UNIVERSIDAD DE SEVILLA

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS C(K,R) CON K COMPACTIFICACION 0-DIMENSIONAL DE ω

Memoria que presenta

Francisco Benítez Trujillo

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

V°. B°. CATEDRATICO DIRECTOR

Dr.D. Juan Luis Romero Romero

Catedrático de la Universidad de Cádiz.

V°. B°. PROFESOR PONENTE

Dr.D. Manuel Ordoñez Cabrera

Profesor Titular de la Universidad de Sevilla.

Cádiz, Diciembre de 1.988

Deseo expresar mi agradecimiento al Director de este trabajo Dr. D. Juan Luis Romero Romero por sus enseñanzas, estímulo y porque, en definitiva, me ha dado lo más valioso que uno puede esperar, su amistad.

También deseo agracedecer la ayuda y comprensión que me han aportado los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, en especial a los Profesores Antonio Aizpuru Tomás y José Ramirez Labrador y, como no, a Ana Gómez Parra por el esmero en el mecanografiado de esta memoria.

A mis padres

INTRODUCCION

Son varios los problemas aún abiertos, respecto de algunos teoremas conocidos de la teoría de la medida, como son los de Vitali-Hahn-Saks (VHS), Grothendieck (G), Nikodym (N) y Rosenthal (R). La evolución y los resultados obtenidos por diferentes autores en el estudio de las álgebras de Boole para los que son válidos estos teoremas, así como los referentes a las relaciones entre ellos, fue el contenido de nuestra tesis de licenciatura (Benítez(1.985)), la cual tomó como trabajo de partida el de W. Schachermayer (1.978).

Con relación a las propiedades intrínsecas de un álgebra de Boole que son suficientes para el teorema (VHS) y, por tanto, para (G) y (N), referidos todos ellos a medidas escalares finitamente aditivas, es necesario destacar algunos extremos. En primer lugar, las debilitaciones sucesivas realizadas por distintos autores, a partir de la propiedad de σ-completitud de un álgebra, como son las dadas por Seever (1.968), Haydon (1.981), Moltó (1.981) y Freniche (1.984), suponen todas ellas propiedades de separación de sucesiones de disjuntos las cuales son suficientes para (VHS) pero ninguna necesaria para que se verifique este teorema. Y esto es debido a que existen álgebras de Boole, como es el caso del álgebra de los conjuntos que son simultáneamente F_σ y G_δ de [0,1], tales que, verificando la propiedad dada por Dashiell (1.981), la cual impone condiciones al espacio de medidas, no verifican ninguna propiedad de separación y, sin embargo, verifican todos los teoremas.

Así pues ninguna propiedad de separación que verifiquen todas las sucesiones de disjuntos puede servirnos como condición necesaria para (VHS) ni para (R).

Por otro lado, algunas implicaciones entre los teoremas citados están aún por determinar: No se sabe si un álgebra de Boole que verifica el teorema (R) verifica o no (N) y se sabe, que (G) no es equivalente a (VHS) bajo la hipótesis del continuo (Talagrand (1.984)). Está por determinar si esto sigue siendo válido sin la citada hipótesis o, por el contrario, es equivalente a ella.

Esta situación sugiere la necesidad, por un lado, de restringir el tipo de álgebras de Boole objeto de la investigación, profundizando en el estudio de los espacios $\mathscr{C}(K)$ para K compacto 0-dimensional, y, por otro lado, el de considerar otros puntos de vista desde donde se puedan abordar el estudio de las algebras de Boole.

El trabajo que aquí presentamos tiene como objetivos, en primer lugar, el de estudiar las álgebras de Boole atómicas con una cantidad numerable de átomos (σ-atómicas), lo que equivale a estudiar las subálgebras de $\mathcal{P}(\omega)$ que contienen al álgebra de las partes finitas y cofinitas de ω (Prop. I.1.2), y, en segundo lugar, presentar una nueva perspectiva de estudio de las álgebras de Boole usando el Teorema de Ramsey para un cardinal infinito cualquiera.

En el capítulo I comenzamos viendo la estrecha relación entre las álgebras de Boole σ-atómicas y las compactificaciones 0-dimensionales de ω. Es decir vemos que cada álgebra de tal tipo induce una compactificación 0-dimensional de ω a través del espacio de Stone de $\mathcal{F}$ y viceversa, cada una de estas compactificaciones induce un álgebra σ-atómica que es, precisamente, la base para su topología (Prop. I.1.3).

Seguidamente se demuestra que cada espacio del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, siendo K el espacio de Stone de un álgebra de Boole σ-atómica o, equivalentemente, una compactificación 0-dimensional de ω, es isométrico e isomorfo reticular a un subespacio de ℓ_∞ que contiene al espacio de las sucesiones convergentes **c** (Teorema I.2.1). Incluimos después dos propiedades fundamentales de estos espacios como son el teorema de Bade, el cual afirma que en $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ la bola unidad es la clausura del cierre convexo de sus puntos extremales si y sólo si el compacto K es 0-dimensional (Prop. I.2.2). Esta propiedad es cierta para los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$ independientemente de que el compacto K sea 0-dimensional, siendo ésta una de las razones por las que estudiamos sólo los espacios del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$.

Otra propiedad que estudiamos es una versión del teorema de Krein-Millman que, particularizada a los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$ con K compactificación 0-dimensional de ω, puede enunciarse sin utilizar todos los puntos extremales de la bola unidad de este espacio. Para demostrar este resultado hemos probado un lema, inspirado en el de Helly, el cual pone de manifiesto que relaciones entre un espacio de Banach X y su dual X*, pueden ser ciertas para un compacto K y el espacio $\mathscr{C}(K)$.

Una vez que conocemos que un espacio del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, con K compactificación 0-dimensional de ω, puede identificarse con un subespacio de ℓ_∞ conteniendo a **c**, estudiamos las condiciones para que un subespacio X de ℓ_∞ sea del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$. En Semadeni (1971) y Lacey (1974) se demuestra el siguiente resultado debido a Kakutani válido para un $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ pero no para $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$: "si X es un MI-espacio entonces es isomorfo a un espacio $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, siendo K la clausura *-débil del compacto de los homomorfismos reticulares ζ tal que $\zeta(e)=1$ siendo e la c-unidad del retículo X". Considerando un retículo de Banach $X\subseteq\ell_\infty$ con $\mathbf{c}\subseteq X$ y con el orden por coordenadas, es fácil probar que verifica el teorema de Kakutani y por lo tanto es del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$. Ahora bien, el compacto K no resulta estar así suficientemente explícito por lo que para nuestro caso particular hemos enunciado y demostrado el teorema de caracterización para los subretículos de ℓ_∞ que son del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K compactificación 0-dimensional de ω, demostrándose que K puede expresarse como la clausura *-débil de los funcionales δ_n, $n\in\omega$, sobre $\mathscr{C}(K)$, tales que sobre cada sucesión $x=(x_k)_{k\in\omega}$, $\delta_n(x)=x_n$ (Teorema 3.2). Se demuestra para concluir (Corolario 3.4) que un subespacio X de ℓ_∞ conteniendo al espacio de las sucesiones convergentes **c** es del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K compactificación 0-dimensional de ω, si y sólo si X es la clausura del subespacio lineal engendrado por las sucesiones formadas por 1 y -1 que contiene.

En el capitulo II de este trabajo se estudian algunas propiedades topológicas y geométricas de los subespacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞. Se comienza viendo que $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ es separable si y sólo si el compacto de los puntos extremos de su bola unidad es numerable (Propiedad II.1.5). A continuación, motivados por una propiedad que aparece en Wilansky (1978) relativa a los subespacios separables de ℓ_∞ (si X es subespacio separable de ℓ_∞ entonces si $\langle\delta_n:n\in\omega\rangle$ es el conjunto de las proyecciones coordenadas existe $M\subset\omega$ tal que la sucesión $\langle\delta_n(x)\rangle_{n\in M}$ converge para cada $x\in X$), hemos caracterizado los subespacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞ con esa propiedad (Proposición 2.2) y hemos construido un álgebra de Boole σ-atómica de cardinal no numerable, tal que su espacio de Stone K es disperso y $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ tiene la propiedad anterior, resultando de ello que ésta no caracteriza los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ separables (Teorema 2.5).

En el tercer apartado del capítulo II nos planteamos el estudiar los subespacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞ que son duales. De la proposición 2.2.8 de Lindestrauss (1977) resulta que si $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ es un dual, siendo K compactificación 0-dimensional de ω, entonces debe contener subespacio isomorfo a ℓ_∞. Este resultado induce a pensar en una hipotética relación con el teorema de Rosenthal. Sin embargo, a partir de los resultados de Grothendieck (Cf. Kaplan (1983)) y de Dixmier (Cf. Bourbaki (1981)) demostramos que un subespacio del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞, con K compactificación 0-dimensional de ω, es dual de un espacio de Banach si y sólo si es isométrico a ℓ_∞.

El resto del capítulo se dedica al estudio de una propiedad de tipo geométrico, introducida por R.M. Aron y R.H. Lohman (1987), denominada λ-propiedad (Definición II.4.1). Vemos en primer lugar que un espacio normado X tiene la λ-propiedad si y sólo si todo punto de la esfera unidad tiene terna factible (Corolario II.4.4) ya que basta con que la bola unidad de X tenga un punto extremo para que todo punto del interior de la bola unidad tenga terna factible.

A continuación se estudia la λ-propiedad en los espacios del tipo $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ con K compacto Hausdorff, probándose que para cada $x\in\mathcal{B}_{\mathcal{C}(K)}$ si $m_x=\inf\{|x(t)|:t\in K\}>0$ entonces existe terna factible para x y la λ-función se alcanza en x. A partir de aquí queda claro que un espacio $\mathcal{C}(K)$ tiene la λ-propiedad si los puntos $x\in\mathcal{B}_{\mathcal{C}(K)}$ con $m_x=0$ tienen terna factible, lo cual es cierto si y sólo si el compacto K es 0-dimensional (Teorema II.4.9). Para demostrar esto se ha necesitado una caracterización de los compactos 0-dimensionales (Lema II.4.8) a partir de lo que hemos dado en llamar conjuntos de ε-signo (Definición II.4.7). Vemos también que si K es 0-dimensional entonces la λ-propiedad y λ-propiedad uniforme son equivalentes sobre los espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

También es posible caracterizar los compactos

0-dimensionales F-espacios a través de la λ-propiedad: "si K es compacto 0-dimensional entonces la λ-función se alcanza en todo $x\in\mathcal{B}_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ si y sólo si K es F-espacio". (Teorema II.4.12). Particularizando este resultado a los subespacios del tipo $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞, llegamos a que ℓ_∞ es el único subespacio donde la λ-función se alcanza en todo punto de la bola unidad.

En los espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*$, siendo K compacto 0-dimensional, la λ-propiedad se verifica si y sólo si K es disperso (Teorema II.5.1). Así pues, ℓ_∞ identificado con $\mathcal{C}(\beta\omega,\mathbb{R})$, donde $\beta\omega$ es la compactificación de Stone-Čech de ω, tiene la λ-propiedad y sin embargo $\mathcal{C}(\beta\omega,\mathbb{R})^*$ no tiene la λ-propiedad ya que $\beta\omega$ no es disperso. Se responde así negativamente a una pregunta planteada por Aron y Lohman (1987): ¿Si un espacio normado X verifica la λ-propiedad, su dual X* debe tener también la λ-propiedad?.

Otro de los problemas planteados en Aron-Lohman (1987) es el de caracterizar, para un espacio normado X, los puntos $x\in B_X$ para los que la λ-función se alcanza. Caracterizamos estos puntos en los espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ con K compacto 0-dimensional (Teorema II.6.1). Estudiándose diversas propiedades del conjunto de los puntos donde la λ-función se alcanza.

El capitulo III se dedica a estudiar las álgebras de Boole usando el teorema de Ramsey. Basándonos en el trabajo de E. Odell (1980), hemos demostrado que es posible obtener el teorema de Ramsey y otros resultados con él relacionados para las secuencias finitas y numerables de un cardinal infinito K cualquiera. Por ejemplo, se define la topología τ del mismo modo que en el citado trabajo, demostrándose aquí que es T_2 y 0-dimensional y tal que los conjuntos τ-abiertos son completamente de Ramsey y, por tanto, de Ramsey.

Dado un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ de cardinal infinito $\varkappa$, hemos considerado un buen orden cualquiera de $\mathcal{F}:\langle H_\alpha:\alpha\in\varkappa\rangle$; de forma que al tomar una secuencia numerable $(\alpha_n)_n$ en $\varkappa$resulta una sucesión de elementos distintos del álgebra. Demostramos que las propiedades de supremo (SC) de Haydon (1981), propiedad (E) de Schachermayer (1978) y (UDSC) (Cf. Schachermayer (1978)) pueden caracterizarse a través del conjunto $\mathcal{A}_\sigma$ de las secuencias numerables que corresponden a sucesiones de disjuntos con supremo en $\mathcal{F}$. Posteriormente se generalizan estos resultados para caracterizar propiedades similares a las anteriores pero referidas a una propiedad P cualquiera de las sucesiones de disjuntos (Teorema III.2.9).

Se concluye viendo que las medidas definidas sobre un álgebra $\mathcal{F}$, y con valores en un espacio de Banach X, fuertemente aditivas, inducen aplicaciones continuas sobre el conjunto $\mathscr{A}$ de las secuencias numerables de $\varkappa$ que corresponde a sucesiones de disjuntos en $\mathscr{F}$, y con valores en $c_o(X)$. Se demuestra que una sucesión de medidas vectoriales es uniformemente fuertemente aditiva si y sólo si las correspondientes aplicaciones sobre $\mathscr{A}$ son uniformemente continuas.

INDICE

Pág.

I. REPRESENTACION Y CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS $\mathcal{E}(K,\mathbb{R})$ CON K COMPACTIFICACION 0-DIMENSIONAL DE ω

I.1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE SIGMA-ATOMICAS

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole σ-atómica, esto es, atómica con una cantidad numerable de átomos. En virtud del teorema de representación de Stone para álgebras de Boole, supondremos que $\mathcal{F}$ es el álgebra de los conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados (clópenes) del espacio de Stone st($\mathcal{F}$), siendo éste un espacio compacto, Hausdorff, 0-dimensional con $\mathcal{F}$ base para su topología.

Denotando por $\langle a_i : i\in\omega\rangle$ el conjunto de los átomos de $\mathcal{F}$, tenemos la siguiente,

PROPOSICION 1.1

Sea $A\in\mathcal{F}$, A es la clausura de los átomos que contiene. En particular, $st(\mathcal{F})=\overline{\langle a_i : i\in\omega\rangle}$.

Demostración

Sea $\langle a_i : i\in N\rangle$ el conjunto de los átomos que están en A. Entonces $A\setminus\overline{\langle a_i : i\in N\rangle}$ es abierto que no contiene átomos, pero al ser el espacio 0-dimensional si este abierto es distinto del vacio debe contener un clopen que, por ser elemento del álgebra atómica $\mathcal{F}$, debe contener un conjunto de átomos, pero esto no es posible a menos que $A\setminus\overline{\{a_i : i\in N\}}=\emptyset$.

#

Observemos que para cada $i\in\omega$ $\{a_i\}$ es clopen y por lo tanto, el conjunto $D=\{a_i : i\in\omega\}$ es disperso y abierto. También para cada subconjunto finito $N\subset\omega$, el conjunto $\{a_i : i\in N\}$ es clopen y por lo tanto $\overline{\{a_i : i\in\omega\setminus N\}}=st(\mathcal{F})\setminus\{a_i : i\in N\}$ es igualmente clopen. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICION 1.2.

Para cada álgebra de Boole $\mathcal{F}$, σ-atómica, existe una subálgebra $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\omega)$ σ-tómica isomorfa a $\mathcal{F}$, que contiene al álgebra $\phi(\omega)$ de los conjuntos finitos y cofinitos de ω.

Demostración

Definiendo $\psi:\mathcal{F}\to\mathcal{P}(\omega)$

$$A\to\psi(A)=\{i\in\omega/a_i\in A\}.$$

$\mathcal{F}$ es claramente isomorfa a $\mathcal{A}=\psi(\mathcal{F})$.

