ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

# LOS CUADRANTES SOLARES EN LA ARQUITECTURA:
# NUEVOS DISEÑOS

**TOMO I**

**TESIS DOCTORAL DE**

José Mª Raya Román, Arquitecto, Profesor Encargado de Curso de Geometría Descriptiva de la E.T.S.A. de Sevilla.

**Director:** Dr. D. Jaime López de Asiaín, Arquitecto, Catedrático de Composición Arquitectónica de la E.T.S.A. de Sevilla.

Sevilla, Noviembre de 1985.

## AGRADECIMIENTO

Deseo expresar aquí mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han colaborado en la elaboración de esta Tesis, y muy especialmente:

Al Dr. D. Jaime López de Asiaín, Catedrático de Composición Arquitectónica, excelente amigo y director de esta Tesis, que sin sus sugerencias y orientaciones no hubiese llegado a buen fin.

Al Dr. D. José Luis Comellas García de Lleras, Catedrático de Historia Moderna y Contemporánea, que me inició en los conocimientos de Astronomía.

A D. Alberto Orte, C. Almirante, y a D. Manuel Catalán, Capitán de Fragata, Directores del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando, y a D. Juan Comas, Teniente de Navío y Bibliotecario del mismo, que me proporcionaron la bibliografía básica para este trabajo.

Al Profesor Dr. D. Eduardo Ripoll Perello, Director del Museo Arqueológico Nacional, y a los Conservadores de la Sala de Roma de dicho Museo, Dr. D. Luis Caballero Zoreda y Dª Carmen Mañueco Santurce. Al Dr. D. Fernando Fernández Gómez, Director del Museo Arqueológico Provincial de Sevilla; al Conservador de dicho Museo, D. Diego Oliva Cala, y al Dr. D. José María Álvarez Martínez, Director del Museo Arqueológico Provincial de Mérida. Todos ellos me orientaron en la investigación arqueológica y me facilitaron el acceso a piezas tan valiosas como los relojes romanos de Belo y Mérida.

Al Dr. D. Emilio Díaz Martínez, estimable amigo y compañero, Profesor Adjunto de Geometría Descriptiva, que me inició en dichos conocimientos.

Al Dr. D. José María Gentil Baldrich, Catedrático de Geometría Descriptiva de la E.T.S.A. de Madrid, amigo y antiguo compañero de Seminario, por sus acertados consejos.

A mis compañeros de Seminario, Dª Mª Victoria Fernández-Palacios, D. José Antonio Ruiz Rosas y D. Jacinto Canivel, Profesores Encargados de Curso de la asignatura, que me ayudaron a soportar la pesada carga de la investigación.

A mi amigo D. Antonio de la Hoz Sandra, por la orientación y bibliografía facilitada.

A Rocío Alba, que me transcribió el trabajo, y a Mª del Mar García del Olmo, mi mujer, Profesora de Lengua y Literatura de Bachillerato, que me corrigió los originales.

Y en general a todas aquellas personas que de alguna forma me ayudaron, me alentaron o simplemente me escucharon.

Chronos mithriaque du *Mithréum* d'*Emerita*.
Mérida. Museo Arqueológico.

**PERFECCIÓN**

Queda curvo el firmamento,
Compacto azul, sobre el día.
Es el redondeamiento
Del esplendor: mediodía.
Todo es cúpula. Reposa,
Central sin querer, la rosa,
A un sol en cénit sujeta.

JORGE GUILLEN.

# CAPITULO I.- INTRODUCCION

El hombre, desde el comienzo de su existencia, ha experimentado la presencia del sol, intuyendo en su energía la fuente de vida (1).

Cuando los primitivos cazadores nómadas comienzan a transformarse en agricultores y surgen las primeras civilizaciones en las márgenes de los grandes ríos, descubren que los movimientos del sol son periódicos, y por lo tanto, no solamente éste es fuente de energía vital, sino que además con él se puede medir el ritmo de la vida. Se inventa el calendario solar y hacia el año 2.000 (a. de JC.) aparecen en Egipto los primeros relojes de sol que se conocen (2).

Quinientos años más tarde, los pobladores de Bretaña, Inglaterra y la costa W. de Escocia, se apercibieron de las trayectorias oblicuas del sol, e hicieron distintas clases de observaciones para establecer su almanaque, alineando grandes piedras para marcar entre otros elementos, los puntos del horizonte por donde tiene lugar el orto y el ocaso del sol en los solsticios, configurando de esta manera, verdaderos observatorios astronómicos (3).

Muy pronto, desde la época babilónica, los científicos intentaron la representación, sobre el plano, de la tierra y el universo, y poco a poco fueron apareciendo los distintos sistemas de representación de la esfera sobre el plano, proyecciones que sólo conservan algunas de las propiedades de la esfera, pero no todas.

El propio analema que describe Vitruvio (4) no es más que una proyección cilíndrica ortogonal de la esfera sobre el plano meridiano.

Aunque Tolomeo en el Plamisferio, establece los fundamentos teóricos del astrolabio, sin duda son los astrónomos islámicos del medioevo, los que perfeccionan este instrumento, y con él difunden las proyecciones estereográficas y ortográficas (5) de la esfera sobre el plano, legándonos abundantes obras en árabe y latín, lenguas científicas de la época.

El interés despertado entre los científicos por estos sistemas de proyección, se debe a su utilidad para determinar ciertos tipos de relaciones astronómicas sin necesidad de cálculo analítico.

Sin duda, el estudio del movimiento del sol y los planetas ha estado siempre ligado al desarrollo de la Geometría, y ambas ciencias han sido, a lo largo de la historia, una constante en la formación del arquitecto: "Debe pues, éste, estudiar Gramática; tener aptitudes para el Dibujo; conocer la Geometría; no estar ayuno de Óptica; ser instruído en Aritmética y versado en Historia; haber oído con aprovechamiento a los filósofos; tener conocimientos de Música; no ignorar la Medicina; unir los conocimientos de la jurisprudencia a los de la Astrología y movimiento de los astros" (6).

Con la publicación en Paris (1798) de la primera edición como texto de la obra de Gaspar Monge, Geometría Descriptiva, se sistematiza el estudio de las proyecciones cilíndrico ortogonales sobre dos planos perpendiculares -sistema Diédrico- y adquiere muy pronto gran difusión, de tal forma que el arquitecto actual generalmente proyecta y calcula en dicho sistema.

No cabe duda de que un estudio del sistema sol-tierra en el Sistema Diédrico, puede suponer una aportación importante a la Astronomía de Posición, pero sobre todo será un instrumento de gran utilidad al arquitecto,por ser éste el sistema en el que proyecta y calcula.

Cada vez tiene más importancia y demanda el estudio del aprovechamiento de la energía solar para obtener una mayor calidad de vida, luz y calor, temas que hoy aborda el enfoque bioclimático de la Arquitectura.

Es objeto de esta Tesis un estudio profundo de la representación del sistema sol-tierra en el Sistema Diédrico de Monge, para ofrecer al arquitecto unos métodos de cálculo gráfico astronómico que le faciliten la resolución de los problemas de Asoleo. La aplicación práctica del cálculo gráfico desarrollado, al diseño de instrumentos astronómicos, y un análisis de los cuadrantes solares planos, utilizando siempre el sistema de Monge, para posteriormente estudiar los relojes romanos de Mérida y Belo, como aplicación de dichos métodos gráficos a la investigación arqueológica, son también objeto de esta Tesis.

Por último, como corroboración de los métodos gráficos, se han elaborado unos programas de cálculo de ordenador, basados en fórmulas trigonométricas deducidas de las representaciones gráficas.

# DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La Tesis se ha dividido en seis partes, desarrolladas en los capítulos II al VII.

En la primera parte, Modelo planetario -capítulo II- se define un sistema sol-tierra geocéntrico que cumplirá con las leyes de Kepler con lo que las posiciones que se obtengan, a partir de dicho sistema, del sol en su órbita aparente, se corresponderán con las posiciones reales del mismo.

Igualmente, en esta primera parte, se definen los sistemas de referencia -coordenadas horizontales y ecuatoriales- que se emplearán a lo largo de todo el estudio.

En la segunda parte, Cálculo gráfico astronómico, -capítulo

III-, se desarrolla un método de cálculo gráfico basado en la representación diédrica del sistema sol-tierra definido. El primer objetivo del cálculo gráfico es la determinación de la posición del sol en su órbita aparente, anomalía verdadera, para luego, a partir de este dato y del ángulo formado por el plano ecuatorial y la eclíptica, poder determinar con exactitud la declinación solar en cada momento.

Este es uno de los logros de la investigación realizada, ya que a partir de una fecha y del ángulo de 23° 27', se deduce gráficamente la declinación media del sol para dicho día. Con este cálculo se consigue que los datos de partida, para cualquier problema de asoleo, sean: el día, la hora y la situación (latitud del lugar).

A continuación, conociendo la hora en tiempo verdadero local, hora que marcan los cuadrantes solares, se determina el ángulo horario del sol, con lo cual quedan fijadas las coordenadas ecuatoriales del sol, declinación y ángulo horario, en un instante dado.

Seguidamente, basándonos en que los sistemas de referencia definidos tienen en común un eje -línea este-oeste-, mediante un giro de la esfera celeste alrededor del eje común de ambos sistemas de referencia, de amplitud la latitud del lugar, se realiza un cambio de coordenadas, pudiendo conocer la altura y el azimut del sol con respecto al horizonte del observador -coordenadas horizontales- a partir de las coordenadas ecuatoriales.

A partir de estas coordenadas, altura y azimut, es fácil determinar las proyecciones del rayo de sol sobre el diedro de trabajo o por el contrario, realizar el problema inverso: conocidas las proyecciones del rayo de sol sobre el diedro de trabajo, hallar el día y la hora en que ocurrirá dicho fenómeno.

Por último, como intersección de la trayectoria solar del movimiento diurno con cualquier otro círculo celeste, resolvemos los problemas de paso, pudiendo calcular, entre otras, las horas de orto y ocaso -paso del sol por el círculo de horizonte-; altura de culminación -paso del sol por el meridiano del lugar-; tiempo de insolación de un paramento vertical -paso del sol por el vertical del muro-, etc.

En resumen, en este capítulo se desarrolla un método de cálculo gráfico que resuelve el clásico triángulo esférico de posición de un astro -astro, polo, zenit- a partir de dos datos conocidos.

La tercera parte de la investigación, Cálculo mecánico de coordenadas: Computadores analógicos, -Capítulo IV- es en cierto modo una continuación del capítulo anterior.

En este capítulo se hace una transposición, del plano al espacio, del cálculo gráfico estudiado en el capítulo III, a través de instrumentos astronómicos esféricos existentes y de otros, diseño original del autor, que funcionan a modo de computadores analógicos para el cálculo astronómico de posición.

La cuarta parte, el cuadrante solar plano -Capítulo V-, consta de dos apartados; el primero es un análisis en profundidad de la geometría del cuadrante solar plano, llegando a partir del estudio gráfico a las mismas conclusiones que otros autores -como J.A. Daucobo Durante y A. Elipe Sanchez - llegan a partir de un estudio analítico de la ecuación general de las cónicas (7).

En el segundo apartado de la cuarta parte, se hace un estudio de la representación y trazado de los cuadrantes solares planos como intersección del cono de revolución de vértice el extremo del gnomon y directriz la trayectoria diurna del sol, con el plano del cuadrante

-sistema diédrico-; y como la homología existente entre las secciones del cono de los rayos solares definido, producidas por el plano del cuadrante y el de la trayectoria solar diurna -geometría proyectiva-.

La quinta parte, Relojes esféricos -Capítulo VI- es una aplicación de los conocimientos de Geometría Descriptiva a la investigación arqueológica a través del estudio de los relojes esféricos romanos de Mérida y Belo.

En ambos estudios se sigue una misma metodología, consistente en la trasposición de las líneas de las esferas de los relojes a la esfera celeste para el análisis de las mismas. También en ambos casos se ratifican las hipótesis mantenidas mediante un estudio fotográfico de las esferas en el que se hace coincidir el foco de la cámara fotográfica con el centro de proyección de las esferas.

Por último, la sexta parte, Programas de cálculo -Capítulo VII- recoge una serie de programas de cálculo de ordenador, basados en los trazados realizados en los capítulos de cálculo gráfico.

Estos programas tienen, entre otras, la finalidad de poder comprobar con ellos la exactitud de los cálculos gráficos realizados.

De todos los programas de cálculo, el más interesante para la resolución de problemas de asoleo, es el que se expone en último lugar -"CH"-, el cual utiliza como subrutinas a los programas expuestos anteriormente y que con la entrada del día, la hora y la latitud del lugar, calcula la dirección y longitud de la sombra arrojada por una línea vertical sobre el plano del horizonte.

**NOTAS AL CAPITULO I**

1.- En muchas ocasiones se le rinde culto al sol elevándolo a divinidad y atribuyéndole una categoría suprema (Helios griego, Sol inuictus latino, Samas babilónico, Itzamna maya). En otras ocasiones es el mediador entre la divinidad suprema y los hombres (Samas de Babilonia, Mitra en Irán, Inti-Sol de los incas). A veces se le atribuye una función más secundaria, ojo del dios supremo (ojo de Horus en Egipto, Sûrya es el ojo de Varuna en la India, en Persia es el ojo de Ahura Mazda, también entre los samoyedos y los pigmeos samang es considerado como el ojo diurno del dios supremo).

2.- Reloj solar egipcio en forma de T, que determina la hora en función de la longitud de la sombra. Museo de Berlín,19743.

3.- Cromlechsde Stonehenge (Salisbury, Condado de Willtshire, Inglaterra) y de Carnac (Bretaña, Francia).

4.- M.L. Vitruvio (9,VII).

5.- En la madre de la lámina universal, Biblioteca de la Universidad Complutense (Madrid), fol. 84 vº, en la cara de la azafea. Biblioteca de la Universidad Complutense, Madrid, fol. 112 vº y en la cara de la Azafea de Azarquiel, propiedad de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, entre otras, aparecen ya las proyecciones estereográficas que Ruiz Aizpiri explica y utiliza para el cálculo de coordenadas solares en su obra Geometría Descriptiva, publicada en Madrid (1973).

6.- M.L. Vitruvio (1,I).

7.- J.A. Docobo Durantez y A. Elipe Sanchez, Astronomía, 280 problemas resueltos. Santiago, 1983. 1ª edición.

# CAPITULO II.- MODELO PLANETARIO

Para el estudio geométrico del sistema sol-tierra, definiremos un modelo que se acerque a la realidad tanto como sea posible y nos permita por su simplicidad su representación gráfica (1).

Este modelo, por ser el sistema sol-tierra un sistema dinámico, ha de tener una representación espacio-temporal, así pues tendremos que definir tanto sus coordenadas espaciales como las leyes de sus movimientos. En definitiva, lo que se hará para definir dicho sistema será eliminar, de los movimientos de la tierra, todo aquél que no sea periódico, como las perturbaciones debidas a la repartición de la masa líquida y de las presiones en la superficie terrestre, etc, por ser de escasa amplitud -máximo anual de 0", 5-, y los movimientos periódicos tales como la precesión ó nutación por ser o muy lentos o de pequeña amplitud, respectivamente (2).

El modelo se limitará a un sistema binario puro sol-tierra prescindiendo de la influencia que puedan ejercer en sus movimientos el resto de los astros del sistema solar, con las siguientes consideraciones:

- La tierra es una esfera perfecta de radio $R = 6,371 \times 10^6$ m. (3), con el c.d.g. en su centro geométrico y en relación al sol se considerará como una masa puntual coincidente con el c.d.g. definido.
- El sol se considera siempre como una masa puntual coincidente con el centro geométrico del astro.
- El centro de gravedad del sistema sol-tierra se considera coincidente con el centro de gravedad del sol, ya que la relación masa del sol a masa de la tierra es de 332.946,0 y la distancia media sol-tierra de 149.597.870 Km (4), por lo que realmente el centro de gravedad del sistema queda a una distancia del centro de gravedad del sol de:

$$d = \frac{1,4960 \times 10^{11}}{332.946 + 1} = 4,5 \times 10^5 \text{ m.}$$

  distancia despreciable frente a los $1,4960 \times 10^{11}$ m. que separan a ambos astros.
- La tierra gira con velocidad constante alrededor de su eje en el sentido de poniente a levante y dicho eje coincide exactamente con el eje del mundo, eje de rotación de la esfera celeste (5).
- La tierra gira alrededor del sol con un movimiento que cumple en cada momento las leyes de Kepler:

1. La órbita de la tierra es una elipse y el sol ocupa uno de sus focos.

   El semieje mayor de la elipse es de: 1,495 x $10^{11}$m. y su excentricidad: 0,016751 ≃ 1/60 (6).

2. Las áreas barridas por el radio vector sol-tierra por unidad de tiempo son constantes.

3. Los cuadrados de los tiempos que tardan en completar su órbita los planetas, son proporcionales a los cubos de los semidiámetros mayores de las órbitas. Para la tierra este tiempo, tomando como unidad una vuelta completa alrededor de su eje, día sidereo, es de 366,2564 días, año sidereo.

- El eje de rotación de la tierra permanece con una inclinación constante con el plano de la órbita, eclíptica, igual a 23° 27' (7) y situado en un plano perpendicular a la eclíptica que forma un ángulo constante con el eje mayor de la órbita, eje de los ápsides de unos 11° (8).

- Si consideramos la órbita de la tierra (figura 1) y en cierto instante trazamos los radios vectores S-T y sus opuestos T-S, se obtiene una nueva elipse, generada en el mismo sentido que la primera y simétrica de aquella respecto al punto O. Dicha elipse es la órbita aparente que describe el sol alrededor de la tierra y está en el mismo plano de la eclíptica. El movimiento aparente del sol es en el mismo sentido que el movimiento real de la tierra, sentido directo (contrario al movimiento de las agujas del reloj, sentido retrógrado), de tal forma que cuando la tierra se encuentra en su perihelio o en su afelio, el sol se encuentra en su perigeo o en su apogeo respectivamente.

Como consecuencia de lo expuesto, consideraremos a la tierra en el centro del sistema y el sol es el que gira en su órbita aparente alrededor de la tierra.

Consideremos que la tierra deje de girar alrededor de su eje. En este supuesto, el movimiento aparente del sol sería el de un giro completo alrededor de la tierra, con una duración de un año. En su movimiento, el sol recorrería la eclíptica en el sentido directo con una velocidad no constante porque cumplirá con la 2ª ley de Kepler.

La altura del sol con respecto al plano ecuatorial, declinación, debido al ángulo que forman ambos planos, 23°27' no será constante, variando entre los valores máximos de 23°27' a -23°27'. Al ser la rotación de la tierra un giro mucho más rápido que el de traslación, el efecto del movimiento del sol es el de un giro completo alrededor de la tierra en un solo día, en sentido retrogrado, de levante a poniente.

La variación de la declinación solar es muy lenta y lo hace según una ley sinusoidal (figura 2), por lo que la variación diaria es mayor cuando la declinación se anula, equinocios, siendo prácticamente nula en los solsticios (sol fijo), cuando la declinación es máxima. Esta variación diaria en valor absoluto no llega nunca a sobrepasar el valor de 25', por lo tanto consideraremos que el sol mantiene constante durante el día su declinación y en su paso por el antimeridiano cambia instantáneamente el valor de ésta.

Hecha esta consideración, el sol recorrerá en su movimiento aparente diurno, un paralelo cada día de altura la declinación media del día.

El sol que se ha definido en el modelo, se corresponde con el sol verdadero y los tiempos referidos a él serán los tiempos verdaderos.

Para comparar los tiempos verdaderos a los medios que son los que miden nuestros relojes, definiremos un sol medio que gire en el plano del ecuador con velocidad uniforme, coincidiendo en el punto vernal ♈ , con un sol ficticio que recorre la eclíptica también con movimiento uniforme en el espacio de un año coincidiendo con el sol real en el perigeo. Admitiremos que la diferencia de horarios del sol verdadero de nuestro modelo y del sol medio, es la que existe entre el sol real y el medio, por tanto entre ambos horarios es válida la ecuación del tiempo (figura 3).

Para evitar interpolaciones, como la variación de la ecuación del tiempo es pequeña en un día, ésta la consideraremos constante a lo largo del día, al igual que se hizo con las declinaciones. Los valores numéricos de la ecuación del tiempo están reflejados en la tabla de la figura 4 (9).

Definido el sistema sol-tierra, nos encontramos en un universo geocéntrico en el que el observador es el centro de la esfera celeste.

<u>La esfera celeste</u> gira con un movimiento de levante a poniente, movimiento diurno, debido al movimiento de rotación de la tierra de poniente a levante. La esfera celeste en su movimiento de rotación arrastra con ella todos los astros fijos.

* El eje del mundo (figura 5) es el eje de rotación de la esfera celeste, que en nuestro modelo coincide con el eje de la tierra por considerar en ésta sólo los movimientos de rotación y traslación. Dicho eje corta a la esfera celeste en dos puntos, polos celestes. El más próximo a la estrella polar se denomina polo norte y el opuesto polo sur.

* La vertical (figura 5) de un lugar queda definida como la dirección del radio terrestre que pasa por el observador. Dicha dirección corta a la esfera celeste en dos puntos: Zenit, por encima del observador y Nadir el diametralmente opuesto.

* Horizonte (figura 5) es el plano que trazado por el observador es perpendicular a la vertical. Dicho plano corta a la esfera celeste según un círculo máximo llamado también horizonte.

* Meridiana (figura 5) es la recta intersección del plano meridiano del lugar con el plano del horizonte. La intersección de la meridiana con la esfera celeste son los puntos cardinales norte y sur.

* Perpendicular (figura 5) es la recta intersección del horizonte con

el ecuador, es perpendicular a la meridiana y corta a la esfera celeste en los puntos cardinales este y oeste.

* Verticales (figura 5) son los círculos máximos que pasan por los extremos de la vertical. El meridiano del lugar es un vertical que pasa por los cardinales N.S. El vertical que pasa por los cardinales E.W. se denomina primer vertical y es perpendicular al meridiano del lugar.

* Almucantarates (figura 5) son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al horizonte.

* Ecuador celeste (figuras 5 y 6) es el plano que pasa por el observador y es perpendicular al eje del mundo. La intersección con la esfera celeste es un círculo máximo que se le llama también ecuador.

* Plano meridiano de un lugar (figura 5 y 6) es el plano determinado por la vertical y el eje del mundo. Su intersección con la esfera celeste también se le llama meridiano del lugar.

* Círculos horarios (figura 6) son las circunferencias celestes determinadas por los planos que pasan por el eje del mundo. El meridiano del lugar es un círculo horario.

* Paralelos celestes (figura 6) son círculos menores de la esfera celeste paralelos al ecuador.

* Eclíptica (figuras 6 y 7) es el círculo máximo que determina sobre la esfera celeste el plano que contiene la órbita aparente del sol. El plano de la eclíptica forma en el ecuador un ángulo de 23°27' llamado oblicuidad de la eclíptica.

* Línea de equinocios (figura 7) es la intersección del plano de la eclíptica con el plano del ecuador. Corta a la esfera celeste en dos puntos llamados de equinocios; equinocio de primavera, punto vernal o 1er.p.de aries y equinocio de otoño o punto autumnal.

* Línea de solsticios (figura 7) es el diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de equinocios. Corta a la esfera celeste en los puntos de solsticio de verano o de cáncer y solsticio de invierno o de capricornio.

* Eje de los ápsides (figura 7) es el diámetro mayor de la órbita aparente del sol, forma con la línea de solsticio un ángulo de 11°.

Todo el cálculo que se realizará en esta tesis está dirigido a la determinación de la posición del sol sobre la esfera celeste en un instante dado. Una vez conocida dicha posición se podrá obtener con facilidad la proyección del astro sobre los planos de trabajo.

La posición del sol es necesario conocerla con respecto el horizonte del observador. Esta referencia es la que más interesa al arquitecto, ya que por lo general utiliza como plano de proyección horizontal, el plano del horizonte del lugar. El sistema de referencia apropiado es el de coordenadas horizontales, el cual queda definido por los siguientes elementos:

* Coordenadas esféricas horizontales (figura 8). Los planos de referencia son: el plano del horizonte y el meridiano del lugar.
  - Coordenadas:
    . Azimut (a): ángulo que forma el vertical del astro con el plano

meridiano medido en sentido retrógrado desde el sur. Su valor está comprendido:

$$0° < a < 360°$$

. Altura (h): ángulo que forma la visual del astro con el plano del horizonte medido a partir de éste. El valor de h está comprendido de 0° a 90° en el hemisferio N. y de 0° a -90° en el hemisferio sur.

A veces se sustituye la altura por la distancia zenital (7), ángulo complementario de la altura $z = 90° - h$.

Si elegimos como ejes cartesianos la vertical, la meridiana y la perpendicular de un lugar, eje z, x e y, respectivamente, puede sustituirse este sistema esférico por otro cartesiano:

Coordenadas rectilíneas horizontales (figura 8), son las componentes del vector de posición r.

$$x = r \cdot \cos h \cdot \cos a$$

$$y = r \cdot \cos h \cdot \operatorname{sen} a$$

$$z = r \operatorname{sen} h$$

Estas coordenadas tienen el inconveniente de que cambian con el observador y varían constantemente con el movimiento de rotación de la tierra. Pero el principal inconveniente es que es complicada su determinación directa, por lo general hay que deducirlas de las coordenadas horarias.

* Coordenadas esféricas ecuatoriales. Tienen como planos de referencia el plano del ecuador y el plano meridiano del lugar (figura 9).
  - Coordenadas:
    . Ángulo horario (H): es el arco de ecuador contado desde su intersección al horario del astro, en sentido retrógrado de 0° a 360°.
    . Declinación ($\delta$): es el arco de círculo horario comprendido entre el ecuador y el astro. La declinación es positiva si el astro está en el hemisferio norte y negativa si se sitúa en el hemisferio sur.

La declinación se puede sustituir por la distancia polar (P) que es el complementario de la declinación.

$$P = 90° - \delta$$

Eligiendo como ejes cartesianos el triedro formado por el eje del mundo, la intersección del plano meridiano con el plano del ecuador y la perpendicular como ejes $z_1$, $x_1$ e $y_1$ respectivamente, pueden sustituirse las coordenadas esféricas por otras rectilíneas:

Coordenadas horarias rectilíneas (figura 9) que son las componentes del vector de posición $r_1$.

$$x_1 = r_1 \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$
$$y_1 = r_1 \cdot \cos \delta \cdot \operatorname{sen} H$$
$$z_1 = r_1 \cdot \operatorname{sen} \delta$$

La declinación es independiente del lugar de observación y varía con el tiempo, correspondiendo un valor para cada día del año.

El ángulo horario de un astro es distinto para cada punto de la tierra con distinta longitud, pero conociéndolo con respecto a un punto se puede deducir fácilmente para cualquier otro, con sólo sumarle o restarle las diferencias de longitudes.

En el caso del sol, el ángulo horario local es la hora en tiempo verdadero expresada en grados (10).

## NOTAS AL CAPÍTULO II

1.- Las diferencias del modelo que proponemos con la realidad es siempre menor que la apreciación que se puede hacer en el dibujo a escala sobre formatos A-3 ó A-4, que son sobre los que se han realizado todos los cálculos gráficos de esta tesis, con una aproximación en arcos de 1/3 de grado y en longitudes de 1/3 de m.m.

2.- El movimiento de precesión se verifica en sentido retrógrado y se completa una vuelta en 26.000 años aproximadamente. Este movimiento influye principalmente en el ángulo formado entre los planos del ecuador y la eclíptica.
El movimiento de nutación tiene una amplitud máxima de 18,4". Datos tomados de M. Langreo, Astronomía esférica. pp. 82, 83. Madrid, 1983. 2ª ediciión.

3.- El elipsoide de revolución adoptado como "elipsoide internacional" por la Asamblea de la U.G.G.I. celebrada en Madrid en 1924, tiene como radio ecuatorial a = 6.378,388 km. y achatamiento f = (a-c)/ /a = 1/297, siendo en consecuencia el radio polar c = 6.356,912 km.

La Asamblea de la U.A.I. celebrada en Hamburgo en 1964, recomienda trabajar con los siguientes elementos:

a = 6.378,140 km.

f = 1/298,257.

4.- Datos tomados del Almanaque Naútico del Instituto y Observatorio de la Marina de San Fernando (U.A.I. 1976) para 1985, p.6, y 1984, p.6, respectivamente.

5.- La coincidencia de ambos ejes se debe a la consideración solamente de los movimientos de traslación y rotación de la tierra.

6.- Valor de la excentricidad en el año 1900.

7.- Para 1985, el valor exacto es de 23° 26,5'. La variación de este ángulo debida al movimiento de precesión, es periódica. En la actualidad, disminuye unos 48" por siglo y el valor medio para cualquier año viene dado, según Newcomb por la expresión 23° 27' 8,26" - 0,46845" (t-1900), siendo t el número de años transcurridos desde 1900.

8.- La línea de los ápsides se desplaza lentamente en sentido directo unos 11,5" por año, lo que hace que el perigeo solar se adelante todos los años los mismos segundos. Datos tomados de M. Langreo, Astronomía esférica. p.80. Madrid, 1960. 2ª edición.

9.- Valores de la ecuación del tiempo tomados de J. Mur Soteras, Asoleo Geométrico (Tesis Doctoral). p.19. Barcelona, 1982.

10.- Se define como día solar verdadero al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del sol por el meridiano del lugar. Dividido este período de tiempo en 24h. se obtiene la hora solar verdadera. Una hora solar verdadera se corresponde con un arco de 15° del ángulo horario solar.

# CAPITULO III.- CALCULO GRAFICO ASTRONOMICO

El punto de partida para determinar la posición de un astro, en nuestro caso el sol, sobre el horizonte, es saber exactamente en qué lugar de su órbita aparente se encuentra en cada momento y que ángulo forman entre sí ambos planos, el de la órbita planetaria y nuestro horizonte.

En el presente capítulo desarrollamos un método gráfico para calcular la posición del sol sobre la bóveda celeste y así poder determinar la dirección en que nos llegan sus rayos, que es en esencia el problema que resuelven los distintos métodos de asoleo geométrico.

Las ventajas del método de cálculo que proponemos son las siguientes:

a.- Se usará exclusivamente como sistema de proyección el sistema diédrico de Monge, sistema perfectamente conocido por todos los arquitectos a los que principalmente van dirigidos estos trabajos.

b.- El punto de partida de cada problema es la situación, la hora y la fecha en la que se estudia el fenómeno, con lo cual eliminamos la utilización o construcción de gráficos previos y la interpolación en dichos gráficos.

c.- La posición del sol en su órbita, calculada por el método gráfico desarrollado en esta tesis, se corresponde con su anomalía verdadera evitando así el error que se comete en los métodos en los que se toma como posición del sol en su órbita la anomalía media N·(360/365), siendo N el número de días transcurridos desde el 1 de enero o el equinocio de primavera, según los casos.

d.- Los datos y resultados de los problemas resueltos por el método gráfico que se propone, se pueden relacionar mediante funciones de trigonometría plana de fácil programación en las calculadoras de "tipo científico" que con tanta difusión existen en el mercado. Con esta operación se consiguen soluciones numéricas a los problemas gráficos planteados que en muchos casos simplifican el proceso de cálculo obteniendo los resultados con mayor rapidez.

En el capítulo VII se han recogido las relaciones trigonométricas en los casos de más interés y se explican los programas realizados para la calculadora científica alfanumérica programable HP-41CV.

## CÁLCULO DE LA POSICIÓN DEL SOL EN SU ÓRBITA APARENTE

Desde muy antiguo se conocía que los movimientos del sol y de las estrellas errantes no eran uniformes.

Tolomeo en el Almagesto recoge las teorías de Hiparco de Nicea y propone un modelo planetario (1) para la explicación de dichos movimientos (figura 1).

El planeta P gira con movimiento uniforme sobre el epiciclo de centro O el cual a su vez se desplaza sobre el círculo mayor, deferente, de centro C.

El movimiento del punto O es uniforme en torno al punto E, centro del ecuante, situado a una distancia CE del centro igual a la distancia TC existente entre la tierra y dicho centro.

En la edad media, conforme se fueron ideando instrumentos de observación de mayor precisión, se idearon nuevos artificios para predecir con más exactitud la posición de los planetas. Uno de los más interesantes es el Lema de Naṣīr al-Dīn Ṭūsī (1201-1247) (figura 2).

Ambos modelos los recoge Copérnico en su De Revolutionibus (2).

Con las Tablas Alfonsíes se podía calcular la posición de los planetas en su órbita, pero un calculador necesitaba una media hora para el cómputo de una sola posición (3).

En el siglo XVII , pese a conocerse la II ley de Kepler, ley de las áreas, enunciada un siglo antes, por la facilidad y resultados obtenidos sobre los métodos numéricos, se seguían usando métodos gráficos para el cálculo de la posición de un planeta en su órbita (4).

El método gráfico que proponemos para el cálculo de la posición del sol en su órbita aparente, figura 3, consiste en un trazado similar al propuesto por Tolomeo. En él se ha eliminado el Epiciclo, puesto que sólo hay que componer un movimiento relativo, el de la tierra ya que el sol se considera fijo.

El sol pasa a ocupar sobre el deferente el lugar del centro del Epiciclo, y el deferente se sustituye por una elipse con la misma exentricidad que la órbita de la tierra. El eje mayor de la elipse representa al eje de los ápsides y sobre uno de sus focos se sitúa la tierra, foco T. El otro foco, punto E, es el centro del Ecuante.

