

R. 9662

71

181

17 nov. 1997

*Palmero Acebedo*



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

**FACULTAD DE FÍSICA**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR**

**BIFURCACIONES Y CAOS EN SISTEMAS NO  
AUTÓNOMOS DESCRITOS POR  
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS  
DE SEGUNDO ORDEN. ESTUDIO DE UNA  
CLASE DE OSCILADORES CON  
AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL BAJO  
EXCITACIONES PERIÓDICAS**

*Memoria presentada por  
Faustino Palmero Acebedo  
para optar al Grado de  
Doctor en Ciencias Físicas*

*Sevilla, Abril 1997*

R-9662

T.S-141

**Bifurcaciones y caos en sistemas no autónomos descritos por ecuaciones  
diferenciales ordinarias de segundo orden. Estudio de una clase de  
osciladores con amortiguamiento no lineal bajo excitaciones periódicas**

Memoria presentada por  
**FAUSTINO PALMERO ACEBEDO**  
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas

El Director

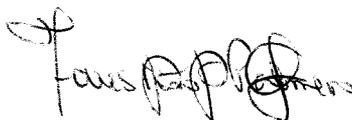


---

**Francisco Romero Romero**

Profesor Titular del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

El Doctorando



---

**Faustino Palmero Acebedo**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR  
Facultad de Física  
Universidad de Sevilla



UBS  
894332

# Agradecimientos

En primer lugar quiero mostrar mi más sincero agradecimiento al Profesor Dr. D. **Francisco Romero Romero**, por su confianza, ayuda y apoyo constantes. Abrir una nueva línea de investigación en el grupo Teoría de Bifurcaciones y Sistemas Dinámicos no ha sido una tarea fácil y sin su gran dedicación y perseverancia este trabajo jamás habría visto la luz.

Al Profesor Dr. D. **Luis Rull**, que me brindó todo su apoyo y me ofreció desinteresadamente todos los recursos del grupo de investigación que dirige.

Al Profesor Dr. D. **Alejandro Rodríguez** y al Profesor D. **Victoriano Carmona**, que pusieron a mi disposición todos los medios del grupo de investigación al que pertenecen y me ayudaron con su amplia experiencia en el campo de Sistemas Dinámicos.

Al Profesor Dr. D. **Ricardo Chacón**, de la Universidad de Extremadura, por sus valiosas sugerencias y comentarios.

A mis antiguos compañeros en el Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear **Enrique de Miguel**, **Lourdes Vega**, **Elvira Martín** y **Jose Manuel Velázquez** que, entre todos, y a pesar de la desmedida afición al tabaco de alguno de ellos, consiguieron crear un magnífico ambiente de trabajo y me ayudaron en todo lo que necesité.

A mis compañeros en el Departamento de Física Aplicada de la EUP por su interés en esta memoria, y en especial al Profesor D. **José Aguilera**, por las horas dedicadas a enseñarme a manejar el procesador de textos  $\text{\LaTeX}$ .

A María

# Índice

Agradecimientos	v
Introducción	1
<b>1 Modelos de osciladores</b>	<b>5</b>
1.1 Osciladores con fricción lineal . . . . .	6
1.1.1 Péndulo simple . . . . .	6
1.1.2 Uniones Josephson . . . . .	7
1.1.3 Circuitos electrónicos . . . . .	10
1.1.4 Otros sistemas . . . . .	12
1.2 Osciladores con fricción no lineal . . . . .	12
1.2.1 Péndulo forzado con fricción no lineal . . . . .	13
1.2.2 Uniones Josephson con interferencias. Modelo RSJ modificado	15
1.3 Modelos estudiados . . . . .	17
1.3.1 Algunos resultados previos . . . . .	22
<b>2 Bifurcaciones en una clase de osciladores con amortiguamiento no lineal</b>	<b>25</b>
2.1 Bifurcaciones en un oscilador forzado armónicamente con amortiguamiento no lineal . . . . .	27
2.1.1 Función de Melnikov . . . . .	30
2.1.2 Bifurcaciones subarmónicas . . . . .	32
2.1.3 Estabilidad de los subarmónicos . . . . .	36

2.1.4	Comparación con el modelo de oscilador con fricción lineal . . . . .	42
2.1.5	Resultados numéricos . . . . .	42
2.2	Oscilador con fricción no lineal generalizada . . . . .	46
2.2.1	Función de Melnikov . . . . .	47
2.2.2	Simulación numérica . . . . .	53
2.3	Sistema con forzamiento generalizado . . . . .	62
2.3.1	Función de Melnikov . . . . .	63
2.3.2	Simulación numérica . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Estudio de una unión Josephson con efectos de interferencias bajo una excitación armónica</b>	<b>73</b>
3.1	Introducción . . . . .	75
3.2	Bifurcaciones en el intervalo $1.2 \geq \omega \geq 0.67$ . . . . .	78
3.3	Bifurcaciones en el intervalo $0.67 \geq \omega \geq 0.582$ . . . . .	83
3.4	Estudio del intervalo $0.54 \geq \omega \geq 0.582$ . . . . .	97
3.5	Estudio del intervalo $0.49 \geq \omega > 0$ . . . . .	102
3.6	Curvas de crisis . . . . .	103
3.7	Modelo con coeficiente de fricción lineal efectivo . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Cálculos relativos al análisis de Melnikov</b>	<b>115</b>
A.1	Oscilador forzado armónicamente 2.2 . . . . .	115
A.1.1	Función de Melnikov . . . . .	116
A.1.2	Función subarmónica de Melnikov. Soluciones oscilantes . . . . .	117
A.1.3	Función subarmónica de Melnikov. Soluciones rotantes . . . . .	119
A.2	Oscilador forzado armónicamente 1.21 . . . . .	120
A.3	Oscilador con forzamiento generalizado . . . . .	123
<b>B</b>	<b>Métodos numéricos</b>	<b>127</b>
B.1	Mapa de Poincaré . . . . .	128
B.2	Atractores . . . . .	129
B.3	Dominios de atracción . . . . .	131
B.4	Fronteras de dominios de atracción . . . . .	133

B.5 Bifurcaciones . . . . .	134
B.6 Crisis . . . . .	136
B.7 Observaciones . . . . .	138
<b>Conclusiones</b>	<b>139</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>143</b>

# Introducción

Las oscilaciones se encuentran entre los movimientos más básicos de la naturaleza. Continuamente, al estudiar una gran cantidad de sistemas diferentes entre sí, como algunos sistemas mecánicos, químicos, biológicos, económicos, etc., las ecuaciones que los describen resultan análogas a las de la dinámica de algunos osciladores no lineales de baja dimensión. Paradójicamente, este tipo de sistemas exhibe una gran complejidad, que se manifiesta por una gran riqueza de comportamientos.

Uno de los osciladores más comunes resulta ser el conocido como “péndulo simple”. Este sistema se describe por un conjunto de ecuaciones aparentemente sencillas y resulta representativo de un oscilador sometido a un potencial periódico. Este oscilador ha sido investigado exhaustivamente, y exhibe comportamientos complejos, presentando estados periódicos, múltiples tipos de bifurcaciones, estados caóticos, etc. Las ecuaciones que describen su dinámica aparecen también frecuentemente en el estudio de sistemas dinámicos de gran interés tecnológico, como las uniones Josephson y las ondas de densidad de carga, por ello su estudio constituye un punto central en el análisis de sistemas dinámicos de baja dimensión.

Cuando se estudian este tipo de sistemas, frecuentemente aparecen términos en las ecuaciones que los describen que dan cuenta de efectos disipativos. Estos efectos, usualmente, se pueden modelar mediante términos lineales, introduciendo de esta manera un coeficiente, denominado generalmente, coeficiente de fricción o de rozamiento. Sin embargo, esto no siempre resulta ser cierto, pudiéndose darse el caso de que el comportamiento del sistema se vea afectado por algún mecanismo, en general no lineal, que afecte al valor de este coeficiente. Frecuentemente, como ocurre en algunos sistemas mecánicos, o en las uniones Josephson,

este coeficiente resulta ser una función periódica, usualmente de tipo coseno, de la variable de descripción. Este término puede tener una gran importancia sobre el comportamiento del sistema, sobre todo en todo lo que se refiere a la secuencia de bifurcaciones que pueden aparecer al variar los parámetros de control. Asimismo, resulta frecuente encontrar situaciones en la que estos sistemas se ven sometidos a excitaciones periódicas externas que normalmente pueden representarse por funciones armónicas. Al utilizar este tipo de funciones para representar la excitación externa se supone una cierta linealidad en el mecanismo de forzamiento, ya que estas funciones son soluciones de ecuaciones de osciladores lineales. El considerar mecanismos de excitación más generales implicaría el uso de funciones que sean soluciones de ecuaciones de osciladores no lineales.

El objetivo básico de esta memoria ha consistido en analizar la dinámica de una familia de osciladores descritos por ecuaciones análogas a las que describe la dinámica de un péndulo simple en los que el coeficiente de fricción se ha sustituido por una función periódica de la variable de descripción. Mediante el empleo de métodos perturbativos y simulaciones numéricas, se ha llevado a cabo un estudio sobre algunos aspectos de la dinámica de este tipo de sistemas.

