

TESIS

MODELO MICROESTRUCTURAL PARA LA PREDICCIÓN DE FALLO POR FATIGA EN ENTALLAS

por

VICTOR CHAVES REPISO

Ingeniero Industrial por la E.S.I. de Sevilla

presentada en la

**ESCUELA SUPERIOR DE
INGENIEROS INDUSTRIALES**

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Mayo de 2005

TESIS DOCTORAL

**MODELO MICROESTRUCTURAL PARA
LA PREDICCIÓN DE FALLO POR FATIGA
EN ENTALLAS**

Sevilla, a 29 de Mayo de 2005

Fdo.: A. Navarro Robles

Director de Tesis

Fdo.: V. Chaves Repiso

Doctorando

Agradecimientos

Deseo expresar en primer lugar mi agradecimiento a mi familia, y en especial a mis padres, por su constante preocupación por mi formación y por todo lo que es bueno para mí. Además estoy seguro de que se alegran muchísimo por mí.

También al Profesor D. Alfredo Navarro Robles, director de la tesis, que, además de haberme transmitido bastante conocimiento, ha tenido conmigo una paciencia casi infinita. Yo en su lugar no habría tenido la misma, seguro.

Y a todos los compañeros de Universidad y amigos, por su contribución, de las más diversas maneras, a la consecución de este objetivo.

Sevilla, Mayo de 2006

Índice general

Índice general	I
Introducción y objetivo	1
1. El proceso de fatiga en metales	5
1.1. Antecedentes históricos	5
1.2. Fatiga en metales: un proceso de crecimiento de grieta	7
1.3. Caracterización del proceso de fatiga	7
1.4. Mecánica de la fractura elástica-lineal	7
1.5. Mecánica de la fractura microestructural	11
1.5.1. Crecimiento de grietas pequeñas	13
1.6. Mecánica de la fractura elasto-plástica	16
1.7. Fatiga en presencia de entallas	18
1.7.1. Campo de tensiones alrededor de una entalla	18
1.7.2. Sensibilidad a la entalla	19
1.7.3. Grietas no propagantes	22
Bibliografía	29
2. Mecánica de dislocaciones	35
2.1. Conceptos generales sobre dislocaciones	37
2.1.1. Campo tensional generado por una dislocación	38
2.1.2. Fuerza sobre una dislocación debido a tensiones aplicadas	41
2.1.3. Fuerza entre dislocaciones	44
2.2. Equilibrio de dislocaciones en un medio infinito.	46
2.2.1. Equilibrio de un conjunto de dislocaciones de tornillo en un medio infinito sometido a tensión antiplana.	47
2.2.2. Equilibrio de un conjunto de dislocaciones de cuña en un medio infinito sometido a un estado tensional plano.	48
2.3. Equilibrio de dislocaciones cercanas a un contorno.	49
2.4. Equilibrio de dislocaciones de tornillo en un medio semi-infinito sometidas a tensión antiplana. Fuerzas imagen.	50

2.5. Dislocación de cuña en las cercanías de un contorno.	53
2.5.1. Campo de tensiones de una dislocación de cuña en las cercanías de un agujero circular	54
2.5.2. Campo de tensiones de una dislocación de cuña en las cercanías de un medio semi-infinito	57
2.6. Equilibrio de dislocaciones de cuña en un medio semi-infinito sometido a un estado tensional plano.	58
Bibliografía	61
3. El modelo microestructural	63
3.1. Representación de una grieta en un medio infinito mediante dislocaciones. Modelo de Bilby, Cottrell y Swinden.	64
3.2. Modelo de crecimiento de microgrietas	66
3.3. Extensión del modelo microestructural.	70
3.4. Resolución de ecuaciones integrales. Cuadratura de Gauss y polinomios de Jacobi	71
3.5. El método de Erdogan, Gupta y Cook para ecuaciones integrales singulares	72
3.6. Aplicación al problema de una grieta en modo I en un medio infinito	75
3.6.1. Solución numérica obtenida	76
3.7. Utilización del método en varios intervalos	78
3.7.1. Solución numérica obtenida con dos intervalos	83
3.8. Aplicación de la técnica de varios intervalos al modelo microestructural	83
3.8.1. Solución numérica obtenida con tres intervalos	89
3.8.2. Convergencia del método de tres intervalos al de dos intervalos	89
3.9. Aplicación al problema de una grieta en modo I en un medio semi-infinito	90
3.9.1. Soluciones numéricas obtenidas para medio semi-infinito.	92
3.10. Comparación entre las tensiones en la barrera de los casos infinito y semi-infinito.	93
Bibliografía	97
4. Modelo para entallas en Modo I	99
4.1. El modelo para entallas en modo III.	101
4.2. Ecuación aproximada para entallas en modo I	103
4.3. Criterio de activación de deslizamiento plástico para cuerpos entallados cargados en modo I	105
4.4. Aplicación a una entalla circular	107
4.4.1. Obtención de la tensión en la barrera.	107
4.4.2. Comparación con resultados experimentales.	112
4.4.3. Predicciones del modelo para agujeros pequeños	115

4.5. Aplicación a una entalla semicircular	116
4.5.1. Obtención de las tensiones en la barrera.	117
4.5.2. Resultados.	125
Bibliografía	129
5. Modelo para entallas sometidas a carga biaxial	131
5.1. Criterio de activación para carga biaxial	132
5.1.1. Obtención de las constantes del material	133
5.2. Aplicación a una entalla circular	136
5.2.1. Tensiones elásticas alrededor de un agujero circular	137
5.2.2. Obtención de las tensiones en la barrera.	139
5.2.3. Obtención del límite de fatiga.	143
5.3. Comparación con resultados experimentales	144
5.3.1. Resultados: tracción-compresión	145
5.3.2. Resultados: torsión alternativa	148
5.3.3. Dirección de grieta	150
Bibliografía	153
6. Conclusiones y trabajo futuro	155
Apéndices	162
A. Ecuación del método de Erdogan, Gupta y Cook	165
A.1. Expansión de una función racional en fracciones simples.	167
Bibliografía	171
B. Obtención del núcleo para un problema simétrico	173
C. Medio semi-infinito sometido a carga biaxial: obtención de las tensiones en la barrera	175
C.1. Tensiones debidas a la carga externa	175
C.2. Tensiones debidas a las dislocaciones	175
C.3. Ecuaciones de equilibrio	177
C.4. Sistema de ecuaciones final	178

Introducción y objetivo

El fallo por fatiga en componentes industriales tiene lugar principalmente en discontinuidades geométricas tales como agujeros, cambios de sección, ranuras, porosidades, etc., denominadas de forma general entallas o concentraciones de tensiones. La presencia de estas discontinuidades, cuyo origen puede estar en el propio diseño o en el proceso de fabricación, es en la mayoría de las ocasiones inevitable. Los métodos para predicción de fallo por fatiga debe tener en cuenta el efecto de las mismas. Las primeras técnicas para estudiar la rotura por fatiga eran de tipo fenomenológico. Empleaban correlaciones entre el valor de la tensión o la deformación en la zona de rotura y el número de ciclos que el componente podía resistir, pero no estudiaban directamente la grieta cuyo crecimiento es el responsable del fallo. Son lo que hoy se conoce como métodos clásicos de predicción de fatiga en entallas y han sido ampliamente utilizados en la práctica. Estos métodos consideran el material como un medio homogéneo y continuo, no teniendo en cuenta la microestructura del material.

Desde hace unos veinte años se han venido desarrollando teorías de crecimiento de las denominadas grietas pequeñas, que de alguna manera tratan de extender la mecánica de fractura hasta ese régimen en que las grietas son del tamaño de la propia microestructura del material. En estas teorías se considera que el material es un medio heterogéneo y se incorpora la interacción entre la grieta y las sucesivas barreras del material, como pueden ser los bordes de grano, que limitan el deslizamiento plástico en el sólido. Estos modelos dan una idea bastante realista del proceso de propagación de grietas bajo una carga cíclica y conforman lo que se denomina Mecánica de la Fractura Microestructural. El modelado de la grieta se realiza utilizando la teoría de dislocaciones. En los últimos años y dentro de la Mecánica de Fractura Microestructural se han desarrollado modelos analíticos para estudiar el proceso de crecimiento de grietas en entallas. Estos modelos recogen tanto la influencia de la microestructura como la del gradiente de tensiones originado por la entalla, proporcionando un estudio completo de la evolución de la grieta, desde sus comienzos hasta la rotura final del componente. La dificultad matemática de estos modelos no ha permitido hasta ahora su desarrollo más allá de geometrías sencillas y de cargas de tipo antiplano (Modo III).

El trabajo presente se desarrolla en este ámbito. El objetivo del mismo es desarrollar estas técnicas microestructurales para el tipo de cargas más habitual, que es la carga normal y que da lugar a una rotura en Modo I. Las ecuaciones que se obtienen son prácticamente imposibles de resolver analíticamente y por ello en este trabajo se ha desarrollado una forma de resolución del problema de tipo numérico. Estas técnicas permiten, en definitiva, predecir el límite de fatiga en un componente entallado sometido a carga de tracción. El trabajo finaliza con una primera propuesta de extensión de estos modelos al caso de carga biaxial. Ello permite el estudio de un mayor tipo de cargas, más cercanas a la realidad, y además el análisis de otro tipo de parámetros en el proceso de evolución de la grieta que no se han analizado en los modelos para cargas monoaxiales, como son el punto en el que se inicia la grieta o la dirección en la que se propaga.

La tesis está estructurada en seis capítulos:

En el Capítulo I se realiza un breve análisis histórico del estudio de la fatiga en metales. Se hace un mayor hincapié en la Mecánica de la Fractura y en las principales técnicas empleadas para la predicción del límite de fatiga en cuerpos con entallas, empezando por las más clásicas hasta llegar a las desarrolladas más recientemente.

El Capítulo II está dedicado a la mecánica de dislocaciones. Se muestran los campos de tensiones y deformaciones producidos por la presencia de los distintos tipos de dislocaciones. También se estudia las fuerzas que ejercen unas dislocaciones sobre otras. El capítulo termina con el estudio del equilibrio de un conjunto de dislocaciones en un sólido sometido a una carga externa sencilla. Matemáticamente este equilibrio da lugar a una ecuación integral singular.

En el Capítulo III se muestra el modelo microestructural desarrollado por Navarro y de los Ríos y que representa la base teórica y física de esta tesis. Se estudia en primer lugar, para un medio infinito, la representación de una grieta y su zona plástica asociada mediante un conjunto de dislocaciones. A partir de ella se propone un modelo de crecimiento de grieta basado en su capacidad para superar las diferentes barreras microestructurales, i.e. el borde de grano. El análisis mediante este modelo de un cuerpo entallado sometido a carga axial lleva a la obtención de una ecuación integral singular cuya resolución analítica es, hasta ahora, y según el conocimiento del autor, prácticamente imposible. Ello obliga a la utilización de métodos numéricos para su resolución. Se presenta el método numérico de Erdogan, Gupta y Cook para ecuaciones integrales singulares. Se estudia su aplicación a los casos sencillos de una grieta en un medio infinito y semi-infinito, obteniéndose la función de distribución de dislocaciones y la tensión necesaria en la barrera microestructural para mantener el equilibrio del conjunto.

En el capítulo IV se estudia la aplicación del modelo microestructural al pro-

blema de un sólido con una entalla. Se comienza mostrando un caso con solución analítica conocida, el de una entalla sometida a carga antiplana. A continuación se muestra la aplicación del método numérico al problema de un sólido entallado sometido a carga axial. Se obtiene una relación numérica entre la tensión externa aplicada y la tensión en la barrera que mantiene el equilibrio en el dominio. La utilización del criterio de activación de deslizamiento plástico permite predecir la tensión necesaria para que la grieta supere la barrera. A partir de estos resultados se realiza la predicción del límite de fatiga del sólido entallado.

En el Capítulo V se muestra un primer paso de la aplicación de las técnicas microestructurales al caso de sólidos entallados sometidos a carga biaxial. El criterio de activación de deslizamiento plástico se escribe en función de una combinación de las tensiones tangenciales y normales en la barrera. Se predice el punto de la entalla desde el que se produce la iniciación de la grieta. También se predice la dirección de la grieta en sus primeros granos.

El capítulo VI y último está dedicado a las conclusiones del trabajo y a recoger los posibles trabajos futuros que se derivan de esta tesis.

Capítulo 1

El proceso de fatiga en metales

El fallo en un componente mecánico puede deberse a una compleja relación entre carga aplicada, tiempo y condiciones ambientales. Las cargas pueden ser constantes o variables. También pueden ser monoaxiales o multiaxiales. Su tiempo de aplicación puede variar de milisegundos para un arma de fuego a siglos como es el caso de los puentes de hierro. La temperatura puede ser criogénica como en los cohetes o superar los 1000° C en turbinas de gas. El ambiente puede ser inocuo e incluso prácticamente vacío o puede estar compuesto por gases corrosivos o sal marina. La interacción entre carga, tiempo y medio-ambiente con el material elegido, geometría y proceso de fabricación proporcionan un amplio rango de posibles causas de fallo en todos los campos de la ingeniería.

Diversos artículos y libros estiman que al menos la mitad de los fallos mecánicos son debidos a un proceso de fatiga [1]. La mayoría de estos fallos se produce de manera inesperada, llegando a provocar situaciones de gran riesgo. Afectan a muy diversos elementos, como raquetas de tenis, huesos o la estructura de un barco. El fallo por fatiga es consecuencia de la aparición de pequeñas grietas en el material y de su posterior crecimiento a través del mismo reduciendo su capacidad portante hasta provocar la rotura. La comprensión de los mecanismos que conducen al fallo por fatiga es de vital importancia para un correcto diseño de los diversos elementos ingenieriles. El análisis del crecimiento de la grieta por fatiga en su primer periodo es el objeto principal de esta tesis.

1.1. Antecedentes históricos

Los primeros fallos importantes debido a tensiones cíclicas se produjeron en la industria ferroviaria alrededor de 1840. El término *fatiga* fue introducido entre

1840 – 1850 para describir fallos producidos por cargas repetitivas. En Alemania, entre 1850–1870 August Wöhler [2] realizó ensayos de fatiga en laboratorio relacionados con fallos en ejes de ferrocarriles. Se considera el primer estudio sistemático sobre fatiga. Wöhler introdujo el concepto de curva S-N y de límite de fatiga. Su trabajo fue ampliado en la parte final del siglo por otros autores como Gerber [3] que estudió la influencia de la tensión media o Bauschinger [4] que mostró como el límite elástico se modificaba tras aplicar cargas de signo opuesto, introduciendo el concepto de endurecimiento y ablandamiento en metales.

A principios del siglo XX, Ewing y Humfrey [5] emplearon el microscopio óptico para estudiar la naturaleza del proceso de fatiga. Observaron bandas de deslizamiento y la formación de grietas y su evolución con el número de ciclos. En 1920 Griffith [6] publicó sus resultados sobre fractura frágil en vidrios. Encontró que su resistencia dependía del tamaño de las grietas existentes en el sólido estableciendo las bases de la *Mecánica de fractura*. En 1937 Neuber [7] estudió el efecto del gradiente de tensiones en entallas e introdujo el concepto de volumen elemental, en el que considera que la tensión media en un pequeño volumen en el borde de la entalla es más importante que el valor máximo de tensión en la entalla. En el año 1945 Miner [8] formuló el criterio lineal de acumulación de daño por fatiga basado en los trabajos de Palmgren [9]. Actualmente se conoce como la regla de Palmgren-Miner. En estos años investigadores como Weibull [10] introdujeron parámetros estadísticos que permitieron el estudio probabilístico de la fatiga.

En los años 50 Irwin [11] introdujo el concepto de Factor de Intensidad de Tensiones (K), considerándose la base de la Mecánica de Fractura Elástica Lineal y las posteriores teorías de crecimiento de grieta basadas en el campo de tensiones elástico alrededor de la grieta. En los años 60 varios autores analizaron el comportamiento a bajo número de ciclos. Se estudió la fatiga controlada por deformaciones y Manson [12] y Coffin [13] propusieron una relación entre la amplitud de deformación plástica y la vida a fatiga. Estas ideas junto al desarrollo de la regla de Neuber [14] componen las bases del análisis de fatiga por deformación en la entalla. También en los años 60 Paris [15] mostró que la velocidad de crecimiento de grieta podía ser descrita usando el rango de variación del Factor de Intensidad de Tensiones. En 1970 Elber [16] analizó la importancia del cierre de grieta en el proceso de crecimiento de la misma. Propuso que el factor que controlaba el crecimiento no era el rango del factor de intensidad de tensiones real sino un rango del factor de intensidad de tensiones efectivo. En los años 80 y 90 diversos autores analizaron el problema de la fatiga multiaxial y Brown y Miller [17] propusieron el método del plano crítico. También se estudió el problema de grietas pequeñas, en las que la velocidad de crecimiento era superior a la predicha con la ley de Paris. En los últimos años el desarrollo de la tecnología computacional ha permitido un gran avance en la simulación de cargas reales, el análisis de grandes sólidos con elementos finitos y la creación de nuevos modelos de estimación de vida a fatiga.

1.2. Fatiga en metales: un proceso de crecimiento de grieta

El estudio de la fatiga es esencialmente un análisis del crecimiento ante carga cíclica de las grietas en un material. La rotura por fatiga de un componente o de una máquina implica un mecanismo que lleva a que un pequeño defecto del material se propague hasta una grieta final, provocando el fallo. La formación de las microgrietas iniciales a partir de las que se inicia el proceso de fatiga se produce generalmente en defectos de la superficie del material, tales como marcas superficiales, arañazos, inclusiones, etc. En un caso sencillo de carga cíclica en tracción-compresión la grieta recorre unos cuantos granos en la dirección cercana a la de máxima tensión tangencial, unos 45° respecto a la carga aplicada, constituyendo lo que se denomina la *Etapa I* de la propagación de la grieta [18]. Tras atravesar varios granos la grieta continua propagándose en el plano perpendicular a la carga, constituyendo la *Etapa II* del crecimiento de grieta. En esta segunda etapa la microestructura pierde su preponderancia y el proceso puede ser descrito con mecánica continua. La *Etapa I* junto a la *Etapa II* constituyen el proceso completo de crecimiento de grieta. Es difícil definir cuándo se produce la transición de una etapa a otra y el periodo de vida que ocupa cada una de ellas. Es errónea la creencia de que sólo la *Etapa II* es decisiva en la evolución de una grieta. Para cargas diferentes a las de tracción-compresión es frecuente observar una preponderancia de la Etapa I e incluso que una Etapa II de crecimiento inicial derive en un crecimiento de grieta según la *Etapa I* [19].

1.3. Caracterización del proceso de fatiga

En la actualidad existen tres formas de análisis con las que se cubren prácticamente todos los casos de comportamiento a fatiga. Las diferencias entre ellos estriban en el tamaño de la grieta y en el campo de tensiones-deformaciones en el borde de grieta. Estos tres tipos son:

- Mecánica de la fractura elástica-lineal (MFEL).
- Mecánica de la fractura microestructural (MFM).
- Mecánica de la fractura elasto-plástica (MFEP).

1.4. Mecánica de la fractura elástica-lineal

Las técnicas de la mecánica de la fractura elástica-lineal (MFEL) se basan en relacionar la velocidad del crecimiento de grieta con el campo tensional elástico lineal en el borde de grieta. Ello sólo está justificado en el estudio de crecimiento

de grietas grandes, entendiéndose por grieta grande aquella cuyo tamaño es varias veces mayor que el tamaño microestructural característico del material (e.g. el tamaño de grano) y el tamaño de la zona de deformación plástica delante de la grieta. Se considera que la grieta se propaga en un medio continuo y homogéneo.

La mecánica de fractura ha sido estudiada desde hace largo tiempo. *Irwin* [11] en 1957 publicó soluciones de campo de tensiones en el frente de grieta asociadas con los tres modos principales de aplicación de carga. Estos tres modos son:

- Modo I: las caras de la grieta se separan una respecto a la otra. También denominado *modo de tracción (tensile mode)*.
- Modo II: las caras de la grieta deslizan perpendicularmente al borde la misma. También denominado *modo de deslizamiento tangencial en el plano (sliding or in-plane shear mode)*.
- Modo III: las caras de la grieta deslizan paralelas al borde la misma. También denominado *modo de deslizamiento tangencial fuera del plano (tearing or anti-plane shear mode)*.

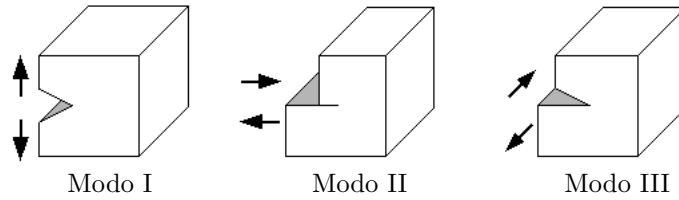


Figura 1.1: Modos básicos de aplicación de carga con sus correspondientes aperturas de grieta.

Considerando por sencillez solamente el *Modo I* y un caso bidimensional, el campo de tensiones alrededor del vértice de una grieta en una placa infinita es el siguiente [20]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde σ es la tensión aplicada y a la semi-longitud de la grieta. Estas tensiones tienen una estructura muy característica, presentando dos términos diferenciados:

un término geométrico caracterizado por (r, θ) y otro término que depende exclusivamente de la tensión aplicada y de la longitud de grieta. El término geométrico es el que le confiere generalidad a la mecánica de la fractura elástica lineal: es universal, en el sentido de que es exactamente el mismo para cualquier grieta y cualquier carga (en Modo I en este caso). Contiene la singularidad característica $1/\sqrt{r}$. El segundo término describe la intensidad o magnitud del campo singular de tensiones en el vértice. Se conoce como Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Su expresión es:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.2)$$

donde Y es un parámetro que depende de la geometría global del cuerpo agrietado y de la carga aplicada. Como ejemplo el valor de Y para la placa infinita en tracción es 1 mientras que para una placa semi-infinita es 1.12. Expresiones similares se obtienen para grietas en *Modo II* y *Modo III*. Los valores del FIT para diversos tipos de carga y geometrías pueden calcularse utilizando la teoría de la elasticidad. Existen en la literatura valores recopilados del FIT para numerosas geometrías y tipos de carga de interés industrial [21–23].

En la mayoría de las situaciones prácticas ingenieriles, la existencia de una pequeña grieta en el material es prácticamente inevitable, aunque ello no tiene que conducir al fallo por fatiga. Es necesario que la grieta alcance un cierto tamaño para que desencadene el fallo. Es de interés, pues, el estudio del crecimiento de grieta desde su pequeño tamaño inicial hasta el tamaño crítico de rotura. Se define la velocidad de crecimiento de grieta como la variación de la longitud de grieta respecto al número de ciclos. Paris, Gómez y Anderson [15] sugirieron por primera vez la relación entre la velocidad de crecimiento de grieta y el rango de variación del FIT en el ciclo de carga:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (1.3)$$

donde $\Delta K = K_{max} - K_{min}$. Esta relación podrá ser aceptable siempre que el campo de tensiones alrededor de la grieta esté correctamente definido mediante el FIT, es decir, en el caso concreto de grietas grandes. En la Figura 1.2 se muestra un ejemplo de la relación entre el incremento de longitud de grieta y ΔK . Se distinguen tres regiones. Una primera región a la izquierda, en las inmediaciones del valor umbral del FIT, denominado ΔK_{th} , por debajo del cual una grieta (grande) tiene un crecimiento prácticamente inapreciable. La región central presenta una relación aproximadamente lineal (en coordenadas Log-Log):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1.4)$$

donde C and m son constantes propias del material y de las condiciones de carga. Existe una tercera región a la derecha en la que la velocidad de crecimiento

aumenta rápidamente, indicando la rotura del componente.

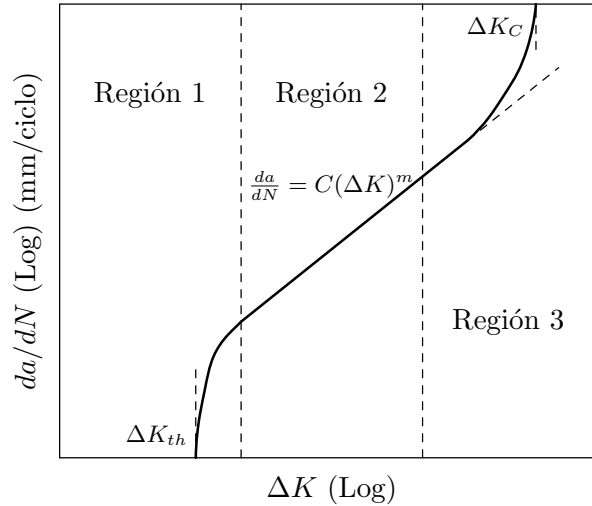


Figura 1.2: Relación entre el incremento de longitud de grieta y ΔK .

El uso de la *MFEL* requiere que la zona plástica en el vértice de la grieta sea pequeña con respecto a la propia grieta y a la dimensión total de la pieza (del orden de 1/10 o menor). En cuyo caso, el campo elástico representado por K puede ser considerado válido. Ya ha sido comentado que el campo de tensiones descrito según el FIT presenta una singularidad infinita en el vértice de la grieta. Sin embargo, en un material real las tensiones están limitadas por un valor a partir del cual se produce fluencia o deformación plástica en el material. Ello provoca que se forme una zona plástica delante de la grieta que relaja y distribuye el campo de tensiones singular. De forma que el campo de tensiones real debe ser capaz de acomodar la deformación plástica producida en el vértice de la grieta y también de cumplir condiciones de equilibrio. Es posible estimar de forma sencilla el tamaño de la zona plástica $2r_p$ delante de la grieta basándose en el Factor de Intensidad de Tensiones K y el límite elástico σ_{ys} . Para ello se puede emplear el campo de tensiones delante de la grieta y el criterio de plastificación de von Mises resultando:

$$2r_p = \frac{1}{\pi} \frac{K^2}{\sigma_{ys}^2} \quad (\text{tensión plana}) \quad (1.5)$$

$$2r_p = \frac{1}{3\pi} \frac{K^2}{\sigma_{ys}^2} \quad (\text{deform. plana}) \quad (1.6)$$

La zona plástica en deformación plana resulta ser menor que en tensión plana debido a la triaxialidad de las tensiones. De modo que la zona plástica en el interior del cuerpo es menor que en la superficie libre. El factor clave en las expresiones anteriores es la dependencia con el término $(K/\sigma_{ys})^2$. Existen otros modelos que permiten estimar el tamaño de zona plástica. Para tensión plana también se puede emplear el modelo de Dugdale [24] que considera la zona plástica como una banda de longitud ρ a ambos lados de la grieta (Figura 1.3). Se parte de una grieta ficticia que se extiende inicialmente hasta una longitud de $2c$. Se supone que en la banda ρ existe una tensión interna de valor igual al límite elástico σ_{ys} que provoca un cierto cierre de grieta. El efecto de esta tensión es justamente eliminar la singularidad de tensiones para la grieta de longitud $2c$. Esta condición permite obtener la relación siguiente entre la longitud de la grieta real $2a$ y la ficticia $2c$:

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{ys}}\right) \quad (1.7)$$

Puede comprobarse que cuando la tensión aplicada σ es pequeña con respecto a σ_{ys} el tamaño de zona plástica viene dado por una relación similar a las obtenidas anteriormente:

$$\rho = \frac{\pi K^2}{8 \sigma_{ys}^2} \quad (1.8)$$

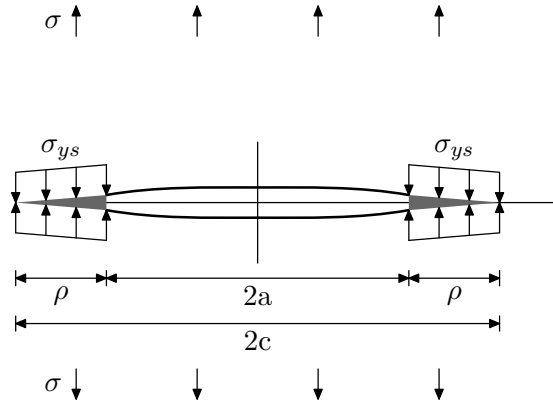


Figura 1.3: Zona plástica según el modelo de Dugdale.

1.5. Mecánica de la fractura microestructural

Como ya ha sido comentado anteriormente el uso de la *MFEL* requiere que la zona afectada plásticamente por la grieta sea pequeña con respecto a la propia

grieta y que la longitud de la grieta sea considerablemente mayor que el tamaño microestructural característico del material. Estas condiciones no se cumplen si las grietas son muy pequeñas, como es típicamente el caso de grietas creciendo en componentes de máquinas tales como rodamientos o engranajes en los que, dada su cuidadosa manufactura, no hay defectos iniciales macroscópicos que actúen como grietas ya iniciadas, como sería el caso de soldaduras defectuosas en estructuras metálicas. En los componentes de máquinas citados las grietas son del tamaño de la microestructura del material. En este caso no puede suponerse que se produzca plasticidad a pequeña escala ni que el material alrededor de la grieta sea continuo y homogéneo. En la Figura 1.4 se muestra una relación Log-Log entre la longitud de grieta y el rango de tensiones mínimo necesario para provocar fallo por fatiga, presentado por primera vez por Kitagawa y Takahashi (1976) [25].

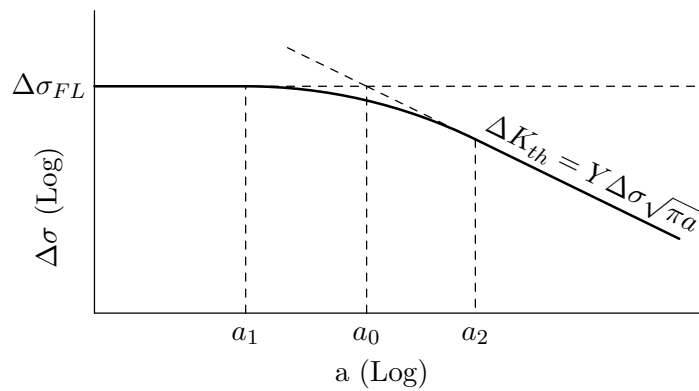


Figura 1.4: Diagrama de Kitagawa-Takahashi.

La recta inclinada de pendiente $-1/2$ en escala logarítmica representa la combinación tensión aplicada-longitud de grieta por debajo de la cual la grieta no debería crecer según la *MFEL*. Sin embargo los resultados experimentales (línea continua del gráfico) se alejan de esta recta para valores pequeños del tamaño de grieta tendiendo hacia la línea horizontal que representa el límite de fatiga del material ($\Delta\sigma_{FL}$). Lo cual pone en evidencia que es posible el crecimiento de grietas pequeñas por debajo del FIT umbral predicho por la *MFEL*. En este diagrama se definen tres longitudes características de grieta: a_1 representa la longitud mínima de grieta capaz de disminuir el límite de fatiga del material. a_2 define el tamaño mínimo de grieta por encima del cual la *MFEL* es aplicable y representa el límite entre grietas pequeñas y grietas grandes. La región comprendida a_1 y a_2 es la zona de transición entre grietas pequeñas y grandes. Se define también una longitud a_0 que se obtiene por la intersección de la recta horizontal del límite de fatiga y la recta inclinada del FIT umbral [26]. Combinando estas ecuaciones se obtiene el valor de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_{FL}} \right)^2 \quad (1.9)$$

De forma aproximada se puede utilizar el valor de a_0 como el límite entre grietas pequeñas y grietas grandes, con la ventaja de que su obtención no requiere la realización de ensayos de grieta pequeña. Taylor y Knott [27] relacionaron las longitudes de grieta características del diagrama con el tamaño de grano D . Consideraron que a_1 debía ser del orden del tamaño de grano D , aunque sin evidencias experimentales. El estudio de varios materiales les llevó a la conclusión de que la longitud a_2 se podría tomar como $10D$, de modo que la longitud a_0 tomaría un valor comprendido entre D y $10D$.

Para valores umbrales del FIT ($\Delta K = \Delta K_{th}$) la correspondiente tensión $\Delta \sigma_{th}$ varía con $1/\sqrt{a}$. Cuando el valor de a se acerca a cero se obtiene un valor de $\Delta \sigma_{th}$ muy por encima del valor obtenido experimentalmente, que es el límite de fatiga del componente no entallado $\Delta \sigma_{FL}$. Para caracterizar correctamente este comportamiento El Haddad, Topper and Smith [28] propusieron el uso de una longitud de grieta intrínseca del material a_0 de modo que:

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi(a + a_0)} \quad (1.10)$$

Haciendo tender a cero la longitud de la grieta a se obtiene el valor de a_0 definido anteriormente (1.9). El Haddad et al. demostraron que las diferencias en la caracterización del crecimiento entre grietas pequeñas y largas desde el punto de vista de la MFEL desaparecía si se empleaba la longitud de grieta ficticia a_0 , aunque no dieron significado físico a la misma. Tanaka et al. [29] desarrollaron un modelo similar y concluyeron que a_0 estaba relacionado con el tamaño de grano del material y con el efecto del cierre de grieta.

1.5.1. Crecimiento de grietas pequeñas

Los estudios experimentales de Pearson (1975) [30] en aleaciones de aluminio mostraron que la velocidad de crecimiento de grietas pequeñas era mucho mayor que las predichas con las leyes de crecimiento de grietas basadas en el FIT. Este aspecto de las grietas pequeñas fue corroborado en posteriores estudios por autores como Lankford [31] también con aleaciones de aluminio, Brown et al. [32] con aleaciones de níquel o Tanaka y Nakai [33] en aceros estructurales de bajo contenido en carbono. Ello implica que si se emplean relaciones da/dN versus ΔK obtenidas para grieta grande en la predicción de vida a fatiga en componentes con grietas pequeñas se obtienen resultados no conservativos.

Las grietas pequeñas están muy influenciadas por la microestructura. Su crecimiento es discontinuo, con aceleraciones y desaceleraciones (Figura 1.5). Esta discontinuidad esta asociada con la interacción entre el borde de grieta y las barreras

microestructurales como bordes de grano o partículas de segunda fase [34]. Cuando una grieta pequeña crece dentro de un grano lo hace a una velocidad muy elevada. Al acercarse al borde de grano su velocidad va decreciendo debido a una incompatibilidad en el deslizamiento con los granos adyacentes. La carga cíclica puede provocar que finalmente la grieta crezca en los granos adyacentes. Una vez superada la barrera la velocidad de crecimiento de la grieta vuelve a aumentar hasta llegar a la siguiente barrera. El proceso se va repitiendo en las sucesivas barreras microestructurales. Cuando la grieta alcanza un cierto tamaño, del orden de 10 veces el tamaño de grano, la influencia de la microestructura deja de ser decisiva y su comportamiento evoluciona al de grieta grande. Se puede volver a aceptar las hipótesis de medio continuo y homogéneo.

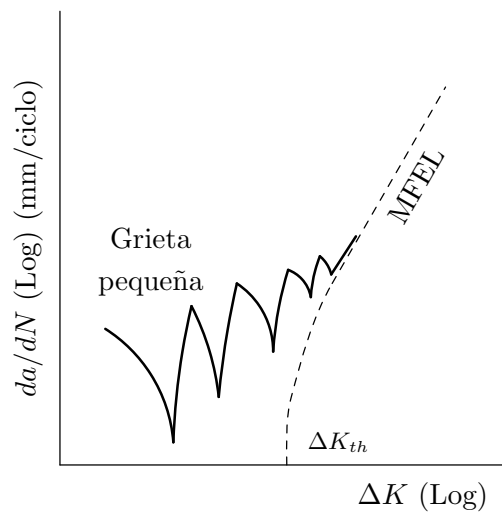


Figura 1.5: Esquema de crecimiento de grietas pequeñas.

Otro aspecto que diferencia las grietas pequeñas de las grandes es la influencia que tiene en su crecimiento el efecto del cierre de grieta. El cierre de grieta se produce como consecuencia del contacto entre las caras de la grieta durante el proceso de descarga en un ciclo. Los primeros estudios de Elber [16] mostraron que una grieta sometida a carga cíclica podía estar cerrada en parte del ciclo aunque todo el ciclo de carga fuera exclusivamente de tracción. El motivo era la existencia de deformaciones residuales de tracción que provocaba que las caras de la grieta se acercaran. Este tipo de cierre de grieta descrito por Elber se conoce como *cierre inducido por plasticidad*. Para tener en cuenta el efecto del cierre de grieta se puede definir un rango de intensidad de tensiones efectivo ΔK_{eff} que sólo considera la parte del ciclo de carga en el que la grieta está abierta, es decir:

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \quad (1.11)$$

siendo K_{max} el valor máximo del factor de intensidad de tensiones en el ciclo y K_{op} el valor a partir del cual desaparece la interferencia entre las caras de la grieta. Esto implica que como consecuencia del cierre de grieta se dispone de un rango del factor de intensidad de tensiones menor, $\Delta K_{eff} \leq \Delta K$, de modo que la velocidad de propagación de la grieta disminuye. Para valores grandes de la relación $R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ ($R_\sigma > 0.5$) el efecto del cierre de grieta es muy limitado, aumentando su influencia para R_σ pequeños ($R_\sigma < 0.5$). Desde las investigaciones de Elber se han analizado diversos mecanismos de cierre de grieta que también afectan a la velocidad de avance de la misma [35]. Uno de ellos es el *cierre inducido por óxidos* [36]. Durante la propagación de la grieta se produce la oxidación de las caras de la grieta debido a la existencia de una atmósfera húmeda favorable a la corrosión. Estas capas de óxido ocupan un volumen mayor que el material original provocando el contacto entre caras. Este tipo de cierre de grieta se produce especialmente en presencia de atmósferas agresivas. En el caso de valores altos de K el cierre de grieta por oxidación tiene poca importancia ya que el avance rápido de grieta prácticamente impide que se produzcan estas capas oxidadas. Otro mecanismo es el denominado *cierre inducido por rugosidad* [37], debido al contacto entre las rugosidades y asperezas de la grieta, que se producen por la existencia de diferentes planos de deslizamiento y diferentes tamaños de grano a lo largo del camino que recorre la grieta. El *cierre inducido por fluido viscoso* [38] se produce por la presencia de lubricantes que penetran en la grieta y provocan el cierre debido a un efecto de cuña hidrodinámica. Aunque la presencia de aceites en la grieta puede minimizar el efecto de cierre por óxidos al inhibir el proceso de oxidación. El *cierre inducido por transformación de fase* [39], caracterizado por cambios de fase metalúrgicos en el borde de la grieta que provocan un incremento de volumen en la región y un cierre prematuro de la grieta. El proceso es análogo al *cierre inducido por plasticidad*. Un ejemplo de este proceso es la transformación martensítica producida en aceros inoxidables austeníticos.

Investigaciones como las de James y Morris [40] han puesto de manifiesto que el efecto de cierre en grietas pequeñas es menor que en grietas grandes. Los autores realizaron ensayos de fatiga de una aleación de titanio y aluminio y midieron la apertura de grieta después de la descarga completa en función de la longitud de grieta. Observaron que para tamaños de grieta entre 50 y 150 μm la apertura de grieta aumentaba con el tamaño de grieta, reflejando un aumento en el nivel del cierre de grieta, atribuible a la rugosidad. A partir de una longitud de grieta de 200 μm el cierre de grieta pasaba a ser constante. En las grietas pequeñas el nivel de rugosidad, asperezas y plasticidad residual es menor que en grietas largas. De modo que para un mismo rango de factor de intensidad de tensiones, el rango efectivo al que está sometido la grieta pequeña será mayor que el de la grieta grande lo que conlleva una mayor velocidad de propagación de grieta. Cálculos

con elementos finitos realizados por Newman [41] han mostrado la evolución del cierre de grieta inducido por plasticidad y cómo su importancia crece cuando la longitud de la grieta aumenta.

Los dos fenómenos explicados, la interferencia de la grieta con la microestructura y el efecto del cierre de grieta, proporcionan una explicación razonable sobre el comportamiento característico y diferenciado del proceso de crecimiento de grieta pequeña.

1.6. Mecánica de la fractura elasto-plástica

Para tener en cuenta la plasticidad en la región cercana al borde de grieta se puede modificar la ecuación del FIT añadiendo a la longitud de grieta el tamaño de zona plástica r_p obteniéndose la siguiente expresión [11]:

$$K_{eff} = \sigma \sqrt{a + r_p} f \left(\frac{a + r_p}{w} \right) \quad (1.12)$$

siendo w el ancho de la probeta. Nótese que el K_{eff} aquí definido para incorporar la plasticidad es diferente al definido para el cierre de grieta. Esta corrección por plasticidad es apropiada para cargas aplicadas pequeñas. Si la carga aumenta y se llega a un corrección por zona plástica de un 20% o más se llega a violar las hipótesis básicas de la *MFEL*. El uso del *FIT* no es apropiado y es necesario emplear la teoría de la plasticidad para describir el campo de tensiones y deformaciones alrededor de la grieta. Su empleo en la mecánica de fractura da lugar a la mecánica de fractura elasto-plástica (MFEP). Esto ocurre típicamente en metales con baja resistencia y gran ductilidad y tiene una gran aplicación en industrias como la nuclear o la petroquímica, y en muy diversos elementos como estructuras, depósitos a presión o tuberías.

Wells (1961) [42] introdujo el concepto del desplazamiento de apertura en el vértice de la grieta (*CTOD*, *Crack tip opening displacement*) para caracterizar la fractura en condiciones de cierta plasticidad. El uso del *CTOD* como criterio de fractura se basa en el hecho de que las caras de la grieta en el vértice de la misma se encuentran a una cierta distancia si se asume que se desarrolla una pequeña deformación plástica en el vértice de la grieta. Existen dos definiciones del *CTOD*: una primera, que sería el desplazamiento de apertura en el vértice de grieta real. Dada la dificultad experimental de medir este parámetro se introduce una segunda definición, más práctica: el desplazamiento en dos puntos obtenidos mediante la intersección con las caras de la grieta de dos rectas que forman 90° entre sí y parten del vértice de la grieta. Si la plastificación es pequeña y utilizando una longitud de grieta efectiva basada en la corrección hecha por Irwin se puede obtener un valor sencillo del *CTOD* basado en el *FIT*:

$$CTOD = \delta = \frac{4}{\pi} \frac{K_1^2}{\sigma_{ys} E} \quad (1.13)$$

La *Integral J*, concepto basado en un balance de energía, fue propuesta por Rice (1968) [43]. Si el principio de conservación de energía se aplica a una grieta en un cuerpo sometido a una carga P (véase Figura 1.6), y suponiendo que las caras de la grieta están libre de tensiones, se tiene que el valor de la integral de línea J a lo largo de cualquier camino Γ que rodee el vértice de la grieta es el siguiente:

$$J = \int_{\Gamma} \left(\omega dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (1.14)$$

donde ω es la densidad de energía de deformación, y es la distancia a lo largo de la dirección normal al plano de la grieta, T es el vector de tensiones, u es el vector desplazamiento, y s es la variable de longitud a lo largo del camino Γ . La relación entre las tensiones y ω es $\sigma_{ij} = \partial\omega/\partial\epsilon_{ij}$. Rice mostró que la integral J equivalía a la variación de energía de deformación por unidad de avance de grieta para un sólido elástico no lineal. Para el caso de que la plastificación se reduzca a una zona muy pequeña, la integral J equivale al parámetro de la teoría elástica G , que indica la tasa de liberación de energía de deformación con el crecimiento de la grieta, lo que proporciona una compatibilidad entre la *integral J* y la *MFEL*.

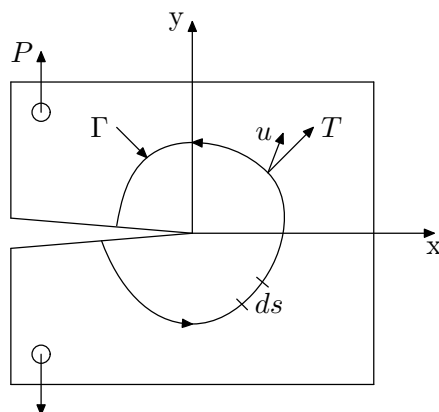


Figura 1.6: Integral J .

Se puede escoger un camino alejado del borde de grieta y que sólo contenga tensiones y deformaciones elásticas, lo que facilita la obtención de la *integral J*. En general se emplea la técnica de elementos finitos para obtener soluciones de la *integral J*, existiendo en la literatura soluciones para un cierto número de geome-

trías y longitudes de grieta [44].

La velocidad de crecimiento de grieta en fatiga con una significativa deformación plástica no puede ser analizada con el parámetro elástico lineal K . Dado que la *integral J* caracteriza el campo de tensiones y deformaciones alrededor del vértice de la grieta para un estado elastoplástico, Dowling y Begley (1976) [45] propusieron una relación entre ΔJ y la velocidad de crecimiento de grieta en fatiga. Diversos estudios posteriores han corroborado la correlación existente entre ΔJ y la velocidad de crecimiento de grieta, aunque existen todavía muchas limitaciones, como podría ser el efecto del cierre de grieta en presencia de considerable plasticidad [46].

1.7. Fatiga en presencia de entallas

La mayoría de los elementos mecánicos y estructurales incorporan cambios de sección, agujeros, ranuras, esquinas, etc., denominados genéricamente entallas. Su presencia provoca cambios sustanciales en el comportamiento del material en cuanto a tensiones, deformaciones, plasticidad local, crecimiento de grietas y finalmente en su vida a fatiga. Desde el inicio de la fatiga el análisis de las entallas es considerado un problema básico y ha ocupado gran cantidad de estudios teóricos y experimentales. A continuación se va a realizar una breve descripción del problema de las entallas en la fatiga, incluyendo algunos modelos desarrollados para la predicción de vida a fatiga en presencia de entallas.

1.7.1. Campo de tensiones alrededor de una entalla

La presencia de una entalla modifica el campo de tensiones en un sólido. Se define el *factor de concentración de tensiones* K_t como la relación entre la máxima tensión en la entalla σ_{max} y una cierta tensión nominal σ_{nom} :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (1.15)$$

El *factor de concentración de tensiones* depende de la geometría del sólido, de la geometría de la entalla y de la carga aplicada. Se obtiene mediante la teoría de la elasticidad, siempre que todo el campo de deformaciones se encuentre en régimen elástico. En la Figura 1.7 se muestra una entalla elíptica de semiejes a , b y radio de curvatura r en el fondo de la entalla situada en un medio infinito sometido a tracción de valor constante en la dirección y .

El valor de K_t para las tensiones σ_{yy} en la dirección x resulta ser [47]:

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}} \quad (1.16)$$

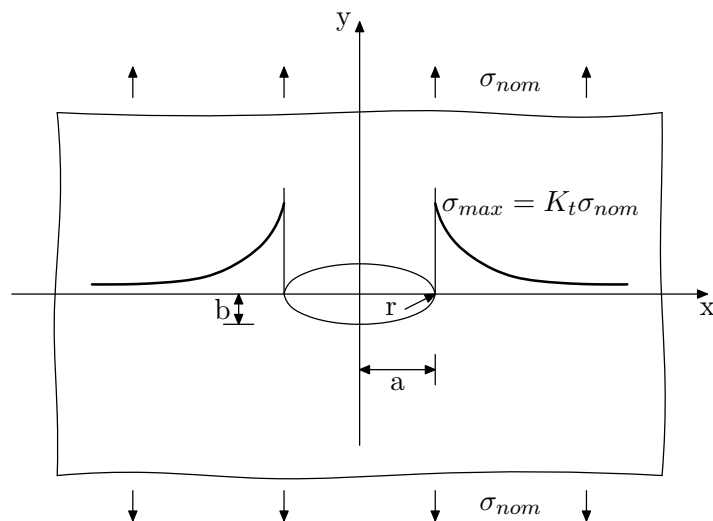


Figura 1.7: Concentración de tensiones alrededor de una elipse.

Para el caso particular de un círculo ($a = b$) se obtiene $K_t = 3$. Si se aumenta la relación a/b se alcanza un valor de $K_t > 3$. Para el caso contrario en que se disminuya la relación a/b el valor disminuye, $K_t < 3$. Es posible extender esta fórmula al caso de otras concentraciones de tensiones aplicando el concepto de “elipse equivalente”, obteniéndose un valor aproximado de K_t :

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{t}{r}} \quad (1.17)$$

siendo t la profundidad de la entalla y r el radio de curvatura en el fondo de la misma. Existen en la literatura numerosas soluciones del K_t obtenidas teórica, numérica o experimentalmente [48]. El uso de los elementos finitos es una forma muy sencilla de obtener el valor de K_t para cualquier geometría.