Desde el centro del Ecuante se traza el radio vector $r_1$ que determina la posición del sol en el instante $t_1$, representado por el punto $S_1$. Al girar $r_1$ con velocidad uniforme sobre el Ecuante, determina las posiciones sucesivas del sol, $S_2$, $S_3$... sobre la elipse.

El ángulo que forma el radio vector $r_1$ con el eje de los ápsides, ángulo M, recibe el nombre de anomalía media y representa las posiciones que ocuparía un astro que se moviese con velocidad angular constante sobre una circunferencia de radio el Ecuante y que tardase en un giro completo lo mismo que el astro en estudio (5).

Si unimos las posiciones $S_1$, $S_2$, $S_3$..., determinadas por $r_1$ con el foco T, se obtiene un nuevo radio vector de posición $r_2$ cuyo giro alrededor de T no será uniforme, siendo más lento cuando el sol está cerca de su apogeo y más rápido cuando se halle cerca de su perigeo.

En consecuencia, el punto S se moverá sobre la elipse con velocidad no uniforme y ésta será semejante a la que describiese un astro que cumpliese con la II ley de Kepler.

El radio vector $r_2$ a tiempos iguales barrerá áreas aproximadamente iguales y el ángulo V que forma con el eje de los ápsides, representa la anomalía verdadera del astro, que es ángulo real de posición del astro con su órbita.

El método propuesto, es rigurosamente válido cuando la exentricidad de la órbita es 0, caso de un movimiento circular, en la que la velocidad real sería uniforme, y dicho método se separará más de la realidad cuanto mayor sea la exentricidad.

Para hallar las diferencias que puedan existir entre el método gráfico propuesto y las posiciones reales, procederemos de la siguiente forma:

sean,

$$r_1 = \frac{(a - ec)}{1 + e \cdot \cos M} \qquad y \qquad r_2 = \frac{(a - ec)}{1 - e \cdot \cos V}$$

las ecuaciones polares de la elipse con polos en los puntos E y T respectivamente (figura 3), en las que a es el semieje mayor, c la semidistancia focal y e la exentricidad.

Como la suma de los dos radios vectores es igual al eje mayor de la elipse, se puede escribir:

$$r_1 + r_2 = \frac{(a - ec)}{1 + e\cdot\cos M} + \frac{(a - ec)}{1 - e\cdot\cos V} = 2a$$

Dividiendo ambos miembros por (a - ec) y teniendo en cuenta que c = ea se obtiene la expresión:

$$\frac{1}{1 + e\cdot\cos M} + \frac{1}{1 - e\cdot\cos V} = \frac{2}{1 - e^2}$$

que nos liga los valores de las anomalías media y verdadera y de la - que se puede despejar cos V resultando que:

$$\cos V = \frac{(e^2 + 1)\cos M - 2e}{e^2 + 1 - 2e\cdot\cos M}$$

en donde V toma el valor:

$$V = \arccos \frac{(e^2 + 1)\cos M - 2e}{e^2 + 1 - 2e\cdot\cos M}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la ley de las áreas (6)

$$r^2 = \frac{dV}{dM} = n\, a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

y que la enomalía media es:

$$M = n\ (t - T), \qquad dM = n \cdot dt$$

Siendo T la época de paso por el apogeo y n el movimiento medio se obtiene:

$$dV = (a/r)^2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot dM \qquad \text{(II)}$$

De la ecuación de Kepler, $M = E - e \cdot \text{sen } E$, en la que E representa a la anomalía excéntrica (7) y e la expresión del radio vector $r = a\ (1 - e \cdot \cos E)$, (figura 4), se pueden obtener las igualdades:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cdot \cos E = r/a$$

de donde se deduce que:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r}$$

dE/dM se puede obtener desarrollando en serie la ecuación de Kepler y derivando,

$$\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r} = 1 + a \cdot \cos M + e^2 \cdot \cos 2M + \frac{e^3}{8}\ (9 \cdot \cos 3M + \cos M) + \ldots \qquad \text{(III)}$$

desarrollando en serie la expresión $\sqrt{1 - e^2}$

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - ½\ e^2 - 1/8\ e^4 + \ldots. \qquad \text{(IV)}$$

Multiplicando (III) y (IV) e integrando se obtiene el valor de V en función de M:

$$V = M + 2\,e\ \mathrm{sen}\ M + 5/4\ e^2\ \mathrm{sen}\ 2M + 1/12\ e^3\ (13\cdot \mathrm{sen}\ 3M - 3\ \mathrm{sen}\ M) + \ldots \qquad (V)$$

expresión en la que la constante de integración será nula, al anularse V cuando se anula M.

De la igualdad (V) se obtiene el valor real de la anomalía verdadera con la aproximación que se quiera.

Comparando los valores de V obtenidos de las expresiones (I) y (V) para un mismo valor de M, se puede calibrar el error cometido al emplear el método gráfico.

En la tabla I se han tabulado los valores de V obtenidos de ambas expresiones para valores de M tomados de 15 en 15 grados, tomando para la excentricidad un valor de $0.01672 \simeq 1/60$ (8).

En la primera columna se disponen los valores de la anomalía media; en la segunda los valores de la anomalía verdadera tomados de la expresión (I), método gráfico, en la tercera columna los valores de la anomalía verdadera real, tomados de la expresión (V) y calculada con los cuatro primeros términos de la serie y por último, en la columna cuarta se ha tabulado la diferencia de ambos valores.

**TABLA I**

| M | $V_g$ (gráfico) | | | $V_r$ (desa. en serie) | | | $V_g - V_r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0° | 0' | 0" | 0° | 0' | 0" | 0" |
| 15° | 15° | 30' | 18" | 15° | 30' | 25" | 7" |
| 30° | 30° | 58' | 26" | 30° | 58' | 39" | 13" |
| 45° | 46° | 22' | 24" | 46° | 22' | 39" | 15" |
| 60° | 61° | 40' | 34" | 61° | 40' | 47" | 13" |
| 75° | 76° | 51' | 43" | 76° | 51' | 50" | 7" |
| 90° | 91° | 55' | 09" | 91° | 55' | 09" | 0" |
| 105° | 106° | 50' | 45" | 106° | 50' | 37" | -8" |
| 120° | 121° | 38' | 54" | 121° | 38' | 41" | -13" |
| 135° | 136° | 20' | 29" | 136° | 20' | 14" | -15" |
| 150° | 150° | 56' | 45" | 150° | 56' | 33" | -12" |
| 165° | 165° | 29' | 20" | 165° | 29' | 13" | - 7" |
| 180° | 180° | 0' | 0" | 180° | 0' | 0" | 0" |

Sólo se han tabulado los valores de V para los de M comprendidos entre 0° y 180°, pues los comprendidos entre 180° y 360° son simétricos a los obtenidos.

De los valores tabulados, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1ª.- La variación de las diferencias de $V_g - V_r$ cuando M toma los valores de 0° a 360° siguen una ley sinusoidal.

2ª.- El valor $V_g - V_r$ se anula para los valores de M 0°, 90°, 180°, - 270° y 360°, lo cual quiere decir que para dichos valores de M el procedimiento gráfico da resultados reales.

3ª.- El valor de $V_g - V_r$ es máximo para los valores de M 45°, 135°, - 225° y 315° y no supera los 15" en valor absoluto. Dicho valor angular es despreciable para un cálculo gráfico.

Vistas las conclusiones obtenidas del estudio de los valores tabulados en I, podemos considerar como muy aceptable el procedimiento gráfico expuesto, pues con él, el error cometido no superará los ± 15" en el cálculo de la posición del sol en su órbita aparente. Como el sol recorre su órbita completa, 360°, en 365'25 días, el error medio en tiempo se obtiene:

$$\frac{365,25 \times 24}{360° \times 60} \times 15 = 6 \text{ m. } 5 \text{ s}$$

Realización práctica:

Demostrada la validez del método, pasemos a explicar su desarrollo práctico. Se ha de comenzar por elegir la escala apropiada para el trazado de la órbita aparente del sol. Los valores de partida son:

* Semieje mayor $a = 1{,}495978 \times 10^{11}$ m. (9)
* Semieje menor $b = 1{,}495768 \times 10^{11}$ m.
* Semieje distancia focal $c = 0{,}025059 \times 10^{11}$ m.
* Excentricidad $e = 0{,}016751$

y los formatos a emplear son el A-3 y el A-4. Las escalas apropiadas serán las $1/10^{12}$ y las $1/20 \times 10^{12}$ respectivamente. Con dichas escalas el semieje mayor se representará con una longitud de 149,5 m.m. y 74,7 m.m. respectivamente. El semieje menor a estas escalas se puede considerar prácticamente igual al semieje mayor, puesto que la primera cifra significativa que difiere del valor de a es la cuarta, que ya es del orden de las centésimas de m.m.

La distancia focal a las escalas recomendadas quedará reducida con el primer caso a $2c/10^{12} = 5$ m.m. y en segundo $2c/2 \times 10^{12} = 2{,}5$ m.m.

Tomando como unidad el radio de la ôrbita aparente, a = 1 y como valor de la excentricidad e = 1/60 = 0,0167, la distancia focal toma el valor de 1/30, es decir la treintava parte del radio; y los focos estarán separados del centro de la circunferencia la distancia 1/60, es decir la sesentava parte del radio (10). Para el trazado de la órbita se dibujará una circunferencia de radio a cualquiera, y sobre uno de sus diámetros, que representará al eje de los ápsides, a ambos lados del centro, se marcarán dos puntos, T y E, a una distancia del centro C, c = a/60, que representarán a los focos de la elipse.

El círculo que representa a la órbita aparente del sol es el deferente, el punto E el centro del ecuante y el punto T representa a la tierra.

El extremo del eje de los ápsides más cercano al punto T representa al perigeo y lo tomaremos como origen, pues en ese punto de la órbita es donde comienza el primer día del año. El sol se moverá sobre el deferente en sentido directo -contrario a las agujas del reloj- que es como se mueve en su órbita aparente (11).

Como ejemplo, se ha calculado la anomalía verdadera del sol para el día 10 de marzo (figura 5).

En primer lugar se ha hallado la anomalía media para dicho día de la siguiente forma: el movimiento medio diario del sol n -velocidad angular- es 360°/365 días y el número de días transcurridos desde el uno de enero, es de 69 días, luego:

$$M = nt = \frac{360°}{365 \text{ días}} \; 69 = 68° \; 3'$$

Trazado el círculo deferente, que en la figura 6 se ha hecho con un radio de 6 cm. para que c sea 1 m.m., se sitúa sobre el punto S de tal forma que el ángulo M (PES) sea el valor calculado 68°,05. Uniendo S con T se obtiene el ángulo V, cuyo valor es 69°,60, siendo la anomalía verdadera calculada para esa fecha de 69° 50' 57".

<u>División de la circunferencia en arcos iguales a los ángulos barridos por unidad de tiempo por el r. vector de posición. II ley de Kepler</u>

Para posteriores cálculos es conveniente tener en un gráfico las posiciones del sol cada día del año.

El trazado de este gráfico se hará de la siguiente forma: (figura 6). Se traza el cículo deferente de radio CP y se marcan los puntos E, C, T y P sobre su diámetro, que representa al eje de los ápsides, con las condiciones impuestas anteriormente.

Con centro en E, se traza una circunferencia de radio arbitrario EM y se divide en 365 partes iguales -posiciones medias-.

Desde T se proyectan las divisiones obtenidas sobre el deferente.

Con centro en T se traza una corona circular y sobre ella se proyectan desde T las divisiones obtenidas sobre el deferente. Las divisiones así obtenidas sobre la corona determinan sobre ella arcos iguales a los recorridos por el sol en su órbita aparente, anomalía verdadera.

Sobre la corona se han marcado las fechas correspondientes en lugar del valor del ángulo V.

Uniendo las fechas correspondientes a los solsticios y equinocios, se obtienen un par de diámetros perpendiculares que representan respectivamente a los ejes de solsticios y equinocios. Ambos ejes han de pasar por T y en el extremo del eje de equinocios se ha marcado el punto de Aries en el extremo correspondiente al equinocio de primavera.

## CÁLCULO DEL ÁNGULO HORARIO DEL SOL. ESCALAS DE TIEMPOS

Por definición el ángulo horario local de un astro, H, es el arco de círculo ecuatorial comprendido entre el meridiano del astro y el del lugar, medido en grados desde este último y en sentido directo.

Cuando el astro es el sol, el ángulo H medido es la hora solar local de tiempo verdadero. En la figura 7 se aprecia la relación que existe entre el ángulo horario del sol y la hora local.

Por lo general operaremos con tiempos verdaderos por la facilidad del cálculo del horario del sol, conociendo aquél y teniendo en cuenta que 1 hora es equivalente a 15°. Pero en la mayoría de los casos nos interesa conocer el fenómeno en estudio, en relación con el tiempo civil o por el contrario, puede suceder que el dato de partida sea conocido en tiempo civil y entonces para comenzar a operar tendríamos que conocer el mismo dato en tiempo verdadero. Esto nos lleva a definir las diferencias entre ambas escalas de tiempos.

Tiempo verdadero (TV): es el que se deriva del movimiento diurno del sol verdadero, se denomina también verdadero local porque su origen suele ser el meridiano del lugar.

Tiempo civil (TC): es el que marcan nuestros relojes. El tiempo civil se rige por el sol medio y tiene como origen el meridiano de Greenwich. En España peninsular, el tiempo civil es el tiempo medio de Greenwich , Tiempo Universal (T.U.), adelantado en una o dos horas según sea horario de invierno o de verano; en Canarias siempre una hora menos.

De las definiciones de tiempo verdadero y tiempo civil se desprende que para ajustar ambas escalas de tiempo, en España hay que hacer tres correcciones, una por diferencia de origen, otra por diferencia de tiempos medios y verdaderos y una tercera por la variación de hora por decreto con respecto al T.U.

Corrección por diferencia de orígenes: como entre los orígenes de medida de los tiempos hay una diferencia de longitudes, meridiano del lugar con meridiano de Greenwich, el sol pasará por el meridiano del lugar con una diferencia de tiempo con respecto a Greenwich igual a a la longitud del lugar expresada en horas. Esta diferencia de tiempos la consideraremos positivas si el meridiano considerado está al oeste, y negativas si está al este de Greenwich respectivamente.

Tiempo local = T.U. - longitud del lugar

Corrección por diferencia entre tiempos medios y verdaderos: la diferencia de ambos tiempos es debida a la diferencia de horarios existente entre el sol medio y el verdadero. A esta diferencia se le llama ecuación del tiempo. En el capítulo II está tabulada para cada día del año. La variación de la ecuación del tiempo para cada año suele ser muy pequeña, por lo que para una misma fecha de distintos años se puede tomar el mismo valor. Otra particularidad de la ecuación del tiempo es que varía a lo largo del día, pero dicha variación es tan pequeña que sólo para problemas que requieran mucha exactitud se suele hacer una interpolación lineal, aún cuando la variación con el tiempo de la ecuación no es lineal.

Tiempo verdadero = tiempo medio - ecuación del tiempo. (12).

Corrección por decreto: en España existen dos horarios. Uno de invierno y otro de verano. El de invierno está adelantado una hora con respecto el T.U. y el de verano dos horas. Luego habrá que restar una o dos horas según la estación. En Canarias el adelanto horario es siempre una hora menos que en España peninsular. (13).

La relación entre tiempo verdadero local y tiempo civil en España queda como sigue:

$$T.V. = T.C. - \lambda - E_t - A$$

siendo,

T.V. el tiempo verdadero local.

T.C. el tiempo civil.

$\lambda$ la longituddel lugar expresada en horas.

$E_t$ la ecuación del tiempo.

A el adelanto horario decretado según sea invierno o verano.

Despejando T.C. se obtiene la relación que nos transforma el tiempo verdadero en tiempo civil:

$$T.C. = T.V. + \lambda + E_t + A$$

Para aclarar lo expuesto veamos dos ejemplos. Sabemos que el tiempo verdadero local es el que marcan los relojes de sol y el tiempo civil el que marcan los cronómetros; con estas premisas calculemos qué hora civil es en Sevilla cuando el cuadrante solar de la Giralda marque las 3 h. 30 m. de la tarde el día 10 de agosto.

Para esa fecha, la ecuación de tiempo es de + 5 m. 58 s.

La longitud del lugar es de 5° 59'27" equivalente a 23 m. 58 s. y el adelanto horario 2 h.

T.C. = 3h. 30 m.+ 23 m.58 s + 5 m. 58s. + 2 h= 5h.59m.56s.
Nuestro reloj marcará las 5h. 59m. 56s.

En el segundo ejemplo calcularemos la hora que marcará el mismo cuadrante solar el día 4 de noviembre cuando el reloj de contrapeso de la torre marque las 11h.25m. de la mañana.

Para ese día la ecuación del tiempo es negativa y tiene un valor de -16m.24s. y el adelanto horario es de 1 h.
T.V.= 11h.25m. - 23m.58s. - (-16m.24s) - 1 h= 10h.17m.26s.
El gnomón arrojará su sombra sobre las 10h.17m.26s.

## CÁLCULO DE LA DECLINACIÓN SOLAR

Se denomina declinación solar, $\delta$ , la distancia angular que existe entre el paralelo que recorre el sol en su movimiento diurno y el ecuador. Según el modelo de sistema sol-tierra definido, el sol durante el día recorre un paralelo, pasando al siguiente paralelo cuando pasa por el antimeridiano, en consecuencia la declinación solar se considera constante a lo largo del día y tomará valores distintos en distintos días.

Podemos definir también la declinación solar como el ángulo que forma el radio vector de posición del sol con el plano del ecuador.

La órbita aparente del sol está situada en el plano de la eclíptica y ésta forma un ángulo con el plano del ecuador $\Delta$ =23°27' (14). Determinando la intersección de dichos planos y situando el radio vector de posición sobre la esfera celeste en relación con ellos, es fácil medir el ángulo entre dicho radio y el plano del ecuador mediante giros de la esfera celeste, de tal forma que el radio vector quede paralelo al plano vertical de proyección -recta frontal-.

La intersección de los planos de la eclíptica y ecuador determina el eje de los equinocios. Éste no coincide con el eje menor de la órbita (15), por lo tanto el eje de solsticios, perpendicular al de equinocios no coincide con el eje de los ápsides, eje mayor de la órbita. Al desfase angular entre ambos ejes lo llamaremos longitud del perigeo $\lambda_p$ (16).

Para la explicación del proceso de cálculo elijamos un sol que recorra una órbita aparente de excentricidad 0,6 en 365 días y que el solsticio de verano sea el 22 de junio. Con estos datos calculemos la declinación solar el día 19 de enero.

Primeramente tracemos una elipse con excentricidad e = 0,6 (figura 8) y en ella marquemos los focos E y T, centro del ecuante y tierra respectivamente. Sobre la elipse marquemos la posición del sol S, de tal forma que el ángulo M ($\widehat{SEP}$) tenga el valor de:

$$M = \frac{360^\circ}{365 \text{ días}} \, 19 \text{ días} = 18^\circ{,}74$$

y el solsticio de verano, punto ♋ de la misma forma:

$$M_{♋} = \frac{360°}{365 \text{ días}} \; 173 \text{ días (22 de junio)} = 170°63 \qquad (17)$$

Uniendo el punto ♋ con T, se obtiene el eje de los solsticios y por lo tanto se puede calcular la longitud del perigeo, $\lambda_P$.

La perpendicular al eje hallado, eje de los equinocios, es la traza del plano del ecuador con el plano de la eclíptica.

Tracemos una esfera, con radio arbitrario y centro T que represente a la esfera celeste, en un sistema de referencia en la que el plano horizontal de proyección sea el plano de la eclíptica y la línea de tierra eje de los solsticios, de esta forma el eje de la tierra estará contenido en el plano vertical de proyección, el eje de los equinocios es una recta de punta al plano vertical de proyección y el plano del ecuador un plano proyectante vertical.

El radio vector $\bar{r}$, recta TS sobre el plano horizontal, determina la posición del sol sobre la esfera celeste en la intersección con ella, punto S'.

Giremos la esfera celeste alrededor del eje de equinocios un ángulo de amplitud $\Delta$ para que el ecuador coincida con el plano horizontal. El plano de la eclíptica pasará a la posición de la traza $E_c$ el eje del mundo quedará como la vertical que pasa por T y el sol S' pasará a ocupar la posición $S_1$ .

Operando un segundo giro, esta vez alrededor de la vertical que representa al eje del mundo, con una amplitud tal que $S_1$ pase al contorno aparente de la esfera celeste, punto $S_1'$ . El radio vector de posición quedará sobre el plano vertical de posición , recta $TS_1'$ pudiéndose medir directamente el ángulo que forma con el plano horizontal, plano del ecuador. El valor obtenido, $\delta$ , es el valor de la declinación para el día 19 de enero.

En la figura 8 si el radio de la esfera celeste es la unidad,

$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} \Delta \cdot TS_1 = \operatorname{sen}\delta \cdot \cos(\widehat{\gamma TS'})$

y como TS' es la anomalía verdadera, V más la longitud del perigeo, queda:

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\Delta \cdot \cos(V + \lambda_p) \qquad (18)$$

Fórmula que nos liga la declinación con la posición del sol en su órbita aparente.

Realización práctica: Para hallar la declinación del sol de una forma práctica, se comenzará dibujando el círculo deferente que representa a su órbita aparente, circunferencia de centro C de la figura 9. A la derecha e izquierda del centro C, sobre un diámetro y a una distancia de C igual a R/60, siendo R el radio de la circunferencia, se sitúan los puntos T y E que representan a la tierra y al centro del ecuante respectivamente.

Como la longitud del perigeo se puede considerar constante, para mayor facilidad en el cálculo haremos coincidir el eje de los ápsides y el de solsticios y una vez hallada la posición del sol sobre el deferente le sumamos siempre la longitud del perigeo, ángulo $\lambda_p$.

En la figura 9 se ha hallado la declinación solar para el día 15 de febrero, procediendo de la siguiente forma: con vértice en E se traza el ángulo M = 360/365 x 45 = 45,37° obteniéndose sobre el deferente el punto $S_1$ . A continuación unimos $S_1$ con T y le sumamos el ángulo $\lambda_p$ correspondiente a la longitud del perigeo, y se obtiene el punto $S_2$ , posición real del sol sobre la eclíptica.

Con centro en T y radio arbitrario se trazará la proyección de la esfera celeste. La intersección del radio $TS_2$ con la esfera, punto $S'_2$ determina la proyección del sol sobre la esfera celeste. Girando alrededor del eje de equinocios un ángulo $\Delta$, el plano del ecuador pasará a coincidir con el plano horizontal de proyección, el eje del mundo es la vertical por T y la proyección vertical del sol ocupa la posición $S''_2$ .

Con un nuevo giro alrededor del eje del mundo, perpendicular al plano del ecuador, podemos situar el vector $TS''_2$ sobre el plano vertical de proyección y la proyección del sol ocupará el punto S del contorno aparente de la esfera celeste y el ángulo que forma el radio TS con la línea de tierra es la declinación solar para el día 15 de febrero, $\delta = -12,5°$.

En la figura 10 se ha procedido del mismo modo para calcular la declinación solar el día 23 de abril, obteniéndose para $\delta$ el valor de 12,5°. El signo de $\delta$ lo tomaremos negativo o positivo según el sol esté por debajo o por encima del plano del ecuador respectivamente, caso de las figuras 9 y 10.

En la figura 11 se calcula la declinación para el equinocio de primavera y en la 12 para el solsticio de verano. En ambos casos, como la declinación solar ha de ser 0 y 23°27' se puede determinar la longitud del perigeo, ángulo que sumamos al $\widehat{S_1 CP}$ para que $S_2$ coincida con el punto ♈ en el primer caso, figura 11 y con el ♋ en el segundo, figura 12.

Un problema clásico en astronomía es la conversión de coordenadas horizontales en horarios y viceversa. Con estos cambios de coordenadas se puede conseguir, conociendo la posición del sol respecto el horizonte de un lugar (altura y azimut), saber el día y la hora (el día es función de la declinación y la hora del ángulo horario); o bien, conociendo ésto, averiguar la posición del sol con respecto al horizonte (altura y azimut del astro). De aquí la importancia que tiene la operación de cambio de coordenadas del sol para solucionar los problemas de asoleo.

Los astrónomos suelen solucionar este problema, resolviendo el triangulo esférico de posición del astro. Triángulo $\widehat{PZS}$ en la figura 13, en donde P es el polo, Z el zenit y S la posición del astro.

Conocida la latitud $\varphi$ del lugar, se conoce el lado PZ = $90° - \varphi$, colatitud del lugar, y conocida la altura h del astro se conoce el lado ZS = 90°-h, distancia zenital. Y como el ángulo que forman ambos lados del triángulo esférico se deduce del azimut del astro, se puede calcular el lado restante PS y de él deducir la declinación del astro, e igualmente se puede deducir el ángulo que forma dicho lado con el meridiano del lugar, ángulo horario local del astro. Las siguientes expresiones obtenidas de la resolución del mencionado triángulo:

$$\cos\delta \cos H = \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos h \cdot \cos a + \cos\varphi \cdot \operatorname{sen} h$$
$$\cos\delta \operatorname{sen} H = \cos h \cdot \operatorname{sen} a$$
$$\operatorname{sen}\delta = -\cos\varphi \cdot \cos h \cos a + \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen} h$$

nos relacionan ambas coordenadas.

De la misma forma, conociendo la latitud del lugar $\varphi$, el ángulo horario local del astro H, y la declinación $\delta$, conocemos los lados PS y PZ, y el ángulo comprendido entre ellos, por lo que podemos resolver el triángulo de posición y obtener los valores de la altura h y el azimut a del astro. En este caso las relaciones obtenidas de la resolución del triángulo de posición son:

$$\cos h \cos a = \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H - \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\delta$$
$$\cos h \operatorname{sen} a = \cos\delta \cdot \operatorname{sen} H$$
$$\operatorname{sen} h = \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta$$

En el capítulo II se definieron ambos sistemas de coordenadas esféricas y las correspondientes rectilíneas, para las que se definió en cada caso un triedro trirectángulo como sistema de referencia. Dichos triedros están reflejados en la figura 13. El XYZ, formado por el plano del horizonte, el plano meridiano del lugar y el primer vertical como sistema de referencia de las coordenadas horizontales; y el $X_1Y_1Z_1$ formado por el plano del ecuador, el meridiano del lugar y el meridiano de 90° como sistema de referencia de las coordenadas horarias.

La posición relativa entre ambos sistemas de referencia es tal que el eje de las y es común a ambos, y el sistema $X_1Y_1Z_1$ está girado alrededor del eje común con respecto al XYZ un ángulo igual a la colatitud del lugar $90 - \varphi$.

Como la expresión de las coordenadas viene dada por el ángulo que forma el radio vector con los planos XY ó $X_1Y_1$ y el ángulo que forma con el meridiano del lugar el vertical o meridiano que contiene a dicho radio vector de posición del astro respectivamente, eligiendo convenientemente un diedro para representar la esfera celeste y el radio vector de posición del astro y mediante un giro de amplitud $90-\varphi$ podemos pasar gráficamente de un sistema a otro de coordenadas, como veremos seguidamente.

Cálculo de la altura y el azimut solar: conocida la declinación y el ángulo horario del sol en un lugar de latitud $\varphi$ se pueden calcular la altura y el azimut. Para ello, elijamos como plano horizontal de proyección el plano del ecuador celeste y como plano vertical de proyección el meridiano del lugar. El eje $X_1$ coincidirá con la línea de tierra, el eje $Y_1$ será una recta de punta al vertical y el eje $Z_1$ coincidirá con el eje del mundo, si para la representación de la esfera celeste sobre el diedro definido, elegimos como centro de dicha esfera un punto de la línea de tierra (figura 14).

Las proyecciones verticales $r'_1$ y horizontales $r_1$ del radio vector de posición del sol se hallarán con la condición de que dicho radio forme un ángulo $\delta$ con el P.H.P., igual a la declinación y se encuentre en el plano proyectante horizontal que forma con el P.V.P. un ángulo H igual al ángulo horario del astro. El extremo del radio vector hallado con estas condiciones determina las proyecciones del sol $S_1$ $S'_1$ sobre el diedro elegido.

El plano del horizonte del lugar es un plano proyectante vertical y su traza vertical se corresponde con el eje X y forma con el P.H.P. un ángulo igual a la colatitud del lugar. Trazado este plano se realiza un giro alrededor del eje común $Y = Y_1$ y amplitud $90-\varphi$ de tal forma que el plano del horizonte coincida con el P.H.P., arrastrando en este giro a la esfera celeste y a la posición del sol sobre ella $S_1$ $S'_1$.

De esta forma obtenemos la nueva posición del sol S' S y la de su radio vector de posición r' r. La traza del plano del ecuador ($X_1$), la de la vertical (Z) y la del eje del mundo ($Z_1$).

El proyectante horizontal que contiene al nuevo radio vector, forma un ángulo con el plano meridiano, P.V.P., igual al azimut del sol (dicho ángulo se puede medir directamente sobre el plano horizontal de proyección, ángulo a) y el ángulo que forma r con el plano horizontal de proyección es la expresión de la altura del astro. Este ángulo se puede apreciar en verdadera magnitud girando dicho radio alrededor de su vertical (Z) un ángulo igual a su azimut, de tal forma que coincida con el plano vertical de proyección, recta T (S').

En la figura 14 se han tomado como datos los siguientes:

Latitud del lugar...... $\varphi = 40°$

Declinación........... $\delta = 20°$

Angulo horario......... H = 30°

y como resultado se han obtenido una altura h de 57°,5 y un azimut a de 60°,9.

<u>Cálculo del ángulo horario y declinación solar</u>: igualmente conocida la altura y el azimut del sol, se pueden calcular la declinación y el ángulo horario del mismo para un lugar de latitud $\varphi$ dada (figura 15).

En este caso sobre el diedro de referencia situaremos el plano del horizonte de forma que coincida con el P.H.P. y el meridiano del lugar con el P.V.P., con lo que el centro T de la esfera y el eje X se situarán sobre la línea de tierra y el eje Z será una vertical por T. El radio vector de posición se situará en la esfera de forma que esté contenido en un proyectante horizontal que forme con el P.V.P. un ángulo igual al azimut considerado, y que el ángulo que forme el radio vector de posición con el plano horizontal de proyección sea igual a la altura. El extremo del radio vector r'r determina la posición del sol S'S sobre la esfera celeste.

El plano ecuatorial, proyectante vertical, forma un ángulo con el horizonte, P.H.P. igual a la colatitud del lugar $90-\varphi$ y su traza vertical coincide con el eje $X_1$ y el eje del mundo $Z_1$ queda situado sobre el P.V.P. formando con el eje Z, vertical del lugar un ángulo igual a la colatitud.

Operando un giro en la esfera celeste alrededor del eje común a los dos sistemas coordenados, eje $Y_1 = Y$, de amplitud $90° - \varphi$ de tal forma que el plano del ecuador coincida con el P.H.P., $Z_1$ ocuparía la posición $(Z_1)$, $X_1$ la $(X_1)$, r'r pasaría a la posición $r_1' r_1$ y el sol a la $S_1' S_1$.

El ángulo que forma el plano proyectante que contiene al nuevo radio vector de posición, plano meridiano, forma con el meridiano del lugar P.V.P., un ángulo igual al horario del sol, ángulo H.

La declinación solar se puede medir operando un nuevo giro al radio vector de posición $r_1' r_1$ alrededor del eje $(Z_1)$ hasta colocarlo sobre el plano vertical de proyección. En esta posición, la proyección del sol se sitúa sobre el contorno aparente de la esfera celeste, punto $(S_1')$ y el ángulo $\delta$ se ve en verdadera magnitud.

En la figura 15 se ha calculado el ángulo horario y la declinación del sol para un lugar de latitud 60°, cuando el sol tiene una altura de 45° y un azimut de 45°.

Con dichos valores se han obtenido los siguientes resultados:

$$H = 22°,5 \quad y \quad \delta = 21°$$

En este caso hay siempre que comprobar el valor de $\delta$ obtenido, pues tratándose del sol éste ha de estar siempre comprendido entre los valores $23°27' > \delta > -23°27'$. Si el valor de $\delta$ fuese mayor o menor de los límites expresados, quiere decir que para el sol en el lugar de latitud $\varphi$ escogido no son compatibles las parejas de coordenadas horizontales tomadas.

## CÁLCULO DE LA DIRECCIÓN DE LAS PROYECCIONES DE LOS RAYOS SOLARES SOBRE UN DIEDRO ORIENTADO

El cálculo de las proyecciones del rayo solar sobre un diedro orientado es una de las aplicaciones del cálculo gráfico expuesto, que tiene más interés para el arquitecto, ya que le permite el cálculo de éstas sin tener que usar los diagramas de asoleo y además le proporciona mayor exactitud en los cálculos, ya que no es necesario interpolar en ningún caso.

La resolución del problema se lleva a cabo en cuatro fases consecutivas.

Primero, sobre una circunferencia de centro C, círculo deferente, que representa a la eclíptica, se calcula la posición del sol sabiendo los días transcurridos desde el día 1 de enero, punto $S_o$.

A continuación se proyecta la posición del sol sobre una circunferencia con centro la tierra, punto T, que representa la proyección de la eclíptica sobre la esfera terrestre y girando ésta un ángulo $\Delta = 23°27'$ se obtiene el valor de la declinación solar. Con dicho dato y el ángulo horario deducido de la hora se determinan las proyecciones del sol sobre la esfera celeste para el día y la hora en estudio, teniendo como planos de referencia el plano del ecuador y el meridiano del lugar como planos horizontal y vertical de proyección respectivamente.