En primer lugar se presenta el conjunto de modelos estudiados, relacionándolos con sistemas reales que pueden ser descritos por ecuaciones no lineales de este tipo. Seguidamente se estudia un modelo cuyo coeficiente de fricción viene dado por una función armónica y que se encuentra sometido a un forzamiento armónico. Después de generalizar algunos resultados obtenidos al caso de sistemas con mecanismos de fricción más generales, en el modelo de oscilador con fricción no lineal controlada por una función del tipo coseno, se han considerado mecanismos de excitación más generales, dados por funciones de forma y periodo variables. Este estudio tiene gran importancia ya que se encuentra muy relacionado con el problema de control de caos. Por último se ha realizado un estudio exhaustivo, mediante simulación numérica, del modelo de oscilador con fricción controlada por una función armónica del tipo coseno.

Los resultados obtenidos muestran la gran riqueza y variedad de comportamientos que pueden presentar estos sistemas. La aplicación del método de Melnikov ha permitido obtener condiciones para la aparición de bifurcaciones homoclinas, hecho precursor del caos, y subarmónicas. La exploración numérica ha permitido encontrar rangos de valores de los parámetros de control para los que se presentan los fenómenos más característicos de este tipo de sistemas.

Una cuestión interesante, que también se ha tratado, consiste en averiguar si los fenómenos que se presentan en este tipo de sistemas pueden reproducirse mediante modelos con un coeficiente de rozamiento efectivo constante. Los resultados obtenidos reflejan el hecho de que existen situaciones en que esto es posible pero que en otras, el efecto de la no linealidad en el rozamiento es determinante.

En resumen, la presente memoria pretende analizar la influencia de una clase de mecanismos de fricción no lineales sobre cierto tipo de osciladores, mostrando algunos fenómenos que pueden estar directamente relacionados con este tipo de mecanismos. Al construir la mayoría de los modelos, una hipótesis que generalmente se usa consiste en considerar que los efectos disipativos se pueden describir bien mediante términos lineales, despreciando otros efectos con el fin de simplificar las ecuaciones. Aunque en la mayoría de los casos esta aproximación resulta aceptable, existen situaciones en las que los efectos no lineales de los términos disipativos son determinantes, como muestra la familia de modelos estudiados.

# Capítulo 1

## Modelos de osciladores

Continuamente, el análisis de una gran cantidad de sistemas muy diferentes entre sí conduce a una serie de ecuaciones que resultan análogas a las que describen la dinámica de algunos osciladores no lineales [And66, Guc83, Jac91]. Este tipo de sistemas, aunque se describen por ecuaciones con un número bajo de variables, pueden exhibir toda la riqueza de comportamientos que caracterizan a los sistemas complejos, comportamientos que hoy día la teoría de sistemas dinámicos de baja dimensión no ha sido capaz de explicar en su totalidad [Arn83, Aub83, Bene88, Mat82, Mos73].

En este capítulo se presentan varios sistemas que pueden ser descritos por ecuaciones similares a las ecuaciones dinámicas de un péndulo simple sometido a fricción constante. La consideración detallada de los mecanismos de fricción que conducen a este tipo de modelos permite generalizarlos de modo que el coeficiente de fricción no sea constante y pueda venir dado por una función de las variables del sistema. Entre estos sistemas se encuentran las uniones Josephson, diversos tipos de circuitos electrónicos, etc. que se presentan a continuación. Por último se expone la familia de modelos estudiados, sus principales propiedades, y algunos resultados obtenidos previamente por algunos autores.

## 1.1 Osciladores con fricción lineal

Uno de los osciladores no lineales que han sido más estudiados ha sido el péndulo plano. Ya Galileo investigó la relación entre el periodo y la longitud del péndulo, llegando hacia el año 1637 a la conclusión que el cuadrado del período debía ser proporcional a la longitud del péndulo para oscilaciones de amplitud pequeña. Aún hoy el péndulo simple sigue siendo objeto de estudio, ya que es un sistema que puede exhibir comportamientos muy variados, pudiéndose tomar como base para estudiar toda una amplia gama de fenómenos no lineales en sistemas complejos [Bake90, Ben82, Guc83, Gwi85, Hub80, Hum82, Ian85, Kee85, Mac83, Oct84]. Asimismo el interés por su estudio se ve aumentado porque es isomórfico con muchos sistemas físicos de gran interés tecnológico, tales como las uniones Josephson (modelo RSJ) [McC68], algunos circuitos electrónicos, especialmente los diseñados para estudiar un fenómeno que generaliza el de la resonancia en sistemas lineales (phase locking) [Hum82] y las ondas de densidad de carga (charge density waves) [Mac83]. A continuación se describirán algunos de estos sistemas, comenzando por el propio péndulo simple.

### 1.1.1 Péndulo simple

La ecuación que describe la dinámica de un péndulo simple, rígido, de masa  $m$  y longitud  $l$ , inmerso en un fluido de viscosidad  $\eta$  y que puede girar libremente alrededor de un punto  $P$ , sometido a la acción de un par externo  $\Gamma(t)$ , en general función del tiempo, como se muestra en la figura 1.1, es

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma(t) - mgl \sin\theta - \eta \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.1)$$

donde  $M$  es el momento de inercia de péndulo respecto a  $P$  y  $\theta$  el ángulo de deflexión. Reescalando convenientemente el tiempo de la forma  $\tau = t/\Omega_0$ , donde  $\Omega_0 = \sqrt{M/mgl}$ , la ecuación 1.1 resulta

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta = i(\tau), \quad (1.2)$$

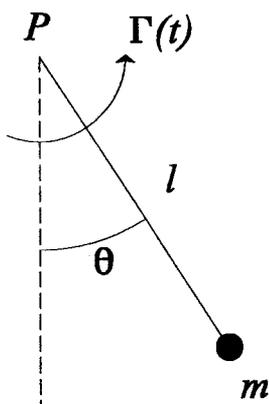


Figura 1.1: Dibujo esquemático de un péndulo simple sometido a la acción de un par externo  $\Gamma(t)$ .

donde  $i = \Gamma/M$  y  $\alpha = \eta\Omega_0/M$ . La constante  $\Omega_0$  es justamente la frecuencia natural del péndulo.

### 1.1.2 Uniones Josephson

En los metales ordinarios, como el cobre, aluminio, etc., el hecho de que presenten resistencia eléctrica se debe al efecto macroscópico que producen los choques de los electrones con los átomos de la red metálica, produciéndose una disipación de energía. No obstante, en los materiales superconductores, por debajo de su temperatura crítica, los electrones se asocian en un estado “superconductor” comportándose colectivamente y pudiéndose mover por la red sin pérdida de energía [Ros78].

Si dos materiales que se encuentran en estado superconductor se separan por una pequeña barrera aislante, como indica la figura 1.2, [Bin84], se puede producir una corriente eléctrica entre ellos que es suma de tres contribuciones [Jos62, Jos64, Jos65]

$$I(t) = I_1(V)\text{sen}\varphi + G(V)V + \sigma_1(V)\text{cos}\varphi V \quad (1.3)$$

donde  $V$  es la diferencia de potencial entre los dos materiales superconductores y  $\varphi$  la diferencia de fase entre las funciones de onda de los electrones superconductores

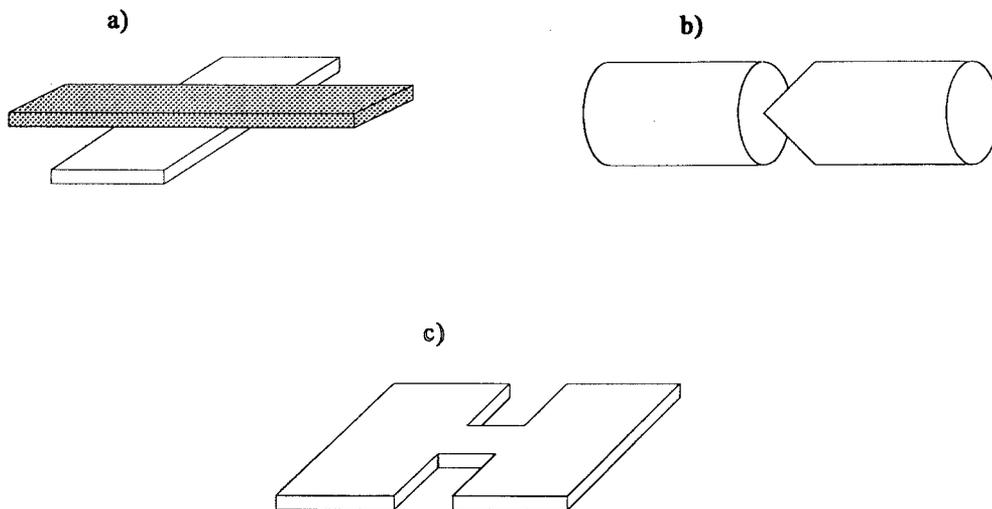


Figura 1.2: Diferentes tipos de uniones Josephson: a) Unión túnel (tunnel junction), b) puente de contacto (point contact) , c) micropuente (microbridge). En los casos b) y c) el estrechamiento en el punto de contacto destruye la superconductividad en esa región.

de los dos materiales. Asimismo, esta diferencia de fase está relacionada con el potencial por la ecuación

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\pi eV}{h} \quad (1.4)$$

donde  $e$  es la carga del electrón y  $h$  la constante de Planck. Este sistema se conoce con el nombre de unión Josephson y cada uno de los términos de corriente puede ser interpretado de la siguiente manera [Lan74]

- $I_1(V)\text{sen}\varphi$  es un término de corriente debido a los electrones en estado superconductor. Esta corriente existe siempre, aunque la diferencia de potencial sea nula. El coeficiente  $I_1(V)$  se denomina corriente crítica, ya que es el valor máximo que puede tomar esta corriente.
- $G(V)V$  es el término correspondiente a la corriente resistiva no superconductora. Sólomente es distinta de cero cuando existe una diferencia de potencial entre los dos superconductores.
- $\sigma_1(V)\text{cos}\varphi V$  es un término cuyo origen se encuentra en las interferencias entre la corrientes superconductora y la resistiva. Al igual que la corriente electrónica, sólomente es distinto de cero si existe diferencia de potencial.