1.7.2. Sensibilidad a la entalla

La concentración de tensiones en una entalla tiene como efecto la disminución de la resistencia a fatiga del material. La resistencia a la fatiga de un sólido entallado está afectada no sólo por el valor del *factor de concentración de tensiones*, sino también por el gradiente del campo de tensiones, el tipo de material, la geometría del sólido, los niveles de tensión media y alternante, etc. La relación entre el límite de fatiga de un sólido sin entalla y con entalla se denomina *factor de concentración de tensiones efectivo a fatiga*, K_f :

$$K_f = \frac{\Delta\sigma_{FL}}{\Delta\sigma_{FL}^N} = \frac{\text{Límite de fatiga sólido no entallado}}{\text{Límite de fatiga sólido con entalla}} \quad (1.18)$$

La evidencia experimental indica que el valor de K_f siempre es menor K_t . Ello se debe a que el proceso de fatiga no sólo está controlado por la tensión máxima en el borde de la entalla sino también por las tensiones en la región delante de ella. El fallo del material se produce si pequeñas grietas nucleadas en el borde de la entalla alcanzan una longitud suficiente como para partir el sólido. Pero la presencia de la entalla provoca que en las regiones interiores la tensión vaya decreciendo, lo que disminuye la fuerza conductora del crecimiento. El coeficiente de sensibilidad a la entalla q relaciona K_t y K_f :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (1.19)$$

El valor de q oscila entre 0 y 1. Un valor de 0 ($K_f = 1$) indica que la entalla no afecta a la resistencia a fatiga del sólido y un valor de 1 ($K_t = K_f$) indica que la vida a fatiga del sólido está totalmente controlada por K_t . En la Figura 1.8 se muestran curvas promediadas que relacionan q y r para dos tipos de acero y para aluminios recopiladas por Peterson [48]. Son resultados para profundidades de entalla no superiores a cuatro veces el radio de la entalla. La zona sombreada indica una dispersión en los valores experimentales. Para radios pequeños de la entalla el valor de q es muy bajo y para radios grandes su valor se va acercando a 1. Se observa que materiales con menor resistencia como los aluminios presentan una menor sensibilidad a la entalla, es decir, la presencia de entallas tiene menor influencia en la resistencia a fatiga del sólido.

Existen dos trabajos clásicos, realizados por Neuber [7] y Peterson [49], que tratan de explicar y predecir el comportamiento de componentes con entallas sometidos a fatiga. Ambos autores consideraron que la evolución a fatiga de un sólido entallado no dependía de la tensión máxima en el vértice de la entalla sino del valor medio de la tensión en un cierto volumen de material ubicado delante de la entalla. La rotura del material se producía si la tensión en este volumen elemental era superior al límite de fatiga del material. Neuber propuso simplificar el cálculo de esta tensión media en el volumen reduciéndolo a la tensión media a lo largo de una línea de una cierta longitud que partía del vértice. Peterson redujo el cálculo a la tensión en un solo punto a una cierta distancia del vértice. Neuber desarrolló una fórmula aproximada para la obtención del K_f para $R_\sigma = -1$:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{A}{r}}} \quad (1.20)$$

siendo r el radio de la entalla y A la longitud que caracterizaba el volumen elemental del material. El valor de A dependía del material y del tratamiento térmico y mecánico al que hubiera sido sometido. Kuhn and Hardrath (1952) [50]

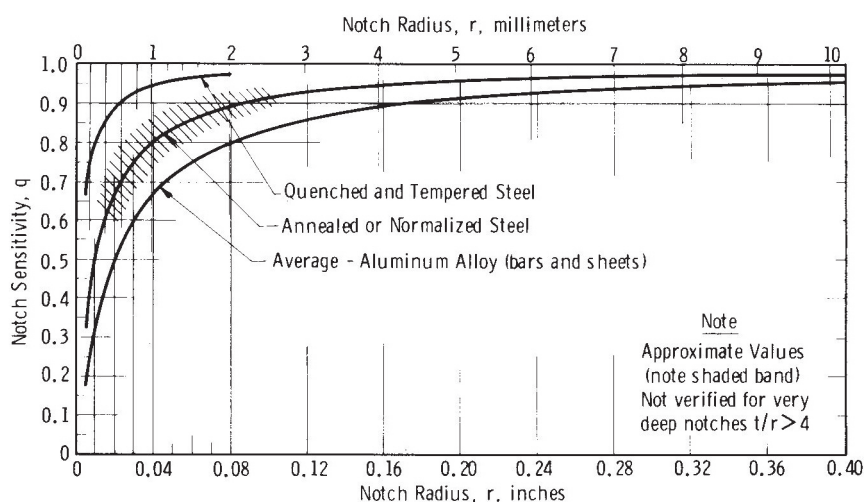


Figura 1.8: Sensibilidad a la entalla q para aceros y aluminios [48].

evaluaron el valor de esta constante para un gran número de aceros llegando a la conclusión de que se podía obtener una estimación razonable de la misma a partir únicamente del límite de rotura del material (Figura 1.9).

Peterson propuso la siguiente relación para obtener K_f :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a}{r}} \quad (1.21)$$

siendo el parámetro a la distancia desde el vértice a la que se evaluaba la tensión. Langer (1960) [51] tras analizar varios aceros propuso una relación entre el valor de a y el límite de rotura del material (Figura 1.10).

Las fórmulas propuestas por Neuber y Peterson han sido utilizadas con éxito en muchas aplicaciones ingenieriles aunque presentan algunas limitaciones. Estas expresiones están basadas en resultados experimentales para aceros y aluminios, de modo que su aplicación a otros tipos de materiales se debería realizar con cierta precaución. Además los resultados fueron obtenidos para K_t inferiores a 4, así que tampoco son aptas para entallas agudas en las que $K_f \ll K_t$. Por último, para cuerpos con concentraciones de tensiones de geometría arbitraria es difícil establecer los valores de algunos parámetros de las ecuaciones como el radio o la profundidad de la entalla.

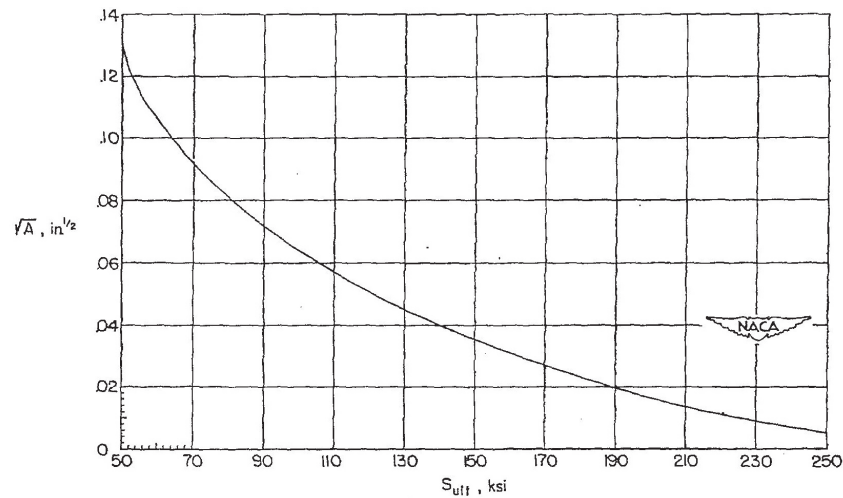


Figura 1.9: Parámetro A en función del límite de rotura del material. Kuhn-Hardrath [50].

1.7.3. Grietas no propagantes

Los primeros estudios experimentales sobre la resistencia a fatiga de cuerpos entallados se basaban casi exclusivamente en el hecho de que la probeta llegara o no a romper. Esto se debía a que la mayoría de los ensayos se hacían con probetas cilíndricas en las que era difícil obtener más información. Fenner et al. (1951) [52] encontraron en sus ensayos sobre aceros suaves que se formaban grietas en el borde de la entalla pero que con carga aplicada relativamente baja no se llegaban a propagar y producir rotura completa. Estas ideas fueron confirmadas por Frost [53] en ensayos similares con aceros suaves y aluminios. Frost y Dugdale (1957) [54] realizaron ensayos con aceros suaves en probetas planas. Con este tipo de probetas era posible observar el comportamiento de cualquier grieta formada en la entalla a lo largo de todo el ensayo de fatiga. Comprobaron definitivamente la formación de grietas en la entalla que alcanzando una cierta longitud dejaban de crecer. De modo que para que se produjera la rotura no bastaba con que se creara una grieta sino que la tensión aplicada debía ser capaz de propagar la grieta en el sólido. Estas grietas que dejan de crecer al alcanzar una cierta longitud se denominan *grietas no propagantes*.

Los resultados experimentales obtenidos por Frost et al. para entallas en V en probetas cilíndricas y planas fueron representados en diagramas *Rango de tensión aplicada- K_t* . En la Figura 1.11 se muestra un ejemplo para un acero suave sometido a flexión rotativa. Las entallas son de profundidad constante (0.2 pulgadas) y

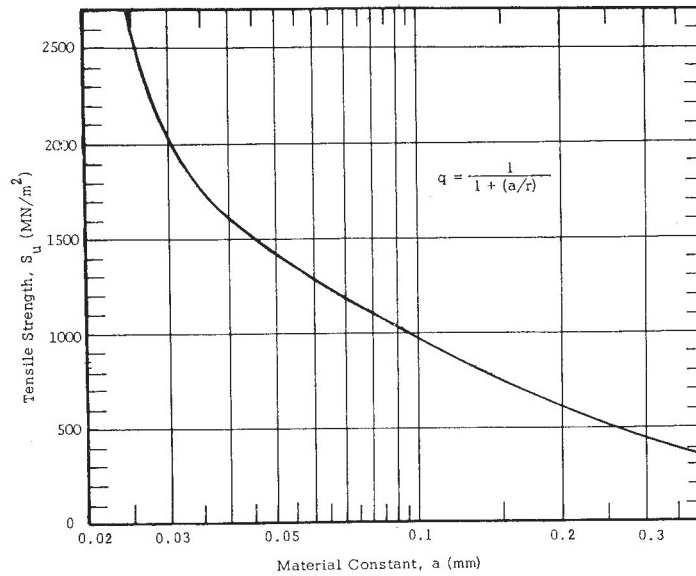


Figura 1.10: Parámetro a en función del límite de rotura del material. Langer [51].

diferentes radios. La relación de tensiones aplicadas, $R_\sigma = -1$.

En el diagrama se muestra una curva decreciente que marca el límite de iniciación de grieta, por debajo de la cual no se aprecian grietas en la entalla. Para K_t bajos el límite de iniciación y propagación de grietas es prácticamente el mismo de modo que una grieta que se inicia acaba provocando rotura. Sin embargo si se aumenta el K_t se pueden obtener grietas que nacen en la entalla pero que no llegan a romper el sólido. Para que estas grietas terminen de crecer es necesario aumentar la tensión aplicada. Un hecho muy interesante contrastado por los experimentos es que el nivel de tensión mínima necesaria para que estas grietas se propaguen es prácticamente constante, independiente de K_t . En la región entre ambas curvas se producen *grietas no-propagantes*. Frost [55] propuso que el rango de tensiones necesario para propagar una grieta estaba gobernado por el parámetro $\sigma^3 l = cte$, con σ el rango de tensiones aplicada y l la longitud de la grieta. Para aceros suaves obtuvo una relación $\sigma^3 l = 5.5$, con σ en ton/in^2 y l en pulgadas. El rango de tensión necesaria para iniciar la grieta se podía aproximar por $\Delta\sigma_{FL}/K_t$. Posteriormente Smith y Miller [56] consideraron dos tipos de entallas: entallas suaves y entallas agudas. El límite entre ambas se encontraba aproximadamente en un valor de $K_t = 4$. El límite de fatiga para entallas suaves era el siguiente:

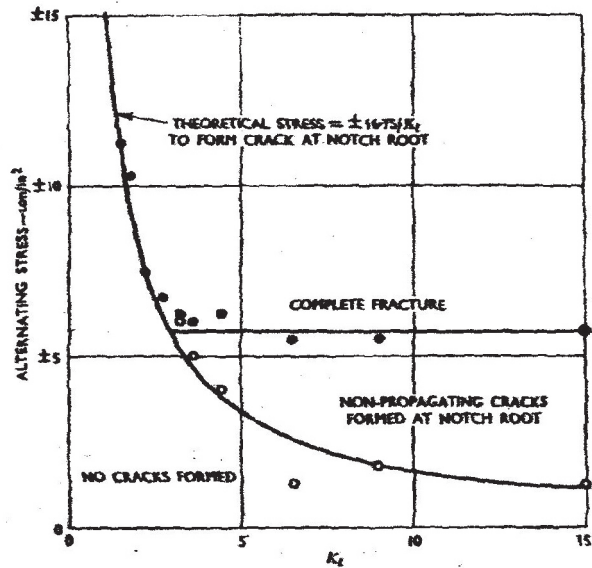


Figura 1.11: Grietas no propagantes en entallas. Frost [53].

$$\text{Entallas suaves:} \quad \Delta\sigma_{FL}^N = \frac{\Delta\sigma_{FL}}{K_t} \quad (1.22)$$

De modo que las entallas suaves quedaban perfectamente caracterizadas con el K_t . Las entallas agudas podían tratarse como una grieta de longitud igual a la profundidad de entalla. Empleando la MFEL se puede obtener el FIT para una grieta de longitud t , resultando $\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi t}$. El rango de tensiones para producir rotura completa es aproximadamente:

$$\text{Entallas agudas:} \quad \Delta\sigma_{FL}^N = \frac{0.5\Delta K_{th}}{\sqrt{t}} \quad (1.23)$$

Para obtener el límite de iniciación de grietas los mismos autores propusieron emplear un factor denominado $K_{fatigue}$ que se ajustaba correctamente a los resultados experimentales [56]. Su valor era:

$$K_{fatigue} = \left[1 + 7.69\sqrt{\frac{t}{r}} \right]^{0.5} \quad (1.24)$$

La tensión necesaria para provocar la iniciación de la grieta resultaba ser:

$$\Delta\sigma_{inic} = \Delta\sigma_{FL}/K_{fatigue} \quad (1.25)$$

La ecuación (1.23) muestra un claro efecto de la profundidad de la entalla en el límite de fatiga del sólido. Para entallas geoméricamente semejantes (igual K_t) el límite de fatiga tiende a aumentar al disminuir la profundidad de la entalla. Este comportamiento se debe a que una menor profundidad de entalla, manteniendo K_t constante, implica un menor radio de curvatura y por tanto una disminución más pronunciada de las tensiones en el interior del material. Ello hace que sea necesario aplicar una carga mayor para conseguir que la grieta se propague a lo largo del sólido. En general, las estructuras y componentes reales son de un tamaño mayor que las probetas o prototipos geoméricamente semejantes que se ensayan en laboratorios. Según lo comentado anteriormente, la rotura por fatiga en los componentes reales se producirá a un nivel de tensiones menor que en las probetas de laboratorio. Además hay también un factor estadístico que diferencia a los cuerpos pequeños y grandes. Un cuerpo grande tiene estadísticamente una mayor probabilidad de tener defectos en su interior, aumentando las posibilidades de que se pueda iniciar una grieta que posteriormente conduzca a la rotura del cuerpo. Ello indica que los resultados de rotura por fatiga con cuerpos geoméricamente semejantes obtenidos en el laboratorio deben ser consideradas con cautela para no realizar predicciones no conservativas.

Pequeñas entallas o defectos pueden llegar a no disminuir la resistencia del sólido sometido a fatiga, aunque tengan un valor de K_t elevado. El tamaño de estos defectos que no afectan a la resistencia depende del material y su tamaño disminuye para materiales de mayor resistencia. El problema de entallas pequeñas fue estudiado por Murakami et al. [57] realizando ensayos en agujeros circulares de diámetros entre 40 y 500 μm . Para aceros suaves encontraron que agujeros de hasta 100 μm no afectaban al límite de fatiga. Este valor disminuía para materiales más resistentes. Lukas et al. [58] propusieron una expresión para el tamaño de entalla máximo que no alteraba la resistencia del material:

$$(K_t^2 - 1)r \leq 4.5l_0 \quad (1.26)$$

El valor de l_0 , denominado tamaño de grieta crítica, depende del material y se puede expresar en función de las propiedades del material ΔK_{th} y $\Delta\sigma_{FL}$ proporcionando la expresión:

$$(K_t^2 - 1)r \leq 0.41(\Delta K_{th}/\Delta\sigma_{FL})^2 \quad (1.27)$$

Atzori et al. [59] ha formulado recientemente un criterio que permite correlacionar el comportamiento de grietas y entallas en el límite de fatiga, resultando en una propuesta de diagrama universal con el que se pueden analizar los resultados de límites de fatiga para diferentes materiales y geometrías. También en estos últimos años Taylor [60] ha propuesto un conjunto de métodos de distancia

crítica para predecir el límite de fatiga en todo tipo de entallas: suaves o agudas y grandes o pequeñas. Estos métodos se basan en las clásicas ideas de Neuber y Peterson pero introduciendo un nuevo procedimiento para obtener la distancia característica del material a partir de la mecánica de fractura elástico-lineal. El rango del factor de intensidad de tensiones para una grieta de longitud $2a$ en un medio infinito sometido a un rango de carga $\Delta\sigma$ normal a la grieta es:

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.28)$$

El límite de fatiga del sólido con la grieta se alcanza cuando $\Delta K = \Delta K_{th}$. El rango de tensiones aplicado necesario para producir rotura es por tanto:

$$\Delta\sigma^N = \frac{\Delta K_{th}}{\sqrt{\pi a}} \quad (1.29)$$

Por otro lado ya se obtuvieron las tensiones elásticas en el borde de una grieta en la dirección normal a la carga. Para un rango de tensiones aplicado $\Delta\sigma^N$ las tensiones son aproximadamente:

$$\Delta\sigma(r) = \Delta\sigma^N \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (1.30)$$

Combinando ambas ecuaciones se puede obtener la distancia r desde borde de la grieta a la que se obtiene una tensión igual al límite de fatiga del material $\Delta\sigma_{FL}$. A esta distancia se le denomina distancia crítica L y su valor es:

$$L = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_{FL}} \right)^2 \quad (1.31)$$

El límite de fatiga en un material entallado se alcanza cuando la tensión a una profundidad L en la entalla supera el valor de $\Delta\sigma_{FL}$. El método descrito es conocido como Point Method (PM). Si en vez de evaluar la tensión en un punto se hace promediando el valor a lo largo de una línea que parte también de la entalla se obtiene el método denominado Line Method (LM). Procediendo de forma análoga se podría calcular la longitud crítica para el Line Method y resulta ser $2L$. Se han realizado numerosas aplicaciones de estos métodos a componentes reales con concentraciones de tensiones y las predicciones de los límites de fatiga obtenidas han sido muy acertadas [61, 62].

Estos métodos de distancia crítica para entallas han sido combinados con el método S-L para fatiga multiaxial [63] de manera que se pueda predecir límites de fatiga en cuerpos con entallas sometidos a fatiga multiaxial [64]. El modelo S-L es un modelo basado en el concepto de plano crítico, que asume que la iniciación de la grieta tiene lugar en el plano en el que se encuentra la máxima amplitud de tensión tangencial. La iniciación y el crecimiento de grieta están determinados por la máxima tensión normal a dicho plano. Este modelo se aplica a cuerpos

sin entallas bajo carga multiaxial. La combinación de ambos métodos ha sido empleada en entallas sometidas a diversas combinaciones de tensión tangencial y normal, obteniéndose resultados cercanos a los experimentales [65].

Bibliografía

1. Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R. and Fuchs, H. O., 2001, *Metal fatigue in engineering*, Wiley-Interscience.
2. Wöhler, A., 1871, *Test to determine the forces acting on railway carriage axles and the capacity of resistance of the axles*, Engineering 11, pp. 199.
3. Gerber, W., 1874, *Bestimmung der zulässigen spannungen in eisen constructionen*, Z. Bayer Arch. Ing. Ver. 6.
4. Bauschinger, J., 1886, *On the change of the position of the elastic limit of iron and steel under cyclic variations of stress*, Mitt. Mech.-Tech. Lab., Munich, Vol. 13, n. 1, pp. 160.
5. Ewing, J. A. and Humfrey, J. C. W., 1903, *The fracture of metals under repeated alternations of stress*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. CC, pp. 241.
6. Griffith, A. A., 1920, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. A221, pp. 163.
7. Neuber, H., 1937, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag; traducido al inglés como *Theory of notches*, Edwards, J. W., Ann Arbor, MI, 1946.
8. Miner, M. A., 1945, *Cumulative damage in fatigue*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 67, pp. A159.
9. Palmgren, A., 1924, *Die Lebensdauer von Kugellagern*, ZDVDI, Vol. 68, n. 14, pp. 339.
10. Weibull, A., 1951, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Appl. Mech., Sept., pp. 293.
11. Irwin, G. R., 1957, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361.
12. Manson, S. S., 1962, *Discussion of Ref. 24*, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 84, n. 4, pp. 537.

13. Tavernelli, J. F. and Coffin, L. F., 1962, *Experimental support for generalized equation predicting low cycle fatigue*, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 84, n. 4, pp. 533.
14. Neuber, H., 1961, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress-strain laws*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 28, pp. 544.
15. Paris, P. C., Gómez, M. P. and Anderson, W. E., 1961, *A rational analytic theory of fatigue*, The Trend in Engineering, Vol. 13, pp. 9-14.
16. Elber, W., 1970, *Fatigue crack closure under cyclic tension*, Eng. Fract. Mech., Vol. 2, pp. 37.
17. Brown, M. W. and Miller K. J., 1973, *A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions*, Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 187, n. 65, pp. 745.
18. Forsyth, P. J. E., 1983, *A unified description of micro and macroscopic fatigue crack behaviour*, Int. J. Fatigue, January 1983, pp. 3-14.
19. Miller, K. J., 1999, *A historical perspective of the important parameters of metal fatigue*, Fatigue99, pp. 15-39.
20. Westergaard, H. M., 1939, *Bearing pressures and cracks*, J. Appl. Mech., 6, pp. 49-53.
21. Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 1985, *The stress analysis of cracks handbook*, 2^a ed., Paris Productions, St. Louis, MO.
22. Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., 1976, *Compendium of stress intensity factor*, Her Majesty's Stationery Office, London.
23. Murakami, Y., 1986, *Stress intensity factor handbook*, Vol. 1, Pergamon Press.
24. Dugdale, D. S., 1960, *Yielding of Steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100.
25. Kitagawa, H. and Takahashi, S., 1976, *Application of fracture mechanics to very small cracks*, Int. Conf. Mech. Behaviour of Materials (ICM2), American Society of Metals, pp. 627-631.
26. El Haddad, M. H., Dowling, N. F., Topper, T. H. and Smith, K. N., 1980, *J integral applications for short fatigue crack at notches*, Int. J. Fract., Vol. 16, n. 1, pp. 15-30.
27. Taylor, D. and Knott, J. F., 1981, *Fatigue crack propagation behaviour of short cracks; the effect of microstructure*, Fat. Eng. Mat. Struct., 4, pp. 147-155.

28. El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N., 1979, *Prediction of non-propagating crack*, Eng. Fract. Mech., Vol. 11, pp. 573-584.
29. Tanaka, K., Nakai, Y. and Yamashita, Y., 1981, *Fatigue growth threshold of small cracks*, Int. J. Fract., Vol. 17, pp. 519-533.
30. Pearson, S., 1975, *Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks*, Engng. Fract. Mech., Vol. 7, pp. 235-247.
31. Lankford, J., 1982, *The growth of small fatigue cracks in 7075-T6 aluminum*, Eng. Fract. Mech., Vol. 7, pp. 235.
32. Brown, C. W., King, J. E. and Hicks, M. A., 1984, *Effects of microstructure on long and short crack in nickel-base superalloys*, Met. Sci., Vol. 18, pp. 374-380.
33. Tanaka, K. and Nakai, Y., 1983, *Propagation and non-propagation of short fatigue cracks at a sharp notch*, Fat. Eng. Mat. Struct., Vol. 6, pp. 315-327.
34. Navarro, A. and De los Ríos, E. R., 1987, *A model for short fatigue crack propagation with an interpretation of the short-long crack transition*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 10, n. 2, pp 169-186.
35. Ritchie, R. O., Suresh, S. and Moss, C. M., 1980, *Near threshold fatigue crack growth in $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo pressure vessel steel in air and hydrogen*, J. Engng. Mater. Tech, Vol. 102, pp. 293.
36. Suresh, S. and Ritchie, R. O., 1983, *Some considerations on the modelling of oxide-induced fatigue crack closure using solutions for a rigid wedge inside a linear elastic crack*, Scripta Metallurgica, Vol. 17, pp. 575-580.
37. McEvily, A. J. and Minakawa, K., 1981, *On crack closure in the near-threshold region*, Scripta Metallurgica, Vol. 15, pp. 633.
38. Tzou, J. -L., Suresh, S. and Ritchie, R. O., 1985, *Fatigue crack propagation in oil environments growth -I. Crack growth behaviour in silicone and paraffin oils*, Acta Metallurgica, Vol. 33, n. 1, pp. 105-116.
39. Pineau, A. G., and Pelloux, R. M. N., 1974, *Influence of strain-induced martensitic transformations on fatigue crack rates in stainless steels*, Metallurgical Trans., Vol. 5A, pp. 1103-1112.
40. James, M. R., and Morris, W. L., 1983, *Effect of fracture surface roughness on growth of short fatigue crack*, Metallurgical Trans., Vol. 14A, pp. 153.
41. Solanki, K., Daniewicz, S. R. and Newman, J. C., 2004, *Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure: an overview*, Eng. Fract. Mech., Vol. 71, pp. 149-171.

42. Wells, A. A., 1961, *Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture*, Proceedings of the crack propagation symposium, Cranfield, England, Vol. 1, pp. 210.
43. Rice, J. R., 1968, *A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, J. Appl. Mech. Trans., ASME, Vol. 35, pp 379.
44. Kumar, V., German, M. D. and Shih, C. F., 1981, *An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis*, EPRI report NP-1931, Electric power research institute, Palo Alto, CA.
45. Dowling, N. E. and Begley, J. A., 1976, *Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-integral*, Mechanics of crack growth, ASTM STP 590, ASTM, West Conshohocken, PA, pp. 82-103.
46. Dowling, N. E. and Iyyer, N. S., 1987, *Fatigue crack growth and closure at high cyclic strains*, Mat. Sci and Eng., Vol. 96, pp. 99-107.
47. Inglis, C. E., 1913, *Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol. 55, pp. 219-241.
48. Peterson, R. E., 1974, *Stress concentration factors*, John Wiley and Sons, New York.
49. Peterson, R. E., 1959, *Notch sensitivity*, En: Metal Fatigue (editado por G. Sines y J. L. Waisman), McGraw-Hill, New York.
50. Kuhn, P. and Hardraht, H. F., 1952, *An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel*, NACA TN2805, Langley Aeronautical Laboratory, Washington.
51. Langer, B. F., 1960, *Application of stress concentration factors*, Bettis Tech. Rev. WAPD-BT-18, 1.
52. Fenner, A. J., Owen, N. B. and Phillips, C. E., 1951, *The fatigue crack as a stress raiser*, Engineering, Vol. 171, n. 1, pp. 637.
53. Frost, N. E., 1957, *Non-propagating cracks in V-notched specimens subjected to fatigue loading*, Aeronaut. Quart., Vol. 8, pp. 1-20.
54. Frost, N. E. and Dugdale, N. S., 1957, *Fatigue tests on notched mild steel plates with measurement of fatigue cracks*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 5, pp. 182-192.
55. Frost, N. E., 1959, *A relation between the critical alternating propagation stress and crack length for mild steel*, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 173, n. 35, pp. 811-827.

56. Smith, R. A. and Miller, K. J., 1978, *Prediction of fatigue regimes in notched components*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp. 201-206.
57. Murakami, Y. and Endo, M., 1983, *Quantitative evaluation of fatigue strength of metals containing various small defects and cracks*, Eng. Fract. Mech., Vol. 17, n. 1, pp. 1-15.
58. Lukas, P., Kunz, L., Weiss, B. and Stickler, R., 1986, *Non-damaging notches in fatigue*, Fat. Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 9, n. 3, pp. 195-204.
59. Atzori, B., Lazzarin, P. and Meneghetti, G., 2003, *Fracture mechanics and notch sensitivity*, Fat. Fract. Engng. Mat. Struct., Vol. 26, pp. 257-267.
60. Taylor, D., 1999, *Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical approach*, Int. J. Fat., Vol. 21, pp. 413-420.
61. Wang, Ge., 1999, *Prediction of fatigue failure in engineering components using the finite element method*, PhD thesis, Trinity College, Dublin.
62. Taylor, D., Bologna, P. and Bel Knami, K., 2000, *Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method*, Int. J. Fat., Vol. 22, pp. 735-742.
63. Susmel, L., and Lazzarin, P., 2002, *A biparametric Wohler curve for high cycle multiaxial fatigue assesment*, Fat. Fract. Engng. Mat. Struct., Vol. 25, pp. 63-78.
64. Susmel, L., and Taylor, D., 2003, *Two methods for predicting the multiaxial fatigue limits of sharp notches*, Fat. Fract. Engng. Mat. Struct., Vol. 26, pp. 821-833.
65. Taylor, D., 2005, *Notch size effect in multiaxial fatigue*, Jornadas sobre "Progettazione a fatica in presenza di multiassialità tensionali", Ferrara, pp. 3-13.

Capítulo 2

Mecánica de dislocaciones

A lo largo de la tesis se van a emplear conjuntos de dislocaciones para describir las grietas y sus zonas plásticas asociadas existentes alrededor de una entalla y en el interior de un sólido sometido a fatiga. Es por ello que en este capítulo se van a describir diversos conceptos relativos a dislocaciones que sirven de base a los desarrollos y planteamientos de los capítulos siguientes.

El capítulo comienza con un repaso de conceptos básicos de dislocaciones. La presencia de una dislocación en un cristal produce una deformación de la red cristalina, que provoca un campo tensional alrededor de la dislocación. En esta parte inicial del capítulo se presenta el campo de tensiones y deformaciones producido por una dislocación y se obtienen las fuerzas que se producen entre dislocaciones. Una descripción completa puede encontrarse en los textos de los autores Weertman y Weertman [1], Hirth y Lothe [2] y Hull y Bacon [3].

La dislocación se puede considerar como una fuente de tensiones internas. Además, el cuerpo puede estar sometido a tensiones externas, resultando que el campo tensional total en el cuerpo es la suma de los campos tensionales externos e internos. En este capítulo se analiza el equilibrio de un cuerpo con un conjunto de dislocaciones y sometido a ciertas tensiones externas. Estos conjuntos de dislocaciones se van a ubicar a lo largo de una línea recta. Se puede considerar un poco simplista el hecho de reducir la zona plástica delante de una grieta a una línea, sobre todo cuando existen en la literatura ejemplos de métodos basados en dislocaciones, como los de Weertman [4] o Blomerus [5], que tienen en cuenta la bidimensionalidad de la zona plástica (en problemas planos). Ciertamente sería difícil de aceptar para una grieta larga en deformación plana. Sin embargo, hay un número importante de situaciones, como las que se plantean en esta tesis, en las que esta simplificación parece apropiada e incluso necesaria. En particular el caso de problemas de fatiga a alto número de ciclos, que involucra el análisis de grietas pequeñas del tamaño de la microestructura del material: el problema clásico del

límite de fatiga. Resultados experimentales han mostrado que en probetas no entalladas sometidas a tensión axial las grietas se forman en bandas de deslizamiento persistentes (PSBs) y crecen a lo largo de ellas. El proceso de crecimiento no es continuo, sino que implica unas etapas de aceleración y otras de desaceleración. La grieta se desacelera cuando se aproxima a una barrera microestructural como el borde de grano hasta que se inicia una nueva banda de deslizamiento en el grano adyacente a lo largo de la cual la grieta sigue propagándose. El proceso se repite en los sucesivos bordes de grano. En esta situación tiene sentido suponer que las dislocaciones permanecen en sus planos originales y se apilan frente a los bordes de grano, dando lugar a bandas de deslizamiento rectilíneas que se van extendiendo en los granos siguientes. El problema objeto de esta tesis es el estudio del límite de fatiga de componentes entallados. Se trata de un problema de crecimiento de grieta pequeña con la dificultad adicional de la presencia de un campo de tensiones con un fuerte gradiente de tensiones a través del cual la grieta va creciendo. La existencia de grietas no-propagantes en entallas agudas pone de manifiesto que el proceso crítico de este crecimiento es el de la superación por parte de la grieta de las sucesivas barreras microestructurales. El tamaño de las grietas no propagantes observadas para aceros suaves es del orden de unos cientos de micras. Por tanto parece razonable aceptar el tipo de representación propuesta para todas aquellas situaciones en las que vida del componente se decide cuando la grieta tiene una longitud de unos cuantos granos.

El estudio del equilibrio de dislocaciones comienza por el caso más sencillo, que corresponde a un medio infinito. Se resuelve tanto para dislocaciones de tornillo sometidas a tensión antiplana como para dislocaciones de cuña sometidas a tensión tangencial y normal. Se continúa con el estudio de un medio semi-infinito, de nuevo tanto para dislocaciones de tornillo sometidas a tensión antiplana como para dislocaciones de cuña sometidas a tensión tangencial y normal. El estado tensional de una dislocación en un medio infinito no cumple las condiciones de contorno de un medio semi-infinito, haciéndose necesaria la modificación de este campo de tensiones básico. Para el caso de dislocaciones de tornillo el problema se resuelve añadiendo lo que se conoce como campo de “dislocaciones imagen”. Para el caso de las dislocaciones de cuña bajo tensión tangencial o normal no basta con el campo imagen, haciéndose necesario el uso de una función de Airy más general. Se ha seguido el desarrollo realizado por Dundurs y Mura [6]. Los autores realizaron un estudio de tensiones de una dislocación en las cercanías de un agujero circular y posteriormente lo extendieron al problema de un medio semi-infinito. En este capítulo sólo se obtienen las ecuaciones de equilibrio para tres situaciones básicas: medio infinito, medio semi-infinito y agujero circular. Sin embargo, como se verá en los próximos capítulos, a partir de estas configuraciones básicas se podrán analizar geometrías más complicadas como entallas semicirculares, elípticas o en V.

2.1. Conceptos generales sobre dislocaciones

Las dislocaciones son una clase importante de defectos en los sólidos cristalinos y su existencia permite explicar el hecho de que los metales se deformen plásticamente con cierta facilidad. Las dislocaciones se pueden obtener de una forma sencilla a partir de una estructura cristalina perfecta, como se muestra en la Figura 2.1. En la parte superior de la Figura se ha representado una estructura cúbica simple en la que los átomos ocupan los vértices de los cubos y la unión entre ellos se representa con las aristas. La dislocación de cuña se consigue insertando un plano extra de átomos en ABCD, mostrada en la parte inferior izquierda de la Figura. Para obtener una dislocación de tornillo, parte inferior derecha, se realiza un corte por el plano ABCD y se desplaza una de las caras obtenidas respecto a la otra en la dirección AB. A la línea DC se le denomina línea de dislocación.

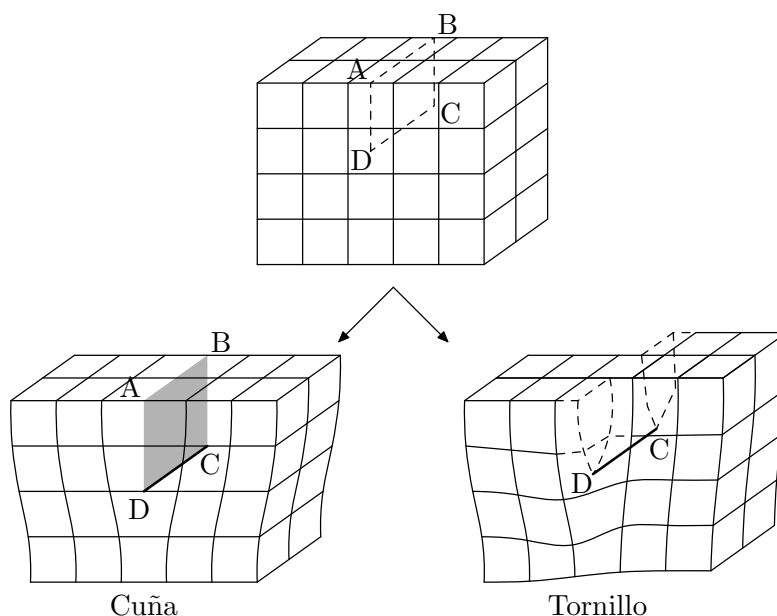


Figura 2.1: Obtención de una dislocación de cuña y tornillo.

Para describir de forma precisa el tipo de dislocación se emplea el circuito de Burgers. En la parte superior de la Figura 2.2 se muestra, para un cristal perfecto, un circuito cerrado que va pasando de átomo a átomo. Si se intenta hacer el mismo circuito alrededor de la línea de dislocación de cuña con los mismos saltos de átomo a átomo, como se muestra en la parte inferior izquierda, se observa que no se consigue un circuito cerrado. Se define el vector de Burgers como el vector que cierra este circuito. En la parte inferior derecha se muestra el circuito de

Burgers alrededor de una dislocación de tornillo y el vector de Burgers asociado. Una dislocación de cuña se caracteriza por tener el vector de Burgers perpendicular a la línea de la dislocación, mientras que la dislocación de tornillo tiene el vector de Burgers paralelo a la línea de la dislocación.

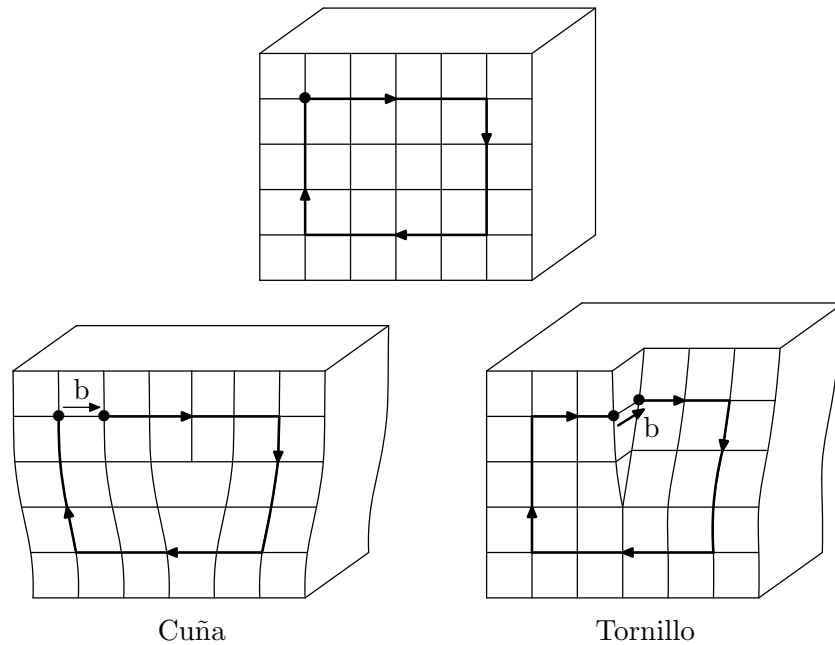


Figura 2.2: Circuito de Burgers en una dislocación de cuña y tornillo.

2.1.1. Campo tensional generado por una dislocación

Se va a obtener en primer lugar el campo de tensiones y deformaciones para una dislocación de tornillo. En la Figura 2.3 se muestra una dislocación de tornillo a lo largo del eje z , obtenida a partir de un cilindro de un sólido perfecto mediante un desplazamiento en la dirección del eje z positivo. El campo de desplazamientos posee una propiedad importante. Si se realiza un circuito de Burgers alrededor de la dislocación, el punto de inicio y el punto de fin del circuito se encuentran a una distancia igual al vector de Burgers. Por tanto el campo de desplazamientos debe ser una función multivaluada. Las funciones multivaluadas más sencillas son las funciones trigonométricas inversas. Además es razonable asumir que el desplazamiento en el eje z aumenta proporcionalmente con el ángulo θ . El campo de desplazamientos generado por una dislocación de tornillo es el siguiente:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = \frac{b\theta}{2\pi} = \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \quad (2.1)$$

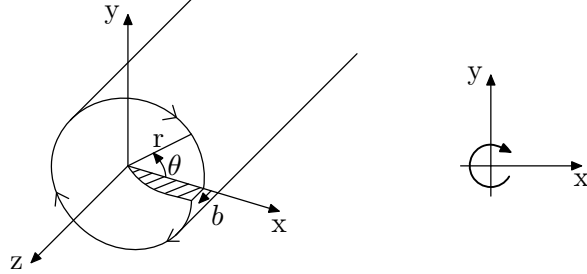


Figura 2.3: Dislocación de tornillo y su representación esquemática.

Mediante las ecuaciones de la elasticidad se pueden calcular las deformaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{-b}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 & \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Y a partir del campo de deformaciones se obtiene fácilmente el campo de tensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 & \sigma_{xz} = \mu \epsilon_{xz} &= -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \sigma_{xy} &= 0 & \sigma_{yz} = \mu \epsilon_{yz} &= \frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \sigma_{yy} &= 0 & \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para obtener una dislocación de cuña a lo largo del eje z se puede partir de un cilindro de un sólido perfecto y realizar un desplazamiento en la dirección del eje x positivo como muestra la Figura 2.4. El campo de desplazamientos no es tan simple como el de la dislocación de tornillo. Este campo ha de cumplir obligatoriamente:

$$w = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Su expresión es la siguiente [1]:

$$u = -\frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{y}{x} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]$$

$$v = -\frac{b}{2\pi} \left[-\frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \text{Log} \frac{x^2 + y^2}{C} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right]$$

$$w = 0 \quad (2.5)$$

donde λ es la constante de Lamé. La constante C se añade para hacer el término logarítmico adimensional. Su valor no tiene trascendencia puesto que las tensiones y deformaciones dependen de las derivadas de los desplazamientos.

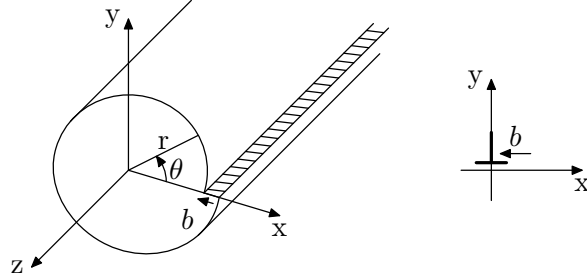


Figura 2.4: Dislocación de cuña y su representación esquemática.

Procediendo de forma semejante al caso de las dislocaciones de tornillo se calculan las deformaciones:

$$\epsilon_{xx} = \frac{-by}{2\pi} \frac{\mu y^2 + (2\lambda + 3\mu)x^2}{(\lambda + 2\mu)(x^2 + y^2)^2} \quad \epsilon_{xz} = 0$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \epsilon_{yz} = 0$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{by}{2\pi} \frac{(2\lambda + 3\mu)x^2 - \mu y^2}{(\lambda + 2\mu)(x^2 + y^2)^2} \quad \epsilon_{zz} = 0 \quad (2.6)$$

Y a partir de ellas el campo de tensiones:

$$\sigma_{xx} = \frac{-\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.7)$$

Este campo de tensiones se puede generalizar para una dislocación orientada en cualquier dirección, es decir, con un vector de Burgers que tiene componentes b_x y b_y [7]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[b_x \frac{-y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + b_y \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \sigma_{xz} &= 0 \\
\sigma_{xy} &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[b_x \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + b_y \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \sigma_{yz} &= 0 \\
\sigma_{yy} &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[b_x \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + b_y \frac{x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

En el caso de tener una dislocación mixta, mezcla de tornillo y cuña, el campo tensional sería la suma de los campos tensionales proporcionados por cada parte por separado con su vector de Burgers correspondiente.

2.1.2. Fuerza sobre una dislocación debido a tensiones aplicadas

Fuerza para mover una dislocación de tornillo

En la Figura 2.5 se ha representado una dislocación de tornillo paralela al eje z con vector de burgers b_z situada en un medio infinito al que se le aplica una tensión externa σ_{yz} .

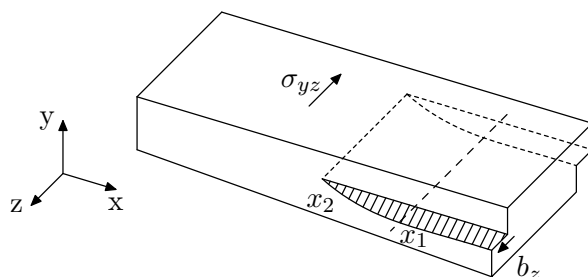


Figura 2.5: Dislocación de tornillo bajo tensión externa σ_{yz} .

Esta tensión tiende a mover la dislocación en su plano de deslizamiento, en la dirección x . A medida que la dislocación avanza en el eje x , se va produciendo un desplazamiento relativo de las dos superficies de valor b . Cuando la dislocación se haya movido de x_1 a x_2 la tensión externa habrá hecho el siguiente trabajo por unidad de longitud de dislocación:

$$W = \sigma_{yz}(x_2 - x_1)b_z \quad (2.9)$$

Este trabajo se podría interpretar como el trabajo realizado por una fuerza virtual F por unidad de longitud de línea de dislocación que moviera la dislocación

a lo largo del eje x de x_1 a x_2 . Igualando ambos trabajos se obtiene:

$$W = \sigma_{yz}(x_2 - x_1)b_z = F_x(x_2 - x_1) \Rightarrow F_x = \sigma_{yz}b_z \quad (2.10)$$

En el caso de que la tensión externa fuera σ_{xz} (Figura 2.6), ésta tendería a mover la dislocación en la dirección y negativa.

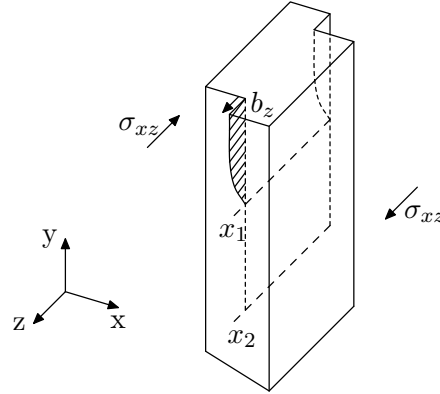


Figura 2.6: Dislocación de tornillo a derechas bajo tensión externa σ_{xz} .

Si se hace un razonamiento análogo al anterior se obtiene la siguiente fuerza (nótese el signo negativo de la fuerza por dirigirse en la dirección y negativa):

$$F_y = -\sigma_{xz}b_z \quad (2.11)$$

Fuerza para mover una dislocación de cuña

Supóngase a continuación una dislocación de cuña paralela al eje z en un medio infinito a la que se aplica una tensión externa σ_{yx} , como muestra la Figura 2.7.

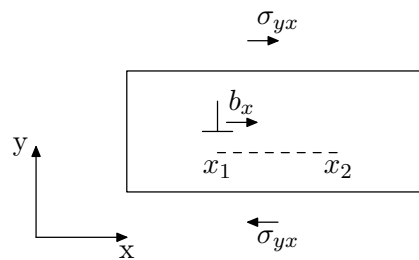


Figura 2.7: Dislocación de cuña bajo tensión externa σ_{yx} .

Haciendo un razonamiento similar al hecho con la dislocación de tornillo, cuando la dislocación se mueva de x_1 a x_2 se obtendrá la siguiente fuerza:

$$F_x = \sigma_{yx} b_x \quad (2.12)$$

Existe una segunda forma de mover una dislocación de cuña y es mediante un proceso de *climbing* o *escalada*, en el que la dislocación se mueve perpendicular a su plano de deslizamiento. Este proceso se produce cuando la tensión aplicada es paralela al vector de Burgers (Figura 2.8).

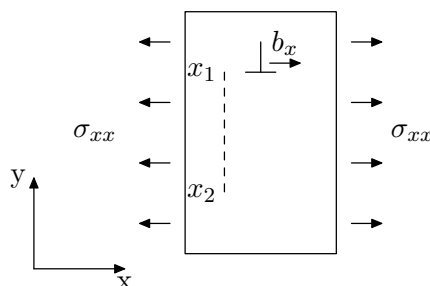


Figura 2.8: Dislocación de cuña bajo tensión externa σ_{xx} .

Para que se produzca el *climbing* es necesario que en la red cristalina existan vacantes. Si se produce un movimiento de vacantes hacia la base del semi-plano extra, éstas empujan a la dislocación y tienden a moverla hacia arriba. De forma inversa, si las vacantes que existían en la base de la dislocación se difunden, la dislocación tiende a moverse hacia abajo. El proceso de *climbing* implica que el semi-plano extra se mueva hacia arriba o hacia abajo. Esto provoca que el cristal aumente o disminuya su grosor en un valor b .

En el ejemplo de la figura, existe una tensión externa de tracción σ_{xx} que provoca un desplazamiento de la dislocación hacia abajo, de x_1 a x_2 . Entre x_1 y x_2 el cristal habrá aumentado su grosor una cantidad b , y por tanto la tensión externa habrá realizado un trabajo. Siguiendo un razonamiento similar al de los casos anteriores, la tensión externa provoca una fuerza virtual vertical de signo negativo que mueve la dislocación en la dirección y negativa. La fuerza es la siguiente:

$$F_y = -\sigma_{xx} b \quad (2.13)$$

Fuerza total

Si se unen las ecuaciones (2.10, 2.11, 2.12 y 2.13) se encuentra que la fuerza total sobre una dislocación con vector de Burgers (b_x, b_z) que se encuentra en el eje z es la siguiente:

$$\mathbf{F} = F_x i + F_y j = (\sigma_{yx} b_x + \sigma_{yz} b_z) i + (-\sigma_{xx} b_x - \sigma_{xz} b_z) j \quad (2.14)$$

siendo i, j los vectores unitarios en las direcciones x, y respectivamente. Esta fuerza está definida para una línea de dislocación paralela al eje z y el plano de deslizamiento perpendicular al eje y . Es posible obtener una expresión general para una línea de dislocación con una dirección cualquiera definida por el vector $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$ y un vector de Burgers $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Designando al tensor de tensiones como σ , la fuerza que se obtiene viene dada por la conocida fórmula de Peach-Koehler [8]:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{t} \times \sigma \mathbf{b} \quad (2.15)$$

2.1.3. Fuerza entre dislocaciones

Para obtener la fuerza que una dislocación ejerce sobre otra dislocación basta con insertar el campo de tensiones que produce la primera dislocación en la ecuación de fuerzas definida para la segunda dislocación. Se trata a la primera dislocación como un campo de tensiones externo. A continuación se ven dos casos concretos para dos dislocaciones de tornillo y dos dislocaciones de cuña.