Seguidamente se gira la esfera un ángulo ( $\gamma = 90 - \varphi$ ) igual a la colatitud del lugar. Con este giro se consigue un nuevo diedro de referencia: P.V.P. el mismo y plano horizontal de proyección el horizonte del lugar, y se hallan sobre los nuevos planos las proyecciones del sol conocida la posición anterior girada.

Por último se realiza un cambio de plano vertical de proyección para que el nuevo plano vertical tenga la misma orientación que el del diedro del problema, hallando seguidamente las proyecciones del sol sobre el nuevo sistema. El radio vector de posición de estas nuevas proyecciones son las proyecciones sobre el diedro orientado del problema, de los rayos del sol para el día y la hora pedidos.

En la figura 16 se han calculado las proyecciones del rayo de sol para un diedro orientado al S.W. en Sevilla (37°23' N. y 6° W), el día 20 de mayo a las 3 h. de tiempo verdadero local (5h. 20m. 30s. hora oficial).

El proceso es como sigue: con centro en C se traza una circunferencia deferente de radio $\rho$ y su diámetro N-S. Sobre el diámetro dibujado y a una distancia $\rho/60$ se determinan a la derecha e izquierda de C los puntos E y T.

Desde E y con el punto P como origen, se mide sobre la circunferencia un arco igual a la anomalía media, M = (360/365) 140, siendo 140 el número de días transcurridos desde el 1 de enero al 20 de marzo. Uniendo el centro del arco con el punto T y sumándole un ángulo $\lambda_p$ equivalente a la longitud del perigeo, se obtiene el punto $s_o$ , posición del sol sobre la eclíptica el día 20 de marzo.

A continuación trazamos con radio arbitrario una esfera con centro en T que representa la esfera celeste. Como línea de tierra usaremos la línea N-S, como plano vertical de proyección el plano meridiano del lugar y como plano horizontal de proyección, primeramente el plano de la eclíptica, con lo cual se obtiene la proyección s's como proyección del sol. Girando seguidamente la esfera celeste alrededor de la recta TW un ángulo $\Delta = 23°27'$ se obtiene la proyección (s') y como P.H.P. el plano del ecuador. Girando nuevamente, esta vez alrededor del eje de la tierra T PN hasta llevar (s') sobre el contorno aparente, punto (S'), se obtiene el valor de la declinación solar para el día 20 de marzo, ángulo $\delta = 20°$. Con un nuevo giro sobre el mismo eje llevamos la proyección del sol sobre un plano proyectante horizontal que forme con el plano vertical, plano meridiano, un ángulo igual al horario del sol, en nuestro ejemplo la traza horizontal de dicho plano ha de pasar por el punto de las III, ángulo horario de 45°. Con este giro obtenemos las proyecciones del sol $S_1'$ $S_1$.

Halladas las coordenadas H y $\delta$ mediante un cambio de coordenadas calculamos la altura y el azimut. Con un nuevo giro de amplitud $\gamma = (90 - \varphi)$ igual a la colatitud del lugar, alrededor de la recta TW, sustituímos el plano del ecuador por el plano del horizonte y de las proyecciones del sol respecto este nuevo sistema son las S'S.

Por último haciendo un cambio de plano vertical de proyección, de tal forma que la nueva línea de tierra forma con la anterior un ángulo igual al complementario de la orientación del diedro del problema, se obtienen las proyecciones del sol sobre este nuevo sistema de referencia S'' S y las proyecciones del radio vector de posición R'' R son las direcciones del rayo solar buscadas.

## CÁLCULO DEL DÍA Y LA HORA EN LOS QUE LAS PROYECCIONES DEL RAYO DE SOL, SOBRE UN DIEDRO DE ORIENTACIÓN CONOCIDA, FORMAN UN ÁNGULO DETERMINADO

El arquitecto cuando proyecta en el sistema diédrico, a veces necesita de una tercera proyección para definir los volumenes proyectados, sobre todo al proyectar sobre el P.V.P. los alzados de una edificación.

Esta tercera proyección suele ser una proyección cilíndrica no ortogonal, de cada uno de los elementos que componen el alzado sobre su mismo paramento, es decir, la sombra arrojada sobre la propia fachada.

Para la dirección del rayo de luz se suele elegir la de la diagonal de un cubo cuyas caras sean paralelas a los planos de proyección. Las proyecciones del rayo de luz con la dirección definida forman con la línea de tierra un ángulo de 45° y tienen la ventaja de que la profundidad de una sombra arrojada es igual al alejamiento del punto que la produce.

No siempre esta dirección de los rayos de sol es posible, y cuando sea posible sólo se dará para un día y hora determinado.

El problema de encontrar el día y la hora en los que las proyecciones del rayo de sol forman un ángulo determinado con la línea de tierra, es un problema inverso al anterior y tiene solución gráfica en todos los casos, pero en algunos la solución no es real para el sol verdadero como se demostrará más adelante.

Los datos de partida en este caso son: la orientación del plano vertical de proyección y los ángulos $\alpha$ y $\beta$ que forman las proyecciones horizontal y vertical del rayo del sol con la línea de tierra y la situación del lugar, latitud y longitud.

En la figura 17 se ha realizado este cálculo para un paramento orientado al SSW, situado en Sevilla $\varphi = 37°23'$ N 6°W y con unos ángulos $\alpha = \beta = 45°$.

Comenzaremos por trazar con radio arbitrario la proyección de la esfera celeste con centro en T, usando como plano horizontal de proyección el plano ecuatorial y como vertical de proyección el plano meridiano del lugar.

A continuación, realicemos un cambio de plano para elegir un plano vertical con la misma orientación que el plano del problema y sobre el cambio de plano dibujaremos las proyecciones del rayo solar con los ángulos pedidos, recta R" R que forman con la línea de tierra los ángulo $\alpha = \beta = 45°$ y hallemos la intersección del rayo con la esfera celeste, punto S"S, que representará la posición del sol respecto el plano vertical elegido y el plano del horizonte.

Deshagamos el cambio de plano obteniendo las proyecciones S'S y un giro de amplitud $90-\varphi$ alrededor del eje TW para tener como referencia el plano del ecuador y el meridiano del lugar. En este nuevo sistema el punto $S_1'$ representa la proyección vertical del sol y $S_1$ la horizontal y $r_1'$ r la proyección del radio vector de posición.

El plano proyectante que contiene a $r_1'$ forma con el plano meridiano, plano vertical de proyección, el ángulo horario H que expresado en horas H = 3h 32m., es la hora en la que las proyecciones del sol sobre el diedro del problema pueden formar 45° con la línea de tierra.

El vector de posición $r_1'$ r forma con el plano horizontal de proyección, plano del ecuador, un ángulo $\delta$ igual a la declinación solar del día en que se produce el fenómeno analizado. Dicho ángulo se puede medir en verdadera magnitud 10°31', girando $S_1'$ alrededor del eje de la tierra, hasta colocarlo sobre el plano vertical de proyección, punto ($S'_1$ ). El ángulo medido ha de ser siempre $\delta \leq \Delta$ siendo $\Delta$ el ángulo que forma el plano de la eclíptica con el del ecuador. Si $\delta > \Delta$ quiere decir que para las proyecciones del sol sobre el plano elegido alcance el valor $\alpha$ y $\beta$ de partida, el sol ha de recorrer un paralelo que esté por encima del paralelo máximo que recorrería en el lugar de la latitud elegida, es decir el problema no tiene solución real; para que ésta sea posible es condición necesaria que el valor de sea:

$$\delta \leqslant 23° \ 27'$$

Para averiguar el día en que el sol tiene la declinación hallada, se trazará el plano de la eclíptica, -plano proyectante vertical- y se llevará sobre él, mediante un giro alrededor del eje de la tierra, el radio vector r-r'. De esta forma obtenemos las proyecciones s's y, por lo tanto, el ángulo $\widehat{sT\,XII}$. A continuación, restamos a dicho ángulo la longitud del perigeo $\lambda$ p, obteniéndose el ángulo V, anomalía verdadera del sol el día en que su declinación es de 10°30'.

Para calcular la anomalía media se trazará el deferente con centro en C y uniendo la intersección del círculo trazado con el lado del ángulo V con E, se obtiene el valor de la anomalía media M y de dicho valor se deduce el día del año:

$$M = 107^\circ; \quad n = 107 \frac{365}{360} = 108 = 18 \text{ de abril}$$

La solución obtenida es el 18 de abril a las 3 h. 32 m.

Discusión de la solución: cuando se calculó el ángulo $\delta$ se indicó que éste no podía ser mayor de 23°27', cuando se trataba de operar con un sol real y esta condición la impusimos como condición necesaria.

Al calcular el punto s, posición del sol sobre la eclíptica, se proyectó en la dirección s's y se obtuvo como solución el día 18 de abril. Si la proyección de s' se hubiese hecho en dirección contraria, se hubiese obtenido como solución el día 26 de agosto, día en el que la declinación también es 10°30'.

Si el valor del ángulo $\delta$ hubiese sido el valor máximo posible 23°27' el punto (s') hubiese estado sobre la circunferencia de centro T y el punto s y el s' hubiesen coincidido en el extremo del diámetro que representa al plano ecuatorial. Es decir, que para cada valor de $\delta$ encontrado, obtendremos dos días distintos y simétricos respecto el solsticio, excepto cuando $\delta$ tenga el valor de $\Delta$ en el que sólo se obtendrá una única solución, el día del solsticio.

Otra serie de problemas que se pueden resolver gráficamente es el averiguar la hora del sol por un círculo celeste ya sea perpendicular al horizonte, vertical, o paralelo a éste, almucantarate.

La solución se encontrará siempre hallando la posición del sol sobre la esfera celeste como intersección del círculo en estudio con el paralelo que recorre el sol.

Estos problemas tienen mucho interés en el estudio del soleamiento, pues al resolverlos se pueden calcular las horas de insolación de un paramento en un día determinado, sabiendo la orientación y situación de éste.

Paso del sol por el horizonte. Orto y ocaso (19): el paso de un astro por el horizonte se le conoce como orto cuando pasa del hemisferio visible al invisible, y los azimut correspondientes, azimut de orto y ocaso respectivamente. En el momento del orto y del ocaso, la altura del astro sobre el horizonte es cero.

Calculemos las horas y azimuts de orto y ocaso del sol, el día 20 de mayo (figura 18). Primeramente se calculará como siempre la declinación del sol para ese día. En la figura 16, cuando se calcularon las proyecciones del rayo de sol, se eligió el mismo día y se obtuvo como valor de la declinación 20°. Partiendo de este dato, tracemos la esfera celeste con centro en T usando como plano vertical de proyección el plano meridiano del lugar y como plano horizontal de proyección el plano del ecuador. Sobre la esfera se trazará también el plano del horizonte, representado en la figura como segunda línea de tierra. Dicho plano forma con el plano del ecuador un ángulo igual a la colatitud del lugar $90-\varphi$, en este caso 52°37' (colatitud de Sevilla).

El sol el día 20 de mayo recorre el paralelo situado a 20° en el hemisferio N. que en la figura es un plano horizontal trazado por el extremo del ángulo $\delta$. La intersección del paralelo, el plano del horizonte y la esfera celeste determinan el punto S, posición del sol sobre el horizonte el día 20 de mayo. Las proyecciones horizontales de S, puntos $S_1$ y $S_2$ determinan los ángulos $X\widehat{II\ T\ S}_1$ y $X\widehat{II\ T\ S}_2$, horario de ocaso y de orto respectivamente, que, expresado en horas, son las horas de ocaso y orto en tiempo verdadero local:

$$H_{or} = 4h.\ 55m.\ 25s.$$
$$H_{oc} = 7h.\ \ 4m.\ 35s.$$

Los azimuts de orto y ocaso los encontraremos abatiendo el plano del horizonte sobre el plano horizontal de proyección, con lo que el punto S se desplazará hasta los lugares ocupados por $S_3$ y $S_4$. Uniendo estos puntos al punto T se obtienen los azimuts de orto y ocaso $a_{or}$ y $a_{oc}$ cuyos valores para este caso son:

$$a_{or} = 244°\ 30'\ 17''$$
$$a_{oc} = 115°\ 29'\ 43''$$

<u>Tiempo de permanencia del sol sobre el horizonte</u> (20): el tiempo que permanece el sol sobre el horizonte se calcula sumando los ángulos horarios de orto y ocaso, expresándolos en horas. En la figura 18, dicha suma está representada por el ángulo $S_1\widehat{\ T}S_2$ = 212° 17' 30" = 14h. 9m. 10s.

Paso del sol por el meridiano del lugar. Culminación del sol (21): se denomina culminación de un astro a la altura máxima que alcanza sobre el horizonte; esta altura se alcanza cuando el ángulo horario y el azimut es 0, es decir en su paso por el meridiano del lugar. En la figura 18 por ser una proyección sobre el plano meridiano se puede medir directamente, ángulo $\widehat{HTS'} = 90^{\underline{o}} - \varphi + \delta = 73°37'$.

Paso del sol por un almucantarate (22): el paso del sol por un círculo paralelo al horizonte de altura conocida, almucantarete, queda definido por la hora y el azimut del astro cuando alcanza la altura del círculo. Dicha altura se alcanzará si es menor que la altura de culminación dos veces al día, una por la mañana después del orto y otra por la tarde, antes del ocaso. Los ángulos horarios y azimuts de los dos casos serán simétricos respecto el plano meridiano del lugar.

En la figura 19 se ha calculado el ángulo horario y azimut del sol el día 20 de mayo, en el que la declinación del sol es de 20°, en el momento de su segundo paso por el almucantarate de 25° en un punto de latitud 37° 23'. Para ello se ha procedido de la misma forma que en la figura 18. Sobre el plano meridiano se ha proyectado la esfera celeste usando éste como plano vertical de proyección y el plano del ecuador como plano horizontal de proyección. A continuación se realiza un cambio de plano, de tal manera que la nueva línea de tierra forme con la anterior un ángulo igual a la colatitud del lugar, con lo cual el nuevo plano horizontal de proyección representará al horizonte del lugar. Paralelos al ecuador y al horizonte se han trazado los círculos paralelos a 20° y almucantarate de 25°, respectivamente. El sol en la esfera celeste quedará determinado a su paso por el almucantarate por la intersección de ambos círculos y las proyecciones horizontales del radio vector de posición sobre ambos planos horizontales determinan los ángulos correspondientes al horario y azimut del astro.

$$H = 74° \ 18' \ 15'' = 4h. \ 57m. \ 13s.$$

$$a = 98° \ 28' \ 36''$$

Paso del sol por un vertical (23): el problema consiste en calcular el ángulo horario del sol a su paso por un vertical conociendo el azimut del vertical, la declinación del sol para el día que se calcula y las coordenadas del lugar, latitud y longitud.

Proyectemos la esfera celeste sobre el plano meridiano del lugar y el plano del ecuador, con centro en la línea de tierra. Tracemos el horizonte del lugar, plano proyectante vertical que forma con el ecuador un ángulo igual a la colatitud. En la figura 20 está representado por la segunda línea de tierra. Trazaremos también el eje del mundo, recta T PN y perpendicular al ecuador y la vertical del lugar, recta TZ, perpendicular al horizonte. Ambas sobre el plano meridiano.

Abatiendo el horizonte sobre el plano horizontal de proyección podemos trazar el ángulo a, azimut del vertical y determinar el punto n proyección vertical del extremo del radio r, lado del ángulo a.

El vertical de azimut a se proyectará sobre el plano vertical de proyección, plano meridiano del lugar, como una elipse de semiejes TZ y Tn.

Tracemos el paralelo de altura la declinación del día para el que se está calculando, para lo cual trazaremos previamente el ángulo $\delta$ y hallaremos su intersección con la circunferencia del contorno aparente de la esfera, y por el punto hallado, la paralela al ecuador. La recta así trazada representa la traza vertical del plano del paralelo buscado, que es el que recorrerá el sol dicho día.

La intersección del paralelo con la elipse proyección del vertical de azimut a, determina la posición del sol en su paso por el vertical, punto S'.

La recta ST es el radio vector de posición del sol. La proyección horizontal del radio vector, recta TS, traza del plano proyectante horizontal que contiene al radio vector de posición, por definición es el ángulo horario del sol, en este caso el horario del sol cuando éste está en el vertical del azimut a, ángulo $H_1$. Dicho ángulo expresado en horas, es la hora de paso del sol por el vertical pedido el día en que la declinación del sol es $\delta$.

## CÁLCULO DE LAS HORAS DE INSOLACIÓN DE UN PARAMENTO VERTICAL

La solución de este problema está en encontrar las horas de paso del sol por los verticales del mismo azimut que el paramento, y sumarlas para saber el tiempo que el sol está por delante del paramento.

Los datos para hallar el número de horas de insolación son: la latitud y longitud del lugar, el azimut del muro y el día para el que se hace el cálculo.

Antes de comenzar el planteamiento del problema es conveniente calcular los azimuts de orto y ocaso del sol para el mismo día, como se hizo en la figura 20. De esta forma averiguaremos previamente si el sol sale o se pone por detrás del paramento en estudio, en cuyo caso las horas que habrá que sumar serán las de orto, ocaso, o paso por el vertical según los casos.

En la figura 20 se ha hecho el estudio de las horas de soleamiento para el caso del muro de fachada considerado en la figura 16, con lo cual ya está calculada la declinación solar.

Los datos de partida son:

- orientación del paramento... al SW
- situación: Sevilla.......... $\varphi = 37° \; 23'$
- día: 20 de mayo............. $\delta = 20°$

Una vez trazada la proyección de la esfera celeste sobre el plano meridiano del lugar como plano vertical de proyección y el del ecuador como plano horizontal de proyección, se procede a calcular el azimut de ocaso del sol el día 20 de mayo para el horizonte de Sevilla. Para ello tracemos el plano del horizonte, plano proyectante vertical que forma con el plano del ecuador un ángulo igual a la colatitud de Sevilla, 52°37'. Seguidamente haremos un cambio de plano horizontal de proyección para que el plano del horizonte sea dicho plano horizontal de proyección. La nueva línea de tierra representará la meridiana y respecto de ella trazaremos la traza del paramento del muro en estudio, plano proyectante horizontal, formando un ángulo a = 45°.

En el primer diedro de referencia trazaremos el ángulo de declinación $\delta$ =20° para determinar el paralelo de los 20° que recorre el sol el día 20 de mayo. El plano del paralelo, también proyectante vertical, cortará al plano del horizonte según una recta, recta de punta, y esta recta en su intersección con la esfera, determina las posiciones del sol en el orto y ocaso sobre el horizonte $S_1'$. Abatiendo el plano del horizonte sobre el plano horizontal de proyección del primer sistema de referencia, y con el punto de ocaso, obtenemos $S_2$ y uniendo éste con el centro T se obtiene el azimut de ocaso del sol $a_o$ que como puede comprobarse, está por delante del paramento del muro. Es decir, el sol se pondrá el 20 de mayo en Sevilla por delante del muro orientado al SW, por lo que el ángulo horario a considerar será el de ocaso.

El ángulo horario del ocaso $H_o$, se halla uniendo la proyección horizontal $S_1'$ punto $S_1$ con T, como ya se demostró en la figura 16.

El ángulo horario $H_1$ del paso del sol por el paramento del muro se obtendrá uniendo la proyección horizontal del punto S'S, punto de intersección del paralelo 20° con el vertical del muro, arco de elipse Zn.

Sumando $H_o$ y $H_1$ y expresándolo en horas, se obtiene el tiempo que el sol está delante del muro orientado al SW, en Sevilla el día 20 de mayo, tiempo que será desde que pasa por la mañana por el vertical hasta que se pone por la tarde.

$$H_o + H_1 = 123^\circ\ 9'\ 21'' = 8h.\ 12m.\ 37s.$$

## CÁLCULO DE LA CULMINACIÓN, DE LA HORA Y AZIMUT DE ORTO Y OCASO DEL SOL. TIEMPO DE PERMANENCIA DEL ASTRO SOBRE EL HORIZONTE. 2º Procedimiento

Todos los cálculos anteriores se han realizado sobre la esfera celeste considerando la tierra como su centro. Los cálculos que se exponen en este apartado se realizarán sobre la esfera terrestre, considerando a ésta como una esfera perfecta y la distancia sol-tierra lo suficientemente lejana como para considerar paralelos los rayos de sol que inciden sobre la superficie de la tierra. Figura 21.

Como plano vertical de proyección se elegirá el plano determinado por el eje de la tierra y el sol, considerando a éste puntual.

El centro de la esfera terrestre se hará coincidir con un punto de la línea de tierra, punto O'O.

El plano de la eclíptica cortará al plano vertical de proyección en la línea de tierra y coincidirá con él en los solsticios.

El plano del ecuador cortará al plano vertical de proyección de tal forma que su traza vertical forme con la línea de tierra un ángulo igual a la declinación del día para el cual se estén realizando los cálculos. En los solsticios el plano del ecuador es proyectante vertical y en los equinocios contiene a la línea de tierra.

El horizonte de un lugar es el plano tangente a la esfera terrestre en el punto que representa al lugar. Dicho plano se trazará como un plano perpendicular al vector de posición del punto que representa al lugar en estudio, recta OL.

El plano de perfil por O'O determina sobre la esfera la divisoria dia-noche, divisoria de sombra propia estando iluminada la esfera desde el sol, un punto de la línea de tierra situado a la izquierda del dibujo.

En la figura 21 se han calculado la altura de culminación y la hora de orto y ocaso y el azimut del sol en el horizonte de Sevilla para el día de solsticio de invierno ($\varphi = 37°23'$ y $\delta = -23°27'$).

La situación de Sevilla sobre la tierra se hará mediante su radio vector de posición que ha de formar con el ecuador un ángulo $\varphi$ igual a la latitud del lugar.

Culminación del sol: se llama culminación de un astro a la altura máxima que alcanza sobre el horizonte. Ésta tiene lugar cuando el astro se sitúa sobre el meridiano del lugar. En el caso del sol, ésto sucede a las XII de tiempo solar verdadero.

En la figura 21, al considerar el meridiano del lugar sobre el plano vertical de proyección, éste contiene al sol en su culminación y el ángulo $h_c$, altura de culminación, se obtiene trazando por L' el horizonte (plano proyectante vertical cuya traza vertical sea tangente a la esfera en el punto L') y el rayo solar correspondiente, recta SL'. Siendo $h_c$ el ángulo comprendido entre la traza vertical del plano del horizonte y el rayo solar.

Del triángulo OL' m se deduce que $h_c$ vale:

$$h_c = 90 - (\delta + \varphi) = 29^\circ\ 10'$$

Horas de orto y ocaso: el orto y el ocaso tienen lugar cuando la altura del astro es 0, es decir el astro está sobre el plano del horizonte.

En el caso de ortos y ocasos del sol, cuando se sitúa sobre el horizonte, sus rayos son paralelos a éste.

Si giramos la tierra alrededor de su eje (figura 21) un ángulo tal que el punto L' pase a situarse sobre la divisoria día-noche, punto (L'), desde (L') se verá el sol sobre el horizonte (obsérvese que el plano del horizonte en el punto (L') ha de ser paralelo a la línea de tierra por ser el vector de posición una recta de perfil y por lo tanto paralelo a los rayos solares), y el ángulo girado es el ángulo horario del sol en el orto y ocaso.

Para medir el ángulo horario del sol se abate sobre el plano vertical de proyección el círculo paralelo que recorre el punto L' en su giro alrededor del eje, y junto con el círculo se abate el punto (L') obteniéndose los puntos $((L'_1))$ y $((L'_2))$. El ángulo $H_1$, L'n $((L'_1))$ y el $H_2$ L'n $((L'_2))$ expresados en horas, determinan la hora de ocaso y orto del sol en tiempo verdadero respectivamente:

Orto = $12 - H_2$ ; Ocaso = $H_1$

El valor de H expresado en horas es:

$$H = 70^\circ\ 28'\ 58''/15 = 4h.\ 41m.\ 56s.$$

Orto 12 - 4h. 41m. 56s. = 7h. 18m. 4s.

Ocaso = 4h. 41m. 56s.

De tiempo verdadero local.

Tiempo que está el sol sobre el horizonte: el tiempo que está un astro sobre el horizonte es el que transcurre desde su orto al ocaso, es decir el doble del ángulo horario calculado. En el caso de la figura 21 se deduce:

Tiempo que está el sol sobre el horizonte = 2 H = $H_1$ + $H_2$

70° 28' 58" x 2 = 140° 57' 56";

140° 57' 56" /15 = 9h. 23m. 52s.

que es el tiempo que está el sol sobre el horizonte de Sevilla el día de solsticio de invierno.

Azimut de orto y ocaso: por definición, el azimut de un astro es el ángulo que forma el vertical del astro con el meridiano del lugar, y este ángulo se puede medir sobre el horizonte entre las trazas de ambos círculos con él. Al tratarse del azimut de orto y ocaso habrá que situarse en la divisoria noche-día.

En la figura 21 se ha girado la tierra hasta que l' se sitúa sobre dicha línea divisoria, punto (L') y por (L') trazamos el meridiano del lugar y el vertical del astro.

El meridiano del lugar es el plano definido por el punto (L') y el eje de la tierra y el vertical del astro es el plano definido por el sol y la vertical del lugar, vector de posición O (L').

En la figura no se han hallado las trazas de ambos planos con los de proyección, pues sólo nos interesan sus intersecciones con el plano del horizonte.

Tracemos primeramente el plano del horizonte con la condición de ser perpendicular a O (L') por el punto (L') (L) y por lo tanto tangente a la esfera, plano H'H.

La intersección de H'H que es paralelo a la línea de tierra, por estar (L') (L) sobre el meridiano de perfil, con el vertical del astro, plano que contiene a la línea de tierra, ha de ser una recta paralela a la línea de tierra y ha de pasar por (L') (L) por ser punto común a ambos planos.

La intersección del plano meridiano del lugar con el plano del horizonte H'H ha de pasar igualmente por (L') (L) por la misma razón y por el punto q'q por ser también común a ambos planos, meridiano y horizonte. Uniendo q con (L) se obtiene la proyección horizontal de dicha intersección.

Las dos proyecciones horizontales de las intersecciones halladas, determinan el ángulo $a_1$, proyección horizontal del azimut de ocaso. Abatiendo el plano del horizonte sobre el plano horizontal, se obtiene el ángulo a, verdadera magnitud del azimut de ocaso del sol.

$$a = 59^\circ\ 43'\ 23''$$

Si el azimut lo medimos desde el meridiano del lugar y en sentido directo, el azimut de ocaso sería:

$$a = 59^\circ\ 43'\ 23''$$

y el de orto:

$$a = 360^\circ - 59^\circ\ 43'\ 23'' = 300^\circ\ 16'\ 37''$$

En la figura 22 se han realizado los mismos cálculos para el solsticio de verano $\delta = 23^\circ\ 27'$, obteniéndose los siguientes resultados:

$h_c = 76^\circ\ 4'$ $H = 109^\circ\ 31'\ 02''$

Ocaso= 7h. 18m. 4s.

Orto= 4h. 41m. 56s.

Tiempo sobre el horizonte = 14h. 36m. 8s.

Azimut ocaso = $120^\circ\ 16'\ 37''$

Azimut orto = $239^\circ\ 43'\ 23''$

## NOTAS AL CAPÍTULO III

1.- Almagesto 5,2.

2.- De Revolutionibus 3,4 y 5,2.

3.- J. Sansó, Instrumentos Astronómicos en la España medieval. p.44. Santa Cruz de Tenerife, 1985.

4.- I. Bernard Cohen en Investigación y Ciencia, "El descubrimiento Newtoniano de la Gravitación". p.p. 111-120, la cita en p. 114. Mayo, 1981.

5.- M = nt siendo n el movimiento medio y t el tiempo. En caso que el origen de tiempos no se encuentre en el perigeo M = n (t-T), siendo T el tiempo transcurrido antes del paso por el perigeo.

6.- J.J. Orus Navarro, Apuntes de Astronomía. pp. 105-107. Barcelona, 1966.

7.- La anomalía excéntrica es el ángulo formado por el eje mayor de la órbita y el radio vector que une el centro de ésta con la proyección, normal a dicho eje, del planeta sobre una circunferencia concéntrica a la órbita de radio el semieje mayor.

8.- La excentricidad disminuye a razón de 0,000042° por siglo. Realmente se trata de una variación periódica de unos 24.000 años. J.J. Orus Navarro, "Apuntes de Astronomía". p. 118. Barcelona,1966.

9.- Valor tomado del Almanaque Naútico, 1984. Instituto y Observatorio de la Marina. San Fernando.

10.- Es conveniente dar los valores a c por ser la magnitud más pequeña y a partir del valor de c calcular el de a. Los valores recomendados para c son: 1'0, 1'5, 2'0 y 2'5 m.m.

11.- La regla que da el rey Alfonso es como sigue:
"Et saca el logar del alaux (apogeo) del zodiaco en tu tiempo, et faz y una sennal, et llegaras al centro del cerco de los signos con una linna que no sea fonda á la sennal sobredicha. Et parte aquella linna que es del centro al cerco mas cerca de ella con XXXII partes eguales et pon el centro del compas sobre la sennal

de la parte primera contra el centro del cerco de los signos et abre el compas tanto quanto XXX partes de aquellas sobredichas, et faz un cerco que caerá so los cercos que fezistes en antes et será el cerco deferante del sol, que quiere tanto dezir cuemo el cerco que trae el cuerpo del sol". "El cerco de los meses farás en esta guisa. Faz otro cerco que sea acerca del deferant del sol que te mostramos fazer. Et pártelos amos el deferat y este otro por CCC et LXV partes, que son los días dell anno del sol. Et dessí faz otro cerco so él los nombres de los meses... Et despues contarás del punto que es en el logar del ayuntamiento del cerco deferant con el diámetro que desiende del colgadero XV partes de las CCC et LXV sobredichas et començarlos as a contar contra oriente dell ayuntamiento sobredicho. Et en aquel logar se acabar el quento destas quizes partes sobredichas, farás el començamiento del mes de deziembre et començarás y a contar los meses contra la parte de ponent et darás a deziembre XXXI... a yenero XXXI partes et a hebrero XXVIII..."
Salvador García Franco, Catálogo crítico de Astrolabios existentes en España. p 145. Madrid,1945.

12.- La ecuación del tiempo se obtiene como la diferencia entre las ascensiones rectas del sol verdadero y el sol medio, expresadas en horas y se encuentran en las efemérides publicadas por los observatorios astronómicos.

13.- El cambio de horas por decreto tiene lugar el primer domingo después de cada equinocio.

14.- Este valor no es fijo debido principalmente a la precesión y nutación, su variación es periódica y muy lenta por lo que se puede para periodos de tiempo pequeños, considerarse constante. Según Newcomb el valor de $\Delta$ para un año t viene dado por la expresión: 23°27'8,26" - 0,4684" (t-1900).

15.- Es debido a que la traza del plano perpendicular a la eclíptica que contiene al eje de la tierra, no coincide con el eje mayor de la órbita.

16.- $\lambda_p$ no es constante, el valor actual es de 11° y decrece a razón de 0'48" por año. Para nuestros cálculos como consideramos años de 365 días y el comienzo de cada año lo situamos a las 0h. del día 1 de enero, el valor de $\lambda_p$ que deberemos tomar es de 9°.

17.- Obsérvese que en la órbita de excentricidad 0,6 con un año de

365 días y con el solsticio de verano el día 22 de junio, el sol alcanza el equinocio de primavera el día 3 de febrero.

18.- Esta fórmula se sustituye a veces por: sen $\delta$ = 0,4 sen m (360/ /365), siendo m el día transcurrido desde el equinocio de primavera. Con dicha sustitución se puede cometer error hasta de un día, pues se está sustituyendo los valores de la anomalía verdadera por los de la anomalía media.

19.- Despejando cos H de la fórmula sen h = cos $\varphi \cdot \cos \delta \cdot$ cos H + sen$\varphi \cdot$ $\cdot$sen$\delta$ y haciendo h = 0 se obtiene el valor de H: cos H = $-\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \mathrm{tg}\,\delta$ De sen $\delta$ = $-\cos\varphi \cdot \cos$ h cos a + sen $\varphi \cdot$sen h, haciendo h = 0, se obtiene el valor del azimut cos a = $-(\mathrm{sen}\,\delta / \mathrm{sen}\,\varphi)$.

20.- El tiempo que permanece el sol sobre el horizonte es el doble del ángulo horario, por tanto t = $2 \cdot \mathrm{arc\,cos}\,(-\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \mathrm{tg}\,\delta)$.

21.- De la fórmula de cambios de coordenadas sen h = cos $\varphi \cdot \cos \delta$ + sen $\varphi$ sen $\delta$ , se deduce que: 90 - h = ($\varphi - \delta$) de donde h = 90+ + $\delta - \varphi$.

22.- De cos H$\cdot$cos $\varphi$ = sen h - sen$\varphi \cdot$ sen $\delta$ se puede despejar cos H y sustituyendo el valor obtenido en la expresión:

$$\cos H \cos \delta = \cos a \cdot \cos h \cdot \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} h$$

y despejando cos a, se obtiene el valor del azimut correspondiente:

$$\cos a = \frac{\cos \delta \cdot \operatorname{sen} h - \cos \delta \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \delta - \cos^2 \varphi \ \operatorname{sen} h}{\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos h}$$

23.- Algebraicamente este problema se soluciona dividiendo miembro a miembro las fórmulas de transformación de coordenadas:

$$\cos h \cdot \cos a = \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \cos \delta$$

$$\cos h \cdot \operatorname{sen} a = \cos \delta \cdot \operatorname{sen} H$$

se obtiene:

$$\cot a \cdot \operatorname{sen} H = \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

y haciendo:

$$\cot M = \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{tg} a$$

se deduce la expresión:

$$\cos (H+M) = \cot \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta \ \cos M$$

con la cual se puede calcular el horario del sol H cuando se encuentra sobre el vertical de azimut a.