Para describir el comportamiento de una unión Josephson el modelo más utilizado es el denominado RSJ [McC68]. En este modelo, las aproximaciones e hipótesis que se establecen son las siguientes

- Se desprecia el término de interferencias, dado que comparativamente suele ser pequeño frente a los restantes términos.
- Los parámetros  $G$  e  $I_1$  se consideran constantes, de manera que las corrientes electrónicas  $I_q$  y superconductora  $I_p$  son

$$I_p = I_1\text{sen}\varphi(t) \quad (1.5)$$

$$I_q = GV(t), \quad (1.6)$$

donde se ha supuesto, en general, que la diferencia de potencial puede ser función del tiempo. Normalmente se utiliza en lugar de la constante  $G$  su inversa,  $1/G = R$ .

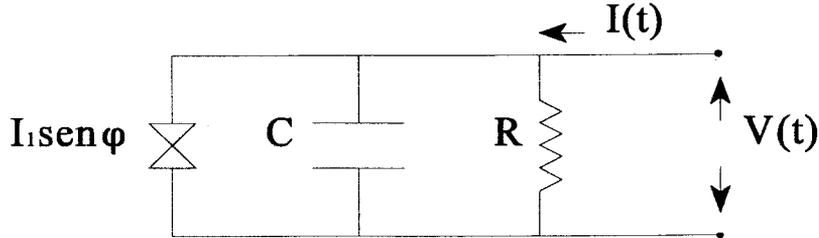


Figura 1.3: Representación esquemática de una unión Josephson, de capacidad  $C$ , corriente crítica  $I_1$ , y resistencia  $R$ .

- Entre los dos conductores siempre existe un efecto capacitivo, por lo que hay que considerar la capacidad de la unión  $C$ .

Con estas aproximaciones, la intensidad total que atraviesa una unión debe ser igual a la suma de todas las contribuciones

$$I(t) = C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V + I_1 \text{sen} \varphi. \quad (1.7)$$

La figura 1.3 muestra el diagrama de un circuito eléctrico equivalente que permite visualizar más fácilmente cada uno de estos efectos.

Utilizando 1.4, la ecuación anterior puede escribirse como

$$I(t) = \frac{hC}{4\pi e} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{h}{4\pi e R} \frac{d\varphi}{dt} + I_1 \text{sen} \varphi, \quad (1.8)$$

donde reescalando el tiempo de la forma  $\tau = (4\pi e I_c / hC)^{1/2} t$ , y definiendo los nuevos parámetros  $i = I/I_1$  y  $\alpha = R_0^{-1} (h/4\pi e I_c C)^{1/2}$ , se reduce a la forma

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\varphi}{d\tau} + \text{sen} \varphi = i(\tau), \quad (1.9)$$

que resulta ser análoga a 1.2. Una información más amplia sobre las uniones Josephson y sus aplicaciones se encuentra en la referencia [Bar82].

### 1.1.3 Circuitos electrónicos

Para estudiar algunos fenómenos no lineales puede resultar interesante diseñar circuitos electrónicos que simulen el comportamiento de sistemas que de otra forma

serían complicados de estudiar, pudiendose de esta manera analizar su comportamiento fácilmente. En este contexto uno de los fenómenos más interesantes es el denominado “phase locking”, que se produce cuando la frecuencia natural del sistema y la de la excitación externa son conmensurables. Para estudiarlo se han diseñado circuitos de tipo “phase-locked-loop” que se encuentran descritos por ecuaciones análogas a la de un péndulo.

Un circuito de este tipo puede describirse por una ecuación de la forma

$$\frac{C}{k} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{kR} \frac{d\theta}{dt} + \frac{V_1}{R_s} \text{sen}\theta = -\frac{V_E(t)}{R_E}, \quad (1.10)$$

donde  $C, k, R, V_1$  y  $R_s$  son parámetros propios del circuito,  $\theta$  es la diferencia de fase entre dos osciladores electrónicos del circuito y  $V_E$  y  $R_E$  son parámetros que dependen de la tensión suministrada al circuito. Fácilmente puede apreciarse la similitud con la ecuación 1.1. Más información sobre este tipo de sistemas puede encontrarse en la referencia [Hum82].

Este tipo de sistemas, las uniones Josephson y el péndulo, pueden describirse por una ecuación del tipo

$$\ddot{x} + b\dot{x} + c\text{sen}x = F(t), \quad (1.11)$$

las analogías entre ellos se muestran en la tabla siguiente [Hum82]

Variable	Péndulo	Unión Josephson	Phase-locked loop
$x$	Angulo de deflexión $\theta$	Diferencia de fase cuántica $\varphi$	Diferencia de fase entre los dos osciladores
$\dot{x}$	Velocidad angular $\dot{\theta}$	$4\pi eV/h$	$kV$
$a$	Momento de inercia $M$	$hC/4\pi e$	$Ck$
$b$	Coefficiente de rozamiento $\eta$	$h/4\pi eR$	$1/kR$
$c\text{sen}x$	Momento restaurador $mgl\text{sen}\theta$	Corriente superconductora $I_1\text{sen}\varphi$	Corriente de realimentación
$c$	$mgl$	Corriente crítica $I_1$	$V_1/R_s$
$F(t)$	Momento aplicado $\Gamma(t)$	Corriente total $I(t)$	Corriente aplicada $V_E(t)/R_E$
$\omega_0 = \sqrt{c/a}$	Frecuencia natural $\Omega_0$	$(4\pi eI_c/h)^{1/2}$	$(kV_1CR^2/RC)^{1/2}$
$Q = (ac/b^2)^{1/2}$	Factor de calidad $(Mmgl/\eta^2)^{1/2}$	$(4\pi eI_1R^2C/h)^{1/2}$	$(kV_1CR^2/R_s)^{1/2}$

### 1.1.4 Otros sistemas

Otros fenómenos que pueden describirse por ecuaciones análogas a 1.1 son las ondas de densidad de carga. En algunos casos, una onda de densidad de carga (CDW), cuando está sometida un campo eléctrico externo  $E(t)$ , en primera aproximación y en casos monodimensionales, puede considerarse que se mueve como una unidad sometida a un potencial de la forma  $V_0[1 - \cos(2\pi/a)X]$  y una serie de armónicos. El parámetro  $a$  representa el espaciado de la red donde se encuentra la onda y  $X$  se refiere a la coordenada de un punto de la misma. Asociando una masa  $M$  a la onda y una carga efectiva  $e^*$ , que proviene del acoplamiento entre la onda y el campo eléctrico, la ecuación que la describe es

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dX}{dt} + \frac{2\pi}{a} V_0 \sin \frac{2\pi}{a} X = e^* E(t), \quad (1.12)$$

donde  $\tau$  es un coeficiente experimental. Reescalando convenientemente la variable  $X$  esta ecuación es análoga a 1.1 [Mac83].

En otro tipo de CDW [Ric81], en los que la conducción se produce por medio de solitones, la ecuación de evolución es análoga a la anterior, aunque la determinación de  $\tau$  resulta más complicada [Gru81, Zet82]. Más información se encuentra en [Gru85, Mac83].

Por último, cabe citar también que aparecen ecuaciones del tipo 1.1 en problemas relacionados con la electrotecnia [Ame49, Tri31].

## 1.2 Osciladores con fricción no lineal

Normalmente, al estudiar sistemas que pueden ser descritos por una ecuación similar a 1.2, la primera aproximación que se hace es considerar el término correspondiente a la fricción como lineal, es decir, de la forma  $-\eta d\theta/dt$ , donde  $\eta$  es el denominado coeficiente de rozamiento o fricción que siempre es positivo. No obstante, al analizar la dinámica de algunos sistemas, las ecuaciones que lo describen resultan ser análogas a las de un péndulo, pero con un término de rozamiento que ya no es constante, sino que puede ser una función periódica de la variable del sistema. Para algunas situaciones

la aproximación de este término por una constante puede dejar de ser válida y el hecho de considerar esta dependencia puede explicar una serie de fenómenos que el modelo con término de fricción lineal no lo hace.

En esta sección se presentan un conjunto de sistemas cuyo término de fricción viene dado por una función no lineal periódica de la variable de descripción.

