380.

[31] P.G. Doods y W. Ricker, Spectral measures and the Bade reflexivity theorem, *J. Funct. Anal.*, **61**, (1985), 136–163.

[32] N. DUNFORD Y P.J. PETTIS, Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47**, (1940), 323–392.

[33] N. DUNFORD Y J. SCHWARTZ, "Linear operators I", Interscience, New York, 1958.

[34] L. EGGHE, The dual of $L^1(\mu)$ with μ a vector measure, *Rev. Roumanie Math. Pures Appl.*, **29**, (1984), 467–471.

[35] A. FERNÁNDEZ, F. MAYORAL, F. NARANJO Y P.J. PAÚL, Weakly secuentially complete Fréchet spaces of integrable functions, (preprint).

[36] A. FERNÁNDEZ Y F. NARANJO, Rybakov's theorem for vector measures in Fréchet spaces, *Indag. Mathem. N.S.*, 8, (1997), 371–380.

[37] A. FERNÁNDEZ Y F. NARANJO, Representation theorems for Fréchet lattices with the Lebesgue property, (preprint).

[38] A. FERNÁNDEZ Y F. NARANJO, Operators and the space of integrable scalar functions with respect to a Fréchet-valued measure, (preprint).

[39] H. FREUDENTHAL, Teilweise geordnete Moduln, *Proc. Acad. of Sc. Amsterdam*, **39**, (1936), 641–651.

[40] K.G. GROSSE-ERDMANN, Lebesgue's theorem of differentiation in Fréchet lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112**, (1991), 371–379.

[41] A. GROTHENDIECK, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Canad. J. Math.*, **5**, (1953), 129–173.

[42] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasil. Math.*, **3**, (1954), 57–123.

[43] A. GROTHENDIECK, "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires", Mem. Amer. Math. Soc., **16**, (1955).

[44] G.G. GOULD, Integration over vector-valued measures, *Proc. London Math. Soc.*, **3**, (1965), 193–225.

[45] E. HEWITT Y K. STROMBERG, "Real and Abstract Analysis", Springer-Verlag. Berlín. 1965.

[46] H. JARCHOW, "Locally convex spaces", Stuttgart. Teubner, 1981.

[47] N. KALTON, Spaces of compact operators, *Math. Ann.*, **208**, (1974), 267–278.

[48] S. KAKUTANI, Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.*, **42**, (1941), 523–537.

[49] S. KAKUTANI, Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. of Math.*, **42**, (1941), 994–1024.

[50] I. KLUVÁNEK, The extension and closure of vector measure, Vector and Operator Valued Measures and Aplications (Proc. Sympos., Snowbird Resort, Alta Utah, 1972), Academic Press, New York, 175–190.

[51] I. KLUVÁNEK, The range of a vector-valued measure, *Math. Systems Theory*, **7**, (1973), 44–54.

[52] I. KLUVÁNEK, Characterization of the closed convex hull of the range of a vector measure, *J. Func. Anal*, **21**, (1976), 316–329.

[53] I. KLUVÁNEK Y G. KNOWLES, "Vector measures and control systems", Notas de Matemáticas 58, North-Holland, Amsterdan. 1975.

[54] G. KÖTHE, "Topological Vector Spaces I". Spinger-Verlag. Berlín, Heidelberg, New York. 1969.

[55] G. KÖTHE, "Topological Vector Spaces II". Spinger-Verlag. Berlín, Heidelberg, New York. 1979.

[56] M. KREIN Y S. KREIN, On a inner characteristic of the set all continuous funcions defined on a Hausdorff space, *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, **27**, (1940), 427–430.

[57] D.R. LEWIS, Integration with respect to vector measures, *Pac. J. Math.*, **33**, (1970), 157–165.

[58] D.R. LEWIS, On integration and summability in vector spaces, *Illinois J. Math.*, **16**, (1972), 294–307.