# CAPITULO IV.- CALCULO MECANICO DE COORDENADAS: COMPUTADORES ANALOGICOS

En el capítulo III se ha desarrollado un cálculo gráfico astronómico. En el presente se describen una serie de instrumentos esféricos que, a modo de computadores analógicos calculan la posición del sol sobre la bóveda celeste.

Estos ingenios que como instrumentos de observación no son de precisión, tienen un gran valor didáctico porque son una representación espacial del sistema sol-tierra y de sus movimientos.

De todos los instrumentos esféricos de observación existentes (1), describiremos sólo aquellos que contribuyen a explicar el funcionamiento del expuesto en último lugar: el Heliómetro de posición.

El más simple de estos computadores es el Anillo Astronómico, fundamento de los que describiremos a continuación.

El segundo es una modificación, original del autor, de un modelo de Brújula Solar; dicho instrumento es más completo que el anterior, pues en él se introduce el plano de la eclíptica y se materializa el sistema sol-tierra.

Por último se describe un instrumento ideado por el autor, al que le llamo Heliómetro de Posición. Este instrumento posee un doble sistema de referencia y sus giros y movimientos materializan el espacio, sistematizándolo de la misma forma que se hizo en el capítulo III con los cálculos gráficos.

## ANILLO ASTRONÓMICO

El Anillo Astronómico es un instrumento usado como reloj de sol portátil. "Este reloj, es el mejor y más cierto de todos los portátiles" (2). Entre otros, Tosca y Pluche (3) describen este instrumento usado en Astronomía. (Figuras 1 y 2).

Consiste en dos anillos concéntricos y ortogonales. Uno de ellos, el meridiano (figura 3), tiene su eje materializado mediante una ranura perpendicular al plano del otro anillo.

Está dividido en 90° desde el encuentro con el otro hasta el extremo del eje.

El otro círculo, el ecuatorial, está dividido en 24 partes que se corresponden con las 24 horas del día, teniendo el origen de las divisiones en el punto de intersección de ambos anillos (figura 4).

El eje materializado por la ranura puede girar sobre sí mismo. Tiene superpuesta una corredera con un orificio concéntrico a él. La corredera se mueve libremente a lo largo de toda la ranura (figura 5).

En el plano del eje están señalados los días del año, de tal manera que su longitud sea igual a:

$$l = R \cdot tg\,\delta$$

siendo $\delta$ la declinación correspondiente al día señalado, R el radio - del radio del anillo y l la distancia al centro de la señal correspondiente al día marcado.

Gráficamente se obtienen las mismas marcas para los días trazando, desde el extremo del radio perpendicular al eje, una recta que forme con él un ángulo igual a la declinación solar. La intersección de dicha recta con el eje determina la marca correspondiente al día (4).

Como la variación de la declinación solar con respecto al tiempo se corresponde con una ley sinusoidal, las divisiones en días serán más densas en los extremos del eje que en el centro, siempre que se tomen períodos de tiempos iguales. Divisiones que se suelen hacer de la forma expuesta, para facilitar la interpolación.

El funcionamiento del Anillo Astronómico es el siguiente: se dispone la corredera de forma que el centro del orificio se sitúe a la altura de la fecha de observación; de esta manera la línea teórica que une dicho centro con el círculo ecuatorial de las horas, forma con su plano un ángulo igual a la declinación solar del día de observación.

A continuación se suspende el Anillo Astronómico de forma que su eje forme con el horizonte un ángulo igual a la latitud del lugar. Para conseguir la inclinación deseada basta con suspenderlo por el punto de la escala de latitudes correspondiente en valor con el de la latitud del lugar.

Dispuesto el Anillo Astronómico de esta forma, se gira alrededor del punto de suspensión hasta que el rayo de sol que pase por el orificio de la corredera del eje se proyecte sobre el círculo de las horas (figura 6).

Conseguida esta situación, el círculo vertical se encuentra orientado con el meridiano del lugar; el eje, paralelo al eje de la tierra; y el círculo ecuatorial, paralelo al ecuador.

La luz solar que pasa por el orificio y se proyecta sobre el anillo ecuatorial marca la hora solar local.

La intersección del plano del círculo vertical con el plano horizontal, determina la meridiana.

Este instrumento puede tener una segunda lectura, pero para ello han de realizarse las siguientes operaciones:

1º. Se divide el círculo ecuatorial del Anillo en 360° comenzando por el punto de las XII del mediodía y en el mismo sentido que las horas.

2º. Por detrás del plano del eje se divide la guía de la corredera en partes proporcionales a la tg $\delta$ , dando a $\delta$ valores comprendidos entre -23°27' y +23°27'. De esta forma se obtienen unas divisiones que se corresponden con la declinación solar.

Estas divisiones en grados son prácticamente uniformes, puesto que las diferencias entre los incrementos de tg$\delta$ para valores comprendidos entre 23°-22° y 1°-0°, son menores que 0'003 con lo que la interpolación es prácticamente lineal.

Realizadas las anteriores modificaciones, se procede a orientar el Anillo Astronómico, determinando con él la meridiana, y se fija en dicha orientación.

En esta posición se pueden calcular las coordenadas solares en cualquier día del año a las horas de sol, con sólo mover la corredera a lo largo del eje, hasta conseguir que el rayo de sol que pase por el orificio de ésta, se proyecte sobre el círculo ecuatorial. En la guía de la corredera se puede leer la declinación solar correspondiente, y, sobre el círculo ecuatorial, el ángulo horario local.

Se ha construído la maqueta según idea básica de Mario Salomone Monroe (5) (figura 7).

El instrumento consta de una serie de círculos homólogos a los círculos celestes: Meridiano, Horizonte, Ecuador y Eclíptica (6), (figura 8).

El horizonte, que sirve de base, puede girar libremente sobre su peana. Se ha de conseguir su horizontalidad con un nivel de burbuja.

Perpendicular al horizonte se mantiene el círculo meridiano mediante un círculo guía que le permite girar sobre sí mismo libremente.

El círculo guía es solidario al círculo horizontal y posee en su parte superior una regla que se mantiene siempre en posición horizontal.

El meridiano, en su borde exterior, está dividido en grados de 0° a 90° (figura 9), para marcar la latitud del lugar con un índice situado en el vértice superior del diámetro perpendicular.

En su borde interior, el meridiano lleva otras escalas en grados, de -23°27' a +23°27', para leer la declinación. El cero de ambas escalas coincide en el extremo del mismo diámetro que la escala de declinaciones.

El círculo ecuatorial es solidario y perpendicular al meridiano (figura 10); su plano coincide con los ceros de las escalas de latitudes y declinaciones. Está dividido en 24 partes que se corresponden con las 24 horas del día. Esta división está marcada en ambas caras del círculo ecuatorial.

El círculo de la eclíptica, concéntrico a los anteriores (figura 11), puede girar libremente alrededor del eje que representa al eje de la tierra. Dicho eje está fijado al círculo meridiano en los extremos del diámetro que contiene la división 90° de la escala de latitudes.

El plano del círculo de la eclíptica forma con el eje un ángulo de 23°27' y como éste es perpendicular al plano del ecuador, el círculo ecuatorial y la eclíptica de la Brújula Solar forman entre sí el mismo ángulo de 23°27'.

El círculo de la eclíptica está formado a su vez por un círculo solidario al eje y una corona circular que gira libremente en el mismo plano.

En el plano de la eclíptica se marcan en la corona, las longitudes solares (7) materializadas por los días del año, de tal forma que la línea de equinocios con sus nodos ascendente y descendente, sea la intersección del plano del círculo ecuatorial con el de la eclíptica. Así, la línea de solsticios, perpendicular a la de equinocios, es la línea de máxima pendiente de la eclíptica con respecto al plano del ecuador, por lo que el ángulo que forma con éste es de 23°27'.

En otra corona se ha marcado el zodiaco con sus correspondientes signos, y también se podría marcar en otra corona -en esta maqueta no se ha hecho- el eje de los ápsides y las longitudes solares en grados.

En la corona móvil de la eclíptica están colocadas dos pínulas diametralmente opuestas. Una de ellas, la que representa al sol, posee un taladro. La otra, que representa a la tierra, hace las veces de pantalla y lleva marcada una cruz, coincidente con el centro del orificio de tal forma que la línea que une ambos puntos es paralela al plano de la eclíptica.

En este aparato se considera que la tierra está en el centro y es el sol el que gira en sentido directo alrededor de ella. La pantalla que representa a la tierra debería estar en el centro de la eclíptica, pero para comodidad del funcionamiento se coloca en el extremo opuesto del diámetro en donde se sitúa la pínula que representa al sol.

La pínula solar tiene dos índices opuestos, uno en cada cara; situados en su eje de simetría, sirven para leer la longitud solar y la declinación.

Las principales modificaciones que se han introducido en el modelo de M. Salomone son las siguientes:

La Brújula Solar de M. Salomone está suspendida de su soporte, (ver figura 7) y es la gravedad la que la mantiene en posición vertical. El círculo ecuatorial no está materializado y posee dos relojes ecuatoriales, uno norte y otro sur.

En la maqueta descrita en este capítulo, el círculo meridiano consigue su verticalidad al nivelar la peana coplanaria del círculo horizontal.

El círculo ecuatorial está materializado y dividido en horas en ambas caras, por lo tanto se han suprimido los relojes ecuatoriales ya innecesarios.

Por último, las pínulas que coronan la Brújula Solar de M. Salomone, han sido sustituídas por una regla horizontal.

Funcionamiento: El manejo de la Brújula Solar es como sigue: una vez nivelada la peana y conseguida la perpendicularidad del meridiano, se gira éste alrededor de su eje horizontal, hasta hacer coincidir el índice situado en la parte superior del soporte, con la latitud del lugar, marcada en la escala de latitudes. Realizada esta operación el círculo ecuatorial forma con el horizonte un ángulo igual a la latitud del punto de observación.

El paso siguiente es colocar el índice de la pínula solar girando la corona de la eclíptica, en la marca correspondiente al día de observación.

A continuación y con un doble movimiento, girando todo el aparato alrededor del eje perpendicular al horizonte, y la eclíptica con la corona alrededor del eje de la Brújula Solar, se busca que el rayo de sol que penetre por el orificio de la pínula solar se proyecte sobre el centro de la pínula que representa a la tierra.

En este instante todos los elementos de la Brújula Solar están situados paralelos a sus homólogos celestes y para seguir el movimiento del sol ya sólo es necesario girar la eclíptica sobre su eje, ya que su montura es similar a la montura ecuatorial de los telescopios.

Situada la Brújula Solar en estación, se pueden realizar las siguientes mediciones:

a.- Coordenadas solares: la brújula solar nos determina las coordenadas ecuatoriales del sol. El ángulo horario lo marca la sombra arrojada del eje del instrumento sobre el círculo ecuatorial expresado por la hora solar local. La declinación se obtiene girando el plano de la eclíptica hasta situar la pínula que representa al sol, en el plano meridiano. El índice posterior de la pínula señalará sobre dicho círculo y en la escala de declinaciones que hay marcada en el borde interior, la declinación media correspondiente a dicho día, considerando ésta positiva sí la pínula está por encima del ecuador y negativa en el caso contrario.

b.- Determinación de la meridiana: la sombra de la regla horizontal, proyectada sobre el plano del horizonte marca la dirección de la meridiana, norte y sur geográficos, y la dirección del eje de la brújula señala el polo norte celeste.

## HELIÓMETRO DE POSICIÓN

Este instrumento está basado en el Torquetum (figura 12), instrumento esférico de observación que J. Vernet (8) describe así: "El Torquetum (a veces llamado Turquetum y de aquí la falsa etimología que hace derivar su origen de Turquía), es un aparato tridimensional, como el astrolabon descrito por Tolomeo (Almagesto 1,12), inventado por el sevillano Ŷābir b. Alfaḥ, alrededor de 1150 y cuyo uso, a partir del siglo XIV, permite representar en el espacio y para una latitud dada, los planos fundamentales de la astronomía esférica sin necesidad de ningún tipo de proyección. La configuración primitiva del mismo fue transformándose de modo muy notorio, razón por la cual no coinciden completamente todas las descripciones escritas, iconográficas o ejemplares que de él conservamos. Sustancialmente, aunque no siempre, consta de: 1) una plataforma horizontal que debidamente orientada, permite medir los azimuts mediante un círculo dibujado y graduado en la misma. Sobre una de sus aristas se articula 2) otra plataforma -que forma con la primera un ángulo igual a la colatitud del lugar en que se utiliza- que representa el plano del ecuador y contiene la circunferencia graduada (basilica) que representa a éste; 3) formando un ángulo de 23°30' con la anterior se monta la tercera, que representa el plano de la eclíptica que contiene la circunferencia correspondiente, dividida en signos y grados; 4) una armella o disco (crista) montado a la manera perpendicular a este último plano. De los extremos de la alidada de ésta pende libremente un semicírculo (semisa) de cuyo centro 5) cuelga una plomada que permite determinar la altura del astro observado".

A diferencia con el Torquetum, en el Heliómetro de Posición (figura 13), todos los círculos son concéntricos con lo cual los giros de sus coronas son idénticos a los realizados en el cálculo gráfico del capítulo III, además, en él está materializado el sistema sol-tierra de la misma forma que está en la Brújula Solar, con lo cual el Heliómetro de Posición se orienta con el sol sin necesidad de brújula magnética, con la ventaja de hacerlo con el norte geográfico.

En el Heliómetro de Posición se encuentran patentes dos sistemas de referencia: ecuador y horizonte, de aquí su mayor operatividad con respecto a la Brújula Solar.

Una vez orientado con el sol, todos sus círculos se disponen paralelos a sus homólogos celestes.

Al usarse como Brújula Solar se obtienen las coordenadas del sol en los dos sistemas: coordenadas ecuatoriales y horizontales.

Un segundo uso también derivado de su doble sistema de referencia, es el de computador analógico. Se pueden obtener las coordenadas horizontales, altura y azimut, al introducir las coordenadas horarias, ángulo horario y declinación en el otro sistema de referencia, resolviendo de una forma mecánica el problema de cambio de coordenadas derivado del triángulo esférico de posición del astro. Es decir, se pueden obtener los ángulos que forman los rayos solares con el plano horizontal y vertical de proyección, horizonte y meridiano, al introducir como datos el día del año y la hora, que en definitiva son los datos que nos interesan para resolver los problemas de asoleo.

También se pueden calcular horas de orto y ocaso con sólo llevar en el vertical del astro a la posición 0° y leer sobre el ecuador la hora que coincide con el meridiano del sol.

Descripción (figura 14): todo el aparato está montado sobre el círculo meridiano y éste a su vez, en el círculo guía.

El círculo guía es perpendicular al horizonte y gira alrededor de su diámetro perpendicular al plano de áquel, arrastrando con su movimiento al círculo meridiano.

En el círculo guía está la escala de latitudes en grados, de 0° a 90° con origen en el extremo del diámetro horizontal. También posee una regla horizontal para determinar la meridiana.

El círculo meridiano al estar montado libremente sobre el círculo guía, puede girar alrededor del eje perpendicular a su plano. En el círculo meridiano se inserta el eje de la brújula, eje de la tierra, y coincidente con el polo norte del eje, un índice para marcar la latitud del lugar sobre la escala de latitudes del círculo guía. (Figura 15).

El círculo ecuatorial es solidario al meridiano y perpendicular al eje del aparato. Está dividido en veinticuatro partes correspondientes a las 24 horas del día.

El origen de las divisiones coincide con el diámetro común con el meridiano y sólo se han marcado en la cara norte del círculo, pues al introducir el meridiano del astro, la lectura de la hora se hace con éste y no con la sombra del eje, con lo que dicha lectura se puede realizar por la cara norte, aunque el sol esté en el hemisferio sur (figura 16).

El círculo del horizonte, solidario al círculo guía, está dividido en 360 partes, constituyendo la escala para medir los azimuts, (figura 17).

El plano de la eclíptica está representado por dos coronas concéntricas (figura 18) y coplanarias, una fija al resto del aparato mediante un círculo solidario al eje del Heliómetro, eje de la tierra, que la mantiene formando un ángulo de 23°27' con el plano ecuatorial. Esta corona está dividida en 365 partes proporcionales a la elongación solar de cada día del año (9). El eje de solsticio coincide con el plano del círculo que la mantiene y forma con el plano del ecuador un ángulo constante de 23°27'. El eje de equinocios es perpendicular al anterior y coincide con el plano del ecuador.

La segunda corona gira libremente en el plano de la eclíptica y lleva solidarias y perpendiculares a su plano, dos pínulas; una horadada que representa al sol y la otra, diametralmente opuesta, a modo de pantalla, que representa a la tierra. Esta pantalla lleva marcado su centro, que coincide en altura con el centro del orificio de la pínula solar.

La pínula solar por su cara externa lleva un índice para marcar sobre la escala de días, el día de la observación.

Todos los elementos descritos hasta este punto son muy similares a los que posee la Brújula Solar. La diferencia fundamental estriba en la forma de estar engarzada la eclíptica en el resto del aparato. Al estar sujeta por medio de un círculo que la mantiene por los extremos del eje de solsticios, permite eliminar el plano interior a las coronas circulares empleadas, con lo cual en dicho espacio se puede insertar el segundo sistema de referencia.

El segundo sistema de referencia (figura 19) constituído por un círculo y dos semicírculos, está insertado en la corona interna de la eclíptica mediante una articulación Cardan similar a la empleada por los Palinuros (11) para mantener horizontal su plano del horizonte.

El círculo que lleva los dos ejes de la articulación Cardan lleva solidario uno de los semicírculos. Dicho semicírculo está insertado en su cara sur, en los extremos del diámetro de uno de los ejes -el eje que articula el sistema de referencia a la eclíptica en el diámetro determinado por las pínulas-. Este semicírculo, que por su peso se mantiene en un plano vertical, representa al vertical del astro y hace que el otro eje de la articulación esté siempre en posición horizontal. Lleva una graduación de 0° a 90° para medir la altura del sol. Gira alrededor del otro eje de la articulación Cardan -eje perpendicular a su plano-, acompañando al diámetro sol-tierra de la eclíptica.

El otro semicírculo insertado en el eje horizontal de la articulación, gira libremente y por su peso está situado en un plano vertical. Como está engarzado en el eje horizontal de la articulación Cardan, el único movimiento que realiza es alrededor de su eje perpendicular al horizonte, eje Zenit-Nadir, por lo que sirve de índice para leer las alturas sobre el vertical del astro.

El punto más bajo de este círculo está marcado, así como el punto más alto del círculo guía. Estos dos puntos marcan el eje Zenit-Nadir y colocándose en el extremo de dicho eje, el vertical del astro se ve de canto con respecto al horizonte marcando el azimut del sol sobre la escala de azimuts representada en el círculo del horizonte.

El eje situado en el plano de la eclíptica, en el diámetro marcado por las pínulas, se prolonga por el extremo correspondiente al sol para soportar el meridiano del astro (figura 20).

El meridiano del astro está representado sólo por un arco de círculo de una amplitud aproximada de 50°. Puede girar alrededor del eje que lo mantiene y lleva la escala de declinaciones de -23°27' a +23°27', con el cero coincidente con el plano de la eclíptica.

Funcionamiento: Previamente se girará la corona móvil de la eclíptica hasta hacer coincidir el índice de la pínula solar con el día de la fecha de observación. A continuación se gira todo el sistema sol-tierra hasta hacer coincidir su eje con el plano del círculo meridiano, y en esta posición se gira el arco de meridiano del astro hasta hacer coincidir su plano con el plano del meridiano del lugar. En este momento, prolongando idealmente dicho arco, pasa por los extremos del eje del Heliómetro y seguirá pasando por él en cualquier posición que adopte posteriormente el plano de la eclíptica. Esta operación habrá que realizarla cada vez que situemos la pínula solar en una nueva fecha.

A continuación se girará el círculo meridiano hasta que su índice marque sobre la escala de latitudes el ángulo correspondiente a la latitud del lugar.

El uso como Brújula Solar es similar al explicado para aquel aparato. Una vez realizadas las operaciones previas y nivelada la base del aparato, mediante un doble giro alrededor de su eje vertical y alrededor del eje del Heliómetro, se conseguirá que el rayo de sol que pase por el orificio de la pínula solar incida en el centro marcado en la pínula que representa a la tierra. En este momento todos los elementos del Heliómetro están orientados.

En la intersección del meridiano del astro con el círculo ecuatorial podemos leer sobre el meridiano, la declinación correspondiente al día, y sobre el ecuador, el ángulo horario expresado en horas y minutos.

Al prescindir de la sombra del eje para la lectura de la hora tiene la ventaja, como ya habíamos indicado, de que la lectura se hace siempre por la cara norte.

La sombra de la regla del círculo guía determina sobre el plano horizontal la dirección de la meridiana.

La intersección de los dos círculos verticales del interior de la eclíptica dan la lectura de la altura del sol en grados y la intersección del vertical del astro con el círculo horizontal expresa el azimut solar. Esta lectura se hará colocándose en el extremo superior del eje Zenit-Nadir.

Uso como computador analógico: Sin la presencia del sol, el Heliómetro de posición se puede usar como regla de cálculo, pudiéndose realizar con él las siguientes operaciones:

1.- Cálculo de declinaciones.
    Situando la pínula solar en el día del año, se puede leer sobre el meridiano del astro convenientemente orientado, la declinación correspondiente a dicho día en su intersección con el círculo ecuatorial.

2.- Cálculo de coordenadas horizontales.
    Para calcular la altura y azimut del sol, a una hora determinada de un día, se sitúa la pínula solar en la división correspondiente al día y se gira la eclíptica alrededor del eje hasta que el meridiano del astro coincida con la hora pedida. En el vertical del astro y sobre el horizonte se pueden leer los ángulos de altura y azimut correspondientes de la forma indicada.

3.- Cálculo de la hora de orto y ocaso.

Para determinar la hora de orto y ocaso del sol, se coloca la pínula solar sobre el día determinado y se gira la eclíptica a derecha e izquierda hasta que en el vertical del astro se lea 0°, que se corresponderá con la altura cero del sol sobre el horizonte. En estos puntos se lee la hora que señala el meridiano del astro sobre el plano del ecuador.

Todas las horas medidas son las referidas al sol real. Para conocer los datos en tiempo oficial habrá que hacer las correspondientes transformaciones.

## NOTAS AL CAPÍTULO IV

1.- Globo celeste, astrolabio esférico, esfera armillar, Torquetum, etc., J. Sansó, "Instrumentos esféricos" en Instrumentos astronómicos en la España medieval. pp. 17 a 23. Santa Cruz de Tenerife, 1985.

2.- V. Tosca, Compendio Matemático. c.I. del libro V. Tomo IX. p 200. Madrid, 1727.

3.- M. Pluche, Spectacle de la Naturaleza. Lamina 15. Madrid,1775.

4.- V. Tosca. o.c. lámina 15.

5.- M. Salomone Morrone, "Brújula solar" Astrum nº 49 pp. 20 a 22. Mayo 1983.

6.- J.M. Raya, "Módelo de Brújula Solar". V Jornadas Nacionales de

Astronomía. pp 197-198. Sevilla, 1983.

7.- La división se ha realizado según el procedimiento gráfico referido en el capítulo III. Ver figura 6 de dicho capítulo.

8.- J. Vernet, "El Torquetum". Instrumentos astronómicos de la España medieval. pp 54. Santa Cruz de Tenerife, 1985.

9.- Ver cita nº 7.

10.- Instrumentos de navegación tales como "The London Polaris y otros" usados durante los siglos XVIII y XIX, sobre la cubierta de los buques, para conocer el tiempo local. Colección del I. y O. de la Marina, San Fernando.

# CAPITULO V.- EL CUADRANTE SOLAR PLANO

La geometría del cuadrante solar plano está constituída básicamente por una serie de líneas producidas por la intersección del plano del cuadrante con los círculos horarios, meridianos celestes, y los conos de los rayos solares de vértices el extremo del gnomón y directrices los círculos celestes que recorren el sol medio cada día. (Figura 1). Las generatrices de los conos de luz -rayos solares- forman con el eje del mismo un ángulo igual al complementario de la declinación solar.

Cada hora está representada en el cuadrante por la intersección de él con el plano que contiene al meridiano celeste, por lo que las líneas horarias son rectas. Si el gnomón se dispone paralelo al eje de la tierra, su sombra coincidirá con las líneas horarias en las horas para las que fueron calculadas, porque en esta posición, el gnomón es paralelo al haz de plano que determinan los meridianos y por lo tanto coplanario con cada uno de ellos, por lo que su proyección coincidirá con la traza del meridiano sobre el cuadrante.

Todas las trazas, líneas horarias, serán concurrentes con el pie del gnomón, y el ángulo que forman entre ellas, función de la latitud del lugar.

Al ser el gnomón paralelo al eje de la tierra, es el eje de los conos de los rayos solares descritos, que serán de revolución porque los círculos celestes que recorre el sol medio son concéntricos con los polos, debido al movimiento diurno terrestre.

Las líneas diurnas son las intersecciones de los conos de luz descritos con el plano del cuadrante, por lo tanto serán cónicas, dependiendo su tipo de la posición del cuadrante, de la latitud y de la declinación solar considerada (1).

Cuadrante horizontal: Entendemos por cuadrante horizontal aquél que es paralelo al horizonte del lugar y su gnomón paralelo al eje de la tierra.

Para latitudes comprendidas entre los círculos polares, $66°23' > \varphi > -66°23'$ (figura 2), el horizonte corta siempre al cono de los rayos solares según dos generatrices y en consecuencia, todas las curvas diurnas son hipérbolas, excepto en los equinocios, que por estar el sol en el plano del ecuador terrestre, la declinación solar se anula y el ángulo en el vértice del cono toma el valor de 180° por lo que la superficie cónica se reduce a un plano y la línea diurna es una recta.

La sombra del extremo del gnomón recorre a lo largo del día una rama completa de la hipérbola. Si durante la noche proyectamos virtualmente el sol desde el extremo del gnomón, su proyección recorre la otra rama de la hipérbola.

Como en días equidistantes de los solsticios la declinación solar toma valores iguales, cada hipérbola representa una línea diurna correspondiente a cuatro días del año, es decir, la sombra del gnomón recorre cada rama de la hipérbola dos veces al año, en los días equidistantes de los solsticios, y la hipérbola correspondiente a los solsticios sólo será recorrida por la sombra una sola vez cada una de sus ramas, una en verano y la otra en invierno, debido a que por ser el valor de la declinación solar máximo en valor absoluto, en dichas fechas sólo se alcanza dicho valor dos veces al año.

La línea de equinocios es recorrida por la sombra del extremo gnomón durante el día, cuando el sol está en los equinocios y la proyección virtual del sol durante su recorrido por debajo del horizonte, también recorre la misma línea. La línea de equinocios se puede considerar como una recta doble -hipérbola degenerada-.

Como el valor de la declinación solar sólo se anula dos veces al año, la línea de equinocios sólo es recorrida dos veces, en el equinocio de primavera y en el de otoño.

Las generatrices del cono de luz que coinciden con el horizonte, señalan la posición del sol en el orto y el ocaso, puntos opuestos a los que se dirigirá la sombra del extremo del gnomón en dichas horas. Como dicho punto determina una dirección paralela al cuadrante, la sombra del extremo del gnomón en el orto y el ocaso, cortaría al plano de éste en su recta al infinito, determinando de esta forma las asístolas de la hipérbola, que en consecuencia han de ser paralelas a las generatrices horizontales.

Por otro lado, las líneas horarias de orto y ocaso también han de ser paralelas a las generatrices horizontales, puesto que a dichas horas han de coincidir en el mismo punto -punto del infinito-, la línea horaria, la línea diurna y la generatriz del cono de luz.

En el caso de latitud 0° (Figura 3), cuadrante situado en el ecuador, el gnomón es paralelo al plano del cuadrante y las curvas diurnas serán secciones planas de un cono de revolución producidas por planos paralelos a su eje, por lo que serán una familia de hipérbolas concéntricas y el cuadrante tendrá dos ejes de simetría, coincidentes con la línea diurna de equinocios y la horaria de las XII.

En los círculos polares, latitud $\pm$ 66° 23', el cono de los rayos solares en los solsticios es tangente al horizonte a lo largo de una generatriz (Figura 4).

En el hemisferio norte, el día del solsticio de verano, el sol permanece las venticuatro horas por encima del horizonte, situándose sobre él a media noche.

La curva diurna para ese día ha de ser una cónica con un sólo punto del infinito, y ésta ha de estar en la dirección N-S, marcada por el punto donde el sol toca al horizonte. La curva diurna será pues una parábola de eje la dirección de la meridiana.

Durante el solsticio de invierno, el sol permanece siempre por debajo del horizonte a excepción del medio día, hora en la que se sitúa en él. Si consideramos el orto y el ocaso como dos instantes sucesivos, la línea diurna será una recta en la dirección N-S que será recorrida instantáneamente dos veces, recta doble -parábola degenerada-.

En los demás días del año (figura 5), el cono de los rayos solares es cortado siempre según dos generatrices por el plano horizontal. En estos días las líneas diurnas serán hipérbolas de la misma naturaleza que las estudiadas anteriormente.

Para la latitud $\varphi = 90°$ (figura 6), cuadrante situado en el polo, el gnomón es perpendicular al plano del cuadrante y las líneas diurnas son secciones rectas de un cono de revolución -circunferencias concéntricas-.

El sol en el hemisferio N, permanece por encima del horizonte los días de primavera y verano, y en invierno y otoño por debajo; en consecuencia, sólo existirán las líneas diurnas para los días que el sol está por encima del horizonte. En los equinocios, el sol se encuentra justo en el horizonte y los rayos no inciden sobre el cuadrante, permaneciendo paralelos a él; en este caso, la línea diurna determinada es la recta del infinito del plano del cuadrante.

Para latitudes polares entre el polo y el círculo polar ($90° < \varphi < 66°23'$), la declinación solar alcanza el valor (figura 7):

$$\delta = (90 - \varphi)$$

cuatro veces al año en días equidistantes de los solsticios. En estos días el cono de los rayos solares es tangente en una generatriz al plano del horizonte. La curva diurna para los días equidistantes del solsticio de invierno, una recta doble, -parábola degenerada-.

Cuando la declinación solar toma los valores (figura 8):

$$\delta > (90 - \varphi)$$

El sol permanece constantemente por encima del horizonte para los valores positivos de $\delta$ y dicho plano sólo corta al cono de luz en el vértice. Las curvas diurnas son cónicas sin punto del infinito, elipses, cuyos ejes coinciden con la dirección de la meridiana y la E-W.

Para los valores negativos de $\delta$, el sol permanece constantemente por debajo del horizonte y no existen curvas diurnas reales.

En los demás casos, valores de la declinación (figura 9):

$$\delta < (90 - \varphi)$$

el cono de luz es cortado siempre por el horizonte en dos generatrices sea positiva o negativa la declinación. En este caso, las líneas diurnas son hipérbolas y para el caso límite de $\delta = 0$, equinocios de primavera y otoño, una recta doble -hipérbola degenerada- (2).

En resumen, los tipos de cónicas que constituyen las líneas diurnas en los cuadrantes horizontales planos son:

Para un lugar de la zona polar $90° > \varphi > 66°23'$:

* CIRCUNFERENCIAS: en los polos exclusivamente.
* ELIPSES: en los días en que el sol no se pone.
* PARÁBOLA: en los días en que el sol está sobre el horizonte en su culminación inferior.
* RECTA DOBLE (parábola degenerada): en los días en que el sol en su culminación superior está sobre el horizonte.
* HIPÉRBOLA: en los días en que el sol se pone.
* RECTA DOBLE (hipérbola degenerada): en los días de equinocios (en los polos es la recta del infinito del plano del cuadrante).

Para latitudes comprendidas entre ambos círculos polares ($66°23' < \varphi < -66°23'$):

* HIPÉRBOLA: todos los días excepto en los equinocios.
* RECTA DOBLE (hipérbola degenerada): en los equinocios.

Cuadrante vertical: Entendemos por cuadrante vertical aquél cuyo plano es perpendicular al horizonte del lugar.

El plano del cuadrante puede o no coincidir con el 1er vertical, plano perpendicular al meridiano del lugar y al horizonte. En el primer caso se denominan cuadrantes verticales orientados o simplemente, cuadrantes verticales. En el segundo caso, cuadrantes verticales declinantes. En ambos casos, si el gnomón es paralelo al eje de la tierra, su sombra coincidirá con las líneas horarias por las mismas razones expuestas en el caso de cuadrante horizontal.

Analicemos en primer lugar los cuadrantes verticales orientados, ya que las conclusiones del análisis se pueden hacer extensivas a los declinantes, como más tarde demostraremos.

El cuadrante vertical es muy semejante al horizontal; no obstante, presenta algunas diferencias que hay que tener en cuenta.

En primer lugar, los cuadrantes verticales reciben menos horas de sol que los horizontales, pues a la limitación de no estar iluminados por el sol cuando éste está por debajo del horizonte, hay que añadir la de no estar iluminados por el sol cuando éste sobrepasa su plano.

Para que el gnomón sea paralelo al eje de la tierra, se situará en un plano proyectante horizontal coincidente con el plano meridiano, y formando con el plano horizontal ángulo igual a la latitud del lugar, $\varphi$.

Las asíntotas y ejes de las parábolas en este tipo de cuadrantes, no determinan las direcciones de las horas de orto y ocaso, sino las horas de paso del sol por el plano del cuadrante, ya que estas líneas son paralelas a las generatrices determinadas por el plano paralelo al cuadrante, trazado por el vértice del cono, extremo del gnomón (3); generatrices que se materializarán cuando el sol esté en dicho plano paralelo al cuadrante.