Fuerzas entre dos dislocaciones de tornillo paralelas

Considérese dos dislocaciones de tornillo paralelas al eje z y con el mismo signo del vector de Burgers (Figura 2.9). Se desea calcular la fuerza que la dislocación situada en el origen de coordenadas ejerce sobre la dislocación situada en la posición (x, y) .

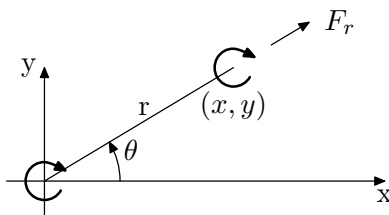


Figura 2.9: Fuerza entre dos dislocaciones de tornillo paralelas.

Para ello se utiliza la ecuación general de la fuerza sobre una dislocación (2.15) con la particularización de que el vector de Burgers sólo tiene componente z .

$$\mathbf{F} = \sigma_{yz} b i - \sigma_{xz} b j \quad (2.16)$$

Como tensiones σ_{yz}, σ_{xz} se utilizan las que aparecen en las ecuaciones del campo tensional de una dislocación de tornillo (2.3), quedando:

$$F_x = \sigma_{yz} b = \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (2.17)$$

$$F_y = -\sigma_{xz}b = -\frac{-\mu b^2}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} = \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (2.18)$$

Si esta fuerza se expresa en coordenadas polares:

$$F_r = \frac{\mu b^2}{2\pi r} \quad F_\theta = 0 \quad (2.19)$$

Es decir, se produce una fuerza en la dirección que une ambas dislocaciones y es de tipo repulsivo para dislocaciones del mismo signo y atractivo en caso contrario. Su módulo es inversamente proporcional a la distancia que las separa. Para dos dislocaciones en el eje x se obtiene una expresión muy sencilla (Figura 2.10):

$$F_x = \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{1}{x} \quad F_y = 0 \quad (2.20)$$

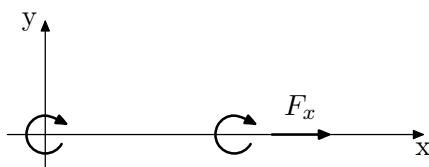


Figura 2.10: Fuerza entre dos dislocaciones de tornillo paralelas que se encuentran en el eje x .

Fuerzas entre dos dislocaciones de cuña con vectores de Burgers paralelos

Otro caso interesante es el de dos dislocaciones de cuña paralelas al eje z , con los vectores de Burgers paralelos al eje x y del mismo signo (Figura 2.11). Se trata, de nuevo, de calcular la fuerza que la dislocación situada en el origen de coordenadas ejerce sobre la dislocación situada en la posición (x, y) .

Se puede realizar un desarrollo similar al hecho para las dislocaciones de tornillo con la diferencia de que el vector de Burgers sólo tiene componente x .

$$\mathbf{F} = \sigma_{xy}b \mathbf{i} - \sigma_{xx}b \mathbf{j} \quad (2.21)$$

Como tensiones σ_{xy}, σ_{xx} se utilizan las que aparecen en las ecuaciones del campo tensional de una dislocación de cuña (2.7).

$$F_x = \sigma_{xy}b = \frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.22)$$

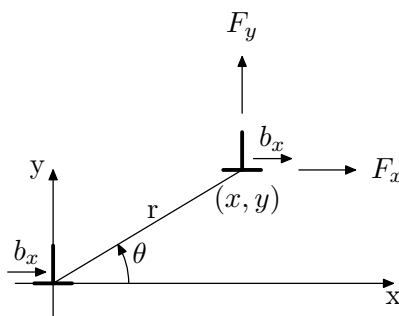


Figura 2.11: Fuerza entre dos dislocaciones de cuña con vectores de Burgers paralelos.

$$F_y = -\sigma_{xx}b = -\frac{-\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.23)$$

La fuerza F_x entre dos dislocaciones del mismo signo es de tipo repulsivo si el ángulo θ es menor de 45° . Si el ángulo es mayor de 45° es de tipo atractivo. La fuerza F_y para dos dislocaciones del mismo signo siempre es de tipo repulsivo. Para el caso particular de las dos dislocaciones en el eje x ($\theta = 0$) se obtendría una fuerza repulsiva en la dirección x cuyo módulo es inversamente proporcional a la distancia que las separa (Figura 2.12). Su valor es similar al obtenido para dos dislocaciones de tornillo salvo el término $(1 - \nu)$:

$$F_x = \frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \quad F_y = 0 \quad (2.24)$$

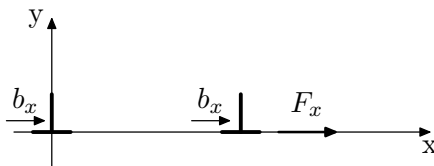


Figura 2.12: Fuerza entre dos dislocaciones de cuña en el eje x .

2.2. Equilibrio de dislocaciones en un medio infinito.

A continuación se analiza el equilibrio de un conjunto de dislocaciones en un sólido infinito sometido a tensión externa. En vez de considerar el problema de un

conjunto de dislocaciones discretas tal como hicieron Eshelby, Frank y Nabarro [9] se va a emplear la aproximación de una distribución continua de dislocaciones infinitesimales con el mismo vector de Burgers total. Esta técnica ha sido empleada por autores como Head y Louat [10] o Bilby, Cottrell y Swinden [11]. El análisis lleva a la obtención de una ecuación integral cuya solución es la función de distribución de dislocaciones que permite que exista equilibrio entre las fuerzas externas y las fuerzas mutuas entre dislocaciones. Los métodos para resolver este tipo de ecuaciones serán abordados en los próximos capítulos.

2.2.1. Equilibrio de un conjunto de dislocaciones de tornillo en un medio infinito sometido a tensión antiplana.

En la Figura 2.13 se muestra un conjunto de dislocaciones de tornillo del mismo signo distribuidas a lo largo del eje x en un medio infinito y sometidas a una tensión externa $\sigma_{yz}(x) = \tau(x)$.

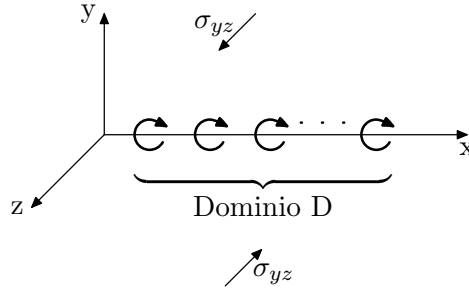


Figura 2.13: Dislocaciones de tornillo sometidas a tensión antiplana en un medio infinito.

Se considera una tensión de fricción $\sigma_f(x)$ que se opone al movimiento de dichas dislocaciones. Esta tensión de fricción representa la interacción de las dislocaciones con el resto de las dislocaciones del material, con partículas de segunda fase y con precipitados. Se utiliza una función de distribución $f(\zeta)$, que expresa el número de dislocaciones infinitesimales que hay entre ζ y $\zeta + d\zeta$. El equilibrio de fuerzas sobre una dislocación infinitesimal genérica de vector de Burgers b situada en la posición x implica las siguientes fuerzas:

- Tensión aplicada: produce una fuerza en la dirección i , $F_{ext} = \tau(x) b i$
- Tensión de fricción: produce una fuerza en la dirección i , $F_{fric} = -\sigma_f(x) b i$
- Fuerzas de las otras dislocaciones: para obtener la fuerza que un conjunto de dislocaciones ejerce sobre una dislocación situada en x basta con sumar la

acción de todas las dislocaciones, lo que equivale a la siguiente integral:

$$A b \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} i \quad (2.25)$$

Siendo $A = \frac{\mu b}{2\pi}$ para las dislocaciones de tornillo.

La ecuación de equilibrio queda finalmente como una ecuación integral singular de tipo Cauchy:

$$A \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} + [\tau(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad (2.26)$$

2.2.2. Equilibrio de un conjunto de dislocaciones de cuña en un medio infinito sometido a un estado tensional plano.

Para estudiar el equilibrio de un conjunto de dislocaciones de cuña situadas en el eje x sometidas a una tensión externa es conveniente en primer lugar analizar el campo de tensiones que produce una dislocación sobre el resto. Utilizando la expresión del campo de tensiones general (2.8) e imponiendo un valor de $y = 0$ se obtiene que las dislocaciones de cuña con vector de Burgers b_x sólo producen tensiones σ_{xy} en la línea de dislocaciones, mientras que las dislocaciones con b_y producen tensiones σ_{yy} y σ_{xx} . Pero según la ecuación de Peach-Koehler (2.15), una tensión σ_{xx} no ejerce ninguna fuerza sobre una dislocación con b_y . Así que se puede resolver por un lado el equilibrio del conjunto de dislocaciones con b_x y la carga externa tangencial y por otro el equilibrio de las dislocaciones con b_y y la carga externa normal. Es decir, se puede estudiar los problemas de forma desacoplada, facilitándose mucho su resolución. Los problemas se muestran en las Figuras 2.14 y 2.15.

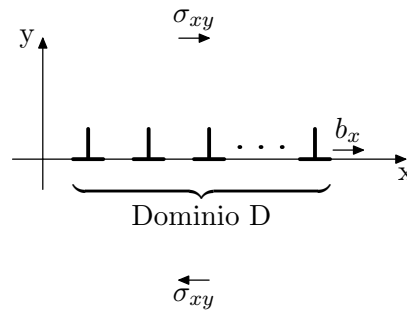


Figura 2.14: Dislocaciones de cuña sometidas a tensión tangencial en un medio infinito.

El desarrollo para cada uno de los dos casos es similar al caso de dislocaciones de tornillo sometidas a tensión antiplana explicado anteriormente. El equilibrio de fuerzas sobre una dislocación genérica situada en la posición x implica las mismas fuerzas que aparecerían para las dislocaciones de tornillo, que son la tensión externa aplicada, la tensión de fricción y la fuerza del resto de dislocaciones. La ecuación de equilibrio tendría la misma forma para los dos problemas:

$$A \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} + [\sigma(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad (2.27)$$

siendo $A = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}$ para las dislocaciones de tornillo. Esta ecuación es igual que la obtenida en el equilibrio de dislocaciones de tornillo salvo el término $(1 - \nu)$, que aparece en la constante A . El término de la tensión externa $\sigma(x)$ toma el valor σ_{xy} para el equilibrio de las dislocaciones con vector de Burgers b_x , mientras que para las dislocaciones con vector b_y sería la tensión σ_{yy} .

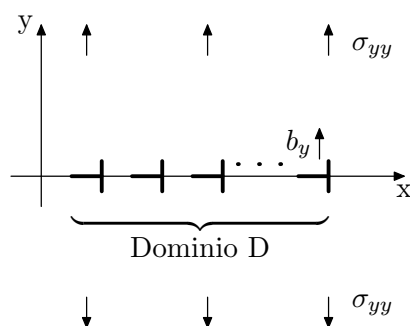


Figura 2.15: Dislocaciones de cuña sometidas a tensión normal en un medio infinito.

2.3. Equilibrio de dislocaciones cercanas a un contorno.

El estudio del equilibrio de dislocaciones en las cercanías de una superficie libre requiere la verificación de las condiciones de contorno en tensiones y deformaciones en la superficie, lo cual no era necesario para un medio infinito. Si se estudia el campo tensional general producido por una dislocación de tornillo o de cuña, definido previamente en las ecuaciones (2.3) y (2.7), se concluye que no se pueden satisfacer las condiciones de contorno para una superficie libre. Es necesario modificar la expresión básica de este campo si se desea cumplir las condiciones de contorno en un sólido. Para casos muy simples, como puede ser el de un conjunto de dislocaciones de tornillo a lo largo de una línea perpendicular a una superficie

semi-infinita, la modificación es sencilla. El mismo problema para dislocaciones de cuña ya adquiere una cierta complejidad. Si se desea estudiar un contorno cualquiera la obtención del campo de tensiones se torna muy complicado. En los próximos capítulos se mostrará una técnica indirecta para realizar el equilibrio de dislocaciones cercanas a una entalla sin tener que calcular previamente el campo tensional de una dislocación modificado por la presencia de la entalla. A continuación se van a estudiar los dos casos más sencillos para dislocaciones cercanas a un contorno como son el problema de dislocaciones de tornillo que se encuentran distribuidas en la perpendicular a la superficie de un medio semi-infinito y el mismo problema pero para dislocaciones de cuña.

2.4. Equilibrio de dislocaciones de tornillo en un medio semi-infinito sometidas a tensión antiplana. Fuerzas imagen.

En primer lugar se va a analizar una única dislocación de tornillo cercana a una superficie libre recta. La línea de dislocación es paralela al eje z y el plano de deslizamiento es el xz . La dislocación se encuentra en $x = l$ en un medio semiinfinito con una superficie libre en $x = 0$ (sólido en $x > 0$). A partir del campo tensional general de una dislocación de tornillo (2.3) se obtiene el campo de una dislocación en un medio infinito pero situada en $(l, 0)$ simplemente haciendo el cambio de variable de x a $(x - l)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 & \sigma_{xz} &= -A \frac{y}{(x-l)^2 + y^2} \\ \sigma_{xy} &= 0 & \sigma_{yz} &= A \frac{x-l}{(x-l)^2 + y^2} \\ \sigma_{yy} &= 0 & \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

En la superficie libre se tiene que cumplir que las tensiones $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ deben ser 0. Es evidente que este campo tensional no satisface la condición de contorno en $x = 0$ ya que σ_{xz} no se anula. Para resolver el problema se añade el campo tensional de una dislocación ficticia denominada "imagen", que es una dislocación igual y de signo contrario a la original y ubicada al otro lado de la superficie libre, para este caso en $x = -l$ (Figura 2.16). Esta dislocación produce un campo tensional igual y contrario, aunque desplazado una distancia $2l$ respecto al original.

El nuevo campo tensional producido por la dislocación de tornillo y su imagen es el siguiente:

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{xz} = A \left(\frac{-y}{(x-l)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+l)^2 + y^2} \right)$$

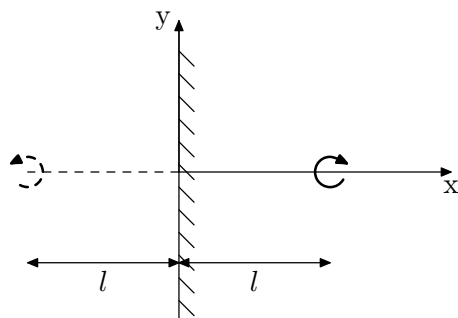


Figura 2.16: Dislocación de tornillo y su imagen.

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = 0 & & \sigma_{yz} = A \left(\frac{x-l}{(x-l)^2 + y^2} - \frac{x+l}{(x+l)^2 + y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = 0 & & \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

De modo que las tensiones en la superficie libre ($x = 0$) quedan:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 0 & & \sigma_{xz} = A \left(\frac{-y}{l^2 + y^2} + \frac{y}{l^2 + y^2} \right) = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 & & \sigma_{yz} = \frac{-2Al}{l^2 + y^2} \\ \sigma_{yy} = 0 & & \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora el campo tensional sí cumple la condición de contorno de superficie libre. Luego, como conclusión, para una dislocación de tornillo la condición de contorno de un medio semi-infinito se cumple simplemente añadiendo una dislocación imagen.

Ya se está en disposición de resolver el equilibrio de un conjunto de dislocaciones de tornillo en el dominio D que se encuentran en la perpendicular a una superficie libre semi-infinita bajo una carga antiplana (Figura 2.17).

En este caso se debe añadir una dislocación imagen por cada dislocación real. Se puede volver a plantear el equilibrio de fuerzas sobre una dislocación infinitesimal genérica situada en la posición x de la misma forma que se ha hecho en ocasiones anteriores con la diferencia de que es necesario añadir un término más, proveniente de las fuerzas que ejercen las dislocaciones imagen. Así que los términos son:

- Tensión aplicada: $F_{ext} = \sigma_{yz}(x) b i = \tau(x) b i$
- Tensión de fricción: $F_{fric} = -\sigma_f(x) b i$

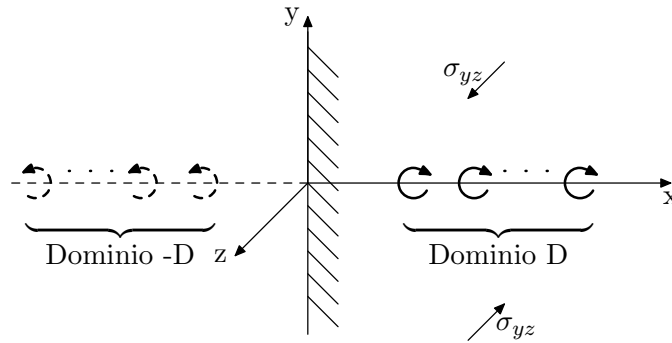


Figura 2.17: Dislocaciones de tornillo y sus imágenes sometidas a tensión antiplana en un medio semiinfinito.

- Fuerzas de las otras dislocaciones:

$$A b \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} i \quad (2.31)$$

- Fuerzas de las dislocaciones imagen:

$$-A b \int_{-D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} i \quad (2.32)$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas es la siguiente:

$$\int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} - \int_{-D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} + \frac{1}{A} [\tau(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad (2.33)$$

Por la forma en que ha sido definida, la función $f(\zeta)$ es antisimétrica en el dominio $[-D, D]$. La ecuación de equilibrio se puede expresar de una forma compacta uniendo las dos integrales:

$$\int_{D \cup -D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} + \frac{1}{A} [\tau(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad f(\zeta) \in D \cup -D, \text{ antisimétrica} \quad (2.34)$$

Otra forma de expresar el equilibrio es cambiando el dominio de integración de la segunda integral para que ambas integrales se encuentren en el dominio D . Para ello se le aplica un cambio de variable y la variable ζ pasa a ser la variable $-\zeta$. La ecuación de equilibrio queda:

$$\int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} - \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x + \zeta} + \frac{1}{A} [\tau(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad (2.35)$$

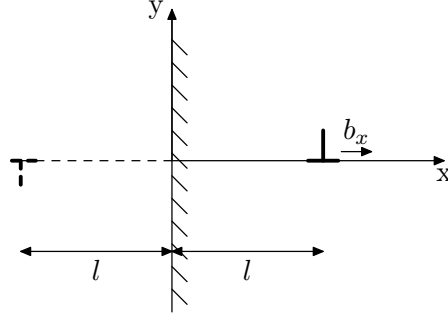


Figura 2.18: Dislocación de cuña y su imagen.

2.5. Dislocación de cuña en las cercanías de un contorno.

El añadir una dislocación imagen en el problema de una dislocación de cuña cercana a una superficie libre no permite satisfacer las condiciones de contorno. En efecto, a partir del campo tensional general de una dislocación de cuña (2.7) se puede obtener el campo producido por una dislocación situada en $(l, 0)$ y su imagen en $(-l, 0)$ (Figura 2.18):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= A \left(\frac{-y(3(x-l)^2 + y^2)}{((x-l)^2 + y^2)^2} + \frac{y(3(x+l)^2 + y^2)}{((x+l)^2 + y^2)^2} \right) & \sigma_{xz} &= 0 \\
 \sigma_{xy} &= A \left(\frac{(x-l)((x-l)^2 - y^2)}{((x-l)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+l)((x+l)^2 - y^2)}{((x+l)^2 + y^2)^2} \right) & \sigma_{yz} &= 0 \\
 \sigma_{yy} &= A \left(\frac{y((x-l)^2 - y^2)}{((x-l)^2 + y^2)^2} - \frac{y((x+l)^2 - y^2)}{((x+l)^2 + y^2)^2} \right) & \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Las tensiones en la superficie libre ($x = 0$) serían:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 0 & \sigma_{xz} &= 0 \\
 \sigma_{xy} &= -2A \frac{l(l^2 - y^2)}{(l^2 + y^2)^2} \neq 0 & \sigma_{yz} &= 0 \\
 \sigma_{yy} &= 0 & \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Este campo tensional no cumple la condición de contorno de superficie libre, ya que no se anula σ_{xy} . Luego para una dislocación de cuña no basta con añadir una dislocación imagen. El problema se resuelve utilizando la función de Airy adecuada.

En el libro de Hirth y Lothe [2] se muestra la obtención de la función de Airy para un grupo de dislocaciones en la perpendicular a la superficie libre sometidas a tensión tangencial, resultando el desarrollo ciertamente largo y complejo. Para resolver este tipo de dificultades Dundurs y Mura [6] emplearon un método semi-inverso asumiendo una probable estructura de la función de Airy y ajustaron el valor de sus constantes de modo que se satisficieran las condiciones de contorno y otros requisitos como que el campo de desplazamientos fuera regular. Su trabajo original estaba dirigido al estudio de la interacción entre una dislocación de cuña y una inclusión circular. A partir de este resultado e imponiendo una rigidez nula de la inclusión y un radio del círculo infinito obtuvieron el campo de tensiones en presencia de una superficie semi-infinita. A continuación se van a mostrar los campos tensionales para una dislocación de cuña con un vector de Burgers general (b_x, b_y) cercana a un agujero circular y posteriormente su extensión a un medio semi-infinito. Ambos campos serán de gran utilidad en capítulos posteriores para el análisis del desarrollo de grietas en entallas.

2.5.1. Campo de tensiones de una dislocación de cuña en las cercanías de un agujero circular

El problema se muestra en la Figura 2.19. La dislocación se encuentra en la posición $(\zeta_K, 0)$ y se desea obtener el campo de tensiones producido por la dislocación sobre un punto (x_K, y_K) . Los subíndices 1 y 2 se refieren a las regiones exterior e interior a la inclusión respectivamente.

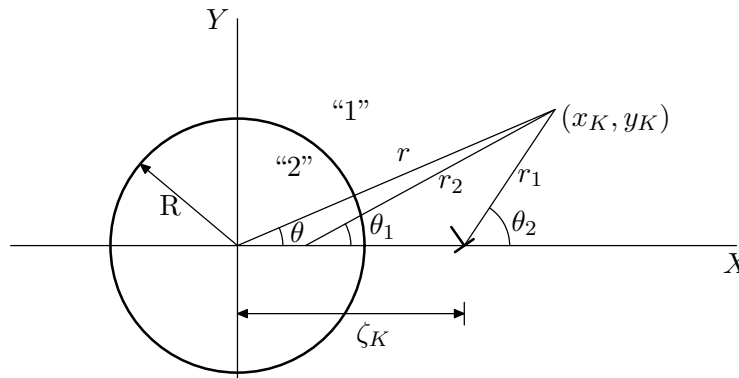


Figura 2.19: Dislocación de cuña en las cercanías de un agujero circular

Las funciones de Airy para el vector de Burgers b_x son:

$$\chi_1 = \frac{\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left[-2r_1 \log r_1 \sin\theta_1 + (B + A)(r_2 \log r_2 \sin\theta_2 - r \log r \sin\theta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +(B - A) \left(r_2 \theta_2 \cos \theta_2 - r \theta \cos \theta + \frac{R}{\beta} \theta \right) - \\
& - A \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta^3} \left[\operatorname{sen} 2\theta_2 - \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta} \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{r_2} \right] - AR^2 \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$$\chi_2 = \frac{\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left[-(2 - A - B)r_1 \log r_1 \operatorname{sen} \theta_1 - (B - A) \left[r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta} \theta_1 \right] \right] \quad (2.39)$$

Las funciones de Airy para el vector de Burgers b_y son:

$$\begin{aligned}
\xi_1 = \frac{\mu_1 b_y}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \left[2r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - (B + A)(r_2 \log r_2 \cos \theta_2 - r \log r \cos \theta) + \right. \\
& + (B - A)(r_2 \theta_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r \theta \operatorname{sen} \theta) + \\
& + A \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta^3} \left[2\beta_2 \log r_2 - \cos 2\theta_2 + \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta} \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right] - \\
& \left. - [A(2\beta^2 - 1) + M(\kappa_2 + 1) - 1] \frac{R}{\beta} \log r + AR^2 \frac{\cos \theta}{r} \right] \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 = \frac{\mu_1 b_y}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \left[(2 - A - B)r_1 \log r_1 \cos \theta_1 - \right. \\
& \left. - (B - A) \left[r_1 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1 + \frac{(\beta^2 - 1)R}{\beta} \log r_1 \right] - M \frac{1 - \Gamma}{\beta R} r^2 \right] \quad (2.41)
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\zeta_K}{R} \quad , \quad \Gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad , \quad M = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_2 + \Gamma)(\kappa_2 - 1 + 2\Gamma)} \\
A &= \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma\kappa_1} \quad , \quad B = \frac{\kappa_2 - \Gamma\kappa_1}{\kappa_2 + \Gamma} \\
d &= \frac{\zeta_K}{R} \quad , \quad L = \frac{R(d^2 - 1)}{d} \quad , \quad x_1 = x_K - \zeta_K \quad , \quad x_2 = x_1 + L \\
r^2 &= x_K^2 + y_K^2 \quad , \quad r_1^2 = x_1^2 + y_K^2 \quad , \quad r_2^2 = x_2^2 + y_K^2 \quad (2.42)
\end{aligned}$$

A partir de las funciones de Airy se puede obtener el campo de tensiones. Para el caso de un agujero circular basta con hacer la rigidez del círculo cero, $\mu_2 = 0$. El campo de tensiones producido por una dislocación con vector de Burgers (b_x, b_y) se puede escribir como:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x K_{x(xx)} + b_y K_{y(xx)}]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x K_{x(yy)} + b_y K_{y(yy)}] \\ \sigma_{xy} &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x K_{x(xy)} + b_y K_{y(xy)}]\end{aligned}\quad (2.43)$$

Las funciones $K_{i(jk)}$ tienen tres subíndices. El primero indica la componente del vector de Burgers de la dislocación. Los dos siguientes indican la componente de la tensión producida en el punto (x_K, y_K) . Estas funciones adquieren las siguientes expresiones [7]:

$$\begin{aligned}K_{x(xx)} &= -\frac{y_K}{r_1^4} [3x_1^2 + y_K^2] + \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} + 1 \right] - \frac{y_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} + 1 \right] - \\ &\quad - \frac{2y_K L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(x_2 - \frac{L}{2} \right) \right] + \frac{R y_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 1 \right) \right]\end{aligned}\quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}K_{x(yy)} &= \frac{y_K}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{y_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{2y_K L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(3x_2 - \frac{L}{2} \right) \right] - \frac{R y_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 1 \right) \right]\end{aligned}\quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}K_{x(xy)} &= \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{x_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{2x_2 L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(4x_2 - \frac{3L}{2} \right) \right] - \frac{R x_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 3 \right) \right] - \frac{L}{r_2^2 d^2}\end{aligned}\quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}K_{y(xx)} &= \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{x_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} - 1 \right] - \\ &\quad - \frac{2x_2 L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left((3 - d^2)x_2 - \frac{3L}{2} \right) \right] + \frac{R(2d^2 - 2)}{2r^2 d} - \\ &\quad - \frac{R x_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 3 \right) + \frac{x_K}{d} (2d^2 - 2) \right] - \frac{L}{r_2^2}\end{aligned}\quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}K_{y(yy)} &= \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 + 3y^2] + \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 3 \right] - \frac{x_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} - 3 \right] + \\ &\quad + \frac{2x_2 L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left((5 - d^2)x_2 - \frac{3L}{2} \right) \right] - \frac{R(2d^2 - 2)}{2r^2 d} + \\ &\quad + \frac{R x_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 3 \right) + \frac{x_K}{d} (2d^2 - 2) \right] - \frac{L}{r_2^2} \left(\frac{2}{d^2} - 1 \right)\end{aligned}\quad (2.48)$$

$$K_{y(xy)} = \frac{y_K}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{y_K}{r^2} \left[\frac{2x_K^2}{r^2} - 1 \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2y_K L}{r_2^4 d^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left((2 - d^2)x_2 - \frac{L}{2} \right) \right] - \\
& -\frac{R y_K}{r^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{x_K}{d} (2d^2 - 2) \right]
\end{aligned} \quad (2.49)$$

2.5.2. Campo de tensiones de una dislocación de cuña en las cercanías de un medio semi-infinito

A partir de las expresiones anteriores y haciendo tender a infinito el radio del círculo se obtiene el campo de tensiones en presencia de una superficie semi-infinita. En la Figura 2.20 se muestran las variables del problema. Nótese que aunque se repite parte de la nomenclatura empleada en el problema del agujero, el significado de las variables ha cambiado.

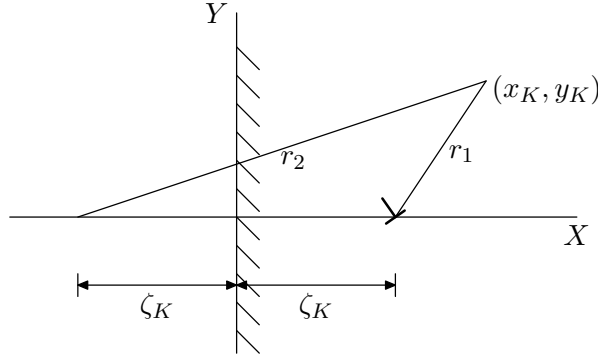


Figura 2.20: Dislocación de cuña en las cercanías de un medio semi-infinito.

La expresión de las funciones K_{ijk} resulta ser:

$$K_{x(xx)} = -\frac{y_K}{r_1^4} [3x_1^2 + y_K^2] + \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} + 1 \right] - \frac{4y_K \zeta}{r_1^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (x_2 - \zeta_K) \right] \quad (2.50)$$

$$K_{x(yy)} = \frac{y_K}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{4y_K \zeta}{r_1^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (3x_2 - \zeta_K) \right] \quad (2.51)$$

$$K_{x(xy)} = \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] + \frac{4x_2 \zeta}{r_1^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (4x_2 - 3\zeta_K) \right] - \frac{2\zeta_K}{r_2^2} \quad (2.52)$$

$$K_{y(xx)} = \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 - y_K^2] - \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] - \frac{4x_2\zeta_K}{r_2^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (2x_2 - 3\zeta_K) \right] - \frac{2\zeta_K}{r_2^2} \quad (2.53)$$

$$K_{y(yy)} = \frac{x_1}{r_1^4} [x_1^2 + 3y_K^2] + \frac{x_2}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 3 \right] + \frac{4x_2\zeta}{r_2^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (4x_2 - 3\zeta_K) \right] - \frac{2\zeta_K}{r_2^2} \quad (2.54)$$

$$K_{y(xy)} = \frac{y_K}{r_1^4} [x_1^2 - y^2] - \frac{y_K}{r_2^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_2^2} - 1 \right] - \frac{4y_K\zeta}{r_2^4} \left[\frac{4x_2^2}{r_2^2} (\zeta_K - x_2) + (x_2 - \zeta_K) \right] \quad (2.55)$$

siendo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_K - \zeta_K \quad , \quad x_2 = x_K + \zeta_K \\ r^2 &= x_K^2 + y_K^2 \quad , \quad r_1^2 = x_1^2 + y_K^2 \quad , \quad r_2^2 = x_2^2 + y_K^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.6. Equilibrio de dislocaciones de cuña en un medio semi-infinito sometido a un estado tensional plano.

Ahora se está en disposición de estudiar el problema de un conjunto de dislocaciones de cuña perpendiculares a un medio semiinfinito. Igual que ocurría para el medio infinito los problemas en el eje x e y están desacoplados, así que se va a estudiar por un lado el equilibrio de dislocaciones con vector de Burgers b_x y una tensión externa tangencial y por otro el equilibrio de dislocaciones con vector de Burgers b_y y una carga externa normal.

El primer problema se presenta en la Figura 2.21, con un conjunto de dislocaciones de cuña distribuidas en la perpendicular a un medio semiinfinito (sólido en $x > 0$) sometido a una tensión externa $\sigma_{xy}(x) = \tau(x)$. En primer lugar se calcula la fuerza que una dislocación cualquiera del dominio situada en $(\zeta, 0)$ ejerce sobre otra dislocación del dominio, de coordenadas $(x, 0)$. Ambas tienen vector de Burgers b_x . De la expresión de las tensiones (2.43) se deduce que para dislocaciones con vector de Burgers b_x sólo intervienen los núcleos $K_{x(xx)}$, $K_{x(xy)}$ y $K_{x(yy)}$. Si se particularizan las expresiones de los núcleos para $y_k = 0$ se tiene que el núcleo $K_{x(xx)}$ es igual a cero. Pero además según la ecuación de Peach-Koehler (2.15), un campo tensional σ_{yy} no ejerce ninguna fuerza sobre una dislocación con b_x . Así que para la obtención de la fuerza sólo se ha de tener en cuenta el núcleo $K_{x(xy)}$, quedando la expresión:

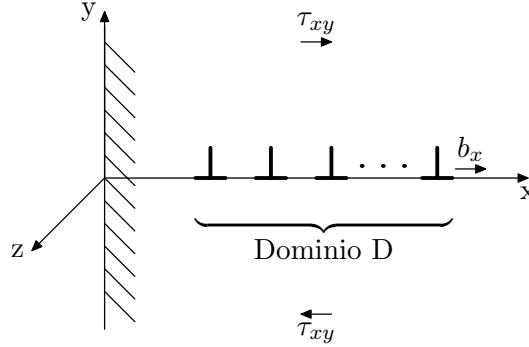


Figura 2.21: Dislocaciones de cuña sometidas a tensión tangencial en un medio semiinfinito.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sigma_{xy} b_x \mathbf{i} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} b_x^2 K_{x(xy)} \mathbf{i} = \\ &= \frac{2\mu b_x^2}{\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{1}{x - \zeta} - \frac{1}{x + \zeta} - \frac{2\zeta}{(x + \zeta)^2} + \frac{4\zeta^2}{(x + \zeta)^3} \right] \mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Se puede realizar un planteamiento similar para las dislocaciones con vector de Burgers b_y y una carga externa normal (Figura 2.22). Para este problema el único núcleo que es distinto de cero es el $K_{y(yy)}$ y la expresión de la fuerza de una dislocación del dominio sobre otra resulta:

$$\mathbf{F} = \frac{2\mu b_y^2}{\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{1}{x - \zeta} - \frac{1}{x + \zeta} - \frac{2\zeta}{(x + \zeta)^2} + \frac{4\zeta^2}{(x + \zeta)^3} \right] \mathbf{j} \quad (2.58)$$

De modo que de nuevo las expresiones de las fuerzas entre dislocaciones obtenidas para el caso tangencial y normal son las mismas. Ya es posible plantear el equilibrio de fuerzas sobre una dislocación infinitesimal genérica situada en la posición x de la misma forma que se ha hecho en ocasiones anteriores con la particularidad de que el término proveniente del resto de las dislocaciones tiene en esta ocasión cuatro sumandos. La expresión resultante final es la misma para el caso tangencial y normal

$$\int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} - \int_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{x + \zeta} - \int_D \frac{2\zeta f(\zeta) d\zeta}{(x + \zeta)^2} + \int_D \frac{4\zeta^2 f(\zeta) d\zeta}{(x + \zeta)^3} + \frac{1}{A} [\sigma(x) - \sigma_f(x)] = 0 \quad (2.59)$$

con el término de la tensión externa $\sigma(x)$ tomando el valor σ_{xy} para el equilibrio de las dislocaciones con vector de Burgers b_x y el valor σ_{yy} para las dislocaciones

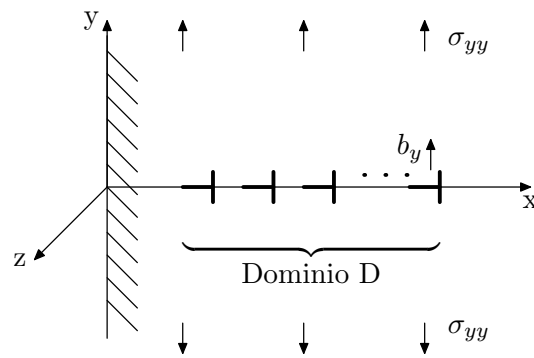


Figura 2.22: Dislocaciones de cuña sometidas a tensión normal en un medio semiinfinito.

con vector b_y .

En el próximo capítulo se proporcionan las técnicas necesarias para resolver las ecuaciones integrales del tipo de las que se han obtenido. Sus soluciones serán utilizadas en el estudio de la evolución de las grietas y sus zonas plásticas asociadas sometidas a carga cíclica.

Bibliografía

1. Weertman, J. and Weertman, J. R., 1964, *Elementary dislocation theory*, MacMillan Series (New York).
2. Hirth, J.P. and Lothe, J., 1982, *Theory of dislocations*, Krieger publishing company (Florida).
3. Hull, D. and Bacon, D. J., 2002, *Introduction to dislocations*, Butterworth Heinemann (Oxford).
4. Weertman, J., 1996, *Dislocation based fracture mechanics*, World Scientific Publishing Company, Syngapore.
5. Blomerus, P. M. and Hills, D. A., 1998, *Modelling plasticity in finite bodies containing stress concentrations by a distributed dislocation method*, Proc. Instn. Mech. Engrs. C, Vol. 212, pp. 731.
6. Dundurs, J., Mura, T., 1964, *Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 177-189.
7. Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N. and Korsunsky, A. M., 1996, *Solution of cracks problems, the distributed dislocation technique*, Kluwer academic publishers.
8. Peach, M. and Koehler, J. S., 1950, *The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them*, Physical Review., Vol. 8, pp. 436.
9. Eshelby, J. D., Frank, F. C. and Nabarro, F. R. N., 1951, *The equilibrium of linear arrays of dislocations*, Phil. Mag., Vol. 42, pp. 351-364.
10. Head, A. K. and Louat, N., 1955, *The distribution of dislocations in linear arrays*, Aust. J. Phys. 8, pp. 1-7.
11. Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., 1963, *The spread of plastic yield from a notch*, Proc. R. Soc. A272, pp. 304-314.

Capítulo 3

El modelo microestructural

En este capítulo se describe el modelo microestructural desarrollado por Navarro y de los Ríos [1–3] y que está basado en el trabajo clásico de Bilby, Cottrell y Swinden [4] en el que la grieta y su zona plástica asociada se representan mediante un conjunto de dislocaciones. El modelo permite analizar el crecimiento de microgrietas en metales sometidos a carga cíclica y predecir el límite de fatiga del sólido. Se propone un avance de la zona plástica a saltos, como consecuencia de la interacción de la grieta con las barreras microestructurales del material, i.e. bordes de grano. El avance de la grieta se produce si la tensión en la barrera alcanza un cierto valor umbral capaz de activar el deslizamiento de dislocaciones en el siguiente grano. Se presenta el modelo para el caso sencillo de una grieta en un medio infinito sometido a carga tangencial, problema para el que se conoce la solución analítica del equilibrio de dislocaciones.

Como se ha visto en el capítulo anterior, las ecuaciones que describen el equilibrio de dislocaciones son ecuaciones integrales con núcleos más o menos complicados, incluyendo el término singular de Cauchy, lo que hace prácticamente imposible su resolución analítica, salvo en los casos más simples. De forma que la utilización generalizada del modelo microestructural obliga al empleo de métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones integrales singulares del problema. Existen diversas formas de obtener una solución numérica aproximada de una ecuación integral singular y que se basan en el uso de cuadraturas. A partir de la cuadratura de Gauss los autores Erdogan, Gupta y Cook desarrollaron dos formas de integración numérica aproximada [5–7]. Ambas formas se basan en el uso de polinomios ortogonales aproximantes. La primera de ellas utiliza un desarrollo en serie infinito y ciertas propiedades de los polinomios ortogonales para obtener un sistema de infinitas ecuaciones lineales. Truncando el sistema se obtiene una solución aproximada. La segunda forma parte de un polinomio aproximante de grado finito y también utiliza propiedades de polinomios ortogonales. La principal ventaja del segundo tipo respecto al primero es que no requiere realizar una evaluación

numérica de integrales [8].

En este trabajo se ha empleado el segundo método de Erdogan, Gupta y Cook para resolver las ecuaciones integrales singulares. Se muestra su aplicación al caso de una grieta en un medio infinito cargada en Modo I, cuya solución analítica es sobradamente conocida. Este análisis permite precisar la aplicabilidad del método numérico para problemas más complicados cuya solución analítica se desconozca. Es necesario resaltar que el modelo fue desarrollado principalmente para la resolución de problemas en los que la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ es singular en al menos uno de los extremos del intervalo de integración, como son los problemas de obtención del factor de intensidad de tensiones en Mecánica de Fractura. Sin embargo el análisis de crecimiento de grietas pequeñas requiere soluciones en las que $f(\zeta)$ sea acotada en los extremos. La aplicación directa del método numérico no recoge de forma exacta la discontinuidad en la función solución que se debe producir en las transiciones entre grieta, zona plástica y barrera. Esta dificultad se ha superado dividiendo el intervalo de integración en varios trozos, uno para cada zona, de modo que la función $f(\zeta)$ obtenida numéricamente resulta prácticamente semejante a la obtenida analíticamente. Lo mismo se puede decir del valor de la tensión en la barrera.

Para terminar el capítulo se ha aplicado la técnica numérica al caso de una grieta en un medio semi-infinito cargada también en Modo I. De este problema no se conoce la solución analítica de la función solución $f(\zeta)$. Sin embargo su estudio resulta muy interesante ya que se obtiene un valor de la tensión en la barrera que es de 1.12 veces el obtenido para el caso infinito. Esta proporción es similar a la existente entre los factores de intensidad de tensiones para ambos casos, poniendo de manifiesto la capacidad que tiene el modelo microestructural resuelto mediante la técnica numérica para reproducir correctamente los problemas de grietas en sólidos y estableciendo una conexión entre el modelo microestructural y la Mecánica de Fractura.

3.1. Representación de una grieta en un medio infinito mediante dislocaciones. Modelo de Bilby, Cottrell y Swinden.

Considérese un cuerpo infinito con una grieta de longitud $2a$ cargada en modo II. Delante de la grieta se prolongan las zonas plásticas hasta una longitud total de $2c$, representada como una zona lineal. La grieta y la zona plástica se modelan mediante un conjunto de dislocaciones de cuña con vectores de Burgers en la dirección x (Figura 3.1). La grieta y la zona plástica se diferencian por tener diferente tensión de fricción σ_f : $\sigma_f = \sigma_1$ sobre la grieta y $\sigma_f = \sigma_2$ sobre la zona plástica. Si no existe contacto entre las caras de la grieta se puede suponer $\sigma_1 = 0$. La tensión

σ_2 se considera igual al límite elástico, al menos cuando la zona plástica cubra un suficiente número de granos. Este tipo de representación fue introducida en un trabajo clásico de Bilby, Cottrell y Swinden [4] y ha sido ampliamente utilizada en la literatura [9–11]. Se suele denominar de forma abreviada como modelo o representación BCS.

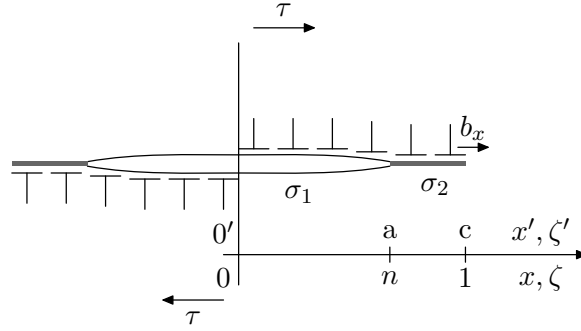


Figura 3.1: Representación de una grieta y su zona plástica mediante dislocaciones.

La ecuación que determina el equilibrio de dislocaciones es una ecuación integral tipo Cauchy semejante a las mostradas en el capítulo anterior (nótese que el planteamiento y la ecuación sería la misma para el caso de modo III y I). La ecuación adimensionalizada respecto a la longitud $2c$ es la siguiente:

$$A \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} + (\tau - \sigma_f) = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación integral, cuya incógnita es la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$, puede resolverse analíticamente mediante el teorema de inversión de Muskhelishvili [12]. Admite dos tipos de soluciones dependiendo de que se considere la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ acotada en los puntos extremos del dominio o no [13]. Las soluciones no acotadas se usan para obtener Factores de Intensidad de Tensiones en los problemas singulares típicos de Mecánica de Fractura, donde no se considera la zona plástica. Por el contrario, en los problemas aquí considerados la existencia de la zona plástica garantiza la relajación de la singularidad debiéndose usar, por tanto, soluciones acotadas. En el caso de que la tensión aplicada sea uniforme y la tensión de fricción en la zona plástica sea constante la solución acotada del problema resulta ser la siguiente [13]:

$$f(\zeta) = \frac{\sigma_2}{\pi^2 A} \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n \zeta}{n - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n \zeta}{n + \zeta} \right| \right) \right] \quad (3.2)$$

Con $n = \frac{a}{c}$. Puede demostrarse que la solución acotada existe si y sólo si se verifica cierta *condición de existencia* que, para este caso concreto, resulta ser

la conocida relación de Dugdale, expresión que da el tamaño relativo de la zona plástica respecto al tamaño de grieta en función de la carga externa aplicada:

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\sigma_2}\right) \quad (3.3)$$

Esta solución sólo tiene sentido cuando la tensión aplicada τ está por debajo de la tensión de fricción. Y esto suele ser lo normal cuando σ_2 se toma igual al límite elástico. A partir de la solución $f(\zeta)$ se puede definir el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta [14],

$$\phi(x) = b \int_x^1 f(\zeta) d\zeta \quad (3.4)$$

que permite obtener el desplazamiento de apertura en el vértice de la grieta, *Crack tip opening displacement* (CTOD) para modo I o *Crack tip sliding displacement* (CTSD) para modos II y III.

3.2. Modelo de crecimiento de microgrietas

A partir del modelo BCS, Navarro y de los Ríos [1–3] desarrollaron un modelo para crecimiento de microgrietas por fatiga en sólidos sin entallas. Los autores suponen que el desplazamiento plástico debido a fatiga tiene lugar en bandas de deslizamiento rectilíneas que van a lo largo de los granos del sólido. Se supone que la microgrieta surge en aquel grano que, por su tamaño y orientación cristalográfica, presenta más facilidad para la formación de bandas de deslizamiento persistentes. La grieta y la zona plástica asociada a ella se extienden hasta alcanzar la primera barrera microestructural, generalmente un límite de grano, donde permanece bloqueada hasta que la grieta alcanza una longitud crítica tal que en la barrera se alcanza una tensión local capaz de activar el deslizamiento en el siguiente grano. El proceso de crecimiento y bloqueo en la barrera se va produciendo grano a grano, de modo que la zona plástica avanza a saltos, de acuerdo con lo observado experimentalmente en grietas pequeñas. Se predice un ritmo de propagación de grieta oscilante pero con amplitudes cada vez menores conforme avanza la grieta. La grieta, su zona plástica y la barrera se representa mediante una distribución continua de dislocaciones. La ecuación de equilibrio de fuerzas proporciona una relación entre la longitud de grieta y la tensión local en la barrera.

En las Figuras 3.2 y 3.3 se muestra una representación esquemática del modelo. Se considera un sólido infinito de un metal, con un tamaño medio de grano D , sometido a tensión uniforme τ y con una grieta de longitud $2a$ en su interior. Se admite que la grieta ha sido nucleada en el interior de un grano y que su zona plástica ha crecido hasta alcanzar i granos, con $i = 1, 3, 5, \dots$. Delante de los dos bordes de grieta se encuentran sus zonas plásticas asociadas, que se encuentran bloqueadas al final de un grano por la barrera. La posición del límite de grano sera

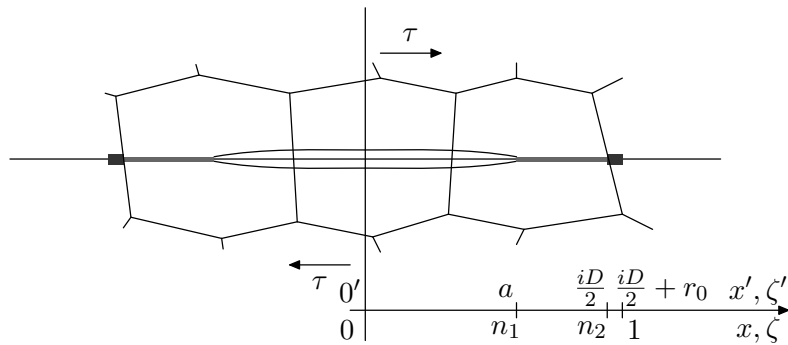


Figura 3.2: Grieta, zona plástica y barrera en un medio infinito.