### 1.2.1 Péndulo forzado con fricción no lineal

La ecuación 1.1, que describe la dinámica de un péndulo simple, refleja el hecho de que el rozamiento con un fluido puede considerarse proporcional a la velocidad. No obstante, puede ocurrir que el medio no sea homogéneo y el coeficiente de fricción no sea constante y dependa únicamente de la posición. Dado que la coordenada que describe la posición de un péndulo periódica de período  $2\pi$ , la función que describe el rozamiento debe de serlo también. Asimismo, si el medio es disipativo, esta función debe de ser siempre positiva. Suponiendo que los máximos o mínimos de esta función se encuentren en la posición de equilibrio del péndulo  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , el coeficiente de rozamiento puede suponerse, en primera aproximación, sinusoidal de la forma  $-\eta(1 + \gamma \cos\theta)$ , donde  $\gamma$  es una constante, positiva o negativa, de valor absoluto menor que uno. Este término, para el valor  $\gamma = 0$  es constante y el sistema se reduce al péndulo simple tratado en la sección anterior. Asimismo la condición de que el valor absoluto de  $\gamma$  sea menor que uno asegura que el coeficiente de fricción sea siempre positivo. La figura 1.4 muestra el valor de este término para diferentes valores de  $\gamma$ .

La ecuación que describe este sistema, reescalando los coeficientes y el tiempo de manera análoga a 1.2, resulta:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha(1 + \gamma \cos\theta) \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta = i(\tau). \quad (1.13)$$

Una extensión natural de este modelo consiste en considerar que el término de fricción se encuentra controlado por una función genérica, no necesariamente de tipo sinusoidal, de periodo y forma variable. Las funciones más sencillas que cumplen estos requisitos son las funciones elípticas de Jacobi, funciones que proporcionan soluciones de algunos sistemas de osciladores no lineales con alinealidades polinómicas, como

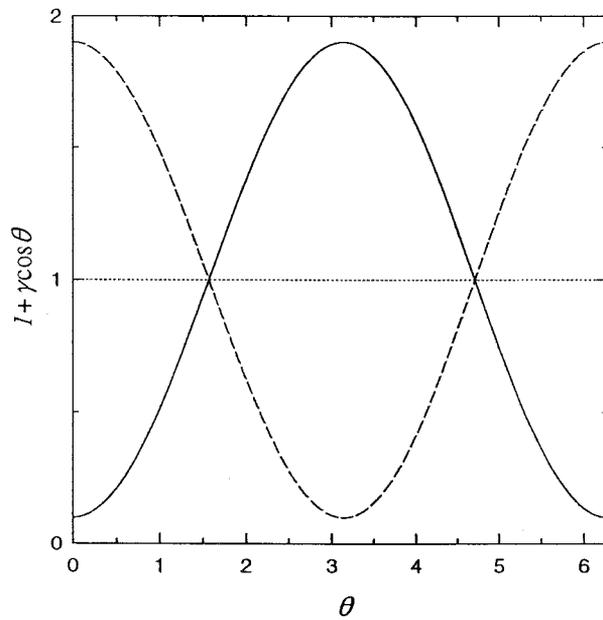


Figura 1.4: Representación gráfica de la función  $1 + \gamma \cos \theta$  para diversos valores del parámetro  $\gamma$ : a)  $\gamma = -0.9$  (línea continua), b)  $\gamma = 0.0$  (línea de puntos), c)  $\gamma = 0.9$  (línea discontinua).

el oscilador de Duffing [Moo87] y que permiten calcular las soluciones exactas del péndulo integrable (sin fricción ni forzamiento) [Jac91].

Al introducir un coeficiente de rozamiento controlado por una función de este tipo en realidad se introducen una serie de nuevos parámetros de control que físicamente podrían interpretarse como parámetros que controlan la naturaleza del medio por el que evoluciona el oscilador correspondiente.

Tomando como base la ecuación 1.13, la generalización natural consiste en considerar el sistema descrito por las ecuaciones

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha(1 + \gamma \text{cd}(\omega_0\theta, m)) \frac{d\theta}{d\tau} + \text{sen}\theta = i(\tau), \quad (1.14)$$

donde  $\omega_0 = 4K(m)/T$ , siendo  $K(m)$  la integral elíptica de primera especie de parámetro  $m$  [Abra72]. El coeficiente de fricción viene dado ahora por la función  $1 + \gamma \text{cd}(\omega_0\theta, m)$ , que es una función periódica de periodo  $T$  y cuya forma viene dada por el valor del parámetro elíptico  $m$  que varía entre 0 y 1. Para  $m = 0$  es la función  $\cos(2\pi\theta/T)$ , que para  $T = 2\pi$  se reduce al caso descrito por la ecuación 1.13, y para  $m = 1$  a una onda cuadrada de periodo  $T$ , como puede apreciarse en la figura 1.5.

### 1.2.2 Uniones Josephson con interferencias. Modelo RSJ modificado

Como ya se ha mencionado en la sección 1.1.2, el modelo más utilizado para describir el comportamiento de una unión Josephson es el modelo RSJ. En este modelo, una de las hipótesis consiste en despreciar el efecto que tiene el término de interferencias sobre el comportamiento de la unión. Sin embargo algunos experimentos han puesto de manifiesto que el efecto de este término puede ser medido experimentalmente, observándose un valor para el coeficiente  $\gamma = \sigma_1/G$  prácticamente constante próximo a  $-0.9$  [Aur73]. Por todo ello parece necesario, para una descripción más detallada de la dinámica de una unión Josephson, incluirlo en las ecuaciones que la describen. Tomando como base el modelo RSJ, pero incluyendo el término de interferencias, la ecuación 1.9 se transforma en

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \alpha(1 + \gamma \cos\varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \text{sen}\varphi = i(\tau), \quad (1.15)$$

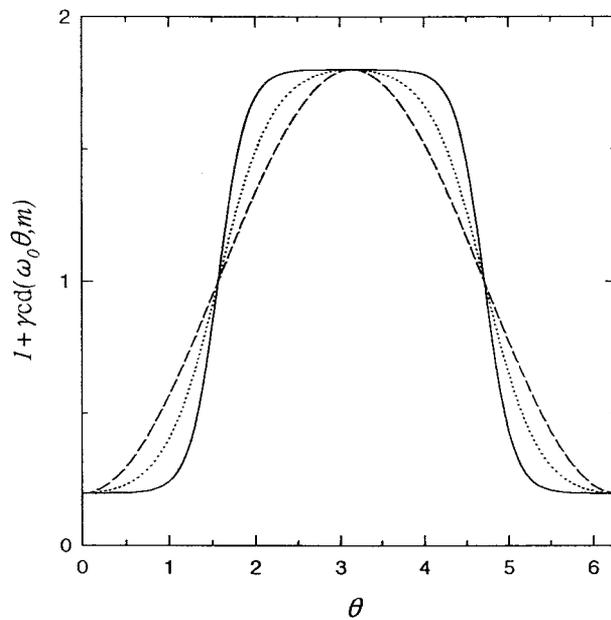


Figura 1.5: Representación gráfica de la función  $1 + \gamma cd \omega_0 \theta$  para diversos valores del parámetro  $m$ ,  $T = 2\pi$  y  $\gamma = -0.8$ : a)  $m = 0.0$  (línea discontinua), b)  $m = 0.9$  (línea de puntos), c)  $m = 0.999$  (línea continua).

que resulta análoga a 1.13.

Las simulaciones de Auracher et al. [Aur73] muestran que el efecto de interferencias consiste fundamentalmente en aumentar la disipación de energía y en incrementar la tensión entre los superconductores para una intensidad dada, siendo estos efectos más importante para pequeñas diferencias de potencial. En general son poco apreciables y en la mayoría de las ocasiones está justificado el despreciar el término  $\cos\varphi$  en la ecuación anterior. No obstante, si el sistema se encuentra en estados fuertemente dependientes de los valores de los parámetros de control o de las condiciones iniciales, como por ejemplo ocurre en el régimen caótico, sí que puede desempeñar un papel crucial y dar lugar a tipos de comportamiento que el modelo RSJ no contempla. Asimismo, el encontrar efectos que puedan atribuirse al término de interferencias puede ser muy importante ya que, paradójicamente, los cálculos teóricos para el valor del coeficiente  $\gamma$  predicen un valor positivo próximo a uno, estando en contradicción con los resultados experimentales, que presentan un valor negativo [Bar82]. El encontrar diferentes comportamientos del sistema, en función del valor de este término, puede ayudar a resolver esta aparente contradicción, sobre todo si aparecen grandes variaciones susceptibles de ser comprobadas experimentalmente.

Por último, es necesario mencionar que en algunos modelos utilizados para describir el comportamiento de las uniones Josephson se ha utilizado una resistencia variable que es función de la diferencia de potencial de la forma  $R(V) = \text{const}/V$ . En estos casos, la ecuación que describe la dinámica de la unión es de la forma

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \alpha(1 + \gamma\cos\varphi) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \sin\varphi = i(\tau), \quad (1.16)$$

que para las situaciones en las que sea posible despreciar el efecto de interferencias, se reduce a las ecuaciones que describen un péndulo con un término cuadrático de rozamiento [Amb96, Bart86, Ped73].

### 1.3 Modelos estudiados

Una vez que se ha puesto de manifiesto los diversos fenómenos que pueden ser estudiados mediante ecuaciones análogas a las que describen un péndulo simple pero con

mecanismos de fricción dados por funciones periódicas no lineales, esta sección está dedicada a presentar formalmente los modelos que se han estudiado y a comentar algunos resultados previos obtenidos por diferentes autores.