#

Teniendo en cuenta esta proposición, podemos decir que con el orden de inclusión, la menor álgebra de Boole σ-atómica es $\phi(\omega)$, la familia de los conjuntos finitos y cofinitos de ω; y la mayor es $\mathcal{P}(\omega)$. Cualquier otra álgebra $\mathcal{F}$

de estas características verifica

$$\phi(\omega) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$$

Estas álgebras resultan al considerar las compactificaciones 0-dimensionales de ω. En efecto:

PROPOSICION 1.3.

Si K es una compactificación 0-dimensional de ω, el álgebra $\mathcal{F}$ de los clópenes de K es σ-atómica y st($\mathcal{F}$) es homeomorfo a K. Un álgebra de Boole σ-atómica induce una compactificación 0-dimensional de ω, tomando su espacio de Stone.

#

En este sentido, es bien conocido que el álgebra $\phi(\omega)$ de las partes finitas y cofinitas de ω induce la compactificación de Alexandroff $\gamma\omega$ y que el álgebra $\mathcal{P}(\omega)$ induce la compactificación de Stone-Čech $\beta\omega$.

I.2. REPRESENTACION DE LOS ESPACIOS $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ CON K COMPACTIFICACION 0-DIMENSIONAL DE ω

En este apartado, se trata de representar los espacios de funciones contínuas reales sobre las compactificaciones de ω, como subespacios de ℓ_∞.

TEOREMA 2.1

Sea K una compactificación 0-dimensional de ω, entonces $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ es isométrico (e isomorfo reticular) a un subespacio de ℓ_∞, que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes , y que denotaremos por $\tilde{\mathcal{C}}(K)$.

Demostración

Definamos $T:\mathcal{C}(K)\to\ell_\infty$ por $T(f)=\langle f(a_n)\rangle_{n\in\omega}$ para cada $f\in\mathcal{C}(K)$, siendo $\langle a_n : n\in\omega\rangle$ el conjunto de los átomos de K.

T es evidentemente lineal. Veamos que T conserva la norma:

Puesto que el conjunto $\langle f(a_n):n\in\omega\rangle$ es denso en $f(K)$ para cada $f\in\mathcal{C}(K)$, resulta

$$\sup\langle |f(x)| : x\in K\rangle = \sup_{n\in\omega}|f(a_n)| .$$

De aquí, $\|Tf\|=\|f\|$.

Llamando $\tilde{\mathcal{C}}(K)=T(\mathcal{C}(K))$ tenemos que $\mathcal{C}(K)$ es isométrico a $\tilde{\mathcal{C}}(K)$. Además, es inmediato probar que T es isomorfismo reticular.

Veamos para terminar que $c\subset\tilde{\mathcal{C}}(K)$. En efecto, Sea $(c_n)_{n\in\omega}\in c$ una sucesión convergente. Si es una sucesión trivial, como el álgebra de los clópenes de K contiene a las partes finitas y cofinitas, dicha sucesión se corresponde con una función simple.

Supongamos que $(c_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión no trivial y pongamos d como su límite. En tal caso, definimos $f:K\to\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = d \quad \text{si } x\in K\setminus\{a_n:n\in\omega\}$$

$$f(a_n) = c_n, \qquad n\in\omega$$

Puesto que para cada $n\in\omega$ es $\{a_n\}$ un clopen unitario, f es continua en el punto a_n. Sea entonces $x\in K\setminus\{a_n:n\in\omega\}$. Dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\omega$ tal que $c_n\in(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$ para todo $n\geq n_0$; de aquí resulta que el clopen $A=K\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ verifica

$$f(A) \subset (d-\varepsilon,d+\varepsilon)$$

y f es contínua. Por tanto, $Tf=(c_n)_{n\in\omega}$

#

Veremos a continuación dos propiedades de los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ y $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$, y por tanto de $\tilde{\mathscr{C}}(K)$ y de $\tilde{\mathscr{C}}(K)^*$, que utilizaremos más tarde. La primera de ellas aparece como problema en Semademi pg. 139, y según este autor es debida a W. Bade, y puesto que el resultado no ha sido publicado incluimos nuestra demostración.

PROPOSICION 2.2

Si K es compacto Hausdorff y $E=\{f\in\mathscr{C}(K,\mathbb{R}):|f(x)|=1,$ $x\in K\}$ entonces K es 0-dimensional si y sólo si la bola unidad de $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ es la clausura del cierre convexo del conjunto E, esto es $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}=\overline{CO}(E)$.

Nota: Observemos que $f\in E$ si y sólo si $f=\chi_A-\chi_{A^c}$ para algún clopen $A\subseteq K$.

Demostración.

Condición necesaria.

En primer lugar, sabemos, que, por ser K 0-dimensional, las funciones simples de $B_{\mathscr{C}(K)}$ son densas en $B_{\mathscr{C}(K)}$; bastará entonces con demostrar que toda función simple se puede expresar como combinación convexa de puntos de E.

En efecto, sea $f=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ donde los A_i, $i=1,\ldots,n$ son clópenes disjuntos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=K$. Denotemos por B_1 la bola unidad de $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ y definamos

$$\begin{aligned}\psi: B_1 &\to B_{\mathscr{C}(K)}\\ (x_1,..x_n) &\to x_1\chi_{A_1}+\ldots+x_n\chi_{A_n}\end{aligned}$$

Claramente ψ es lineal, continua y conserva la norma.

Por otro lado, los puntos de B_1

$$f_k = (\varepsilon_1^{(k)},\varepsilon_2^{(k)},\ldots,\varepsilon_n^{(k)}),\ k=1,2,\ldots,2^n$$

siendo $|\varepsilon_i^{(k)}|=1$, para $i=1,\ldots,n$, generan la bola unidad de este espacio a través de sus combinaciones convexas. Así pues, dado $(a_1,\ldots,a_n)$ se tiene que

$$(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{1}^{2^n} \lambda_k f_k \quad \text{con} \quad \lambda_k\geq 0 \text{ y } \sum \lambda_k=1,$$

luego

$$\sum_{1}^{n} a_i \chi_{A_i} = \sum_{1}^{2^n} \lambda_k \psi f_k \tag{1}$$

Pero como

$$\psi f_k = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{(k)} \chi_{A_j},$$

Si consideramos, para cada $k=1,2, \ \ldots \ ,2^n$, la familia de conjuntos

$$\mathscr{A}_k = \{A_j : \varepsilon_j^{(k)} = 1\} \quad \text{y} \quad B_k = \bigcup \mathscr{A}_k$$

B_k será clopen al ser $\mathscr{A}_k$ finita y resulta, $\psi f_k = \chi_{B_k} - \chi_{B_k^c} \in E$.

La expresión (1) se puede escribir ahora como

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k (\chi_{B_k} - \chi_{B_k^c})$$

De donde resulta la necesidad de la condición.

Condición suficiente.

Sea K un espacio compacto Hausdorff y supongamos que $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})} = \overline{\mathrm{CO}}(E)$. Llamemos $\mathscr{A} = \{A \subset K : A \text{ clopen}\}$. Si $f \in E$ entonces $f = \chi_A - \chi_{A^c}$ para algún $A \in \mathscr{A}$ y viceversa. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathscr{A}$ no es base para la topología de K. En tal caso, existe un abierto G que no es la unión de los clópenes que contiene:

$$G \neq G_1 = \bigcup \{A \in \mathscr{A} : A \subset G\}$$

Para $x_0 \in G \setminus G_1$ y $F = K \setminus G$, por el lema de Uryshon, existe $f \in \mathscr{C}(K)$ tal que $f(x_0)=1$ y $f(F)=\{-1\}$.

Por otra parte, dado $\varepsilon=1/4$ podemos determinar una función simple $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, tal que $|a_i| \leq 1$ para cada $i=1,\ldots,n$ y los clópenes A_i, $i=1,2,\ldots,n$ son disjuntos dos a dos, verificando $\bigcup A_i = K$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} - f \right\| < 1/4$$

Para el índice k tal que $x_0 \in A_k$ se tiene que

$$|a_k - 1| < 1/4 \tag{2}$$

Además, si fuera $y \in A_k \cap F$ sería

$$|a_k + 1| < 1/4$$

Pero esto contradice (2), por lo que $A_k \cap F = \phi$ y

$x_o \in A_k \subset K \setminus F = F^c$; lo cual, a su vez, se contradice con la elección de x_o. En consecuencia, $\mathscr{A}$ es base para la topología de K y éste es 0-dimensional.

#

NOTA 2.3

El anterior es uno de los resultados en los que nos basamos para nuestro estudio posterior de los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, y que no es cierto para $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$; ya que en éstos, independientemente de que K sea 0-dimensional o no, la bola unidad es la clausura del cierre convexo del conjunto E definido en el enunciado del teorema 2.2.

De ahora en adelante $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ será denotado por $\mathscr{C}(K)$.

El lema siguiente será utilizado en la próxima proposición y está inspirado en el lema de Helly (Cf. Brézis (1.983), pág. 44). En él denotaremos por COQ(E) el conjunto de las combinaciones convexas $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ con $\lambda_k \in \mathbb{Q}$ y por eqCO(E) indicaremos el cierre equilibrado y convexo del conjunto E. Igualmente, $\{a_i : i \in \omega\}$ será el conjunto de los átomos en K.

LEMA 2.4

Dados $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{C}(K)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, si para cada $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|,$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen $a_{k_1} \ldots a_{k_p} \in K$ y unos números racionales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tales que $\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| = 1$ y

$$\left|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_i(a_{k_j}) - \alpha_i\right| < \varepsilon \qquad i=1,\ldots,n$$

Demostración

En efecto, sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la aplicación $\psi : K \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

Se trata de demostrar que $\alpha \in \overline{\mathrm{eqCOQ(D)}}$ siendo $D = \{\psi(a_n) : n \in \omega\}$.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\alpha \notin \overline{\mathrm{eqCOQ(D)}}$. Al ser este conjunto cerrado, equilibrado y convexo en $\mathbb{R}^n$, podemos separar α y eqCOQ(D) mediante un hiperplano, esto es, existe $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ y $\gamma\in\mathbb{R}$ tal que

$$\left|\left\langle \psi(a_k),\beta\right\rangle\right| < \gamma < \left\langle \alpha,\beta\right\rangle , \quad k\geq 1$$

esto es,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(a_k)\right| < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i .$$

Puesto que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\in\mathscr{C}(K)$ será, en virtud del Teorema 2.1,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \leq \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i ,$$

lo cual se contradice con la hipótesis.

#

PROPOSICION 2.5

Sea $K=st(\mathscr{F})$ con $\mathscr{F}$ σ-átomica, siendo $\langle a_n: n\in\omega\rangle$ el conjunto de sus átomos, entonces $B_{\mathscr{C}(K)^*}$ es la clausura, en la topología *-débil, del conjunto COQ $(\langle \varepsilon\delta_{a_n}:|\varepsilon|=1,\ n\in\omega\rangle)$. Donde para cada $n\in\omega$, δ_{a_n} representa la funcional definida por

$$\delta_{a_n}(f)=f(a_n),\ f\in\mathscr{C}(K).$$

Por consiguiente, $B_{\mathscr{C}(K)^*}$ es *-débil separable.

Demostración

Sea $x_o^* \in B' = B_{\mathscr{C}(K)^*}$ y sea V un entorno *-débil de x_o^*, el cual se puede suponer

$$V = \{x^* \in \mathscr{C}(K)^* : |x^*(f_i) - x_o^*(f_i)| < \varepsilon,\ i=1,2,\ldots,n\}$$

para ciertos $f_i \in \mathscr{C}(K)$, $i=1,\ldots,n$ y $\varepsilon > 0$.

Llamemos $\alpha_i = x_o^*(f_i)$. Por ser $\|x_o^*\| \leq 1$ se tiene que para todo $\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{R}$ es

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| = \left|x_o^*\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

Aplicando el lema anterior, existen $a_{k_1},\ldots,a_{k_p}$ y unos números racionales λ_j, $j=1,2,\ldots,p$ con $\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| = 1$ tales que

$$\left|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_i(a_{k_j}) - \alpha_i\right| < \varepsilon, \quad i=1,2,\ldots,n$$

esto es,

$$\left|\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \delta_{a_{k_j}}(f_i) - \alpha_i\right| < \varepsilon, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Luego $x^* = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \delta_{a_{k_j}} \in V$, lo que demuestra que el conjunto

$\mathrm{co}\langle\varepsilon\delta_{a_n}:|\varepsilon|=1,\ n=1,2,\ldots\rangle$ es denso en B' con la topología *-débil y, al ser numerable, B' es *-débil separable.

NOTA 2.6

Teniendo en cuenta el teorema 2.1, los resultados anteriores se pueden resumir en lo siguiente: Dado $\mathcal{F}$ álgebra de Boole σ-atómica, si $\langle a_n:n\in\omega\rangle$ es el conjunto de sus átomos y $K=st(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ es isométrico (vectorial, topológico y reticularmente) a un subespacio y subretículo de ℓ_∞, $\tilde{\mathcal{C}}(K)$, que contiene a las sucesiones convergentes. La bola unidad de $\tilde{\mathcal{C}}(K)$ es la clausura del cierre convexo de las sucesiones formadas por 1 y -1 que están en $\tilde{\mathcal{C}}(K)$. Además, la bola de $\tilde{\mathcal{C}}(K)^*$ es la clausura *-débil del cierre convexo de las proyecciones sobre las coordenadas en $\tilde{\mathcal{C}}(K)^*$, estas proyecciones son las funcionales $\delta_n\in\tilde{\mathcal{C}}(K)^*$ tales que $\delta_n[(x_k)_{k\in\omega}]=x_n$ para cada $(x_k)_{k\in\omega}\in\tilde{\mathcal{C}}(K)$. La última afirmación resulta de la Proposición 2.4, ya que según la isometría entre $\mathcal{C}(K)$ y $\tilde{\mathcal{C}}(K)$, δ_{a_n} se correspondería con la n-ésima proyección δ_n.

I.3. CARACTERIZACION DE LOS SUBESPACIOS DE ℓ_∞ DEL TIPO $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$

Una vez que hemos representado los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, con K compactificación 0-dimensional de ω, como un subespacio de ℓ_∞ que contiene a las sucesiones convergentes, estamos interesados en conocer las condiciones que debe cumplir un subespacio X, con $c\subseteq X\leq\ell_\infty$, para ser del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K compacto 0-dimensional de ω, a la vez que conocer el compacto K utilizado para su representación.

Se han dado caracterizaciones de los espacio del tipo $\mathscr{C}(K)$, siendo diferentes las condiciones para los del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ y $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$ (Cf. Semademi (1971), pg. 231-232). En este apartado obtendremos las condiciones para que los subespacios de ℓ_∞, en los que estamos interesados, sean del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ a partir de las recogidas en Semademi (1971). Después demostramos el teorema de caracterización y representación, ya que para nuestro caso particular el compacto K puede ser expresado de forma diferente.

El espacio $\mathscr{C}(K)=\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ es un retículo de Banach que verifica las siguientes condiciones:

a) Para $f,g\in\mathscr{C}(K)$ si $f\geq0$ y $g\geq0$ entonces $\|f\vee g\|=\|f\|\vee\|g\|$.

b) Existe $e\in\mathscr{C}(K)$ tal que $f\in B_{\mathscr{C}(K)}$ si y sólo si $-e\leq f\leq e$.

Generalizando estas propiedades a un retículo normado X se llega naturalmente a la siguiente:

DEFINICION 3.1 (Semademi (1971), pg. 229)

Una C-unidad en un retículo normado X es un elemento $e \in X$ verificando (b). Un M-espacio es un retículo de Banach satisfaciendo (a). Un M-espacio con C-unidad se denomina MI-espacio.

En Semademi (1971) y Lacey (1974) se demuestra el siguiente resultado debido a Kakutani: Si X es un MI-espacio entonces es isomorfo a un espacio $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, donde K es la clausura *-débil del conjunto de los homomorfismos retículares ξ tal que $\xi(e)=1$, siendo e la C-unidad.