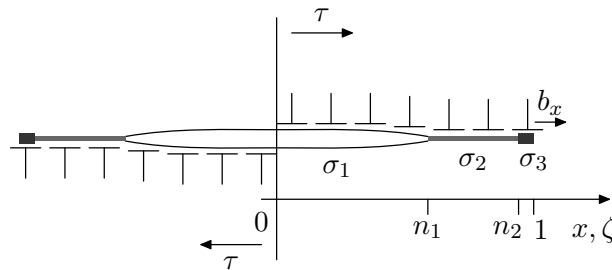


Figura 3.3: Modelado mediante dislocaciones.

$iD/2$, que representa el número de medios granos atravesados por la zona plástica de cada uno de los lados. Las tensiones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ representan la resistencia al movimiento de dislocaciones en la grieta, zona plástica y barrera respectivamente. La barrera microestructural se modela mediante una pequeña zona de longitud r_0 ($r_0 \ll D$), que representa el tamaño típico de la interfase entre granos o la distancia típica a la que se encuentran las fuentes de dislocaciones activables en el grano siguiente.

La ecuación que determina el equilibrio de dislocaciones es de nuevo una ecuación integral tipo Cauchy (3.1), aunque en este caso con la existencia de tres subintervalos, que son los correspondientes a la grieta, la zona plástica y la barrera. El problema se resuelve aplicando el teorema de inversión de Muskhelishvili. La solución del problema para el caso acotado en ambos extremos resulta ser la siguiente [13]:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 A} \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_1 \zeta}{n_1 - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_1 \zeta}{n_1 + \zeta} \right| \right) \right] + (\sigma_3 - \sigma_2) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2 \zeta}{n_2 - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2 \zeta}{n_2 + \zeta} \right| \right) \right] \right\} \quad (3.5)$$

El problema ha de cumplir la condición de existencia, cuya expresión es:

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{sen}^{-1} n_1 + (\sigma_3 - \sigma_2) \operatorname{sen}^{-1} n_2 + \frac{\pi}{2} (\tau - \sigma_3) = 0 \quad (3.6)$$

Si se despeja σ_3 ,

$$\sigma_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}^{-1} n_2} \left[(\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{sen}^{-1} n_1 - \sigma_2 \operatorname{sen}^{-1} n_2 + \frac{\pi}{2} \tau \right] \quad (3.7)$$

A medida que la grieta va creciendo la tensión en la barrera σ_3 necesaria para mantener el equilibrio va aumentando. La tensión σ_3 alcanza su valor máximo cuando la grieta ha alcanzado justamente la barrera y prácticamente no hay zona plástica (Figura 3.4). Considerando que no hay interferencia entre las caras de la grieta ($\sigma_1 = 0$) y para la grieta al borde la barrera ($n_1 = n_2 = (iD/2)/(iD/2 + r_o) \simeq 1$) se obtiene:

$$\sigma_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}^{-1} n_2} \left[\frac{\pi}{2} \tau \right] \quad (3.8)$$

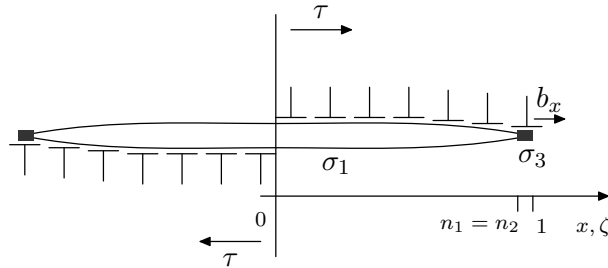


Figura 3.4: Grieta alcanzando la barrera.

El paso de la grieta al siguiente grano se producirá si la tensión σ_3 alcanza un valor crítico tal que posibilite la activación de fuentes de dislocaciones. La condición crítica de activación se escribe como

$$\frac{\sigma_3^i}{m_i^*} = \tau_c^i \quad (3.9)$$

donde m_i^* es un factor de orientación cristalográfica que proyecta en el plano y dirección de deslizamiento de la fuente en el grano adyacente la tensión σ_3 y τ_c^i es la tensión crítica necesaria para activar fuentes de dislocaciones. Si se igualan ambas ecuaciones se obtiene la tensión aplicada mínima necesaria τ_{Li} para activar deslizamiento plástico en el siguiente grano (se emplea la aproximación $\cos^{-1} n_2 = (2(1 - n_2))^{\frac{1}{2}} \approx 2(r_0^i/iD)^{\frac{1}{2}}$):

$$\tau_{Li} = \frac{4}{\pi} m_i^* \tau_c^i \left(\frac{r_0^i}{iD} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Con la formulación presentada y para un componente sin concentraciones de tensiones el límite de fatiga se obtiene formalmente para $i = 1$ en la ecuación anterior,

$$\tau_{FL} = \frac{4}{\pi} m_1^* \tau_c^1 \left(\frac{r_0^1}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Respecto a los parámetros r_0^i y τ_c^i sólo es posible hacer una discusión cualitativa sobre su evolución con el aumento de i . Pueden darse argumentos justificados para considerar tanto aumentos como disminuciones de ambos parámetros. Se pueden citar el incremento en la densidad de dislocaciones, el endurecimiento por deformación, las alteraciones en el grosor de las bandas de deslizamiento, la generación de fuentes de dislocaciones no bloqueadas, etc. Dado que la influencia de algunos de estos factores tiende a oponerse a las de otros, se ha supuesto que sus evoluciones se compensan y proporcionan un producto constante. Bajo esta suposición se puede obtener una relación entre τ_{Li} y τ_{FL} :

$$\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} = \frac{m_i^*}{m_1^*} \frac{1}{\sqrt{i}}, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (3.12)$$

La representación en coordenadas logarítmicas de la ecuación anterior respecto a la variable $a_i = iD/2$ proporciona el diagrama de Kitagawa-Takahashi [15]. De modo que, como fue indicado por de los Ríos [16], a partir del diagrama de Kitagawa-Takahashi del material puede obtenerse la secuencia de cocientes (m_i^*/m_1^*). La recopilación de valores para diversos materiales realizada por Vallero [17] muestra que los valores de (m_∞^*/m_1^*) se encuentran en una banda entre 3 y 4. Pero si se realiza una interpretación de los m_i^* como factores de orientación exclusivamente los valores del cociente (m_∞^*/m_1^*) se encontrarían en torno a 1.5, valor muy alejado de la banda experimental 3 – 4. Esta discrepancia puede estar basada en que en el modelo teórico no se tiene en cuenta el cierre de grieta, cuyo papel depende de la longitud de grieta y es mayor para grietas grandes y despreciable para grietas muy pequeñas. Por tanto, si se tiene en cuenta la combinación de la orientación cristalográfica y del cierre de grieta se puede explicar la progresión del parámetro (m_i^*/m_1^*) hasta los valores 3 – 4.

Los dos parámetros de los que depende τ_{Li} en la ecuación (3.12) tienen una evolución opuesta. El término $1/\sqrt{i}$ decrece con el crecimiento de la grieta mientras que el término (m_i^*/m_1^*) aumenta con el crecimiento de la grieta. La forma final del diagrama de Kitagawa-Takahashi es el resultado de la interacción entre estos dos mecanismos: por un lado el aumento de la capacidad de la grieta para superar barreras conforme su longitud se incrementa y por otro lado el aumento de la resistencia de las barreras al crecer la grieta. En los primeros granos los dos mecanismos parecen compensarse de modo que el diagrama en esa zona es prácticamente horizontal. Conforme aumenta el número de granos el crecimiento del cociente (m_i^*/m_1^*) se satura y a partir de ahí el término $1/\sqrt{i}$ hace que el diagrama tienda a la recta de pendiente $-1/2$ en coordenadas logarítmicas, característica de la MFEL.

Cuando no se dispone del diagrama de Kitagawa-Takahashi del material el valor de τ_{Li} se puede aproximar mediante la siguiente relación [17]:

$$\tau_{Li} = \tau_{FL} \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + a_0^f - (D/2)^f \right]^{\frac{1}{2f}}} \quad (3.13)$$

siendo $a_0 = [K_{th\infty}/\sigma_{FL}]^2/\pi$. Respecto al exponente f , el valor de 2.5 ha resultado apropiado para un amplio rango de materiales.

3.3. Extensión del modelo microestructural.

Cuando se intenta extender el modelo microestructural a situaciones más generales tanto en la geometría del sólido como en la carga aplicada, como podría ser el caso de un cuerpo entallado sometido a Modo I, se obtienen ecuaciones integrales singulares cuya resolución analítica es, hasta la fecha, y según el conocimiento del autor, prácticamente imposible. En los núcleos de las ecuaciones, además de las singularidades tipo Cauchy que reflejan la interacción entre las propias dislocaciones, aparecen términos cuadráticos y cúbicos en el denominador provenientes de la interacción con la superficie de la entalla. Para solucionar las ecuaciones obtenidas es necesario recurrir a técnicas de integración numérica. Las técnicas más clásicas de resolución de ecuaciones integrales hacen uso de las fórmulas de cuadratura. Sin embargo las cuadraturas habituales no son de aplicación para ecuaciones integrales con singularidades, siendo necesario modificarlas para que puedan ser utilizadas. A continuación se va a describir brevemente el concepto de cuadratura, introduciéndose posteriormente la técnica numérica que permite resolver ecuaciones integrales singulares y por tanto extender el modelo microestructural al estudio de grietas en situaciones más generales.

3.4. Resolución de ecuaciones integrales. Cuadratura de Gauss y polinomios de Jacobi

Las fórmulas de cuadratura permiten aproximar una integral definida por un sumatorio de términos de la forma siguiente:

$$\int_{-1}^1 \phi(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{i=1}^N W_i \phi(\zeta_i) \quad (3.14)$$

Es decir, se evalúa la función $\phi(\zeta)$ en ciertos puntos del intervalo de integración y la integral definida se aproxima por el sumatorio de los valores de la función en esos puntos multiplicados por unos ciertos factores de peso. Gauss propuso no emplear puntos de integración equidistantes con el propósito de mejorar la precisión de la aproximación de la integral. En concreto si se toma los puntos de integración como las raíces del polinomio de grado N que es ortogonal a todos los polinomios de grado menor en el intervalo $[a, b]$ respecto a la función $\omega(\zeta)$, denominada función peso, se obtiene una fórmula de cuadratura que es exacta para una función polinómica $f(x)$ de grado hasta $2N - 1$ [18]. Ello supone una gran mejora respecto a la precisión de $N - 1$ obtenida con el empleo de puntos equidistantes. En el caso concreto de la cuadratura de Gauss la función de peso tiene la siguiente expresión:

$$\omega(\zeta) = (1 - \zeta)^\alpha (1 + \zeta)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta \quad (3.15)$$

Los polinomios de Jacobi $P_N^{(\alpha, \beta)}(\zeta)$ son ortogonales respecto a la función peso $\omega(\zeta) = (1 - \zeta)^\alpha (1 + \zeta)^\beta$ en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, cumplen:

$$\int_{-1}^1 P_N^{(\alpha, \beta)}(\zeta) P_M^{(\alpha, \beta)}(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta = \delta_{NM}, \quad N, M = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Los puntos de integración son justamente las raíces del polinomio ortogonal de Jacobi de grado N , $P_N^{(\alpha, \beta)}(\zeta)$. Los valores de los puntos de integración y de sus pesos correspondientes se encuentran tabulados para esta cuadratura y también para otras que son de uso habitual [18].

Existen un grupo de procedimientos de resolución numérica de ecuaciones integrales que se basan en las fórmulas de cuadratura para el cálculo de integrales [19, 20]. Considérese una ecuación integral de Fredholm de primer tipo cuya incógnita es la función $\phi(\zeta)$:

$$\int_{-1}^1 \omega(\zeta) K(x, \zeta) \phi(\zeta) d\zeta = P(x), \quad (-1 < x < 1) \quad (3.17)$$

Aplicando la fórmula de la cuadratura para una serie de puntos x_k ($k = 1, 2, \dots, N$), se transforma el problema en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con las incógnitas discretas $\phi(\zeta_i)$, ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{i=1}^N W_i K(x_k, \zeta_i) \phi(\zeta_i) = P(x_k),$$

$$(-1 < x_k < 1, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.18)$$

En el caso de que la función $K(x_k, \zeta_i)$ presente una singularidad dentro del intervalo de integración no es posible aplicar las fórmulas de cuadratura habituales. Existen diversas técnicas numéricas para resolver los problemas con singularidades. Una de estas técnicas fue propuesta por Erdogan, Gupta y Cook y es aplicable a una ecuación integral singular tipo Cauchy, del tipo de las que se obtienen en el problema de equilibrio de dislocaciones. Este método hace uso de diversas propiedades de polinomios ortogonales y logra que se pueda aplicar la fórmula de cuadratura de Gauss a un ecuación integral con singularidad. A continuación se va a describir este método.

3.5. El método de Erdogan, Gupta y Cook para ecuaciones integrales singulares

Considérese una ecuación integral singular tipo Cauchy expresada en su forma general:

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x}, \quad (-1 < x < 1) \quad (3.19)$$

siendo $f(\zeta)$ la función incógnita. El núcleo del problema $K(x, \zeta) = 1/(\zeta - x)$ es singular dentro del intervalo de integración para un valor de $\zeta = x$. Se puede expresar $f(\zeta)$ como el producto de dos funciones, al modo de la ecuación de la cuadratura de Gauss, mostrada anteriormente:

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(\zeta) \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x}, \quad (-1 < x < 1) \quad (3.20)$$

La función peso de la cuadratura de Gauss, y por tanto el valor de los puntos de integración y los pesos, depende del comportamiento de la función incógnita en los extremos del intervalo de integración, en concreto de si toma valores acotados o singulares en ellos. De modo que se obtienen diversas fórmulas de cuadratura dependiendo de la condición de los extremos. Se va a describir la obtención de las fórmulas de cuadratura para el caso de que la función tome valores acotados en los extremos, por ser el de aplicación directa para la ecuación obtenida con el modelo de dislocaciones para la grieta y la zona plástica. Para las otras condiciones de

extremo el desarrollo es similar [7].

En el caso de una función incógnita $f(\zeta)$ que toma valores acotados en los extremos del intervalo la función de peso apropiada es la siguiente:

$$\omega(\zeta) = (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}}(1 + \zeta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.21)$$

es decir: $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Esta función toma el valor cero en ambos extremos del intervalo. Para este problema se suelen utilizar los polinomios de Chebyshev de segundo orden $U_N(\zeta)$ y para el caso de $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ se suelen utilizar los polinomios de Chebyshev de primer orden $T_N(\zeta)$, que son múltiplos normalizados de los polinomios de Jacobi $P_N^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\zeta)$ y $P_N^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\zeta)$ respectivamente. La relación entre los polinomios de Jacobi y los de Chebyshev es la siguiente [21]:

$$\begin{cases} U_N(\zeta) = (2g_{N+1})^{-1} P_N^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\zeta) \\ T_N(\zeta) = (g_N)^{-1} P_N^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\zeta) \\ g_N = 2^{-2N} \binom{2N}{N} \end{cases} \quad (3.22)$$

Dado que los polinomios de Jacobi y los de Chebyshev constituyen un sistema ortogonal completo, la función $\phi(\zeta)$ se puede expresar como un desarrollo en serie de estos polinomios. A continuación se aproxima la función $\phi(\zeta)$ por el siguiente desarrollo en serie truncado:

$$\phi(\zeta) \simeq \sum_{j=0}^p B_j U_j(\zeta) \quad (3.23)$$

Sustituyendo en la ecuación integral queda:

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^p B_j U_j(\zeta) \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} = \sum_{j=0}^p B_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 U_j(\zeta) \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \right] \quad (3.24)$$

Erdogan, Gupta y Cook proporcionan una ecuación que, mediante propiedades de polinomios ortogonales, permite eliminar la singularidad de la ecuación integral.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_N^{(\alpha, \beta)}(\zeta) \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} = -\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\pi} \cdot 2^{-\delta} \cdot P_{N-\delta}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad (3.25)$$

Siendo $\delta = -(\alpha + \beta)$. A partir de las propiedades de la función Gamma [22] y de la relación entre los polinomios de Jacobi y los de Chebyshev mostrada anteriormente se puede particularizar la ecuación para poderla aplicar al problema de estudio, resultando:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(\zeta) \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} = -T_{N+1}(x) \quad (3.26)$$

Si se introduce en la ecuación general queda:

$$S(x) = - \sum_{j=0}^p B_j T_{j+1}(x) \quad (3.27)$$

De modo que se ha eliminado la singularidad de la ecuación integral, pasando a ser las incógnitas del problema los coeficientes B_j . Erdogan et al. utilizan aún otra propiedad de los polinomios de Chebyshev para volver a la forma del problema en que la incógnita es la función ϕ :

$$T_{j+1}(v_k) = - \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_i^2)}{(N + 1)(u_i - v_k)} U_j(u_i) \quad (3.28)$$

Esta ecuación es sólo aplicable en ciertos puntos u_i y v_k , denominados puntos de integración y de colocación respectivamente. Estos puntos concretos son precisamente las raíces de los polinomios de Chebyshev de segundo orden y primer orden, de manera que la evaluación de la ecuación exactamente en estos puntos permite simplificar su expresión.

En el Apéndice A se muestra de forma completa la obtención de esta ecuación. En concreto los puntos de integración y colocación del problema resultan ser:

$$u_i = \cos \left(\pi \frac{i}{N + 1} \right) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.29)$$

$$v_k = \cos \left(\pi \frac{2k - 1}{2(N + 1)} \right) \quad k = 1, \dots, N + 1 \quad (3.30)$$

Obsérvese que se obtienen $N + 1$ puntos de colocación frente a N puntos de integración. El número de puntos de colocación depende del valor de δ en la ecuación (3.25). Para este problema el valor de δ es -1 , con lo que se obtiene un punto de colocación más. Ello implica que se obtenga también una ecuación de más, lo que como se verá en el próximo apartado, resulta de gran importancia en la aplicación de la técnica al problema de la grieta y su zona plástica.

Finalmente se introduce la ecuación anterior en la ecuación general de modo que la ecuación integral singular se transforma en un sistema de $N + 1$ ecuaciones lineales con N incógnitas, que son los N valores discretos de la función $\phi(u_i)$:

$$S(v_k) = \sum_{j=0}^p B_j \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_i^2)}{(N + 1)(u_i - v_k)} U_j(u_i) = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=0}^p B_j U_j(u_i) \frac{(1 - u_i^2)}{(N + 1)(u_i - v_k)} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\phi(u_i) \frac{(1 - u_i^2)}{(N + 1)(u_i - v_k)} \right] \quad k = 1, \dots, N + 1 \quad (3.31)$$

3.6. Aplicación al problema de una grieta en modo I en un medio infinito

A continuación se van a emplear las ecuaciones obtenidas anteriormente para el problema de una grieta y su zona plástica en un cuerpo infinito cargado en modo I. El problema viene representado por la siguiente ecuación:

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y(x) - \sigma_f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta) d\zeta}{x - \zeta}, \quad |x| \leq 1 \quad (3.32)$$

Se considera una tensión de fricción σ_f nula en la grieta ($\sigma_1 = 0$), y de valor σ_2 en la zona plástica. La tensión aplicada se supone uniforme (Figura 3.5).

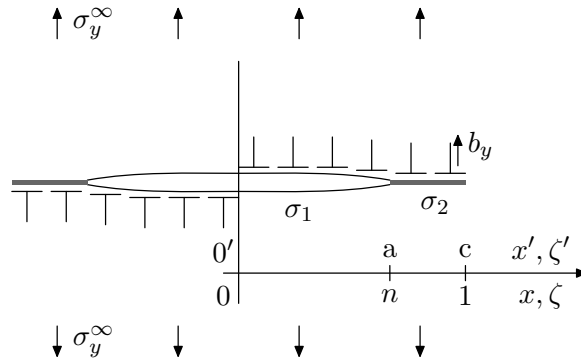


Figura 3.5: Grieta sometida a Modo I en un medio infinito.

Se vuelve a repetir la solución analítica del problema por comodidad en el seguimiento de la explicación:

$$f(\zeta) = \frac{\sigma_2}{\pi^2 A} \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n \zeta}{n - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n \zeta}{n + \zeta} \right| \right) \right] \quad (3.33)$$

$$n = \frac{a}{c} = \cos \left(\frac{\pi \sigma_y^{\infty}}{2 \sigma_2} \right) \quad (3.34)$$

Para aplicar el método, la función incógnita $f(\zeta)$ ha de escribirse como el producto de una función continua suave $\phi(\zeta)$ por una función de peso $\omega(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \phi(\zeta) \omega(\zeta) \quad (3.35)$$

siendo en este caso $\omega(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}$. El método numérico proporciona un conjunto de valores $\phi(u_i)$, de modo que se obtiene una solución final de la función incógnita que es aproximada en una serie de puntos discretos u_i :

$$f(u_i) = \phi(u_i) \omega(u_i) \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.36)$$

La aplicación del método numérico implica la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y(v_k) - \sigma_f(v_k)] = \sum_{i=1}^N W_i \frac{\phi(u_i)}{v_k - u_i}, \quad k = 1, \dots, N + 1. \quad (3.37)$$

Con:

$$u_i = \cos\left(\pi \frac{i}{N + 1}\right) \quad v_k = \cos\left(\pi \frac{2k - 1}{2(N + 1)}\right) \quad W_i = \frac{1 - u_i^2}{N + 1}$$

$$i = 1, \dots, N. \quad k = 1, \dots, N + 1. \quad (3.38)$$

Como ya ha sido comentado la tensión de fricción toma un valor cero en la grieta y un valor σ_2 en la zona plástica. Por lo tanto para poder definir los términos $\sigma_f(v_k)$ del sistema de ecuaciones es necesario conocer la posición de la transición grieta-zona plástica n , que permita saber los v_k que están en la grieta y los que están en la zona plástica. Si se impone como parámetro el valor de n , el término izquierdo del sistema de ecuaciones queda completamente determinado a excepción del valor de la tensión de fricción σ_2 en la zona plástica. De modo que en ese caso se tiene un sistema de $N + 1$ ecuaciones lineales que permite calcular los N valores $\phi(u_i)$ y el valor de la tensión de fricción en la zona plástica σ_2 . Para los diversos valores de $n \in [0, 1]$ se obtienen las respectivas soluciones numéricas de ϕ y el valor de la tensión σ_2 correspondiente. Es decir, el método numérico no sólo permite obtener la función $f(\zeta)$ sino que además proporciona de forma implícita la ecuación de existencia del problema, que relaciona el tamaño relativo de zona plástica con la tensión de fricción.

3.6.1. Solución numérica obtenida

En la Figura 3.6 se muestra la solución numérica de $f(\zeta)$ obtenida para un valor de $n = 0.75$ y un número de ecuaciones de $N = 200$. Su evolución es muy parecida a la solución teórica aunque siempre con valores ligeramente inferiores. Recoge perfectamente el carácter antisimétrico de la solución y también las pendientes muy acusadas de la función cuando se aproxima a las transiciones entre la grieta y la zona plástica. Los valores numéricos máximos que se obtienen de la función en las cercanías de esta transición obviamente no alcanzan el valor teórico, que es tendente a infinito. La resolución del sistema de ecuaciones proporciona también la tensión de fricción σ_2 en la zona plástica. Para esta posición de la

grieta de $n = 0.75$ la tensión de fricción teórica obtenida a partir de la ecuación de existencia es $\sigma_2^{teo} = 2.173$ MPa. El resultado numérico es $\sigma_2^{num} = 1.848$ MPa, ciertamente muy por debajo del resultado teórico. Se ha intentado mejorar este resultado aumentando el número de ecuaciones hasta un valor de $N = 1000$ pero el valor de la tensión prácticamente no ha cambiado. Este apreciable error en la tensión de fricción obtenida está motivado por el tipo de cuadratura empleado. La cuadratura para una función $f(\zeta)$ acotada en ambos extremos tiene muchos puntos de integración en las zonas de los extremos precisamente porque es en esa zona donde la función toma valores cercanos a cero y donde es más fácil que se cometan grandes errores en la aproximación de la función. Por contra tiene muchos menos puntos en la zona central. Este problema sin embargo requiere una gran precisión alrededor de las transiciones grieta-zonas plásticas, que evidentemente están alejadas de los extremos salvo en el caso de que n tome valores muy cercanos a cero o uno, de modo que esta cuadratura no puede proporcionar mucha exactitud en esa zona crítica. Esta falta de precisión en la zona de transición provoca que los valores numéricos de $f(\zeta)$ en esta zona sean mucho más bajos que los teóricos, de ahí que la tensión de fricción obtenida sea también más baja, ya que se requiere menos tensión de fricción para equilibrar las dislocaciones del dominio.

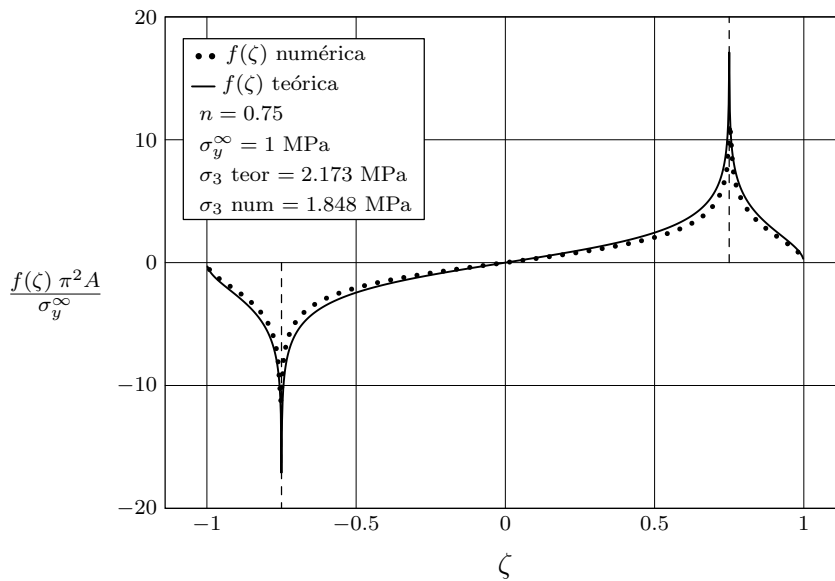


Figura 3.6: Solución numérica de $f(\zeta)$. Un intervalo de integración.

Lo ideal para este problema pues, sería desarrollar una cuadratura específica que utilizara un gran número de puntos en las zonas de transición y por tanto en la

que la ubicación de los puntos de integración dependiera del parámetro n . Existe otra opción que permite utilizar las cuadraturas habituales y consiste en dividir el intervalo en subintervalos, uno para la grieta y otros dos para las dos zonas plásticas. Ello implica utilizar tres cuadraturas, una para cada subintervalo, creadas para funciones del tipo acotado-singular o singular-singular en los extremos. Este tipo de cuadraturas sí proporciona un número alto de puntos de integración en las cercanías del extremo singular, que para nuestro problema corresponde a las zonas de transición. De modo que se podría alcanzar una gran precisión en la zona de transición y por tanto también en la tensión de fricción σ_2 . Esta idea de división en varios intervalos ha sido tomada de un trabajo no publicado realizado en 1996 por Vallellano. Esta técnica también ha sido utilizada por Porter et al. [23] para el estudio del factor de intensidad de tensiones de una grieta que cambia de dirección. A continuación se va a mostrar la técnica de división en subintervalos utilizando las cuadraturas de Erdogan et al. y su aplicación al problema de la grieta con su zona plástica.

3.7. Utilización del método en varios intervalos

En primer lugar se van a definir las fórmulas de cuadratura que se obtienen para el resto de condiciones de extremo de la función $f(\zeta)$. El proceso de obtención de las mismas es similar al ya presentado anteriormente para el caso acotado-acotado en los extremos y se muestra en los trabajos de Erdogan [7]. La cuadratura para una función singular en el extremo izquierdo del intervalo y acotada en el derecho, en adelante singular-acotada, es la siguiente:

$$\text{Función de peso: } \omega(\zeta) = \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \quad (3.39)$$

$$u_i = \cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right) \quad v_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right) \quad W_i = \frac{2(1-u_i)}{2N+1}$$

$$i = 1, \dots, N. \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.40)$$

Esta cuadratura proporciona un sistema de N ecuaciones lineales para N valores de la función incógnita $\phi(u_i)$. Para obtener una función acotada-singular, en la nomenclatura equivalente a la anterior, se emplea una cuadratura simétrica a la misma respecto al centro del intervalo de integración, resultando:

$$\text{Función de peso: } \omega(\zeta) = \sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \quad (3.41)$$

$$u_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right) \quad v_k = \cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right) \quad W_i = \frac{2(1+u_i)}{2N+1}$$

$$i = 1, \dots, N. \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.42)$$

De nuevo se obtiene un sistema de N ecuaciones lineales para N valores de la función incógnita $\phi(u_i)$. Por último se va a recoger la fórmula de cuadratura para el caso de la función singular-singular en los extremos, necesaria para próximos apartados:

$$\text{Función de peso: } \omega(\zeta) = \sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}} \tag{3.43}$$

$$u_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right) \quad v_k = \cos\left(\pi \frac{k}{N}\right) \quad W_i = \frac{1}{N}$$

$$i = 1, \dots, N. \quad k = 1, \dots, N-1. \tag{3.44}$$

En este caso la cuadratura proporciona $N-1$ ecuaciones lineales y N valores de la función incógnita $\phi(u_i)$. Nótese el diferente número de ecuaciones que proporciona la cuadratura de Erdogan et al. para las diferentes condiciones de extremo de la función $f(\zeta)$, derivado de los diferentes valores del parámetro δ en cada caso.

Una vez definidas las cuadraturas es posible retomar de nuevo el problema de la grieta y su zona plástica. Por simplificar se va a aplicar simetría al problema, de modo que se va a estudiar media grieta y una sola zona plástica. Ello permite estudiar el problema con sólo dos intervalos en vez de tres. En la Figura 3.7 se muestra una representación del mismo.

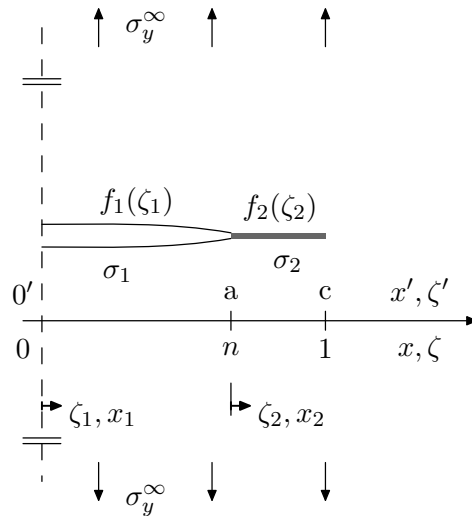


Figura 3.7: División en dos intervalos. Aplicación de simetría.

El dominio se ha dividido en dos partes, la grieta y la zona plástica. En cada zona se utilizan las variables de posición x_1, ζ_1 y x_2, ζ_2 respectivamente. La fun-

ción $f(\zeta)$ se ha dividido en dos funciones, $f_1(\zeta_1)$ para la grieta y $f_2(\zeta_2)$ para la zona plástica. Por la forma de la solución obtenida anteriormente será necesario aproximar la función $f_1(\zeta_1)$ con una cuadratura del tipo acotado-singular en los extremos y la función $f_2(\zeta_2)$ con una cuadratura del tipo singular-acotado en los extremos. Ello implica que el problema numérico quede constituido por dos ecuaciones integrales singulares de equilibrio, una por cada intervalo. En cada ecuación de equilibrio se obtienen dos integrales, que representan la fuerza realizada por las dislocaciones de cada intervalo sobre la dislocación genérica ubicada en x_1 o x_2 . En cuanto al núcleo de la integral, designado genéricamente como $K(x, \zeta)$, hay que modificar su expresión para considerar la condición de simetría. En el Apéndice B se muestra la obtención del núcleo de un problema al que se ha aplicado simetría $K_s(x, \zeta)$ a partir del núcleo general del mismo problema sin la aplicación de simetría $K(x, \zeta)$, resultando ser:

$$K_s(x, \zeta) = [K(x, \zeta) - K(x, -\zeta)] \quad (3.45)$$

Al aplicar este resultado al núcleo de Cauchy del problema del modo I en medio infinito resulta:

$$K_s^\infty(x, \zeta) = \left[\frac{1}{x - \zeta} + \frac{-1}{x + \zeta} \right] = \frac{2\zeta}{x^2 - \zeta^2} \quad (3.46)$$

En lo que sigue de desarrollo y por simplicidad de escritura se va a seguir empleando la expresión $K(x, \zeta)$ para designar al núcleo, aunque realmente corresponda al núcleo del problema simétrico $K_s^\infty(x, \zeta)$. De modo que ya se pueden escribir las dos ecuaciones integrales del problema:

$$\begin{aligned} x_1 \in [0, n] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_1] &= \frac{1}{\pi} \int_0^n f_1(\zeta_1) K(x_1, \zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{\pi} \int_n^1 f_2(\zeta_2) K(x_1, \zeta_2) d\zeta_2 \\ x_2 \in [n, 1] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_2] &= \frac{1}{\pi} \int_0^n f_1(\zeta_1) K(x_2, \zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{\pi} \int_n^1 f_2(\zeta_2) K(x_2, \zeta_2) d\zeta_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

A continuación se aplica un cambio de variable para transformar los dos intervalos originales en intervalos $[-1, 1]$, necesario para poder aplicar las fórmulas de cuadratura. Las variables ζ_i, x_i se transforman en u_i, v_i . El cambio es el siguiente:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (u_1 + 1) \frac{n}{2} & x_1 &= (v_1 + 1) \frac{n}{2} \\ \zeta_2 &= \left(\frac{1 - n}{2} \right) (u_2 + 1) + n & x_2 &= \left(\frac{1 - n}{2} \right) (v_2 + 1) + n \\ u_1, v_1 &\in [-1, 1] & u_2, v_2 &\in [-1, 1] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Las ecuaciones de equilibrio escritas en las nuevas variables u_i, v_i quedan:

$$\begin{aligned}
x_1 \in [0, n] : -\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_1] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_1, u_1) \frac{n}{2} du_1 + \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_2(u_2) K(v_1, u_2) \frac{1-n}{2} du_2 \\
x_2 \in [n, 1] : -\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_2, u_1) \frac{n}{2} du_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_2(u_2) K(v_2, u_2) \frac{1-n}{2} du_2 \quad (3.49)
\end{aligned}$$

A continuación se aplica a cada una de las cuatro integrales el método de Erdogan et al. para transformar las ecuaciones integrales en sistemas de ecuaciones. Las cuadraturas empleadas se muestran en la Tabla 3.1

Cuadraturas		
$f_i(u_i)$	$\omega_i(u_i)$	Caso
$f_1(u_1) = \omega_1(u_1)\phi_1(u_1)$	$\omega_1(u_1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}}$	Acotado-Singular
$f_2(u_2) = \omega_2(u_2)\phi_2(u_2)$	$\omega_2(u_2) = \sqrt{\frac{1-u_2}{1+u_2}}$	Singular-Acotado

Tabla 3.1: Fórmulas de cuadratura empleadas en Modo I medio infinito para dos intervalos.

Ya se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio transformadas en un sistema de ecuaciones, con los puntos de integración, los puntos de colocación y los pesos correspondientes a cada una de las cuadraturas empleadas. El sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_1] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{1k}, u_{1i}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1i}) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{2i})}{2N+1} K(v_{1k}, u_{2i}) \frac{1-n}{2} \phi_2(u_{2i}) \quad k = 1, 2, \dots, N. \\
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_2] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{2k}, u_{1i}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1i}) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{2i})}{2N+1} K(v_{2k}, u_{2i}) \frac{1-n}{2} \phi_2(u_{2i}) \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.50)$$

Puntos de colocación e integración:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right) & u_{2i} &= \cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right) \\ v_{1k} &= \cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right) & v_{2k} &= \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Obsérvese que el método numérico proporciona $2N$ ecuaciones. Se tienen por un lado las $2N$ incógnitas correspondientes a los N puntos de aproximación para cada función $\phi_1(u_{1i}), \phi_2(u_{2i})$. Si se vuelve a considerar la tensión de fricción en la grieta igual a cero resulta que el sistema numérico no proporciona en esta ocasión una ecuación de más como ocurría en el caso de un intervalo y que permitía relacionar la posición de la zona plástica n con la tensión de fricción σ_2 . Es decir el nuevo método no proporciona directamente la ecuación de existencia como sí lo hacía el anterior. Pues bien, la ecuación que falta se obtiene de imponer una condición de continuidad de la pendiente del desplazamiento plástico en los dos intervalos, empleada también por Porter et al. [23]. Esta condición equivale a que la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ tenga el mismo valor a ambos lados de las uniones de los intervalos, ya que la función $f(\zeta)$ representa la pendiente del desplazamiento plástico relativo entre las caras de la grieta:

$$f(\zeta) = \frac{dg(\zeta)}{d(\zeta)} \quad (3.52)$$

La condición de continuidad en la unión de los dos intervalos se expresa de la siguiente manera:

$$f_1(1) = f_2(-1) \quad (3.53)$$

Los valores de $f_1(1)$ y $f_2(-1)$ son:

$$f_1(1) = \omega_1(1)\phi_1(1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}} \Big|_{u_1 \rightarrow 1} \phi_1(1) \quad (3.54)$$

$$f_2(-1) = \omega_2(-1)\phi_2(-1) = \sqrt{\frac{1-u_2}{1+u_2}} \Big|_{u_2 \rightarrow -1} \phi_2(-1) \quad (3.55)$$

Si se sustituye en la igualdad y se resuelve el límite se obtiene la expresión:

$$\phi_1(1) = \phi_2(-1) \quad (3.56)$$

Pero las fórmulas de cuadratura empleadas no proporcionan el valor de la función ϕ en los extremos del intervalo. Para obtener una aproximación de estos

valores se puede emplear una fórmula de extrapolación que fue propuesta por Krenk [8] y que utiliza los N valores aproximados de la función ϕ en el intervalo. Las fórmulas de extrapolación dependen de nuevo de la condición de la función en los extremos. Para este problema se usan las fórmulas de extrapolación para una función acotada-singular y para una función singular-acotada, obteniéndose la siguiente ecuación de condición de continuidad:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_2(u_{2(N+1-i)}) \right) \quad (3.57)$$

Por lo tanto si se vuelve a considerar el valor de n como un parámetro inicial del problema se tiene un conjunto de $2N + 1$ ecuaciones, (3.50) y (3.57), que permiten obtener las $2N$ incógnitas de las funciones ϕ , $\phi_1(u_{1i})$ y $\phi_2(u_{2i})$, y el valor de la tensión en la barrera σ_2 .

3.7.1. Solución numérica obtenida con dos intervalos

Las ecuaciones numéricas para dos intervalos se han vuelto a aplicar al problema de la grieta y la zona plástica, con el mismo valor de n y el mismo número de puntos. En la Figura 3.8 se muestra la función $f(\zeta)$ obtenida. Nótese que al haber aplicado simetría al problema numérico sólo se obtiene la parte positiva de la función. Directamente se observa que los valores numéricos de $f(\zeta)$ prácticamente se superponen a los teóricos. En la zona de transición son claramente más altos que los obtenidos anteriormente para un solo intervalo, cercanos a 20 frente a unos valores ligeramente superiores a 10 en el caso anterior. Esto es debido al hecho ya comentado de que el número relativo de puntos en la zona de transición es mucho mayor empleando esta técnica de división en dos intervalos, siempre referido a un número igual de puntos en el total del intervalo de integración. Esta mayor precisión se confirma con los valores obtenidos de la tensión de fricción en la zona plástica. El valor teórico de σ_2 obtenido a partir de la ecuación de existencia resultaba ser $\sigma_2^{teo} = 2.173$ MPa y con el método numérico de dos intervalos se obtiene un valor de $\sigma_2^{num} = 2.174$ MPa. Es decir, un error de una milésima. Y simplemente aumentando un poco el número de ecuaciones se alcanza un error aún menor que una milésima. Este resultado confirma que la técnica de dos intervalos aproxima extraordinariamente bien la función $f(\zeta)$, incluyendo las zonas más complicadas como son las transiciones entre grieta y barrera.

3.8. Aplicación de la técnica de varios intervalos al modelo microestructural

Una vez comprobada la validez de la técnica de integración se está en disposición de abordar numéricamente el estudio del crecimiento de la grieta según el

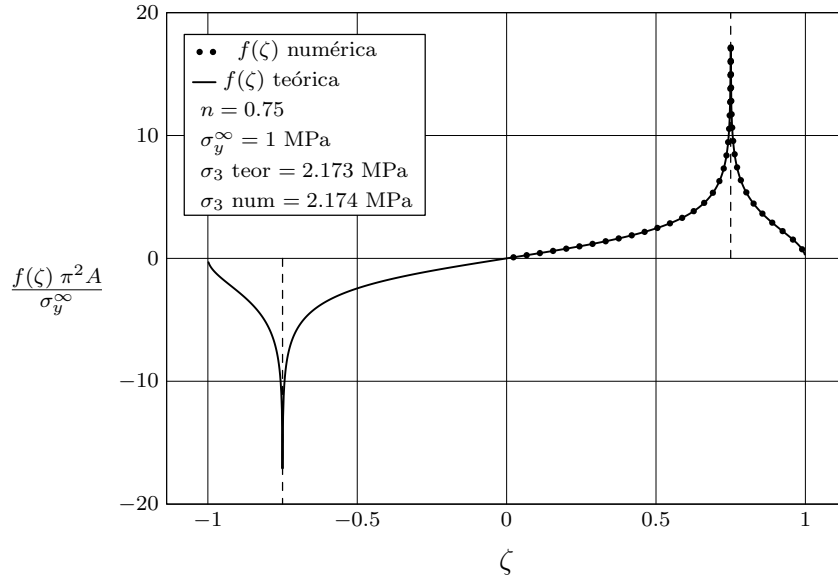


Figura 3.8: Solución numérica de $f(\zeta)$ con dos intervalos de integración. Simetría aplicada.

modelo microestructural. Para ello se vuelve a plantear el problema de una grieta en un medio infinito cargada en Modo I con su zona plástica asociada que alcanza hasta la barrera en el borde de grano. El problema se muestra en la Figura 3.9, en la que por sencillez se ha vuelto a aplicar simetría, de modo que sólo se representa media grieta con su zona plástica y barrera correspondiente.

Se repite la solución analítica por sencillez en el seguimiento de la explicación:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 A} \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_1 \zeta}{n_1 - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_1 \zeta}{n_1 + \zeta} \right| \right) \right] + (\sigma_3 - \sigma_2) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2 \zeta}{n_2 - \zeta} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2 \zeta}{n_2 + \zeta} \right| \right) \right] \right\} \quad (3.58)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\cos^{-1} n_2} \left[(\sigma_2 - \sigma_1) \sin^{-1} n_1 - \sigma_2 \sin^{-1} n_2 + \frac{\pi}{2} \sigma_y^\infty \right] \quad (3.59)$$

Para la resolución numérica el intervalo de integración se ha dividido en tres subintervalos, uno para la grieta, otro para la zona plástica y otro para la barrera. En cada intervalo se emplean las variables de posición x_1, ζ_1 , x_2, ζ_2 y x_3, ζ_3 respectivamente, con sus correspondientes funciones $f_1(\zeta_1)$, $f_2(\zeta_2)$ y $f_3(\zeta_3)$. En este caso

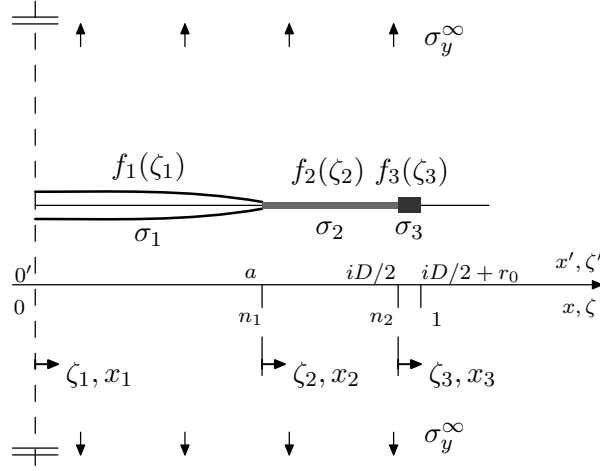


Figura 3.9: Grieta, zona plástica y barrera en medio infinito con simetría sometido a Modo I.

se aproxima la función $f_1(\zeta_1)$ y $f_3(\zeta_3)$ con las mismas cuadraturas que en el problema de dos intervalos, es decir una cuadratura del tipo acotado-singular y singular-acotado en los extremos, respectivamente. Para aproximar la función $f_2(\zeta_2)$ de la zona plástica central se emplea una cuadratura del tipo singular-singular en los extremos. De modo que se obtienen tres ecuaciones integrales singulares de equilibrio, una por cada intervalo y nueve integrales en total. Respecto al núcleo de la integral se vuelve a emplear el mismo que para el problema de dos intervalos simétrico (3.46). Las ecuaciones de equilibrio son similares a las obtenidas para dos intervalos. Son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_1 \in [0, n_1] : -\frac{\kappa+1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_1] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n_1} f_1(\zeta_1) K(x_1, \zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{\pi} \int_{n_1}^{n_2} f_2(\zeta_2) K(x_1, \zeta_2) d\zeta_2 + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{n_2}^1 f_3(\zeta_3) K(x_1, \zeta_3) d\zeta_3 \\
 x_2 \in [n_1, n_2] : -\frac{\kappa+1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_2] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n_1} f_1(\zeta_1) K(x_2, \zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{\pi} \int_{n_1}^{n_2} f_2(\zeta_2) K(x_2, \zeta_2) d\zeta_2 + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{n_2}^1 f_3(\zeta_3) K(x_2, \zeta_3) d\zeta_3 \\
 x_3 \in [n_2, 1] : -\frac{\kappa+1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_3] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n_1} f_1(\zeta_1) K(x_3, \zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{\pi} \int_{n_1}^{n_2} f_2(\zeta_2) K(x_3, \zeta_2) d\zeta_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_{n_2}^1 f_3(\zeta_3) K(x_3, \zeta_3) d\zeta_3 \\
& x_1, \zeta_1 \in [0, n_1] \quad x_2, \zeta_2 \in [n_1, n_2] \quad x_3, \zeta_3 \in [n_2, 1] \quad (3.60)
\end{aligned}$$

De nuevo se realiza un cambio de variable para transformar los tres intervalos originales en intervalos $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= (u_1 + 1) \frac{n_1}{2} & x_1 &= (v_1 + 1) \frac{n_1}{2} \\
\zeta_2 &= \left(\frac{n_2 - n_1}{2} \right) u_2 + \frac{n_2 + n_1}{2} & x_2 &= \left(\frac{n_2 - n_1}{2} \right) v_2 + \frac{n_2 + n_1}{2} \\
\zeta_3 &= \left(\frac{1 - n_2}{2} \right) (u_3 + 1) + n_2 & x_3 &= \left(\frac{1 - n_2}{2} \right) (v_3 + 1) + n_2 \\
& u_1, v_1 \in [-1, 1] & u_2, v_2 \in [-1, 1] & u_3, v_3 \in [-1, 1] \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Las cuadratura empleadas para cada intervalo se muestran en la Tabla 3.2.

Cuadraturas		
$f_i(u_i)$	$\omega_i(u_i)$	Caso
$f_1(u_1) = \omega_1(u_1)\phi_1(u_1)$	$\omega_1(u_1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}}$	Acotado-Singular
$f_2(u_2) = \omega_2(u_2)\phi_2(u_2)$	$\omega_2(u_2) = \sqrt{\frac{1}{1-u_2^2}}$	Singular-Singular
$f_3(u_3) = \omega_3(u_3)\phi_3(u_3)$	$\omega_3(u_3) = \sqrt{\frac{1-u_3}{1+u_3}}$	Singular-Acotado

Tabla 3.2: Fórmulas de cuadratura empleadas en Modo I medio infinito para tres intervalos.