Las horas de orto y ocaso hay que obtenerlas como intersección de las generatrices horizontales del cono de luz solar, que son los rayos de sol cuando el astro está en el horizonte.

Para los cuadrantes verticales situados en el trópico, latitud $\varphi \pm 23°37'$ y en el día de solsticios, el cono de los rayos solares es tangente al plano vertical paralelo al cuadrante determinado por el extremo del gnomón. La cónica sección producida por el plano del cuadrante es una parábola.

Si consideramos el trópico de Cáncer, el sol no sobrepasará el plano del cuadrante en el solsticio de verano, situándose en el cénit a las XII del medio día. La sombra del gnomón marcará el eje de la parábola en la directriz vertical.

En el solsticio de invierno, el sol está siempre por delante del plano del cuadrante, pero sólo existe línea diurna para las horas en que está por encima del horizonte. La línea diurna para este día es un arco de parábola (figura 10).

En el trópico de Capricornio, es en el solsticio de invierno cuando el sol no sobrepasa el plano del cuadrante y la sombra del gnomón sólo aparece a las XII del medio día como una recta vertical, siendo un arco de parábola en el solsticio de verano, por permanecer el sol siempre por delante del cuadrante a lo largo de todo el día.

En todos los demás días, la declinación solar toma siempre en valor absoluto, valores:

$$|\delta| < \varphi$$

por ser $\varphi = 23°37'$.

En todos estos casos, el plano paralelo al primer vertical determinado por el extremo del gnomón corta al cono de los rayos solares según dos generatrices y las curvas diurnas son hipérbolas (figura 11).

En los casos en que la declinación se anula, equinocios, por coincidir el plano de la directriz del cono de los rayos solares con el vértice al gnomón, la curva diurna es una recta doble -hipérbola degenerada-.

En la zona intertropical siempre habrá dos días en que la declinación solar tome en valor absoluto el valor de la declinación:

$$|\delta| = \varphi$$

En esos días, el cono de los rayos solares es tangente al plano paralelo al cuadrante determinado por el vértice del gnomón, y estaremos en un caso similar al expuesto en primer lugar, caso parábola (figura 12).

Cuando los valores de la declinación sean en valor absoluto menores que la latitud

$$|\delta| < \varphi$$

el cono de los rayos solares será siempre cortado por el plano perpendicular al meridiano determinado por el extremo del gnomón, según dos generatrices y las curvas diurnas son siempre hipérbolas (figura 13).

En los casos anteriores expuestos, en los que la línea diurna es una curva con ramas infinitas, hipérbola o parábola, la sombra del gnomón sólo alcanzará la rama infinita en los casos en que el sol sobrepase el plano del cuadrante, es decir, cuando el azimut de orto y ocaso del astro esté comprendido entre los valores:

$$90 < Z < 270$$

dichos valores serán alcanzados en el hemisferio norte en los días de primavera y verano y en el hemisferio sur en otoño e invierno.

En todos los demás días, la curva diurna es un arco de cónica limitado por la traza con el plano del cuadrante del plano horizontal determinado por el extremo del gnomón.

Cuando la declinación solar tome valores por encima de la latitud (figura 14):

$$|\delta| > \varphi$$

el plano paralelo al cuadrante determinado por el extremo del gnomón, no corta al cono de los rayos solares y en consecuencia, la cónica determinada por el cuadrante no tendrá ramas infinitas, elipses. Dichas elipses tienen su eje mayor en la dirección vertical y sólo existirán en el hemisferio norte en otoño e invierno y en el hemisferio sur en primavera y verano.

Cuando la declinación se anula, como en los casos anteriores, la línea diurna es una recta, hipérbola degenerada.

En el ecuador, latitud cero, el gnomón es perpendicular al plano del cuadrante y la declinación solar es siempre en valor absoluto, mayor que la latitud salvo en los equinocios en que:

$$\delta = \varphi = 0$$

En este caso el sol desde su orto al ocaso permanece en un plano paralelo al plano del cuadrante y la línea diurna es la recta impropia del plano del cuadrante.

En los demás casos, las cónicas determinadas por el cono de los rayos solares con el cuadrante son siempre circunferencias, puesto que la sección recta del cono de los rayos solares, por el plano del cuadrante es perpendicular a su eje (figura 15).

Las líneas diurnas sólo existen a las horas comprendidas entre las IV de la mañana y las IV de la tarde, horas de orto y ocaso del sol para todos los días en el ecuador.

Si el cuadrante está orientado al sur, sólo será iluminado por el sol en otoño e invierno, declinación negativa, y si el cuadrante está orientado al norte, las curvas diurnas sólo existirán en primavera y verano; es decir, en el ecuador un cuadrante vertical sólo estaría iluminado por el sol la mitad de los días del año y sólo 12 horas del día, por lo que el número de horas de insolación posible es 2.190, es decir, la cuarta parte del año.

En las demás latitudes, es decir desde los trópicos a los polos, la declinación solar en valor absoluto no alcanza nunca el valor de la latitud (figura 16):

$$|\delta| < \varphi$$

El plano paralelo al primer vertical, determinado por el extremo del gnomón, corta siempre según dos generatrices al cono de los rayos solares, por lo que las curvas diurnas serán en todos los casos hipérbolas, excepto cuando la declinación se anula en los equinocios que será una recta doble, hipérbola degenerada.

Como el sol en otoño e invierno permanece siempre por delante del plano del cuadrante, las curvas diurnas para estas fechas estarán limitadas por la traza con el cuadrante del plano horizontal determinado por el extremo del gnomon.

En los demás casos, primavera y verano, el sol sobrepasa el plano del cuadrante dos veces al día, en el orto y en el ocaso, por lo que las líneas diurnas existen hasta su punto impropio, determinando la línea horaria paralela a la asíntota, la hora de paso del sol por el plano del cuadrante.

En el polo $\varphi = 90°$ (figura 17), el gnomon es paralelo al plano del cuadrante y las secciones producidas por el plano del cuadrante en los conos de los rayos solares, por ser paralelo al eje de éste, los conos son hipérbolas concéntricas y el cuadrante tiene dos ejes de simetría, la vertical y la línea de equinocios.

En el polo sólo está el sol por encima del horizonte medio año y como el paso por el plano del cuadrante es siempre a las 6 de la mañana y las 6 de la tarde, el cuadrante vertical polar sólo estaría iluminado por el sol la cuarta parte de las horas del año, al igual que el cuadrante vertical ecuatorial.

En definitiva, podemos apreciar que un cuadrante solar vertical construído para una latitud $\varphi$ es idéntico que uno horizontal construído para una latitud $(90 - \varphi)$.

Los tipos de cónicas que pueden constituir un cuadrante solar vertical, se pueden resumir en el siguiente esquema, que como se aprecia, es simétrico al correspondiente de los cuadrantes horizontales.

Para un lugar de la zona tropical $-23°27' < \varphi < 23°27'$:

* CIRCUNFERENCIA : en el ecuador exclusivamente.
* ELIPSE: en los días que el sol no sobrepasa el plano del cuadrante.
* PARÁBOLA: en los días en que el sol no sobrepasa el plano del cuadrante, alcanzando el zénit al medio día.
* RECTA DOBLE (parábola degenerada): en los días en que el sol en su culminación alcanza el zénit, pero permanece por detrás del cuadrante.
* HIPÉRBOLA: todos los días en los que el orto y el ocaso del sol están por detrás al plano del cuadrante.
* RECTA DOBLE (hipérbola degenerada): en los días de equinocios (en el ecuador es la recta del infinito del plano del cuadrante).

Para latitudes superiores a $\pm 23°27'$:

* HIPÉRBOLA: todos los días excepto equinocios.

* RECTA DOBLE (hipérbola degenerada): en los equinocios.

Cuadrantes verticales declinantes: Entendemos por cuadrantes verticales declinantes o simplemente declinante, aquéllos cuyo plano es perpendicular con el horizonte del lugar, pero no ortogonal al meridiano.

El ángulo de declinación o azimut del muro A, lo definiremos como el ángulo que forma la perpendicular al muro con el plano meridiano desde la dirección sur, de 0° a 360° en sentido retrógrado. La figura 18 aclara la definición.

Para dibujar un cuadrante declinante (figura 19), usamos como plano vertical de proyección el plano del cuadrante. Se comenzará hallando el punto V'V proyección del vértice del gnomón sobre el plano del cuadrante, con los datos iniciales, latitud del lugar $\varphi$ y ángulo A.

Mediante un cambio de plano horizontal elegido de forma que el nuevo plano horizontal contenga al gnomón, recta OV, O'V', se obtiene la proyección del gnomón en verdadera magnitud G, e igualmente en verdadera magnitud el ángulo que forma G con el plano del cuadrante $(90 - \varphi')$.

Trazando sobre el nuevo plano horizontal el cono de los rayos solares cuyo eje es la recta G, se puede comenzar el cálculo del cuadrante declinante.

El cuadrante que se obtenga tendrá como eje de simetría la nueva línea de tierra, que forma con la vertical un ángulo $\gamma$, igual al que forma la proyección vertical del gnomón con la vertical.

Evidentemente, el cuadrante obtenido será idéntico al cuadrante vertical orientado construído para una latitud $\varphi'$ y con un eje de simetría formando un ángulo $\gamma$ con la vertical, medido hacia la derecha si la declinación del muro es a poniente o hacia la izquierda en el caso contrario.

Como el gnomón se encuentra situado en el plano meridiano, cuando sean las XII del medio día y el sol se coloque en dicho plano, la proyección del gnomón, sombra, se situará en la traza del meridiano con el plano del cuadrante, vertical O'O. En consecuencia, el cuadrante vertical declinante tendrá un desfase horario, $\Delta H$, con el cuadrante vertical orientado. Dicho desfase horario se puede medir abatiendo una de las directrices del cono de luz sobre el plano vertical y unido el centro de la circunferencia abatida con los puntos p y q.

Los ángulos: $\varphi$ latitud del lugar, $\varphi'$ latitud del cuadrante vertical orientado, $\gamma$ ángulo que forma el eje de simetría del cuadrante con la vertical, A ángulo que forma los planos meridianos y el proyectante horizontal perpendicular al plano del cuadrante y $\Delta H$ desfase del ángulo horario entre los cuadrantes declinante y orientado, están relacionados por sencillas expresiones trigonométricas, que se pueden deducir del planteamiento de su trazado, en la figura 19 de la siguiente forma: (4)

$$G \cdot \cos \varphi' = V'V'' \qquad (a)$$

$$G \cdot \cos \varphi = a'(V) \qquad (b)$$

dividiendo miembro a miembro las expresiones (a) y (b) y despejando:

$$\cos \varphi' = \frac{V'V''}{a'(V)} \cos \varphi \qquad (c)$$

a' (V) es igual a aV y V'V" es la distancia del vértice del gnomón - al plano vertical vm y a su vez:

$$vm = av \cdot \cos A \qquad (d)$$

sustituyendo en (c) los valores equivalentes de V'V" y a'(V), se obtiene la expresión:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi \cdot \cos A \qquad (e)$$

Expresión con la que podemos calcular $\varphi'$, latitud del cuadrante vertical orientado, en función al ángulo A y el ángulo $\varphi$ , latitud del lugar.

El ángulo $\gamma$ se obtiene en función del ángulo A y la latitud de la siguiente forma; de la figura 19 se deduce que

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a'V'}{O'a'} \qquad (f)$$

El numerador de la expresión (f) es igual:

$$a'V' = a'\ (V)\ \operatorname{sen} A \qquad (g)$$

y el denominador:

$$O'a' = G\ \operatorname{sen}\varphi \qquad (h)$$

y como G vale:

$$G = \frac{a'\ (V)}{\cos\ \varphi} \qquad (i)$$

sustituyendo el valor de G obtenido en (h):

$$O'a' = a'\ (V)\ \operatorname{tg}\varphi \qquad (j)$$

se obtiene el valor del denominador de (f) en función de a'(V). Sustituyendo los valores obtenidos en (g) y (j) en la expresión (f) y simplificando, se obtiene:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{tg}\ \varphi} \qquad (k)$$

Expresión que nos relaciona el ángulo que forma el nuevo eje - de simetría con la vertical $\gamma$, con el ángulo A y la latitud del lugar.

Para hallar el ángulo de desfase horario, $\Delta H$, entre los cuadrantes, es conveniente abatir la circunferencia equinocial o bien llevar paralelamente en la figura 19 el ángulo $\Delta$ H hasta que su lado pase por O, entonces se cumple:

$$r\,n \cdot tg\ \Delta H = n\,O \qquad (l)$$

$$o'\,n \cdot tg\ \gamma = n\,O \qquad (m)$$

igualando ambas expresiones y despejando:

$$tg\ \Delta H = \frac{o'n}{r\,n} \cdot tg\gamma \qquad (n)$$

r n se puede sustituir por su igual nV" puesto que en el abatimiento descrito, el punto V" coincidirá con el punto r y el numerador de la expresión (n) se puede sustituir por el valor de la expresión:

$$o'\,n = \frac{nV''}{\cos\varphi'} \qquad (m)$$

llevando ambos valores a la expresión (n) y simplificando, se obtiene la expresión:

$$tg\ \Delta H = \frac{tg\ \gamma}{\cos\varphi'} \qquad (ñ)$$

sustituyendo en (ñ) los valores de $\cos\varphi'$ y $tg\gamma$ obtenidos en las expresiones (e) y (k) respectivamente y simplificando, se obtiene finalmente que:

$$\operatorname{tg} \Delta H = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} \varphi} \qquad \text{(o)}$$

Expresión que relaciona el desfase horario $\Delta H$ con el ángulo A y la latitud del lugar $\varphi$.

Demostrado que un cuadrante vertical declinante construído para una latitud $\varphi$ es semejante a una cuadrante vertical orientado para una latitud $\varphi$ con tal que entre $\varphi$ y $\varphi$ exista la relación:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi \cdot \cos A$$

siendo A el azimut del muro. Es fácil hacer extensible las conclusiones del análisis del cuadrante vertical orientado al cuadrante vertical declinante como se había enunciado en el apartado correspondiente.

Según M.L. Vitrubio fueron los caldeos los que introdujeron los conocimientos de gnomónica en el mundo occidental (5). En el mismo texto hace una descripción exacta del "analema" para el trazado de los cuadrantes solares de todo tipo (6): "Por eso cuando en cualquier país se quisiere construir un reloj, se ha de tomar primeramente la sombra equinocial en aquel lugar; porque si fuese como en Roma, de nueve partes del gnomón y ocho de sombra, se trazará sobre un plano una línea en cuyo centro se alzará otra perpendicular de manera que esté a escuadra, y que es lo que se llama "gnomón"; partiendo de la línea del plano hacia la punta del gnomón, se mide con el compás nueve partes y en el sitio donde termina la novena se marca el centro, en donde estará la letra A y abriendo el compás desde este centro hasta la línea del plano en donde estará la letra B, se describirá un círculo que se denomina "meridiano"; después de ésto, de las nueve partes marcadas desde la línea del plano hasta el centro del gnomón se tomarán ocho partes y se las señalará en la línea del plano en donde estará la letra C. Esta será la sombra equinocial del gnomón. Desde este punto y la letra C, por centro, en donde está la letra A, se tira una línea, que será el radio equinocial del sol.

Entonces se abrirá el compás para medir el espacio que hay desde la línea del plano hasta el centro y se harán dos señales iguales en los extremos del círculo; una a la izquierda hasta la letra E y otra a la derecha, hacia I; luego por el centro, se trazarán dos semicírculos, a esta línea la llaman los matemáticos "Horizonte".

Después se toma la décimoquinta parte de toda la circunferencia y abriendo el compás se pondrá una punta en la intersección del círculo con la línea del radio equinoccial, en donde está la letra F y se harán a derecha e izquierda marcas en donde estarán las letras G y H; después a partir de estas marcas, unas líneas que salen del centro deben ser prolongadas hasta la línea del plano en donde estarán las letras T y R; así se tendrán dos rayos de sol, uno el de invierno y otro el de verano.

Enfrente de la letra E estará el punto I, en la intersección de la circunferencia con la línea diametral; enfrente de G y H se encontrarán los puntos K y L y enfrente de C, F y A estará el punto N.

Se trazan luego los diámetros de G hasta L y de H a K; el inferior marcará la parte invernal; el superior la estival. Estos diámetros se han de dividir igualmente por el medio en los puntos M y O y allí, marcados estos puntos, por ellos y por el centro A se trazará una línea que irá de un extremo del círculo al otro, en donde están las letras P y Q; esta línea será perpendicular al radio equinocial , se llama en términos matemáticos "línea axón". De estos puntos como centros, abierto el compás hasta los extremos del diámetro, se describirán dos semicírculos, uno de los cuales será el de verano y el otro el de invierno. Luego, en los puntos en donde las dos paralelas cortan la línea llamada del "horizonte" se pondrá a la derecha la letra S y a la izquierda la letra V. Desde el ángulo del semicírculo donde esté la letra G, se traza una paralela al axón, hasta el semicírculo izquierdo, donde está la letra H. Esta paralela se llama "logotomo". Finalmente se pone una punta del compás en el punto donde está la línea cortada por el radio equinocial , que se marcará con la letra D y se alargará la otra punta del compás hasta el lugar en el que el radio de verano corta la circunferencia, en donde está la letra H; sobre este centro y el intervalo del radio de verano se trazará el círculo mensual que se llama "menaeos". Así se tendrá trazada la figura del "analemma" (figura 20).

El analemma que describe Vitrubio, no es más que una proyección del cono de los rayos solares sobre el plano del meridiano del lugar, tomando para la inclinación del eje el ángulo de la latitud del lugar y como declinación máxima 24° ("Después se toma la decimoquinta parte de toda la circunferencia...").

Sobre el mismo plano abaten los semicírculos de verano e invierno para el cálculo de las horas y el círculo "menaeos" para el cálculo de declinaciones (7).

El trazado de los cuadrantes solares lleva implícito la resolución de dos problemas, el trazado de las líneas horarias y el de las líneas diurnas. Ambos problemas se pueden resolver simultáneamente si para el trazado de las líneas diurnas se utilizan las generatrices del cono de los rayos solares determinadas por el sol cuando se encuentra sobre los círculos horarios -meridianos celestes-.

Las líneas diurnas son las proyecciones cónicas de los círculos celestes que recorren el sol a lo largo de un día y las líneas horarias son las proyecciones cónicas de los círculos horarios. Ambas proyecciones se realizan sobre el plano del cuadrante desde el extremo del gnomón como vértice de proyección.

Los conocimientos actuales de Geometría proporcionan métodos muy exactos para el trazado de las curvas diurnas, ya que con ellos además de determinar los puntos de la curva, podemos determinar las tangentes en dichos puntos y los demás elementos de la cónica: ejes, centros y asíntotas.

En el sistema Diédrico el problema del trazado se resuelve hallando la sección plana del cono de revolución de directriz el círculo celeste que recorre el sol y vértice el extremo del gnomón, producida por el plano del cuadrante. La geometría proyectiva proporciona otro método que consiste en hallar la curva homóloga del círculo recorrido por el sol. A continuación se exponen ambos métodos para los casos de cuadrantes horizontales, verticales orientados y verticales declinantes.

Para la proyección diédrica se tomará como plano horizontal de proyección el plano del cuadrante, y como plano vertical de proyección, el plano meridiano del lugar (figura 21).

Proyectemos sobre el PV el gnomón G', que formará con la línea de tierra un ángulo $\varphi$ igual a la latitud del lugar. A continuación proyectamos sobre el mismo plano el cono de los rayos solares, cuyo eje es el gnomón y vértice el extremo del mismo. El contorno aparente del cono ha de formar un ángulo con el eje, igual al complementario de la declinación solar del día para el que se quiere trazar la curva diurna. El cono de los rayos solares se limitará por dos planos P y Q, perpendiculares al eje, de tal forma que las circunferencias secciones determinadas en el cono por dichos planos, sean tangentes al PH.

Trazado de las líneas diurna y las horarias: Abatiendo una de las circunferencias sobre el PH, tomando como charnela la traza del plano que la contiene, se pueden trazar sobre ella los radios que forman entre sí ángulos de 15°. Dichos radios son las intersecciones del plano que contiene la circunferencia con los planos meridianos horarios, si previamente se ha elegido como origen del trazado de los radios el punto en que la circunferencia toca a la línea de tierra -meridiana-.

Si desabatimos la circunferencia, se obtienen sobre el cono 24 puntos que uniéndolos a su vértice, determinan las 24 generatrices que coinciden con los rayos que parten del sol cuando éste se halla en cada uno de los círculos horarios. Hallando las trazas con el pH de dichas generatrices se obtienen los puntos donde arroja sombra el extremo del gnomón cada hora del día cuya declinación se ha elegido. Uniendo entre sí estos puntos se obtiene la curva diurna y uniéndolos con el pie del gnomón, se obtienen las líneas horarias.

Para hallar las trazas de las generatrices, es conveniente hallar previamente la línea horaria correspondiente, porque al ser dicha línea la traza del plano meridiano con el plano del cuadrante pH y estar contenido el gnomón en dicho plano meridiano, la traza de la generatriz está situada sobre la línea horaria calculada. En la figura 21 se procede a calcular la traza correspondiente a las tres de la tarde.

Para hallar la traza del plano meridiano de las tres de la tarde con el plano del cuadrante, prolongaremos en la circunferencia abatida el radio correspondiente a dicha hora, el que forma con la línea de tierra un ángulo de 15° x 3 = 45°. Dicho radio corta a la traza horizontal del plano Q en el punto m, punto que por pertenecer al mencionado radio y estar sobre el PH, pertenece también a la traza horizontal del plano buscado. Como el punto n, traza del gnomón con el PH también es punto de la traza buscada, por ser el gnomón recta del plano meridiano, si unimos n y m obtendremos la línea horaria de las tres de la tarde.

Para hallar la generatriz correspondiente a las tres de la tarde, desabatimos la circunferencia del plano Q y con ella el punto (III) correspondiente a dicha hora, obteniendo de esta forma su proyección vertical III'. Uniendo III' con el punto O', vértice del cono, se obtiene la proyección vertical de la generatriz que coincide con el rayo solar a las III de la tarde. La traza horizontal de la generatriz, punto h, se obtiene por la intersección de la línea de correspondencia del punto h-h' con la línea horaria de las III, recta n h.

Trazado de las tangentes a la curva diurna: La dirección de la curva diurna en el punto h se halla trazando su tangente en dicho punto, problema que se resuelve hallando la traza horizontal del plano tangente al cono de los rayos solares a lo largo de la generatriz correspondiente. El plano tangente al cono a lo largo de la generatriz que pasa por III, corta al plano Q según una recta que ha de ser tangente al punto (III) y dicha recta se puede trazar en el abatimiento directamente. La intersección de la tangente trazada en el punto III con la traza horizontal del plano Q, determina un punto de la traza horizontal del plano tangente a la generatriz, punto t, y como el punto h hallado, por ser punto de la curva, también lo es de la traza del plano tangente, uniendo h con t se obtiene la traza horizontal del plano tangente al cono en la generatriz III y por tanto, la tangente en el punto III.

Cálculo de las asíntotas, ejes, centro y vértices de las hipérbolas diurnas: Hallados los puntos necesarios con sus correspondientes tangentes para el trazado de la hipérbola, se procede a hallar los restantes elementos de la cónica (8): vértices, centro, ejes y asíntotas según los casos.

Para valores de la latitud comprendidos entre los círculos polares, caso de la figura 2 :

$$+66°23' > \varphi > -66°23'$$

la curva diurna es siempre una hipérbola para cualquier valor que tome la declinación solar (9).

Los vértices de la hipérbola, punto $v_1$ y $v_2$ (figura 21) están en el plano meridiano por ser éste el plano de simetría del cono de los rayos solares, del cuadrante y de la intersección de ambos -curva diurna-. Dichos puntos se encuentran sobre la línea de tierra, en las trazas de las generatrices del cono de los rayos solares contenidas en el plano meridiano del lugar.

El centro de la cónica, punto s, se halla como punto medio del segmento determinado por el segmento $v_1$ $v_2$, en consecuencia tam - bién está situado sobre la línea de tierra.

Las asíntotas han de pasar por s, por ser el centro de la cónica y han de ser paralelas a las generatrices horizontales del cono de los rayos solares, porque son estas generatrices las que cortan al plano del cuadrante en puntos del infinito (10). Como a su vez, las asíntotas son paralelas a las líneas horarias de orto y ocaso, hallando dichas líneas horarias y trazando paralelas a ellas por el punto s, se obtienen las asíntotas buscadas.

Para determinar las líneas horarias de orto y ocaso (figura 21), como el sol en dichas horas está sobre el horizonte, cortamos el cono de los rayos solares por el plano del horizonte -plano horizontal paralelo al horizonte trazado por el extremo del gnomón-, de esta forma se obtienen las proyecciones verticales de las generatrices horizontales del cono de los rayos solares, como intersección de éste con el plano del horizonte -recta o'u'- Abatiendo el punto u' alrededor de la traza horizontal del plano Q'Q que lo contiene, se obtiene el punto (u). Uniendo (u) con el centro de la circunferencia abatida, se obtiene el radio que corta en ñ la traza horizontal del plano Q'Q. Al unir ñ con n obtenemos la traza del plano que contiene al gnomón y a la generatriz horizontal del cono de los rayos solares, por lo que dicha recta es la línea horaria del ocaso para el día calculado, en este caso los días de solsticios. La línea de orto es la simétrica de la hallada respecto el plano meridiano P.V.

Trazando por s las paralelas a las líneas horarias que se han hallado, se obtienen las asíntotas buscadas.

Cálculo de las horas de orto y ocaso: Para hallar el valor de la hora de orto y ocaso, medimos el ángulo formado por el radio de la circunferencia abatida que pasa por (u) -radio que nos sirvió para hallar la línea horaria de orto y la de ocaso-, con la línea de tierra, meridiana. En la figura 21 dicho ángulo mide 70'5°.

Expresado el valor del ángulo en horas, minutos y segundos y sumándolo y restándolo a las 12 h. obtenemos las horas de ocaso y orto respectivamente.

70'5°/15 = 4'7h = 4h. 42m.

ocaso 12 h. + 4h. 42 m. = 16h. 42 m.

orto 12 h. - 4h. 42 m. = 7h. 18 m.

De esta forma se han obtenido las horas de orto y ocaso para una declinación negativa, es decir para el día representado por la rama de la hipérbola correspondiente al otoño o invierno. En el caso de la figura 21 para el día de solsticio de invierno $\delta$=-23°27'.

Para el cálculo de la hora de orto y ocaso correspondiente a la otra rama de la hipérbola, primavera o verano. En la figura 21 el día de solsticio de verano, se toma el ángulo suplementario al medido y se opera de la misma forma:

(180 - 70'5°)/15 = 7'3h. = 7h. 18m.

ocaso 12h. + 7h. 18m. = 19h. 18m.

orto 12h. - 7h. 18m. = 4h. 42m.

<u>Cálculo de los ejes, vértice y centro de la cónica en el caso elipse</u>:

Para las latitudes superiores a los 66°23', latitudes polares:

$$|\varphi|>66°23'$$

existen días en los que el sol no se pone. En estos casos la curva diurna es una elipse y en el caso límite de tomar la latitud el valor 90°, la curva diurna es una circunferencia como ya se discutió en el capítulo anterior.

En la figura 22 se ha dibujado la curva diurna para un lugar de latitud 75° y para los solsticios = ± 23°27' (11) y se ha procedido del siguiente modo:

Se toma como plano vertical de proyección (P.V.) el plano del meridiano del lugar y como plano horizontal de proyección (P.H.) el plano del horizonte del lugar.

Se proyecta en P.V. el cono de los rayos solares y el gnomón, que en este caso forma 75° con la línea de tierra (L.T.) -meridiana-.

En este caso comencemos por calcular los elementos de la cónica: vértices, ejes, etc., para luego trazar los distintos puntos con sus tangentes para el trazado de la curva y líneas horarias.

El eje mayor de la elipse está situado en la línea de tierra, por razón de simetría, por lo tanto las generatrices del contorno aparente vertical del cono de los rayos solares al cortar al plano horizontal, determinan los vértices $v_1$ y $v_2$ de la cónica respectivamente.

El centro de la cónica queda definido como el punto m' centro del segmento determinado por los vértices $v_1$ y $v_2$.

El eje menor es la perpendicular al eje mayor por m'. Para hallar su longitud, se halla la traza horizontal de la generatriz del cono de los rayos solares cuya proyección vertical pasa por m' (12). La traza que buscamos ha de estar sobre la línea horaria correspondiente por lo que se procede buscando ésta.

La generatriz m's' corta a la circunferencia base del cono de los rayos solares en el punto u'. Abatiendo dicha circunferencia sobre el plano horizontal de proyección alrededor de la traza del plano Q'Q que la contiene, se obtienen a la vez los puntos (u) y (o), abatimiento de los puntos u' y centro de la circunferencia respectivamente. Uniendo (u) con (o) se obtiene en el abatimiento, la intersección del plano meridiano que pasa por la generatriz m's' con el plano Q'Q que contiene a la base del cono de los rayos solares. El ángulo que forma la línea obtenida con la meridiana, expresado en h.m.s. es la hora en que el sol, para el día en estudio, proyecta la sombra del extremo del gnomón sobre el vértice del eje menor. En la figura 23 dicho ángulo toma el valor de 128° por lo que la hora es las 8h. 32m.

La línea horaria que buscamos ha de pasar por el pie del gnomón y por la traza horizontal de la recta (u) (o), punto $ñ_2$ que ha de estar situado en la traza horizontal del plano Q'Q, por contener éste la recta (u) (o). Uniendo $ñ_2$ con el pie del gnomón, punto n, se obtiene la línea horaria buscada, que al prolongarse hasta cortar al eje menor, recta m'm se obtiene el vértice $v_3$ extremo de dicho eje.

Una vez determinados los elementos de la cónica, vértices, centro y ejes, ésta queda perfectamente determinada.

Otro procedimiento por el cual se puede obtener el vértice

$v_3$ y que también ha sido reflejado en la figura 22., es el de determinar la traza horizontal m de la generatriz m's'. Para ello se halla la proyección horizontal de u' y uniendo ésta con la proyección horizontal s de s' se obtiene la proyección horizontal de la generatriz en estudio. La intersección de dicha proyección con la línea de correspondencia del punto m' -eje menor- determina la traza horizontal buscada, punto m, vértice $v_3$ de la cónica.

Líneas horarias y puntos con sus tangentes en el caso elipse: Para hallar un punto con su correspondiente tangente, se procederá como en el caso anterior. Si previamente al cálculo de los puntos, elegimos las generatrices del cono de los rayos solares que se correspondan con la posición del sol sobre los meridianos horarios, uniendo los puntos hallados con el pie del gnomón se obtendrán las líneas horarias (13).

En la figura 22 se ha hallado el punto y la línea horaria correspondiente a las IV h. de la tarde, y para ello se ha abatido la circunferencia directriz de los rayos solares,que es tangente al plano horizontal de proyección, sobre dicho plano,tomando como charnela la traza horizontal del plano Q'Q proyectante vertical que contiene a dicha directriz.

Para determinar el punto de las IV se escogerá el radio de la circunferencia directriz que forme con la meridiana, línea de tierra, un ángulo de 60°:

$$60°/15 = 4$$

Dicho radio representa la intersección del plano Q'Q con el plano meridiano de las IV de la tarde. Prolongando dicho radio hasta su corte con la traza horizontal de Q'Q, encontraremos el punto $ñ_1$ que como en el caso anterior, dicho punto es punto de la línea horaria. Uniendo n con $ñ_1$ se obtiene la correspondiente línea horaria de las IV de la tarde.

Para hallar el punto en donde proyectará el sol la sombra del extremo del gnomón, desabatimos la circunferencia directriz para encontrar la proyección vertical de IV, punto IV'. Uniendo IV' con el vértice s' del gnomón, se obtiene la proyección vertical de la generatriz correspondiente a las IV de la tarde. La traza horizontal h de dicha generatriz es el punto buscado.

La tangente al punto de las IV es la traza horizontal del plano tangente al cono de los rayos solares a lo largo de la generatriz en estudio. En la figura 22 se ha hallado dicha traza uniendo el punto de las IV con el punto $t_2$ obtenido este último como intersección de la tangente del punto (IV) con la traza horizontal del plano Q'Q. Dicha recta tangente, recta $t_1$ $t_2$ , representa en el abatimiento a la intersección del plano tangente al cono de los rayos solares a lo largo de la generatriz de las IV con el plano Q'Q que contiene a la directriz de dicho cono.

<u>Hora en la que el sol se encuentra más al E. y al W</u>: Las horas en las que el sol se encuentra más al E. o al W. son aquéllas en las que la sombra del extremo del gnomón se proyecta en los extremos del eje mayor. Para su cálculo se mide en la circunferencia abatida (figura 22) el ángulo que forma el radio que pasa por (u) con la meridiana, ángulo horario, expresando éste en horas, minutos y segundos, y sumándolo y restándolo de las XII del medio día, obtenemos dichas horas.

El ángulo horario en la figura 22 se puede medir obteniendo el valor de 128° (14).

128°/15 = 8h. 32m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Posición más al W. | 12h. + 8h. 32 m. | 20h. 32m. | |
| Posición más al E. | 12h. - 8h. 32m. | 3h. 28m. | (15) |

Caso parábola: determinación de la curva diurna y todos sus elementos:

Para latitudes de 66°33' y superiores, la declinación solar $\delta$ puede tomar valores iguales a:

$$\delta = (90^\circ - \varphi)$$

valor complementario de la latitud del lugar. Para ese día el cono de los rayos solares es tangente al horizonte del cuadrante, por lo que la curva diurna, intersección del cono con el plano del cuadrante es una parábola.