En nuestro caso los retículos de Banach $c \subseteq X \subseteq \ell_{\infty}$, son MI-espacios al considerar el orden por coordenadas: $(x_n)_{n\in\omega} \leq (y_n)_{n\in\omega}$ si y sólo si $x_n \leq y_n$, para cada $n\in\omega$. La C-unidad de X es evidentemente la sucesión trivial $1_{\omega}=(1,1,\ldots)$. Por lo tanto, X es isomorfo a un $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ donde K es la clausura *-débil de los homomorfismos retículares sobre X, tales que toman el valor 1 en 1_{ω}.

En el próximo teorema K será expresado de forma diferente, aún siendo el mismo que el considerado anteriormente.

TEOREMA 3.2

Sea X un subretículo de Banach de ℓ_∞ tal que $c\subseteq X$ y $B_X=\overline{CO}(E)$, donde E es el subconjunto de todas las sucesiones formadas por 1 y -1 de X. Entonces X es isométrico a $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ vectorial y reticularmente, donde K es un compacto 0-dimensional y es la clausura en la topología *-débil de las proyecciones sobre X.

Demostración

Sea $K=\overline{\{\delta_i : i\in\omega\}}^{*w}$ en X^*, siendo δ_i, $i\in\omega$ como antes, las proyecciones sobre X.

Sea Δ: $X \to \mathscr{C}(K)$ definida para cada $x\in X$ por $\Delta(x)=\Delta_x$, donde Δ_x es la función sobre K, que viene dada por $\Delta_x(\delta)=\delta(x)$, $\delta\in K$.

Claramente la aplicación Δ está bien definida pues $K\subseteq X^*$. Además Δ es lineal.

Veamos que Δ es isometría. Para todo $x\in B_X$ es

$$\|\Delta_x\| = \sup\{|\Delta_x(\delta)|:\delta\in K\} \leq 1$$

Luego $\|\Delta\|\leq 1$, pero al ser $\|\Delta(1_\omega)\|=1$ será $\|\Delta\|=1$. Así pues, para cada $x\in X$ se tiene $\|\Delta_x\|\leq\|x\|$.

Por otro lado, si $x=(x_n)_{n\in\omega}$, por ser $\delta_n(x)=x_n$ para cada $n\in\omega$, dado $\varepsilon>0$ se tiene que

$$\|x\| = \sup\{|\delta_n(x)|:n\geq 1\}$$

y podremos determinar $k\in\omega$ tal que

$$\|x\|-\varepsilon \leq |\delta_k(x)| \leq \|\Delta_x\|$$

y por lo tanto, $\|\Delta_x\| = \|x\|$.

Para demostrar que Δ es homomorfismo entre retículos, necesitamos probar que si $\delta\in K$, entonces δ es homomorfismo reticular. En efecto, puesto que δ_n es homomorfismo reticular para cada $n\in\omega$, existe una red $(\delta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en el conjunto $\{\delta_n:n\in\omega\}$ tal que $\delta_\alpha\to\delta$ en la topología *-débil. Para cada $\alpha\in\Lambda$ existirá entonces $k\in\omega$ tal que $\delta_\alpha=\delta_k$. Por tanto,

$$\delta(x\vee y) = \lim \delta_\alpha(x\vee y) = \lim(\delta_\alpha(x)\vee\delta_\alpha(y)) = \delta(x)\vee\delta(y)$$

Reemplazando la operación $\vee$ por $\wedge$ obtenemos el resultado deseado.

Sean ahora cualesquiera $x,y\in X$ y $\delta\in K$,

$$\Delta(x\vee y)(\delta) = \delta(x\vee y) = \delta(x)\vee\delta(y) = \Delta(x)(\delta)\vee\Delta(y)(\delta) = (\Delta_x\vee\Delta_y)\delta$$

Además, como $\Delta(1_\omega)=\chi_K$, se deduce que $\Delta(X)$ es un subretículo de $\mathscr{C}(K)$. Este subretículo separa puntos de K pues si $\delta_1\neq\delta_2\in K$, existe $x\in X$ tal que $\delta_1(x)\neq\delta_2(x)$ y entonces $\Delta_x(\delta_1)\neq\Delta_x(\delta_2)$. Aplicando ahora el teorema de Stone-Weierstrass, resulta que $\Delta(X)$ es denso en $\mathscr{C}(K)$, pero como Δ es isometría $\Delta(X)$ es cerrado y, por tanto, igual a $\mathscr{C}(K)$.

Por la proposición 2.2, K es 0-dimensional.

#

Teniendo en cuenta que si $\mathscr{C}(K_1)$ es isomorfo a $\mathscr{C}(K_2)$ entonces K_1 es homeomorfo a K_2 resulta:

COROLARIO 3.3

Sea K una compactificación 0-dimensional de ω y sea $\mathscr{F}$ el álgebra σ-atómica de los clópenes de K. Entonces $\widetilde{\mathscr{C}}(K)$ es isomorfo vectorial y reticularmente a $\mathscr{C}(\widetilde{K})$, donde $\widetilde{K}=\overline{\{\delta_n : n\in\omega\}}^{*w}$. Además, si $\widetilde{\mathscr{F}}$ es el álgebra de los clópenes de $\widetilde{K}$ entonces las álgebras $\mathscr{F}$ y $\widetilde{\mathscr{F}}$ son isomorfas.

Demostración

Veamos en primer lugar que $\mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{F}}$ son isomorfas. Para ello tengamos presente que, en virtud de la proposición 1.1, cada elemento $A\in\mathcal{F}$ puede ser expresado como la clausura de los átomos que contiene. Así, definimos la aplicación

$$\psi: \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$$

por medio de la expresión $\psi(\overline{\{a_i : i\in N\}})=\overline{\{\delta_i : i\in N\}}$, para cada $N\subseteq\omega$ tal que $\overline{\{a_i : i\in N\}}\in\mathcal{F}$

En primer lugar vamos a demostrar que ψ está bien definida, esto es, que si $\overline{\{a_i : i\in N\}}$ es clopen entonces el correspondiente $\overline{\{\delta_i : i\in N\}}$ es igualmente clopen.

El conjunto unitario $\{\delta_i\}$ es clopen ya que

$$\{\delta_i\} = \{x^*\in\tilde{\mathscr{C}}(K)^* : |x^*(1_{\{i\}})-\delta_i(1_{\{i\}})|<1\} \cap K$$

si tenemos en cuenta que para cada $\delta\in K$ es $\delta(1_{\{i\}})=0$ si $\delta\neq\delta_i$.

En particular, para $N\subset\omega$ finito o cofinito $\overline{\{\delta_i : i\in N\}}\in\tilde{\mathcal{F}}$.

Sea entonces N infinito con $\omega\setminus N$ infinito. Por la isometría descrita en el Teorema 2.1, $1_N\in\tilde{\mathscr{C}}(K)$ y también $1_{\omega\setminus N}\in\tilde{\mathscr{C}}(K)$. Consideremos entonces para cada $i\in\omega\setminus N$ el entorno

*-débil

$$V(i) = \{x^*\in\widetilde{\mathscr{C}}(K)^*: \ |x^*(1_{\omega\setminus N})-\delta_i(1_{\omega\setminus N})| < 1\}$$

Claramente, si $j\in N$ entonces $\delta_j\notin V(i)$, luego si llamamos $G(\omega\setminus N)$ al abierto $\bigcup_{i\in\omega\setminus N} V(i)\cap K$ y $F(\omega\setminus N)=K\setminus G(\omega\setminus N)$ resultará que

$$\{\delta j: j\in N\} \subseteq F(\omega\setminus N) \quad y \quad \overline{\{\delta j: j\in N\}} \subseteq F(\omega\setminus N)$$

Con el mismo razonamiento

$$\overline{\{\delta j: j\in\omega\setminus N\}} \subseteq F(N)$$

En definitiva $\overline{\{\delta j: j\in N\}}\cap\overline{\{\delta j: j\in\omega\setminus N\}}=\phi$ y $\overline{\{\delta j: j\in N\}}\cup\overline{\{\delta j: j\in\omega\setminus N\}}=K$, por lo que ambos pertenecen a $\tilde{\mathscr{F}}$.

Veamos a continuación que ψ es un isomorfismo entre álgebras de Boole:

1.- Sea $M,N\subset\omega$ con $M\cap N=\phi$ tales que

$$\overline{\{a_i: i\in N\}},\ \overline{\{a_i: i\in M\}} \ \in \mathscr{F},$$

resulta que por ser K 0-dimensional y por la proposición 1.1,

$$\psi[\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle\cup\langle\overline{a_i : i\in M}\rangle] = \langle\overline{\delta_i : i\in N\cup M}\rangle = \psi[\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle]\cup\psi[\langle\overline{a_i : i\in M}\rangle]$$

2.- Si $\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle \in\mathcal{F}$ es

$$\psi[\langle\overline{a_i : i\in\omega\backslash N}\rangle] = \langle\overline{\delta_i : i\in\omega\backslash N}\rangle = \widetilde{K}\backslash\langle\overline{\delta_i : i\in N}\rangle = \widetilde{K}\backslash\psi[\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle]$$

3.- Si $A\neq B$, $A,B\in\mathcal{F}$ es $\psi(A)\neq\psi(B)$.

4.- Sea $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathcal{F}}$, entonces si existe $N\subset\omega$ tal que $\widetilde{A}=\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle$ resultará que $\widetilde{A}=\psi[\langle\overline{a_i : i\in N}\rangle]$.

Consideremos el isomorfismo definido en el teorema 3.2

$$\Delta:\ \widetilde{\mathcal{E}}(K) \to \mathcal{E}(\widetilde{K})$$

y sea $x\in\widetilde{\mathcal{E}}(K)$ tal que $\chi_{\widetilde{A}}=\Delta_x$. Ya que

$$\chi_{\widetilde{A}}:\ \widetilde{K} \to \mathbb{R}$$
$$\delta \to \chi_{\widetilde{A}}(\delta) = \begin{cases} 1 \text{ si } \delta\in\widetilde{A} \\ 0 \text{ si } \delta\notin\widetilde{A} \end{cases}$$

existirá $N\subset\omega$ tal que $\delta_n(x)=1$ para cada $n\in N$. Por lo que $\Delta_{1_N}=\chi_{\widetilde{A}}$ y $\widetilde{A}=\langle\overline{\delta_i : i\in N}\rangle$.

#

El teorema 3.2 nos posibilita un método para la generación de los espacios $\mathscr{C}(K)$ para K compactificación 0-dimensional de ω que puede expresarse en el siguiente:

COROLARIO 3.4

Sea $\mathscr{F}$ una subálgebra de Boole σ-atómica de $\mathscr{P}(\omega)$, y sea $E_{\mathscr{F}} = \{(x_n)_{n\in\omega}\in\ell_\infty : x_n=1$ si $n\in N$ y $x_n=-1$ si $n\in\omega\setminus N$, $N\in\mathscr{F}\}$. Entonces $X\subseteq\ell_\infty$ con $c\subseteq X$ es de tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K compactificación 0-dimensional de ω si y sólo si $X=\overline{\mathrm{span}}(E_{\mathscr{F}})$ para alguna subálgebra σ-atómica $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\omega)$.

#

Con los dos últimos corolarios hemos conseguido otra forma de obtener compactificaciones 0-dimensionales de ω, a través de subálgebras σ-atómicas $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\omega)$, representadas por la clausura *-débil de las proyecciones sobre subespacios de ℓ_∞ de la forma $\overline{\mathrm{span}}(E_{\mathscr{F}})$.

II. ESTUDIO GEOMETRICO Y TOPOLOGICO DE LOS SUBESPACIOS $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ DE $\ell\infty$

II.1 PUNTOS EXTREMALES DE LAS BOLAS UNIDAD DE $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ Y $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$

En el capítulo I de esta memoria hemos podido observar la importancia de las sucesiones formadas por 1 y -1 en los subespacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞, siendo K compactificación 0-dimensional de ω, así como de los $\delta\in\overline{\{\delta_n\}}^{*w}_{n\in\omega}$ donde, para cada $n\in\omega$, δ_n es la proyección que a cada elemento de ℓ_∞ le hace corresponder su coordenada n-ésima. En este apartado veremos que ellos constituyen, respectivamente, los puntos extremales de las bolas unidad de $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ y $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$, respectivamente. Así mismo,estudiaremos algunas propiedades de estos espacios que se caracterizan a través de los puntos extremales, como es el caso de la separabilidad.

Comenzamos dando algunas definiciones y resultados.

DEFINICION 1.1

Sea D un conjunto convexo de un espacio vectorial X, $e\in D$ se dice punto extremal de D si la combinación convexa $e=\lambda x+(1-\lambda)y$ con $x,y\in D$ y $0<\lambda<1$, implica $x=y=e$.

El conjunto de los puntos extremales de D se denota por ext(D).

Para $\mathscr{C}(K)=\mathscr{C}(K,\mathbb{R})\subset\ell_\infty$ donde K es una compactificación

0-dimensional de ω, denotamos por $\mathscr{A}$ el subálgebra σ-atómica de $\mathscr{P}(\omega)$ tal que $N\in\mathscr{A}$ si y sólo si $1_N\in\mathscr{C}(K)$.

Es bien conocido (Cf. Semadeni (1981), prop. 4.4.4) que un punto de la bola unidad de $\mathscr{C}(K)$, donde K es un espacio topológico arbitrario, es extremal si y sólo si $|f(x)|=1$, para cada $x\in K$. Aplicando este resultado a los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, con K compacto 0-dimensional, se obtiene:

PROPOSICION 1.2

La sucesión $e\in B=B_{\mathscr{C}(K)}$ es punto extremal de B si y sólo si existe $N\in\mathscr{A}$ tal que $e=1_N-1_{N^c}$.

También la siguiente es consecuencia inmediata de un resultado más general (Cf. Lacey (1974), pg. 53).

PROPOSICION 1.3

El conjunto de los puntos extremales de la bola de $\mathscr{C}(K)^*$ es $\{\varepsilon\delta:\ |\varepsilon|=1,\ \delta\in\overline{\{\delta_n\}}^{*w}_{n\in\omega}\}$.

La proposición I.2.2 se podría enunciar ahora diciendo que $B_{\mathscr{C}(K)}$ es la clausura del cierre convexo de sus puntos extremos. Aunque en la proposición I.2.5 no se consideran todos los puntos extremales de la bola de $\mathscr{C}(K)^*$

de ella se deduce que $B_{\mathscr{C}(K)^*}$ es también la clausura del cierre convexo de sus puntos extremales que es el conocido teorema de Krein-Milman (Cf. Lacey (1974), pg. 251).

NOTA 1.4

Aunque $B_{\mathscr{C}(K)}$ es la clausura del cierre convexo de sus puntos extremales, no todo subconjunto acotado, cerrado y convexo C de $\mathscr{C}(K)$ verifica $C=\overline{CO}(ext(C))$. Por ejemplo, si $\delta_x \in K$ no es aislado en $K \subset \mathscr{C}(K)^*$ con la topología *-débil, el conjunto $\{f \in B_{\mathscr{C}(K)} : \delta_x(f)=0\}$ no tiene puntos extremos, así $\mathscr{C}(K)$ no posee la propiedad de Krein-Milman ni por tanto la propiedad de Radon-NiKodym (Cf. Bourgin (1983)).

La siguiente proposición nos caracteriza los subespacios separables del tipo $\mathscr{C}(K)$ de ℓ_∞ a través de los puntos extremales de la bola unidad de forma bastante simple.

PROPOSICION 1.5

$\mathscr{C}(K) \subset \ell_\infty$ es separable si y sólo si $E=ext[B_{\mathscr{C}(K)}]$ es numerable.

Demostración

Si E es numerable, puesto que $B_{\mathscr{C}(K)}=\overline{CO}(E)=\overline{COQ}(E)$, al ser COQ(E) numerable es $\mathscr{C}(K)$ separable.

Recíprocamente, si E no fuese numerable, como para cada $x,y\in E$, $x\neq y$ se verifica que $\|x-y\|=2$ resulta que $\mathscr{C}(K)$ no podría ser separable.