En primer lugar se ha considerado que la excitación externa  $i(\tau)$  viene dada por una función periódica sinusoidal de la forma

$$i(t) = i \operatorname{sen} \omega t, \quad (1.17)$$

es decir, el sistema se encuentra forzado armónicamente. Físicamente esta suposición puede entenderse como si el péndulo correspondiente se encontrara sometido a un par dado por la ecuación 1.17 o bien la unión Josephson se encuentra conectada a una fuente que suministra una intensidad alterna que obedece a la misma ecuación (radio-frequency current source).

De esta manera, la ecuación 1.13 se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha(1 + \gamma \cos\theta) \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta = i \operatorname{sen} \omega t, \quad (1.18)$$

y la ecuación 1.14 en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha(1 + \gamma \operatorname{cd}(\omega_0\theta, m)) \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta = i \operatorname{sen} \omega t. \quad (1.19)$$

El nuevo parámetro introducido,  $\omega$ , resulta ser la frecuencia angular de la excitación externa.

El circuito eléctrico equivalente puede representarse por una figura similar a 1.3, aunque la diferencia con el tratado anteriormente radica en el hecho de que el elemento de resistencia obedece a una ley no lineal, de la forma  $R = \operatorname{const}/(1 + \gamma \cos\theta)$  en el caso 1.13, y de la forma  $R = \operatorname{const}/(1 + \gamma \operatorname{cd}(\omega_0\theta, m))$  en el caso 1.14.

Resulta conveniente transformar las ecuaciones diferenciales de segundo orden que controlan la dinámica de estos dos modelos en sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Con este criterio, la ecuación 1.13 puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\operatorname{sen}X_1 + i \operatorname{sen} \omega t - \alpha(1 + \gamma \cos X_1) X_2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde  $X_1 = \theta$  y  $X_2 = \dot{\theta}$  y, de la misma forma, 1.14 puede transformarse en

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\text{sen}X_1 + i\text{sen}\omega t - \alpha(1 + \gamma\text{cd}(\omega_0 X_1, m))X_2,\end{aligned}\quad (1.21)$$

donde de nuevo  $X_1 = \theta$  y  $X_2 = \dot{\theta}$ .

Como puede apreciarse fácilmente, la ecuación 1.20 posee cuatro parámetros de control,  $\alpha$ , que controla el valor del término de fricción,  $\gamma$ , que da cuenta de la contribución del término  $\cos X_1$  en el coeficiente de rozamiento e  $i$  y  $\omega$ , que determinan la amplitud y frecuencia de la excitación periódica externa. En el modelo generalizado 1.21 aparece un nuevo parámetro de control,  $m$ , que controla la forma del término de fricción.

Suponer que la excitación externa viene dada por una función armónica de la forma  $\text{sen}\omega t$  implica que los modelos anteriores se encuentran condicionados por una cierta linealidad en el mecanismo de forzamiento, ya que este tipo de funciones son soluciones de ecuaciones de osciladores lineales, es decir, el mecanismo de excitación es esencialmente lineal [Cha95]. Considerar mecanismos de forzamiento no lineales implica utilizar excitaciones controladas por funciones más generales que den cuenta de estos efectos. Con este fin se ha generalizado el modelo 1.20 considerando que el término de excitación viene dado por la función

$$i(t) = i\text{sn}(\omega t, m) \quad (1.22)$$

donde la función  $\text{sn}(\omega t, m)$  es la función elíptica de Jacobi de parámetro elíptico  $m$ , que controla la forma de la excitación y  $\omega = 4K(m)/T$  el parámetro de control que controla el periodo  $T$  de la excitación. Esta función pertenece a la familia de las soluciones correspondientes a las ecuaciones que describen la dinámica de algunos osciladores no lineales sencillos [Guc83]. En los casos límites esta función se reduce al caso estudiado 1.17 ( $m=0$ ) y a una onda cuadrada de periodo  $T$  ( $m=1$ ), como muestra la figura 1.6.

Las ecuaciones que describen este modelo son de la forma

$$\frac{dX_1}{dt} = X_2$$

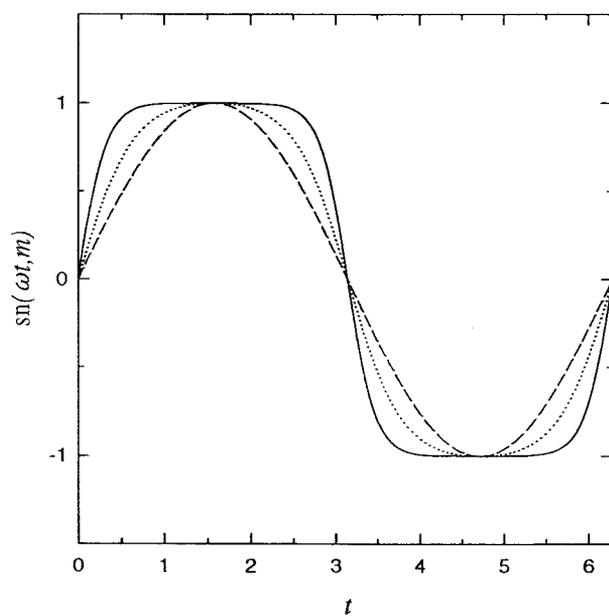


Figura 1.6: Representación gráfica de la función  $\text{sn}(\omega t, m)$  para diversos valores del parámetro  $m$  y  $T = 2\pi$ . a)  $m = 0.0$  (línea discontinua), b)  $m = 0.9$  (línea de puntos), c)  $m = 0.999$  (línea continua).

$$\frac{dX_2}{dt} = -\text{sen}X_1 + \text{isn}(\omega t, m) - \alpha(1 + \gamma\cos X_1)X_2, \quad (1.23)$$

donde los parámetros de control son los mismos que en el caso 1.20 a excepción del nuevo parámetro,  $m$ , que da cuenta de la forma del término de excitación.

En todos los modelos anteriores 1.20, 1.21, 1.23, dado que la variable  $X_1$  es una variable angular, el espacio de las fases  $R^1 \times R^1$  es periódico en  $X_1$  de período  $2\pi$ , por lo que también puede considerarse como espacio de las fases el cilindro  $S^1 \times R$ . A su vez, los sistemas 1.20, 1.21, 1.23 resultan invariantes bajo la transformación

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow -X_1 \\ X_2 &\rightarrow -X_2 \\ t &\rightarrow t + (2n + 1)\pi\omega, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde  $n$  es un número entero. Esta simetría es fundamental para entender la geometría del espacio de las fases, ya que si  $(X_1(t), X_2(t))$  es solución del sistema, también lo es  $(-X_1(t + (2n + 1)\pi/\omega), -X_2(t + (2n + 1)\pi/\omega))$ . Este hecho hace que las dos soluciones puedan ser esencialmente las mismas, es decir, difieran en un número entero,  $k$ , de revoluciones completas

$$\begin{aligned} X_1(t) &= -X_1(t + (2n + 1)\pi/\omega) + 2\pi k \\ X_2(t) &= -X_2(t + (2n + 1)\pi/\omega), \end{aligned} \quad (1.25)$$

o bien sean distintas. En el primer caso la solución se denomina simétrica, ya que la representación de la solución en el espacio de las fases posee simetría de inversión alrededor del punto  $(k\pi, 0)$

$$\begin{aligned} X_1(t + (2n + 1)\pi/\omega) - k\pi &= -(X_1(t) - k\pi) \\ X_2(t + (2n + 1)\pi/\omega) &= -X_2(t). \end{aligned} \quad (1.26)$$

En el segundo caso, las dos soluciones son distintas y se denominan de simetría rota (broken-symmetric) o antisimétricas.

En el trabajo de Kerr, Willians, Bishop, Fesser, Lomdahl y Trullinger [Kee85] se muestran algunas propiedades de las soluciones simétricas. Las más relevantes pueden resumirse de la siguiente manera:

- El valor  $(k\pi, 0)$  corresponde a los extremos de la función periódica que representa la energía del sistema.
- Una solución simétrica periódica es siempre una solución de período múltiplo impar del período de la excitación externa, es decir, si  $T$  es el período de la solución,  $T = (2n + 1)2\pi/\omega$ , siendo  $n$  un número entero.
- Promediando la ecuación 1.25 sobre un período de la solución, el promedio de la variable  $X_2$  es cero.
- En el desarrollo de Fourier de la variable  $X_2$  no aparecen los múltiplos pares de la frecuencia fundamental de la solución  $\omega_s = 2\pi/T$ , siendo  $T$  el período de la solución. Este hecho también tiene consecuencias en el espectro de potencias.

Para el caso de coeficiente de rozamiento lineal ( $\gamma = 0$ ), McDonald y Plischke [Mac83] y Kerr y colaboradores [Kee85] señalan que una bifurcación de ruptura de simetría, en la que una solución simétrica se convierte en dos antisimétricas, es una condición necesaria para que el sistema experimente una transición al caos mediante la ruta de doblamiento de período (period doubling).

### 1.3.1 Algunos resultados previos

En este apartado se citan algunos resultados previos referentes al sistema descrito por las ecuaciones 1.20, estudios realizados en el contexto de las uniones Josephson. Con respecto a sistemas descritos por las ecuaciones 1.21 y 1.23 no se ha encontrado ninguna referencia anterior.