Se obtiene el sistema de ecuaciones final siguiente:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y^\infty - \sigma_1] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1 + u_{1i})}{2N + 1} K(v_{1k1}, u_{1i}) \frac{n_1}{2} \phi_1(u_{1i}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} K(v_{1k1}, u_{2i}) \cdot \\
& \frac{n_2 - n_1}{2} \phi_2(u_{2i}) + \sum_{i=1}^N \frac{2(1 - u_{3i})}{2N + 1} K(v_{1k1}, u_{3i}) \frac{1 - n_2}{2} \phi_3(u_{3i}) \quad , \quad k1 = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_2] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{2k2}, u_{1i}) \frac{n_1}{2} \phi_1(u_{1i}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} K(v_{2k2}, u_{2i}) \cdot \\
 \frac{n_2 - n_1}{2} \phi_2(u_{2i}) &+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} K(v_{2k2}, u_{3i}) \frac{1-n_2}{2} \phi_3(u_{3i}) \quad , \quad k2 = 1, 2, \dots, N-1. \\
 \\
 -\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y^\infty - \sigma_3] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{3k3}, u_{1i}) \frac{n_1}{2} \phi_1(u_{1i}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} K(v_{3k3}, u_{2i}) \cdot \\
 \frac{n_2 - n_1}{2} \phi_2(u_{2i}) &+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} K(v_{3k3}, u_{3i}) \frac{1-n_2}{2} \phi_3(u_{3i}) \quad , \quad k3 = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Puntos de colocación e integración:

$$\begin{aligned}
 u_{1i} &= \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right) & u_{2i} &= \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right) & u_{3i} &= \cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right) \\
 v_{1k1} &= \cos\left(\pi \frac{2k_1}{2N+1}\right) & v_{2k2} &= \cos\left(\pi \frac{k_2}{N}\right) & v_{3k3} &= \cos\left(\pi \frac{2k_3-1}{2N+1}\right)
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

El método numérico proporciona solamente $3N - 1$ ecuaciones y es que de la cuadratura de la zona central se obtienen $N - 1$ ecuaciones. Pero de nuevo se puede volver a utilizar como condición adicional la imposición de continuidad de la pendiente del desplazamiento plástico en los intervalos. En este caso esto proporciona dos ecuaciones, una para la transición grieta-zona plástica y otra para la transición zona plástica-barrera. Las ecuaciones de unión de intervalos son las siguientes:

Unión grieta-zona plástica:

$$f_1(1) = f_2(-1) \tag{3.64}$$

Los valores de $f_1(1)$ y $f_2(-1)$ son:

$$f_1(1) = \omega_1(1)\phi_1(1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}} \Big|_{u_1 \rightarrow 1} \phi_1(1) \tag{3.65}$$

$$f_2(-1) = \omega_2(-1)\phi_2(-1) = \sqrt{\frac{1}{1-u_2^2}} \Big|_{u_2 \rightarrow -1} \phi_2(-1) \tag{3.66}$$

Si se sustituyen estas dos expresiones en la igualdad (3.64) y se calcula el límite se obtiene:

$$\sqrt{2}\phi_1(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(-1) \quad \Rightarrow \quad 2\phi_1(1) = \phi_2(-1) \quad (3.67)$$

Unión zona plástica-barrera:

$$f_2(1) = f_3(-1) \quad (3.68)$$

Los valores de $f_2(1)$ y $f_3(-1)$ son:

$$f_2(1) = \omega_2(1)\phi_2(1) = \frac{1}{\sqrt{1-u_2}\sqrt{1+u_2}} \Big|_{u_2 \rightarrow 1} \phi_2(1) \quad (3.69)$$

$$f_3(-1) = \omega_3(-1)\phi_3(-1) = \sqrt{\frac{1-u_3}{1+u_3}} \Big|_{u_3 \rightarrow -1} \phi_3(-1) \quad (3.70)$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad, en este caso la ecuación (3.68) y resolviendo el límite se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(1) = \sqrt{2}\phi_3(-1) \quad \Rightarrow \quad \phi_2(1) = 2\phi_3(-1) \quad (3.71)$$

Los valores de la función ϕ en los extremos de los intervalos se pueden obtener utilizando de nuevo las fórmulas de extrapolación de Krenk [8]. De modo que las ecuaciones de unión quedan:

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{2}{2N+1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1(u_{1i}) \right) \right] = \\ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{4N} \pi (2N-1) \right]}{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{4N} \pi \right]} \phi_2(u_{2(N+1-i)}) \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{4N} \pi (2N-1) \right]}{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{4N} \pi \right]} \phi_2(u_{2i}) \right) = \\ = 2 \left[\frac{2}{2N+1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_3(u_{3(N+1-i)}) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

El conjunto de las ecuaciones (3.62), (3.72) y (3.73) constituyen un conjunto de $3N+1$ ecuaciones. Si se vuelve a considerar cero la tensión de fricción en la grieta y se consideran como parámetros de entrada los valores de n_1, n_2 y la tensión de fricción σ_2 , el sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las $3N$ incógnitas $\phi_1(u_{1i}), \phi_2(u_{2i}), \phi_3(u_{3i})$ y además el valor de la tensión σ_3 . De nuevo el método numérico proporciona de forma implícita la condición de existencia que se obtiene teóricamente.

3.8.1. Solución numérica obtenida con tres intervalos

En la Figura 3.10 se muestra un ejemplo en el que se compara la función de distribución teórica con la numérica obtenida con el método propuesto, para un valor de $N = 100$. Se obtiene unas funciones $f(\zeta)$ teórica y numérica prácticamente idénticas. Se observan las discontinuidades que se producen en las transiciones grieta-zona plástica y zona plástica-barrera, motivadas por el cambio en la tensión de fricción. Los valores de la tensión en la barrera son también casi idénticos $\sigma_3^{teo} = 3.727$ MPa, $\sigma_3^{num} = 3.728$ MPa. Este resultado permite comprobar la gran exactitud del método numérico de Erdogan et al. para varios intervalos.

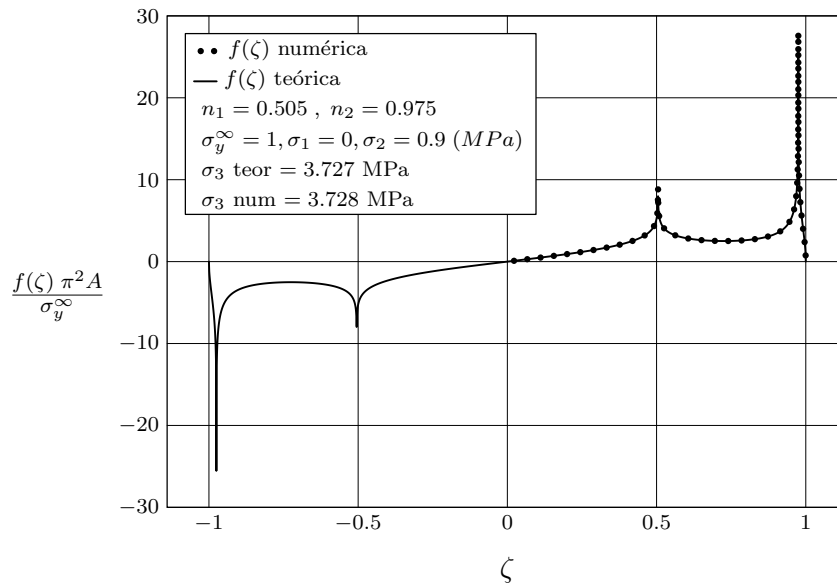


Figura 3.10: Comparación entre $f(\zeta)$ numérica y teórica. Grieta, zona plástica y barrera.

3.8.2. Convergencia del método de tres intervalos al de dos intervalos

El desarrollo numérico planteado para el estudio de la grieta y la zona plástica mediante dos intervalos es evidentemente válido para analizar el problema de la grieta y la barrera. Basta con dar a n un valor cercano a 1, por ejemplo, $n = 0.975$, valor utilizado para la posición de la barrera en el estudio de tres intervalos. Ciertamente el problema de grieta y barrera no es más que un caso límite del problema de grieta, zona plástica y barrera en el que la grieta va creciendo hasta

llegar a la barrera. Por lo tanto para que el método numérico sea consistente los resultados obtenidos con el planteamiento para tres intervalos deben tender a los del de dos intervalos cuando $n_1 \rightarrow n_2 = n$. En el siguiente bloque de cinco figuras (Figura 3.11) se muestra un ejemplo con varios resultados para tres intervalos en el que se va aumentando n_1 progresivamente hasta llegar a n_2 . La tensión σ_3 necesaria para mantener el equilibrio va aumentando al irse desplazando la grieta. Se observa que para el caso de tres intervalos con la grieta en la posición $n_1 = 0.9749$ el resultado de σ_3 es prácticamente igual al caso de dos intervalos con $n_2 = 0.975$. Por tanto el caso de tres intervalos tiende al de dos intervalos y el método es consistente.

3.9. Aplicación al problema de una grieta en modo I en un medio semi-infinito

A continuación se va a estudiar otro problema de interés que es el de una grieta en un medio semi-infinito, perpendicular a la superficie libre y cargada en Modo I. El equilibrio de un conjunto de dislocaciones perpendiculares a una superficie libre y cargadas en Modo I fue ya abordado en el Capítulo 2, resultando un núcleo del problema que era el siguiente:

$$K^{\frac{\infty}{2}}(x, \zeta) = \frac{1}{x - \zeta} - \frac{1}{x + \zeta} - \frac{2\zeta}{(x + \zeta)^2} + \frac{4\zeta^2}{(x + \zeta)^3} \quad (3.74)$$

Este núcleo está formado por cuatro términos, uno de ellos es el término singular de Cauchy que representa la solución para una dislocación en un medio infinito y los otros tres describen la influencia de la superficie libre. Es importante reseñar que ninguno de estos tres términos es singular en el intervalo de integración y por tanto es el término de Cauchy el dominante en la ecuación integral. Pero, además, las singularidades en las transiciones entre grieta, barrera y zona plástica no son diferentes de las existentes para el problema infinito, de modo que se puede proceder de forma similar a como se hizo en el problema infinito, dividiendo la función solución $f(\zeta)$ en varios intervalos y aplicándole la técnica de cuadratura de Erdogan et al. a cada uno de los intervalos, con las mismas funciones de peso que las empleadas en el problema infinito.

En la Figura 3.12 se muestra el problema objeto de estudio, con la grieta, de longitud a , la zona plástica y la barrera. Se ha realizado una división en tres intervalos, uno para cada zona. Las ecuaciones de equilibrio son exactamente iguales que las obtenidas en el caso de una grieta de longitud $2a$ en un medio infinito al que se ha aplicado simetría, con la única excepción del núcleo de la integral, que es el mostrado en la ecuación (3.74). Aplicando la técnica de Erdogan et al. se llega al mismo sistema de ecuaciones que para un medio infinito. En definitiva, para resolver el problema de una grieta, zona plástica y barrera en un medio semi-

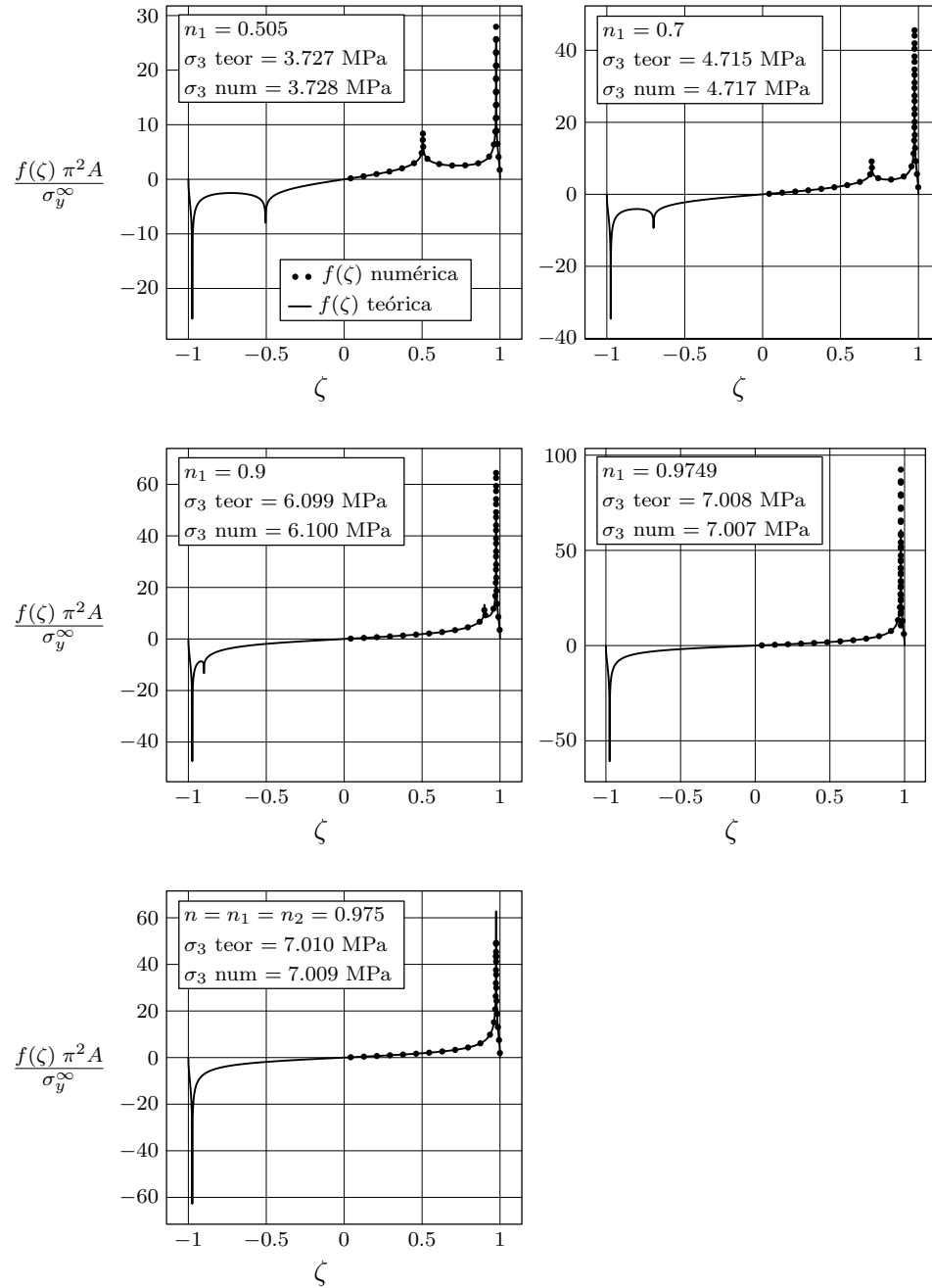


Figura 3.11: Convergencia del método de tres intervalos al de dos intervalos ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0.9$ MPa, $\sigma_y^\infty = 1$ MPa, $n_2 = 0.975$).

infinito se utilizan las ecuaciones (3.62), (3.72) y (3.73), con el núcleo definido en la ecuación (3.74).

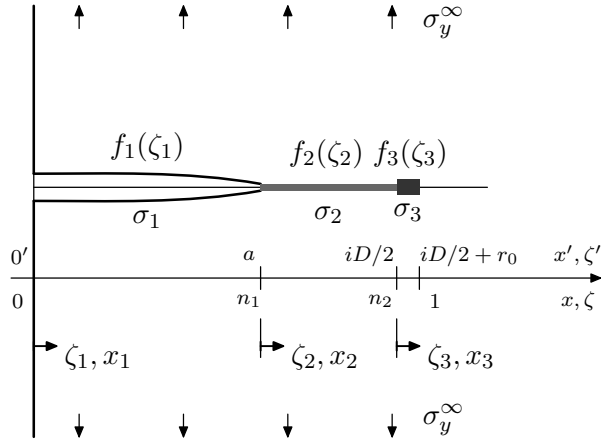


Figura 3.12: Grieta, zona plástica y barrera en medio semi-infinito sometido a Modo I.

3.9.1. Soluciones numéricas obtenidas para medio semi-infinito.

En la Fig. 3.13 se muestra un ejemplo de función de distribución de dislocaciones obtenida numéricamente para el problema de una grieta, zona plástica y barrera en un medio semi-infinito cargado en Modo I. No se muestra la solución analítica de la función $f(\zeta)$ por no ser conocida. Al igual que ocurría en el caso infinito, se observan las discontinuidades que se producen en las transiciones grieta-zona plástica y zona plástica-barrera, motivadas por el cambio en la tensión de fricción. La función $f(\zeta)$ tiene un valor finito distinto de cero para $\zeta = 0$, a diferencia del problema infinito, en el que tendía a cero. Este resultado indica que el modelo predice para medio semi-infinito una grieta con sus caras no paralelas entre sí en el borde exterior ($\zeta = 0$), mientras que para medio infinito predice que en el punto central de la grieta ($\zeta = 0$) las caras de la grieta son paralelas. Estos resultados recogen perfectamente la diferencia física existente entre ambos problemas en cuanto a las formas de las caras de la grieta cuando ésta se encuentra abierta. El otro resultado en el que se diferencian estos dos problemas es en la tensión en la barrera. El valor de la tensión en la barrera, para los mismos valores de los parámetros n_1, n_2, σ_1 y σ_2 , es superior al caso infinito: $\sigma_3^{\infty} = 4.330$ MPa frente a $\sigma_3^{\infty} = 3.727$ MPa. Este resultado es coherente si se analiza desde el punto de vista de la Mecánica de Fractura, ya que una grieta de longitud a en medio semiinfinito tiene un Factor de Intensidad de Tensiones superior al de una grieta de longitud $2a$ en medio infinito, debido a la presencia de la superficie libre.

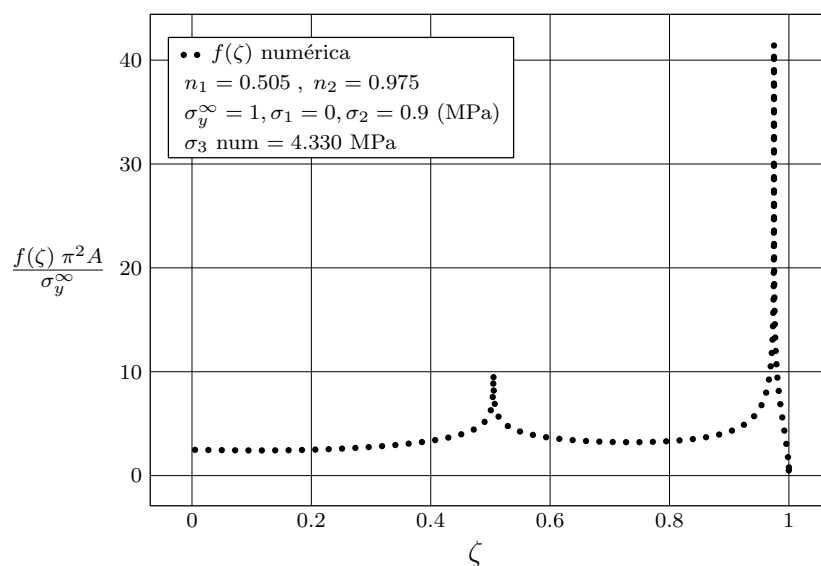


Figura 3.13: $f(\zeta)$ numérica para una grieta en Modo I semi-infinito ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2/\sigma_y^\infty = 0.9$).

Al igual que se hizo en el caso infinito, se analiza el caso límite en el que la grieta ha llegado a la barrera y prácticamente no existe zona plástica. El problema se muestra en la Figura 3.14. De nuevo se pueden emplear las mismas ecuaciones que para el medio infinito, en este caso para el modelo con dos intervalos, es decir, las ecuaciones (3.50) y (3.57), con la única precaución de utilizar el núcleo para un medio semi-infinito, definido en la ecuación (3.74).

En la Figura 3.15 se muestra un ejemplo de una función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ obtenida numéricamente para un problema semi-infinito con grieta y barrera. La tendencia de $f(\zeta)$ vuelve a ser la esperada, obteniéndose un valor distinto de cero en $\zeta = 0$ y una discontinuidad en la transición grieta-barrera. Los valores de la tensión en la barrera vuelven a ser superiores al caso infinito: $\sigma_3^{\frac{\infty}{2}} = 7.840$ MPa y $\sigma_3^\infty = 7.010$ MPa.

3.10. Comparación entre las tensiones en la barrera de los casos infinito y semi-infinito.

Desde el punto de vista de la Mecánica de Fractura, los problemas de una grieta de longitud $2a$ en el caso infinito y de a en el caso semi-infinito se diferencian en el valor del factor geométrico Y , cuyo valor es 1 para medio infinito y 1.1215

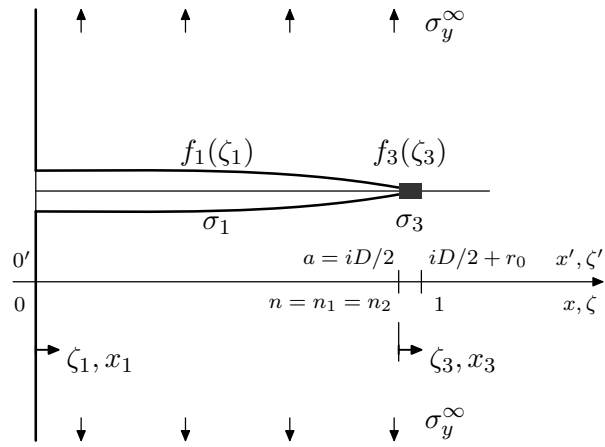


Figura 3.14: Grieta y barrera en medio semi-infinito sometido a Modo I.

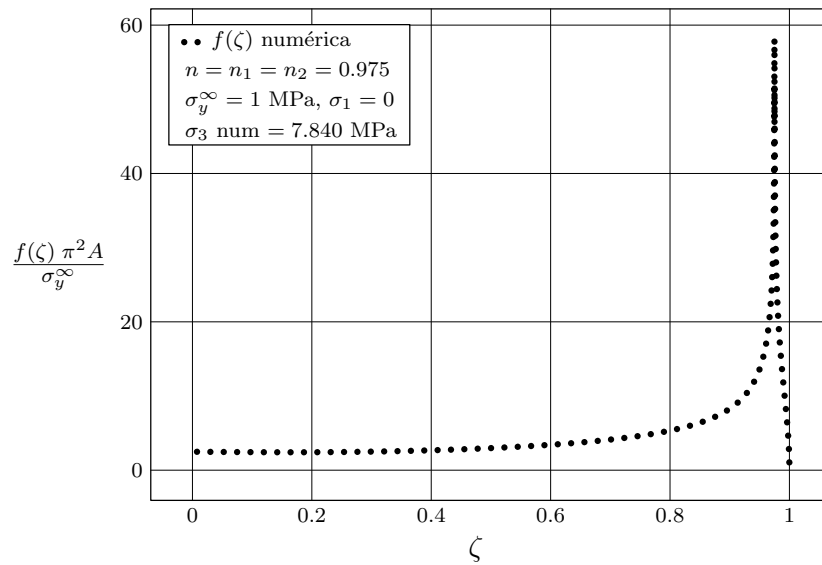


Figura 3.15: $f(\zeta)$ numérica para una grieta en Modo I semi-infinito ($\sigma_1 = 0$, $n = 0.975$).

para medio semiinfinito [24]. En la Tabla 3.3 se muestra una comparación de los valores de la tensión en la barrera σ_3 en el caso infinito y semi-infinito para dos intervalos. Se observa como su cociente tiende precisamente al valor de 1.1215

cuando el tamaño de la barrera tiende a 0. Este resultado valida en gran manera los resultados obtenidos con el modelo para un medio semi-infinito y además establece una clara conexión entre el modelo de dislocaciones y la Mecánica de Fractura, abriendo la posibilidad futura de la utilización para el modelo de los resultados de los Factores de Intensidad de Tensiones recogidos en la literatura.

Infinito y semi-infinito				
n (a/c)	N (nº ec)	$\frac{\sigma_3^\infty}{\sigma_y^\infty}$	$\frac{\sigma_3^\infty}{\sigma_y^\infty}$	$C = \frac{\sigma_3^\infty}{\sigma_3^\infty}$
0.9375	300	4.4196	4.9236	1.1140
0.9615	300	5.6454	6.3055	1.1169
0.9805	300	7.9191	8.8629	1.1192
0.9960	300	17.5850	19.7137	1.1210
0.9980	300	24.8360	27.8443	1.1213
0.9996	300	55.5453	61.9725	1.1215
0.9998	300	78.5464	87.1520	1.1215

Tabla 3.3: Comparación entre las σ_3 de los casos infinito y semi-infinito en Modo I.

Bibliografía

1. Navarro, A. and De los Ríos, E. R., 1988, *Short and long fatigue crack growth: a unified model*, Phil. Mag. A, Vol. 57, n. 1, pp. 12-36.
2. Navarro, A. and De los Ríos, E. R., 1988, *An alternative model of the blocking of dislocations at grain boundaries*, Phil. Mag. A, Vol. 57, n. 1, pp. 37-42.
3. Navarro, A. y De los Rios, E. R., 1992, *Fatigue crack growth by successive blocking of dislocations*, Proc. R. Soc. A437, pp. 375-390.
4. Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., 1963, *The spread of plastic yield from a notch*, Proc. R. Soc. A272, pp. 304-314.
5. Erdogan, F., 1969, *Approximate solutions of systems of singular integral equations*, SIAM Journal Applied Math, 17, n. 6, pp. 1041-1059.
6. Erdogan, F. and Gupta, G. D., 1972, *On the numerical solution of singular integral equations*, Quarterly of applied mathematics, 30, pp. 525-534.
7. Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T. S., 1973, *Mechanics of fracture. Methods of analysis and solutions of crack problems*, Capítulo 7 en: Numerical solution of singular integral equations, editado por G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden.
8. Krenk, S., 1975, *On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations*, Quarterly of applied mathematics, 32, pp. 479-484.
9. Weertman, J. and Weertman, J. R., 1964, *Element dislocation theory*, Macmillan Series (New York).
10. Head, A. K. and Louat, N., 1955, *The distribution of dislocations in linear arrays*, Aust. J. Phys. 8, pp. 1-7.
11. Taira, S., Tanaka, K. and Nakai, Y., 1978, *A model of crack tip band blocked by grain boundary*, Mech. Res. Commun., Vol. 5, pp. 375-381.
12. Muskhelishvili, N. I., 1953, *Singular integral equations*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

13. Vallellano, C., Navarro, A. y Domínguez, J., 2002, *Compact formulation for modelling cracks in infinite solids using distributed dislocations*, Phil. Mag. A, Vol. 2, n. 1, pp. 81-92.
14. Navarro, A. and De los Ríos, E. R., 1988, *Compact solution for a multizone BCS crack model with bounded or unbounded end conditions*, Phil. Mag. A, Vol. 57, n. 1, pp. 43-50.
15. Kitagawa, H. and Takahashi, S., 1976, *Application of fracture mechanics to very small cracks*, Int. Conf. Mech. Behaviour of Materials (ICM2), American Society of Metals, pp. 627-631.
16. De los Ríos, E. R. and Navarro, A., 1990, *Consideration of grain orientation and work hardening on short-fatigue-crack modelling*, Phil. Mag., Vol. 61, n. 3, pp. 435-449
17. Vallellano, C., 1998, *Tesis doctoral: Crecimiento de grietas pequeñas por fatiga en componentes con concentradores de tensión*, Universidad de Sevilla.
18. Arfken, G. B. and Weber, H. J., 1995, *Mathematical methods for physicists*, 4ª edición, Academic press, London.
19. Hildebrand, F. B., 1974, *Introduction to numerical analysis*, Dover publications, Inc, New York.
20. Szegő, G., 1939, *Orthogonal polynomials*, published by the American Mathematical Society.
21. Erdelyi, A., 1953, *Higher transcendental functions, Volumen II*, Krieger publishing company, Malabar, Florida.
22. Dwight, H. B., 1961, *Tables of integrals and other mathematical data*, McMillan publishing c., New York.
23. Porter, M. and Hills, D. A., 2002, *Solution of the boundary value problem for a kinking crack in a bulk compression field*, Journal of Strain Analysis, Vol. 37, n. 4.
24. Murakami, Y. , 1986, *Stress intensity factor handbook*, Vol. 1, Pergamon Press.

Capítulo 4

Modelo para entallas en Modo I

En este capítulo se va a analizar el problema de una grieta en un componente entallado plano mediante las técnicas de dislocaciones. Se comienza mostrando el problema particular de una entalla cargada en Modo III, trabajo desarrollado hace unos años por Navarro et al. [1] y completado por Vallellano [2] en su tesis doctoral. Como ha sido comentado en los capítulos anteriores, en las ecuaciones integrales que caracterizan el problema de una grieta en un sólido aparecen el término de Cauchy que refleja la interacción entre las propias dislocaciones y un conjunto de términos que representan la influencia de la superficie libre. En el caso particular del Modo III la grieta se modela con dislocaciones de tornillo y para este tipo de dislocaciones la interacción entre éstas y una superficie libre que sea perpendicular al conjunto de dislocaciones se puede resolver simplemente utilizando dislocaciones imagen [3], quedando un problema equivalente al de un medio infinito. Así que el problema de una grieta en Modo III para un medio infinito y para un medio semi-infinito se modela en ambos casos de la misma manera, únicamente con el término singular de Cauchy. Para extender la aplicación al caso de una entalla, Navarro empleó técnicas de transformación conforme en el plano complejo y una representación de la tensión antiplana mediante un potencial complejo, lo que le permitió reducir el problema de una entalla a la resolución de una integral singular similar a la existente para un medio semi-infinito. En esta primera parte del capítulo se muestra la solución analítica que obtuvo Navarro para el problema de una entalla elíptica en Modo III. También se presenta la aproximación que Vallellano realizó para problemas de entallas de diversas geometrías en Modo I, basándose en la expresión de las ecuaciones obtenidas en función de los parámetros habituales que se emplean para describir una entalla cualquiera (K_t, α, ρ) y en la sustitución de la tensión τ por σ .

En la segunda parte del capítulo se muestra una resolución numérica de la ecuación de equilibrio de una grieta en una entalla cargada en Modo I, en la que existe el término de Cauchy y un conjunto de términos provenientes de la interacción con la superficie libre y que son no singulares en el intervalo de integración. El planteamiento es similar al realizado en el capítulo anterior para un medio semi-infinito: se supone que el término dominante de la ecuación integral es el término singular de Cauchy y que las singularidades de la función solución son de un carácter similar a las obtenidas en un problema de medio infinito. Y se vuelve a emplear la técnica numérica desarrollada por Erdogan et al., basada en fórmulas de cuadratura y creada inicialmente para la resolución del problema infinito, obteniéndose las mismas ecuaciones que en el caso infinito con la única excepción del núcleo del problema, que es específico para cada geometría.

La resolución del equilibrio de dislocaciones en presencia de una entalla con las técnicas antes mencionadas proporciona la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ y la tensión en la barrera σ_3 necesaria para mantener el equilibrio en el dominio. De modo que se puede obtener una relación numérica entre la tensión aplicada y la tensión en la barrera σ_3 . Se considera que el valor de la tensión de activación en la barrera $m_i^* \tau_c^i$ es el mismo que para componentes sin entalla. Este valor se obtiene a partir de un modelo semi-infinito ya que la rotura de un componente se produce generalmente como consecuencia de grietas que crecen desde la superficie exterior y no desde el interior. Por comparación con este valor se calcula la tensión aplicada mínima necesaria para superar la barrera i -ésima. El gradiente de tensiones existente en la línea de grieta debido a la presencia de la entalla impide saber a priori qué barrera de todas las que tiene que atravesar la grieta para producir la rotura requiere la mayor tensión aplicada para ser superada. En el proceso de crecimiento de la grieta intervienen dos factores contrapuestos: por un lado la capacidad de la grieta de propagarse aumenta al crecer su longitud, pero por otro la tensión en el extremo de la grieta disminuye con el gradiente de tensiones existente. Así que es necesario estudiar la tensión necesaria para superar cada una de las sucesivas barreras, siendo la mayor de ellas el límite de fatiga del componente entallado.

El modelo microestructural se ha aplicado en primer lugar a una entalla circular en un sólido infinito. La elección se basa en que la mayoría de los resultados experimentales disponibles se refieren a esta geometría dada su facilidad de fabricación. Además se dispone de la solución analítica del problema de una dislocación en una placa infinita con un agujero circular, lo cual facilita enormemente la obtención de los núcleos de las ecuaciones integrales. Se han comparado las predicciones obtenidas usando el método microestructural con diversos resultados experimentales de la literatura y con la predicción proporcionada por otros métodos, obteniéndose resultados muy cercanos a los experimentales y al resto de modelos.

En la parte final del capítulo se muestra la aplicación del modelo microestruc-

tural a una placa semi-infinita con una entalla semicircular sometida a tracción. Para ello se modela la entalla mediante dislocaciones y se impone que las tensiones en el contorno de la entalla σ_r y $\tau_{r\theta}$ deben ser cero, técnica desarrollada por Hill et al. [4] para la obtención del Factor de Intensidad de Tensiones en entallas ubicadas en un semiplano. Los núcleos del problema son los de una dislocación en las cercanías de un medio semi-infinito, aplicándose equilibrio tanto a las dislocaciones que modelan la grieta y la barrera como a las que representan la entalla. Esta metodología se puede emplear para realizar predicciones del límite de fatiga en cualquier tipo de entalla como puede ser la elíptica, en V, etc.

4.1. El modelo para entallas en modo III.

En la tesis de Vallellano [2] se desarrolla la aplicación del modelo microestructural a entallas cargadas en Modo III. Como se ha comentado en la introducción del capítulo, la existencia de un gradiente de tensiones producido por la entalla provoca que las condiciones que afronta la grieta para superar las consecutivas barreras sean diferentes a las de un sólido sin concentración de tensiones. Para que se produzca el fallo por fatiga, la grieta debe ser capaz de superar la primera barrera y todas las siguientes. Pero en el caso del cuerpo entallado, a medida que crece la grieta disminuye la tensión en el frente de la misma. Ello puede provocar que la grieta supere varias barreras y no sea capaz de hacerlo en las siguientes, de modo que la grieta no se llegue a extender completamente, dando lugar a una grieta no-propagante. La mínima tensión aplicada que hace que la grieta sea capaz de superar todas las barreras será el límite a fatiga del componente entallado.

$$\tau_{FL}^N = \max \{ \tau_{Li}^N \} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

El valor de i para el que se obtiene el máximo indicará la longitud de la mayor grieta no-propagante que puede aparecer en el componente. Es posible obtener una solución analítica del modelo de dislocaciones para un componente con una entalla elíptica sometido a modo III (Figura 4.1). La grieta se vuelve a modelar mediante una distribución de dislocaciones que parte del extremo del concentrador. Se distinguen las mismas tres regiones: grieta, zona plástica y barrera (Figura 4.2).

Haciendo uso de técnicas de transformación conforme en el plano complejo y de la representación de la tensión cortante antiplana a través de un potencial complejo se puede transformar matemáticamente el problema de la grieta con entalla elíptica en un caso simple de grieta creciendo en un medio semiinfinito. La resolución analítica es posible sólo para el caso antiplano. En este caso se emplean dislocaciones de tornillo y para este tipo de dislocaciones la presencia de un medio semi-infinito se puede resolver mediante dislocaciones imagen [3], quedando un problema equivalente al de un medio infinito. La tensión τ_{Li}^N que es necesario aplicar para que la grieta que se encuentra en el componente entallado supere la i -ésima barrera es la siguiente [5]:

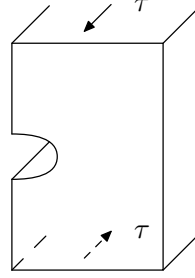


Figura 4.1: Sólido entallado sometido a carga antiplana.

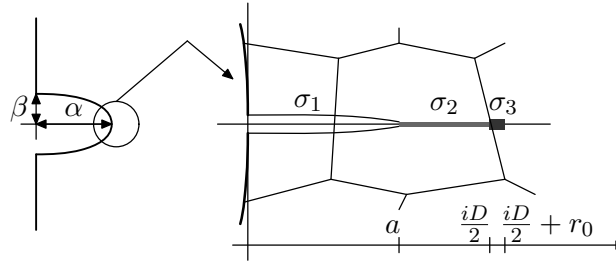


Figura 4.2: Grieta, zona plástica y barrera en un sólido entallado.

$$\frac{\tau_{Li}^N}{\tau_{FL}} = \left(\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} \right) \frac{\sqrt{i}}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} \left[\frac{\bar{\beta}}{\lambda_i} + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

donde

$$\lambda_i \approx \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left[\bar{\alpha} \sqrt{(\bar{\alpha} + i)^2 - \bar{\gamma}^2} - \bar{\beta}(\bar{\alpha} + i) \right]$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{D/2} \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{D/2} \quad \bar{\gamma}^2 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2$$

Esta expresión permite obtener el diagrama de Kitagawa-Takahashi del componente entallado. En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo para $\bar{\alpha}_0 = 2a_0/D = 15$, $\bar{\alpha} = 100$. Se presenta la tensión umbral τ_{Li}^N necesaria para propagar una grieta que se encuentra en la posición i para diversos valores de K_t . Se observa que al aumentar el K_t la curva de tensión umbral presenta un límite superior que ya no está en la primera barrera, de modo que, si la tensión aplicada no es suficientemente alta, la grieta puede superar varias barreras para finalmente quedar bloqueada en una barrera interna. Se obtiene así una grieta no-propagante, cuya longitud es

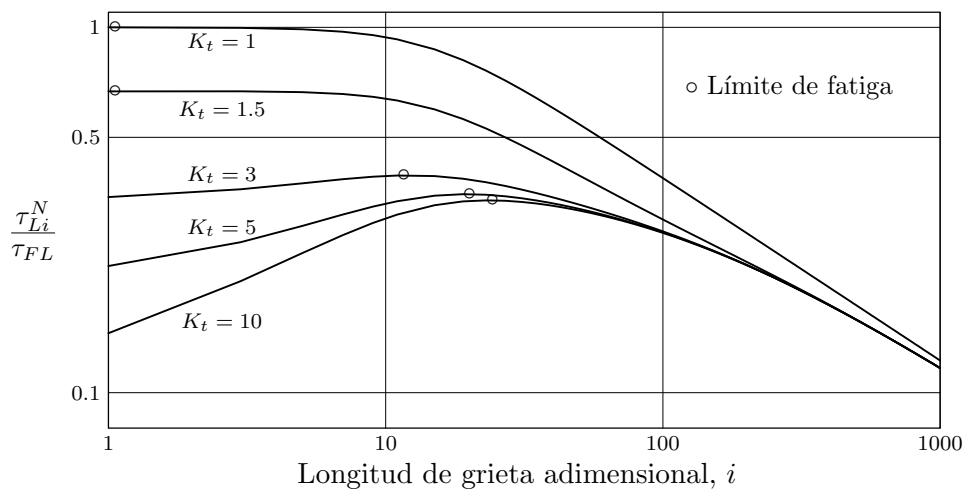


Figura 4.3: Diagrama de Kitagawa de un material entallado.

función del nivel de tensión aplicado. Existe en la literatura abundante trabajo experimental que corrobora este comportamiento [6, 7].

4.2. Ecuación aproximada para entallas en modo I

Vallellano [2, 8] propuso una generalización de las ecuaciones obtenidas anteriormente para el caso de entallas diferentes a la elíptica y para grietas creciendo en modo I. El factor principal que controla el comportamiento de una grieta en una entalla genérica es la distribución de tensiones alrededor de dicha entalla. En una entalla elíptica la expresión de las tensiones es la siguiente:

$$T_0(x) = \frac{\tau(\alpha + \beta)}{\beta + \frac{\alpha\eta(x)}{\sqrt{1+\eta^2(x)}}} \quad (4.3)$$

donde

$$\eta(x) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha\sqrt{(\alpha + x)^2 - \alpha^2 + \beta^2} - \beta(\alpha + x) \right] \quad (4.4)$$

y la coordenada x está medida desde el vértice de la entalla. Es esperable que el comportamiento de dos grietas creciendo en dos entallas distintas de un mismo material pero que tengan la misma distribución de tensiones sea semejante. La distribución de tensiones alrededor de una entalla viene controlada principalmente por tres parámetros: el factor de concentración de tensiones (K_t), el radio de

curvatura de la entalla (ρ) y la profundidad de la entalla (α) [9]. Luego para otro tipo de entallas diferentes de la elíptica parece justificado el usar las ecuaciones obtenidas para ellas, pero expresadas en función de los parámetros generales K_t , ρ , α . Teniendo en cuenta que $\beta = \sqrt{\rho\alpha}$ y $K_t = 1 + 2\alpha/\beta$ estas ecuaciones quedan como:

$$T_0(x) = \frac{\tau K_t}{1 + \frac{(K_t-1)\eta(x)}{\sqrt{1+\eta^2(x)}}} \quad (4.5)$$

donde

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{\alpha\rho}}{\alpha - \beta} \left[\sqrt{1 + \frac{x}{\rho} \left(2 + \frac{x}{\alpha}\right)} - \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) \right] \quad (4.6)$$

Y para el valor umbral de propagación

$$\tau_{Li}^N = \tau_{Li} \frac{\sqrt{iD/2}}{K_t} \left[\frac{1}{\lambda_i \sqrt{\alpha\rho}} + \frac{(K_t - 1)^2}{\alpha \sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

con

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\alpha\rho}}{\alpha - \rho} \left[\sqrt{1 + \frac{iD/2}{\rho} \left(2 + \frac{iD/2}{\alpha}\right)} - \left(1 + \frac{iD/2}{\alpha}\right) \right] \quad (4.8)$$

Para poder generalizar las ecuaciones al caso de modo I hay que dar un paso más. En componentes bajo cargas axiales, la tensión representativa es la tensión axial σ_{yy} . Si la ecuación (4.5) es capaz de representar adecuadamente el campo de tensiones alrededor de una entalla bajo carga axial, se podría emplear la ecuación de condición umbral obtenida en el modo III para el caso de modo I sin más que sustituir la tensión tangencial τ por la tensión normal σ . Se ha analizado el campo tensional para diversas entallas en modo I y se ha observado que la evolución predicha por la ecuación (4.5) es bastante precisa [2]. De modo que es razonable que se puedan utilizar las ecuaciones de la entalla elíptica en modo III para cualquier tipo de entallas en modo I sin más que sustituir en la ecuación (4.2) la tensión σ por la τ y empleando los parámetros generales K_t , ρ y profundidad de entalla α . Se obtiene la ecuación siguiente:

$$\sigma_{Li}^N = \sigma_{Li} \frac{\sqrt{iD/2}}{K_t} \left[\frac{1}{\lambda_i \sqrt{\alpha\rho}} + \frac{(K_t - 1)^2}{\alpha \sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

con λ_i definido en la ecuación (4.8). Este modelo aproximado ha sido comparado con resultados experimentales obtenidos de la literatura (El Haddad et al., Frost y Dugdale, Tanaka y Akinawa, Lukas et al., DuQuesnay et al., etc.) [2], obteniéndose predicciones muy similares a los resultados reales. En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de aplicación del modelo en el que se reproduce el diagrama de Frost para probetas con entallas en V [6].

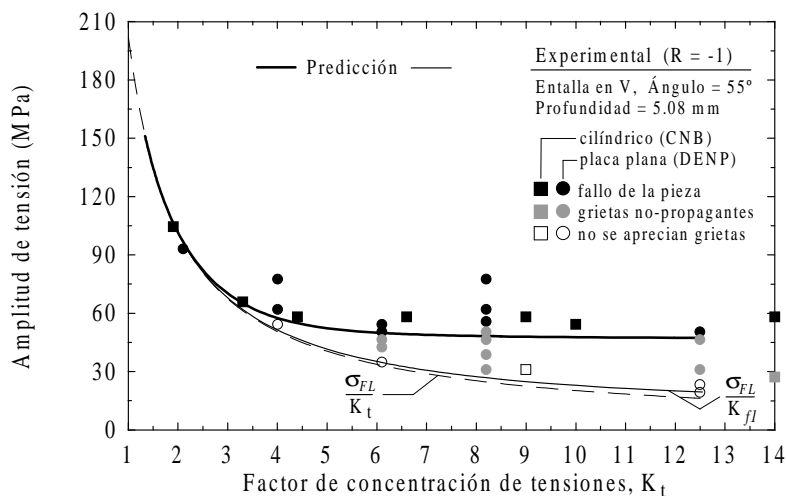


Figura 4.4: Diagrama de Frost obtenido con la ecuación aproximada.

4.3. Criterio de activación de deslizamiento plástico para cuerpos entallados cargados en modo I

Cuando se estudia el problema de una grieta en un componente entallado cargado en Modo I mediante las técnicas de distribución de dislocaciones se obtiene una ecuación integral singular de la que, hasta ahora, no se conoce su resolución analítica. El núcleo de la ecuación incluye, además del término de Cauchy procedente de la interacción entre las dislocaciones, un conjunto de términos procedentes de la interacción con la superficie libre. En general las ecuaciones son de la forma:

$$-\frac{1}{A} [\sigma_y^\infty(x) - \sigma_f(x)] = \int_{-1}^1 f(\zeta)K(x, \zeta) d\zeta, \quad |x| < 1 \quad (4.10)$$

donde $K(x, \zeta)$ representa el núcleo de la ecuación y adopta diferentes expresiones en función de la geometría del sólido y de la entalla. Para resolver esta ecuación integral se aplica el método numérico de Erdogan et al. para varios intervalos, explicado en el capítulo anterior. Esto es posible si se supone que el término dominante de la ecuación integral sigue siendo el término singular de Cauchy y que las singularidades de la función solución son de un carácter similar a las obtenidas en un problema de medio infinito. En efecto, el resto de términos del núcleo provenientes de la influencia de la superficie externa del sólido son no singulares en el intervalo de integración, lo que implica que sea el único término singular del núcleo, el término de Cauchy, el que caracterice el tipo de solución obtenida

para la ecuación integral. Ello justifica el utilizar una técnica de cuadratura creada inicialmente para resolver una ecuación integral con sólo el término de Cauchy.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones integrales singulares, de forma similar a cómo se hizo en el capítulo anterior, se puede obtener una relación numérica entre la tensión aplicada σ_y^∞ y la tensión en la barrera σ_3 , que en general dependerá de las variables microestructurales del problema, que son: el tamaño de grano D , la longitud de grieta i y el tamaño de barrera r_0 . También dependerá de las características geométricas de la entalla, expresadas genéricamente con las variables: K_t , ρ , α . La relación se puede expresar:

$$\sigma_3^i = f(D, i, r_0, K_t, \rho, \alpha) \sigma_y^\infty \quad (4.11)$$

Si la tensión aplicada σ_y^∞ se aumenta suficientemente, la tensión en la barrera σ_3^i puede alcanzar la tensión crítica de activación de deslizamiento $m_i^* \tau_c^i$ y la grieta pasaría al siguiente grano. Denominando σ_{Li}^N al valor de la tensión aplicada en dicho instante, se cumplirá:

$$m_i^* \tau_c^i = f(D, i, r_0, K_t, \rho, \alpha) \sigma_{Li}^N \quad (4.12)$$

Por otro lado, la condición de activación para un sólido infinito no entallado era (3.8, 3.9):

$$m_i^* \tau_c^i = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{Li}}{\arccos(n_2)} \quad (4.13)$$

siendo $n_2 = \frac{iD/2}{(iD/2)+r_0}$. La rotura por fatiga en un material sin entalla se produce en general a partir de una grieta que nace en la parte superficial del sólido y no en su interior. Puede argumentarse, por tanto, que el modelo microestructural que más se acerca a la realidad para la rotura en un sólido no entallado es el que considera una grieta en un material semi-infinito y no en un medio infinito. En el capítulo anterior se ha visto que existe una relación numérica entre la tensión en la barrera para un medio infinito y semi-infinito. Para los tamaños de barrera considerados en este análisis, la tensión en la barrera en el caso semi-infinito es aproximadamente 1.12 veces mayor que en el caso infinito, de acuerdo a lo esperable en Mecánica de Fractura. Ello implica que es necesario hacer una corrección a la ecuación anterior y multiplicarla por el factor 1.12 quedando finalmente el criterio microestructural como:

$$m_i^* \tau_c^i = \frac{\pi}{2} \frac{1.12 \sigma_{Li}}{\arccos(n_2)} \quad (4.14)$$

Suponiendo que el valor de la tensión de activación $m_i^* \tau_c^i$ es el mismo para un componente con entalla o sin entalla, se puede obtener la tensión aplicada necesaria para superar la barrera i -ésima en el componente entallado:

$$\sigma_{Li}^N = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{Li}}{\arccos(n_2)} \frac{1.12}{f(D, i, r_0, K_t, \rho, \alpha)} \quad (4.15)$$

En este caso, a diferencia del caso infinito, existe un gradiente de tensiones en la grieta producido por la entalla, por lo que hay que determinar qué barrera i requerirá la mayor tensión para ser superada. El límite de fatiga del componente entallado σ_{FL}^N será la tensión mínima que es necesario aplicar para superar todas y cada una de las barreras, es decir:

$$\sigma_{FL}^N = \max\{\sigma_{Li}^N\} = \max\left\{\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{Li}}{\arccos(n_2)} \frac{1.12}{f(D, i, r_0, K_t, \rho, \alpha)}\right\}, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (4.16)$$

Recordemos que σ_{Li} es la tensión aplicada mínima necesaria para que una grieta que se extiende a través de i granos se propague en un sólido sin concentración de tensiones. Su valor se obtiene, por tanto, mediante el diagrama de Kitagawa-Takahashi del material, que se debería obtener experimentalmente. Si no se dispone del diagrama, puede volverse a utilizar la expresión propuesta por Vallellano [2]:

$$\sigma_{Li} = \sigma_{L1} \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + a_0^f - (D/2)^f\right]^{\frac{1}{2f}}} \quad (4.17)$$

con $\sigma_{L1} = \sigma_{FL}$.

4.4. Aplicación a una entalla circular

Como primer ejemplo de aplicación de la metodología propuesta se ha escogido una entalla de tipo circular, como se muestra en la Figura 4.5. Se trata de un agujero en un medio infinito sometido a una carga de fatiga en tracción-compresión y se desea obtener una predicción del límite de fatiga en función del tamaño del agujero R . La elección del problema viene motivada por dos razones: la primera es que la mayoría de los resultados experimentales disponibles se refieren a esta geometría, dada su facilidad de fabricación. La segunda es que se dispone de la solución analítica del problema de una dislocación en una placa infinita con un agujero circular, mostrada en el Capítulo 2, lo que permite obtener los núcleos de las ecuaciones integrales con facilidad.