#

II.2 SUBESPACIOS DE ℓ_∞ CON SUBSUCESION DE COORDENADAS CONVERGENTE

En Wilansky (1978) aparece una propiedad relativa a los subespacios separables de ℓ_∞, la cual damos a continuación en forma de definición, para después caracterizar los subespacios del tipo $\mathscr{C}(K)$ de ℓ_∞ con la citada propiedad.

DEFINICION 2.1

Sea X un subespacio de ℓ_∞, diremos que X tiene subsucesión de coordenadas convergentes si existe subsucesión de proyecciones $\langle\delta_{n_k}\rangle_{k\in\omega}$ tal que para todo $x\in X$, $\langle\delta_{n_k}(x)\rangle_{k\in\omega}$ converge.

Si X es un espacio SK, esto es, la bola unidad del dual es $*$-débil secuencialmente compacta, al ser $\langle\delta_n\rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de la bola, debe existir subsucesión convergente en la topología *-débil, de aquí que X tenga subsucesión de coordenadas convergentes. Igualmente, los espacios WCG (generados por conjuntos débilmente compactos) y los separables tienen esa propiedad puesto que se tiene la siguiente cadena de implicaciones,

$$X \text{ es separable} \Rightarrow X \text{ es WCG} \Rightarrow X \text{ es SK}$$

Cualquiera de estos espacios implican en principio, propiedades más fuerte que la de tener subsucesión de coordenadas convergentes ya que toda sucesión de B_{X^*} tiene subsucesión *-débil convergente. Por ejemplo, si X es separable entonces B_{X^*} es metrizable y , teniendo en cuenta la *-débil compacidad de B_{X^*} (Teorema de Banach-Alaoglu), resulta que B_{X^*} es *-débil secuencialmente compacto.

Para los espacios $\mathscr{C}(K)$ con la citada propiedad podemos dar una caracterización en la siguiente proposición.

PROPOSICION 2.2

Sea $\mathscr{C}(K)$ subespacio de ℓ_∞ con K compactificación 0-dimensional de ω, $\mathscr{C}(K)$ tiene subsucesión de coordenadas convergente si y sólo si existe $M\subseteq\omega$ tal que la clausura en la topología *-débil del conjunto de proyecciones $\{\delta_n : n\in M\}\subset K$ es homeomorfo a $\gamma\omega$ (compactificación de Alexandroff de ω).

Demostración

Supongamos que existe una sucesión de proyecciones $\{\delta_{n_k}\}_{k\in\omega}$ tal que para todo $x\in\mathcal{E}(K)$, $\{\delta_{n_k}(x)\}_{k\in\omega}$ converge. Entonces $\{\delta_{n_k}\}_{k\in\omega}$ es convergente en la topología *-débil a un $\delta\in K$, en tal caso el conjunto $H=\{\delta_{n_k}:k\in\omega\}\cup\{\delta\}$ es cerrado en K y coincide con $\overline{\{\delta_{n_k}:k\in\omega\}}^{*w}$. Además, la aplicación $\psi:H\to\gamma\omega$ definida para cada $k\in\omega$, por $\psi(\delta_{n_k})=k$ y $\psi(\delta)=\infty$, representando por ∞ el punto del infinito en la compactificación de Alexandroff de ω, es claramente un homeomorfismo.

Recíprocamente, si existe $M\subseteq\omega$ tal que $\overline{\{\delta_n:n\in M\}}^{*w}$ es homeomorfo con la topología *-débil a $\gamma\omega$, entonces la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in M}$ es convergente en la topología *-débil y de aquí que $\mathcal{E}(K)$ tenga subsucesión de coordenadas convergente.

NOTA 2.3

La proposición 1.7 se puede deducir de la proposición de Aizpuru (1986) en la cual se da una caracterización de las álgebras $\mathcal{F}$ que denomina k-álgebras de Boole, esto es, que en $st(\mathcal{F})$ no existen sucesiones convergentes distintas de las triviales. En ella queda de manifiesto que la existencia de una sucesión convergente en $st(\mathcal{F})$ implica la existencia de una subálgebra de $\mathcal{F}$ isomorfa a $\phi(\omega)$ y por lo tanto un cerrado en $st(\mathcal{F})$ homeomorfo a $\gamma\omega$ que, a su vez, implica que $\mathscr{C}(st\mathscr{F}))$ tiene por cociente al espacio de las sucesiones convergentes c.

En el caso de la propiedad que nos encontramos estudiando, hemos particularizado la existencia de sucesiones convergentes al conjunto $\{\delta_n : n\in\omega\}$, puesto que por el hecho de que exista una sucesión $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ en $\overline{\{\delta_n : n\in\omega\}}^{*w}\setminus\{\delta_n : n\in\omega\}$ convergente a un elemento x, no se deduce que exista una sucesión de proyecciones convergente a x, como veremos en el ejemplo que se va a construir.

Vamos a construir un subespacio de ℓ_∞ del tipo $\mathscr{C}(K)$ que, entre otras propiedades, posee la propiedad de tener subsucesión de coordenadas convergente y la de no ser separable.

Para ello se va a construir, por inducción transfinita, un álgebra σ-átomica, subálgebra de $\mathscr{P}(\omega)$, de cardinal no numerable y tal que en su Stone cada sucesión de átomos tiene una subsucesión convergente. Estudiaremos además algunas otras propiedades de este álgebra de Boole.

DEFINICION 2.4 (Cf. Kunen (1.980), pág. 47)

Una familia $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ es casi disjunta de ω si todo $M\in\mathscr{A}$ es infinito y para cada $M,N\in\mathscr{A}$ es $M\cap N$ finito.

$\mathcal{A}$ se dice familia casi disjunta maximal si no está contenida propiamente en otra familia casi disjunta.

Para la existencia de familias maximales de ω, de cardinal 2^{ω}, citamos, por ejemplo, el argumento dado por J. van Mill (1.984): Para cada $r\in\mathbb{R}$ irracional, sea $M_r=(a_k^{(r)})_{k\in\omega}$ una sucesión de números racionales convergente a r. Claramente la familia $\{M_r:$ r irracional$\}$ es casi disjunta, maximal y de cardinal 2^{ω} en $\mathbb{Q}$. Considerando ahora alguna biyección entre $\mathbb{Q}$ y ω obtenemos la familia deseada.

TEOREMA 2.5

Existe una subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\omega)$ que contiene una familia casi disjunta maximal $\mathcal{A}=\{M_\alpha:\alpha\in2^{\omega}\}$, con las siguientes propiedades:

(a) Si $L\in\mathcal{B}$ y $L\subseteq M_\alpha\in\mathcal{A}$, para algún $\alpha\in2^{\omega}$, entonces o L es finito o $M_\alpha\setminus L$ es finito.

(b) Si $M\in\mathcal{B}$ entonces existe un número finito $M_{\alpha_1},M_{\alpha_2},\dots M_{\alpha_n}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$ tal que

(b1) o bien, $M\cap M_{\alpha_k}$ es infinito $\forall k=1,\dots,n$ y $M\cap M_\alpha$ es finito $\forall\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

(b2) o bien, $M\cap M_{\alpha_k}$ es finito $\forall k=1,\dots,n$ y

$M\cap M_{\alpha}$ es infinito $\forall \alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

Demostración

Sea $\mathcal{A}=\{M_\alpha:\alpha\in 2^\omega\}$ una familia casi disjunta maximal.

Observemos que las propiedades (a) y (b) tienen sentido aun cuando $\mathcal{A}$ no esté contenido en $\mathcal{B}$.

Construimos por inducción transfinita una sucesión creciente $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in 2^\omega}$ de subálgebras de $\mathcal{P}(\omega)$ tal que cada $\mathcal{B}_\alpha$ tiene las propiedades (a) y (b).

Pongamos $\mathcal{B}_0=\phi(\omega)$. Puesto que $\phi(\omega)$ no puede contener una familia casi disjunta maximal, es evidente que cumple (a). Para $M\in\mathcal{B}_0$ si M es finito se cumple (b1) y si M es cofinito se tiene (b2).

Sea ahora $\mathcal{B}_1$ el álgebra engendrada por $\mathcal{B}_0$ y M_1. Los elementos de $\mathcal{B}_1$ son de la forma (Cf. Sikorski (1.964) pg. 14)

$$B_1\cup(B_2\cap M_1)\cup(B_3\setminus M_1)$$

siendo $B_1,B_2,B_3\in\mathcal{B}_0$. Claramente $\mathcal{B}_1$ también cumple (a) ya que no existe $L \in \mathcal{B}_1$ tal que $L \subset M_\alpha$ para $\alpha \neq 1$.

Sea $\beta \neq 1$ y consideremos la intersección:

$$[B_1 \cup (B_2 \cap M_1) \cup (B_3 \setminus M_1)] \cap M_\beta = (B_1 \cap M_\beta) \cup (B_2 \cap M_1 \cap M_\beta) \cup (B_3 \cap (M_\beta \setminus M_1))$$

Donde:

- La intersección $B_1 \cap M_\beta$, dependiendo de B_1, es finita para todo $\beta \neq 1$ salvo un número finito o infinita para todo $\beta \neq 1$ salvo un número finito.

- La intersección $B_2 \cap M_1 \cap M_\beta$ es finita para todo β.

- Y, por último, la intersección $B_3 \cap (M_\beta \setminus M_1)$, dependiendo de B_3, es finita para todo $\beta \neq 1$ o infinita para todo $\beta \neq 1$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_1$ cumple (b).

Supongamos construido $\mathcal{B}_\gamma$ para $\gamma < \alpha$. Llamemos $\mathcal{B}_\alpha$ al álgebra engendrada por $\bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{B}_\gamma$ y por M_α. Observemos que $\bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{B}_\gamma$ coincidirá con $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ si α es ordinal sucesor. Claramente $\mathcal{B}_\alpha$ cumple (a) y con un razonamiento análogo al usado con $\mathcal{B}_1$ también $\mathcal{B}_\alpha$ cumple (b).

Llamando ahora $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<2^\omega} \mathcal{B}_\alpha$ resulta que $\mathcal{B}$ cumple (a), (b) y, por la propia construcción, $\mathcal{B}$ contiene a $\mathcal{A}$.

#

Pongamos $S=st(\mathcal{B})$. Dado que $\mathcal{B}$ contiene a $\phi(\omega)$ y está contenida en $\mathcal{P}(\omega)$, $\mathcal{B}$ es σ-atómica. Sea $(a_n)_{n\in\omega}$ la sucesión de los átomos en S. Sea $\mathcal{B}'$ el álgebra de los clópenes de S que, como sabemos, serán de la forma $\overline{\{a_n : n\in M\}}$ para algún $M\in\mathcal{B}$. Se tienen los siguientes resultados,

COROLARIO 2.6

Para cada $\alpha\in 2^{\omega}$, $M_\alpha\cap\mathcal{B}=\{M_\alpha\cap B : B\in\mathcal{B}\}$ es subálgebra de $\mathcal{B}$ isomorfa a $\phi(\omega)$, y consecuentemente $(a_n)_{n\in M_\alpha}$, es una sucesión convergente en S.

Demostración:

Es consecuencia de la propiedad (a) del álgebra $\mathcal{B}$.

PROPOSICION 2.7

Para cada $M\subseteq\omega$ infinito existe $L\subseteq M$ tal que la sucesión $(a_n)_{n\in L}$ converge.

Demostración:

Si para cada $\alpha\in 2^{\omega}$, $M\cap M_\alpha$ fuera finito implicaría que la familia casi disjunta $\mathcal{A}$ no sería maximal, ya que la familia

$\mathcal{A}\cup\{M\}$ sería también casi disjunta y conteniendo a $\mathcal{A}$. Por tanto existe un $\alpha\in 2^{\omega}$ tal que $L=M\cap M_{\alpha}$ es infinito y por tanto $(a_n)_{n\in L}$ converge por ser L subconjunto de M_{α}.

PROPOSICION 2.8

Supongamos que $x_0\in\overline{\{a_n:n\in\omega\}}\setminus\{a_n:n\in\omega\}$ es tal que no existe una sucesión $(a_n)_{n\in L}$, $L\subseteq\omega$, convergente a x_0. Para todo $x\in\overline{\{a_n:n\in\omega\}}\setminus\{a_n:n\in\omega\}, x\neq x_0$ existe un $\alpha\in 2^{\omega}$ tal que la sucesión $(a_n)_{n\in M_{\alpha}}$ converge a x.

Demostración:

Sea $x\neq x_0$ y sean dos clopenes disjuntos $U_1=\overline{\{a_n:n\in M_1\}}$ y $U_2=\overline{\{a_n:n\in M_2\}}$ tal que $x\in U_1$ y $x_0\in U_2$.

Por la propiedad (b) del álgebra $\mathcal{B}$ del teorema 2.5, M_2 debe cumplir (b1) ó (b2). Supongamos que $M_2\cap M_{\alpha_k}$ es infinito para $k=1,2,\ldots,n$ y $M_2\cap M_{\alpha}$ es finito $\forall\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. En este caso, $L=M_2\setminus(\bigcup_{1}^{n} M_{\alpha_k})$ cumple que $L\cap M_{\alpha}$ es finito para cada $\alpha\in 2^{\omega}$ y al ser la familia $\mathcal{A}$ maximal, L debe ser finito. Por lo tanto, x_0 debe ser límite de alguna de las sucesiones $(a_n)_{n\in M_{\alpha_k}}$, en contra de la hipótesis hecha a x_0. M_2 cumple entonces la condición (b2) del teorema 2.5 del álgebra $\mathcal{B}$.

Ahora bien, M_1 no puede cumplir también la alternativa (b2) ya que M_1 y M_2 son disjuntos, luego M_1 debe cumplir (b1) y con el mismo argumento de antes, encontramos $\alpha\in 2^{\omega}$ tal que $(a_n)_{n\in M_\alpha}$ converge a x.

PROPOSICION 2.9

Cada sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ de elementos de $\overline{\{a_n:n\in\omega\}}\setminus\{a_n:n\in\omega\}$, infinita converge a x_0.

Demostración:

Sea $x_0\in\overline{\{a_n:n\in M\}}$ con $M\in\mathcal{B}$. Con el mismo razonamiento hecho en la proposición anterior, se tiene que M debe verificar la alternativa (b2) del teorema 2.5, esto es, la intersección $M\cap M_{\alpha_k}$ es finita para $k=1,\dots,p$ y $M\cap M_\alpha$ es infinita para todo $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$. Así pues $x_\alpha\in\overline{\{a_n:n\in M\}}$ para todo $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ siendo x_α el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in M_\alpha}$. Así pues, toda sucesión en $\overline{\{a_n:n\in\omega\}}\setminus\{a_n:n\in\omega\}$ converge a x_0.

#

Como consecuencia inmediata de la proposición 2.9 se tiene,

COROLARIO 2.10

S es disperso.

#

En virtud de las proposiciones anteriores, $\mathcal{C}(S)$ es subespacio de ℓ_∞ no separable y S disperso y secuencialmente compacto, por lo que tiene subsucesión de coordenadas convergente. Quedando con este ejemplo separada esta propiedad de la separabilidad del espacio. Observemos también que en $\overline{\{a_n:n\in\omega\}}\setminus\{a_n:n\in\omega\}$ existen sucesiones que convergen a un punto, al que hemos llamado x_0, mientras que ninguna sucesión en $\{a_n:n\in\omega\}$ converge a dicho punto.

II.3. ESPACIOS $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ DUALES

En este apartado nos proponemos contestar a la siguiente pregunta: ¿Qué subespacios de ℓ_∞ del tipo $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ son duales?.

En primer lugar como consecuencia directa de que el espacio **c** de las sucesiones convergentes está contenido en $\mathcal{C}(K)$ y de la proposición 2.e.8 de Lindenstrauss (1977) se obtiene la siguiente,

PROPOSICION 3.1

Si un subespacio de ℓ_∞ del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K compactificación 0-dimensional de ω, es dual de algún espacio de Banach, entonces contiene subespacio isomorfo a ℓ_∞.

Para continuar veamos algunos conceptos y resultados sacados de Kaplan (1985).