Resultan escasos los trabajos en que estudian sistemas descritos por ecuaciones análogas a 1.20, ya que en la mayoría de ellos se considera constante el coeficiente de fricción, hecho que viene motivado porque en casi todas las ocasiones resulta posible desprestigiar el efecto del término  $\cos X_1$  [Ped73]. Ejemplo de estos trabajos se han citado ya abundantemente en el texto.

Uno de los trabajos en los que se analiza un sistema análogo a 1.20 es debido a Yao [Yao86]. En este estudio, para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $i = 0.8$  y  $\gamma = -0.8$ , se calcula numéricamente el diagrama de bifurcación global en

función del parámetro  $\omega$ , encontrando regiones de comportamiento periódico y de caos.

En el trabajo de Belykh, Pedersen y Soerensen [Bel77, Sam85] se estudia el sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= y \\ \dot{y} &= \frac{1}{\beta}[\rho - (1 + \gamma \cos \phi)y - \sin \phi + \epsilon_1 \sin \bar{\omega} \tau],\end{aligned}\tag{1.27}$$

que es exactamente el mismo que el descrito por 1.20. Las diferencias residen en la nomenclatura, el uso del parámetro  $\beta$ , que es justamente el inverso del parámetro  $\alpha$  y el parámetro  $\rho$ . Este modelo es algo más general al estudiado ya que incluye un término constante, representado por el parámetro  $\rho$ , que da cuenta de un posible efecto que puede interpretarse, en el contexto de un péndulo, como un par constante aplicado, o en el contexto de las uniones Josephson, como una intensidad continua añadida a la alterna. En este trabajo, para un valor fijo del parámetro  $\gamma$  distinto de cero, se determina el diagrama de bifurcación bidimensional en función de los valores de  $\beta$  y  $\rho$ , encontrando diferentes tipos de comportamiento, entre los que se encuentran estados caóticos, y diferentes tipos de caos. Fundamentalmente este estudio se centra en estudiar la dinámica del sistema en función de los parámetros  $\beta$  y  $\rho$ , término que no aparece en el modelo estudiado 1.13 y que tiene consecuencias muy importantes debido a que su inclusión rompe la simetría del sistema.

## Capítulo 2

# Bifurcaciones en una clase de osciladores con amortiguamiento no lineal

Uno de los comportamientos más comunes de los osciladores no lineales forzados periódicamente consiste en la aparición, al variar algunos de los parámetros de control, de una secuencia de bifurcaciones. Las órbitas que aparecen después de cada una de estas bifurcaciones tienen un periodo que es el periodo de la excitación externa multiplicado por un número racional. Estas órbitas se denominan subarmónicas, y al avanzar en la secuencia de bifurcaciones el periodo se incrementa progresivamente. La cascada de bifurcaciones culmina en una órbita homoclina de periodo infinito (bifurcación homoclina), y este hecho puede dar lugar a la aparición de atractores extraños y comportamientos caóticos en el sistema [Guc83, Wig90]. En particular, se ha demostrado [Mora93] que existe de forma sostenida comportamiento caótico, para valores de los parámetros de control próximos a los valores correspondientes a este tipo de bifurcación. No obstante, este hecho no implica que existan atractores extraños globales como los observados en las simulaciones numéricas. Sin embargo, la aparición de bifurcaciones homoclinas en sistemas dinámicos se entiende como un fenómeno precursor del caos, por lo que averiguar los valores de los parámetros de control que dan lugar a este tipo de bifurcación reviste un gran interés [Guc83].

Asímismo, algunos métodos propuestos para controlar la aparición de estados caóticos se basan en evitar que aparezcan este tipo de bifurcaciones [Cha95b].

Para encontrar estos valores críticos de los parámetros de control se ha utilizado el método de Melnikov. Este método, desarrollado por Melnikov [Mel63], y generalizado por Holmes y Marsden [Hol81, Hol82], ha sido empleado con éxito en el análisis de muchos osciladores forzados periódicamente, y en particular en sistemas análogos o parecidos a un péndulo [Cha95, Gree84, Guc83, Kop82, Sam85]. En esta memoria se ha empleado una versión más refinada desarrollada recientemente por Yagasaki [Yag96, Yag96b] que demuestra de manera rigurosa la existencia de atractores extraños y permite calcular fácilmente la estabilidad de las órbitas subarmónicas que se originan en las bifurcaciones que preceden a la aparición de la órbita homoclina.

En general, este método puede aplicarse a sistemas descritos por ecuaciones de la forma

$$\dot{q} = f(q) + \epsilon g(q, t, \mu), \quad (2.1)$$

donde  $q \equiv (X_1, X_2) \in R^2$ ,  $f \equiv (f_1, f_2)$ , y  $g \equiv (g_1, g_2)$ . La función  $f(q)$  es un campo Hamiltoniano definido en  $R^2$  o cualquier conjunto abierto de  $R^2$ , mientras que la función  $g(q, t)$  es una función periódica en el tiempo, de periodo  $T$ , que depende de un conjunto de parámetros de control  $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in R^n$ . El parámetro  $\epsilon \in R$  es un parámetro pequeño que controla la magnitud de la perturbación,  $g$ , que actúa sobre el sistema Hamiltoniano  $f$ . Tanto la funciones  $f$  como  $g$  se suponen derivables en número suficiente respecto a cualquiera de sus variables.

La idea básica de este método consiste en utilizar las soluciones del sistema sin perturbar ( $\epsilon = 0$ ) para obtener las soluciones del sistema completo. Este hecho permite encontrar los valores de los parámetros de control que dan lugar a bifurcaciones subarmónicas y homoclinas. Una exposición detallada del método de Melnikov y su generalización a otro tipo de sistemas se encuentra en las referencias [Guc83, Wig90, Yag96, Yag96b].

## 2.1 Bifurcaciones en un oscilador forzado armónicamente con amortiguamiento no lineal

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método de Melnikov al sistema descrito por las ecuaciones 1.20. En estas ecuaciones, para conseguir controlar explícitamente la magnitud de la función  $g$  que perturba al sistema Hamiltoniano  $f$ , resulta conveniente redefinir algunos parámetros de control y reescribirlas de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\text{sen}X_1 + \epsilon(\bar{i}\text{sen}\omega t - \bar{\alpha}(1 + \gamma \cos X_1) X_2),\end{aligned}\quad (2.2)$$

donde  $\bar{i} = i$  y  $\epsilon\bar{\alpha} = \alpha$ .

Resulta inmediato comprobar que el sistema sin perturbar ( $\epsilon = 0$ ) es Hamiltoniano con energía

$$H = X_2^2/2 + (1 - \cos X_1). \quad (2.3)$$

Al ser el método de Melnikov un método perturbativo, los resultados obtenidos sólo serán válidos con seguridad para pequeñas perturbaciones del sistema hamiltoniano, lo que se traduce en la necesidad de que el parámetro  $\epsilon$  sea suficientemente pequeño. Utilizando la notación del capítulo anterior, este hecho impone que tanto el parámetro  $\alpha$ , que controla el término de fricción, como el parámetro  $i$ , amplitud de la excitación, deban de ser pequeños.

El sistema sin perturbar posee un punto fijo elíptico en  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ , que se ha tomado como origen de energías. Para una energía  $H = 2$  existen dos órbitas heteroclinas,  $\Gamma_+^0, \Gamma_-^0$  que conectan dos puntos hiperbólicos de silla  $(\pm\pi, 0)$ . Como la variable  $X_1$  es una variable angular, el espacio de las fases  $R^1 \times R^1$  es periódico en  $X_1$  de periodo  $2\pi$ . En este tipo de sistemas resulta útil considerar como espacio de las fases el cilindro  $S^1 \times R$  por lo que los dos puntos hiperbólicos pueden considerarse como el mismo y las órbitas heteroclinas son ahora homoclinas. En todo este estudio se ha considerado como espacio de las fases el cilindro  $S^1 \times R$  [Guc83].

Explícitamente, las dos órbitas homoclinas vienen dadas por las funciones

$$\Gamma_{\pm}^0 = (\pm 2 \arctan(\sinh t), \pm 2 \operatorname{sech} t). \quad (2.4)$$

Asímismo, este sistema ( $\epsilon = 0$ ) posee soluciones periódicas rotantes y oscilantes, llamadas de esta manera porque, en el contexto de sistemas de tipo péndulo, corresponden a oscilaciones o rotaciones del péndulo asociado [Guc83].

Las soluciones oscilantes, correspondientes a energías  $H < 2$ , son de la forma

$$X^{osc}(t) = (2 \arcsen(\sqrt{m} \operatorname{sn}(t, m)), 2\sqrt{m} \operatorname{cn}(t, m)), \quad (2.5)$$

donde la función  $\operatorname{cn}(t, m)$  es la función elíptica de Jacobi  $\operatorname{cn}$  de módulo  $m$ . Estas órbitas son periódicas de periodo  $T(m) = 4K(m)$ , siendo  $K(m)$  la integral elíptica completa de primera clase de módulo  $m$ . En todo este estudio se ha usado, en lo que respecta a las funciones elípticas, la notación de la referencia [Abra72]. Para los valores límites del parámetro  $m$  estas órbitas se reducen al punto  $(0, 0)$  ( $m = 0$ ) y a las órbitas homoclinas ( $m = 1$ ).