4.4.1. Obtención de la tensión en la barrera.

En la Figura 4.6 se presenta el problema modelado mediante dislocaciones. Se aplica simetría respecto al eje vertical para simplificar el problema. Nótese que $\sigma_y^\infty(x'')$ es la tensión externa aplicada en las regiones alejadas del agujero mientras que $\sigma_y(x'')$ es la tensión que aparecería en la línea de la grieta si ésta no existiera [10]. Para obtenerla se utiliza la expresión de las tensiones $\sigma_{\theta\theta}$ ($\theta = 0$) en

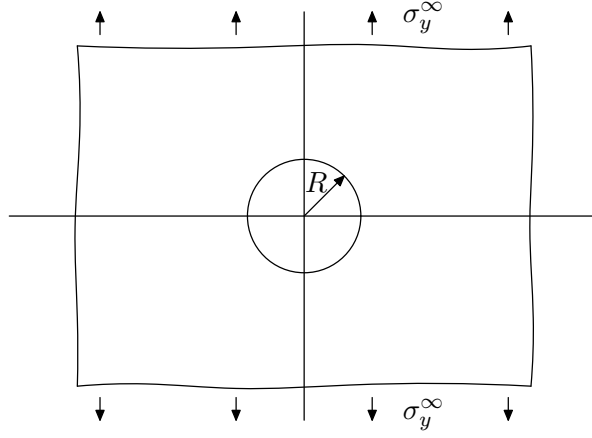


Figura 4.5: Placa infinita con agujero circular sometida a tracción.

la solución clásica del agujero circular en una placa infinita sometida a tensión de tracción σ_y^∞ [11]:

$$\sigma_y(x'') = \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left[2 + \left(\frac{R}{x''} \right)^2 + 3 \left(\frac{R}{x''} \right)^4 \right] \quad \text{Con } x'' \in [R, \infty] \quad (4.18)$$

Los núcleos para una grieta en un agujero circular, obtenidos por Dundurs y Mura [12], se presentaron en el Capítulo 2. En este caso el vector de Burgers tiene sólo componente b_y . Particularizando los núcleos para $y_k = 0$ y utilizando la expresión de Peach-Koehler (2.15) que proporciona la fuerza que un campo tensional general produce sobre una dislocación, se obtiene que, para este problema, de los seis núcleos existentes sólo interviene el núcleo $K_{y(yy)}$. Utilizando las variables $x_k = x''$, $y_k = 0$, $\zeta_k = \zeta''$ se obtiene finalmente el núcleo del problema [13]:

$$K^c(x'', \zeta'') = \frac{1}{x'' - \zeta''} - \frac{\zeta''}{x''\zeta'' - R^2} - \frac{(\zeta''^2 - R^2)R^2}{\zeta''(x''\zeta'' - R^2)^2} \left[\frac{\zeta''^2}{R^2} - \frac{\zeta''^2 - R^2}{x''\zeta'' - R^2} \right] + \frac{\zeta''^2 - R^2}{x''^2\zeta''} + \frac{1}{x''} + \frac{R^2}{x''^3} \quad x'', \zeta'' \in [R, R+c] \quad (4.19)$$

A partir de este núcleo y mediante la aplicación de simetría se puede obtener el núcleo para dos grietas opuestas en un agujero circular. La ecuación es la siguiente:

$$K_s^c(x'', \zeta'') = [K^c(x'', \zeta'') - K^c(x'', -\zeta'')] \quad (4.20)$$

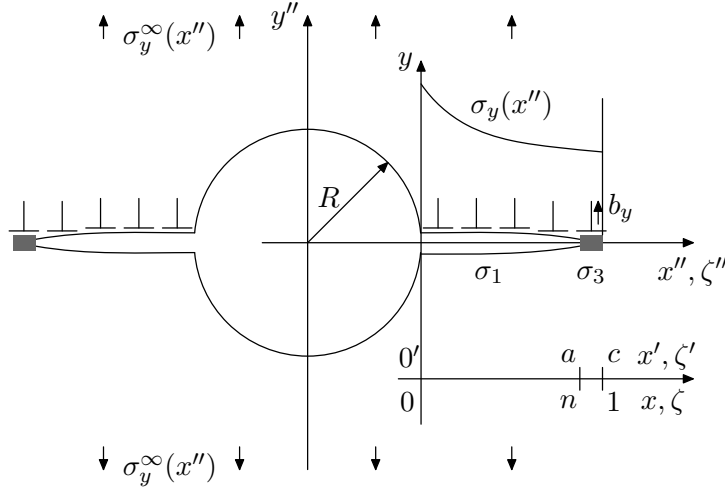


Figura 4.6: Placa infinita con agujero circular sometida a tracción modelada mediante dislocaciones.

La ecuación de equilibrio para una dislocación genérica ubicada en la posición x'' para cada uno de los dos intervalos se escribe de la forma siguiente (por simplicidad de escritura en todo el desarrollo se emplea la notación K para referirse al núcleo de dos grietas en un agujero K_s^c):

$$\begin{aligned}
 x'' \in [R, R+a] : -\frac{\kappa+1}{2\mu} [\sigma_y(x'') - \sigma_1] &= \frac{1}{\pi} \int_R^{R+a} f_1(\zeta_1'') K(x_1'', \zeta_1'') d\zeta_1'' + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{R+a}^{R+c} f_3(\zeta_3'') K(x_1'', \zeta_3'') d\zeta_3'' \\
 x'' \in [R+a, R+c] : -\frac{\kappa+1}{2\mu} [\sigma_y(x'') - \sigma_3] &= \frac{1}{\pi} \int_R^{R+a} f_1(\zeta_1'') K(x_3'', \zeta_1'') d\zeta_1'' + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{R+a}^{R+c} f_3(\zeta_3'') K(x_3'', \zeta_3'') d\zeta_3''
 \end{aligned}$$

$$\text{Con : } x_1'', \zeta_1'' \in [R, R+a] \quad x_3'', \zeta_3'' \in [R+a, R+c] \quad (4.21)$$

Como es usual, estas ecuaciones se normalizan para que los intervalos de integración sean $[-1, 1]$. Los cambios de variable realizados son los siguientes:

$$\text{Primer cambio: } \zeta_1 = \frac{\zeta_1'' - R}{c} \quad x_1 = \frac{x_1'' - R}{c}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_3 &= \frac{\zeta_3'' - R}{c} & x_3 &= \frac{x_3'' - R}{c} \\
\text{Segundo cambio: } \zeta_1 &= (u_1 + 1) \frac{n}{2} & x_1 &= (v_1 + 1) \frac{n}{2} \\
\zeta_3 &= \left(\frac{1-n}{2} \right) (u_3 + 1) + n & x_3 &= \left(\frac{1-n}{2} \right) (v_3 + 1) + n
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Tras aplicar el cambio de variable las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}
x \in [0, n] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\sigma_y(v_1) - \sigma_1]}{c} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_1, u_1) \frac{n}{2} du_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_3(u_3) K(v_1, u_3) \frac{1-n}{2} du_3 \\
x \in [n, 1] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\sigma_y(v_3) - \sigma_3]}{c} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_3, u_1) \frac{n}{2} du_1 + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_3(u_3) K(v_3, u_3) \frac{1-n}{2} du_3 \\
\text{Con: } u_1, v_1, u_3, v_3 &\in [-1, 1]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Posteriormente se aplica el método de Erdogan, Gupta y Cook para transformar las ecuaciones integrales en un sistema de ecuaciones lineales. Las cuadraturas empleadas para cada uno de los intervalos se muestran en el cuadro siguiente:

Cuadraturas		
$f_i(u_i)$	$\omega_i(u_i)$	Caso
$f_1(u_1) = \omega_1(u_1)\phi_1(u_1)$	$\omega_1(u_1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}}$	Acotado-Singular
$f_3(u_3) = \omega_3(u_3)\phi_3(u_3)$	$\omega_3(u_3) = \sqrt{\frac{1-u_3}{1+u_3}}$	Singular-Acotado

Las ecuaciones de equilibrio una vez discretizadas se transforman en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa + 1}{2\mu c} [\sigma_y^\infty(v_{1k}) - \sigma_1] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{1k}, u_{1i}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1i}) + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} K(v_{1k}, u_{3i}) \frac{1-n}{2} \phi_3(u_{3i}), \quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu c}[\sigma_y^\infty(v_{3k}) - \sigma_3] = \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} K(v_{3k}, u_{1i}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1i}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} K(v_{3k}, u_{3i}) \frac{1-n}{2} \phi_3(u_{3i}), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{Con : } u_{1i} = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right) \quad u_{3i} = \cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right)$$

$$v_{1k} = \cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right) \quad v_{3k} = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right) \quad (4.24)$$

Si se considera que la tensión de fricción en la grieta σ_1 es cero se tiene en total un sistema de $2N$ ecuaciones lineales y $2N+1$ incógnitas, que son $\phi_1(u_{1i})$, $\phi_3(u_{3i})$ y el valor de σ_3 que permite que haya equilibrio. La ecuación que falta se obtiene de la condición de unión de los dos intervalos, que se expresa de la siguiente forma:

$$f_1(1) = f_3(-1) \quad (4.25)$$

Los valores de $f_1(1)$ y $f_3(-1)$ son:

$$f_1(1) = \omega_1(1)\phi_1(1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}} \Big|_{u_1 \rightarrow 1} \phi_1(1) \quad (4.26)$$

$$f_3(-1) = \omega_3(-1)\phi_3(-1) = \sqrt{\frac{1-u_3}{1+u_3}} \Big|_{u_3 \rightarrow -1} \phi_3(-1) \quad (4.27)$$

Si se sustituye en la igualdad y se aplica el límite se obtiene:

$$\phi_1(1) = \phi_3(-1) \quad (4.28)$$

Los valores de la función ϕ en los extremos de los intervalos se han obtenido utilizando la fórmula de extrapolación de Krenk [14] de modo que la ecuación de unión queda:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen}\left[\frac{2i-1}{2N+1}N\pi\right]}{\tan\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}\right]} \phi_1(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen}\left[\frac{2i-1}{2N+1}N\pi\right]}{\tan\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}\right]} \phi_3(u_{3(N+1-i)}) \right) \quad (4.29)$$

Se tiene finalmente un sistema lineal de $2N+1$ ecuaciones y $2N+1$ incógnitas ($\phi_1(u_{1i})$, $\phi_3(u_{3i})$ y σ_3).

4.4.2. Comparación con resultados experimentales.

Se ha aplicado el método propuesto y se ha contrastado comparando con resultados experimentales y con predicciones realizadas con otros métodos. El primero de ellos es el clásico método de Peterson [15] basado en la distancia crítica del material. El valor de esta distancia se obtiene de la conocida gráfica de Langer [16]. El segundo método es el de la interpretación de la distancia crítica propuesta recientemente por Taylor [17] (Point method) en el que el valor de la distancia crítica se calcula a partir de los parámetros de mecánica de fractura. También se han considerado por completitud los resultados obtenidos con la fórmula aproximada de Vallellano et al [2].

En la Figura 4.7 se muestran los resultados experimentales obtenidos por Duquesnay [18] para un acero SAE 1045 (Tabla 4.1) y la predicciones obtenidas con los diversos métodos. Se trata de una placa plana con entallas circulares cuyo radio varía entre 0.12 y 2.5 mm. Los ensayos de fatiga son de tracción-compresión alterna ($R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max} = -1$) y el límite de fatiga se ha definido para 10^7 ciclos. La distancia crítica para el método de Peterson es $L = 0.15$ mm. y para el Point Method es de $L = 0.083$ mm. Para los modelos microestructurales se necesita el tamaño de grano, que se puede estimar mediante la ecuación [1]:

$$D = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{th\infty}}{\sigma_{FL}} \right)^2 \left(\frac{m_1^*}{m_\infty^*} \right)^2 \quad (4.30)$$

Tomando un valor de $\frac{m_1^*}{m_\infty^*} = \frac{1}{3.1}$ se obtiene:

$$D = 0.035 \text{ mm} \quad (4.31)$$

Los valores del resto de parámetros de la fórmula aproximada de Vallellano son $K_t = 3$, $f = 2.5$. Se ha analizado la robustez del modelo microestructural numérico ante perturbaciones en el valor del tamaño de grano D , obteniéndose que para tamaños incluso del triple o de un tercio del real las predicciones del límite de fatiga apenas varían. Sí se modifica evidentemente los valores de i que definen el límite de fatiga, siendo menores para tamaños mayores que el real y mayores para tamaños menores que el real. Para el modelo microestructural numérico es necesario definir además el tamaño de la barrera r_0 y el número de puntos de precisión de cada intervalo N . Respecto al tamaño de la barrera se ha comprobado que su influencia en el resultado es muy pequeña siempre que su tamaño sea claramente menor que el del tamaño de grano, pudiéndose tomar como cota superior $r_0 < \frac{D}{10}$. En este ejemplo y en el resto de aplicaciones que se muestran en la tesis se ha tomado un valor de $r_0 = \frac{D}{30}$. En cuanto al valor de N , hay que destacar que el método numérico converge rápidamente incluso para valores relativamente pequeños de N . Un valor de $N = 100$ permite obtener una precisión de dos cifras decimales en la tensión σ_3 . Se ha optado para este ejemplo por un valor de $N = 300$, obteniéndose así tres cifras decimales de precisión en σ_3 y sin necesidad

de tiempos computacionales muy elevados.

Material	σ_{UTS} (MPa)	σ_{ys} (MPa)	ΔK_{th} (MPa \sqrt{m})	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)	R_σ
SAE 1045 steel	745	472	13.9	608	-1

Tabla 4.1: Propiedades del material SAE 1045 steel. Ensayos de DuQuesnay.

En la Figura 4.8 se muestran los resultados experimentales de El Haddad [19] para un acero CSA G40.11 (Tabla 4.2) y la predicción obtenida con los diversos métodos. Se trata de predicciones a fatiga para ensayos de tracción-compresión alternativa ($R_\sigma = -1$) en placas planas con entallas circulares entre 0.2 y 4.8 mm de radio. La distancia crítica para el método de Peterson es $L = 0.14$ mm. y para el Point Method es de $L = 0.13$ mm. El tamaño de grano se ha estimado a partir de aceros con propiedades similares, resultando $D = 0.030$ mm. El resto de parámetros para los modelos microestructurales son los mismos que para el material anterior.

Material	$\sigma_{UTS}^{(*)}$ (MPa)	σ_{ys} (MPa)	ΔK_{th} (MPa \sqrt{m})	σ_{FL} (MPa)	R_σ
CSA G40.11 steel	800	376	8	280	-1

(*) estimado a partir de aceros con propiedades similares

Tabla 4.2: Propiedades del material CSA G40.11 steel. Ensayos de El Haddad.

Las predicciones obtenidas con el modelo microestructural propuesto (NR num.) son bastante aceptables y cercanas a las predichas con los otros modelos. Puede comprobarse cómo la elección de la distancia crítica en el método de Peterson y Taylor puede tener una influencia notable en las predicciones del límite de fatiga en la entalla, sobre todo para valores pequeños del radio. El Point Method proporciona predicciones comparables a la obtenida con la implementación numérica del modelo microestructural. En este caso son ligeramente mejores las predicciones proporcionadas por la fórmula aproximada de Vallellano, que, además, y al menos hasta el momento, es de uso más fácil. Esta fórmula, sin embargo, no puede utilizarse para condiciones de carga multiaxial, mientras que el método numérico sí puede formularse para carga multiaxial, como se mostrará en el próximo capítulo.

En la Tabla 4.3 siguiente se muestran la evolución con el tamaño del agujero R de las predicciones obtenidas con el modelo microestructural aproximado y numérico para los dos conjuntos de ensayos. Se especifica el valor del grano i que

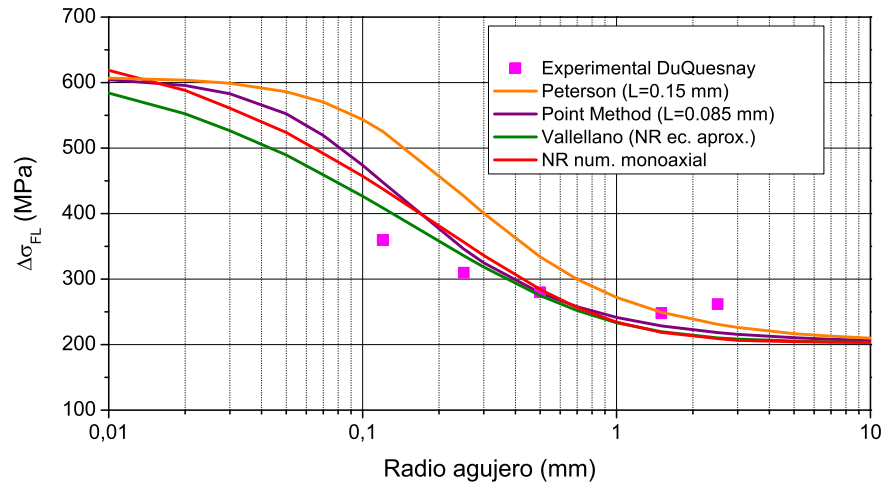


Figura 4.7: Resultados de DuQuesnay. Agujero circular.

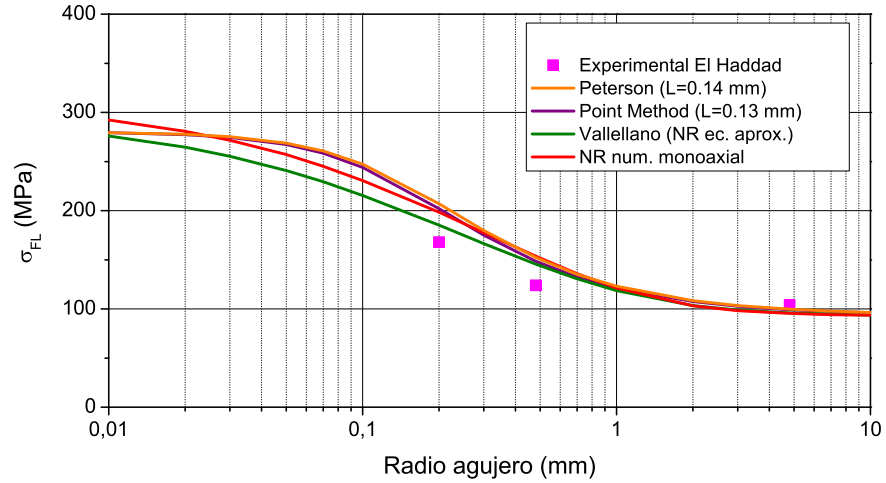


Figura 4.8: Resultados de El Haddad. Agujero circular.

define el límite por fatiga. Es necesario estudiar para qué valor de i se requiere la máxima tensión a aplicar para superar la barrera. Y esta tensión constituye precisamente el límite de fatiga del sólido entallado $\Delta\sigma_{FL}^N$. Para los ensayos de Duquesnay los valores de i obtenidos con el modelo numérico, muy parecidos a los de la ecuación aproximada, oscilan entre 1 y 13 y para los de El Haddad lo hacen entre 1 y 21. El realizar la predicción del límite de fatiga con $i = 1$ implicaría un error considerable. A medida que aumenta el radio, el límite de fatiga tiende a obtenerse para $i = 1$. Ello se debe a que para radios grandes, la influencia de la entalla se extiende muy lejos de modo que la tensión en la grieta es prácticamente constante e igual a $K_t\sigma_y^\infty$. Es como si se tratara de una placa sin entalla sometida a una tensión K_t veces la nominal. Y para sólidos sin entallas la barrera microestructural que determina el límite de fatiga es la del primer grano.

Predicción σ_{FL}^N								
Radio	Duquesnay				El Haddad			
	NR ec aprox		NR num		NR ec aprox		NR num	
(mm)	$\Delta\sigma_{FL}^N$ (MPa)	i	$\Delta\sigma_{FL}^N$ (MPa)	i	σ_{FL}^N (MPa)	i	σ_{FL}^N (MPa)	i
0.01	583.8	5	618.9	5	275.9	7	292.3	7
0.05	489.6	7	523.9	7	240.9	11	257.1	11
0.10	426.7	9	457.3	9	215.5	15	230.7	15
0.50	274.7	13	284.5	13	145.5	19	153.7	21
1.00	233.5	7	234.4	9	118.5	17	121.3	19
5.00	205.3	3	204.3	1	95.9	7	95.4	7
10.00	203.5	1	203.4	1	93.7	1	93.7	1

Tabla 4.3: Resultados para agujero circular con el modelo microestructural.

4.4.3. Predicciones del modelo para agujeros pequeños

Cuando el radio del agujero circular tiende a cero los resultados del modelo microestructural no convergen al límite de fatiga del sólido no entallado como cabría esperar. Esto se puede ver en la Figura 4.9, donde se muestran para los dos materiales estudiados las predicciones del límite de fatiga del sólido entallado adimensionalizadas respecto al límite de fatiga del sólido no entallado. Ambas curvas tienden a los mismos valores en los extremos, diferenciándose su forma debido a que cada material tiene diferente tamaño de grano D y a_0 . Para radios pequeños las dos curvas tienden a $1.12\sigma_{FL}$ y no a σ_{FL} . Esto se debe a que con el modelo geométrico utilizado, cuando el radio tiende a cero se tiene un agujero muy pequeño interior que en el límite reproduciría un medio infinito, mientras que se está usando un criterio basado en la solución de medio semi-infinito. Este resultado se podría interpretar como que para tamaños del agujero menores que un cierto

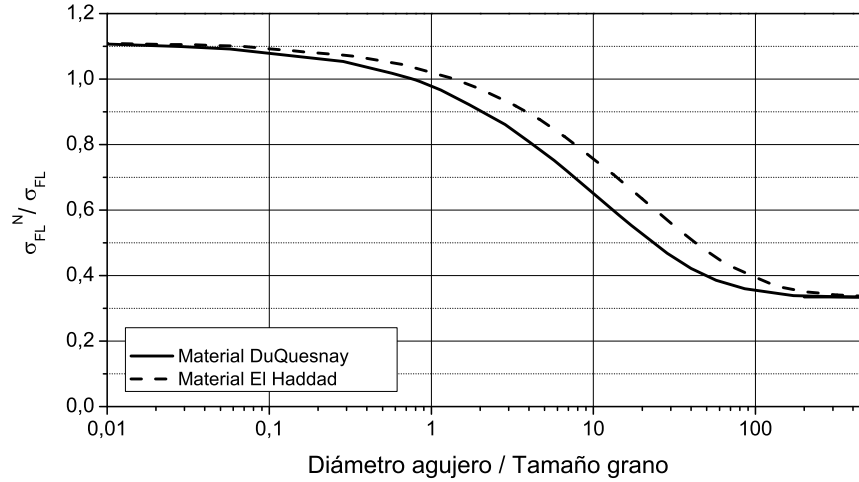


Figura 4.9: Convergencia para radios pequeños.

valor umbral se obtiene que es más probable que la rotura se produzca desde las otras superficies exteriores del componente en lugar de que se produzca desde el agujero interior. Es decir, el modelo predice que la presencia de agujeros muy pequeños no tiene influencia en el límite de fatiga del componente. Los estudios de Murakami et al [20] sobre agujeros pequeños a tracción indican la existencia de este valor umbral y lo ubican en un tamaño de agujero de alrededor de un grano. Los valores umbrales obtenidos con el modelo son, para el material de DuQuesnay y el de El-Haddad, de 0.74 veces y 1.5 veces el tamaño de grano D respectivamente, valores del orden de los obtenidos por Murakami en sus ensayos.

4.5. Aplicación a una entalla semicircular

Como segundo ejemplo de aplicación del modelo microestructural se estudia una placa semi-infinita con una entalla semicircular sometida a tracción. Se emplea la técnica de modelar la propia entalla mediante dislocaciones, desarrollada por Hill et al. [4] para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en entallas ubicadas en un semiplano. Para resolver el problema se impone que las tensiones en el contorno de la entalla σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$ deben ser cero. De la misma forma, las tensiones normales y tangenciales σ_{yy} y τ_{xy} deben ser cero en la grieta y en la barrera.

Los núcleos del problema son los de una dislocación en las cercanías de un medio semi-infinito. El equilibrio se aplica a entalla, grieta y barrera. Para este caso de carga de tracción se deben obtener unas distribuciones de dislocaciones para la grieta y barrera con vector de Burgers b_y exclusivamente y las distribuciones para b_x deben ser cero. También la tensión en la barrera τ_3 debe ser cero, ya que no es necesario ninguna tensión para equilibrar las tensiones tangenciales. Esta técnica se puede aplicar para predecir el límite de fatiga en cualquier tipo de entalla como la elíptica, en V, etc.

4.5.1. Obtención de las tensiones en la barrera.

En la Figura 4.10 se muestra esquemáticamente el problema y las variables implicadas. Se trata de una placa semi-infinita con una entalla de tipo semi-circular de radio R sometida a una carga de tracción de valor σ_y^∞ . Se desea obtener las tensiones en la barrera σ_3 y τ_3 que mantienen el equilibrio de dislocaciones. Para ello será necesario hacer el equilibrio de las dislocaciones que están en grieta, barrera y entalla.

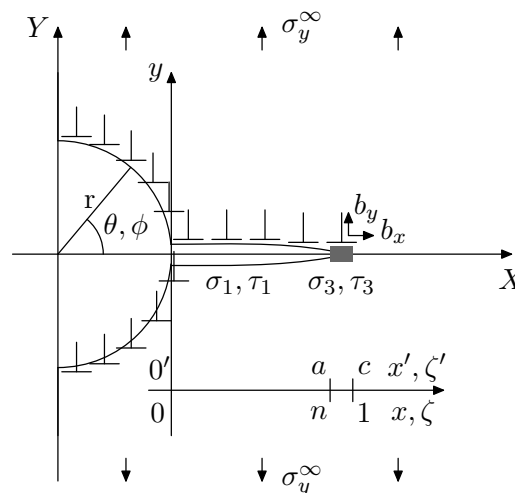


Figura 4.10: Grieta partiendo de una entalla semi-circular sometida a tracción. Representación mediante dislocaciones.

Tensiones debidas a la carga externa

Las tensiones debido a la carga externa sobre las dislocaciones en grieta, barrera y entalla son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\text{Grieta:} \quad & \sigma_y(x_1) = \sigma_y^\infty & \tau(x_1) &= 0 \\
\text{Barrera:} \quad & \sigma_y(x_3) = \sigma_y^\infty & \tau(x_3) &= 0 \\
\text{Entalla:} \quad & \sigma_{rr}(\theta) = \sigma_y^\infty \sin^2\theta & \sigma_{r\theta}(\theta) &= \sigma_y^\infty \sin\theta \cos\theta \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Obsérvese que estas tensiones son las correspondientes a un medio infinito sin entalla. Esta técnica de modelar la entalla mediante dislocaciones facilita mucho la obtención de las tensiones producidas por la carga externa.

Tensiones debidas a las dislocaciones

En el problema existen dislocaciones ubicadas en tres zonas diferentes: grieta, barrera y entalla. En primer lugar se definen las variables de posición de las dislocaciones en cada una de las tres zonas:

$$\begin{aligned}
\text{Grieta:} \quad & x_1, \zeta_1 \in [0, a] \\
\text{Barrera:} \quad & x_3, \zeta_3 \in [a, c] \\
\text{Entalla:} \quad & r = R; \theta, \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Se van a definir unos núcleos con 4 subíndices K_{ijkl} propios del problema. El primer subíndice indica en qué zona está la dislocación que soporta la tensión. Para este subíndice se emplean las letras “c” para grieta (crack), “b” para barrera y “n” para entalla (notch). El segundo subíndice indica la dirección de la tensión obtenida. Puede ser dirección vertical expresada con la letra “y”, tangencial horizontal expresada con la letra “x”, angular con la letra “ θ ”, radial con la letra “r”. El tercero indica en qué zona está la dislocación que produce la tensión. Se emplean de nuevo las letras “c” para grieta (crack), “b” para barrera y “n” para entalla (notch). Y el cuarto indica la dirección del vector de Burgers de la dislocación que produce la tensión. Se utiliza la letra “x” para vector de Burgers b_x y la letra “y” para vector de Burgers b_y . De modo que un núcleo como K_{cxb_y} representaría la tensión en dirección x producida sobre una dislocación en la grieta (crack) por una dislocación en la barrera con vector de Burgers b_y . Cada uno de estos núcleos es igual a uno de los seis núcleos generales $K_{x(xx)}, K_{x(yy)}, K_{x(xy)}, K_{y(xx)}, K_{y(yy)}, K_{y(xy)}$ ya definidos para una dislocación en las cercanías de un medio semi-infinito (2.50-2.55) o a una combinación de ellos multiplicados por funciones trigonométricas. Se emplean unas variables de posición x_k, y_k, ζ_k particularizadas para la geometría del problema y la ubicación específica de las dislocaciones. A continuación se muestran cada uno de estos núcleos:

Tensiones sobre una dislocación en la grieta

- Tensión producida por una dislocación en la grieta

$$x_K = R + x'_1 \quad y_K = 0 \quad \zeta_K = R + \zeta'_1 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{cxcx} &= K_{x(xy)} & K_{cxcy} &= K_{y(xy)} \\ K_{cy cx} &= K_{x(yy)} & K_{cy cy} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

- Tensión producida por una dislocación en la barrera

$$x_K = R + x'_1 \quad y_K = 0 \quad \zeta_K = R + \zeta'_3 \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{cxbx} &= K_{x(xy)} & K_{cxb y} &= K_{y(xy)} \\ K_{cy bx} &= K_{x(yy)} & K_{cy by} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

- Tensión producida por una dislocación en la entalla

$$x_K = R + x'_1 \quad y_K = -R \operatorname{sen}(\phi) \quad \zeta_K = R \cos(\phi) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{cxnx} &= K_{x(xy)} & K_{cxny} &= K_{y(xy)} \\ K_{cy nx} &= K_{x(yy)} & K_{cy ny} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Tensiones sobre una dislocación en la barrera

- Tensión producida por una dislocación en la grieta

$$x_K = R + x'_3 \quad y_K = 0 \quad \zeta_K = R + \zeta'_1 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{bxcx} &= K_{x(xy)} & K_{bxcy} &= K_{y(xy)} \\ K_{by cx} &= K_{x(yy)} & K_{by cy} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

- Tensión producida por una dislocación en la barrera

$$x_K = R + x'_3 \quad y_K = 0 \quad \zeta_K = R + \zeta'_3 \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{bxbx} &= K_{x(xy)} & K_{bxb y} &= K_{y(xy)} \\ K_{by bx} &= K_{x(yy)} & K_{by by} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

- Tensión producida por una dislocación en la entalla

$$x_K = R + x'_3 \quad y_K = -R \operatorname{sen}(\phi) \quad \zeta_K = R \cos(\phi) \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \text{Núcleos: } K_{bxnx} &= K_{x(xy)} & K_{bxny} &= K_{y(xy)} \\ K_{by nx} &= K_{x(yy)} & K_{by ny} &= K_{y(yy)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tensiones sobre una dislocación en la entalla

- Tensión producida por una dislocación en la grieta

$$x_K = R \cos \theta \quad y_K = R \operatorname{sen} \theta \quad \zeta_K = R + \zeta'_1 \quad (4.46)$$

En este caso para obtener los núcleos hay que girar las tensiones obtenidas un ángulo θ puesto que para el equilibrio en la entalla se necesitan las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$.

Núcleos:

$$\begin{aligned} K_{nr cx} &= K_{x(xx)} \cos^2 \theta + K_{x(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{x(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{nr cy} &= K_{y(xx)} \cos^2 \theta + K_{y(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{y(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{n\theta cx} &= K_{x(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(xy)} \cos(2\theta) \\ K_{n\theta cy} &= K_{y(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(xy)} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (4.47)$$

- Tensión producida por una dislocación en la barrera

$$x_K = R \cos \theta \quad y_K = R \operatorname{sen} \theta \quad \zeta_K = R + \zeta'_3 \quad (4.48)$$

Núcleos:

$$\begin{aligned} K_{nr bx} &= K_{x(xx)} \cos^2 \theta + K_{x(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{x(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{nr by} &= K_{y(xx)} \cos^2 \theta + K_{y(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{y(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{n\theta bx} &= K_{x(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(xy)} \cos(2\theta) \\ K_{n\theta by} &= K_{y(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(xy)} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (4.49)$$

- Tensión producida por una dislocación en la entalla

$$x_K = R \cos \theta \quad y_K = R(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \phi) \quad \zeta_K = R \cos \phi \quad (4.50)$$

Núcleos:

$$\begin{aligned} K_{nr nx} &= K_{x(xx)} \cos^2 \theta + K_{x(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{x(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{nr ny} &= K_{y(xx)} \cos^2 \theta + K_{y(yy)} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{y(xy)} \operatorname{sen}(2\theta) \\ K_{n\theta nx} &= K_{x(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{x(xy)} \cos(2\theta) \\ K_{n\theta ny} &= K_{y(xx)}(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(yy)}(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + K_{y(xy)} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (4.51)$$

A continuación se aplica equilibrio a las dislocaciones existentes en la grieta, barrera y entalla. Ello da lugar a 6 ecuaciones integrales singulares. Las ecuaciones de equilibrio son las siguientes:

Equilibrio en grieta: $x'_1 \in [0, a]$

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\tau(x'_1) - \tau_1] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{cxcx}(x'_1, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{cxcy}(x'_1, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\ \left. + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{cxbx}(x'_1, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{cxyy}(x'_1, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{cxnx}(x'_1, \phi) + g_n^y(\phi)K_{cxny}(x'_1, \phi)] R d\phi \right]$$

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y(x'_1) - \sigma_1] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{cycx}(x'_1, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{cyxy}(x'_1, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\ \left. + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{cybx}(x'_1, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{cyby}(x'_1, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{cynx}(x'_1, \phi) + g_n^y(\phi)K_{cyny}(x'_1, \phi)] R d\phi \right]$$

Equilibrio en barrera: $x'_3 \in [a, c]$

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\tau(x'_3) - \tau_3] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{bxcx}(x'_3, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{bxcy}(x'_3, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\ \left. + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{bxbx}(x'_3, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{bxyy}(x'_3, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{bxnx}(x'_3, \phi) + g_n^y(\phi)K_{bxny}(x'_3, \phi)] R d\phi \right]$$

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y(x'_3) - \sigma_3] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{bycx}(x'_3, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{bycy}(x'_3, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\ \left. + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{bybx}(x'_3, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{byby}(x'_3, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{bynx}(x'_3, \phi) + g_n^y(\phi)K_{byny}(x'_3, \phi)] R d\phi \right]$$

Equilibrio en entalla: $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_{rr}(\theta)] &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{nr cx}(\theta, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{nr cy}(\theta, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\
&\quad + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{nr bx}(\theta, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{nr by}(\theta, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{nr nx}(\theta, \phi) + g_n^y(\phi)K_{nr ny}(\theta, \phi)] R d\phi \right] \\
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_{r\theta}(\theta)] &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a [f_1^x(\zeta'_1)K_{n\theta cx}(\theta, \zeta'_1) + f_1^y(\zeta'_1)K_{n\theta cy}(\theta, \zeta'_1)] d\zeta'_1 + \right. \\
&\quad + \int_a^c [f_3^x(\zeta'_3)K_{n\theta bx}(\theta, \zeta'_3) + f_3^y(\zeta'_3)K_{n\theta by}(\theta, \zeta'_3)] d\zeta'_3 + \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [g_n^x(\phi)K_{n\theta nx}(\theta, \phi) + g_n^y(\phi)K_{n\theta ny}(\theta, \phi)] R d\phi \right]
\end{aligned}$$

Se adimensionalizan los intervalos con los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned}
\text{Primer cambio: } \zeta_1 &= \frac{\zeta'_1}{c} & x_1 &= \frac{x'_1}{c} \\
\zeta_3 &= \frac{\zeta'_3}{c} & x_3 &= \frac{x'_3}{c} \\
\text{Segundo cambio: } \zeta_1 &= (u_1 + 1)\frac{n}{2} & x_1 &= (v_1 + 1)\frac{n}{2} \\
\zeta_3 &= \left(\frac{1-n}{2}\right)(u_3 + 1) + n & x_3 &= \left(\frac{1-n}{2}\right)(v_3 + 1) + n \\
\phi &= \frac{\pi}{2}u_r & \theta &= \frac{\pi}{2}v_r \quad (4.52)
\end{aligned}$$

A las integrales resultantes se les puede aplicar la transformación de Erdogan et al. Para ello se va a considerar que en el intervalo correspondiente a la grieta la función de distribución de dislocaciones es acotada-singular en sus extremos, para la barrera se considera singular-acotada en sus extremos y para la entalla acotada-acotada en sus extremos. Ello implica que tanto la grieta como la barrera tienen N puntos de colocación e integración. Sin embargo la entalla tiene N puntos de integración y $N + 1$ puntos de colocación, lo que da lugar a una ecuación de más. Esta dificultad se salva excluyendo la ecuación central, como proponen Erdogan et al [21]. Considerando que no existe tensión de fricción en la grieta y añadiendo las ecuaciones de unión de intervalos se obtiene finalmente un sistema de $6N + 2$ ecuaciones y $6N + 2$ incógnitas, que son: $\phi_1^x(u_{1i}), \phi_1^y(u_{1i}), \phi_3^x(u_{3i}), \phi_3^y(u_{3i}), \phi_n^x(u_{Ri}), \phi_n^y(u_{Ri})$ y las tensiones de fricción en la

barrera σ_3 y τ_3 :

Ecuaciones en grieta:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\tau(v_{1k})] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{cn}{2} [K_{cxcx}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^x(u_{1i}) + K_{cxcy}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^y(u_{1i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{c(1-n)}{2} [K_{cxbx}(v_{1k}, u_{3i})\phi_3^x(u_{3i}) + K_{cxbx}(v_{1k}, u_{3i})\phi_3^y(u_{3i})] \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_{Ri}^2)}{N+1} \frac{R\pi}{2} [K_{cxnx}(v_{1k}, u_{Ri})\phi_n^x(u_{Ri}) + K_{cxny}(v_{1k}, u_{Ri})\phi_n^y(u_{Ri})] \\
& \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, N \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y(v_{1k})] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{cn}{2} [K_{cyxc}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^x(u_{1i}) + K_{cyyc}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^y(u_{1i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{c(1-n)}{2} [K_{cybx}(v_{1k}, u_{3i})\phi_3^x(u_{3i}) + K_{cyby}(v_{1k}, u_{3i})\phi_3^y(u_{3i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_{Ri}^2)}{N+1} \frac{R\pi}{2} [K_{cynx}(v_{1k}, u_{Ri})\phi_n^x(u_{Ri}) + K_{cyny}(v_{1k}, u_{Ri})\phi_n^y(u_{Ri})] \\
& \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, N \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Ecuaciones en barrera:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\tau(v_{3k})-\tau_3] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{cn}{2} [K_{bxcx}(v_{3k}, u_{1i})\phi_1^x(u_{1i}) + K_{bxcy}(v_{3k}, u_{1i})\phi_1^y(u_{1i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{c(1-n)}{2} [K_{bxbx}(v_{3k}, u_{3i})\phi_3^x(u_{3i}) + K_{bxbx}(v_{3k}, u_{3i})\phi_3^y(u_{3i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_{Ri}^2)}{N+1} \frac{R\pi}{2} [K_{bxnx}(v_{3k}, u_{Ri})\phi_n^x(u_{Ri}) + K_{bxny}(v_{3k}, u_{Ri})\phi_n^y(u_{Ri})] \\
& \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, N \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y(v_{3k})-\sigma_3] &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{cn}{2} [K_{byxc}(v_{3k}, u_{1i})\phi_1^x(u_{1i}) + K_{byyc}(v_{3k}, u_{1i})\phi_1^y(u_{1i})] + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{c(1-n)}{2} [K_{bybx}(v_{3k}, u_{3i})\phi_3^x(u_{3i}) + K_{byby}(v_{3k}, u_{3i})\phi_3^y(u_{3i})] +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_{Ri}^2) R \pi}{N + 1} \frac{1}{2} [K_{byn x}(v_{3k}, u_{Ri}) \phi_n^x(u_{Ri}) + K_{byn y}(v_{3k}, u_{Ri}) \phi_n^y(u_{Ri})]$$

$$k = 1, 2, \dots, N \quad (4.56)$$

Ecuaciones en entalla:

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_{rr}(v_{Rk})] = \sum_{i=1}^N \frac{2(1 + u_{1i}) c n}{2N + 1} \frac{1}{2} [K_{nr cx}(v_{Rk}, u_{1i}) \phi_1^x(u_{1i}) + K_{nr cy}(v_{Rk}, u_{1i}) \phi_1^y(u_{1i})] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1 - u_{3i}) c(1 - n)}{2N + 1} \frac{1}{2} [K_{nr bx}(v_{Rk}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + K_{nr by}(v_{Rk}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_{Ri}^2) R \pi}{N + 1} \frac{1}{2} [K_{nr nx}(v_{Rk}, u_{Ri}) \phi_n^x(u_{Ri}) + K_{nr ny}(v_{Rk}, u_{Ri}) \phi_n^y(u_{Ri})]$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 1, \dots, N + 1 \quad (4.57)$$

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_{r\theta}(v_{Rk})] = \sum_{i=1}^N \frac{2(1 + u_{1i}) c n}{2N + 1} \frac{1}{2} [K_{n\theta cx}(v_{Rk}, u_{1i}) \phi_1^x(u_{1i}) + K_{n\theta cy}(v_{Rk}, u_{1i}) \phi_1^y(u_{1i})] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{2(1 - u_{3i}) c(1 - n)}{2N + 1} \frac{1}{2} [K_{n\theta bx}(v_{Rk}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + K_{n\theta by}(v_{Rk}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_{Ri}^2) R \pi}{N + 1} \frac{1}{2} [K_{n\theta nx}(v_{Rk}, u_{Ri}) \phi_n^x(u_{Ri}) + K_{n\theta ny}(v_{Rk}, u_{Ri}) \phi_n^y(u_{Ri})]$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 1, \dots, N + 1 \quad (4.58)$$

Ecuaciones de unión:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1^x(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_3^x(u_{3(N+1-i)}) \right) \quad (4.59)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1^y(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_3^y(u_{3(N+1-i)}) \right) \quad (4.60)$$

Variables:

$$u_{1i} = \cos \left(\pi \frac{2i-1}{2N+1} \right) \quad v_{1k} = \cos \left(\pi \frac{2k}{2N+1} \right) \quad i, k = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned}
u_{3i} &= \cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right) & v_{3k} &= \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right) & i, k &= 1, 2, \dots, N \\
u_{Ri} &= \cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right) & v_{Rk} &= \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+2}\right) \\
i &= 1, 2, \dots, N & k &= 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 1, \dots, N+1
\end{aligned} \tag{4.61}$$

4.5.2. Resultados.

El modelo para entalla semi-circular se ha aplicado al problema antes analizado para los materiales de DuQuesnay y El Haddad. Para mantener los tiempos computacionales se ha reducido el valor de N a 250, y es que el modelado de la entalla mediante dislocaciones implica que el sistema de ecuaciones pase de tener $2N + 1$ ecuaciones a $6N + 2$ ecuaciones. Este valor de 250 puntos de integración en cada intervalo proporciona suficiente precisión para el modelado de la grieta y la barrera y para entallas de tamaño pequeño. Para entallas mayores de 1 mm ha sido necesario utilizar 1000 puntos de integración en la entalla, manteniendo el valor de 250 para grieta y barrera, con el consiguiente incremento del tiempo computacional. En este aspecto la técnica de modelar la entalla mediante dislocaciones como se ha hecho para el caso semicircular es menos eficiente que el planteamiento que se hizo para agujero circular en el que se partía del núcleo para una dislocación en las cercanías de la entalla. Lo cierto es que hasta ahora sólo se encuentran en la literatura los núcleos para entallas sencillas lo que hace que se tenga que emplear la técnica del modelado de la entalla mediante dislocaciones para los casos más generales. Para los valores de N empleados el efecto de la ecuación central quitada ha resultado inapreciable.

Las distribuciones de dislocaciones obtenidas en grieta y barrera con vector de Burgers b_x son prácticamente cero, como cabía esperar. También se obtiene un valor cero para la tensión τ_3 en la barrera. En cuanto al valor del grano i que determina el límite de fatiga del sólido entallado, la tendencia es muy similar a la obtenida para el agujero circular, de nuevo obteniéndose valores de $i = 1$ para entallas grandes. En la Figuras 4.11 y 4.12 se muestran los resultados adimensionales obtenidos para entalla circular y semicircular. Se ve cómo los resultados para la entalla semicircular convergen perfectamente a σ_{FL} cuando el radio de la entalla tiende a cero. Para radios grandes se sigue obteniendo resultados tendentes a $\sigma_{FL}/3$. Las gráficas muestran claras diferencias entre una entalla circular y semicircular para radios pequeños, fundiéndose prácticamente en una sola curva para valores del radio mayores de 1 mm. Ello es debido a que para radios grandes la superficie del círculo se va asemejando a la de un medio semi-infinito, de modo que el problema del agujero circular y el del semicírculo se van haciendo similares.

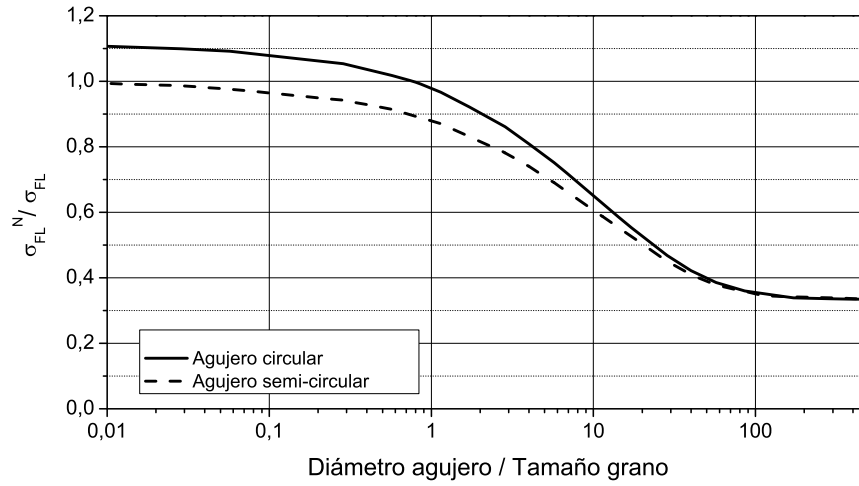


Figura 4.11: Resultados para agujero circular y semi-circular. DuQuesnay.

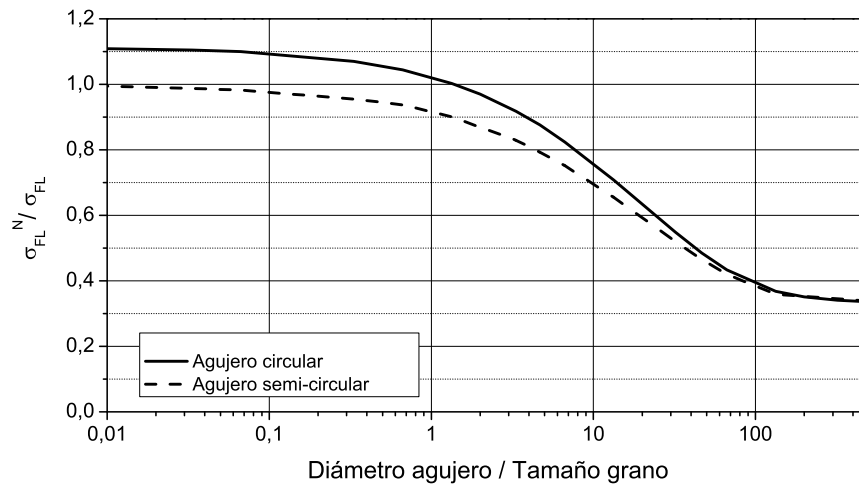


Figura 4.12: Resultados para agujero circular y semi-circular. El Haddad.

Las dos técnicas de análisis de la grieta mediante dislocaciones mostradas en este capítulo, la primera empleada para resolver el problema del agujero circular y la segunda para la entalla semicircular, permiten, en un principio, calcular el límite de fatiga en cualquier tipo de entalla, ya sea elíptica, en V, etc., y con cualquier tipo de carga. Sin embargo, la primera técnica requiere el conocimiento del campo de tensiones producido por una dislocación para la geometría de la entalla correspondiente.