DEFINICION 3.2

Una red $\langle r_\alpha \rangle$ en un retículo X se llama ascendente (descendente) cuando $\alpha_1 \leq \alpha_2$ implica $r_{\alpha_1} \leq r_{\alpha_2}$ (respectivamente, $r_{\alpha_1} \geq r_{\alpha_2}$).

$r_\alpha \uparrow a$ denota que $\langle r_\alpha \rangle$ es ascendente y $a = \vee_\alpha r_\alpha$ (supremo del orden).

$s_\alpha \downarrow a$ denota que $\langle s_\alpha \rangle$ es descendente y $a = \wedge_\alpha s_\alpha$ (ínfimo del orden).

$a_\alpha \xrightarrow[o]{} a$ significa que existen dos redes $\langle r_\alpha \rangle$ y $\langle s_\alpha \rangle$ tales que $r_\alpha \uparrow a$, $s_\alpha \downarrow a$ y $r_\alpha \leq a_\alpha \leq s_\alpha$.

Una aplicación sobre el retículo de Banach X, $\phi : X \to \mathbb{R}$

se dice continua para el orden si para cada $a_\alpha \xrightarrow[o]{} a$ es $\phi(a_\alpha) \to \phi(a)$.

El espacio de las funciones continuas en el orden sobre X se denotará por X^c.

El siguiente teorema es debido a Grothendieck y aparece en Kaplan (1.985), pág. 138

TEOREMA 3.3

Dado un MI-espacio X, X es dual de un espacio de Banach si y sólo si $X=(X^c)^*$.

El siguiente resultado más general será también usado posteriormente y aparece en Bourbaki (1981), pg. IV.56.

TEOREMA 3.4 (Dixmier)

Un espacio de Banach X es dual de un espacio de Banach, si y sólo si existe un subespacio M* del dual X* que es cerrado en la norma, *-débil denso en X* e irreducible, esto es, no contiene subespacio propio con las dos primeras propiedades.

#

NOTA 3.5

Respecto a este último resultado es importante observar que si X es el dual de un espacio de Banach Y, entonces Y se puede identificar con un subespacio de X^* que es evidentemente cerrado, *-débil denso en X^* (teorema de Goldstine) y además irreducible. Para probar esto último consideremos un $Z \subset Y$ cerrado y *-débil denso en X^*. Entonces, para cada $y \in Y$ se puede determinar una red $\{z_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en Z tal que $\lim_{\alpha\in\Lambda} z_\alpha(x) = z(x)$, para todo $x \in X = Y^*$.

Esto puede interpretarse diciendo que la clausura del espacio Z en la topología $\sigma(Y,Y^*)$ es Y. Pero como sabemos, la clausura débil coincide con la clausura en norma sobre los subespacios, luego al ser Z cerrado debe ser Z=Y.

Estamos ya en condiciones de demostrar el siguiente:

TEOREMA 3.6

Un subespacio de ℓ_∞ del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, con K compactificación 0-dimensional de ω, es dual de algún espacio de Banach si y sólo si es isométrico a ℓ_∞.

Demostración:

Supongamos que $\mathscr{C}(K)$ es dual de un espacio de Banach. Por el teorema 3.3, $\mathscr{C}(K)^c$ es un predual, es decir, $\mathscr{C}(K)=(\mathscr{C}(K)^c)^*$.

Habida cuenta que los espacios que utilizamos son subespacios de ℓ_∞, sobre ellos utilizamos el orden $<$ por coordenadas (Cf. las observaciones previas al Teorema I.2.3).

Veamos a continuación que las proyecciones δ_n son en orden continua, para todo $n\in\omega$.

En efecto, sea $\{a_\alpha:\alpha\in A\}$ una red tal que $a_\alpha \xrightarrow[o]{} a$. En tal caso existen dos redes $\{r_\alpha:\alpha\in A\}$ y $\{s_\alpha:\alpha\in A\}$ tales que $r_\alpha \uparrow a$, $s_\alpha \downarrow a$ y $r_\alpha\leq a_\alpha\leq s_\alpha$.

A partir de $a=\wedge_\alpha s_\alpha$, vamos a deducir que para cada $n\in\omega$

$$\delta_n(a) = \inf \{\delta_n(s_\alpha):\ \alpha\in A\}$$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe un $\varepsilon>0$ tal que

$$\delta_n(a) + \varepsilon < \inf \{\delta_n(s_\alpha):\ \alpha\in A\}$$

En consecuencia, dado que $a+\varepsilon 1_{\{n\}}>a$, se cumple para cada $\alpha\in A$,

$$a + \varepsilon\, 1_{\{n\}} \leq s_\alpha,$$

en contra de ser a el ínfimo de los s_α.

En definitiva, $\langle\delta_n(s_\alpha):\ \alpha\in A\rangle$ es una red decreciente tal que $\delta_n(s_\alpha)\downarrow\delta_n(a)$.

Con análogo razonamiento se prueba que $\delta_n(r_\alpha)\uparrow\delta_n(a)$. Por ende, $\delta_n(a_\alpha)\rightarrow\delta_n(a)$ y δ_n es en orden continua.

Como para cada $n\in\omega$ $\delta_n\in\mathscr{C}(K)^c$, podemos deducir al ser $\mathscr{C}(K)^c$ cerrado que $M=\overline{\mathrm{span}\langle\delta_n:n\in\omega\rangle}\subset\mathscr{C}(K)^c$. Ahora bien, M es cerrado y *-débil denso en $\mathscr{C}(K)^*$ (Proposición I.2.5) y por la Nota 3.5., $\mathscr{C}(K)^c$ debe ser irreducible; así pues, $M=\mathscr{C}(K)^c$. Y como es M isomorfo a ℓ_1 será $\mathscr{C}(K)$ isomorfo a ℓ_∞. Finalmente, por el teorema 5.5 de (Negrepontis, (1984)) resulta que $\mathscr{C}(K)$ es isométrico a ℓ_∞.

La otra implicación es evidente.

II.4. ESTUDIO DE LA λ-PROPIEDAD EN LOS ESPACIOS $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$

La λ-propiedad es una propiedad de tipo geométrico, introducida por R.M. Aron y R.H. Lohman (1987), la cual será estudiada aquí en los espacios del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ y en sus duales. A través de ella vamos a caracterizar los compactos 0-dimensionales, los compactos F-espacios y los dispersos.

DEFINICION 4.1 (Aron y Lohman (1.987), pág. 210)

Sea X un espacio normado, para $x \in B_X$ diremos que la terna (e,λ,y) es factible para x si $e \in ext(B_X)$, $0<\lambda\leq 1$, $y \in B_X$ y $x=\lambda e+(1-\lambda)y$. En este caso pondremos,

$$\lambda(x) = \sup\{\lambda : (e,\lambda,y) \text{ es factible para } x\}.$$

X tiene la λ-propiedad si cada $x \in B_X$, tiene una terna factible. La función $\lambda(x)$ será denominada la λ-función. X tiene la λ-propiedad uniforme si $\inf\{\lambda(x) : x \in B_X\} > 0$.

La siguiente proposición incluye algunos resultados sobre la λ-propiedad que están enunciadas y demostradas en la proposición 1.2 de Aron-Lohman (1987).

PROPOSICION 4.2

Sea X es un espacio normado, se tienen las siguientes propiedades:

(a) Si $e \in ext(B_X)$ entonces $\lambda(e)=1$.

(b) Si (e,y,λ) es factible para x con $\lambda<1$ y $\|y\|<1$ existe un $\lambda'<\lambda$ y un $y' \in S_X$ tal que (e,y',λ') es factible para x.

(c) Si (e,y,λ) es factible para x y $0<\lambda'<\lambda$ existe $y' \in B_X$ tal que (e,y',λ') es factible para x.

(d) Si X tiene la λ-propiedad, entonces $\lambda(x) \leq (1+\|x\|)/2$ para todo $x \in B_X$.

Veamos a continuación que debemos dirigir nuestra atención hacia los puntos de la esfera unidad S_X, del espacio normado X, cuando se desee demostrar que tal espacio tiene la citada propiedad. En efecto,

PROPOSICION 4.3

Sea X un espacio normado tal que su bola unidad tiene algún punto extremal e. Entonces para cada $x \in X$, con

$\|x\|<1$, existe terna factible.

Demostración:

Sea $\mu \in (0,1)$ tal que $\mu \leq \frac{1-\|x\|}{\|x-e\|}$. Entonces, si llamamos $\lambda = \frac{\mu}{1+\mu}$, $y=x+\mu(x-e)$, resulta que la terna (e,λ,y) es factible para x ya que claramente es $0<\lambda<1$ y además

$\|y\| \leq \|x\| + \mu\|x-e\| \leq \|x\| + 1 - \|x\| = 1$

#

COROLARIO 4.4

Un espacio normado tiene la λ-propiedad si y sólo si todo punto de la esfera unidad de X tiene terna factible.

EJEMPLO 4.5

En general, para un espacio K compacto Hausdorff, $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ no tiene la λ-propiedad; por ejemplo, $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ no la posee ya que no existe terna factible para toda función, como lo demuestra el siguiente ejemplo. Supongamos que $f(t)=1-2t$, se puede escribir

$$f(t) = \lambda e(t)+(1-\lambda)y(t)$$

Si $e(t)=1$ para cada t, será

$$y(t) = \frac{1-2t-\lambda}{1-\lambda}$$

Para $t=1$ $|y(1)|>1$ luego $\|y\|>1$, así pues (e,λ,y) no es terna factible para f.

Si $e(t)=-1$ para cada t, será

$$y(t) = \frac{1-2t+\lambda}{1-\lambda}$$

$y(0)$ muestra que $\|y\|>1$ y tampoco (e,λ,y) es terna factible para f.

En la siguiente proposición estudiamos cuáles son los puntos de $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$ que tienen terna factible. Para cada $x\in B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$ escribimos $m_x=\inf\{|x(t)|:t\in K\}$ y $\mathscr{C}(K)=\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$.

PROPOSICION 4.6

Si K es compacto Hausdorff, para cada $x\in B_{\mathscr{C}(K)}$ tal que $m_x>0$ existe una terna factible $(e,\lambda(x),y)$ con $\lambda(x)=(1+m_x)/2$.

Demostración:

Observemos, en primer lugar, que si para $x\in B_{\mathscr{C}(K)}$ la terna (e,λ,y) es factible, entonces para cada $t\in K$ se tiene

$$\lambda=|\lambda e(t)|=|x(t)-(1-\lambda)y(t)|\leq|x(t)|+1-\lambda$$

De donde $\lambda\leq(1+m_x)/2$ y de aquí que $\lambda(x)\leq(1+m_x)/2$.

Si $m_x=1$, entonces x es un punto extremal y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $0<m_x<1$, ponemos $m=m_x$, $\lambda=\frac{1+m}{2}$ y para cada $t\in K$

$$e(t) = \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

$$y(t) = \frac{2|x(t)|-1-m}{(1-m)|x(t)|}\,x(t)$$

Teniéndose que $x(t)=\lambda e(t)+(1-\lambda)y(t)$ para todo $t\in K$. Claramente $e(t)$ es punto extremal. Además,

$$|y(t)| = \frac{|2|x(t)|-1-m|}{1-m} \leq \frac{|x(t)-1|+|x(t)-m|}{1-m} \leq 1$$

Así pues, (e,λ,y) es factible para x cumpliéndose que $\lambda(x)=(1+m)/2$.

#

Estudiemos a continuación qué propiedad intrínseca de K hace que exista una terna factible para cada $x\in B_{\mathscr{C}(K)}$. Para ello damos la siguiente definición,

DEFINICION 4.7

Diremos que $x\in\mathscr{C}(K)$ tiene los conjuntos de signo separados, si para los subconjuntos de K

$$Kx_+ = \{t\in K: x(t)>0\}$$

y

$$Kx_- = \{t\in K: x(t)<0\}$$

existe un clopen A, tal que

$$Kx_+\subset A \quad y \quad Kx_-\subset K\setminus A.$$

Dado $\varepsilon>0$ diremos que x tiene los conjuntos de ε-signo separados si para los conjuntos

$$Kx_+(\varepsilon) = \{t\in K: x(t)\geq\varepsilon\}$$

y

$$Kx_-(\varepsilon) = \{t\in K: x(t)\leq-\varepsilon\}$$

existe un clopen A tal que

$$Kx_+(\varepsilon)\subset A \quad y \quad Kx_-(\varepsilon)\subset K\setminus A$$

LEMA 4.8

Sea K compacto Hausdorff, K es 0-dimensional si y sólo si todo $x \in B_{\mathscr{C}(K)}$ tiene los conjuntos de ε-signo separados, para todo $\varepsilon > 0$.

Demostración:

Una conocida caracterización de los 0-dimensionales es que cada dos cerrados disjuntos pueden ser separados mediante clópenes disjuntos. Teniendo en cuenta esto y que los conjuntos $Kx_+(\varepsilon)$ y $Kx_-(\varepsilon)$ son cerrados, para todo $x \in \mathscr{C}(K)$ y $\varepsilon > 0$, se obtiene la implicación directa.

Para probar la implicación recíproca, consideremos dos subconjuntos cerrados y disjuntos A y B de K. El lema de Urysohn garantiza que existe un $x \in B_{\mathscr{C}(K)}$ tal que $x(A) = \{1\}$ y $x(B) = \{-1\}$, tomando $\varepsilon < 1$ resulta que $A \subset Kx_+(\varepsilon)$ y $B \subset Kx_-(\varepsilon)$. Ahora con nuestra hipótesis podemos separar por clópenes $Kx_+(\varepsilon)$ y $Kx_-(\varepsilon)$ y también A y B. Por lo tanto K es 0-dimensional.

#

TEOREMA 4.9

Un conjunto compacto K es 0-dimensional si y sólo si $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad uniforme con $\lambda(x) = (1 + m_x)/2$ para cada $x \in B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$.

Demostración:

Supongamos que K es 0-dimensional. Sea $x \in B_{\mathscr{C}(K)}$, teniendo en cuenta la proposición 4.6 si $m_x > 0$ existe terna factible para x y $\lambda(x) = \frac{1+m_x}{2}$, con lo que la condición necesaria quedaría probada en este caso.

Supongamos entonces que $m_x = 0$. Para cada $\lambda < \frac{1}{2}$ sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1-2\lambda$. Por el lema anterior existe un clopen A tal que $Kx_+(\varepsilon) \subset A$ y $Kx_-(\varepsilon) \subset K \setminus A$. Para cada $t \in K$ definamos

$$e(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \\ -1 \text{ si } t \in K \setminus A \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{x(t) - \lambda e(t)}{1-\lambda}$$

Claramente $e \in ext[B_{\mathscr{C}(K)}]$, veamos que $\|y\| \leq 1$, esto es, para cada $t \in K$

$$\frac{|x(t) - \lambda e(t)|}{1-\lambda} \leq 1 \qquad (*)$$

En efecto,

(a) Si $x(t) \geq \varepsilon$ entonces $x \in A$ y por tanto $e(t) = 1$. En tal caso, si $x(t)\geq\lambda$ será $|x(t)-\lambda|\leq 1-\lambda$. Y si por el contrario es $x(t)<\lambda$ será

$$\lambda-x(t) \leq \lambda-\varepsilon \leq \frac{1}{2}-\varepsilon < 1-\lambda.$$

Luego en cualquier caso se cumple (*).

(b) Si $x(t)\leq-\varepsilon$ entonces $e(t)=-1$ y con un razonamiento análogo al anterior $|x(t)+\lambda|\leq 1-\lambda$. Y en este caso también se tiene (*).

(c) Finalmente si $-\varepsilon<x(t)<\varepsilon$ entonces

$$|x(t)\pm\lambda e(t)| \leq \varepsilon+\lambda \leq \lambda+1-2\lambda = 1-\lambda$$

Así pues, para cada $\lambda<\frac{1}{2}$ podemos encontrar una terna factible para x, luego $\lambda(x)\geq\frac{1}{2}$. Pero como se probó en la demostración de la proposición 4.6, también es $\lambda(x)\leq(1+m_x)/2$, por lo tanto $\mathscr{C}(K)$ tiene la λ-propiedad uniforme y $\lambda(x)=(1+m_x)/2$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{C}(K)$ tiene la λ-propiedad uniforme con $\lambda(x)=(1+m_x)/2$. Aplicando el lema anterior sea $x\in B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$, si $m_x>0$ entonces $x(t)\neq 0$ para todo $t\in K$ y por lo tanto, el clopen

$$A = x^{-1}(-\infty,0) = x^{-1}(-\infty,0]$$

separa los conjuntos de ε-signo de x.