Para el trazado del cuadrante, se usará como en los casos anteriores el mismo sistema de referencia: el plano del horizonte como plano horizontal de proyección, y el plano del meridiano del lugar como plano vertical de proyección, siendo por tanto la línea de tierra la meridiana (figura 23).

El eje de la parábola, por ser el plano meridiano el plano de simetría del cono de los rayos solares y del plano del cuadrante, ha de ser la meridiana -línea de tierra-, y el vértice la intersección de la curva con la línea de tierra, punto v.

En la figura 23 se han trazado los puntos de la curva diurna correspondiente a las IV, VI y VIII de la tarde y sus correspondientes líneas horarias.

Para el trazado de los puntos IV y VIII se ha empleado el mismo procedimiento que en los casos anteriores de hipérbola y elipse. Se traza en la circunferencia directriz del cono de los rayos solares abatida sobre el plano horizontal de proyección, los puntos correspondientes (IV) y (VIII) y se prolongan los radios que pasan por ellos hasta cortar la traza horizontal del plano Q'Q que contiene a la directriz del cono, obteniéndose los puntos $t_2$ y t respectivamente. Uniendo estos puntos al pie del gnomón, punto p, se obtienen las correspondientes líneas horarias de las IV y VIII de la tarde.

Para determinar los puntos de las IV y las VIII se desabate la circunferencia y se obtienen los puntos IV' y VIII'. Los puntos buscados se obtendrán como intersección de las líneas horarias halladas con las trazas horizontales de los planos proyectantes verticales que contienen a las generatrices del cono de los rayos solares que pasan por los puntos IV' y VIII' respectivamente.

Para determinar el punto y línea horaria de las VI, ha de usarse otro procedimiento, tanto en este caso como en los anteriores, pues al ser el radio correspondiente de la circunferencia abatida paralelo a la traza horizontal del plano que la contiene, dicho radio no corta a la traza y por tanto sólo se puede determinar que la línea horaria de las VI es también paralela a la mencionada traza horizontal. Como consecuencia, la traza horizontal del plano que contiene a la generatriz de las VI coincide con la línea horaria de las VI por lo que existe una indeterminación.

Para evitar esta indeterminación que se presenta al hallar el punto de la línea diurna correspondiente a las VI, en éste y en todos los demás casos, hipérbola y elipse, se puede emplear el siguiente procedimiento: una vez hallada la proyección vertical de la generatriz correspondiente, recta VI' u', se hallan las proyecciones horizontales de dos de sus puntos u y s. Uniendo las dos proyecciones, se obtiene la proyección horizontal de la generatriz en estudio. El punto buscado es la traza horizontal, punto VI, de la recta obtenida.

Las tangentes a los puntos IV, VI y VIII se obtienen como en todos los casos expuestos, uniendo los puntos $t_1$ $t_3$ y $t_2$ , intersecciones de Q con las tangentes a la circunferencia directriz abatida por los puntos (IV), (VI) y (VIII) respectivamente con los puntos hallados IV, VI y VIII.

El trazado de los cuadrantes verticales orientados en el sistema diédrico es similar al trazado de los cuadrantes horizontales, por lo que sólo nos limitaremos a exponer aquellos puntos en que difieren.

El sistema de referencia que usaremos es el siguiente: como plano vertical de proyección, P.V. se tomará el plano del cuadrante, que en este caso coincide con el primer vertical; y como plano horizontal se tomará el plano del meridiano del lugar. La línea de tierra, definida por la intersección de ambos planos, en el sistema de referencia que usaremos coincide con la vertical del lugar.

El cono de los rayos solares se proyectará en este caso sobre el plano horizontal que coincide con el plano meridiano, plano de simetría del cono de los rayos solares y del plano del cuadrante y por lo tanto de todas las líneas de éste.

El gnomón formará con la línea de tierra un ángulo igual a la colatitud del lugar ($90° - \varphi$) para así seguir manteniendo el paralelismo de éste con el eje de la tierra (figura 24).

Al coincidir el plano del cuadrante con el primer vertical, en otoño e invierno, el orto y el ocaso del sol tienen lugar por delante del plano del cuadrante. En los equinocios de primavera y verano, el orto y el ocaso del sol tiene lugar en puntos de dicho plano; y en primavera y verano, el fenómeno tiene lugar siempre por detrás del plano del cuadrante.

Estas circunstancias son las causas de las principales diferencias de ambos cuadrantes.

<u>Determinación de las horas de orto y ocaso en los cuadrantes verticales</u>: Las horas de orto y ocaso en los cuadrantes verticales sólo se pueden calcular para el otoño e invierno, ya que en primavera y verano, al tener lugar el fenómeno por detrás del cuadrante, éste a esas horas está en sombra. Éstas se determinan como la intersección de la línea diurna correspondiente con el plano del horizonte del cuadrante, plano horizontal por el extremo del gnomón. En la figura 24 se hallan

dichas horas para un cuadrante vertical situado en una latitud de 37° y para el solsticio de invierno, $\delta$ =-23°27'.

El proceso seguido en la figura 24 es el siguiente: se halla la generatriz horizontal o $u_1$ del cono de los rayos solares como intersección de éste con el plano del horizonte del cuadrante. Se abate la circunferencia directriz del mencionado cono sobre el plano del cuadrante usando como charnela la traza Q' del plano Q'Q que la contiene. De esta forma se obtiene el punto $(u_1)$, abatimiento sobre el plano del cuadrante del punto u . Uniendo $(u_1)$ con (o) obtenemos el ángulo horario del orto del sol en el día de solsticio. Para determinar la línea horaria correspondiente se prolonga el radio (o) $(u_1)$ hasta cortar la traza del plano Q'Q determinando así el punto $t_1$. Uniendo este punto $t_1$ con el pie del gnomón se obtiene la correspondiente línea horaria del orto solar.

El punto donde se ha de proyectar la sombra del extremo del gnomón a dicha hora ha de estar situado sobre la línea horaria hallada y en la traza del plano del horizonte, punto O.

Midiendo el ángulo $H_1$ y expresándolo en horas, minutos y segundos y sumándolo y restándolo de las XII h. del medio día, se obtiene la hora de ocaso y orto respectivamente. En la figura 24 se obtiene para dicho ángulo, un valor de 71° (16).

$71°/15 = 4h.\ 44m.$

Orto $= 12h - 4h\ 44m. = 7h.\ 16m.$

Ocaso $= 12h + 4h\ 44m. = 16h.\ 44m.$

Determinación de la hora del paso del sol por el plano del cuadrante: En primavera y verano como el orto y el ocaso del sol tienen lugar por detrás del plano del cuadrante, momentos depués del orto y antes del ocaso, el sol se situará en el plano del cuadrante. En estos momentos la sombra del extremo del gnomón es paralela a dicho plano y la línea horaria correspondiente ha de tener la misma dirección que la asíntota de la curva diurna si ésta es una hipérbola.

En el caso parábola, el sol se situará sobre el plano del cuadrante a las XII del medio día (17) y ésto sólo sucederá para latitudes comprendidas entre ambos trópicos como se discutió en el capítulo anterior.

En la figura 24 se ha calculado la hora de paso del sol por el cuadrante para el día de solsticio de verano ( $\delta$ =23°27'), y en ella se puede observar que el procedimiento es similar al que se empleó en el caso del cuadrante horizontal, al hallar las horas de orto y ocaso, ya que lo que se trata de encontrar en ambos casos es la dirección de la sombra del gnomón cuando el sol se halla en un plano paralelo al cuadrante que pasa por el extremo del gnomón, es decir, hallar las asíntotas de la curva o eje de la parábola según los casos.

En el caso de cuadrantes verticales, el plano que tenemos que considerar para el estudio es el paralelo al primer vertical que pasa por el extremo del gnomón. Si dicho plano corta al cono de los rayos solares en dos generatrices, es tangente o no se secciona, nos encontraremos en los casos de curva diurna hipérbola, parábola o elipse respectivamente.

El proceso seguido en la figura 24 para hallar las asíntotas de la curva diurna, hora de paso del sol por el plano del cuadrante, es el siguiente: primeramente se hallan las generatrices paralelas al plano del cuadrante, seccionando el cono de los rayos solares con un plano paralelo al primer vertical, recta $ou_2$ . Se abate la directriz del cono de los rayos solares sobre el plano del cuadrante alrededor de la traza Q' del plano Q'Q, obteniéndose de esta forma el punto $(u_2)$, abatimiendo de u. Uniendo (u ) con (o) se obtiene el radio que determina el ángulo horario $H_2$ y prolongando este radio hasta su intersección con Q' se obtiene el punto $t_1$. La línea horaria correspondiente queda determinada por el punto $t_1$ hallado y el pie del gnomón, punto p. La dirección de la asíntota ha de ser la misma que la de la línea horaria calculada, sólo queda trazar por m, punto medio del segmento $v_1$ $v_2$ determinado por los vértices y por tanto centro de la curva, la paralela a la línea horaria calculada y su simétrica para tener representadas sobre el cuadrante las asíntotas de la hipérbola.

Para el cálculo de la hora, se mide el ángulo $H_2$ y expresado en horas, minutos y segundos se suma y se resta de las XII h. del medio día, para obtener las horas de paso del sol por el cuadrante.

En la figura 24 el ángulo H mide 55° (18)

55°/15 = 3h. 40m.

12h. - 3h. 40m. = 8h. 20m. paso del sol por la mañana

12h. + 3h. 40m. =15h. 40m. paso del sol por la tarde.

En el capítulo anterior, cuando se analizaron los cuadrantes solares declinantes, se demostró que dichos cuadrantes para una latitud $\varphi$ son similares a un cuadrante vertical orientado para una latitud $\varphi'$ y que entre ambas latitudes existía la relación:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi \cdot \cos A$$

siendo A el ángulo que forma la normal al muro con la meridiana.

No obstante, como ejemplo se ha realizado en la figura 25 el trazado de un cuadrante declinante en un muro cuyo azimut vale 30° y para una latitud de 37°.

El planteamiento inicial es similar al que se sigue en la figura 19.

En primer lugar se comenzará por proyectar el gnomón sobre el plano cuadrante, recta ov (figura 25), conociendo su magnitud, la latitud $\varphi$ y el ángulo A . La proyección se obtiene dibujando previamente el abatimiento del gnomón sobre el plano del cuadrante, recta o (v) y realizando un giro del mismo alrededor de un eje vertical, hasta conseguir que el plano que lo contiene, meridiano del lugar, forme con la normal al plano del cuadrante el ángulo A .

Una vez conseguida la proyección del gnomón sobre el plano del cuadrante, se realiza un cambio de plano horizontal de tal forma que la nueva línea de tierra coincida con la proyección del gnomón. De esta forma, el nuevo plano horizontal resulta ser plano de simetría del cono de los rayos solares y del plano del cuadrante, con lo cual sobre dicho plano se podrá dibujar la proyección del cono de los rayos solares con un ángulo $\delta$ igual a la declinación solar del día para el que se quiera trazar la curva diurna. A partir de este momento, el trazado de la curva diurna y todos sus elementos, vértices, ejes y asíntotas es idéntico a los explicados en los casos anteriores. En la figura 25 se ha elegido la curva diurna de los solsticios, $\delta = \pm 23°$ 27' y la de equinocios $\delta = 0°$.

Para el trazado de las líneas horarias hay que tener presente que la de las XII del mediodía es siempre la vertical -intersección del plano del cuadrante con el plano meridiano-, sea cual fuese el azimut del muro. Por dicho motivo, para su trazado hay que determinar en el abatimiento de la circunferencia directriz del cono de los rayos solares el origen de los ángulos horarios, punto q, como intersección de dicha circunferencia con el radio que pasa por la intersección de la charnela Q con la vertical del lugar.

En el trazado de la curva diurna de los solsticios -hipérbola- se observa que por coincidir el azimut de orto del sol en el solsticio de invierno y el azimut de ocaso en el solsticio de verano, con el azimut del muro, una de las asíntotas de la hipérbola es horizontal y por lo tanto las líneas horarias de orto del solsticio de invierno y la de ocaso en el solsticio de verano, son horizontales.

En la figura 26 se ha representado el cuadrante vertical trazado en la figura 25. En él se han dibujado las líneas diurnas de los solsticios y la de los equinocios, así como las líneas horarias de las VIII, IX, X, XI, XII; I, II, III, IV, V y VI y las de orto en el solsticio de invierno (horizontal) paso del sol por el plano del cuadrante (P.P.C.) en los equinocios (paralela a la línea diurna de equinocios), P.P.C. en el solsticio de verano (paralela a la asíntota inclinada), ocaso en el solsticio de invierno, ocaso en los equinocios (estas dos últimas como intersección de las correspondientes líneas diurnas con el horizonte del cuadrante) y por último la de ocaso en el solsticio de verano (horizontal).

## TRAZADO DEL CUADRANTE SOLAR PLANO: 2º PROCEDIMIENTO (PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE 2ª CATEGORÍA)

El método de trazado que exponemos a continuación se basa en que el paralelo que recorre el sol a lo largo del día y su proyección cónica desde el extremo del gnomón sobre el plano del cuadrante, línea diurna, son figuras planas homográficas por ser perspectivas, es decir, secciones planas de una misma radiación: el cono de los rayos solares de vértice el extremo del gnomón, seccionado por el plano del cuadrante y el plano del círculo paralelo que recorre el sol. Por tanto, ambas secciones son homológicas (19) y en consecuencia también lo serán la proyección sobre el plano del cuadrante del paralelo recorrido por el sol y su abatimiento sobre dicho plano (20).

Demostrada la correspondencia homológica entre ambas líneas, los elementos de dicha homología plana quedan definidos de la siguiente forma (figura 27):

a.- El eje es la traza del plano del círculo paralelo con el plano del cuadrante, materializada por la intersección del plano perpendicular al gnomón que pasa por la traza de la generatriz contenida en el plano meridiano.

b.- El centro de homología es la proyección del vértice del cono de los rayos solares, sobre el plano del cuadrante en la dirección perpendicular al plano bisector del diedro formado por el plano del cuadrante y el plano de la sección recta descrita, de tal forma que si proyectamos en la misma dirección el vértice del cono sobre el plano de la sección recta del cono de los rayos solares, al abatir este plano sobre el plano del cuadrante, ambas proyecciones coincidirán.

c.- La recta límite del plano del cuadrante, recta L, queda determinada por la intersección de dicho plano con el plano paralelo a la sección recta del cono, trazado por su vértice.

d.- La recta límite del abatimiento, recta L', se obtiene de igual forma, hallando la intersección del plano que contiene a la sección recta con un plano paralelo al plano del cuadrante trazado por el extremo del gnomón y abatiendo áquel sobre el del cuadrante, siendo L' la recta intersección abatida (21).

Definida la homología, la línea diurna se puede trazar hallando la homóloga del abatimiento de la sección recta del cono de los rayos solares producida por un plano que pase por la traza de la generatriz contenida en el plano meridiano.

La naturaleza de la curva diurna, transformada de la sección recta abatida, queda definida al estudiar la intersección de dicha sección recta, circunferencia abatida, con la recta límite L'.

Si la circunferencia y la recta límite L' se cortan en dos puntos, la curva diurna tendrá dos puntos impropios, homólogos de los dos puntos de la recta límite, caso hipérbola.

Si la circunferencia abatida y la recta límite L' no se cortan, la homóloga de la circunferencia ha de ser una cónica sin puntos impropios, caso elipse.

Por último si ambas líneas son tangentes, la homóloga de la circunferencia será una parábola, curva diurna con un solo punto impropio.

Estudiaremos sólo uno de los casos, concretamente el caso hipérbola, ya que el proceso de cálculo es similar en todos ellos (figura 28).

Trazado de las asíntotas: En primer lugar se pueden trazar las asíntotas de la hipérbola, si se tratase de este tipo de cónica. Para ello es suficiente hallar el homólogo del punto de intersección de la circunferencia abatida con su recta límite L'. Dicho homólogo será por definición el punto impropio de la recta que lo une con el centro de homología. La dirección así encontrada es la dirección asintótica. La asíntota es la paralela a la dirección calculada trazada por el punto medio del segmento que une los vértices de la hipérbola, calculados como en el caso anterior.

Las paralelas a las asíntotas trazadas por la traza del gnomón con el plano del cuadrante a las direcciones asintóticas, en el caso de cuadrante horizontal, determinan las horas de orto y ocaso, y si el cuadrante es vertical, la hora de paso del sol por el plano del cuadrante.

Trazado de las líneas diurnas: Dividiendo la circunferencia abatida en 24 partes comenzando por su punto de tangencia con el cuadrante y hallando los homólogos de los 24 puntos obtenidos con sus correspondientes tangentes, se obtienen suficientes datos para el trazado de la curva diurna y las correspondientes líneas horarias como se hizo en el caso anterior.

Trazado de las líneas horarias: Los homólogos de los puntos horarios se obtienen trazando la recta homóloga de la que une la intersección de la circunferencia con la recta límite L', con el punto horario correspondiente. La recta homóloga será la que une el punto de intersección con el eje de la recta trazada con el homólogo del punto de la recta límite L', dirección asintótica. El homólogo del punto horario estará sobre la recta calculada y alineado con el centro de homología.

Uniendo los puntos horarios de la curva diurna con la traza del gnomón con el cuadrante, se obtienen las correspondientes líneas horarias.

Trazado de las tangentes a la curva diurna: Para determinar las tangentes en los puntos calculados, se trazan las tangentes a la circunferencia, sección recta abatida, por el punto correspondiente y se halla la recta homóloga de dicha tangente que ha de ser tangente a la curva diurna en el homólogo del correspondiente punto horario.

Una vez analizados y estudiados los métodos para el trazado de los cuadrantes planos, daremos unas normas para su correcta realización ya que de ésta depende la exactitud del cuadrante.

La figura 34 es un cuadrante horizontal plano construído para la latitud 37°, el cual nos va a servir de ejemplo para ver la metodología que se ha seguido en su trazado.

En primer lugar se ha decidido el número de líneas horarias que se van a representar, en este caso las líneas correspondientes a las horas y las divisiones en cuartas partes, es decir una línea horaria cada cuarto de hora. Esto quiere decir que tenemos que proyectar los meridianos separados entre sí 3'75° a partir del meridiano del lugar.

Las líneas diurnas se han elegido las que representan a los solsticios $\delta = \pm 23°27'$ y los equinocios $\delta = 0$. El resto de las fechas se han escogido por ser las que se corresponden con posiciones de la tierra en su órbita separadas entre sí 30°, tomando como origen el equinocio de primavera (22).

| | | |
|---|---|---|
| 22 Diciembre | (solsticio) | = -23°27' |
| 22 Noviembre y 20 enero | | = -20°10' |
| 23 octubre y 19 febrero | | = -11°12' |
| 23 septiembre y 21 marzo | (equinocio) | = ±0° |
| 23 agosto y 21 abril | | = +11°40' |
| 23 julio y 22 mayo | | = +20°16' |
| 22 junio | (solsticio) | = +23°27' |

A continuación se comenzará el trazado empezando por la línea de equinocios (figura 1). Para mayor exactitud, por tratarse de un cuadrante simétrico sólo se ha realizado la mitad del trazado.

En la figura 29 hemos tomado como plano horizontal de proyección el del cuadrante, y el meridiano como plano vertical de proyección.

Abatida la circunferencia de equinocios, se ha dividido en arcos de 3'75° y éstos se han proyectado sobre la línea de equinocios, obteniéndose así las líneas horarias requeridas, al unir dichos puntos con el pie del gnomon.

Este trazado nos servirá de base para los siguientes, que se trazarán en papel vegetal sobre la figura 29 ,así cuando calculemos la traza correspondiente a una generatri Z del cono de los rayos solares, como comprobación ha de coincidir sobre la línea horaria correspondiente de los trazados en la figura

Las figuras 30,31,32, son los trazados de las líneas diurnas correspondientes a los días y declinaciones de la tabla anterior.

Para su trazado se han seguido las explicaciones de la página 167 del presente capítulo, usando sólo las generatrices del cono de los rayos solares correspondientes a los meridianos horarios. De esta forma se simplifica el trazado de la curva diurna, calculándose los puntos correspondientes a las subdivisiones horarias por la intersección de la correspondiente línea horaria con la línea diurna.

En la figura 33 se ha calculado como ejemplo la misma línea diurna de la figura 32, pero usando el método proyectivo.

Por último, el cuadrante solar (figura 34) se obtiene pasando por transparencia todos los datos obtenidos en las figuras anteriores y sus simétricas a un nuevo papel vegetal.

En él se pueden observar las hipérbolas diurnas y líneas horarias y las horas de orto y ocaso para cada una de las líneas diurnas trazadas, para lo cual se han trazado por el pie del gnomón las correspondientes líneas horarias paralelas a las asíntotas de las hipérbolas.

## LECTURA DEL CUADRANTE SOLAR. EL CUADRANTE DE HORA MEDIA

Al ser un cuadrante solar una proyección de la esfera celeste- representada ésta por la proyección de sus círculos, meridiano y paralelos- desde el extremo del gnomón sobre el plano del cuadrante, y como la sombra del extremo del gnomón representa la proyección del sol sobre dicho cuadrante, al observar un cuadrante solar expuesto correctamente al sol, lo que tenemos ante nosotros es una representación de la bóveda celeste y del sol real situado sobre el cuadrante en relación con las líneas de éste, de la misma forma que está el sol real en la bóveda celeste en relación con sus círculos meridianos y paralelos. Como las líneas representadas en el cuadrante son los paralelos de igual declinación -líneas diurnas- y los meridianos -ángulos horarios-, en una primera lectura del cuadrante, se obtiene la posición del sol sobre la esfera celeste mediante sus coordenadas ecuatoriales, horario y declinación del astro, o fecha y hora en tiempo verdadero, si la declinación, como es función del día, se expresa con la correspondiente fecha sobre la línea diurna y el ángulo horario se expresa en horas sobre la correspondiente línea horaria respectivamente.

Para deducir la hora oficial tendríamos que pasar el T.V. leído en el cuadrante a T.M. mediante la ecuación del tiempo.

Si en el transcurso de un año, sobre un cuadrante solar, señalamos la sombra del extremo del gnomón a las 12 h. de T.M. se obtendrá una línea en forma de lemniscata que es la meridiana del T.M.

Dicha meridiana la podemos obtener de una forma gráfica hallando las trazas de las generatrices del cono de los rayos solares correspondientes a las horas de paso del sol verdadero por el meridiano del lugar. Las horas que tenemos que utilizar a tal fin, se pueden obtener directamente del Almanaque Naútico del Instituto y Observatorio de la Marina de San Fernando, o bien deducirlas de la ecuación del tiempo.

En la tabla adjunta se indican 14 fechas para las que la ecuación del tiempo toma valores especiales, tales como los máximos y mínimos o los puntos de coincidencia del tiempo verdadero y medio (valores para los que se anula la ecuación del tiempo).

| FECHA | DEC. | ECUACION | OBSERVAC. |
|---|---|---|---|
| 11 Feb. | -13° 56' | +14m. 19s. | Máximo |
| 21 marzo | 0 | + 7m. 4s. | Equinocio |
| 13 abril | +9° | 41s. | Punto doble |
| 15 abril | +9° 50' | 0 | T.V.=T.M. |
| 15 mayo | +18° 55' | -3m. 45s | Mínimo |
| 14 junio | +21° 39' | 0 | T.V.=T.M. |
| 22 junio | +23° 26' | +1m. 43s. | Solsticio |
| 26 julio | +23° 26' | +6m. 25s. | Máximo |
| 30 agosto | +9° | 46s. | Punto doble |
| 1 sept. | +8° 21' | 0 | T.V.=T.M. |
| 23 sept. | -0 | -7m. 26s. | Equinocio |
| 3 nov. | -15° 8' | -16m. 24s. | Mínimo |
| 22 dic. | -23° 26' | -1m. 40s. | Solsticio |
| 25 dic. | -23° 23' | 0 | T.V.=T.M. |

En la figura 35 se han trazado los puntos correspondientes a los ceros de la ecuación del tiempo y los correspondientes a los máximos, 25 de diciembre y 26 de julio, y junto al trazado de los puntos se ha dibujado el meridiano de hora media para un cuadrante horizontal en una latitud de 37°.

Si por el mismo procedimiento sustituímos cada meridiano por el correspondiente de hora media, se obtiene un cuadrante analemático de hora media, es decir, el extremo del gnomón nos indica directamente el T.M.

Al igual que sobre los cuadrantes estudiados hasta ahora se han proyectado los círculos meridianos y paralelos, con lo cual obtenemos -como se ha indicado en el apartado anterior- en una primera lectura la posición del sol sobre la esfera celeste mediante sus coordenadas ecuatoriales -ángulo horario y declinación-, si sobre un cuadrante solar proyectamos los círculos almucantarates y los verticales, es decir, las líneas de isoaltura e isoazimut, la posición del sol en la esfera celeste se obtendrá mediante las coordenadas horizontales altura y azimut.

El cuadrante azimutal de más fácil aplicación es el horizontal por la facilidad de construcción. Al ser los almucantarates paralelos al horizonte, su proyección desde el extremo del gnomón sobre el plano horizontal son circunferencias, y los verticales que pasan todos por el extremo del gnomón se proyectarán según un haz de rectas con centro en la proyección ortogonal del extremo del gnomón sobre el cuadrante.

El trazado de este tipo de cuadrante está explicado en la figura 36 . En dicha figura se han proyectado los almucantarates de grado en grado y los verticales de 2 en 2 grados.

Estos cuadrantes, al no depender la altura de los almucantarates ni los verticales de la latitud, son universales, es decir, funcionan en cualquier latitud y el gnomón recomendado es una varilla vertical.

## GRÁFICOS DE CONVERSIÓN DE COORDENADAS

Si bien el cuadrante azimutal por sí sólo no es de gran utilidad, si es muy interesante la aplicación en unión con un cuadrante solar tradicional.

Superponiendo ambos cuadrantes, (figura 37 ) de forma que coincida la línea meridiana de las XII con la de azimut = 0 y el centro del cuadrante azimutal con la proyección ortogonal del extremo del gnomón, se obtiene un gráfico en el cual están proyectados los dos sistemas de referencia, el horizontal y el ecuatorial.

Situando un punto sobre el cuadrante mediante dos coordenadas, por ejemplo por la intersección de la línea diurna del 20 de enero y la horaria de las 3 de la tarde ( $\delta$ = -20°10' H = 45°) se puede leer la altura y el azimut correspondiente h = 21'3, a = 43°. O bien resolver el problema inverso entrando con las coordenadas horizontales obteniendo las ecuatoriales.

## NOTAS AL CAPÍTULO V

1.- Para el estudio de la naturaleza de las cónicas emplearemos el método general de trazar un plano paralelo al plano secante por el vértice del cono. En nuestro caso un plano paralelo al cuadrante por el extremo del gnomon. Según sea la sección producida en el cono por dicho plano: dos generatrices; una sola generatriz (plano tangente); o un punto (el plano solo corta al cono en el vértice), la línea obtenida por la intersección del plano del cuadrante será: una hipérbola, parábola o elipse, respectivamente.

2.- A esta misma conclusión llega J.A. Doucobo Duarte y A. Elipe Sanchez, en: Astronomía 280 problemas. pp 366-367, Santiago, 1983, analizando la ecuación de la cónica:

$a_{11}\ x^2 + a_{22}\ y^2 + 2a_{10}x + a_{00} = 0$, en la que:

$a_{11} = (1 - tg^2\delta \cdot tg^2\varphi)$ ; $a_{22} = - tg^2\delta \cdot (1+tg^2\varphi)$;

$a_{10} = tg\ \varphi\ (1 + tg^2\delta)$ y $a_{00} = tg^2\varphi - tg^2\delta$ .

3.- Plano paralelo al primer vertical.

4.- F. Ramón en su obra, Soleamiento en una situación urbana, (Manual crítico de diseño del alojamiento español nº 5), Madrid, 1977, llega a las mismas conclusiones después de analizar la trayectoria del sol sobre la bóveda celeste. pp 5 y 6.

5.- M.L. Vitrubio 9, VI (continuación al VII en varias ediciones). Traducción A. Blãzquez. P 242. Barcelona, 1982.

6.- M.L. Vitrubio. Opus citada VII (también el VIII en otras ediciones) pp. 243 a 246.

7.- Kircher, A. Ars Magna Lucis et Umbrae. Liber V pp. 422 a 425. Roma, 1676 y Buchner, E. Die Sonnenuhr des Augustus. pp 19 a 27. Mainz, 1982, dan una descripción de cómo se usa el analema de Vitrubio para el trazado de los cuadrantes solares.

8.- El proceso de cálculo, no necesariamente ha de ser el seguido, pudiéndose obtener primero el centro, vértices, ejes y asíntotas, y luego los puntos de la curva diurna con sus correspondientes tangentes.

9.- Ver análisis del cuadrante solar plano p.

10.- Ver análisis del cuadrante solar plano p.

11.- En este caso la curva obtenida es la misma para los dos solsticios; sólo existe realmente para el solsticio de verano en el hemisferio norte y para el de invierno en el sur.

12.- La generatriz buscada es la que proviene del sol cuando éste está más al E. o al W. según los casos.

13.- La elección de las generatrices se hace en el abatimiento de la circunferencia directriz del cono, tomando puntos sobre ella, equidistantes 15°, a partir de su punto de tangencia con el plano horizontal de proyección.

14.- El valor teórico de dicho ángulo es de 128,19°. El error cometido es de 46 s.

15.- En el solsticio de invierno se tomará el ángulo horario suplementario y las horas serán: 15h. 28m. y 8h. 32m.

16.- El verdadero valor del ángulo $H_1$ se puede obtener mediante la expresión $\cos H_1 = tg\, \delta \cdot tg\, \varphi$, resultando para $H_1$ el valor - 4h. 43m. 41s. Con lo que el orto y el ocaso tienen lugar a las 7h. 16m 19s. y 16h. 43m. 41s. respectivamente.

17.- Sólo para los días en los que la declinación es el valor complementario de la latitud.

18.- El ángulo H viene dado por la expresión $\cos H = tg\, \delta / tg\, \varphi$. Las horas de paso del sol por el plano del cuadrante deducidas de la expresión anterior son: en el solsticio: 8h. 20m. 35s. y 15h. 39m. 25s., con lo que el tiempo de insolación es de 7h.18m. 15s.

19.- P. Puig Adam. Curso de Geometría Métrica. Tomo II. P.160. Madrid, 1978-11 e.

20.- Ibidem. p. 162.

21.- J.M. Raya Román. "Apuntes de Proyectividad aplicada" pp. 38 a 42. Cuadernos de Geometría-1., 1983.

22.- Este mismo criterio sigue J. Kovalevsky en la reconstrucción del cuadrante solar del Observatorio de Juvisi.

# CAPITULO VI.- RELOJES ESFERICOS

En el presente capítulo, en contraposición con el anterior, la aplicación de las teorías desarrolladas anteriormente se harán sobre modelos concretos, los relojes (1) de Mérida y Belo (2), representativos de los modelos de relojes esféricos romanos existentes.

Con ésto pretendemos contribuir al estudio y conocimiento de dichos relojes, pero sobre todo lo que pretendemos es abrir un nuevo campo a la geometría descriptiva: el de la investigación arqueológica, buscando, interpretando y justificando los trazados geométricos empleados en la construcción de tales instrumentos con los conocimientos actuales del sistema diédrico y las proyecciones cónicas, ya que dichos trazados, la mayoría de las veces, se nos presentan como meros gráficos empíricos.

La primera dificultad que encontramos en el estudio de los relojes esféricos es su propia forma; la esfera no es desarrollable, y aunque la imagen de la esfera celeste que se proyecta en la esfera del reloj es similar a la que se forma en nuestra retina, comprendemos mejor una imagen plana, fotografía o perspectiva cónica, que una imagen esférica, porque culturalmente, por la facilidad de manejo, siempre se ha representado sobre el espacio de dos dimensiones (3).

Estas dificultades las intentaremos salvar mediante las suficientes proyecciones diédricas y cónicas y las secciones y abatimientos necesarios para la definición de cada una de las líneas representadas en las esferas de los relojes.

Los relojes esféricos son proyecciones cónicas de la bóveda celeste sobre una superficie esférica. Por lo general sólo se representa la bóveda celeste mediante los círculos de solsticios, trópicos de cáncer y de capricornio, y el círculo de equinocios, círculo ecuatorial.

La proyección de los círculos de solsticios o cualquier paralelo correspondiente a una fecha determinada que se quiera representar sobre la esfera del reloj, se hará como intersección de dicha esfera con el cono de los rayos solares de directriz el círculo que se quiere representar y vértice el centro de la proyección cónica escogida. El eje del cono de los rayos solares, coincide con el eje de la tierra, está por lo tanto situado sobre el plano meridiano y forma con el horizonte un ángulo igual a la latitud del lugar.

La línea de equinocios, línea que representa a la trayectoria diurna del sol cuando su declinación es nula, se obtiene como sección de la esfera por el plano del ecuador, (plano trazado por el vértice del cono de los rayos solares y perpendicular a su eje)

Las líneas horarias, en el caso de los relojes romanos, se obtienen dividiendo el arco de círculo que describe el sol sobre el horizonte, en doce partes equivalentes a tiempos iguales (4). Estas líneas no coinciden con los círculos horarios actuales, círculos meridianos (5), excepto la línea horaria del mediodía, que en ambos casos está representada por el meridiano del lugar.