Para energías  $H > 2$  el sistema posee, para cada valor de  $H$ , una pareja de órbitas periódicas, denominadas soluciones rotantes, correspondientes cada una de ellas a rotaciones en sentidos contrarios. Las ecuaciones que describen este tipo de soluciones son:

$$X^{rot}(t) = (\pm 2 \arcsen\left(\operatorname{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right)\right), \pm \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right)), \quad (2.6)$$

donde el signo positivo se refiere a rotaciones en sentido antihorario y el negativo a sentido horario. Las funciones  $\operatorname{sn}, \operatorname{dn}$  son las funciones elípticas de Jacobi correspondientes y el periodo de estas órbitas es  $T(m) = 2\sqrt{m}K(m)$ . En el límite  $m = 1$  es fácil comprobar que, al igual que las soluciones oscilantes, se reducen a las homoclinas. La figura 2.1 muestra el diagrama del espacio de las fases del sistema sin perturbar ( $\epsilon = 0$ ).

Antes de aplicar el método de Melnikov al sistema 2.2, resulta necesario calcular una serie de magnitudes. Los cálculos se detallan en el apéndice A.

En primer lugar, la derivada del periodo de las órbitas periódicas del sistema

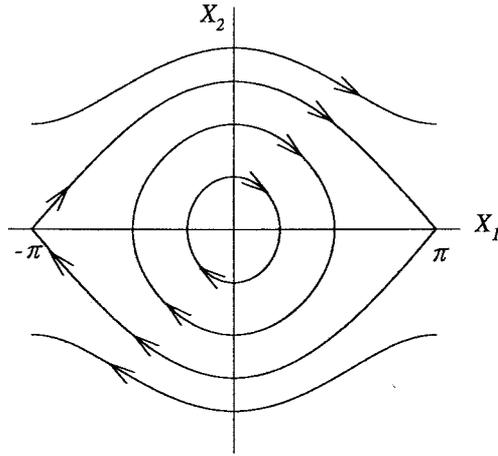


Figura 2.1: Estructura del espacio de las fases del sistema sin perturbar ( $\epsilon = 0$ ).

hamiltoniano con respecto al parámetro  $m$  resulta ser

$$\frac{dT^{osc}}{dm} = \frac{2}{m} \left( \frac{E(m)}{1-m} - K(m) \right) > 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dT^{rot}}{dm} = \frac{E(m)}{\sqrt{m}(1-m)} > 0, \quad (2.8)$$

para órbitas periódicas oscilantes y rotantes, respectivamente, siendo la función  $E(m)$  la integral elíptica completa de segunda especie de módulo  $m$ . Asimismo, la frecuencia angular de estas órbitas es

$$\Omega^{osc}(m) = \frac{\pi}{2K(m)}, \quad (2.9)$$

$$\Omega^{rot}(m) = \frac{\pi}{\sqrt{m}K(m)}, \quad (2.10)$$

y su derivada con respecto a la variable acción  $I$  del sistema sin perturbar

$$\frac{d\Omega^{osc}}{dI^m} = -\frac{\pi^2}{16K(m)^3 m(1-m)} [E(m) - (1-m)K(m)] < 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\Omega^{rot}}{dI^m} = \frac{\pi^2 m E(m)}{4K(m)^3 (1-m)} > 0, \quad (2.12)$$

donde  $I^m$  indica el valor de la variable acción correspondiente a la órbita periódica de periodo  $T(m)$ .

Es inmediato comprobar que, para  $m \rightarrow 1$  las derivadas de la frecuencia angular satisfacen la condición

$$\left| \frac{d\Omega^{osc}}{dI^m} \right|, \left| \frac{d\Omega^{rot}}{dI^m} \right| \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

A la vista de estos resultados puede afirmarse que el sistema 2.2 cumple todas las condiciones para que pueda aplicarse el método de Melnikov [Yag96, Yag96b].

### 2.1.1 Función de Melnikov

La función de Melnikov del sistema 2.2 viene dada por la expresión

$$M^\pm(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_0(\Gamma_\pm^0(t)) \wedge \vec{f}_1(\Gamma_\pm^0(t), t + t_0) dt, \quad (2.14)$$

donde los vectores  $\vec{f}_0$  y  $\vec{f}_1$  son

$$\vec{f}_0 = (X_2, -\text{sen}X_1) \quad (2.15)$$

$$\vec{f}_1 = (0, i\text{sen}\omega t - \bar{\alpha}(1 + \gamma \cos X_1)X_2), \quad (2.16)$$

y el signo positivo o negativo indica cada una de las posible órbitas homoclinas.

Explícitamente, esta función resulta ser

$$M^\pm(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pm 2\bar{i}\text{sech}\text{sen}\omega(t + t_0) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} 4\bar{\alpha}\text{sech}^2 t (1 + \gamma \cos(2 \arctan(\sinh t))) dt. \quad (2.17)$$

El cálculo explícito de las integrales se encuentra en el apéndice A y el resultado es:

$$M^\pm(t_0) = \pm 2\pi\bar{i}\text{sech} \frac{\pi\omega}{2} \text{sen}\omega t_0 - 8\bar{\alpha}(1 + \frac{\gamma}{3}). \quad (2.18)$$

Una condición necesaria para que se produzcan bifurcaciones homoclinas consiste en que la función de Melnikov tenga ceros [Guc83], por lo tanto tendrá que cumplirse

$$\frac{\bar{i}}{\bar{\alpha}} \geq R(\omega, \gamma), \quad (2.19)$$

siendo la función  $R(\omega, \gamma)$ ,

$$R(\omega, \gamma) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (2.20)$$

Según [Yag96, Yag96b], puede afirmarse que el mapa de Poincaré del sistema completo 2.2 posee un punto de silla en el punto  $(\pi, 0) + \phi(\epsilon)$ . Si se cumple la condición  $\bar{i} > \bar{i}_0 = \bar{\alpha}R(\omega, \gamma)$ , las variedades estables e inestables de este punto deben de intersectarse transversalmente. Además, este punto de silla es disipativo, ya que la traza del jacobiano del término de perturbación,  $\vec{f}_1$ , tomada a lo largo de la órbita homoclina, y calculada sobre un periodo resulta ser

$$L = \int_0^T -\bar{\alpha}(1 + \gamma \cos X_1) dt < 0, \quad (2.21)$$

pues el integrando siempre negativo ( $|\gamma| < 1$  y  $\bar{\alpha} > 0$ ). Llamando  $\theta = \omega t$ , resulta inmediato comprobar que el punto  $(\theta_0^\pm, \bar{i}_0) = (\pm\pi/2, \bar{\alpha}R(\omega, \gamma))$  cumple las condiciones

$$M^\pm(\theta_0^\pm, \bar{i}_0) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial M^\pm}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0^\pm, \bar{i}_0} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 M^\pm}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_0^\pm, \bar{i}_0} \neq 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial M^\pm}{\partial \bar{i}} \Big|_{\theta_0^\pm, \bar{i}_0} \neq 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 M^\pm}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_0^\pm, \bar{i}_0} \frac{\partial M^\pm}{\partial \bar{i}} \Big|_{\theta_0^\pm, \bar{i}_0} < 0, \quad (2.26)$$

por lo que, y siempre según [Yag96, Yag96b], puede afirmarse que las variedades estables e inestables del punto de silla se intersectan transversalmente. Si  $\bar{i} < \bar{i}_0$  estas variedades se separan y si  $\bar{i} > \bar{i}_0$  se cortan. Más exactamente, para un valor de  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeño, la familia monoparamétrica del mapa de Poincaré del sistema completo 2.2 exhibe un comportamiento complicado cerca de  $\bar{i}_0 = R(\omega, \gamma)\bar{\alpha}$ . En particular, existe un conjunto de valores del parámetro  $\bar{i}$ , de medida positiva de Lebesgue, cerca de  $\bar{i} = \bar{\alpha}R(\omega, \gamma)$  de manera que el mapa de Poincaré del sistema completo posee un atractor extraño no hiperbólico.

Para analizar la dependencia de este valor crítico con el resto de los parámetros de control se ha estudiado el cociente  $\bar{i}_0/\bar{\alpha}$  en función de  $\omega$  para varios valores de  $\gamma$ ,

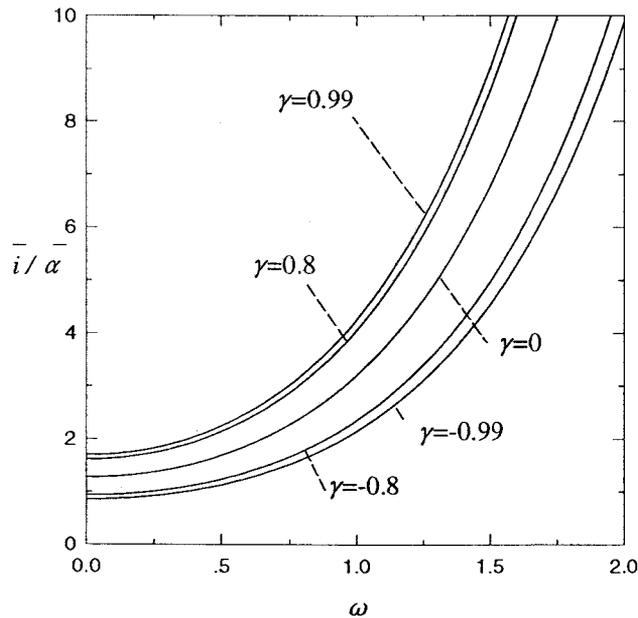


Figura 2.2: Curva de bifurcación para varios valores del parámetro  $\gamma$

como indica la figura 2.2. Fácilmente puede apreciarse que el cociente  $\bar{i}_0/\bar{\alpha}$  es una función creciente del  $\omega$ . Además, la forma de la curva no depende del parámetro  $\gamma$ , aunque los valores de  $\bar{i}_0/\bar{\alpha}$  correspondientes a un valor dado de  $\omega$  aumentan con este parámetro.