Supongamos entonces que $m_x=0$. Si $0<\varepsilon<1$, tomemos $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2}>\lambda>\frac{1-\varepsilon}{2}$. Si $\varepsilon\geq 1$ sea $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2}>\lambda>0$. Por la proposición 4.2(c) podemos determinar un $e\in ext(B_{\mathscr{C}(K)})$ y un $y\in B_{\mathscr{C}(K)}$ tales que

$$x(t) = \lambda e(t)+(1-\lambda)y(t), \quad t\in K$$

Como debe ser $|y(t)|\leq 1$, será

$$|x(t)-\lambda e(t)| \leq 1-\lambda$$

(a) Si $x(t)\geq\varepsilon$ entonces $e(t)=1$. En efecto, si fuera $e(t)=-1$ se tendría $x(t)+\lambda \leq 1-\lambda$ y de aquí $x(t) \leq 1-2\lambda < \varepsilon$.

(b) Si $x(t)\leq-\varepsilon$ entonces $e(t)=-1$, ya que si fuera $e(t)=1$, $\lambda-x(t) \leq 1-\lambda$ y de aquí $x(t) \geq -(1-2\lambda) > -\varepsilon$.

Por lo tanto, los clópenes $A=e^{-1}\{1\}$ y $B=e^{-1}\{-1\}$ separan los conjuntos de ε-signo de X. Entonces K debe ser 0-dimensional.

#

En el teorema 3.3 de Aron-Lohman (1987) se demuestra que si X es un espacio de Banach con la λ-propiedad entonces B_X es la clausura del cierre convexo de sus puntos extremales. Ahora bien, si $X=\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ esto último significa que K es 0-dimensional, por lo tanto,

COROLARIO 4.10

Para K compacto, $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad si y sólo si tiene la λ-propiedad uniforme con $\lambda(x)=(1+m_x)/2$.

Para los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ con K 0-dimensional la λ-función ha sido calculada, pero no sabemos si $\lambda(x)$ se alcanza para cada $x\in B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$, esto es, si existe una terna $(e,\lambda(x),y)$ factible para cada x. En lo que sigue vamos a demostrar que la λ-función se alcanza para todo $x\in B_{\mathscr{C}(k,\mathbb{R})}$ si y sólo si K es un F-espacio, esto es, si cada dos abiertos F_σ disjuntos tienen clausuras disjuntas. Esta condición es, como sabemos, equivalente a que el álgebra de los clópenes de K verifique la propiedad de interpolación de Seever (Seever(1.968)); a saber, dadas dos sucesiones de clópenes (A_n) y (B_n) tales que,

1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$

2) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$

3) $A_i \subseteq B_j \quad \forall i,j\geq 1$

entonces existe un clopen C tal que

$$A_i \subset C \subset B_j, \quad i,j\geq 1$$

Cuando el compacto K satisface la condición de cadena numerable (ccc) o, equivalente, el álgebra de los clópenes es (ccc), entonces ser F-espacio es equivalente a ser extremadamente disconvexo (la clausura de cada conjunto abierto es abierta) lo cual es, a su vez, equivalente a que el álgebra de los clópenes sea completa (Rosenthal (1970)).

Antes de pasar a demostrar el resultado enunciado vamos a dar un lema que puede deducirse del teorema 14.25 de Gillmam-Jerison (1976).

LEMA 4.11

Sea K compacto 0-dimensional, entonces K es F-espacio si y sólo si todo $x\in B_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ tiene los conjuntos de signo separados.

TEOREMA 4.12

Sea K compacto 0-dimensional, entonces la λ-función se alcanza para todo $x\in B_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ si y sólo si K es F-espacio.

Demostración:

Supongamos que la λ-función se alcanza para cada $x\in B_{\mathscr{C}(K)}$. Si $m_x>0$ entonces es evidente que x tiene los conjuntos de signo separados, supongamos entonces que $m_x=0$, y que existe una terna $(e,1/2,y)$ factible para x, esto es, para cada $t\in K$

$$x(t) = \frac{1}{2}\, e(t) + \frac{1}{2}\, [2x(t)-e(t)]$$

Puesto que ha de ser $|2x(t)-e(t)|\le 1$, si $x(t)>0$ debe ser $e(t)=1$ y si $x(t)<0$ debe ser $e(t)=-1$. El clopen $e^{-1}\{1\}$ separa los conjuntos de signos de x. Por lo tanto, K es F-espacio.

#

NOTA 4.13

Teniendo en cuenta que **c** es isomorfo a $\mathscr{C}(\gamma\omega)$ y ℓ_∞ es isomoro a $\mathscr{C}(\beta\omega)$, donde $\gamma\omega$ es la compactificación de Alexandroff de ω y $\beta\omega$ es la compactificación de Stone-Čech, los resultados anteriores nos dicen que tanto **c** como ℓ_∞ tienen la λ-propiedad uniforme pero que en **c** la λ-función no se alcanza mientras que en ℓ_∞ sí.

COROLARIO 4.14

Si $\mathcal{F}$ es un álgebra de Boole, entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de interpolación de Seever, si y sólo si la λ-función se alcanza para todo $x \in B_{\mathcal{C}(st(\mathcal{F},\mathbb{R}))}$.

COROLARIO 4.15

Si $\mathcal{F}$ es un álgebra de Boole σ-atómica, entonces $\mathcal{F}$ es completa si y sólo si la λ-función se alcanza para todo $x \in B_{\mathcal{C}(st(\mathcal{F},\mathbb{R}))}$.

COROLARIO 4.16

Si K es una compactificación 0-dimensional de ω, entonces $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad y la λ-función se alcanza si y sólo si K es la compactificación de Stone-Čech de ω, o equivalentemente, $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ es isomorfo a ℓ_∞.

II.5. LA λ-PROPIEDAD EN LOS ESPACIOS $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$

En este apartado estudiamos qué propiedad topológica intrínseca de K caracteriza los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$ con la λ-propiedad. Este estudio nos permitirá responder negativamente a una pregunta planteada en Aron y Lohman (1987): ¿si un espacio normado X verifica la λ-propiedad, su dual X* debe tener también la λ-propiedad?.

Para K compacto 0-dimensional podemos identificar $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*$ al espacio de las medidas de Radon real valoradas sobre K, ello nos permitirá usar conceptos y resultados clásicos de la teoría de la medida, los cuales pueden encontrarse, por ejemplo, en el tema 19 de Semadeni (1971).

1.- Una medida de Radon μ es "atomless" si $\mu(\{x\})=0$ para todo $x\in K$.

2.- Una medida μ es atómica si existe una sucesión $\{a_i\}_{i\in\omega}$ de ℓ_1 tal que $\mu=\sum a_i\delta_i$, siendo, para cada $i\in\omega$, δ_i medidas de Dirac asociadas a algún $x_i\in K$.

3.- Toda medida μ se descompone de forma única como suma de una medida "atomless" μ' y otra atómica μ''

$$\mu = \mu'+\mu''$$

tal que

$$\|\mu\| = \|\mu'\| + \|\mu''\|$$

4.- Toda medida sobre K es atómica si y sólo si K es disperso.

Después de este breve repaso, pasamos a caracterizar los compactos K tales que $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*$ tiene la λ-propiedad.

TEOREMA 5.1

$\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*$ tiene la λ-propiedad si y sólo si K es disperso.

Demostración

Supongamos que $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*$ tiene la λ-propiedad. Si $\mu\in\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*$ fuera una medida "atomless" con $\|\mu\|=1$ podríamos encontrar una terna (e,λ,μ') factible para μ. Teniendo en cuenta que si $e\in\text{ext}(B_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})^*})$, entonces $e=\varepsilon\delta_x$ para $\varepsilon=+1$ ó -1 y δ_x medida de Dirac, tendremos

$$\mu = \lambda\varepsilon\delta_x + (1-\lambda)\mu'$$

Como δ_x es atómica debe ser $0<\lambda<1$ luego

$$\mu' = \frac{1}{1-\lambda}\,\mu - \frac{\lambda}{1-\lambda}\,\delta_x$$

Esto es una descomposición de μ' en suma de una medida "atomless" y otra atómica, luego

$$\|\mu'\| = \left\|\frac{1}{1-\lambda}\,\mu\right\| + \left\|\frac{\lambda}{1-\lambda}\,\delta_x\right\| = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} > 1$$

Lo cual está en contradicción con que $(\varepsilon\delta_x, \lambda, \mu')$ es factible para μ. Así pues, no existe medida "atomless" sobre K y por ello K es disperso.

Recíprocamente, supongamos que K es disperso. En este caso toda medida es atómica, luego si $\mu \in B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})^*}$ existen dos sucesiones $(a_n)_{n\in\omega}$ de ℓ_1 y $(x_n)_{n\in\omega}$ en K, tales que

$$\mu = \sum_{n\geq 1} a_n \delta_{x_n} \qquad \text{y} \qquad \|\mu\| = \sum |a_n| \leq 1$$

Podemos suponer que $0 < |a_1| < 1$, en cuyo caso

$$\mu = |a_1|\varepsilon\delta_{x_1} + (1-|a_1|)\mu'$$

siendo

$$\varepsilon = \mathrm{sig}(a_1) \qquad \text{y} \qquad \mu' = \frac{1}{1-|a_1|} \sum_{n>1} a_n \delta_{x_n}$$

Ahora bien,

$$\|\mu'\| = \frac{1}{1-|a_1|} \sum_{n>1} |a_n| \leq 1$$

luego la terna $(\varepsilon\delta_x, |a_1|, \mu')$ es factible para μ.

#

COROLARIO 5.2

Existen espacios normados con la λ-propiedad uniforme tal que la λ-función se alcanza y sin embargo, sus duales carecen de la λ-propiedad.

Demostración

Por el corolario 3.14, ℓ_∞ isomorfo a $\mathscr{C}(\beta\omega)$ tiene la λ-propiedad uniforme y la λ-función se alcanza, sin embargo, $\beta\omega$ no es disperso y por el teorema anterior $\mathscr{C}(\beta\omega)^*$ no tiene la λ-propiedad.

#

II.6. ESTUDIO DE LOS PUNTOS DONDE LA λ-FUNCION SE ALCANZA

En este apartado se resuelve, para el caso de los espacios $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, otro de los problemas planteados en Aron-Lohman (1987) que es el de caracterizar los puntos $x \in B_X$ donde la λ-función se alcanza, siendo X un espacio normado satisfaciendo la λ-propiedad. También se estudian distintas propiedades topológicas del conjunto de los puntos en donde la λ-función se alcanza.

TEOREMA 6.1

Sea K un espacio compacto Hausdorff y 0-dimensional; sea $\mathcal{F}$ el álgebra de los clópenes de K, entonces la λ-función se alcanza en $x \in B_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ si y sólo si existe $F \subset \overset{-1}{x}\{0\}$ tal que

$$Kx_+ \cup F \in \mathcal{F}.$$

Demostración

Pongamos $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}) = \mathcal{C}(K)$.

Supongamos en primer lugar que la λ-función se alcanza en $x \in B_{\mathcal{C}(K)}$ y que $m_x > 0$; en tal caso $\overset{-1}{x}\{0\} = \phi$ y $Kx_+ \in \mathcal{F}$. Por otro lado, si $m_x = 0$ existe un punto extremal e de $B_{\mathcal{C}(K)}$, $e = \chi_A - \chi_{A^c}$ con $A \in \mathcal{F}$, y otro punto $y \in B_{\mathcal{C}(K)}$ tal que $x = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}y$. Ahora bien, si $t \in A$ entonces $e(t) = 1$ y como

$$|2x(t) - e(t)| \leq 1$$

debe ser $x(t) \geq 0$. Recíprocamente, si $x(t) > 0$ entonces $e(t) = 1$ y $t \in A$. Por lo tanto,

$$Kx_+ \subset A \subset Kx_+ \cup \overset{-1}{x}\{0\}$$

De aquí se deduce que existe $F\subset x^{-1}\{0\}$ tal que

$$A = Kx_+ \cup F$$

Para probar el resultado recíproco supongamos que para $x\in B_{\mathcal{C}(K)}$ existe $F\subset x^{-1}\{0\}$ tal que $A=Kx_+ \cup F\in\mathcal{F}$.

En este caso definimos: $e=\chi_A-\chi_{A^c}$, $y=2x-e$. Claramente, $e\in ext[B_{\mathcal{C}(K)}]$, $y\in B_{\mathcal{C}(K)}$ y $x=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}y$, por lo que la λ-función se alcanza en x.

#

Para los espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, donde K es una compactificación 0-dimensional de ω, si $K\neq\beta\omega$ existe $M\subset\omega$ tal que $\overline{M}$ no es clopen en K y M es infinito con $\omega\backslash M$ infinito. Por el Corolario I.3.3, podemos considerar a $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ como un subespacio de ℓ_∞ que contiene al espacio de las sucesiones convergentes c. La sucesión $x=(x_n)\in\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ definida por

$$x_n = \begin{cases} +\ \frac{1}{n} \text{ si } n\in M \\ -\ \frac{1}{n} \text{ si } n\in\omega\backslash M \end{cases}$$

es tal que la λ-función no se alcanza ya que Kx_+ no es clopen y $x^{-1}\{0\}=\phi$.

Hemos demostrado así el siguiente

COROLARIO 6.2

Para cada subespacio de ℓ_∞ del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, donde K es una compactificación 0-dimensional de ω y $K\neq\beta\omega$, existe una sucesión nula donde la λ-función no se alcanza.

A continuación, vamos a estudiar algunas propiedades topológicas del conjunto S_λ de los puntos de $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$ donde la λ-función se alcanza en los subespacios del tipo $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ de ℓ_∞, donde K es una compactificación 0-dimensional de ω. El conjunto de los puntos de $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$ donde la λ-función no se alcanza será denotado por N_λ. En primer lugar vemos que S_λ y N_λ no son abiertos ni cerrados:

PROPOSICION 6.3

Sea K una compactificación 0-dimensional de ω,

(a) Si $K\neq\beta\omega$, S_λ y N_λ no son ni abiertos ni cerrados en $B_{\mathscr{C}(K)}$.

(b) S_λ es cerrado si y sólo si $K=\beta\omega$, siendo $N_\lambda=\phi$.

Demostración

Veamos en primer lugar que S_λ no es abierto. Sea $M\subset\omega$ infinito con $\omega\backslash M$ infinto, tal que $\overline{M}$ no es clopen. Sea la sucesión $x_0=(1/n)_{n\in\omega}\in B_{\mathscr{C}(K)}$, en donde, por el Teorema 6.1 la

λ-función se alcanza. Sea $\varepsilon>0$ y sea n_0 tal que $\frac{2}{n_0}<\varepsilon$, definimos la sucesión $y=(y_n)$ de la siguiente manera

Si $n<n_0$ ponemos $y_n=x_n$.

Si $n\geq n_0$ entonces

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n\in M \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n\notin M \end{cases}$$

Claramente $\|x_0-y\|<\varepsilon$. Sin embargo, Ky_+ no es clopen y además $y^{-1}(0)=\phi$, luego por el teorema 6.1, en la sucesión y no se alcanza la λ-función.

Para ver que N_λ no es abierto sea $x=(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión nula donde la λ-función no se alcanza y sea $\varepsilon>0$. Supongamos ahora que $n_0\in\omega$ es tal que $2x_{n_0}<\varepsilon$. Definimos entonces la sucesión $y=(y_n)_{n\in\omega}$ por $y_n=x_n$ para $n<n_0$, y por $y_n=|x_n|$ para $n\geq n_0$.

Puesto que la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}\in B_{\mathscr{C}(K)}$ converge a cero, tendremos que la sucesión $(y_n)_{n\in\omega}\in B_{\mathscr{C}(K)}$ también converge a cero . Además $\|x-y\|<\varepsilon$.