Bibliografía

1. Navarro, A., Vallellano, C., de los Rios, E. R. and Xin, X. J., 1997, *Notch sensitivity and size effects by a short crack propagation model*, Capítulo 7 en: Engineering Against Fatigue, Proc. of an International Conference, Sheffield, U. K., A. A. Balkema Publishers, Rotterdam.
2. Vallellano, C., 1998, *Tesis doctoral: Crecimiento de grietas pequeñas por fatiga en componentes con concentradores de tensión*, Universidad de Sevilla.
3. Hull, D. and Bacon, D. J., 2002, *Introduction to dislocations*, Butterworth Heinemann (Oxford).
4. Lin, S. and Hills, D. A., 1996, *Stress intensity factors for cracks emanating from a semicircular notch in a half-plate*, Journal of Strain Analysis, Vol. 31, pp. 433-439.
5. Vallellano, C., Navarro, A. and Domínguez, 2000, *Fatigue crack growth threshold conditions at notches. Part I: theory*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 23, pp. 113-121.
6. Frost, N. E., 1959, *A relation between the critical alternating propagation stress and crack length for mild steel*, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 173, n. 35, pp. 811-827.
7. Smith, R. A. and Miller, K. J., 1977, *Prediction of fatigue regimes in notched components*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp. 201-206.
8. Vallellano, C., Navarro, A. and Domínguez, 2000, *Fatigue crack growth threshold conditions at notches. Part II: generalization and application to experimental results*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 23, pp. 123-128.
9. Schijve, J., 1980, *Stress gradient around notches*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 3, pp. 325-332.
10. Bueckner, H. F., 1958, *The propagation of cracks and the energy of elastic deformations*, J. Appl. Mech., Vol. 80, pp. 1225-1230.

11. Timoshenko, S. y Goodier, J. N., 1934, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill.
12. Dundurs, J., and Mura, T., 1964, *Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion*, J. Mech. Phys. Solids, 12, pp. 177-189.
13. Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N. and Korsunsky, A. M., 1996, *Solution of cracks problems, the distributed dislocation technique*, Kluwer academic publishers.
14. Krenk, S., 1975, *On the use of the interpolation polynomials for solution of singular integral equations*, Quart. Appl. Math., Vol. 32, pp. 479-484.
15. Peterson, R. E., 1959, *Notch sensitivity*, En: Metal Fatigue (editado por G. Sines y J. L. Waisman), McGraw-Hill, New York.
16. Langer, B. F., 1960, *Application of stress concentration factors*, Bettis Tech. Rev. WAPD-BT-18, 1.
17. Taylor, D., 1999, *Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model*, International Journal of Fatigue, 21, pp. 413-420.
18. Du Quesnay, D. L., Yu, M. T. and Topper, T. H., 1988, *An analysis of notch-size effects at the fatigue limit*, ASTM Journal of Testing and Evaluation, Vol. 16, n. 4, pp. 375-385.
19. El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N., 1979, *Prediction of non propagating cracks*, Engng. Fract. Mech., 11, pp. 573-584.
20. Murakami, Y. , 2002, *Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions*, Elsevier.
21. Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T. S., 1973, *Mechanics of fracture. Methods of analysis and solutions of crack problems*, Capítulo 7 en: Numerical solution of singular integral equations, editado por G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden.

Capítulo 5

Modelo para entallas sometidas a carga biaxial

En el capítulo anterior se ha descrito el modelo microestructural para un cuerpo entallado sometido a modo I, mostrándose su aplicación a la predicción del límite de fatiga de un sólido con una entalla circular y con una entalla semicircular. En este capítulo se pretende dar un paso más en el uso del método y aplicarlo a carga biaxial plana. Para carga biaxial plana en la línea de grieta es necesario estudiar las dislocaciones de cuña con vector de Burgers b_y (climb) y con vector de Burgers b_x (glide). En el estudio del equilibrio de las dislocaciones en el dominio se requiere que en la barrera delante de la grieta, además de una tensión normal σ_3 , exista una tensión tangencial τ_3 . Se utiliza el mismo criterio de activación que en el caso monoaxial, pero ahora la tensión tangencial sobre las fuentes de dislocaciones tiene componentes provenientes de ambos conjuntos de dislocaciones. Los valores de las constantes del criterio de activación se obtienen a partir de los límites de fatiga de tracción y torsión del material para probetas no entalladas. Estos valores, al igual que se hizo para el criterio en Modo I, se relacionan con las tensiones en la barrera para una grieta en un medio semi-infinito.

Se ha estudiado como aplicación una entalla circular en un medio infinito, con el objetivo de calcular el valor del límite de fatiga en función del tamaño del agujero R . Para mantener la simetría del problema se han modelado dos grietas opuestas que parten del agujero, cuya dirección puede ser cualquiera. Para calcular el límite de fatiga es necesario obtener las tensiones en la barrera para todo un rango de puntos de iniciación posibles, para todo un conjunto de direcciones de grieta posibles y para las diferentes longitudes de grieta i ($i = 1, 3, 5, 7, \dots$). La aplicación del criterio de activación para cada barrera proporcionará la tensión externa que será necesario aplicar para superar dicha barrera. El límite de fatiga vendrá determinado por el valor mínimo de tensión externa que es necesario apli-

car para superar todas las barreras en una dirección, propagándose la grieta en dicha dirección. En definitiva la grieta se propagará en aquella dirección en la que las sucesivas barreras sean más fácilmente superables.

Se ha realizado una comparación entre las predicciones a fatiga del modelo y resultados experimentales. También se han estudiado las predicciones de otros modelos. Se han analizado dos casos de carga: tracción-compresión alternativa y torsión alternativa. Los resultados son aceptables aunque algo por debajo de los experimentales y de las predicciones del resto de los modelos. Una característica importante del modelo es que proporciona el punto de la entalla en el que se inicia la grieta y la dirección de propagación de la misma en los primeros granos.

5.1. Criterio de activación para carga biaxial

Cuando la carga es biaxial plana se hace necesario considerar dos distribuciones de dislocaciones, una con los vectores de Burgers perpendiculares a la grieta (climb) y otra paralela a la grieta (glide). La tensión tangencial sobre las fuentes de dislocaciones tiene componentes provenientes de ambos conjuntos de dislocaciones. La condición de activación que permite determinar si la grieta va a superar la barrera i -ésima es la siguiente:

$$\frac{\sigma_3^i}{m_{\sigma i}^*} + \frac{\tau_3^i}{m_{\tau i}^*} = \tau_c \quad (5.1)$$

$m_{\sigma i}^*$ y $m_{\tau i}^*$ son los coeficientes de orientación que permiten calcular la tensión cortante en el plano de deslizamiento y en la dirección de deslizamiento de la fuente de dislocaciones a partir de la tensión normal y tangencial respectivamente que actúan en la zona de la barrera. En lo que sigue es más ilustrativo expresar esta ecuación de la manera:

$$\frac{\sigma_3^i}{m_{\sigma i}^* \tau_c} + \frac{\tau_3^i}{m_{\tau i}^* \tau_c} = 1 \quad (5.2)$$

Las constantes de activación para la barrera i -ésima se pueden relacionar con las constantes para la primera barrera con una ecuación similar a la ya empleada anteriormente para representar el diagrama de Kitagawa:

$$m_{\sigma i}^* \tau_c = m_{\sigma 1}^* \tau_c \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + a_0^f - (D/2)^f \right]^{\frac{1}{2f}}} \sqrt{i} \quad (5.3)$$

$$m_{\tau i}^* \tau_c = m_{\tau 1}^* \tau_c \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + a_0^f - (D/2)^f \right]^{\frac{1}{2f}}} \sqrt{i} \quad (5.4)$$

Las constantes para superar la primera barrera son en un principio desconocidas. Pero para un sólido no entallado el límite de fatiga se asocia con la superación de la primera barrera microestructural. Por tanto estudiando los límites de fatiga de probetas no entalladas en ensayos standard como los de tracción o torsión (σ_{FL} y τ_{FL}) se pueden obtener los valores de $m_{\sigma_1}^* \tau_c$ y $m_{\tau_1}^* \tau_c$, como se muestra a continuación.

5.1.1. Obtención de las constantes del material

Considérese el criterio microestructural de activación de deslizamiento para un sólido no entallado, asociado con la superación de la primera barrera (superíndice 1):

$$\frac{\sigma_3^1}{m_{\sigma_1}^* \tau_c} + \frac{\tau_3^1}{m_{\tau_1}^* \tau_c} = 1 \quad (5.5)$$

La rotura en un sólido no entallado se produce a partir de una grieta creciendo desde la superficie externa. Por tanto para obtener las tensiones en la primera barrera σ_3^1 y τ_3^1 será necesario estudiar el problema de una grieta en un medio semi-infinito, mostrado en la Figura 5.1.

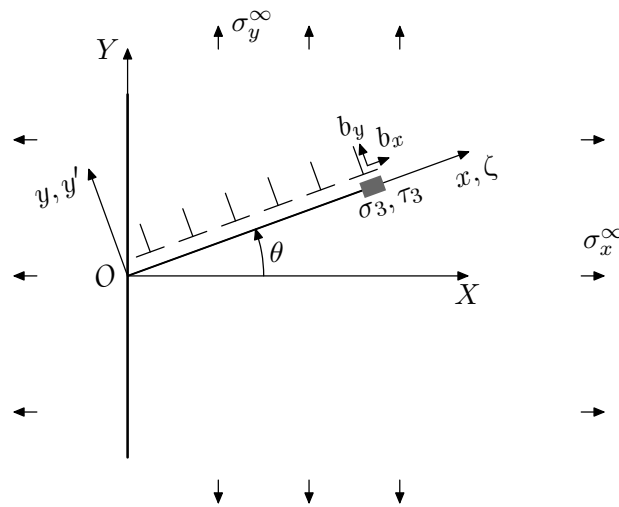


Figura 5.1: Placa semi-infinita sometida a carga biaxial. Modelado mediante dislocaciones.

La obtención de las ecuaciones de equilibrio sigue la misma lógica reflejada en capítulos precedentes. El número de términos es bastante considerable dificultando innecesariamente el seguimiento de los argumentos que se exponen a continuación.

Por ello se ha trasladado al Apéndice C todo el desarrollo de las ecuaciones de equilibrio de dislocaciones para una grieta en un medio semi-infinito sometido a carga biaxial y su transformación mediante el método de Erdogan et al. en un sistema de ecuaciones lineales. Su resolución permite obtener el valor de las tensiones en la barrera en función del ángulo θ .

Por sencillez se resuelve el sistema de ecuaciones para cargas externas aplicadas de valor unidad en cada caso, obteniéndose un valor de las tensiones en la barrera por unidad de carga aplicada. Estas tensiones asociadas a cargas unitarias van a ser designadas con un asterisco: $\sigma_3^{1*}(\theta)$ y $\tau_3^{1*}(\theta)$. Para cumplir el criterio de activación en la dirección θ será necesario multiplicar el sistema de cargas unitario por un cierto valor $\tau_a(\theta)$, es decir:

$$\tau_a(\theta) \left(\frac{\sigma_3^{1*}(\theta)}{m_{\sigma_1}^* \tau_c} + \frac{\tau_3^{1*}(\theta)}{m_{\tau_1}^* \tau_c} \right) = 1 \quad (5.6)$$

Sacando factor común $m_{\sigma_1}^* \tau_c$ el criterio se puede escribir de forma más compacta:

$$\tau_a(\theta) A \left(\sigma_3^{1*}(\theta) + \frac{\tau_3^{1*}(\theta)}{\lambda} \right) = 1 \quad (5.7)$$

siendo $m_{\sigma_1}^* \tau_c = 1/A$ y $\lambda = m_{\tau_1}^*/m_{\sigma_1}^*$. Se trata de encontrar el procedimiento para determinar A y λ , que son propiedades del material, a partir de datos experimentales. De todas las direcciones posibles, definidas por el ángulo θ , existirá una que requerirá la menor tensión aplicada externa τ_a para producir la activación en los siguientes granos. El valor de esta dirección dependerá del ensayo al que se aplique el criterio. En cualquier caso el ángulo será el correspondiente a la dirección en la que la “tensión combinada” $(\sigma_3^{1*}(\theta) + \tau_3^{1*}(\theta)/\lambda)$ alcance su valor más alto.

Considérese en primer lugar el caso de un ensayo de tracción pura ($\sigma_y^\infty = 1, \sigma_x^\infty = 0$). Con el sistema de ecuaciones lineales recogido en el Apéndice C se puede obtener numéricamente los valores de $\sigma_3^{1*}(\theta)$ y $\tau_3^{1*}(\theta)$ para distintos valores de θ y se puede calcular la tensión combinada $(\sigma_3^{1*}(\theta) + \tau_3^{1*}(\theta)/\lambda)$ para diversos valores supuestos de λ (Figura 5.2).

Puede verse que la tensión combinada tiene un máximo cuya posición y altura es diferente dependiendo del valor de λ . Precisamente, si se conociera el valor particular de λ para el material, la posición del máximo de la tensión combinada para ese valor de λ y para este ensayo, llamémosle θ_σ , daría la dirección de la grieta. Y, lógicamente, el valor de τ_a correspondiente sería en este caso el límite de fatiga a tracción, $\tau_a = \sigma_{FL}$. Por tanto se cumplirá:

$$\sigma_{FL} A \left(\sigma_3^{1*}(\theta_\sigma) + \frac{\tau_3^{1*}(\theta_\sigma)}{\lambda} \right)_{\sigma, max} = 1 \quad (5.8)$$

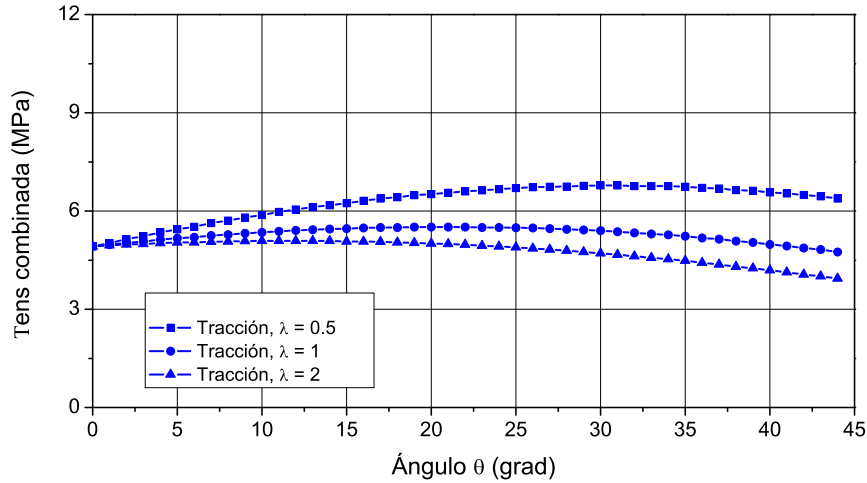


Figura 5.2: Valores de la tensión combinada en función de λ . Tracción.

Si se realizan los mismos cálculos para un ensayo a carga tangencial pura ($\sigma_y^\infty = 1, \sigma_x^\infty = -1$) podría determinarse el ángulo θ_τ correspondiente a la posición del máximo de la tensión combinada para este ensayo (Figura 5.3). En este caso el valor de τ_a sería el límite de fatiga a tensión tangencial pura, τ_{FL} . Se tendrá:

$$\tau_{FL} A \left(\sigma_3^{1*}(\theta_\tau) + \frac{\tau_3^{1*}(\theta_\tau)}{\lambda} \right)_{\tau, max} = 1 \quad (5.9)$$

Nótese el uso de los subíndices σ, τ en la tensión combinada para reseñar que los cálculos numéricos se refieren al ensayo simulado de tensión normal σ o tangencial τ respectivamente.

El valor de λ del material debe satisfacer las dos ecuaciones anteriores. La forma de obtenerlo es la siguiente. Volviendo a las Figuras 5.2 y 5.3, para los diversos valores de λ se obtienen los máximos de la tensión combinada para los dos casos de tracción pura y carga tangencial (puede observarse que se alcanzan valores mayores en el ensayo tangencial, lo que concuerda con el hecho de que el límite de fatiga a torsión suele ser menor que el de tracción). A continuación se introduce una función $f(\lambda)$, que se obtiene, para cada valor de λ , como el cociente de los dos máximos de tensión:

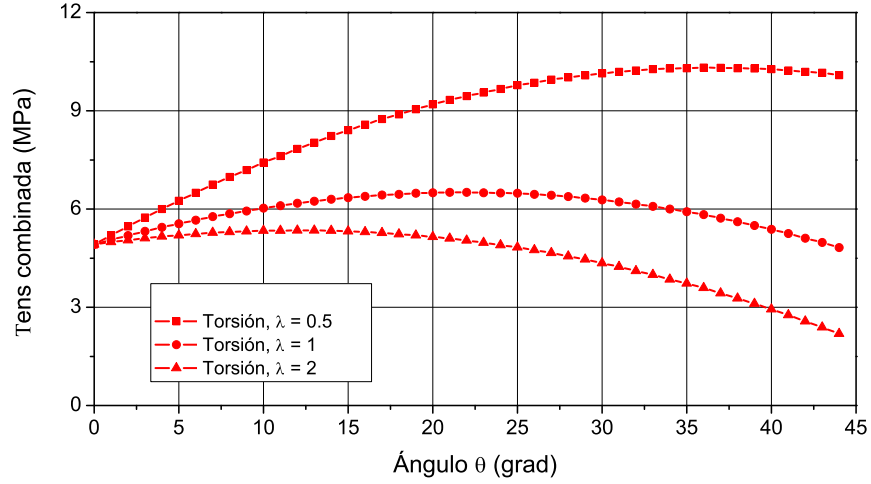


Figura 5.3: Valores de la tensión combinada en función de λ . Tensión tangencial.

$$f(\lambda) = \frac{\left(\sigma_3^{1*}(\theta(\lambda)) + \frac{\tau_3^{1*}(\theta(\lambda))}{\lambda} \right)_{\sigma, max}}{\left(\sigma_3^{1*}(\theta(\lambda)) + \frac{\tau_3^{1*}(\theta(\lambda))}{\lambda} \right)_{\tau, max}} \quad (5.10)$$

De acuerdo con los comentarios hechos anteriormente la función toma valores menores que 1. Además resulta ser monótona creciente (Figura 5.4). A la vista de las ecuaciones (5.8) y (5.9) el valor de λ del material es el que verifica la ecuación:

$$f(\lambda) = \frac{\tau_{FL}}{\sigma_{FL}} \quad (5.11)$$

Finalmente, el valor de la otra constante A se obtiene sustituyendo λ en cualquiera de las ecuaciones (5.8) o (5.9). Esto permite calcular las dos constantes $m_{\sigma 1}^* \tau_c$ y $m_{\tau 1}^* \tau_c$ del criterio general.

5.2. Aplicación a una entalla circular

Para analizar la validez del criterio se va a estudiar de nuevo una entalla circular, aunque en este caso considerando carga biaxial (Figura 5.5). Se trata de un agujero en un medio infinito sometido a una carga de fatiga de tipo biaxial y se

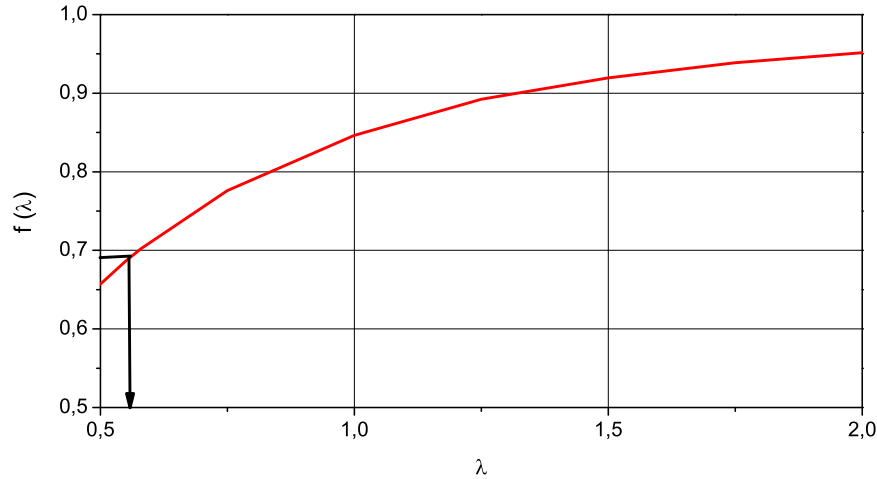


Figura 5.4: Función de λ para obtener las constantes del criterio biaxial.

desea obtener una predicción del límite de fatiga en función del tamaño del agujero R .

5.2.1. Tensiones elásticas alrededor de un agujero circular

Previamente se va a analizar brevemente las tensiones alrededor de un agujero circular. En las Figuras 5.6 y 5.7 se muestran las tensiones elásticas a lo largo de direcciones radiales para una placa infinita con un agujero circular sometida a una carga de tracción pura ($\sigma_y^\infty = 1$ MPa, $\sigma_x^\infty = 0$ MPa) y tangencial pura ($\sigma_y^\infty = 1$ MPa, $\sigma_x^\infty = -1$ MPa) respectivamente. El radio del agujero es de $R = 0.1$ mm. En la abscisa se ha empleado el número de medios granos, i , a partir del borde del agujero circular. El tamaño de grano considerado es el del material para el que a continuación se realizarán las predicciones con el modelo biaxial. Para mayor claridad sólo se representan las tensiones en dos direcciones, la de máxima tensión normal (0°) y la de máxima tensión tangencial (45°). El valor mayor de la tensión normal σ_y se produce para $\theta = 0$ y es de 3 MPa ($K_t = 3$) para tracción pura y de 4 MPa ($K_t = 4$) para tangencial pura. Nótese que el K_t de un agujero circular sometido a tracción pura ($K_t = 3$) es diferente al de una carga biaxial [1]. Aunque no se muestren en la figura, las tensiones normales σ_y tienen un valor negativo desde $\theta = 45^\circ$ hasta $\theta = 90^\circ$ para carga tangencial, es decir se produce compresión en la grieta. En cuanto a las tensiones tangenciales τ , alcanzan su valor máximo

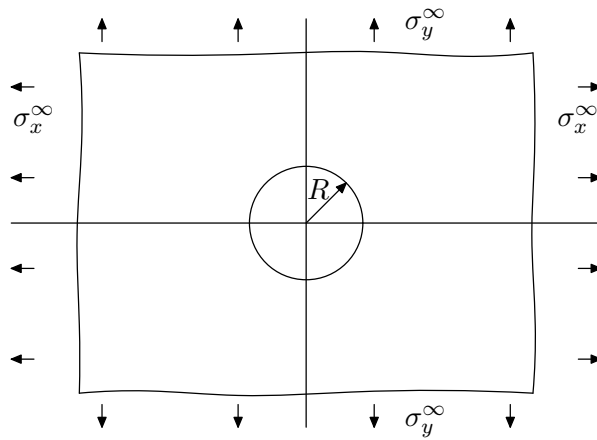


Figura 5.5: Placa infinita con agujero circular sometida a carga biaxial.

en $\theta = 45^\circ$ aunque siempre con valores mucho menores que la tensión normal σ_y .

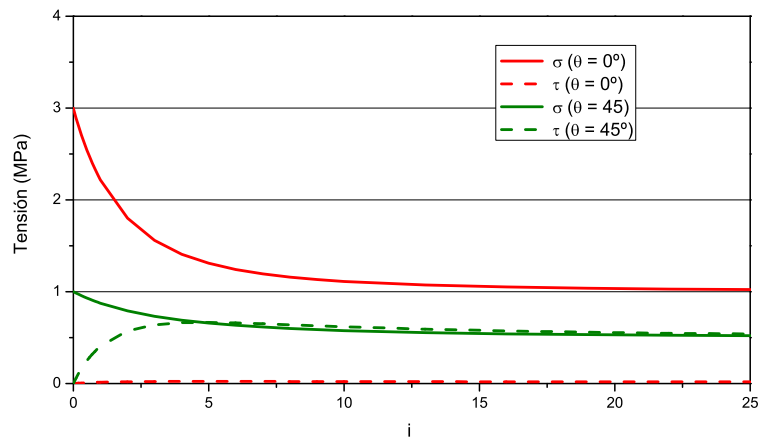


Figura 5.6: Tracción aplicada. Tensiones alrededor de agujero circular ($R=0.1$ mm). Placa infinita.

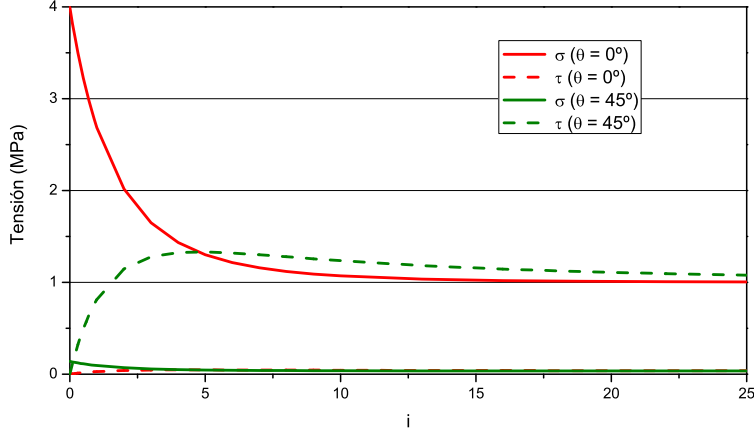


Figura 5.7: Tensión tangencial aplicada. Tensiones alrededor de agujero circular ($R=0.1$ mm). Placa infinita.

5.2.2. Obtención de las tensiones en la barrera.

El problema se muestra en la Figura 5.8. Se tiene un agujero circular en un medio infinito sometido a carga biaxial y se desea obtener para una dirección definida con los ángulos θ y θ_1 (dirección no radial) y una longitud definida por i , la función de distribución de dislocaciones en la grieta y la barrera y el valor de las tensiones σ_3 y τ_3 que mantienen el equilibrio. En la línea de grieta habrá tensiones $\sigma_y(x)$ y $\tau(x)$ y por tanto habrá que aplicar equilibrio tanto en la dirección x como en la y . El equilibrio en este caso está acoplado ya que la grieta no parte normal a la superficie del círculo.

La relación entre las variables r, θ_0 y las variables x, ζ es la siguiente:

$$r(x) = R \cos(\theta - \theta_0(x)) + c x \cos(\theta_1 - \theta_0(x)) \quad (5.12)$$

$$r(\zeta) = R \cos(\theta - \theta_0(\zeta)) + c \zeta \cos(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) \quad (5.13)$$

$$\theta_0(x) = \arctan\left(\frac{R \operatorname{sen}\theta + c x \operatorname{sen}\theta_1}{R \cos\theta + c x \cos\theta_1}\right) \quad (5.14)$$

$$\theta_0(\zeta) = \arctan\left(\frac{R \operatorname{sen}\theta + c \zeta \operatorname{sen}\theta_1}{R \cos\theta + c \zeta \cos\theta_1}\right) \quad (5.15)$$

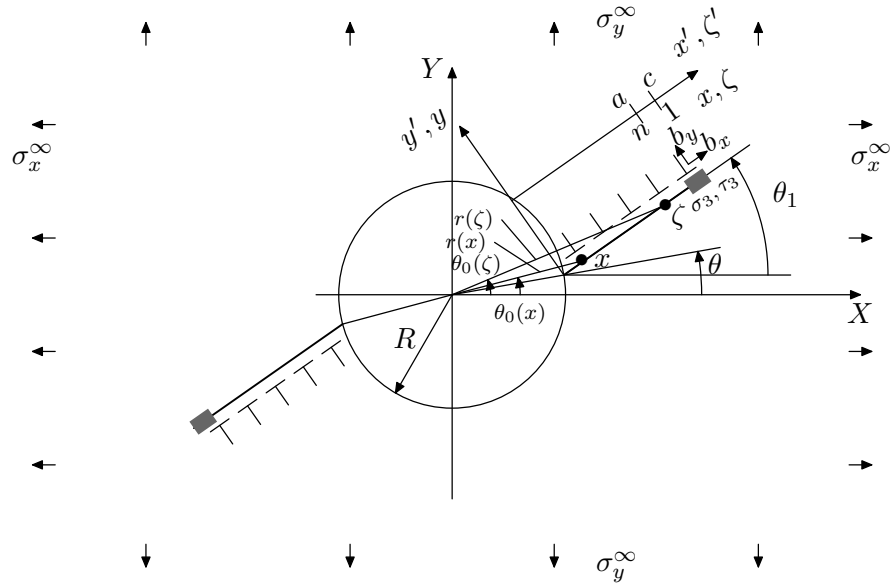


Figura 5.8: Agujero circular con dos grietas sometido a carga biaxial en un medio infinito.

Tensiones debidas a la carga externa

Se utiliza la expresión de las tensiones elásticas para una placa infinita con un agujero circular sometida a tensión biaxial [2]. Estas ecuaciones están definidas en coordenadas polares, según los valores (r, θ_0) . Anteriormente se ha definido la relación entre x y las variables (r, θ_0) . De modo que las tensiones en coordenadas polares para una dislocación en la posición x es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(x) = & \frac{\sigma_x^{\infty}}{2} \left[1 + \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 - \left(1 + 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 \right) \cos(2\theta_0(x)) \right] + \\ & + \frac{\sigma_y^{\infty}}{2} \left[1 + \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 + \left(1 + 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 \right) \cos(2\theta_0(x)) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(x) = & \frac{\sigma_x^{\infty}}{2} \left[1 - \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 + \left(1 + 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 - 4 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 \right) \cos(2\theta_0(x)) \right] + \\ & + \frac{\sigma_y^{\infty}}{2} \left[1 - \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 - \left(1 + 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 - 4 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 \right) \cos(2\theta_0(x)) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(x) = & -\frac{\sigma_x^\infty}{2} \left[\left(1 - 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 + 2 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 \right) \text{sen}(2\theta_0(x)) \right] + \\ & + \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left[\left(1 - 3 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^4 + 2 \left(\frac{R}{r(x)} \right)^2 \right) \text{sen}(2\theta_0(x)) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\text{Con: } r \in [R, \infty]$$

Pero para hacer el equilibrio en la dirección de la línea de grieta es necesario girar estas tensiones un ángulo $(\theta_1 - \theta_0(x))$. Las tensiones $\sigma_y(x)$ y $\tau(x)$, que pueden ser introducidas en las ecuaciones de equilibrio, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x) = & \sigma_r(x) [\text{sen}^2(\theta_1 - \theta_0(x))] + \sigma_\theta(x) [\cos^2(\theta_1 - \theta_0(x))] - \\ & - \tau_{r\theta}(x) [\text{sen}(2(\theta_1 - \theta_0(x)))] \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\sigma_r(x) [\text{sen}(\theta_1 - \theta_0(x)) \cos(\theta_1 - \theta_0(x))] + \\ & + \sigma_\theta(x) [\text{sen}(\theta_1 - \theta_0(x)) \cos(\theta_1 - \theta_0(x))] + \tau_{r\theta}(x) [\cos(2(\theta_1 - \theta_0(x)))] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Tensiones debidas a las dislocaciones

Los núcleos $K_{i(jk)}$ para una dislocación en las cercanías de un agujero circular fueron obtenidos en el Capítulo 2. Aplicando simetría a partir de estos núcleos se pueden obtener los núcleos para dos dislocaciones opuestas respecto a un agujero circular, que son las que existen en el problema:

$$K_{i(jk)}^s(x_K, y_K, \xi_K) = [K_{i(jk)}(x_K, y_K, \xi_K) - K_{i(jk)}(x_K, y_K, -\xi_K)] \quad (5.21)$$

Por simplicidad en la expresión se va a seguir empleando la notación $K_{i(jk)}$ en todo el desarrollo que sigue aunque se refiera al núcleo producido por dos dislocaciones $K_{i(jk)}^s$. Hay que tener en cuenta que estos núcleos están definidos para unos ejes radiales respecto al centro del agujero y cuyo eje X pasa por la dislocación. Las tensiones según estos ejes radiales producidas por una dislocación ubicada en $(\zeta_K, 0)$ con un vector de Burgers definido en estos ejes radiales (b_x^r, b_y^r) sobre un punto de coordenadas (x_K, y_K) son:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x^r &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x^r K_{x(xx)} + b_y^r K_{y(xx)}] \\ \bar{\sigma}_y^r &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x^r K_{x(yy)} + b_y^r K_{y(yy)}] \\ \bar{\tau}_{xy}^r &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x^r K_{x(xy)} + b_y^r K_{y(xy)}] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para el problema a estudiar las variables se particularizan de la siguiente manera:

$$\zeta_K = r(\zeta) \quad (5.23)$$

$$x_K = r(x) \cos(\theta_0(x) - \theta_0(\zeta)) \quad (5.24)$$

$$y_K = r(x) \sin(\theta_0(x) - \theta_0(\zeta)) \quad (5.25)$$

Las ecuaciones de equilibrio están definidas en la dirección de la línea de grieta y su perpendicular. Para tener el vector de Burgers y las tensiones en la dirección de la línea de grieta habrá que realizar un giro de $(\theta_1 - \theta_0(\zeta))$. El vector de Burgers (b_x, b_y) definido en la dirección de la línea de grieta se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} b_x^r \\ b_y^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) & -\sin(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) \\ \sin(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) & \cos(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Una transformación de Mohr permite girar las tensiones un ángulo $(\theta_1 - \theta_0(\zeta))$ para tenerlas en la dirección de la línea de grieta. Para el equilibrio de dislocaciones se emplean las tensiones $(\overline{\sigma}_y, \overline{\tau})$ en la línea de grieta, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_y &= \overline{\sigma}_x^r \sin^2(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) + \overline{\sigma}_y^r \cos^2(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) - \overline{\tau}_{xy}^r \sin(2(\theta_1 - \theta_0(\zeta))) \\ \overline{\tau}_{xy} &= -\overline{\sigma}_x^r \sin(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) \cos(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) + \overline{\sigma}_y^r \sin(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) \cos(\theta_1 - \theta_0(\zeta)) + \\ &\quad + \overline{\tau}_{xy}^r \cos(2(\theta_1 - \theta_0(\zeta))) \end{aligned} \quad (5.27)$$

A continuación se desarrolla la expresión anterior y se saca factor común b_x, b_y . Por simplicidad en la expresión se va a realizar la sustitución $\gamma = \theta_1 - \theta_0(\zeta)$. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_y(x) &= + \frac{2\mu b_x}{\pi(\kappa + 1)} \left[\sin^2(\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(xx)} + \sin(\gamma)K_{y(xx)}] + \right. \\ &\quad + \cos^2(\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(yy)} + \sin(\gamma)K_{y(yy)}] - \\ &\quad \left. - \sin(2\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(xy)} + \sin(\gamma)K_{y(xy)}] \right] + \\ &\quad + \frac{2\mu b_y}{\pi(\kappa + 1)} \left[\sin^2(\gamma) [-\sin(\gamma)K_{x(xx)} + \cos(\gamma)K_{y(xx)}] + \right. \\ &\quad + \cos^2(\gamma) [-\sin(\gamma)K_{x(yy)} + \cos(\gamma)K_{y(yy)}] - \\ &\quad \left. - \sin(2\gamma) [-\sin(\gamma)K_{x(xy)} + \cos(\gamma)K_{y(xy)}] \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\overline{\tau}(x) = + \frac{2\mu b_x}{\pi(\kappa + 1)} [-\sin(\gamma) \cos(\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(xx)} + \sin(\gamma)K_{y(xx)}] +$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sen}(\gamma) \cos(\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(yy)} + \operatorname{sen}(\gamma)K_{y(yy)}] + \\
& + \cos(2\gamma) [\cos(\gamma)K_{x(xy)} + \operatorname{sen}(\gamma)K_{y(xy)}] + \\
& + \frac{2\mu b_y}{\pi(\kappa + 1)} [-\operatorname{sen}(\gamma) \cos(\gamma) [-\operatorname{sen}(\gamma)K_{x(xx)} + \cos(\gamma)K_{y(xx)}] + \\
& + \operatorname{sen}(\gamma) \cos(\gamma) [-\operatorname{sen}(\gamma)K_{x(yy)} + \cos(\gamma)K_{y(yy)}] + \\
& + \cos(2\gamma) [-\operatorname{sen}(\gamma)K_{x(xy)} + \cos(\gamma)K_{y(xy)}] \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Expresado de forma compacta:

$$\bar{\sigma}_y(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x M + b_y N] \quad (5.30)$$

$$\bar{\tau}(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_x S + b_y T] \quad (5.31)$$

Estas expresiones son semejantes a las obtenidas para una grieta inclinada en un medio semi-infinito (Apéndice C), si se sustituye el ángulo γ por el θ y se emplean los valores de los núcleos y las variables de posición correspondientes. Procediendo de la misma manera que se ha hecho para el medio semiinfinito se obtiene exactamente el mismo sistema de ecuaciones lineales. Así que se pueden utilizar las ecuaciones de este Apéndice (C.16, C.17, C.18, C.19, C.20 y C.21), obteniéndose un sistema de $4N + 2$ ecuaciones y $4N + 2$ incógnitas, que son las funciones de distribución de dislocaciones ($\phi_1^x(u_{1i}), \phi_1^y(u_{1i}), \phi_3^x(u_{3i}), \phi_3^y(u_{3i})$) y las tensiones en la barrera σ_3 y τ_3 .

5.2.3. Obtención del límite de fatiga.

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las tensiones en la barrera en función del ángulo θ y θ_1 y para las diferentes longitudes de grieta i ($i = 1, 3, 5, 7, \dots$). Para obtener el límite de fatiga se procede de la siguiente manera: para cada valor de θ, θ_1 y de la longitud de la grieta i ($1, 3, 5, 7, \dots$) se obtienen los valores de σ_3, τ_3 que mantienen el equilibrio mediante la resolución del sistema de ecuaciones lineales correspondiente. A continuación, para cada combinación (θ, θ_1, i) se aplica el criterio microestructural biaxial definido en el apartado (5.1), proporcionando en cada caso la tensión externa aplicada τ_a necesaria para superar la barrera. Para cada dirección, definida por los ángulos θ y θ_1 se busca el i para el que se obtiene el mayor valor de τ_a , es decir la barrera más difícil de superar para esa dirección. En esta etapa del desarrollo del modelo se hace, por tanto, la hipótesis de que la grieta se mantiene en el mismo plano durante los primeros granos. En tanto en cuanto los valores de i en los que se produce el máximo no sean muy elevados la hipótesis parece justificada. El menor de todos los resultados obtenidos anteriormente será el límite de fatiga. Es decir, el límite de fatiga viene determinado por la tensión necesaria para superar la barrera más fuerte en la dirección más débil.

5.3. Comparación con resultados experimentales

A continuación se muestran una comparación entre las predicciones a fatiga del modelo microestructural biaxial y resultados experimentales obtenidos por Murakami [1] y otros modelos. Se trata de probetas a las que se les han realizado pequeños agujeros superficiales (Figura 5.9). Los ensayos de fatiga que se analizan son de flexión rotativa y de torsión alternativa. Se define el límite de fatiga como la tensión nominal máxima para una vida de al menos 10^7 ciclos.

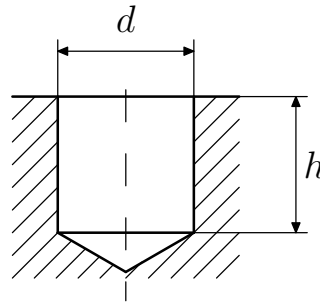


Figura 5.9: Agujero circular en los ensayos de Murakami.

El material es acero S45C (0.46 % de C) recocido. Sus propiedades son las siguientes:

Material	σ_{UTS} (MPa)	R_σ	σ_{FL} (flexión) (MPa)	τ_{FL} (torsión) (MPa)
S45C steel	620	-1	240	142

A partir del límite de fatiga a flexión rotativa se puede estimar el límite de fatiga a tracción-compresión alternativa:

$$\sigma_{FL}(\text{tracción}) = 0.85 \sigma_{FL}(\text{flexión}) = 204 \text{ MPa} \quad (5.32)$$

El tamaño de grano D se ha estimado a partir de $a_0 = 0.15 \text{ mm}$ [3] y $\frac{m_\infty^*}{m_1^*} = 3.1$, obteniéndose un valor de $D = 0.031 \text{ mm}$. Al igual que se hizo en el Modo I, para el tamaño de barrera se ha tomado un valor de $r_0 = D/30$. Para el sistema de ecuaciones del modelo de grieta inclinada se ha utilizado $N = 200$. La ecuación para obtener la constante λ del criterio de activación queda como:

$$f(\lambda) = \frac{142}{204} = 0.69 \quad (5.33)$$

A partir de la Figura 5.4 se obtiene un valor de λ :

$$\lambda = 0.57$$

Este resultado de λ corresponde a una dirección de propagación de grieta en tracción pura de $\theta = 30^\circ$ y en tangencial pura de $\theta = 33^\circ$. Para estas direcciones y para $i = 1$ se obtiene unas tensiones en la barrera de $\sigma_3 = 4.02$ MPa y $\tau_3 = 1.38$ MPa para tracción pura y de $\sigma_3 = 1.89$ MPa y $\tau_3 = 4.19$ MPa para tangencial pura. Como era de esperar la tensión tangencial necesaria en la barrera tiene un valor mucho más alto en el caso de carga tangencial pura que en el de carga de tracción pura. A partir del resultado de λ y utilizando la ecuación (5.8) se obtiene el valor de A:

$$A = \frac{1}{1313.98}$$

Así que las constantes del criterio de activación biaxial $m_{\sigma_1}^* \tau_c$ y $m_{\tau_1}^* \tau_c$ para este material quedan finalmente:

$$m_{\sigma_1}^* \tau_c = \frac{1}{A} = 1313.98 \text{ MPa} \qquad m_{\tau_1}^* \tau_c = \frac{\lambda}{A} = 748.96 \text{ MPa}$$

Se obtiene un valor claramente mayor para la primera constante, relacionada con la tensión normal σ_3 . Estas constantes, que aparecen en el criterio biaxial dividiendo a σ_3 y τ_3 respectivamente, indican que para este material tiene mayor peso en el criterio la tensión en la barrera τ_3 que la tensión σ_3 .

5.3.1. Resultados: tracción-compresión

Se han comparado para el caso de tracción-compresión alternativa los resultados experimentales y las predicciones de diversos modelos. Estos modelos son: el modelo de Taylor (Point method) para un valor de $L = 0.075$ mm, la ecuación aproximada del modelo microestructural, el modelo microestructural monoaxial explicado en el capítulo anterior y el modelo microestructural biaxial. El problema objeto de estudio evidentemente no es de carga biaxial, pero permite comprobar si el modelo microestructural biaxial predice correctamente casos de carga monoaxial. Para el modelo monoaxial se ha utilizado un valor de $N = 300$. Para el modelo biaxial se ha utilizado $N = 200$ y en la búsqueda de la dirección de propagación se han tomado incrementos de 5° , estudiándose los ángulos $\theta, \theta_1 = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots$. Respecto al valor de i , para ambos modelos microestructurales se analiza un número de granos suficiente para encontrar la tensión aplicada mínima necesaria para superar las sucesivas barreras en cada dirección.

En la Figura 5.10 se muestra los resultados experimentales y las predicciones de los diversos modelos. El comportamiento del modelo biaxial para radios grandes es adecuado, convergiendo al igual que el resto de modelos a $\sigma_{FL}/3$, como es de esperar de acuerdo con las técnicas clásicas de fatiga. Para radios grandes la

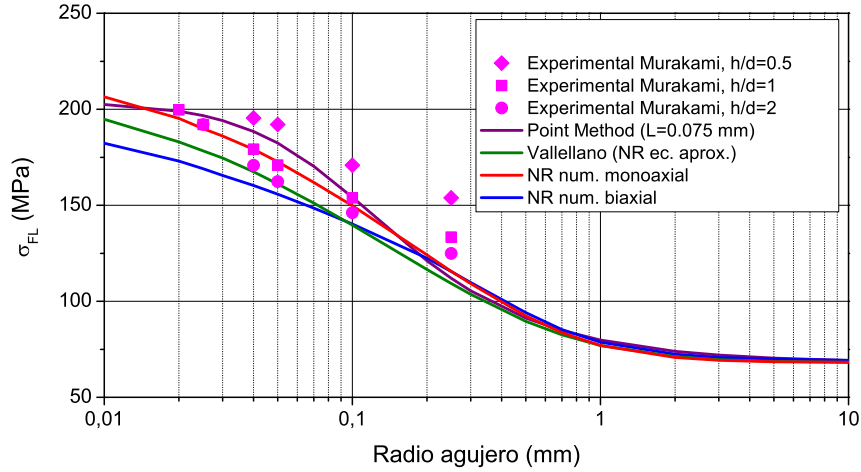


Figura 5.10: Resultados para tracción-compresión. Probeta con agujero circular. Experimentos de Murakami.

geometría del agujero tiende a la de un plano semi-infinito, siendo ésta justamente la geometría empleada para ajustar las constantes del criterio biaxial, de ahí que el resultado del modelo biaxial en esta zona de radios grandes converja perfectamente a los valores esperados. Los resultados experimentales se encuentran en la zona de radios medianos y pequeños, estando divididos en tres grupos en función de la relación h/d : 0.5, 1 y 2. Se observa cómo para mayores profundidades de agujero disminuye el límite de fatiga obtenido experimentalmente. Las predicciones numéricas realizadas corresponderían a un agujero infinitamente profundo y por tanto tiene cierto sentido que vayan algo por debajo de los resultados experimentales, aunque sus valores son muy cercanos a los resultados experimentales con los agujeros más profundos. El método Point Method toma en general valores por encima del resto de modelos. Para radios muy pequeños ($R < 0.02$ mm) la ecuación aproximada toma valores que parecen algo bajos. Y aún por debajo están las predicciones del modelo biaxial. En el modelo monoaxial ya se vio que existía una falta de convergencia del modelo para radios muy pequeños, motivada por un aspecto de tipo geométrico relacionado con que un agujero pequeño reproduce en el límite un medio infinito, mientras que se usa un criterio basado en la solución de medio semi-infinito. Para el modelo monoaxial el valor de 1.12 permitía relacionar el problema en medio infinito y semi-infinito. Sin embargo para el modelo biaxial la relación entre el medio infinito y semi-infinito se desconoce. El usar un modelo

Tracción								
Radio	NR Monoaxial		NR biaxial					
(mm)	σ_{FL}^N (MPa)	i	σ_{FL}^N (MPa)	i	θ (°)	θ_1 (°)	σ_3 (MPa)	τ_3 (MPa)
0.01	206.5	5	182.3	5	15	30	7.76	4.45
0.05	172.7	7	155.8	7	15	30	10.70	5.74
0.10	149.8	9	140.2	7	15	30	12.70	5.89
0.50	92.4	11	94.1	11	0	35	24.40	8.30
1.00	77.0	9	78.7	7	0	35	25.40	8.92
5.00	68.5	1	69.9	3	0	30	20.40	6.76
10.00	68.2	1	69.3	3	0	30	20.50	6.85

Tabla 5.1: Resultados para agujero circular a tracción con el modelo microestructural. Murakami.

u otro para ajustar las constantes del criterio produce un valor de las mismas totalmente diferente, siendo también diferentes las direcciones de propagación de la grieta. Todo ello puede justificar que las predicciones para agujeros muy pequeños con el modelo actual, basado en un criterio de activación de medio semi-infinito, estén un poco alejadas de los resultados esperados.

En la Tabla 5.1 se muestra la evolución de las predicciones del límite de fatiga con el tamaño del agujero R para el modelo monoaxial y biaxial. Se incluye asimismo el valor de i que determina el límite de fatiga y para el caso del modelo biaxial las tensiones en la barrera correspondientes (σ_3, τ_3) y la dirección más favorable para la propagación de la grieta, definida con los ángulos θ, θ_1 . Las predicciones de los dos modelos se diferencian en cierta medida para radios pequeños asemejándose mucho para radios grandes, en este caso superiores a 0.5 mm. Respecto al valor de i , los dos modelos presentan tendencias similares, obteniéndose el valor máximo de i , igual a 11, para un radio de 0.5 mm. La dirección más probable de la grieta según el modelo biaxial se encuentra entre 30° y 35° y el punto de inicio más probable oscila entre 0° y 15° . En cuanto a las tensiones en la barrera para el modelo monoaxial sus valores han de ser necesariamente mayores cuanto mayor sea la longitud de grieta, de ahí que se alcancen los valores más altos para el radio de 0.5 mm, que tiene el valor máximo de $i = 11$. Los valores de las tensiones en la barrera y la dirección de propagación de la grieta están relacionados con el campo elástico del problema, en este caso el campo alrededor de un agujero circular, y con el peso de cada una de las tensiones en el criterio de activación. Según se ha visto anteriormente las tensiones elásticas normales alrededor de un agujero son máximas en la dirección de 0° y las tensiones elásticas tangenciales lo son a 45° , siendo bastante más altos los valores de las tensiones normales que las tangenciales. Por otro lado también se ha visto que en el criterio biaxial la tensión τ_3 tiene

mayor importancia que la tensión σ_3 . Una dirección de propagación cercana a 0° no sería posible porque implicaría una tensión τ_3 muy baja, y en el criterio pesa principalmente esta tensión. Tampoco sería posible una dirección de 45° ya que las tensiones elásticas normales decrecen mucho en esta dirección. De modo que se obtiene que la dirección de propagación es un valor intermedio entre 0° y 45° , donde se alcanzan unos valores razonablemente altos de ambas tensiones.