[59] J. LINDENSTRAUSS Y L. TZAFRIRI, "Classical Banach spaces II", Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg, 1979.

[60] G.YA. LOZANOVSKII, On Banach lattices and bases, *Functional Anal. Appl.*, **1**, (1967), 249.

[61] W.A. LUXEMBURG Y A.C. ZAANEN "Riesz spaces I", North-Holland. Amsterdam. London. 1971.

[62] P. MEYER-NIEBERG, Zur schwachen Kompaktheit in Banachverbände, *Math. Z.*, **134**, (1973), 303–315.

[63] P. MEYER-NIEBERG, "Banach Lattices", Springer-Verlag, Berlín, New York, 1991.

[64] L.C. MOORE, JR., Strictly increasing Riesz norms, *Pacific. J. Math.*, **37**, (1971), 171–180.

[65] S. OKADA, The dual space of $L^1(\mu)$ for a vector measure μ, *J. Math. Anal. Appl.*, **177**, (1993), 583–599.

[66] S. OKADA Y W.J. RICKER, Compactness properties of the integration map associated with a vector measure, *Colloq. Math.*, **66**, (1994), 175–185.

[67] S. OKADA Y W.J. RICKER, Compactness properties of vector valued integration maps in locally convex spaces, *Colloq. Math.*, **67**, (1994), 1–14.

[68] A. PEŁCZYNSKI, A connection between weakly unconditional convergence and weak completeness of Banach spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **6**, (1958), 251–253.

[69] W.J. RICKER, On Boolean algebras of projections and scalar-type spectral operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**, (1983), 73–77.

[70] W.J. RICKER, A spectral mapping theorem for scalar-type spectral operators in locally convex spaces, *Integral Equations Operator Theory*, **8**, (1985), 276-288.

[71] W.J. RICKER, A concrete realization of the dual space of L^1-spaces of certain vector and operator-valued measures, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **42**, (1987), 265–279.

[72] W.J. RICKER, Existence of Bade functionals for Boolean algebras of proyections in Fréchet spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**, (1997), 2401–2407.

[73] L. RONGLU Y B. QINGYING, Locally convex spaces containing no copy of c_0, *J. Math. Anal. Appl.*, **172**, (1993), 205–211.

[74] V.I. RYBAKOV, Theorem of Bartle, Dunford and Schwartz on vector-valued measures, *Mat. Zametik*, **7**, (1970), 247–254 (*Math. Notes*, **7**, (1970), 147–151.).

[75] H.H. SCHAEFER, "Espacios vectoriales topológicos", Teide S.A. Barcelona, 1974.

[76] H.H. SCHAEFER, "Banach lattices and positive operators", Springer-Verlag, Berlín, New York, 1974.

[77] E. THOMAS, L'intégration par rapport a une mesure de Radon vectorielle, *Ann. Inst. Fourier,* **20**, (1970), 55–191.

[78] F. TREVES, "Topological vector spaces, distributions and Kernels", Academic Press, New York. London, 1967.

[79] G. TSKREKOS-PARAYOTIS, Some applications of the L-constants and M-constans on Banach Lattices, *J. London Math. Soc.*, **2**, (1978), 133-139.

[80] L. TZAFRIRI, Reflexivity in Banach lattices and their subspaces, *J. Funct. Anal.*, **10**, (1972), 1–18.

[81] B. WALSH, Mutual absolute continuity of sets of measures, *Proc. Amer. Math, Soc.*, **29**, (1971), 506–510.

[82] Y.C. WONG, Characterizations of the topology of uniform convergence on order-intervals, *Hokkaido Math. J.*, **5**, (1976), 164–200.

[83] Y.C. WONG Y K.F. NG, Nuclear spaces and generalized AL-spaces, *Southeast Asian Bull. Math.*, **5**, (1981), 45–58.

[84] A.C. ZAANEN, "Riesz spaces II", North-Holland. Amsterdam. New York. Oxford. 1983.