Finalmente, si N_λ es abierto, por el razonamiento anterior, no debe existir una sucesión nula donde la λ-función no se alcance, luego en este caso debe ser $K=\beta\omega$.

#

El razonamiento utilizado en el teorema anterior para demostrar que N_λ no es abierto, demuestra la siguiente,

PROPOSICION 6.4

En un $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$, con K compactificación 0-dimensional de ω, S_λ es denso en $B_{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}$.

PROPOSICION 6.5

Los conjuntos S_λ y $N_\lambda \cup \{0\}$ son equilibrados.

Demostración

Es consecuencia directa del teorema 6.1.

#

III. TEOREMA DE RAMSEY APLICADO A ALGEBRAS DE BOOLE

III.1 TEOREMA DE RAMSEY PARA UN CARDINAL INFINITO CUALQUIERA

En este apartado vamos a generalizar algunos resultados, conocidos en su mayoría para el cardinal ω y que aparecen, por ejemplo, en Diestel (1.984) y Odell(1.980), referidos a las secuencias finitas y numerables de un cardinal $\varkappa$ infinito cualquiera.

DEFINICION 1.1

Llamaremos secuencia a una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ de ordinales tal que $\alpha_k<\alpha_{k+1}$ para todo $k\geq 1$. Mientras no haya lugar a confusión denotaremos las secuencias en la forma (α_n). Para un cardinal $\varkappa$ infinito representamos por $[\varkappa]$ el conjunto de todas las secuencias numerables de ordinales de $\varkappa$ y por $[\varkappa]^{<\omega}$ las secuencias finitas.

Si $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ y $M\in[\varkappa]$ diremos que A es un segmento inicial de M si al ser $A=(\alpha_n)_{n=1}^{m}$ y $M=(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\beta_n=\alpha_n$ para cada $n\in\{1,2,...,m\}$.

Para $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ y $M\in[\varkappa]$ definimos

$$A^{[M]} = \{L\in[\varkappa]:\ A \text{ segmento inicial de } L,\ L\setminus A\in[M]\}$$

Es decir, las secuencias numerables de $\varkappa$ que "empiezan" por A y "continuan" con una subsecuencia de M "posterior" a A

PROPOSICION 1.2

La familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos de $[\varkappa]$ de la forma $A^{[M]}$ con $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ y $M\in[\varkappa]$ es base para una topología τ sobre $[\varkappa]$.

Demostración:

Según se sabe (Kelley (1.962), pag. 60) hemos de probar las dos siguientes condiciones:

(a) $\bigcup\mathcal{B}=[\varkappa]$, la cual es evidente en este caso.

(b) Para cada $U,V\in\mathcal{B}$ y $x\in U\cap V$, existe $W\in\mathcal{B}$ tal que $x\in W\subseteq U\cap V$.

Para probar esto último sean $A^{[M]}$, $B^{[L]}$ y $(\alpha_m)\in A^{[M]}\cap B^{[L]}$. Está claro que o bien $A\subseteq B$ ó $B\subseteq A$, supongamos en lo que sigue lo primero. Sea $n_0\in\omega$ tal que $(\alpha_n)_{n\leq n_0}=B$, entonces, si llamamos $N=(\alpha_n)_{n>n_0}$ se verifica que $N\subset M$ y $N\subset L$ por lo que

$$[N]\subset[M] \qquad y \qquad [N]\subset[L]$$

y de aquí: $(\alpha_n)\in B^{[N]}\subset A^{[M]}\cap B^{[L]}$.

#

PROPOSICION 1.3

La topología τ es T_2.

Demostración:

En efecto, sean $s_1=(\alpha_n)$ y $s_2=(\beta_n)$ dos secuencias distintas en $[\varkappa]$. En tal caso, sea $n_0\in\omega$ tal que es el primer natural que cumple,

$$\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}.$$

Definamos, $A_1=(\alpha_n)_{n\leq n_0}$, $A_2=(\beta_n)_{n\leq n_0}$, $M_1=(\alpha_n)_{n>n_0}$ y $M_2=(\beta_n)_{n>n_0}$. Entonces, por ser A_1 distinto de A_2,

$$s_1\in A_1^{[M_1]}, \quad s_2\in A_2^{[M_2]} \quad \text{y} \quad A_1^{[M_1]}\cap A_2^{[M_2]}=\phi$$

#

PROPOSICION 1.4

La topología τ es 0-dimensional.

Demostración:

Bastaría con ver que su topología tiene una base formada por clópenes. En nuestro caso bastará con demostrar que para cualquier $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ y $M\in[\varkappa]$ es $A^{[M]}$ cerrado. Para ello, sea $A=(\beta_n)_{n\le n_0}$.

En efecto, dado $(\alpha_n)\notin A^{[M]}$ pueden ocurrir dos casos:

(a) $\alpha_n\ne\beta_n$ para algún $n\le n_0$, definiendo entonces $B=(\alpha_n)_{n\le n_0}$ y $N=(\alpha_n)_{n>n_0}$ se tiene

$$(\alpha_n)\in B^{[N]}\subset[\varkappa]\setminus A^{[M]}$$

(b) $\alpha_n=\beta_n$ para todo $n\le n_0$ y existe $\alpha_m\notin M$. En este caso ponemos

$$B=(\alpha_n)_{n\le m} \qquad y \qquad M=(\alpha_n)_{n>m}.$$

y se tiene

$$(\alpha_n)\in B^{[M]}\subset[\varkappa]\setminus A^{[M]}$$

#

DEFINICION 1.5

Diremos que un conjunto $\mathcal{A}\subseteq[\varkappa]$ es de Ramsey si para cada $M\in[\varkappa]$ existe $L\in[M]$ tal que se cumple una de las siguientes alternativas:

(a) $$[L]\subset\mathcal{A}$$

(b) $$[L]\subset[\varkappa]\setminus\mathcal{A}$$

Sea $\mathcal{A}\subseteq[\varkappa]$, diremos que $M\in[\varkappa]$ acepta a $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ si $A^{[M]}\subseteq\mathcal{A}$. Se dirá que M rechaza a A si para todo $L\in[M]$, $A^{[L]}\not\subseteq\mathcal{A}$.

Con la misma demostración que la utilizada por Odell (1.980) en lema 1.2., tenemos,

TEOREMA 1.6 (Ramsey)

Sea $\mathscr{A}\subset[\varkappa]$, para cada $M\in[\varkappa]$ existe $L\in[M]$ tal que se verifica una de las siguientes alternativas:

(a) L acepta a cada uno de sus subconjuntos finitos.

(b) L rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos.

PROPOSICION 1.7

Si $\mathscr{A}\subset[\varkappa]$ es τ-abierto entonces es Ramsey.

Demostración:

Sea $M\in[\varkappa]$ y, respecto $\mathscr{A}$, supongamos que se verifica la alternativa (a) del teorema de Ramsey: Existe $L\in[M]$ que acepta a ϕ, luego $[L]\subset\mathscr{A}$.

Supongamos ahora la alternativa (b): Existe $L\in[M]$ que rechaza a ϕ, esto es $[L]\not\subset\mathscr{A}$. Si algún $L_1\in[L]$ verificará que $L_1\in\mathscr{A}$, al ser éste abierto, existen A_1 finito y M_1 infinito tal que $L_1\in A_1^{[M_1]}\subseteq\mathscr{A}$.

En tal caso A_1 es segmento inicial de L_1 y por lo tanto

$$A_1^{[L_1]} \subset A_1^{[M_1]} \subseteq \mathscr{A}$$

Lo cual quiere decir que L_1 acepta a un subconjunto finito suyo A_1, que está en contra de la opción (b) del teorema de Ramsey supuesta.

Así pues, $[L] \subset [\varkappa] \setminus \mathscr{A}$ y $\mathscr{A}$ es de Ramsey.

DEFINICION 1.8

Un conjunto $\mathscr{A} \subseteq [\varkappa]$ se dice completamente Ramsey si para cada $A \in [\varkappa]^{<\omega}$ y $M \in [\varkappa]$ existe $L \in [M]$ tal que se tiene alguna de las siguientes alternativas:

(a) $A^{[L]} \subset \mathscr{A}$

(b) $A^{[L]} \subset [\varkappa] \setminus \mathscr{A}$

Es evidente que si $\mathscr{A}$ es completamente Ramsey es de Ramsey.

También con la demostración del teorema 1.3 de Odell (1.980) resulta la siguiente proposición de la cual puede deducirse directamente la proposición 1.7

PROPOSICION 1.9

Si $\mathcal{A}\subseteq[\varkappa]$ es τ-abierto es completamente Ramsey.

Como en $[\mathbb{N}]$ también en $[\varkappa]$ coinciden los diseminados y los de primera categoria con la topología τ.

PROPOSICION 1.10

Si $\mathcal{D}\subset[\varkappa]$ es de τ-primera categoría entonces es completamente Ramsey, cumpliéndose la alternativa (b) de la definición 1.8.

Demostración:

Si $\mathcal{D}$ es diseminado entonces $\overline{\mathcal{D}}$ es completamente Ramsey; luego, o bien $A^{[L]}\subset\mathcal{D}$ para cada A finito y M infinito con $L\in[M]$, lo cual es imposible por ser $\mathring{\overline{\mathcal{D}}}=\phi$; o bien, $A^{[L]}\subset[\varkappa]\setminus\overline{\mathcal{D}}\subset[\varkappa]\setminus\mathcal{D}$. Esta última posibilidad demuestra que $\mathcal{D}$ es completamente Ramsey por verificarse el caso (b) de la definición.

Sea $\mathcal{D}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n$ con $\mathcal{D}_n$ diseminados. Consideremos $A\in[\varkappa]^{<\omega}$ y $M\in[\varkappa]$. Por ser $\mathcal{D}_1$ completamente Ramsey y cumplirse la alternativa (b).

Para $A_1=A$ y $M\in[\varkappa]$ existe $M_1\in[M]$ con

$$A_1^{[M_1]} \subset [\varkappa]\backslash\mathcal{D}_1$$

Podemos suponer que todo ordinal en M_1 es posterior a todos los de A_1, lo que simbolizamos por $A_1<M_1$.

Pongamos $\alpha_1 = \min M_1$ y $A_2 = A_1\cup\{\alpha_1\}$.

Para A_2 y $M_1\backslash\{\alpha_1\}$ elegimos $M_2\in[M_1\backslash\{\alpha_1\}]$ con

$$A_2^{[M_2]} \subset [\varkappa]\backslash\mathcal{D}_2$$

y

$$A_1^{[M_2]} \subset [\varkappa]\backslash\mathcal{D}_2,$$

e igual que antes suponemos $A_2<M_2$.

Habiendo elegido A_n y M_n, $A_n<M_n$ siendo

$$A_i^{[M_n]}\subset[\varkappa]\backslash\mathcal{D}_n \quad \text{para } i=1,\ldots,n$$

definimos $\alpha_n = \min M_n$, $A_{n+1}=A_n\cup\{\alpha_n\}$ y se elige $M_{n+1}\in[M_n\backslash\{\alpha_n\}]$ para que

$$A_i^{[M_{n+1}]}\subset[\varkappa]\backslash\mathcal{D}_{n+1} \quad i=1,\ldots,n+1$$

Poniendo ahora $L=\bigcup_{n\geq 1} A_n$ resulta:

$$A^{[L]}\subset[\varkappa]\setminus \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_n.$$

#

III.2 APLICACIONES AL ESTUDIO DE ALGEBRAS DE BOOLE

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole y sea $\varkappa$ el cardinal de $\mathcal{F}$. Consideremos un buen orden para $\mathcal{F}$ y representemos a $\mathcal{F}$ como la familia $\{H_\alpha:\alpha\in\varkappa\}$. Dada una secuencia $(\alpha_n)\in[\varkappa]$ la sucesión $(H_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ será una sucesión de elementos distintos del álgebra. Tenemos, en primer lugar, la siguiente

PROPOSICION 2.1

El conjunto $\mathcal{A}=\{(\alpha_n)\in[\varkappa]:\ (H_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ es de disjuntos$\}$ es τ-abierto y τ-cerrado en $[\varkappa]$.

Demostración:

Es evidente que $\mathcal{A}$ es τ-abierto ya que toda subsucesión de una sucesión de disjuntos es igualmente de disjuntos, luego si $M\in\mathcal{A}$ se tendrá que $[M]\subseteq\mathcal{A}$.

Para ver que $\mathscr{A}$ es τ-cerrado, tomemos una sucesión (α_n) de $[\varkappa]\backslash\mathscr{A}$. Por contrucción, $(H_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ no es una sucesión de disjuntos, luego existe un segmento inicial A de la secuencia (α_n) tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ no es de disjuntos. Poniendo $A=(\alpha_1,\ldots\alpha_{n_0})$ y $M=(\alpha_{n_0+1},\ldots)$ resulta

$$A^{[M]}\subset[\varkappa]\backslash\mathscr{A}.$$

#

Veamos a continuación como algunas propiedades de un álgebra de Boole pueden caracterizarse mediante propiedades topológicas en $[\varkappa]$. Para ello definimos:

DEFINICION 2.2

Sea $\mathscr{F}$ un álgebra de Boole de cardinal $\varkappa$, llamamos

$$\mathscr{A}_\sigma=\{(\alpha_n)\in\mathscr{A}:\ (H_{\alpha_n})\text{ tiene supremo}\}.$$

DEFINICION 2.3 (Haydon (1981))

Un álgebra de Boole $\mathscr{F}$ se dice que tiene la propiedad subsecuencialmente completa, abreviadamente (SC), si toda sucesión de disjuntos tiene subsucesión con supremo.

DEFINICION 2.4 (Schachermayer (1978))

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ se dice que tiene la propiedad (E), si toda sucesión de disjuntos tiene una subsucesión tal que toda subsucesión de ésta tiene supremo.

DEFINICION 2.5 (Cf. Schachermayer (1978))

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ se dice UDSC ("up-down semi-complete") si para cada sucesión de disjuntos con supremo se cumple que toda subsucesión de ella tiene igualmente supremo.

TEOREMA 2.6

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (E) si y sólo si el conjunto $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_{\sigma}$ es diseminado.

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (E) y llamemos $\mathcal{A}_{n\sigma}=\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_{\sigma}$. Supongamos que existe una secuencia finita A y otra infinita M tal que

$$A^{[M]} \subset \overline{\mathcal{A}_{n\sigma}} .$$

Donde la clausura se toma respecto a la topología τ. Ahora bien, al no ser posible $A^{[M]}\subset\overline{\mathscr{A}_{n\sigma}}\setminus\mathscr{A}\subset\overline{\mathscr{A}_{n\sigma}}\setminus\subset\mathscr{A}_{n\sigma}$, debe existir $L\in[M]$ tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in A\cup L}$ es de disjuntos. Puesto que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (E) debe existir subsucesión $L_1\in[L]$ tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in L_1}$ tiene supremo y $A^{[L]}\subset\mathscr{A}_\sigma$.

Pero $A^{[L]}\subset A^{[M]}\subset\overline{\mathscr{A}_{n\sigma}}$, luego

$$A^{[L]}\subset\overline{\mathscr{A}_{n\sigma}}\setminus\mathscr{A}_{n\sigma},$$

lo cual es imposible.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{A}_{n\sigma}$ es diseminado y, por tanto, Ramsey cumpliendo la alternativa (b). Sea $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ una sucesión de disjuntos, existirá $L\in[M]$ tal que $[L]\subset[\varkappa]\setminus\mathscr{A}_{n\sigma}$, pero al ser $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ de disjuntos

$$[L]\subset\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_{n\sigma} = \mathscr{A}_\sigma$$

y $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ tiene supremo y toda subsucesión suya también lo tiene.

#

TEOREMA 2.7

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ es (SC) si y sólo $\mathcal{A}_\sigma$ es denso en $\mathcal{A}$.

Demostración.