5.3.2. Resultados: torsión alternativa

Se realiza una comparación entre los resultados experimentales de Murakami para torsión alternativa y las predicciones del modelo microestructural biaxial, desarrollado en este capítulo, y el modelo LM-SL [3]. En este caso no se pueden utilizar los modelos monoaxiales ya que la carga es biaxial. El modelo LM-SL, desarrollado recientemente, consiste en combinar el método de distancia crítica para entallas Line Method (LM) y el criterio de Susmel-Lazzarin (SL) para fatiga multiaxial [4]. El modelo LM-SL toma como dirección de grieta ($\theta = 0, \theta_1 = 45^\circ$), es decir, parte del punto de tensión normal máxima y tiene de dirección la de tensión tangencial máxima. Para el modelo biaxial se han tomado los mismos valores de los parámetros que para el caso anteriormente visto de tracción.

En la Figura 5.11 se muestra una comparación entre los resultados experimentales y las predicciones realizadas con los modelos. Las predicciones de los dos modelos se encuentran por debajo de las experimentales, con las del modelo microestructural un poco por debajo de las proporcionadas por el modelo LM-SL. En este caso los datos experimentales disponibles son para $h/d=1$. A la vista de la evolución con la profundidad de la entalla de los resultados experimentales de tracción alternativa, sería de esperar que para $h/d=2$ o mayores los resultados experimentales bajasen un poco, lo que mejoraría las predicciones de los modelos. Los resultados experimentales a torsión indican que el límite de fatiga del material no se ve alterado por pequeños agujeros (de hasta $R = 0.05 \text{ mm}$). Esto no ocurría en tracción donde incluso los agujeros más pequeños hacían disminuir el límite a fatiga. Ello puede estar relacionado con el gran gradiente de tensiones que se produce en torsión ($K_t = 4$), de modo que las tensiones altas decaen rápidamente al introducirse en el material y ello provoca que la presencia de agujeros pequeños no tenga influencia a la distancia a la que se encuentran las primeras barreras microestructurales. Aunque no se dispone de datos experimentales para corroborarlo, parece que las predicciones con el modelo biaxial para radios grandes evolucionan hacia valores más bajos de lo esperable. No conviene olvidar que para el problema de torsión se ha utilizado un modelo biaxial plano que emplea dislocaciones de cuña con vectores de Burgers (b_x, b_y) dentro del mismo plano y que por tanto supone un modo de rotura combinado I y II. Sin embargo el problema de torsión implica una rotura en Modo I y III combinado y por tanto un modelado correcto exigiría emplear dislocaciones de tornillo con vector de Burgers b_z sustituyendo a las dislocaciones con vector de Burgers b_x . Para las dislocaciones de tornillo la

presencia de un superficie libre no provoca alteración en su campo tensional ni por tanto en las tensiones en la barrera y sin embargo para las dislocaciones de cuña se produce un aumento de 1.12 veces en las tensiones en la barrera respecto a un medio infinito. Por tanto es previsible que un modelo que incluyera las dislocaciones de tornillo proporcionara para radios grandes del agujero, geoméricamente cercanos a un medio semi-infinito, unos valores de las tensiones en la barrera que fueran 1.12 veces menores que los obtenidos con el modelo actual, provocando una subida en las predicciones del límite de fatiga de un factor de 1.12. Estos resultados parecerían más razonables y ciertamente más cercanos a los proporcionados por el modelo LM-SL.

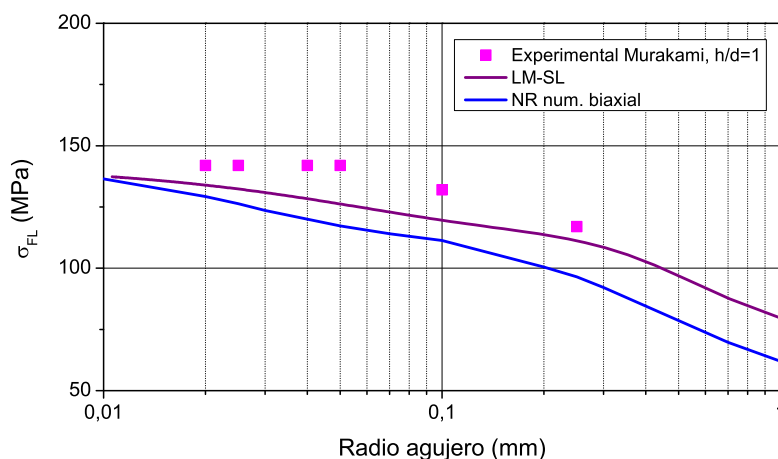


Figura 5.11: Resultados para torsión alternativa. Probeta con agujero circular. Experimentos de Murakami.

Los predicciones del límite de fatiga para torsión obtenidas con el modelo biaxial se muestran en la Tabla 5.2. Al igual que en tracción se incluye el valor de i que determina el límite de fatiga, las tensiones en la barrera correspondientes (σ_3, τ_3) y la dirección más favorable para la propagación de la grieta, definida con los ángulos θ, θ_1 . Los resultados indican que la dirección de grieta prevista para torsión es aproximadamente igual que la de tracción, entre 30° y 35° . La evolución en los i también es similar a la obtenida en tracción, aunque como sólo se muestran valores de R hasta 1 mm no se observa la bajada esperable de su valor para radios grandes. Para radios pequeños la tensión τ_3 es incluso mayor que la tensión σ_3 , y es que en torsión las tensiones tangenciales elásticas en la línea de grieta son ma-

Torsión						
Radio	NR biaxial					
(mm)	σ_{FL}^N (MPa)	i	θ (°)	θ_1 (°)	σ_3 (MPa)	τ_3 (MPa)
0.01	136.5	5	40	30	5.05	8.97
0.05	117.3	7	30	30	7.13	11.60
0.10	111.3	7	15	30	10.20	10.70
0.50	78.6	13	0	30	29.60	10.50
1.00	62.0	11	0	35	36.70	12.80

Tabla 5.2: Resultados para agujero circular a torsión con el modelo microestructural. Murakami.

yores que en tracción. Esta proporción se invierte para valores mayores de R , para los que las altas tensiones elásticas normales, mayores que en tracción ($K_t = 4$), se extienden hasta zonas más profundas del material, mientras que las tensiones elásticas tangenciales se mantienen prácticamente constantes, provocando que el valor de σ_3 se haga más predominante en el criterio biaxial.

5.3.3. Dirección de grieta

Una característica importante del modelo es que no hay que fijar a priori el punto de iniciación de grieta ni la dirección de la misma en los primeros granos, sino que se obtienen directamente de los cálculos. Respecto al punto de iniciación de grieta para este material y para radios del agujero pequeños el modelo predice un amplio rango de posibles puntos de iniciación para los problemas de tracción y torsión. Entre 0° y 80° la probabilidad de cumplir el criterio de activación es prácticamente la misma. Para radios mayores este rango decrece sustancialmente y se estrecha a entre 0° y 10° .

En cuanto a la dirección de la grieta en los primeros granos el modelo predice que la grieta se desarrolla en una dirección de unos 30° aproximadamente, para tracción y torsión. En la Figura 5.12 se muestra de forma esquemática los puntos posibles de iniciación y la dirección de grieta predicha para el caso de un agujero pequeño y de un agujero grande, para el material *S45C*.

Puede resultar sorprendente esta conclusión, sobre todo respecto al punto de iniciación, teniendo en cuenta que los criterios clásicos señalan claramente el eje de simetría horizontal como lugar de iniciación y supuesta dirección de propagación. La dirección de propagación no resulta quizás tan sorprendente por cuanto es bien conocido que las grietas en la llamada etapa I de crecimiento no crecen perpendiculares a la superficie. Se suele decir que crecen a 45° siguiendo la dirección de cortante máximo. El ángulo predicho aquí es distinto y habrá que recurrir a expe-

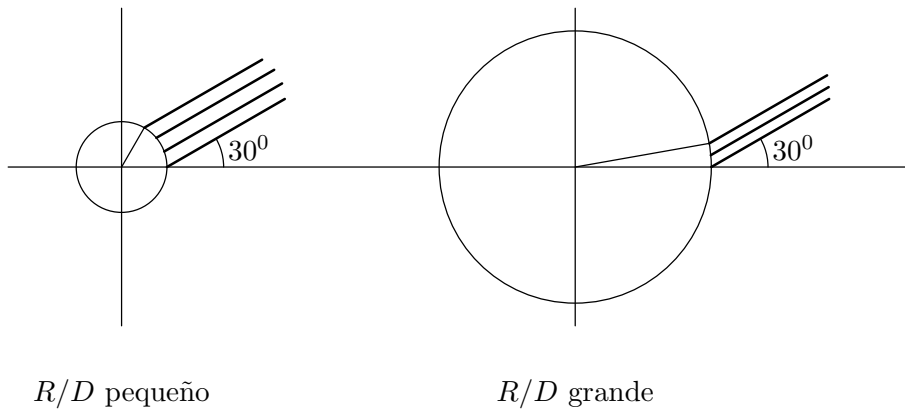


Figura 5.12: Tracción-compresión. Posibles direcciones de grieta predichas con el modelo *microestructural biaxial*, acero S45C.

rimentos para ver hasta qué punto el modelo funciona. Estos experimentos serán objeto del trabajo posterior a la tesis. Lo mismo cabe decir del lugar de iniciación, aunque en este caso los propios resultados presentados por Murakami avalan en cierta manera las predicciones del modelo. En la foto de la Figura 5.13 [1] se muestra una probeta con un agujero circular sometida a fatiga en tracción-compresión alternativa. Se observa que las dos grietas principales no nacen en el plano perpendicular a la carga axial, sino que lo hacen para un ángulo aproximado $\theta \in [10^\circ, 40^\circ]$. La dirección de la grieta en su parte inicial está cercana a los 30° . Estos resultados son muy acordes con las predicciones del modelo. También se observa que la grieta a medida que crece va tendiendo a la línea horizontal. El modelo en su formulación actual no es capaz de predecir el cambio de dirección que va siguiendo la grieta. Para saber el recorrido que va a realizar la grieta sería necesario estudiar en el modelo el equilibrio de dislocaciones a lo largo de líneas quebradas. Aunque la base teórica seguiría siendo la misma, el desarrollo matemático se complicaría bastante. El estudio de la evolución de la dirección de la grieta se ha tenido que posponer para investigaciones futuras.

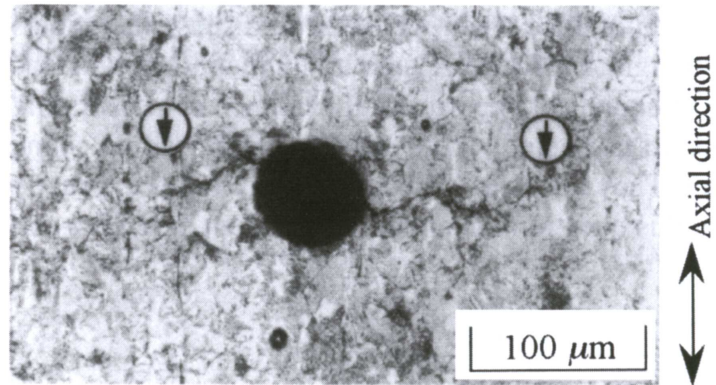


Figura 5.13: Ejemplo de grietas que no nacen perpendiculares a la carga de tracción, ni en el punto correspondiente a $\theta = 0$ [1].

Bibliografía

1. Murakami, Y. , 2002, *Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions*, Elsevier.
2. Timoshenko, S. y Goodier, J. N., 1934, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill.
3. Taylor, D., 2005, *Notch size effect in multiaxial fatigue*, Jornadas sobre "Progettazione a fatica in presenza di multiassialità tensionali", Ferrara, pp. 3-13.
4. Susmel, L., 2003, *A unifying approach to estimate the high cycle fatigue strength of notches subjected to both uniaxial and multiaxial cyclic loading*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 27, pp. 391-411.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo ha abordado en primer lugar la extensión de un modelo microestructural de crecimiento de microgrietas al estudio de cuerpos entallados sometidos a carga cíclica axial. El modelo microestructural estudiado permite describir el crecimiento de microgrietas en sólidos sometidos a fatiga. Se basa en la capacidad de la grieta para ir superando las sucesivas barreras microestructurales, como pueden ser los bordes de grano, hasta provocar la fractura completa del cuerpo. En el modelo microestructural se representa la grieta y la zona plástica delante de ella mediante un conjunto de dislocaciones, que se extienden hasta la barrera microestructural. A medida que la grieta va creciendo, impelida por la carga externa aplicada, la tensión en la zona de la barrera necesaria para mantener el equilibrio de las dislocaciones va aumentando. Esta tensión alcanza su valor máximo cuando la grieta ha llegado justamente hasta la barrera y prácticamente no hay zona plástica. Si la carga aplicada es suficientemente alta se superará un cierto umbral de tensiones en la zona de la barrera, lo que provoca que se activen las fuentes de dislocaciones en el siguiente grano haciendo que la grieta se extienda a dicho grano. Este proceso se va repitiendo grano a grano hasta llegar a la rotura completa del material. La tensión aplicada mínima necesaria para superar las sucesivas barreras constituye el límite de fatiga del componente.

El estudio del equilibrio de las dislocaciones en la grieta proporciona una ecuación integral singular, cuya solución es la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$ en el dominio de integración. La resolución de este tipo de ecuaciones es, hasta la fecha y según el conocimiento del autor, prácticamente imposible salvo para situaciones muy sencillas. El objeto de este trabajo ha sido precisamente la extensión del modelo a situaciones en las que no se conoce la solución analítica de la ecuación integral singular obtenida. Ello ha requerido el empleo de técnicas de

integración numérica. El método numérico elegido ha sido el de Erdogan, Gupta y Cook, que se basa en la teoría de cuadraturas y en propiedades de polinomios ortogonales para transformar una ecuación integral singular de tipo Cauchy en un sistema de ecuaciones lineales, permitiendo la obtención de valores de la función solución en una serie discreta de puntos del dominio. La singularidad de Cauchy es introducida en la ecuación al modelar la interacción entre las propias dislocaciones.

El método de Erdogan et al. proporciona diferentes fórmulas de cuadratura según el tipo de valor deseado para la función solución $f(\zeta)$ en los extremos del intervalo de integración. El análisis de crecimiento de grietas pequeñas requiere soluciones en las que $f(\zeta)$ sea acotada en los extremos. La aplicación directa del método numérico al problema objeto de estudio, con cuadraturas para funciones acotadas, tiene la virtud de proporcionar una ecuación de más respecto al número de incógnitas de los valores discretos de la función $f(\zeta)$. Esta ecuación de más permite calcular la tensión necesaria en la barrera para mantener el equilibrio de las dislocaciones en función del tamaño relativo de la grieta. En la solución analítica, basada en el teorema de inversión de Muskhelishvili, existe una ecuación de condición de existencia que precisamente permite relacionar el tamaño relativo de grieta con la tensión en la barrera. De modo que el método numérico proporciona de forma implícita la condición de existencia del problema. Por contra su aplicación no recoge las discontinuidades en la función solución que se producen en las transiciones entre la grieta, zona plástica y barrera, asociadas a los cambios bruscos del valor de la tensión de fricción, obteniéndose un valor de la tensión en la barrera por debajo del resultado esperado. El modelo de crecimiento de microgrietas se basa en esta tensión y este resultado implica una predicción del límite de fatiga por encima del real.

Esta dificultad se ha superado dividiendo el intervalo de integración en varios trozos, uno para cada zona y empleando para cada una de ellas la fórmula de cuadratura correspondiente. En este caso, la técnica numérica no proporciona una ecuación de más equivalente a la ecuación condición de existencia. Se ha añadido una ecuación en la que se impone que la pendiente del desplazamiento plástico ha de ser continua en la unión de los intervalos. Esta imposición permite resolver el sistema de ecuaciones y obtener la tensión en la barrera correspondiente. De alguna forma la condición de pendiente continua del desplazamiento y la ecuación de condición de existencia de Muskhelishvili son equivalentes. Esta forma de resolución numérica se ha contrastado comparando los resultados obtenidos con la solución analítica conocida de una grieta en un medio infinito sometida a Modo I y los resultados de la función $f(\zeta)$ son prácticamente similares. Lo mismo se puede decir de la tensión en la barrera, en la que se alcanza una precisión suficiente empleando un número de puntos de precisión relativamente pequeño. La técnica numérica se ha aplicado a otro problema de interés como es el de una grieta en un medio semi-infinito cargada en modo I. En el núcleo de la ecuación integral aparece un conjunto de términos añadidos al de Cauchy que representan la inte-

racción de las dislocaciones con la superficie libre y que son no singulares en el intervalo de integración. Al aplicar el método de Erdogan et al. a este problema se comprueba que el término singular de Cauchy sigue siendo el término dominante de la ecuación y que las singularidades del problema en las zonas de transición siguen teniendo el mismo carácter que en el problema de medio infinito. La resolución numérica proporciona un valor de la tensión en la barrera que es 1.12 veces la del caso infinito, exactamente igual que la relación existente entre los Factores de Intensidad de Tensiones para estos dos problemas. Este resultado valida en gran medida la extensión de la técnica numérica a otros casos diferentes del de medio infinito y establece una clara conexión entre el modelo de dislocaciones y la Mecánica de Fractura, abriendo la posibilidad futura del uso de Factores de Intensidad de Tensiones recogidos en la literatura para su aplicación en el modelo.

El método numérico se ha aplicado para resolver las ecuaciones integrales singulares que se generan al estudiar el problema de un sólido infinito entallado sometido a Modo I, proporcionando una relación entre la tensión externa aplicada y la tensión en la barrera que mantiene el equilibrio. Se ha considerado que la tensión de activación de las fuentes de dislocaciones es la misma que para componentes sin entalla, admitiendo que se trata de un parámetro relacionado con la microestructura. La presencia de la entalla provoca un gradiente de tensiones en la grieta, por lo que no es predecible a priori qué barrera va a requerir la mayor tensión aplicada para ser superada. El límite de fatiga del componente entallado se define como la tensión aplicada mínima necesaria para superar todas y cada una de las barreras.

Se han mostrado dos técnicas diferentes para modelar mediante dislocaciones el problema de una grieta partiendo de una entalla. La primera implica la utilización del núcleo específico del problema, generado a partir de la solución fundamental de una dislocación en la geometría apropiada y que permite representar la fuerza que se ejercen entre sí dos dislocaciones genéricas del dominio, fuerza que se ve alterada por la presencia del contorno de la entalla y que, por tanto, es específica de cada geometría. Esta técnica se ha aplicado a una entalla circular, utilizando el núcleo obtenido a partir de la solución de Dundurs y Mura y que emplea un método semiinverso para calcular la función de Airy que caracteriza el campo tensional del problema. La segunda técnica consiste en modelar también la entalla mediante dislocaciones, realizando el equilibrio en el conjunto de dislocaciones formado por entalla, grieta y barrera e imponiendo como condición añadida que la tensión en la superficie de la entalla debe cumplir las condiciones de contorno correspondientes. Se ha aplicado a una entalla semicircular, utilizándose como base el núcleo de un problema de medio semi-infinito, obtenido de nuevo a partir de la solución de Dundurs y Mura. Los modelos obtenidos se han utilizado para predecir el límite de fatiga y se han comparado con resultados experimentales, obteniéndose en general resultados bastante aceptables. Las dos técnicas de modelado de la grieta mediante dislocaciones presentadas permiten, en un principio, calcular el límite de fatiga en cualquier tipo de entalla, ya sea elíptica, en V, etc., y con cualquier tipo de carga.

La ecuaciones obtenidas han sido expresadas de la forma más general posible para que puedan ser utilizadas para otro tipo de entallas de forma casi directa. La primera técnica es numéricamente más sencilla de implementar porque sólo modela la grieta y la barrera, así que proporciona un sistema con menor número de ecuaciones. Sin embargo la obtención del núcleo de una dislocación en las cercanías de una entalla resulta una tarea en cierta medida complicada y sólo se disponen en la literatura de los núcleos para las geometrías más sencillas. Para entallas de geometría más complicada parece evidente la necesidad de utilizar la segunda técnica, que por contra produce un sistema con más ecuaciones, sobre todo si se modelan entallas de gran tamaño. También se puede considerar una ventaja de esta segunda forma el hecho de utilizar la configuración de medio semi-infinito para obtener las tensiones en la línea de grieta procedentes de la carga externa, mientras que en la primera forma se necesitan las tensiones obtenidas en presencia de la entalla. Ello puede implicar que para entallas, por ejemplo en V, el uso de la primera técnica requiera la creación de un modelo de elementos finitos para la obtención de estas tensiones. Aunque por contra en la segunda forma hay dislocaciones que están ubicadas a lo largo de la entalla, no encontrándose en una línea recta como las de la grieta o la barrera, de modo que la expresión de la posición relativa de las dislocaciones, necesaria para obtener las fuerzas entre dislocaciones, se complica en cierta medida.

Se ha analizado la robustez del modelo microestructural numérico ante la variación de los parámetros principales del mismo. En primer lugar se ha comprobado que incluso variaciones del tamaño de grano del triple o de un tercio del tamaño real no alteran prácticamente la predicción del límite de fatiga. También se ha verificado que la influencia del tamaño de la barrera microestructural es muy pequeña siempre que su tamaño sea muy inferior al del tamaño de grano, al menos una décima parte de éste. Por último, hay que destacar que el método numérico converge rápidamente incluso para valores relativamente pequeños de N , que representa el número de ecuaciones utilizadas para cada intervalo. Un valor de $N = 100$ permite obtener una precisión de dos cifras decimales en la tensión en la barrera. Ello implica que el método numérico no necesita elevados tiempos computacionales.

En este trabajo se ha dado un primer paso en la aplicación del modelo microestructural a situaciones de carga biaxial plana. La obtención de los núcleos del problema no suponen mucha dificultad añadida respecto al caso monoaxial. Aunque sí requiere la necesidad de emplear dos distribuciones de dislocaciones a lo largo de la grieta con vectores de Burgers perpendiculares entre sí. De modo que el mantenimiento del equilibrio de las dislocaciones en el dominio necesita tanto de tensiones normales como de tensiones tangenciales en la barrera. El proceso de activación de las fuentes de dislocaciones, que permiten el crecimiento de la grieta, viene determinado por el estado tensional completo en la zona de la barrera, que en este caso incluye ambas tensiones. Ello ha motivado la utilización de un nueva

ecuación de condición de activación para carga biaxial que incluye la aportación de las dos tensiones en la barrera. El modelo biaxial se ha aplicado para la predicción del límite de fatiga de una placa con un agujero circular sometido a torsión, obteniéndose resultados por debajo de los experimentales, conservativos, por tanto. Además el modelo biaxial proporciona la dirección en la que se desarrolla la grieta en los primeros granos y el punto de iniciación de la misma. Se han estudiado los casos de tracción pura a 0° y de tensión tangencial pura a 45° en una placa con entalla circular, siendo el material acero recocido. Se ha obtenido que el punto de iniciación de la grieta, en ambos casos, puede estar en un amplio rango de puntos del contorno circular, especialmente para radios del agujero pequeños, no teniendo que estar concretamente a 0° ó 45° , como suelen indicar los criterios clásicos. Respecto a la dirección de grieta, para ambos casos de carga se obtiene una dirección similar, en torno a 30° , de nuevo alejada de los 0° ó 45° . La dirección de grieta obtenida, que se encuentra en un valor intermedio entre estas dos direcciones, viene determinada por la propia naturaleza del criterio, que se basa en una tensión en la zona de la barrera que es combinación de las tensiones tangenciales y normales en la misma. Por tanto, la dirección más favorable será aquella en la que la tensión combinada de ambas sea más alta y este valor no se da en las direcciones extremas de 0° ó 45° que presentan valores muy altos de sólo una de las tensiones.

La rotura por fatiga en un componente sin entalla se produce en general a partir de una grieta que nace de la parte superficial del sólido y no de su interior. Así que el ajuste de la constante del criterio de activación para el problema monoaxial requiere relacionar la tensión obtenida en las barreras microestructurales para una grieta creciendo desde un medio semi-infinito con las tensiones externas aplicadas cuando se alcanza el límite de fatiga a tracción en un cuerpo no entallado, σ_{FL} . El ajustar la constante con un modelo semi-infinito en vez de infinito implica un incremento del valor de la misma de 1.12. Ello conlleva que se obtengan valores 1.12 veces superiores a lo esperado cuando se utiliza el criterio para la predicción de fatiga de entallas interiores, como agujeros circulares, de tamaño muy pequeño, tendente a cero. De forma similar, para ajustar el criterio biaxial se necesitan dos constantes, de modo que se estudia de nuevo un modelo de grieta en medio semi-infinito y se relacionan las tensiones tangenciales y normales en las barreras con los límites de fatiga a tracción y a torsión. Pero en este caso las constantes obtenidas a partir de un medio semi-infinito y las que se obtendrían con un medio infinito no tienen, en general, ninguna relación numérica concreta, como ocurre con el caso monoaxial. Ello provoca que cuando se usa el criterio biaxial para agujeros interiores muy pequeños, tendentes a cero, se obtengan unas predicciones que no son correctas. Este problema no se produce desde luego en entallas pequeñas que se encuentren en la superficie externa del cuerpo, como las entallas semicirculares, en V, etc.

En cuanto al trabajo futuro, las principales líneas de trabajo propuestas son las siguientes:

En primer lugar se considera muy importante el desarrollar en los próximos años una labor de tipo experimental. Los datos experimentales recogidos en la literatura relativos a rotura por fatiga en entallas son bastante escasos y se hace necesario tener una buena base de datos experimentales que permita constatar las predicciones de los modelos presentados. Sería muy interesante realizar ensayos experimentales de fatiga para diversos tipos de entallas, obteniendo el límite de fatiga para diversos radios y observando tanto el punto de iniciación de grieta como la dirección de iniciación y de propagación de grieta.

Otra posible labor futura estaría relacionada con la extensión del modelo monoaxial a cualquier tipo de entalla. En este sentido sería conveniente ampliar los núcleos conocidos a otras geometrías, como podría ser la elíptica, y también desarrollar la técnica del modelado de entallas mediante dislocaciones para casos como el de las entallas en V para diversos radios de curvatura y profundidades. En esta misma línea se plantearía el modelado de contornos mediante dislocaciones, lo que permitiría la predicción del límite de fatiga en geometrías muy variadas y más cercanas a las reales. Y desde el punto de vista de aplicación práctica, hay que profundizar en el estudio de las relaciones entre las ecuaciones que permiten calcular la tensión en la barrera para una grieta en una geometría arbitraria y las que determinan el factor de calibración del Factor de Intensidad de Tensiones para esa misma geometría, de forma que se desarrollen técnicas que permitan aprovechar las abundantes soluciones ya conocidas en Mecánica de Fractura para la determinación del límite de fatiga en componentes.

Otra línea de trabajo posible sería la del modelado de la zona plástica bidimensional delante de la grieta mediante una superficie de dislocaciones. Es de esperar que un modelo de este tipo, más cercano a la realidad que el actual, produjera resultados más exactos y permitiera además su extensión a situaciones en las que la zona plástica ocupa dimensiones considerables.

Respecto al modelado biaxial, se ha presentado un modelo que considera que la grieta se desarrolla en una línea recta. Sería muy interesante que se permitiera un cambio de dirección en la grieta al llegar a cada barrera microestructural. Ello implicaría modelar líneas de dislocaciones quebradas, dando lugar a más tramos de integración. Mediante este modelo se podría estudiar si se produce una transición de Modo II a Modo I a medida que la grieta crece. Además, el estudio en esta tesis del problema de torsión ha planteado la posibilidad de utilizar un modelo que incluya dislocaciones de tornillo y de cuña conjuntamente en la línea de grieta y que permita analizar situaciones en las que la grieta crece en un modo mixto I y III. Se tendría un criterio de activación de fuentes de dislocaciones que recogería las tensiones en la barrera provenientes de los dos tipos de dislocaciones. Esta idea se podría extrapolar incluso para analizar casos de carga triaxial, aunque ello requeriría usar anillos de dislocaciones en lugar de dislocaciones rectas en un caso

general.

En esta línea de perfeccionamiento del modelo biaxial se podría incluir la presencia de pequeñas grietas no propagantes alrededor de la grieta principal. Existe evidencia experimental de que en un componente además de la grieta principal se producen pequeñas grietas en otros puntos de la entalla. Y estas pequeñas grietas deben aliviar en cierto modo la tensión de la grieta principal, modificando la predicción a fatiga. La incorporación de estas pequeñas grietas implica de nuevo el modelado de más tramos de líneas de dislocaciones.

Apéndices

Apéndice A

Ecuación del método de Erdogan, Gupta y Cook

Obtención de la ecuación:

$$T_{j+1}(v_k) = - \sum_{i=1}^N \frac{(1 - u_i^2)}{(N+1)(u_i - v_k)} U_j(u_i) \quad (\text{A.1})$$

siendo:

$$u_i = \cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right) \quad i = 1, \dots, N$$
$$v_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(N+1)}\right) \quad k = 1, \dots, N+1$$

Desarrollo:

La división entre dos polinomios de Jacobi, como polinomios que son, forma una función racional. Y esta función racional puede descomponerse en fracciones simples. Considérese la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$-\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{U_{N-j-1}(x)}{U_N(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{u_i - x}, \quad j < N \quad (\text{A.2})$$

Con los u_i siendo los ceros del denominador:

$$U_N(u_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.3})$$

Esta expansión es posible ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Los coeficientes a_i de las fracciones simples son los siguientes (véase Apartado A.1):

$$a_i = -\frac{U_{N-j-1}(u_i)}{U_N'(u_i)} \quad (\text{A.4})$$

Considérese la siguiente relación [1] (Cap. 10, página 185, ec. 21):

$$(1-x^2)U_N'(x) = (N+1)U_{N-1}(x) - (Nx)U_N(x) \quad (\text{A.5})$$

Esta ecuación particularizada para $x = u_i$ queda como:

$$(1-u_i^2)U_N'(u_i) = (N+1)U_{N-1}(u_i) - 0 = (N+1)U_{N-1}(u_i) \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo el valor obtenido de $U_N'(u_i)$ en la ecuación de los a_i (A.4) se obtiene:

$$a_i = -\frac{(1-u_i^2)U_{N-j-1}(u_i)}{(N+1)U_{N-1}(u_i)} \quad (\text{A.7})$$

De modo que la igualdad inicial de las fracciones simples queda:

$$-\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{U_{N-j-1}(x)}{U_N(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{u_i - x} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i - x} \left[-\frac{(1-u_i^2)U_{N-j-1}(u_i)}{(N+1)U_{N-1}(u_i)} \right], \quad j < N \quad (\text{A.8})$$

Sea la siguiente relación recurrente [1] (Cap. 10, página 187, ec. 36-37):

$$U_{N-j-1}(x) = T_j(x)U_{N-1}(x) - T_N(x)U_{j-1}(x) \quad (\text{A.9})$$

Si se utiliza esta ecuación para modificar el segundo término de la igualdad queda:

$$\begin{aligned} \frac{U_{N-j-1}(x)}{U_N(x)} &= -\sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} \left[\frac{T_j(u_i)U_{N-1}(u_i)}{U_{N-1}(u_i)} - \frac{T_N(u_i)U_{j-1}(u_i)}{U_{N-1}(u_i)} \right] = \\ &= -\sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} \left[T_j(u_i) - \frac{T_N(u_i)U_{j-1}(u_i)}{U_{N-1}(u_i)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En el libro de *Erdelyi* [1] (Cap. 10, página 184, ec. 3) aparece la siguiente relación entre polinomios de Chebyshev:

$$T_N(x) = U_N(x) - xU_{N-1}(x) \quad (\text{A.11})$$

Introduciendo la ecuación anterior en el segundo término de la igualdad general se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{N-j-1}(x)}{U_N(x)} &= - \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} \left[T_j(u_i) - \frac{[U_N(u_i) - u_i U_{N-1}(u_i)] U_{j-1}(u_i)}{U_{N-1}(u_i)} \right] = \\
&= - \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} \left[T_j(u_i) - \frac{[0 - u_i U_{N-1}(u_i)] U_{j-1}(u_i)}{U_{N-1}(u_i)} \right] = \\
&= - \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} [T_j(u_i) + u_i U_{j-1}(u_i)] = - \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} U_j(u_i)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

A continuación se vuelve a utilizar la ecuación recurrente (para $n = n+1$, $j = j+1$) para modificar el numerador del primer término:

$$\frac{U_{N-j-1}(x)}{U_N(x)} = \frac{1}{U_N(x)} [T_{j+1}(x)U_N(x) - T_{N+1}(x)U_j(x)] = T_{j+1}(x) - \frac{T_{N+1}(x)U_j(x)}{U_N(x)} \tag{A.13}$$

Si se introduce en la igualdad general queda:

$$T_{j+1}(x) - \frac{T_{N+1}(x)U_j(x)}{U_N(x)} = - \sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-x)} U_j(u_i) \tag{A.14}$$

Si ahora se particulariza la ecuación anterior para los puntos $x = v_k$ en los que $T_{N+1}(v_k) = 0$ se obtiene finalmente:

$$\sum_{i=1}^N \frac{(1-u_i^2)}{(N+1)(u_i-v_k)} U_j(u_i) = -T_{j+1}(v_k) \tag{A.15}$$

A.1. Expansión de una función racional en fracciones simples.

La descomposición en fracciones simples de una función racional cuyo numerador tiene el grado menor que el denominador es la siguiente [2]:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \frac{C}{(x-a_3)} \tag{A.16}$$

Se ha supuesto un polinomio $Q(x)$ de grado 3 por simplicidad. El supuesto es generalizable a un polinomio de cualquier grado.

Los coeficientes A , B y C vienen dados por la siguiente expresión:

$$A = \frac{P(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \quad B = \frac{P(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \quad C = \frac{P(a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} \quad (\text{A.17})$$

En el caso de las funciones racionales objeto de este estudio, el numerador es una combinación de polinomios de Jacobi y el denominador es un polinomio de Jacobi, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{x - u_i} \quad (\text{A.18})$$

Donde los u_i son las N raíces del polinomio de orden N del denominador:

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(u_i) = 0 \quad (\text{A.19})$$

A lo largo del estudio aparecen los denominadores de las fracciones simples con el signo cambiado, lo que requiere cambiar el signo de $P(x)$:

$$-\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-P(x)}{P_N^{(\alpha,\beta)}(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{u_i - x} \quad (\text{A.20})$$

Los coeficientes de las fracciones simples son los siguientes:

$$a_i = \frac{P(u_i)}{(u_i - u_1)(u_i - u_2) \dots (u_i - u_{i-1})(u_i - u_{i+1}) \dots (u_i - u_N)} \quad (\text{A.21})$$

Por otro lado, sabiendo que los u_i son los ceros del polinomio $P_N^{(\alpha,\beta)}(x)$, éste se puede expresar como:

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(x) = (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n) \quad (\text{A.22})$$

Si se le aplica la derivada se obtienen N sumandos de grado $(N - 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_N^{(\alpha,\beta)}(x) &= [(x - u_2)(x - u_3) \dots (x - u_n)] + [(x - u_1)(x - u_3) \dots (x - u_n)] + \dots \\ &\dots + [(x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_{N-1})] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Si se particulariza la derivada en $x = u_i$, los N sumandos son 0 salvo el término i -ésimo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_N^{(\alpha, \beta)}(u_i) &= [0+0+\dots+[(u_i-u_1)(u_i-u_2)\dots(u_i-u_{i-1})(u_i-u_{i+1})\dots(u_i-u_N)]+\dots+0] = \\ &= (u_i - u_1)(u_i - u_2)\dots(u_i - u_{i-1})(u_i - u_{i+1})\dots(u_i - u_N) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En definitiva, los coeficientes a_i quedan como:

$$a_i = \frac{P(u_i)}{P_N^{(\alpha, \beta)}(u_i)} \quad (\text{A.25})$$

Bibliografía

1. Erdelyi, A., 1953, *Higher transcendental functions, Volumen II*, Krieger publishing company, Malabar, Florida.
2. Coquillat, F., 1989, *Integración de funciones racionales*, Madrid Tebar Flores.

Apéndice B

Obtención del núcleo para un problema simétrico

Se estudia como aplicar simetría al núcleo de una ecuación integral singular. La integral de la ecuación de equilibrio tiene la siguiente forma general:

$$\int_{-1}^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta \quad (\text{B.1})$$

Esta integral se puede descomponer en dos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta &= \int_{-1}^0 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta = \\ &= - \int_0^{-1} f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Se puede aplicar a la primera integral el cambio de variable $\eta = -\zeta$:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 f(-\eta)K(x, -\eta)(-d\eta) + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta &= \\ = \int_0^1 f(-\eta)K(x, -\eta)d\eta + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La función de distribución es antisimétrica, es decir, $f(-\zeta) = -f(\zeta)$. Si se aplica en la primera integral:

$$\int_0^1 -f(\eta)K(x, -\eta)d\eta + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta \quad (\text{B.4})$$

Si se vuelve a utilizar ζ como variable de integración en la primera integral:

$$\int_0^1 -f(\zeta)K(x, -\zeta)d\zeta + \int_0^1 f(\zeta)K(x, \zeta)d\zeta = \int_0^1 f(\zeta)[-K(x, -\zeta) + K(x, \zeta)] d\zeta \quad (\text{B.5})$$

Por tanto, para aplicar simetría a un problema y pasar del intervalo $[-1, 1]$ a $[0, 1]$ hay que modificar el núcleo de la siguiente manera:

$$K_s(x, \zeta) = [K(x, \zeta) - K(x, -\zeta)] \quad (\text{B.6})$$

Apéndice C

Medio semi-infinito sometido a carga biaxial: obtención de las tensiones en la barrera

En la Figura C.1 se muestra esquemáticamente el problema y las variables implicadas. Se trata de un medio semi-infinito sometido a carga biaxial y se desea obtener para una dirección definida con el ángulo θ la función de distribución de dislocaciones en la grieta y la barrera y el valor de las tensiones σ_3 y τ_3 que mantienen el equilibrio.

C.1. Tensiones debidas a la carga externa

Las tensiones debidas a la carga externa sobre las dislocaciones ubicadas en la línea de grieta según los ejes locales (x,y) son las siguientes:

$$\sigma_y(x) = \sigma_x^\infty \sin^2 \theta + \sigma_y^\infty \cos^2 \theta \quad (\text{C.1})$$

$$\tau(x) = -\sigma_x^\infty \sin \theta \cos \theta + \sigma_y^\infty \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.2})$$

C.2. Tensiones debidas a las dislocaciones

Las tensiones en un punto de coordenadas en ejes globales (X, Y) debidas a la presencia de una dislocación con vector (b_X, b_Y) ubicada en la posición $(\zeta_K, 0)$ son las siguientes:

$$\bar{\sigma}_X = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_X K_{x(xx)} + b_Y K_{y(xx)}] \quad (\text{C.3})$$

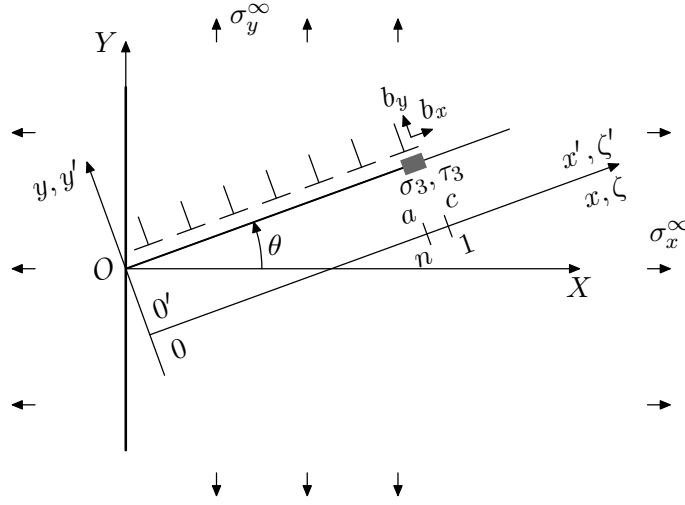


Figura C.1: Placa semi-infinita sometida a carga biaxial.

$$\bar{\sigma}_Y = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_X K_{x(yy)} + b_Y K_{y(yy)}] \quad (C.4)$$

$$\bar{\tau}_{XY} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [b_X K_{x(xy)} + b_Y K_{y(xy)}] \quad (C.5)$$

Los núcleos $K_{i(jk)}$ corresponden al problema de una dislocación de cuña en las cercanías de un medio semi-infinito y fueron obtenidos en el Capítulo 2. En el problema objeto de estudio las variables se particularizan de la siguiente manera:

$$\zeta_K = c \zeta \cos \theta \quad (C.6)$$

$$x_K = c x \cos \theta \quad (C.7)$$

$$y_K = c (x - \zeta) \sin \theta \quad (C.8)$$

Pero los vectores de Burgers no están en la línea de grieta y las tensiones tampoco. Es necesario girar estos vectores para aplicar equilibrio:

$$\begin{pmatrix} b_X \\ b_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_X \sin^2(\theta) + \bar{\sigma}_Y \cos^2(\theta) - \bar{\tau}_{XY} \sin(2\theta) \quad (C.10)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\bar{\sigma}_X \sin \theta \cos \theta + \bar{\sigma}_Y \sin \theta \cos \theta + \bar{\tau}_{XY} \cos(2\theta) \quad (C.11)$$

Desarrollando y sacando factor común b_x, b_y queda:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_y(x) = & \frac{2\mu b_x}{\pi(\kappa+1)} \left[\text{sen}^2(\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(xx)} + \text{sen}(\theta)K_{y(xx)} \right] + \right. \\
& + \cos^2(\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(yy)} + \text{sen}(\theta)K_{y(yy)} \right] - \\
& \left. - \text{sen}(2\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(xy)} + \text{sen}(\theta)K_{y(xy)} \right] \right] + \\
& + \frac{2\mu b_y}{\pi(\kappa+1)} \left[\text{sen}^2(\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(xx)} + \cos(\theta)K_{y(xx)} \right] + \right. \\
& + \cos^2(\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(yy)} + \cos(\theta)K_{y(yy)} \right] - \\
& \left. - \text{sen}(2\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(xy)} + \cos(\theta)K_{y(xy)} \right] \right] \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}(x) = & \frac{2\mu b_x}{\pi(\kappa+1)} \left[-\text{sen}(\theta) \cos(\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(xx)} + \text{sen}(\theta)K_{y(xx)} \right] + \right. \\
& + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(yy)} + \text{sen}(\theta)K_{y(yy)} \right] + \\
& \left. + \cos(2\theta) \left[\cos(\theta)K_{x(xy)} + \text{sen}(\theta)K_{y(xy)} \right] \right] + \\
& + \frac{2\mu b_y}{\pi(\kappa+1)} \left[-\text{sen}(\theta) \cos(\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(xx)} + \cos(\theta)K_{y(xx)} \right] + \right. \\
& + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(yy)} + \cos(\theta)K_{y(yy)} \right] + \\
& \left. + \cos(2\theta) \left[-\text{sen}(\theta)K_{x(xy)} + \cos(\theta)K_{y(xy)} \right] \right] \quad (\text{C.13})
\end{aligned}$$

Expresado de forma más compacta queda:

$$\bar{\sigma}_y(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x M + b_y N] \quad (\text{C.14})$$

$$\bar{\tau}(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x S + b_y T] \quad (\text{C.15})$$

C.3. Ecuaciones de equilibrio

Para obtener las ecuaciones integrales de equilibrio, se procede como en ocasiones anteriores. Se integra para todo el dominio normalizado $\zeta \in (0, 1)$. El dominio se divide en dos intervalos, la grieta $[0, n]$ y la barrera $[n, 1]$, de modo que las variables se desdoblan en dos. Las matrices M , N , S y T se desdoblan en 4, correspondientes a dos variables y dos intervalos. El vector de Burgers pasa a ser la función de distribución $f(\zeta)$. Las ecuaciones de equilibrio de una dislocación en x sometida a tensión externa y a la influencia del resto de las dislocaciones son las siguientes:

Equilibrio en dirección y :

$$x \in [0, n] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\sigma_y(x_1) - \sigma_1]}{c} = \frac{1}{\pi} \int_0^n [f_1^x(\zeta_1)M_{11}(x_1, \zeta_1) + f_1^y(\zeta_1)N_{11}(x_1, \zeta_1)] d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_n^1 [f_3^x(\zeta_3)M_{13}(x_1, \zeta_3) + f_3^y(\zeta_3)N_{13}(x_1, \zeta_3)] d\zeta_3$$

$$x \in [n, 1] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\sigma_y(x_3) - \sigma_3]}{c} = \frac{1}{\pi} \int_0^n [f_1^x(\zeta_1)M_{31}(x_3, \zeta_1) + f_1^y(\zeta_1)N_{31}(x_3, \zeta_1)] d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_n^1 [f_3^x(\zeta_3)M_{33}(x_3, \zeta_3) + f_3^y(\zeta_3)N_{33}(x_3, \zeta_3)] d\zeta_3$$

Equilibrio en dirección x :

$$x \in [0, n] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\tau(x_1) - \tau_1]}{c} = \frac{1}{\pi} \int_0^n [f_1^x(\zeta_1)S_{11}(x_1, \zeta_1) + f_1^y(\zeta_1)T_{11}(x_1, \zeta_1)] d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_n^1 [f_3^x(\zeta_3)S_{13}(x_1, \zeta_3) + f_3^y(\zeta_3)T_{13}(x_1, \zeta_3)] d\zeta_3$$

$$x \in [n, 1] : -\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\tau(x_3) - \tau_3]}{c} = \frac{1}{\pi} \int_0^n [f_1^x(\zeta_1)S_{31}(x_3, \zeta_1) + f_1^y(\zeta_1)T_{31}(x_3, \zeta_1)] d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_n^1 [f_3^x(\zeta_3)S_{33}(x_3, \zeta_3) + f_3^y(\zeta_3)T_{33}(x_3, \zeta_3)] d\zeta_3$$

C.4. Sistema de ecuaciones final

Transformando los dos intervalos de integración $[0, n]$, $[n, 1]$ en intervalos $[-1, 1]$ y aplicando las ecuaciones de *Erdogan et al.* que transforman las integrales singulares del segundo miembro en un sumatorio de términos, queda el sistema final de ecuaciones. Considerando que las tensiones de fricción en la grieta σ_1, τ_1 son nulas y añadiendo las ecuaciones de unión de intervalos, que en este caso son dos, una en la dirección x y otra en la dirección y , se tendrá finalmente un sistema de $4N + 2$ ecuaciones y $4N + 2$ incógnitas, que son: $\phi_1^x(u_{1i}), \phi_1^y(u_{1i}), \phi_3^x(u_{3i}), \phi_3^y(u_{3i}), \sigma_3$ y τ_3 . Este sistema permite por tanto obtener los valores de las tensiones σ_3 y τ_3 en la barrera. Con esos valores para los diversos ángulos θ se pueden obtener las constantes del criterio biaxial $m_{\sigma_1}^* \tau_c$ y $m_{\tau_1}^* \tau_c$. El sistema es el siguiente:

Ecuaciones correspondientes a la dirección y :

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} \frac{[\sigma(v_{1k})]}{c} = \sum_{i=1}^N \frac{2(1 + u_{1i})}{2N + 1} \frac{n}{2} [M_{11}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^x(u_{1i}) + N_{11}(v_{1k}, u_{1i})\phi_1^y(u_{1i})] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{1-n}{2} [M_{13}(v_{1k}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + N_{13}(v_{1k}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] \\
& k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{[\sigma(v_{3k}) - \sigma_3]}{c} &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{n}{2} [M_{31}(v_{3k}, u_{1i}) \phi_1^x(u_{1i}) + N_{31}(v_{3k}, u_{1i}) \phi_1^y(u_{1i})] + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{1-n}{2} [M_{33}(v_{3k}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + N_{33}(v_{3k}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] \\
& k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Ecuaciones correspondientes a la dirección x :

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{[\tau(v_{1k})]}{c} &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{n}{2} [S_{11}(v_{1k}, u_{1i}) \phi_1^x(u_{1i}) + T_{11}(v_{1k}, u_{1i}) \phi_1^y(u_{1i})] + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{1-n}{2} [S_{13}(v_{1k}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + T_{13}(v_{1k}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] \\
& k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{[\tau(v_{3k}) - \tau_3]}{c} &= \sum_{i=1}^N \frac{2(1+u_{1i})}{2N+1} \frac{n}{2} [S_{31}(v_{3k}, u_{1i}) \phi_1^x(u_{1i}) + T_{31}(v_{3k}, u_{1i}) \phi_1^y(u_{1i})] + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{2(1-u_{3i})}{2N+1} \frac{1-n}{2} [S_{33}(v_{3k}, u_{3i}) \phi_3^x(u_{3i}) + T_{33}(v_{3k}, u_{3i}) \phi_3^y(u_{3i})] \\
& k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Ecuaciones de unión:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1^x(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_3^x(u_{3(N+1-i)}) \right) \tag{C.20}$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_1^y(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2i-1}{2N+1} N\pi \right]}{\tan \left[\frac{2i-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right]} \phi_3^y(u_{3(N+1-i)}) \right) \tag{C.21}$$

Variables:

$$\begin{aligned}
u_{1i} &= \cos \left(\pi \frac{2i-1}{2N+1} \right) & u_{3i} &= \cos \left(\pi \frac{2i}{2N+1} \right) \\
v_{1k} &= \cos \left(\pi \frac{2k}{2N+1} \right) & v_{3k} &= \cos \left(\pi \frac{2k-1}{2N+1} \right)
\end{aligned} \tag{C.22}$$