Como las líneas horarias así determinadas no pasan por los polos, para marcar las horas no tiene sentido un gnomón paralelo al eje de la tierra, porque su sombra no coincidiría con la línea horaria salvo en el mediodía.

En los relojes romanos la varilla ha de ser sustituída por un punto situado en el centro de proyección de la esfera; de esta forma, la sombra de dicho punto al proyectarse sobre la esfera del reloj representará al sol que se moverá sobre ella recorriendo una línea diurna en sentido contrario al movimiento del sol real, ya que la imagen sobre la esfera del reloj es inversa por ser una proyección cónica, en la que el centro de proyección está entre el objeto y la imagen. Por la posición de la sombra del centro de proyección respecto a las líneas de la esfera, se podrá saber la hora del día y la estación del año.

La proyección cónica de la esfera celeste sobre la esfera del reloj, así como la determinación de las líneas horarias se consiguen con el analenma de Vitruvio (6).

Según la posición relativa del eje y vértice del cono de los rayos solares con respecto a la esfera del reloj, se obtendrán proyecciones diferentes que determinarán los distintos tipos de relojes esféricos.

Los relojes que vamos a estudiar en este capítulo son dos, correspondientes a los dos tipos de relojes romanos más frecuentes:

el de Mérida, en el que el eje del cono de los rayos solares pasa por el centro de la esfera y el vértice es interior a ésta, y el de Belo, en el que el eje del cono de los rayos solares no pasa por el centro de la esfera y el vértice se sitúa sobre su superficie.

## RELOJ SOLAR DE MÉRIDA

El reloj solar de Mérida apareció en las excavaciones de Emerita Augusta, estuvo expuesto en los alrededores del teatro romano, y en la actualidad, se conserva en el Museo Arqueológico de Mérida. Es un modelo de reloj solar parecido al reloj solar de Beroso (7 ).

Está trazado en el interior de un huso esférico de 52°30' de amplitud, vaciado en un bloque de mármol con forma de prisma recto triangular, con una de las caras rectangulares en posición horizontal. El reloj se mantiene en su posición mediante un basamento también en forma de prisma triangular de las mismas características que el descrito. En la cara frontal del basamento hay un rehundido rectangular de dimensiones 410 x 230 x 20 m.m.

Ambos prismas tallados en un mismo bloque forman una unidad (figura 1), cuyas dimensiones totales son:

Alto...... 473 m.m.

Ancho..... 610 m.m.

Fondo..... 385 m.m.

El huso pertenece a una esfera de radio R = 246'5 m.m. Dicha esfera está tallada en el prisma triangular de forma que la intersección de áquella con dos de las caras rectangulares del prisma, las que forman entre sí el ángulo de 52°30', son dos arcos de circunferencia de 245'5 m.m. de radio.

Con estos datos se deduce que el centro de la esfera ha de estar en el plano bisector de las caras del prisma interceptadas por la esfera y a una distancia de ambas de 19 m.m.

Análisis de la esfera del reloj (figura 2): En el interior del huso esférico que constituye la esfera del reloj están gravadas una serie de líneas que son las proyecciones cónicas de círculos celestes.

Paralela al borde inferior del huso y a 19 m.m. de él, está trazada la primera línea. Por su paralelismo con el borde se deduce que es un arco de circunferencia, y por su distancia al mismo, también se deduce que la circunferencia está contenida en un plano que pasa por el centro de la esfera; por tanto, la esfera y la circunferencia descrita son concéntricas.

Equidistante a la circunferencia anteriormente descrita, existen otras dos líneas, arcos de circunferencias que determinan dos planos separados entre sí 69 m.m. y separados del plano que contiene a la primera línea descrita 107'2 m.m. (8).

Las circunferencias descritas se corresponden con los círculos de solsticios, las dos exteriores, y con el círculo de equinocios, la interior, y son las líneas que recorrerá la proyección del sol cuando éste recorra en los solsticios los círculos de cáncer y capricornio y en los equinocios el círculo ecuatorial.

En la zona esférica delimitada por los círculos de solsticio están gravadas las líneas horarias. Estas líneas parten de un punto de la circunferencia de solsticio de invierno, cortan a la circunferencia de equinocios y terminan sobre la circunferencia de solsticio de verano, de tal forma que cada arco de circunferencia queda dividido en doce arcos iguales entre sí, pero de distinta amplitud según a la circunferencia a que pertenezcan. La sexta línea horaria coincide en el plano de simetría del huso, representa al mediodía y se corresponde con el meridiano del lugar.

<u>Proyección del reloj sobre el plano meridiano</u> (figura 3): El plano meridiano del reloj es el plano de simetría de su esfera y por lo tanto, contiene al centro de ésta. El contorno aparente de la esfera sobre el plano meridiano será pues una circunferencia de radio 246'4 m.m. y centro el punto de la bisectriz del ángulo 52°30' que forman las caras del prisma de piedra, las cuales se verán como rectas, puesto que son proyectantes al meridiano y distante a dichas caras 19 m.m. como se dedujo en el apartado anterior.

Por otro lado, el plano meridiano del reloj, al coincidir con el plano meridiano del lugar, contiene también al eje del cono de los rayos solares -eje de la tierra- y por lo tanto contiene al vértice del cono, que es a su vez el centro de la proyección cónica de la esfera celeste sobre la esfera del reloj.

El plano meridiano es también plano de simetría de las circunferencias de solsticios y equinocios, puesto que éstas son las intersecciones del cono de los rayos solares con la esfera del reloj y como el plano meridiano es plano de simetría de la esfera y del cono de los rayos solares por contener al eje de dicho cono, también lo será de sus intersecciones (9).

Deducido que el plano meridiano es el plano de simetría de las circunferencias de solsticios y equinocios, se podrán trazar las proyecciones de éstas, pues el plano que las contiene ha de ser proyectante al meridiano y dichos planos equidistan entre sí 107'2 m.m. y 69 m.m. respectivamente.

El eje del cono de los rayos solares queda determinado en la proyección considerada por la recta perpendicular a los tres planos que contienen a las circunferencias de solsticios y equinocios, y que pasa por el centro de la esfera, centro también del círculo de solsticio de verano.

El vértice del cono de los rayos solares se obtiene como intersección de las rectas del contorno aparente del cono de los rayos solares sobre el plano meridiano, y estas rectas son las que unen los puntos de intersección de las trazas de los planos que contienen a las circunferencias de equinocios con la traza de la esfera del reloj, círculo meridiano.

Como comprobación se verá que la intersección de las rectas del contorno aparente del cono de los rayos solares tiene lugar sobre un punto del eje del cono, y que por dicho punto pasa la traza del plano que contiene a la circunferencia de equinocios, plano del ecuador, puesto que el vértice del cono de los rayos solares ha de ser el centro de dicho círculo.

Determinado el vértice del cono, queda definido el centro de la proyección cónica de la esfera celeste sobre la esfera del reloj.

El centro de proyección está, en el reloj de Mérida a una distancia:

$$d = 103{,}7 \text{ m.m.}$$

del centro de la esfera, y a una altura:

$$z = d \cos 52°30' - 19 = 44{,}1 \text{ m.m.}$$

del plano superior del reloj, siendo el ángulo de 52°30' el que forman las caras del prisma y 19 la distancia del centro de la esfera a la cara superior del mismo. La distancia x del centro de proyección al plano posterior del reloj es igual a:

$$x = D - d \operatorname{sen} 52°30' = 263{,}3 \text{ m.m.}$$

siendo D la distancia del centro de la esfera a la cara posterior del reloj, con un valor de 345'6 m.m. (ver figura 3).

Las proyecciones de las líneas horarias sobre el meridiano las obtendremos abatiendo previamente sobre dicho plano los arcos de círculos de solsticios y equinocios comprendidos dentro del huso de la esfera del reloj; y dividiendo dichos arcos en 12 partes iguales, obtenemos los arcos correspondientes a las horas de los distintos días.

Desabatiendo los puntos obtenidos hasta llevarlos a las proyecciones de las correspondientes líneas y uniendo los que indiquen la misma hora, obtendremos las correspondientes proyecciones de las líneas horarias.

Una vez obtenida la proyección completa sobre el plano meridiano se puede reconstruir el analenma de Vitrubio adaptado al reloj de Mérida, (figura 4) y sacar las conclusiones siguientes:

a.- Situación del gnomón: Al estar el centro de proyección de la esfera celeste sobre la esfera del reloj en un punto situado a 46'2 m.m. de la cara superior y a 260'6 m.m. de la cara posterior del reloj y en su plano de simetría, el gnomon del reloj de Mérida ha de ser una esferita que materialice dicho punto ( 10) y la sombra de dicha esferita representará la proyección del sol sobre la esfera del reloj.

b.- <u>Latitud para la que fue construido</u>: el eje del cono de los rayos solares, al ser perpendicular a las circunferencias de equinocios, que forman un ángulo de 52°30' con el plano horizontal, forma con dicho plano un ángulo igual a 90-52°30', es decir 37°30'.

Cuando el reloj de Mérida esté sobre un horizonte situado a 37°30' y orientado al sur, el eje del cono de los rayos solares será paralelo al eje de la tierra, y las circunferencias que representan al círculo meridiano, círculo de equinocios y círculos de solsticios, quedarán paralelas a éstos.

En esta posición y latitud, cuando el sol recorra un círculo diurno de solsticio o equinocios, la sombra del gnomón recorrerá la correspondiente circunferencia en sentido inverso. Es decir, el reloj de Mérida ha sido construído para funcionar a una latitud de 37°30' que es la latitud de Itálica.

c.- <u>Angulo de la eclíptica</u>: El ángulo que forma el contorno aparente del cono de los rayos solares para los solsticios con el eje, es de 67°10', por lo que sitúa a los círculos de solsticios a una altura de ± 22°49'. Esto nos indica que el constructor del reloj de Mérida, consideró un ángulo entre el plano de ecuador y el plano de la eclíptica de 22°49'. Este ángulo, debido al movimiento de precesión del eje de la tierra no es constante, según Newcomb, decrece 0'48" por siglo, teniendo en la actualidad un valor de 23°26,5'.

Vitrubio en el siglo I a. de JC. obtiene para dicho ángulo un valor de 24°, que se desprende de la explicación que da para la construcción de su analema: "Después se toma la decimoquinta parte de toda la circunferencia y abriendo el compás se pondrá una punta en la intersección del círculo con la línea del radio equinocial, en donde está la letra F y se harán a derecha e izquierda marcas en donde estarán las letras G y H" (analema de la figura 20 del capítulo V ) (11).

El error cometido en el trazado es de uno 48' y este error supone que si el extremo del gnomón es una esferita de 7'5 m.m. de diámetro en los solsticios, la sombra de la esfera recorrería la correspondiente línea, siendo tangente a ella por la parte exterior y en los equinocios sería el centro de sombra de la esfera la que recorrería la correspondiente línea.

d.- Horizonte del reloj: el hecho de la no coincidencia del centro de proyección con la cara superior del prisma en el que está tallada la esfera del reloj, supone la existencia de dos horizontes: el astronómico, plano horizontal que contiene al centro de proyección y el del reloj, plano de la cara superior del mencionado prisma, constatado este hecho porque en dicho plano comienzan y terminan las divisiones horarias de las líneas diurnas de solsticios y equinocios.

Una explicación a este cambio de horizontes, pueda ser que el constructor del reloj hubiese intentado representar en él una aproximación del horizonte real del lugar para el que construyó el reloj, entendiendo por horizonte real, la proyección sobre la esfera celeste de la línea que define las crestas de las montañas o edificaciones que circundan el emplazamiento previsto del reloj.

Debido a esta circunstancia, el sol no proyectará la sombra del gnomón sobre la esfera del reloj, hasta no haber alcanzado una cierta altura sobre el horizonte y dejará de proyectarla antes de llegar a él en el ocaso. El arco diurno representado en la esfera del reloj es de menor amplitud que el correspondiente arco diurno que recorre el sol sobre la esfera celeste y como consecuen cia las horas que marca el reloj de Mérida son más cortas que las correspondientes horas latinas para la latitud de 37°30'.

De lo anteriormente expuesto se deduce que el reloj de Mérida divide al día en doce horas reales de sol, es decir desde que éste aparece y se oculta por el horizonte real.

En la figura 4 se han obtenido mediante abatimientos al plano vertical de proyección, las alturas en las que el sol aparece o se oculta por el horizonte del reloj. Estos abatimientos se han realizado obteniendo previamente las proyecciones diédricas del centro de proyección, punto o'o, y la de los puntos del horizonte del reloj en los que tienen lugar los ortos y los ocasos, puntos 1'1, 2'2 y 3'3, uniendo estos puntos con o'o y abatiendo sobre el plano vertical de proyección, los planos proyectantes horizontales que contienen a las rectas 01, 02 y 03 respectivamente, se obtienen los ángulos $h_1$ , $h_2$ y $h_3$ que son las alturas en las que el sol comienza o deja de proyectar la sombra del gnomón sobre la esfera del reloj en el solsticio de invierno, equinocios y solsticios de verano respectivamente. El valor de dichos ángulos es:

$h_1$ = 19° 20' (solsticio de invierno)
$h_2$ = 16° 6' (equinocios de primavera y otoño)
$h_3$ = 13° 40' (solsticio de verano)

Igualmente en la misma figura 4 se han abatido sobre el plano - vertical de proyección las circunferencias de solsticios y equinocios, tomando como charnela la traza vertical del plano proyectante que las contiene, y con ellas los puntos 1'1, 2'2 y 3'3, obteniéndose los puntos (1) (2) y (3). Uniendo estos puntos abatidos a los centros de sus respectivas circunferencias, se obtienen los ángulos $H_1$ $H_2$ y $H_3$ , horarios correspondientes a los ortos y ocasos del sol sobre el horizonte del reloj.

En el mismo abatimiento se han llevado los puntos $1_v$ $2_v$ y $3_v$ puntos en los que tiene lugar los ortos y ocasos sobre el horizonte astronómico, obteniéndose los puntos $(1_v)$, $(2_v)$ y $(3_v)$. Uniendo estos puntos con los centros de las respectivas circunferencias, obtenemos los ángulos $\Delta H_1$ , $\Delta H_2$ y $\Delta H_3$ que son las diferencias de ángulos horarios existentes entre orto u ocaso de ambos horizontes.

Los valores de dichos ángulos son:

| | | |
|---|---|---|
| Para el solsticio de invierno..... | $H_1 = 50°30'$ | $\Delta H_1 = 20°39'$ |
| Para los equinocios.............. | $H_2 = 75°30'$ | $\Delta H_2 = 14°30'$ |
| Para el solsticio de verano....... | $H_3 = 95°30'$ | $\Delta H_3 = 13°20'$ |

e.- Las horas en el reloj de Mérida: La duración de las horas del reloj de Mérida es menor que las correspondientes horas latinas debido a la elevación del horizonte astronómico sobre el horizonte del reloj. Conocidos los ángulos horarios de orto y ocaso, se puede calcular la duración de las horas del reloj con sólo dividir por doce el doble de la amplitud del arco calculado, y expresarlo en horas; así para el arco obtenido para el solsticio de invierno la duración de la hora del reloj de Mérida expresada en horas astronómicas es de:

$$H_m = 50°30' \times 2/12 = 8°\ 25' = 33m.\ 40s.$$

Para los equinocios:

$$H_m = 75°30' \times 2/12 = 12°\ 35' = 50m.\ 20s.$$

Y para el solsticio de verano:

$$H_m = 95°30' \times 2/12 = 15°\ 55' = 1h.\ 3m.\ 40s.$$

En la figura 5 se han representado los arcos de ángulo horarios expresados en horas correspondientes a los solsticios y equinocios del reloj de Mérida, del horario latino para una latitud de 37° 30' y para el horario astronómico.

Con el diagrama de la figura 5 se puede expresar cualquier horario en función de los otros. Para su utilización, bastará trazar un radio, desde el centro de los diagramas, que pase por la hora del horario que se quiera expresar en función de los otros dos y leer sobre ellos la hora interceptada por el radio, interpolando linealmente si fuere necesario.

En dicha figura 5 y para servir de ejemplo, se ha trazado el radio R correspondiente a las 14h. astronómicas. Veamos a dicha hora solar local qué hora marcaría el reloj de Mérida y qué hora latina sería en una latitud de 37°30', latitud para la que fue construído el reloj.

En el solsticio de verano, el radio R intercepta a la circunferencia correspondiente del horario latino entre los puntos VI y VII, a una distancia igual a 2/3 del punto VI, es decir falta 1/3 de la hora latina de solsticio de verano para completar la hora VII. En cambio, en el círculo correspondiente del horario del reloj de Mérida, el radio R intercepta al arco determinado por las horas VII y VIII a 1/9 de la hora VIII, lo que significa que a las 2 de la tarde, hora solar local, en el reloj de Mérida falta 1/9 de hora, del horario de dicho reloj para el solsticio de verano, para completar la hora VIII.

En los equinocios la duración de las horas latinas y astronómicas coinciden, por lo que en el correspondiente círculo, el radio intercepta en el punto correspondiente a la hora VIII, es decir han transcurrido ocho horas desde la salida del sol (latinas o astronómicas). Sin embargo, en el horario del reloj de Mérida faltan 3/5 partes de su hora equinocial para completar la hora nona.

En el solsticio de invierno, a la misma hora solar astronómica, 2 de la tarde, en el horario latino faltan 7/9 de su hora de solsticio de invierno para completar la hora VIII y en el horario del reloj de Mérida falta 9/13 de su hora para completar la hora X.

## ANÁLISIS DE LAS LÍNEAS HORARIAS

De las 12 líneas horarias que hay trazadas en la esfera del reloj de Mérida, hay dos que están perfectamente definidas: la del mediodía y la correspondiente al orto y ocaso del sol.

La primera, hora sexta, es la intersección del plano de simetría con la esfera del reloj; es pues un arco de circunferencia máxima cuyo radio, igual al radio de la esfera, es de 246'4 m.m., y su plano contiene al centro de proyección y al centro de la esfera.

La segunda está definida por el plano del horizonte; es pues la circunferencia producida por la cara superior del reloj al cortar la esfera de éste. Dicha circunferencia dista del centro de la esfera 19 m.m., por lo que su radio será 245'6 m.m. y es perpendicular al plano meridiano que contiene a la hora del mediodía.

Las demás líneas horarias se han obtenido sobre la esfera del reloj uniendo los puntos correspondientes a una misma hora, determinados por los extremos de los arcos iguales en que han sido divididos cada uno de los arcos diurnos de las circunferencias de solsticios y equinocios.

Cada una de estas líneas horarias está definida por tres puntos y estos puntos que las definen por estar sobre la superficie de la esfera, no están alineados, por lo tanto, determinan un plano. La intersección del plano determinado por los tres puntos horarios con la esfera del reloj, es una circunferencia que ha de pasar por dichos puntos. Esta circunferencia es la que define la línea horaria correspondiente.

En la figura 6 -una proyección de la esfera del reloj de Mérida sobre su plano meridiano- se ha representado la línea horaria correspondiente a la hora III, o a su simétrica, la hora IX.

Para hallar las proyecciones verticales 1' 2' y 3' correspondientes a los puntos que determinan la hora III sobre cada uno de los círculos de solsticio y el de equinocios, se han abatido previamente estos círculos sobre el plano vertical de proyección y con ellos los correspondientes arcos diurnos determinados por el horizonte del reloj, arcos $a_1$ a, $b_1$ b, y $c_1$ c. Como la hora III se corresponde con la mitad del semiarco diurno, dividiendo estos arcos en dos se obtendrán los puntos (1), (2) y (3) correspondientes a dicha hora. Desabatiendo los círculos y con ellos los puntos (1), (2) y (3), se obtienen los puntos 1', 2' y 3' proyecciones verticales de la hora III o IX correspondiente a los solsticios y equinocios, y uniéndolos mediante una línea, se obtiene la proyección vertical de la línea horaria del reloj de Mérida correspondiente a la hora III o IX.

Una vez obtenida la correspondiente línea horaria, calculemos el plano que la determina. Para ello tracemos las proyecciones horizontales de los puntos 1' 2' y 3' calculadas como puntos pertenecientes a la esfera del reloj, puntos 1, 2 y 3 respectivamente. El plano que contiene a estos tres puntos está determinado por las rectas $R_1$ y $R_2$ definidas por los puntos 1-2 y 1-3 respectivamente. Tracemos sus proyecciones horizontales $r_1$ y $r_2$ y las verticales $r'_1$ $r'_2$ determinando sobre ellas sus trazas verticales $v'_1$ y $v'_2$, respectivamente. (Figura 7)

La recta definida por $v'_1$ y $v'_2$ es la traza vertical del plano que determina la hora III y su simétrica la hora IX. Esta recta, al no pasar por el centro de proyección, ni por el centro de la esfera, nos indica que el círculo de las mencionadas horas no pasa por el centro de proyección ni por el centro de la esfera, por lo que no es un círculo máximo.

Si repetimos esta misma operación para cada una de las líneas horarias, se verá que para cada una de ellas hay un plano distinto, que corta al plano del meridiano, plano vertical de proyección, en una recta distinta y que ninguna de éstas pasa por el centro de la esfera, por lo que excepto la hora VI, ninguna línea horaria será un círculo máximo. Tampoco ninguna traza pasará por el centro de proyección.

## PROYECCIÓN CÓNICA DE LA ESFERA DEL RELOJ SOBRE UN PLANO

Para comprender mejor el trazado realizado sobre la esfera del reloj, sería necesario un desarrollo de la esfera para obtener una imagen plana. Como el desarrollo de la esfera no es posible, analicemos el conjunto de líneas de la esfera mediante una proyección cónica de ésta, desde el mismo punto que se proyectó sobre la esfera del reloj la esfera celeste y usando como plano de proyección, un plano paralelo al eje del cono de los rayos solares, de tal forma que la intersección de éste con el horizonte del reloj sea una recta perpendicular al plano meridiano.

Para realizar la proyección cónica, dibujaremos sobre el plano del cuadro una proyección cilíndrica ortogonal de la esfera sobre el plano meridiano (figura 8) y una recta paralela al eje del cono de los rayos solares que representa a la traza del plano de proyección con el plano del cuadro. Por último, abatiremos el plano de proyección hasta hacerlo coincidir con el plano del cuadro.

El procedimiento empleado es el siguiente: se han trazado en la proyección cilíndrica tantas secciones planas paralelas al plano de proyección como puntos horarios. Cada una de estas secciones planas es una circunferencia paralela al plano de proyección y su proyección cónica es la traza del cono con el plano de proyección, de directriz dicha circunferencia y vértice el centro de proyección. Hallada la proyección cónica de la circunferencia que contiene a un punto horario, que también es una circunferencia, se hallará la proyección del punto horario, que ha de estar sobre la proyección de dicha circunferencia y ser la traza con el plano de proyección de la generatriz del cono de los rayos solares que pasa por el punto horario correspondiente.

Repitiendo esta operación para todos los puntos horarios, obtendremos la proyección cónica de todos ellos. Uniéndolos por orden I, II, III... se obtendrán las proyecciones cónicas de las líneas diurnas y uniendo los que representan a una misma hora y usándolos por el orden I-I-I, II-II-II, III-III-III... se obtendrán las proyecciones cónicas de las líneas horarias.

La proyección cónica de la línea de solsticio, circunferencia cuyo plano contiene al centro de proyección, es una recta, traza del plano ecuatorial con el plano de proyección.

La línea diurna de solsticio es la sección plana del cono de los rayos solares con el plano de proyección, es por tanto una hipérbola, puesto que el plano de proyección es paralelo al eje de dicho cono, y las direcciones de asíntotas de la hipérbola son las de las generatrices del cono de los rayos solares contenidas en el plano de desvanecimiento.

Las proyecciones de las líneas horarias son arcos de cónicas, puesto que salvo la línea correspondiente al mediodía -círculo meridiano que pasa por el centro de proyección-, las líneas horarias son circunferencias sobre la esfera del reloj, no paralelas al plano de proyección, y sus planos no contienen al centro de proyección.

Las proyecciones de líneas diurnas correspondientes a horas simétricas, I y XI, II y X, III y IX... se cortan en dos puntos de la línea correspondiente a la hora IV, eje de simetría, puesto que los planos que las contienen tienen la misma traza con el plano meridiano. Dichos puntos son las proyecciones cónicas de los puntos de corte de la traza mencionada con la circunferencia meridiana.

Para cada pareja de horas simétricas habrá dos puntos de cortes, diferentes, con el eje de simetría ya, que cada círculo horario se encuentra en un círculo cuya traza con el plano meridiano es distinta, salvo si el plano correspondiente es de una hora simétrica.

La proyección cónica obtenida representa a un cuadrante horizontal para una latitud $\varphi = 0$, es decir para el ecuador, y con un horario y un horizonte similar al del reloj de Mérida y es idéntica a la fotografía de la figura 9 . Fotografía tomada desde el centro de proyección, de tal forma que el negativo sea paralelo al plano de proyección usado, paralelismo fácil de conseguir, pues sólo hay que procurar que una vez situado el objetivo en el centro de proyección, aparezca coincidente con el centro del visor el punto de intersección del círculo meridiano con el equinocial y que ambos círculos se vean como rectas paralelas a los bordes del visor. Dicha fotografía corrobora las teorías desarrolladas sobre las proyecciones del reloj de Mérida.

## FUNCIONAMIENTO DEL RELOJ

Situado el reloj en la latitud para la que fué construído, 37° 30', y orientado al sur de tal forma que el plano meridiano del lugar coincida con su plano de simetría, y la cara superior esté perfectamente nivelada, estará dispuesto para su perfecto funcionamiento, después de situar el gnomón en su emplazamiento.

El gnomón ha de ser una esferita de unos 10 m.m. de diámetro aproximadamente y situada en el centro de proyección de la esfera, punto equidistante 46'2 m.m. del plano superior y 260'6 m.m. de la cara posterior del reloj, y sobre el plano de simetría. Posiblemente los taladros que existen en la esfera del reloj sean los emplazamientos de sendas varillas metálicas que soportasen a la esferilla que sirviese de gnomón en el punto indicado.

La sombra de la esferilla sobre la esfera del reloj representa a la proyección del sol sobre dicha esfera y por su posición respecto a las líneas horarias se podrá saber la hora, interpolando linealmente si fuera preciso, puesto que al recorrer la sombra de la esferilla siempre circunferencias paralelas al ecuador, los arcos recorridos por la sombra son proporcionales a los tiempos empleados.

Por la posición de la sombra de la esferilla respecto a las líneas diurnas representadas se podrá saber la estación del año. En este caso, cuando la sombra de la esferilla esté entre dos líneas horarias no es válida la interpolación lineal puesto que las líneas diurnas próximas a los solsticios están más juntas que la de los días próximos a los equinocios, ya que la separación entre ellas depende del valor que tome la declinación solar, y ésta varía según una ley sinusoidal.

En los equinocios de primavera y otoño, la sombra de la esferilla recorrerá la circunferencia de equinocios de tal forma que su centro se proyectará siempre sobre dicha circunferencia.

En los solsticios de verano e invierno, la sombra de la esferilla recorrerá las correspondientes circunferencias, pero esta vez la sombra será tangente a la correspondiente línea por la parte exterior de la zona que determinan ambas circunferencias.

La sombra de la esferilla no se proyectará sobre la esfera hasta que el sol no haya alcanzado una cierta altura sobre el horizonte astronómico y dejará de proyectarse sobre ella cuando el sol nuevamente vuelva a alcanzar la misma altura, debido a la no coincidencia de este horizonte con el horizonte del reloj. Por esta causa el horario del reloj de Mérida no coincide con el horario romano para la latitud 37°30', y sus horas son siempre más cortas que las correspondientes romanas, coincidiendo siempre ambos horarios en la hora sexta, medio día solar verdadero del lugar.

## RELOJ SOLAR DE BELO

El reloj solar de Belo apareció en las ruinas de la ciudad de este nombre, situadas en las proximidades de Tarifa, a 36°5' N. y 5°46' W. Fué encontrado en el interior de una vivienda, llamada casa del cuadrante, cerca de la playa (12). Se conserva en el Museo Arqueológico Nacional.

El reloj está trazado en una semiesfera de 604 m.m. de diámetro, vaciada en un bloque de mármol blanco en forma de prisma recto triangular. El prisma se apoya por una de sus aristas laterales, de tal forma que sus dos bases y una cara lateral son verticales, otra cara lateral es horizontal y la tercera cara lateral forma un ángulo con el horizonte de 55°, (figura 10). Sus dimensiones totales son: ancho 740 m.m.; alto 845 m.m. y fondo 602 m.m. Para mantenerse en esta posición, posee dos garras de león que constituyen el basamento de la pieza.

La semiesfera es tangente a la cara horizontal del prisma y su centro se sitúa en la cara inclinada de éste (figura 11).

En la cara horizontal se aprecia un orificio irregular, concéntrico al punto de tangencia con la esfera de unos 180 m.m. de diámetro, que se corresponde con la zona debilitada por la proximidad de las superficies interior y exterior. Concéntrico al orificio y por tanto, al punto de tangencia con la esfera, hay tallado un rebaje circular de 215 m.m. de diámetro, en donde iría acoplada una pieza metálica, que no ha sido encontrada, con un taladro circular por el cual entraría un rayo de sol, que al incidir sobre la superficie de la esfera, marcaría la hora y la estación del año.

La esfera del reloj es una proyección cónica de la esfera celeste, siendo el centro de proyección el orificio de la placa metálica. Como dicho punto está situado sobre la superficie de la esfera del reloj, el reloj de Belo pertenece al grupo de relojes romanos en losque el centro de proyección se sitúa sobre la misma superficie sobre la que se realiza ésta.

Análisis de la esfera del reloj: En el interior de la esfera del reloj hay trazadas una serie de líneas que son las proyecciones cónicas de círculos celestes. Tres de ellas mantienen un cierto paralelismo con la cara inclinada del prisma y las otras, once en total, son transversales a las anteriores. Prolongando todas las líneas, pasan por un mismo punto situado en el orificio de la cara superior, definiendo de esta forma el centro de proyección.

Las tres primeras líneas se corresponden con los círculos diurnos de solsticios y equinocios y las otras once con los círculos horarios.

Línea de equinocios: Es una línea perfectamente definida en la superficie de la esfera del reloj, está situada entre las dos líneas de solsticios guardando un cierto paralelismo con la cara inclinada del prisma. Está dividida en 12 arcos iguales por las líneas horarias, de una amplitud de 30° cada uno.

Esta línea es la proyección cónica del ecuador celeste, círculo que recorre el sol en los equinocios de primavera y otoño. Como dicho círculo pasa por el vértice del cono de los rayos solares y éste ha de situarse en el centro de la proyección cónica, el círculo ecuatorial pasará por el centro de proyección y su proyección será una línea plana, sección de la esfera del reloj por dicho plano. La línea de equinocios es pues una circunferencia cuyo radio es de 240 m.m. (figura 12).

En los equinocios el sol sale y se pone exactamente por el E. y W., respectivamente, y recorre un arco de 180° por encima del horizonte, siendo la doceava parte de dicho arco un ángulo de 15°, que al proyectarlo desde un punto de la circunferencia de equinocios, intercepta sobre ésta un ángulo de 30° equivalente a cada uno de los arcos en que está dividida.

De lo anteriormente expuesto se desprende que a arcos iguales se corresponden tiempos iguales.

Los arcos de la izquierda de la línea de equinocios se corresponderán con las horas de la mañana y los de la derecha con las de la tarde, puesto que al recorrer el sol en sentido directo el círculo ecuatorial, su proyecciión recorrerá en sentido contrario la circunferencia de equinocios.

Línea de solsticios: Son las proyecciones cónicas de los círculos de cáncer y capricornio, que son los que recorre el sol durante el día en los solsticios de invierno y verano respectivamente. Estos círculos equidistantes del ecuador, no son coplanarios con el centro de proyección, y al proyectarlos originan una superficie cónica cuyas directrices son los círculos mencionados y el vértice el centro de proyección, cono de los rayos solares.

La proyección cónica de dichos círculos de solsticios sobre la esfera del reloj estará definida por la intersección del cono descrito con dicha esfera, por lo tanto la línea de solsticio es una curva alabeada de 4° (13). Esta cuártica, por pertenecer a la esfera, carecerá de ramas infinitas, y por pertenecer al cono, como éste tiene su vértice sobre la esfera, tendrá un punto doble que coincidirá con el centro de proyección; y como el cono y la esfera tienen el mismo plano de simetría, la cuártica también será simétrica respecto el mismo plano. Se trata, pues, de una lemniscata alabeada con un solo plano de simetría (figura 13). Cada una de las ramas de la lemniscata representará al arco diurno de cada uno de los círculos de solsticios.

En el solsticio de verano, en el orto, los rayos solares serán tangentes al horizonte y por lo tanto a la lemniscata de solsticios.

(Figura 14). A medida que se eleva sobre el horizonte, la proyección del sol recorrerá la rama inferior de la lemniscata en sentido inverso a como lo hace el sol sobre el trópico de capricornio. En el ocaso, los rayos de sol volverán a ser tangentes al horizonte y por lo tanto a la lemniscata, determinándose de esta forma la doble tangencia en el punto doble. Si virtualmente seguimos proyectando al sol sobre la esfera del reloj en su recorrido sobre el trópico de capricornio por debajo del horizonte, la proyección recorrerá la rama superior de la lemniscata. Igualmente sucederá si proyectamos el sol desde su recorrido por el trópico de cáncer, sólo que, en este caso, la proyección directa recorrerá la rama superior de la lemniscata, y la proyección virtual, cuando el sol se encuentra por debajo del horizonte, recorrerá la rama inferior de la lemniscata. La rama superior representará al solsticio de invierno y la inferior, al solsticio de verano.