Sea $M\in\mathcal{A}$ y $A^{[L]}$ cualquier entorno de M. Entonces al ser la sucesión $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ de disjuntos, por nuestra hipótesis sobre $\mathcal{F}$, existe $L_1\in[M]$, que podemos suponer que tiene a A como segmento inicial, ya que éste es finito, tal que $L_1\in\mathcal{A}_\sigma$ y $L_1\in A^{[L]}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}_\sigma$ es denso en $\mathcal{A}$. Si $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ es cualquier sucesión de disjuntos, entonces $M\in\mathcal{A}$ y $[M]$ será entorno abierto de M, por nuestra hipótesis, debe existir $L\in\mathcal{A}_\sigma\cap[M]$, y de aquí que $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ sea una subsucesión de la dada con supremo.

#

TEOREMA 2.8

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ es UDSC si y sólo si $\mathcal{A}_\sigma$ es un conjunto τ-abierto.

Demostración.

Si $L=(\alpha_n)\in\mathscr{A}_\sigma$ y el álgebra $\mathscr{F}$ es UDSC entonces es $(\alpha_n)\in[L]\subseteq\mathscr{A}_\sigma$ y $\mathscr{A}_\sigma$ será abierto. Recíprocamente, si $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de disjuntos con supremo, existirá $(\alpha_n)\in\mathscr{A}_\sigma$ tal que $(A_n)_{n\in\omega}=(H_{\alpha_n})$, puesto que $\mathscr{A}_\sigma$ es abierto deben existir una secuencia finita A y una infinita M tal que $(\alpha_n)\in A^{[M]}\subseteq\mathscr{A}_\sigma$. Y de aquí toda subsucesión de $(A_n)_{n\in\omega}$ tiene supremo.

#

Denotemos por $\mathscr{A}_P$ el conjunto de las secuencias $M\in\mathscr{A}$ tales que $(H_\alpha)_{\alpha\in M\cup A}$ tiene la propiedad P, para cada secuencia finita A, y por $\mathscr{A}_{nP}$ el conjunto de las secuencias sin la citada propiedad.

Diremos que el álgebra $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (SP) si cada sucesión de disjuntos tiene una subsucesión con la propiedad P. Diremos que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (SSP) si cada sucesión de disjuntos tiene una subsucesión tal que ella y toda subsucesión suya tienen la propiedad P. Y, finalmente, diremos que un álgebra de Boole tiene la propiedad (UDSP) si toda sucesión que tiene la propiedad P verifica que cada subsucesión de ella tiene igualmente la propiedad P.

Podemos generalizar los anteriores resultados en el siguiente, TEOREMA 2.9

Dado un álgebra de Boole $\mathscr{F}$ se tiene:

(a) $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (SSP) si y sólo si $\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_{\mathbf{P}}$ es diseminado.

(b) $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (SP) si y sólo si $\mathscr{A}_{\mathbf{P}}$ es denso en $\mathscr{A}$.

(c) $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (UDSP) si y sólo si $\mathscr{A}_{\mathbf{P}}$ es τ-abierto.

Demostración:

(a) Supongamos que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad (SSP) y sea $\mathscr{A}_{n\mathbf{P}}=\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_{\mathbf{P}}$. Supongamos que existe una secuencia finita A y otra infinita M tal que

$$A^{[M]} \subset \overline{\mathscr{A}}_{n\mathbf{P}}$$

Puesto que $\mathscr{A}$ es clopen debe existir $L\in[M]$ tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in A\cup L}$ es de disjuntos, y puesto que el álgebra tiene la propiedad (SSP) debe existir subsucesión $L_1\in[L]$ tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in L_1}$ tiene la propiedad P y tal que

$$A^{[L]}\subset\mathscr{A}_{\mathbf{P}}$$

Además, como $A^{[L]} \subset A^{[M]} \subset \overline{\mathscr{A}}_{nP}$ debe ser

$$A^{[L]} \subset \overline{\mathscr{A}}_{nP} \setminus \mathscr{A}_{nP}$$

Contradicción que demuestra nuestra hipótesis.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{A}_{nP}$ es diseminado y, por tanto, Ramsey. Sea $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ una sucesión de disjuntos, existe $L\in[M]$ tal que $[L]\subset[\varkappa]\setminus\mathscr{A}_{nP}$ pero al ser de disjuntos la citada sucesión será

$$[L]\subset\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_{nP}=\mathscr{A}_P$$

y $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ tiene la propiedad P así como toda subsucesión suya.

(b) Supongamos $\mathscr{F}$ con la propiedad (SP). Para $M\in\mathscr{A}$, sea el entorno $A^{[L]}$ de M. Al ser $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ de disjuntos existe $L_1\in[M]$, que podemos suponer que tiene a A como segmento inicial, ya que éste es finito, tal que $L_1\in\mathscr{A}_P$ y $L_1\in A^{[L]}$. Luego $\mathscr{A}_P$ es denso en $\mathscr{A}$.

Recíprocamente, supongamos $\mathscr{A}_P$ denso en $\mathscr{A}$. Sea $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ cualquier sucesión de disjuntos, entonces $M\in\mathscr{A}$ y dado que [M] es entorno abierto de M, debe existir $L\in\mathscr{A}_P\cap[M]$, luego $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ es una subsucesión de la dada con la propiedad P, esto es, el álgebra $\mathscr{F}$ es (SP).

(c) Es evidente.

#

En el siguiente teorema se va a caracterizar un álgebra de Boole con la propiedad (SP) y, a la vez, con la (SnP), esto es, toda sucesión de disjuntos de dicho álgebra tiene una subsucesión con la propiedad P y otra que no tiene la propiedad P.

TEOREMA 2.10

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ tiene las propiedades (SP) y (SnP) si y sólo si para las familias $\mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_{nP}$ y todo $M\in[\varkappa]$ se verifica la opción (b) del teorema de Ramsey (teorema 1.6).

Demostración:

Supongamos $\mathcal{F}$ con las citadas propiedades. Siendo $M\in[\varkappa]$, si para todo $L\in[M]$ fuera $L\notin\mathcal{A}$ entonces se tendría evidentemente la opción (b) del teorema de Ramsey. Supongamos entonces que existe $L\in[M]$ con $L\in\mathcal{A}$. En tal caso, como para cada $L_1\in[L]$ existe una subsucesión con la propiedad P y otra sin esta propiedad no es posible $A^{[L]}\subset\mathcal{A}_P$ ni tampoco $A^{[L]}\subset\mathcal{A}_{nP}$, para ninguna secuencia finita A de L. Así pues se verifica de nuevo la opción (b) del teorema de Ramsey.

Recíprocamente, si para cada $M\in\mathscr{A}\subset[\aleph]$ existe L tal que se verifica la opción (b) del teorema de Ramsey; esto es, que L rechaza a sus subconjuntos finitos, esto implica que

$$[L]\not\subset\mathscr{A}_P \quad \text{y} \quad [L]\not\subset\mathscr{A}_{nP}$$

Luego existe subsucesión de M que tiene la propiedad P y otra que no la tiene.

#

Vamos a ver a continuación como una medida fuertemente aditiva en $\mathscr{F}$ induce una aplicación contínua sobre $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ y, finalmente, como puede caracterizarse una sucesión de medidas uniformemente fuertemente aditivas mediante las correspondientes aplicaciones inducidas sobre $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$.

Comenzamos dando algunas definiciones y resultados que aparecen en Diestel-Uhl (1.977), pág 7 y siguientes.

DEFINICION 2.11

Sea $\mathscr{F}$ un álgebra de Boole y X un espacio de Banach. Una medida $\mu:\mathscr{F}\to X$ es fuertemente aditiva si para cada sucesión de disjuntos $(A_n)\subset\mathscr{F}$, la serie $\Sigma\mu(A_n)$ converge en norma.

Una sucesión de medidas fuertemente aditivas $\mu_n:\mathcal{F}\to X$, es uniformemente fuertemente aditiva si para cada sucesión de disjuntos $(A_n)\subset\mathcal{F}$ es $\lim\limits_{\varkappa} \|\sum\limits_{m=\varkappa}^{\infty} \mu_n(A_m)\|=0$ uniformemente en $n\in\omega$.

PROPOSICION 2.12

(a) Una medida $\mu:\mathcal{F}\to X$ es fuertemente aditiva si y sólo si para cada sucesión de disjuntos (A_n) de $\mathcal{F}$, es $\lim\limits_{n} \mu(A_n)=0$.

(b) Una sucesión de medidas fuertemente aditivas (μ_n) es uniformemente fuertemente aditiva si y sólo si para cada sucesión de disjuntos $(A_k)_{k\in\omega}$ es $\lim\limits_{k} \mu_n(A_k)=0$ uniformemente en $n\in\omega$.

En la siguiente usamos este resultado para inducir una aplicación continua sobre $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$,

PROPOSICION 2.13

Dada una medida fuertemente aditiva $\mu:\mathcal{F}\to X$ existe una aplicación $\varphi:\mathcal{A}_{\mathcal{F}}\to \mathbf{c_0}(x)$ definida por $\varphi((\alpha_n))=(\mu(H_{\alpha_n}))$ tal que es continua.

Demostración:

Si μ es fuertemente aditiva φ está bien definida, veamos que es continua.

Sea (α_n) una secuencia de $\mathscr{A}$ y sea $y=(y_n)_{n\in\omega}=(\mu(H_{\alpha_n}))_{n\in\omega}\in c_0(X)$. Consideremos $B(y_0,\varepsilon)$ en $c_0(X)$, y veamos como puede determinarse un abierto en $\mathscr{A}$ cuya imagen esté contenida en $B(y_0,\varepsilon)$.

Puesto que $y_n\to 0$ podemos hallar $n_0\in\omega$ tal que para cadap, $q\geq n_0$ se verifique $|y_p-y_q|<\varepsilon$. Sea entonces $A=\{\alpha_n:n\leq n_0\}$ y $M=\{\alpha_n:n>n_0\}$, para cada $\beta\in A^{[M]}$ poniendo $\beta=(\beta_n)$ y $z_n=\mu(H_{\beta_n})$ se tendrá, para cada $n\leq n_0$ $|y_n-z_n|<\varepsilon$. Por lo que, $\varphi(A^{[M]})\subseteq B(y_0,\varepsilon)$ y φ es contínua.

TEOREMA 2.14

Sea (μ_n) una sucesión de medidas fuertemente aditivas sobre $\mathscr{F}$ y valoradas en un espacio de Banach X. (μ_n) es uniformemente fuertemente aditiva si y sólo si las correspondientes aplicaciones $\varphi_n:\mathscr{A}_{\mathscr{F}}\to c_0(X)$ son uniformemente contínuas.

Demostración:

Supongamos (μ_n) uniformemente fuertemente aditiva. Sea $\varepsilon>0$, $(\alpha_n)\in\mathscr{A}$ y para $k\geq 1$, $y_k=(y_n^{(k)})=(\mu_k(H_{\alpha_n}))\in c_0(X)$.

Por la uniformidad del límite $\lim_n \mu_k(H_{\alpha_n})=0$, se puede determinar $n_0\in\omega$ tal que para todo $p,q>n_0$ sea $|y_p^{(k)}-y_q^{(k)}|<\varepsilon$, para todo $k\geq 1$.

Así pues, poniendo $A=\{\alpha_n:n\leq n_0\}$ y $M=\{\alpha_n:n>n_0\}$ si $\beta\in A^{[M]}$ y $\beta=(\beta_n)$, y llamando $z_n^{(k)}=\mu_k(H_{\beta_n})$ resulta que para cada $n\leq n_0$ es $\alpha_n=\beta_n$, y por tanto $|z_n^{(k)}-y_n^{(k)}|=0$ para todo $k\geq 1$. Y, por otra parte, para cada $n>n_0$ se verifica $|z_n^{(k)}-y_n^{(k)}|<\varepsilon$ para todo $k\geq 1$.

Por tanto,

$$\varphi_k(A^{[M]})\subset B(y_k,\varepsilon).$$

Recíprocamente, teniendo en cuenta que la condición (b) de la proposición 2.12 es evidentemente cierta para sucesiones finitas de disjuntos del álgebra y usando la misma notación anterior, se tiene que para cada secuencia $(\alpha_n)\in\mathscr{A}$ y $\varepsilon>0$ existe $A^{[M]}$ tal que

$$\varphi_k(A^{[M]})\subset B(y_k,\varepsilon) \qquad \text{y} \qquad (\alpha_n)\in A^{[M]}$$

Resultará que $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_0}\}$ y, por tanto, para cada $p,q>n_0$ es

$$|\mu_k(H_{\alpha_p})-\mu_k(H_{\alpha_q})| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } k\geq 1$$

Luego (μ_k) es uniformemente fuertemente aditiva.

#

REFERENCIAS

[1] A. AIZPURU (1.986). Algunos teoremas clásicos de la teoría de la medida usando los espacios de Stone de las álgebras de Boole. Tesis. Universidad de Sevilla.

[2] R.M. ARON y R.H. LOHMAN (1.987). A geometric function determined by extreme points of de unit ball of a normed space. Pacific Journal of Math., vol. 27, n. 2. 209-231.

[3] F. BENITEZ (1.985). Sobre algunos teoremas clásicos de la teoría de la medida. Tesis licenciatura. UNED.

[4] N. BOURBAKI (1.981). Espaces vectoriels topologiques. Masson.

[5] R.D. BOURGIN (1.983). Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon - Nikodym Property. Springer.

[6] H. BREZIS (1.983). Análisis Funcional. Alianza Editorial.

[7] F.K. DASHIEL (1.981). Non weakly compact operators from order-Cauchy complete C(S) lattices with application to Baire classes. Trans. Amer. Math. Soc. 266.

[8] J. DIESTEL (1.984). Sequences and Series in Banach Spaces. Springer.

[9] J. DIESTEL y J.J. UHL (1.977). Vector Measures. Amer. Math. Soc.. Providence.

[10] F.J. FRENICHE (1.981). The Vitali-Hahn Saks theorem for Boolean algebras with the subsequetial interpolation property. Proc. Amer. Math. Soc. 92.

[11] L. GILLMAN y M. JERISON (1.976). Rings of Continuous Functions. Springer.

[12] R. HAYDON (1.981). A non reflexive Grothendieck space that does not contains ℓ_∞. Israel Jour. Math. 40. 65-73.

[13] S. KAPLAN (1.985). The Bidual of $\mathscr{C}(K)$. I. North - Holland.

[14] J.L. KELLEY (1.962). Topología General. Eudeba. Buenos Aires.

[15] K. KUNEN (1.980). Set Theory. North-Holland.

[16] H.E. LACEY (1.974). The Isometric Theory of Classical Banach Spaces. I. Springer.

[17] J. LINDESTRAUSS y L. TZAFRIRI. Classical Banach Spaces. I. Springer.

[18] J. van MILL (1.984). An introduction to $\beta\omega$. Set Theoretic Topology. 503-568. North-Holland.

[19] A. MOLTO (1.981). On the Vitali-Hahn-Saks theorem. Proc. Royal Soc. Edimburg 90A. 163-173.

[20] S. NEGREPONTIS (1.984). Banach Spaces and Topology. Set Theoretic Topology. 1045-1142. North-Holland.

[21] E. ODELL (1.980). Aplications of Ramsey Theorems to Banach Spaces Theory. Notes in Banach Sapaces. 379-404. Univ. of Texas Press.

[22] H.P. ROSENTHAL (1.970). On relatively disjoint families of measures, aplications to Banach Space Theory. Studia.

[23] W. SCHACHERMAYER (1.978). On some classical measure theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean

algebras. Linz Univ.

[24] G.L. SEEVER (1.968). Measures on F-spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 133. 267-280.

[25] Z. SEMADENI (1.971). Banach spaces of continuous Functions. P.W.N. Varsovia.

[26] R. SIKORSKI (1.964). Boolean Algebras. Springer.

[27] M. TALAGRAND (1.984). Propreté de Nikodym et propreté de Grothendieck. Studia Math. 68. 165-171.

[28] A. WILANSKY (1.978). Modern Methods in topological vector spaces. Mc Graw-Hill.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el dia de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Francisco Benitez Trujillo

titulada Estudio de los espacios C(K,R) con K compactificación o dimensional de ω

acordó otorgarle la calificación de Apto "cum laude"

Sevilla, 3 de Marzo 1.987

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,