Cualquier otro día del año, el sol recorre un círculo paralelo a los anteriores situado entre ambos trópicos. La proyección de estos círculos será igualmente una lemniscata que se proyectará en la esfera del reloj entre las ramas de la lemniscata de solsticios.

Como en día equidistante de los solsticios el sol recorre círculos equidistantes de los trópicos, cada lemniscata, excepto la de solsticios, representará la línea diurna de cuatro días -días en los que la declinación solar tiene el mismo valor absoluto-; dos se corresponderán con la rama superior, los correspondientes de otoño o invierno, y dos con la rama inferior de la lemniscata, los correspondientes a primavera o verano.

Al ir decreciendo el valor de la declinación, el ángulo del cono de los rayos solares aumentará, ya que éste vale:

$$\alpha = 2\ (90° - \delta)$$

siendo $\alpha$ el ángulo que forman dos generatrices coplanarias del cono, y $\delta$ el valor de la declinación solar; y en el caso en que se anula dicha declinación, el cono de los rayos solares es un plano, el plano ecuatorial.

Las lemniscatas diurnas a medida que decrece la declinación acercarán más sus ramas al círculo de equinocio, siendo éste el límite inferior de todas ellas. Al considerar al círculo de equinocios como límite de una familia de lemniscatas, estamos admitiendo que es una curva de puntos dobles como realmente lo es, pues la proyección del sol en los equinocios lo recorre dos veces, una realmente durante el día y la otra virtualmente cuando el sol recorre el arco de círculo ecuatorial situado por debajo del horizonte. Evidentemente, al existir una duplicidad en todos sus puntos hay también una reducción de grado, y la cuártica se transforma en una cónica, en este caso una circunferencia, por lo que el círculo de equinocios se puede considerar como dos circunferencias superpuestas.

Líneas horarias: Las líneas horarias representadas en el reloj de Belo dividen el tiempo que transcurre desde el orto al ocaso del sol en doce intervalos iguales cada día. Esto supone que el reloj de Belo marca horas latinas.

Para estudiar los círculos que representan en la esfera celeste las horas latinas, representamos a ésta en el sistema diédrico (figura 15), tomando como plano vertical de proyección el plano meridiano del lugar y como plano horizontal de proyección el plano del horizonte. Los círculos de equinocios y solsticios serán proyectantes verticales y formarán un ángulo con el plano horizontal de proyección igual a la colatitud del lugar. El plano horizontal determinará sobre dichos círculos el arco correspondiente al recorrido diurno, segmentos de arcos situados en el primer y segundo cuadrante.

Abatiendo los tres círculos, el ecuador y los trópicos, y con ellos los puntos 1', 2' y 3', en los que dichos arcos cortan al plano horizontal de proyección, se obtienen los puntos abatidos (1), (2) y (3), y los arcos correspondientes a los recorridos diurnos del sol en los solsticios de verano, equinocios y solsticios de invierno, arcos $a_1'$ -(1), $a_2'$ -(2) y $a_3'$ -(3), respectivamente.

Dividiendo estos arcos en doce partes iguales y desabatiéndolos, se obtendrían las proyecciones verticales correspondientes a las doce horas en las que se dividen cada uno de los días representados. Uniendo los puntos correspondientes a la misma hora obtenemos los arcos de línea horaria.

En la figura 15 se ha dividido el semiarco diurno en dos partes iguales, puntos (m), (n) y (ñ) que se corresponden con la hora latina III o con su simétrica, la hora IX. Desabatidos los puntos, se obtienen las proyecciones verticales de éstos, m', n' y ñ' y uniéndolos se obtiene el arco correspondiente a la hora III o su simétrica la IX. En la figura también se ha trazado el arco simétrico respecto al centro del dibujado en primer lugar y que se corresponderá con la misma hora latina de la noche.

Los tres puntos, m, n y ñ determinan un plano que será el mismo que determinan sus simétricos, $m_s$, $n_s$ y $ñ_s$. Si giramos la esfera alrededor del eje del cono de los rayos solares un ángulo tal que la proyección vertical del punto correspondiente a la hora III del equinocio, punto n', se sitúe sobre el centro de la esfera, los puntos m y ñ girarán un ángulo igual y sus proyecciones se superpondrán con las proyecciones de sus simétricos, por lo que después del giro las tres proyecciones y sus simétricas quedarán alineadas, puntos ((n)), ((m)) y ((ñ)), determinando de esta forma la traza vertical del plano en el que están situados. Dicha traza pasa por el centro de la esfera y corta al círculo meridiano en los puntos p' y q'.

Repitiendo la operación con cualquier otra línea horaria, llegaremos a una situación similar, es decir encontraremos otra traza con el plano meridiano del plano que contiene al círculo horario, éste pasará igualmente por el centro, pero cortará al círculo meridiano en dos puntos distintos al p y q.

El hecho de que los círculos horarios contengan al centro de la esfera, vértice del cono de los rayos solares y centro de proyección de la proyección cónica de la esfera celeste sobre la esfera del reloj, determina que las proyecciones de dichos círculos horarios sobre la esfera del reloj sean circunferencias. Dichas circunferencias son las secciones planas de la esfera producida por los planos de los círculos horarios, y, como dichos planos pasan por el centro de proyección, todas las líneas horarias del reloj también pasarán por él.

Sobre la esfera del reloj sólo se han representado los arcos de circunferencias horarias interceptados por la lemniscata de solsticios (figura 16.

## PROYECCIÓN SOBRE EL PLANO MERIDIANO

El plano meridiano es plano de simetría del cono de los rayos solares, del plano del ecuador y de la esfera, por lo que lo será también de la lemniscata de solsticio y de la circunferencia de equinocios.

Al proyectar la lemniscata sobre su plano de simetría (figura 17), sobre un punto de éste se proyectarán dos de las lemniscatas y la proyección así obtenida será una curva algebraica de grado la mitad de los de la cuártica, es decir, una cónica (14).

Cualquier lemniscata correspondiente a un día distinto de los de solsticios, se proyectará también como cónica y todas han de pasar por el centro de proyección, por lo que en la proyección sobre el plano meridiano todas las cónicas serán tangentes al contorno aparente de la esfera del reloj en el punto que representa la proyección del centro de proyección.

La circunferencia de equinocios, al proyectarse sobre su plano de simetría, también reduce su grado, y su proyección será una línea de primer grado (15) (recta doble); y como la circunferencia de equinocios es el límite de la familia de lemniscatas, su proyección también será el límite de las cónicas proyecciones de las lemniscatas.

En una familia de curvas, todas son de la misma naturaleza; en nuestro caso, curvas algebraicas de 2º grado, es decir, cónicas. Como la lemniscata límite se ha proyectado según una recta doble, cónica degenerada de una parábola, todas las proyecciones de las lemniscatas han de ser parábolas y todas han de tener el mismo punto impropio, por lo que la recta proyección de la circunferencia de equinocios ha de ser paralela a los ejes de las parábolas.

Esta propiedad nos sirve para determinar el vértice de dichas parábolas, que se encontrarán en la intersección de éstas con la recta paralela a la proyección del círculo equinocial, trazada por el punto medio del segmento determinado por las ramas de las parábolas sobre una recta que sea perpendicular a la proyección de la circunferencia equinocial (figura 18).

Para hallar puntos de la parábola proyección de la curva de equinocios, se ha cortado la superficie que la determina, cono de rayos solares y esfera del reloj, por una familia de esferas concéntricas, con centro en el plano de simetría de ambas y sobre un punto del eje del cono.

Cada una de las esferas así trazadas cortará a la del reloj y al cono de los rayos solares en sendas curvas que, por ser todas de revolución y por la elección del centro de la familia de esferas, serán circunferencias.

Los puntos de intersección de dos circunferencias pertenecientes a cada una de las superficies, cono de los rayos solares y esfera del reloj, producidas por una misma esfera secante, determinan los puntos de lemniscata, pues dichos puntos por pertenecer a las dos superficies son los puntos de intersección de estas circunferencias.

Como las circunferencias así obtenidas son también simétricas respecto el plano meridiano, se proyectarán sobre éste según rectas, y los puntos de la parábola estarán determinados por la intersección de dichas rectas.

Concluídas estas operaciones, quedará perfectamente definida la parábola proyección de la lemniscata de solsticios y la recta proyección del círculo de equinocios.

Si previamente a la realización de estas proyecciones marcamos sobre la lemniscata de solsticios y circunferencia de equinocios las divisiones correspondientes a las horas, y llevamos dichas divisiones sobre la proyección en el plano meridiano, obtendremos la proyección de las líneas horarias sobre el plano meridiano con sólo unir los puntos correspondientes a una misma hora.

Los arcos así obtenidos han de ser arcos de elipses, puesto que como se demostró anteriormente, los círculos horarios contienen al centro de proyección y por tanto su proyección sobre la esfera son circunferencias no coplanarias con el plano meridiano, excepto la hora VI-correspondiente al mediodía-que es el círculo meridiano.

Todas las elipses de proyección de las circunferencias horarias han de pasar por el centro de proyección, porque por él pasan todas las circunferencias horarias.

El cono de los rayos solares se proyecta sobre el plano meridiano como dos rectas que forman entre sí un ángulo doble a la declina ción solar máxima, es decir al doble del ángulo que forma el ecuador con el plano de la eclíptica.

El eje del cono de los rayos solares, coplanario con el plano meridiano, representa al eje de la tierra y es perpendicular al plano del ecuador. Forma con el plano horizontal un ángulo de 47°30'.

En la figura 19 se reproduce una adaptación del analema de Vitrubio para la construcción de un reloj esférico como el de Belo; obsérvese la similitud del analema con la proyección sobre el plano meridiano. En ella se observan los abatimientos de los círculos en equinocios y el de "menaeos" (16).

## PROYECCIÓN CÓNICA PLANA

La proyección cónica de la esfera celeste sobre la esfera del reloj es similar a la imagen que se forma en nuestra retina cuando miramos a la esfera celeste (figura 20), sí consideramos a la retina como una esfera perfecta. Sin embargo, el análisis de nuestra visión, como ya hemos indicado, se acerca más al plano. Imaginemos por ejemplo que sobre la bóveda celeste están materializados los círculos del ecuador y trópicos y las líneas horarias; al dirigir nuestra visión hacia la bóveda, exactamente hacia el punto de intersección del meridiano con el ecuador, la imagen que se forma sobre nuestra retina es idéntica a la trazada en el reloj de Belo, pero lo que vemos es la proyección plana de la esfera celeste sobre un plano perpendicular a la dirección de nuestra visión. La imagen es similar a una perspectiva cónica o a una fotografía (17).

Para demostrarlo, como hicimos con el reloj de Mérida, proyectamos la esfera del reloj según una proyección cónica sobre un plano perpendicular a la recta determinada por la intersección del círculo meridiano y el equinocial.

En la figura 21 se ha realizado esta proyección, dibujando previamente abatida sobre el plano de proyección, una proyección cilíndrica ortogonal de la esfera del reloj sobre su plano meridiano. La proyección cónica se ha obtenido mediante secciones planas de la esfera por los puntos de intersección de los círculos diurnos con los horarios, y proyectando dichas secciones que, por ser circunferencias paralelas al plano de proyección, se proyectarán según circunferencias. Las proyecciones de los puntos intersección de los círculos diurnos con los horarios, se hallarán como intersección de las generatrices del cono de visión que pasan por dichos puntos con el plano de proyección, y dichas proyecciones han de estar sobre las proyecciones de las circunferencias anteriormente obtenidas. Uniendo convenientemente las proyecciones de los puntos obtenidos, se obtendrán las proyecciones de las líneas diurnas y las líneas horarias.

La lemniscata de solsticio se proyectará según una hipérbola, intersección del cono de los rayos solares con el plano de proyección. Las asíntotas de la hipérbola han de tener la misma dirección que las tangentes en el punto doble, por estar éste en el plano de desvanecimiento (18). Para calcular éstas, se ha girado la proyección cilíndrica alrededor del diámetro vertical de la figura 21 , hasta que el punto doble se sitúe sobre el eje de giro, y poder, de esta forma, trazar las tangentes a la proyección cilíndrica de la lemniscata, que se verán formando el mismo ángulo que las asíntotas, por coincidir el plano sobre el que se ha realizado la proyección cilíndrica con el plano de desvanecimiento.

El círculo de equinocios se proyectará como una recta, eje imaginario de la hipérbola, pues al estar contenido en un plano que pasa por el centro de proyección, su proyección cónica será la recta intersección del plano que lo contiene con el plano de proyección.

El círculo meridiano contiene también al centro de proyección, por lo tanto su proyección es también una recta, el eje real de la hipérbola, por estar contenido en el plano de simetría.

Los círculos horarios se han de proyectar también como rectas, pues sus planos contienen también al centro de proyección, por lo tanto las proyecciones cónicas de los puntos horarios correspondientes a la misma hora han de estar alineados.

Como cada dos círculos horarios, correspondientes a horas simétricas, se cortan en un punto distinto del círculo meridiano (19), cada par de líneas horarias, proyección de dichos círculos horarios, se cortarán en un punto del eje real de la hipérbola que será distinto para cada par.

La proyección cónica así obtenida se corresponde con un cuadrante plano horizontal ecuatorial con horario latino.

Como comprobación de la teoría se ha realizado una fotografía, al igual que se hizo en el caso del reloj de Mérida; dicha fotografía se ha tomado disponiendo la cámara fotográfica como indica la figura 22, de forma que el foco del objetivo coincida con el centro de proyección, orificio de la placa metálica y que la recta que une dicho punto al de intersección de los círculos de equinocios y meridianos sea perpendicular al plano del negativo y pase por el centro de éste.

La fotografía así obtenida (figura 23) es semejante a la parte central de la perspectiva cónica de la figura 21 y en ella se puede comprobar la igualdad de los ángulos formados por las líneas de las horas I y IX con la recta de equinocios.

## ÁNGULO DE LA ECLÍPTICA CON EL ECUADOR. (POSIBILIDAD DE DATACIÓN)

El valor numérico tomado por el constructor del reloj de Belo para el ángulo que forman entre sí los planos de la eclíptica y el ecuador celeste, se puede deducir del valor del arco de meridiano comprendido entre las dos ramas de la lemniscata (figura 24).

$$\delta = FH \qquad -\delta = HG \qquad |\delta| = \frac{\alpha}{2}$$

Medidas las cuerdas correspondientes a los arcos FH y HG, se obtiene un valor medio de 242 m.m. y tomando para el radio de la esfera el valor 302 m.m. se obtiene que:

$$\text{sen} \quad \alpha/2 = \frac{R}{2/C}$$

siendo R el radio de la esfera y C la cuerda medida. De la expresión anterior se deduce que:

$$\delta = \text{arc} \quad \text{sen } C/2R = 23°37'$$

valor que concuerda con el medido sobre la proyección de la esfera del reloj sobre el plano meridiano en la figura .

Debido al movimiento de precesión, la oblicuidad de la eclíptica no es constante, según Newcomb, decrece 0'48" por siglo, teniendo en la actualidad el valor de:

$$\delta = 23^\circ\ 26'\ 30''$$

La primera vez que se midió dicho ángulo fue por Anaximandres de Mileto y más tarde por Ocnopides de Chios (20 ).

M.L. Vitrubio, en el siglo I a. de C., obtiene un valor para dicho ángulo de 24°: "Después se toma la decimoquinta parte de toda la circunferencia y abriendo el compás se pondrá una punta en la intersección del círculo con la línea del radio equinocial, en donde está la letra F y se harán a derecha o izquierda marcas en donde estarán las letras G y H" (analema de la figura del capítulo V ) ( 21).

A partir del siglo I a. de C., el valor considerado para la oblicuidad de la eclíptica es de:

$$\delta = 23^\circ\ 40'$$

Como el valor obtenido por la medición en la esfera del reloj o bien el medido sobre la proyección en el plano meridiano es de 23°37' magnitud inferior, se puede asegurar atendiendo a dichos valores que el reloj de Belo fue construído posteriormente a la fecha mencionada.

Como la circunferencia equinocial forma un ángulo con el horizonte igual a la colatitud del lugar, bastaría medir dicho ángulo y restarlo de 90° para obtener la latitud del lugar.

G. Bonsor mide dicho ángulo uniendo el punto H, centro del orificio de la cara superior, con el punto B, intersección del meridiano con el círculo equinocial (figura 25) (22), de donde deduce que la latitud vale:

$$\varphi = (90^\circ - 48^\circ\ 30') = 41^\circ\ 30'$$

Latitud muy próxima a la de Roma 41° 53' N., lo que le hace suponer a G. Bonsor que el reloj fuese construído para dicha ciudad.

En realidad, el punto que hay que unir con B (figura 26 ) es el centro de proyección, que es el punto de corte superior del círculo equinocial con el meridiano y no el punto H, punto de tangencia de la esfera con el plano superior. Estos dos puntos no son coincidentes y distan entre ellos 60 m.m.

Midiendo el ángulo real que forma el plano equinocial, recta OB de la figura **26** , con el horizonte, se obtiene un valor de 42°30' por lo que la latitud toma un valor de:

$$\varphi = (90° - 42°\ 30') = 47°\ 30'$$

Latitud superior a la calculada por G.Bonsor, y que se corresponde con ciudades tales como: Nantes 47°17' N., Zurich 47°23' N., Innsbruk 47°12' N....

En la figura sección plana de la esfera por el plano meridiano, se observa:

$$\alpha = 2 \text{ arc sen } (C/2R) = 11°\ 24'$$

siendo C la cuerda OH y R el radio de la esfera.

$$\beta = \alpha\ /2 = 5°\ 42'$$

es la diferencia de la colatitud medida por G. Bonsor.

$$47°\ 30' - 41°\ 47' = 5°\ 43' \simeq 5°\ 42'$$

El ángulo obtenido de 47°30' es el que forma la proyección del eje de la tierra con el plano determinado por la base del reloj, de donde se deduce que para que el reloj de Belo funcione correctamente situado sobre un plano horizontal, éste debe situarse en una latitud de 47° 30'.

## LATITUD EN LA QUE PUEDE FUNCIONAR EL RELOJ

Como la esfera del reloj es una proyección cónica de la esfera celeste desde un punto de la esfera del reloj, y dicha proyección es independiente de la latitud en la que se realice, el reloj de Belo es universal, pues inclinando convenientemente el basamento se podrá conseguir siempre el paralelismo del círculo de equinocios con el plano del ecuador.

En Belo, cuya latitud es de 36°5', sería suficiente para conseguir el paralelismo entre ambos círculos, inclinar el basamento un ángulo de 11°25' (figura 27 ):

$$47°30' - 36°5' = 11°25'$$

Este ángulo de 11°25' es muy significativo para el reloj, pues observando la sección del reloj por el plano meridiano (figura 26 ) se aprecia que si la esfera del reloj se gira los 11°25' para conseguir el paralelismo entre ambos círculos, el punto O, centro de proyección se situa en el punto H, punto más alto de la esfera cuyo plano tangente es paralelo al horizonte.

En esta posición coinciden los horizontes astronómicos y de la esfera del reloj y sería la posición correcta para su funcionamiento. En la posición horizontal el centro de proyección queda a 5'9 m.m. del punto más alto de la esfera, por lo que el horizonte astronómico se sitúa a esa misma distancia del horizonte del reloj. Esta circunstancia incide en el funcionamiento del reloj de la siguiente forma:

En los equinocios, a la salida y puesta del sol, los rayos solares serán siempre tangentes a la circunferencia de equinocios y el horario no sufre alteración.

En los días de primavera y verano, los rayos solares serán tangentes a la lemniscata diurna, poco después del orto y antes del ocaso, por lo que la hora prima y doceava se alargarán.

En los días de otoño e invierno, a la salida y puesta del sol, sus rayos serán secantes a las correspondientes ramas de las lemniscatas diurnas, y por tanto, la hora prima y doceava se acortarán.

En realidad la aseveración de que el reloj esférico cuyo centro de proyección esté sobre la superficie de la esfera es universal, es sólo absolutamente cierta cuando se trate de un reloj con horas astronómicas. En el caso del reloj de Belo, de horas latinas, es solamente válida para las líneas diurnas y las horas de los equinocios, pues éstas coinciden con el horario astronómico.

En los demás casos, al ser las horas latinas función de la latitud, para cada latitud las líneas horarias serán distintas, aunque para latitudes próximas, la variación sea pequeña. Así, para la latitud de Belo se tiene que el arco de círculo diurno correspondiente al solsticio de verano es de 217°9'42", y el correspondiente a una hora, 18°5'49"; y en el solsticio de invierno, los correspondientes arcos toman los valores: 142°50'18" y 11°54'11" respectivamente; y para la latitud de 47°30', los valores para el solsticio de verano son 237° y 19°45'; y para el solsticio de invierno, 123° y 10°15'.

La diferencia entre las horas de Belo y de la latitud de 37°30' son de 1°39'11" en los solsticios, siendo las de Belo más cortas que las de la latitud 37°30' en el solsticio de verano y viceversa en el solsticio de invierno. Esta diferencia de grados entre ambas horas disminuirá a medida que los días se acerquen a los equinocios, días en los que ambos horarios coinciden y coinciden también con el horario astronómico.

Como todos los horarios coinciden al mediodía, pues dicha hora es marcada por el meridiano del lugar, la diferencia de los dos horarios latinos considerados en el orto y el ocaso de los solsticios será de:

$$1^\circ\ 39'\ 11'' \times 6 = 9^\circ\ 55'\ 6''$$

y en las horas sucesivas de:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1° 39' 11" | x 5 = | 8° 15' 55" |
| II | | x 4 = | 6° 36' 44" |
| III | | x 3 = | 4° 57' 33" |
| IV | | x 2 = | 3° 18' 22" |
| V | | x 1 = | 1° 39' 11" |
| VI | | x 0 = | 0 |

Estas diferencias irán disminuyendo progresivamente a medida que los días se acerquen a los equinocios, en cuyas fechas todas las diferencias serán nulas.

En resumen, un reloj con horario latino instalado en una latitud que no sea la suya, marcará la hora con pequeño desfase, que será tanto menor como más cerca esté el día del de los equinocios, o la hora de la hora VI, siendo el reloj absolutamente exacto al mediodía de todos los días del año y a todas las horas de los días de equinocios. Igualmente será exacto en cuanto a las fechas, ya que la proyección del sol recorrerá cada día del año la línea diurna correspondiente.

## HIPÓTESIS SOBRE LA LATITUD PARA LA QUE FUE CONSTRUÍDO EL RELOJ DE BELO

Estudiadas las diferencias horarias para las horas latinas correspondientes a latitudes distintas, se pueden plantear las siguientes hipótesis sobre la latitud para la que fué construído el reloj de Belo:

a.- En la esfera del reloj están marcadas las líneas horarias correspondientes a una latitud de 47° 30', líneas correspondientes a un horizonte paralelo al plano superior del reloj cuando éste se apoya sobre un plano horizontal. Estas líneas horarias son las representadas en todas las proyecciones que han aparecido en esta tesis hasta este momento.

En este caso, el reloj ha sido construído para dicha latitud de 47° 30' y en Belo funcionaría con el desfase horario estudiado.

La única objeción a esta hipótesis es el cambio de horizonte que existe cuando el reloj se apoya sobre un plano horizontal, aunque como ya se ha visto, en el reloj de Mérida existe esta diferencia mucho más acusada. Esto hace pensar que los romanos no daban mucha importancia a las horas, y más bien lo que intentaban determinar con exactitud son las fechas y la hora VI, mediodía, datos que se obtienen en ambos relojes situados a cualquier latitud siempre que se orienten convenientemente.

b.- El reloj de Belo tiene grabadas las líneas horarias correspondientes a un horario italiano para una latitud de 36° 5', correspondiente a la ciudad de Belo (figura 28 ). En este caso el reloj ha sido construído expresamente para Belo y para situarse sobre un plano inclinado de 11° 25', pudiendo usarse como basamento una dovela de un arco de medio punto de 15 dovelas, que entre sus caras forman un ángulo aproximado.

Esta hipótesis reforzada por la coincidencia de ambos horizontes, el del reloj y el astronómico, tiene en contra el hecho de no haberse planteado al construir el reloj, el haber absorbido el ángulo de 11° 25' en el basamento del reloj, ángulo que tendría que ser perfectamente conocido de ser cierta esta hipótesis.

La elección como válida de una de las dos hipótesis emitidas sólo se podrá hacer después de un exhaustivo estudio de las líneas horarias del reloj, y para la realización de dicho estudio nos encontramos con un grave inconveniente: la lemniscata de los solsticios del reloj es una línea alabeada y situada sobre una superficie no desarrollable.

Para su estudio proponemos el siguiente método basado en la comparación de las cuerdas determinadas por dos puntos horarios consecutivos, ya que éstas se pueden hallar midiendo la distancia entre las puntas de un compás abierto hasta que éstas coincidan con los puntos horarios correspondientes.

Comencemos por dibujar el cono de los rayos solares correspondientes, a los solsticios en una proyección diédrica, tomando como plano horizontal de proyección el plano de la directriz del cono y como plano vertical de proyección, el plano meridiano, dibujando por separado las hojas del cono correspondiente al solsticio de verano y al de invierno (figuras 29, 30,31 y 32).

Las figuras 29 y30 se corresponden con la hoja de cono que determina sobre la esfera la línea diurna de solsticio de verano; en la figura 29 se han trazado las generatrices horarias correspondientes al horario de Belo y en la 30 las correspondientes al horario de la latitud 47° 30'.

Las figuras 31 y 32 representan a la hoja del cono de los rayos solares correspondiente al solsticio de invierno; en la 30 se han trazado las generatrices horarias correspondientes al horario de Belo y en la 32 las del horario latino para los 47° 30' de latitud.

En las cuatro figuras se ha operado de la misma forma: en la proyección vertical se ha hallado la intersección de cada una de las generatrices con la rama de la lemniscata, tomando para ello como referencia la parábola obtenida en la proyección del reloj sobre el plano meridiano.

A continuación se han hallado las proyecciones horizontales de los puntos horarios y se ha procedido a hallar la distancia entre ellos, abatiéndolos sobre el plano horizontal de proyección, obteniendo de esta forma la verdadera magnitud de todas las cuerdas que unen dos puntos horarios consecutivos: en las figuras 29 y 31 las correspondientes al horario latino de Belo y en la 30 y 32 las correspondientes al horario latino para los 47°30' de latitud.

En la figura 33 se han reproducido los croquis de las dos ramas de la lemniscata de solsticio, acotando con los valores obtenidos directamente de la esfera del reloj.

Del estudio de las figuras 28 a 33 podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. Comparando los valores obtenidos del croquis de la lemniscata, figura 33 , se observa una gran irregularidad entre las diferencias de dos valores correspondientes a horas adyacentes, sobre todo en la rama correspondiente al solsticio de verano. Estas irregularidades indican que, tanto la lemniscata como sus divisiones horarias han sido grabadas con menos precisión que el círculo de solsticios.

2. Que las cuerdas croquizadas no coinciden exactamente con los valores obtenidos de las cuerdas abatidas en las figuras 29, 30 ,31 y 32 ,pero las diferencias entre los valores de las cuerdas croquizadas y las obtenidas por abatimiento del horario de Belo, son menores que las diferencias entre aquellas y las correspondientes al horario de los 47° 30' de latitud.

Una segunda comprobación puede ser el estudiar el ángulo que forman las proyecciones sobre el plano meridiano de las generatrices correspondientes a las horas I y XI con el eje de la tierra.

Partiendo de las cuerdas tomadas en el croquis entre los puntos I, XI y el centro de proyección, cuyos valores respectivos son (figura 34 ):

| | | |
|---|---|---|
| I | Centro de proyección | 142 m.m. |
| XI | Centro de proyección | 141 m.m. |
| I-XI | | 245 m.m., |

en la figura ( ) se tiene que:

$$\alpha = 2 \text{ arc sen } \overline{b'\ (c)}/2R = 27^\circ$$

siendo R el radio de la esfera, bb' el centro de proyección y c d los puntos I y XI.

$$\overline{a'\ b'} = R \cdot (1 - \cos \alpha\ ) = 32'92$$

$$\overline{e'\ d'} = \sqrt{\overline{c'\ b'}^2 - (dc/2)^2} = 69'82$$

$$\text{sen } b'\widehat{e'}a' = 32'92/69'82 = 0'47$$

$$b'\widehat{e'}a' = 28'13^\circ = 28^\circ\ 7'$$

El ángulo formado por dicha recta con el eje de la tierra es:

$$36^\circ\ 5' - 28^\circ\ 7' = 7^\circ\ 57'$$

Este valor no se corresponde con ninguno de los obtenidos por medición directa en las proyecciones sobre el plano meridiano, pero es más próximo al ángulo medido sobre la proyección de la figura en la que las líneas horarias proyectadas son las correspondientes al horario italiano de Belo.

Tras el análisis de las proyecciones de las cuerdas entre horas y de las proyecciones de las líneas horarias de las horas I y XI, por no coincidir éstas exactamente con alguna de las dos hipótesis elaboradas, no se puede llegar a una conclusión absolutamente cierta, pero nos inclinamos a pensar que el reloj de Belo fue construído para dicha ciudad ya que las diferencias encontradas entre la esfera del reloj y las líneas horarias de Belo, son menores que las de aquellas con las del horario para los 47° 30'; y que inclinando la esfera del reloj para que su circunferencia de equinocios coincida con el plano del ecuador, el centro de proyección se sitúa en el punto más alto de la esfera, uniéndose así el horizonte del reloj y el astronómico en un solo plano.

Una tercera comprobación, que podría ser definitiva, consistiría en colocar en su emplazamiento de Belo, convenientemente orientado el reloj, y junto a él un cuadrante plano con las divisiones horarias latinas para la altura de dicha ciudad y comprobar las diferencias horarias de ambos relojes, y en este caso se podrán hacer dichas comprobaciones en cualquier día del año, aunque no exista línea diurna.

## NOTAS AL CAPITULO VI

1.- Utilizamos el término reloj en lugar del de cuadrante por parecer más adecuado al referirnos a los relojes esféricos, ya que éstos no tienen relación directa con los cuadrantes astronómicos.

2.- Conservados en el Museo Arqueológico Provincial de Mérida y Museo Arqueológico Nacional, respectivamente.

3.- M.H. Pirenne. Optica. Perspectiva. Visión. p 76. Buenos Aires, 1976.

4.- Horas latinas o desiguales. "En efecto, el objeto de las figuras y trazados no es otro que el de dividir uniformemente en doce partes iguales el día equinocial y el de menor duración, así como también el solsticial". M.L. Vitruvio 9, VII.

5.- Los meridianos horarios dividen en 24 horas el tiempo que tarda en dar una vuelta completa la tierra, horas astronómicas. Dichas horas son todas de igual duración para cualquier día del año, y tienen una amplitud de 15°.

6.- A. Kircher en Ars Magna. Lucis et Umbrae. Pars II. Horographiae Variae, pp. 422 a 425. Roma 1676 y E. Buchner en Die Sonnenuhr des Augustus. pp.23 a 28. Mainz am Rhein 1982, explican la utilización del Analema de Vitruvio para el trazado de las hipérbolas diurnas y las líneas horarias.

7.- "El hemiciclo excavado en un cuadrado cortado de modo que esté inclinado siguiendo la inclinación del eje del mundo, se dice que fue inventado por el caldeo Beroso;" M.L. Vitruvio 9, VIII.
264 años a. de JC. Mario Valerio Mesala instala el cuadrante solar de Catania (procedente del botín de Sicilia) en Roma y hasta 100 años más tarde no se construye un reloj para la latitud de Roma. Dicho reloj lo mandó construir el censor Quinto Marcio Filipo. J. Carcopino. La vida cotidiana en Roma. Versión de R.A. Caminos. Buenos Aires, 1942 y J. Guillén. Vrbs Roma. V.I. pp. 102 y 103. Salamanca, 1977. Es muy probable que estos relojes descritos sean semejantes al ideado por Beroso 290 años a. de JC.

8.- Distancias calculadas a partir de las cuentas que determinan ambos círculos sobre el círculo meridiano.

9.- Fernandez-Palacios, M.V.; Gentil Baldrich, J.M.; Jimenez, A.; Ruiz Rosa, J.A. Apuntes de Geometría Descriptiva. p 36. Sevilla 1974.

10.- Posiblemente los taladros que se observan en la parte derecha de la esfera, servían para albergar unas varillas metálicas que sostuviesen en la posición indicada la esferilla que hacía de gnomon.

11.- M.L. Vitruvio 9, VII.

12.- P. Paris y G. Bonsor. Fouilles de Belo I-VI. p 167. Burdeos 1923.

13.- Fernandez-Palacios, M.V.;... opus cit. p 36.

14.- Ibiden. p.36.

15.- Ibiden. p.37.

16.- El círculo "menaeos" -para los meses- se utiliza para calcular la declinación del sol en días distintos de los solsticios y determinar de esta forma las fechas sobre la esfera del reloj. M.L. Vitruvio 9, VII.

17.- M.H. Pirenne. Optica. Perspectiva. Visión. p 76. Buenos Aires 1976.

18.- F. Hohemberg. Geometría Constructiva. pp 96 a 99. Barcelona 1965.

19.- Cada círculo horario está contenido en un plano distinto cuya traza con el plano meridiano coincide con la traza del plano que contiene al círculo horario de la hora simétrica, p.e. las II y las IX; las II y las VIII, etc.

20.- G. Sarton. Introduction to the History of Science from Homer to Omar Khayyam, Londres 1927.

21.- M.L. Vitruvio 9, VII.

21.- P. Paris y G. Bonsor. Opus cit p. 107.