### 2.1.2 Bifurcaciones subarmónicas

El método de Melnikov permite calcular (para valores del parámetro  $\epsilon$  suficientemente pequeños) los valores de los parámetros de control que dan lugar a subarmónicos (bifurcaciones subarmónicas) [Guc83, Wig90, Yag96, Yag96b]. Para ello, resulta necesario calcular la función subarmónica de Melnikov que viene dada por

$$M^{k_1/k_2}(t_0) = \int_0^{k_1 T} \vec{f}_0(X(t)) \wedge \vec{f}_1(X(t), t + t_0) dt, \quad (2.27)$$

donde  $T = 2\pi/\omega$  es el periodo de la excitación externa y  $X(t) \equiv (X_1(t), X_2(t))$  una órbita periódica, oscilante o rotante, de periodo  $T(m)$ , que cumple la condición  $T(m) = 2\pi k_1/k_2\omega$ , siendo  $k_1$  y  $k_2$  dos números naturales primos entre sí.

Explícitamente, para órbitas oscilantes resulta ser

$$M_{osc}^{k_1/k_2}(t_0) = 2\bar{i}\sqrt{m} \int_0^{k_1 T} \text{cn}(t, m) \text{sen}\omega(t + t_0) dt - 4m\bar{\alpha}(1 + \gamma) \int_0^{k_1 T} \text{cn}^2(t, m) + 8m^2\bar{\alpha}\gamma \int_0^{k_1 T} \text{sn}^2(t, m) \text{cn}^2(t, m) dt, \quad (2.28)$$

y para rotantes

$$M_{rot}^{\pm k_1/k_2}(t_0) = \frac{2\bar{i}}{\sqrt{m}} \int_0^{k_1 T} \text{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right) \text{sen}\omega(t + t_0) dt - \frac{4\bar{\alpha}}{m}(1 + \gamma) \int_0^{k_1 T} \text{dn}^2\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right) + \frac{8\bar{\alpha}\gamma}{m} \int_0^{k_1 T} \text{dn}^2\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right) \text{sn}^2\left(\frac{t}{\sqrt{m}}, m\right) dt, \quad (2.29)$$

donde el signo positivo o negativo se refiere a cada una de las familias de soluciones rotantes. La condición de resonancia implica que se debe cumplir la condición  $4K(m)2\pi k_1/k_2\omega$ , para las órbitas oscilantes, y  $2\sqrt{m}K(m) = 2\pi k_1/k_2\omega$  para las rotantes.

Utilizando el desarrollo de Fourier de las funciones elípticas de Jacobi [Abra72, Gra80], las integrales pueden calcularse fácilmente. Los cálculos detallados se encuentran en el apéndice A y el resultado es

$$M_{osc}^{k_1/k_2}(t_0) = \bar{i}J_3(k_1, k_2, m) \text{sen}\omega t_0 - \bar{\alpha}(J_1(m) + \gamma J_2(m)), \quad (2.30)$$

$$M_{rot}^{\pm k_1/k_2}(t_0) = \pm \bar{i}\bar{J}_3(k_1, k_2, m) \text{sen}\omega t_0 - \bar{\alpha}(\bar{J}_1(m) + \gamma \bar{J}_2(m)), \quad (2.31)$$

siendo

$$J_3(k_1, k_2, m) = \begin{cases} 0 & k_1 \text{ par o } k_2 \neq 1 \\ 4\pi \text{sech}\left(\frac{k_1\pi K(1-m)}{2K(m)}\right) & k_1 \text{ impar y } k_2 = 1 \end{cases}, \quad (2.32)$$

$$J_1(m) = 16[E(m) - (1 - m)K(m)], \quad (2.33)$$

$$J_2(m) = J_1(m) - \frac{32}{3}[(2 - m)E(m) - 2(1 - m)K(m)], \quad (2.34)$$

$$\bar{J}_3(k_1, k_2, m) = \begin{cases} 0 & k_2 \neq 1 \\ 2\pi \text{sech}(\sqrt{m}\omega K(1 - m)) & k_2 = 1 \end{cases}, \quad (2.35)$$

$$\bar{J}_1(m) = \frac{8}{\sqrt{m}}E(m), \quad (2.36)$$

$$\bar{J}_2(m) = \bar{J}_1(m) - \frac{16}{3m^{3/2}}[(1-m)K(m) - (1-2m)E(m)]. \quad (2.37)$$

Numéricamente se ha comprobado ( $|\gamma| < 1$ ) que para cualquier valor del parámetro  $m$

$$J_1(m) + \gamma J_2(m) > 0, \quad (2.38)$$

$$\bar{J}_1(m) + \gamma \bar{J}_2(m) > 0. \quad (2.39)$$

Al ser las funciones  $J_3$  y  $\bar{J}_3$  distintas de cero únicamente cuando  $k_2 = 1$  (y  $k_1$  impar en el caso de subarmónicos oscilantes), el método de Melnikov sólo permite encontrar subarmónicos de periodo múltiplo entero del periodo de la excitación externa. Una posibilidad para encontrar los denominados ultrasubarmónicos ( $k_2 \neq 1$ ) consiste en utilizar el denominado método de Melnikov de segundo orden [Liu90].

Definiendo las funciones

$$R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma) = \frac{J_1(m) + \gamma J_2(m)}{J_3(k_1, 1, m)} \quad (2.40)$$

$$R_{rot}^{k_1}(\omega, \gamma) = \frac{\bar{J}_1(m) + \gamma \bar{J}_2(m)}{\bar{J}_3(k_1, 1, m)}, \quad (2.41)$$

cuando  $\bar{i} > \bar{\alpha} R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma)$  para el caso de órbitas oscilantes ( $k_1$  impar), y  $\bar{i} > \bar{\alpha} R_{rot}^{k_1}(\omega, \gamma)$  para rotantes, la función subarmónica de Melnikov posee dos ceros. En estos puntos es inmediato comprobar que

$$M_{osc}^{k_1} = 0, \quad (2.42)$$

$$M_{rot}^{\pm k_1} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{dM_{osc}^{k_1}}{d\theta} \neq 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{dM_{rot}^{\pm k_1}}{d\theta} \neq 0, \quad (2.45)$$

donde todas las funciones y las derivadas están evaluadas en los ceros de la función de Melnikov y  $\theta = \omega t_0$ . En estas condiciones puede afirmarse que el sistema completo

2.2 posee dos órbitas periódicas de periodo  $k_1 2\pi/\omega$  próximas a las órbitas correspondientes del sistema sin perturbar [Yag96, Yag96b]. Las ecuaciones

$$\bar{i} = \bar{\alpha} R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma), \quad (2.46)$$

$$\bar{i} = \bar{\alpha} R_{rot}^{k_1}(\omega, \gamma), \quad (2.47)$$

definen las curvas de bifurcaciones subarmónicas para órbitas oscilantes y rotantes, respectivamente. En el caso de subarmónicos rotantes la bifurcación siempre es doble, es decir, se producen dos bifurcaciones simultáneas, cada una de ellas correspondiente a rotaciones en sentido contrario.

Resulta inmediato comprobar que

$$M_{osc}^{k_1} = 0, \quad (2.48)$$

$$M_{rot}^{\pm k_1} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial M_{osc}^{k_1}}{\partial \theta} = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial M_{rot}^{\pm k_1}}{\partial \theta} = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial^2 M_{osc}^{k_1}}{\partial \theta^2} \neq 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 M_{rot}^{\pm k_1}}{\partial \theta^2} \neq 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial M_{osc}^{k_1}}{\partial \bar{i}} \neq 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial M_{rot}^{\pm k_1}}{\partial \bar{i}} \neq 0, \quad (2.55)$$

donde  $\theta = \omega t_0$  y todas las funciones y derivadas están calculadas en el punto  $(\theta, \bar{i}) = (\pi/2, \bar{\alpha} R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma))$  para subarmónicos oscilantes y en  $(\theta, \bar{i}) = (\pm\pi/2, \bar{\alpha} R_{rot}^{k_1}(\omega, \gamma))$  para rotantes.

A la vista de estos resultados puede afirmarse [Yag96, Yag96b], que en las proximidades de la curva definida por la ecuación 2.46, el sistema experimenta una bifurcación de silla nodo en la que se originan dos subarmónicos oscilantes de periodo  $T = k_1 2\pi/\omega$ . Asimismo, en las proximidades de la curva definida por 2.47 se produce una doble bifurcación de silla nodo en la que se originan dos parejas de subarmónicos rotantes

de periodo  $T = k_1 2\pi/\omega$ , cada una de ella correspondiente a rotaciones en sentido contrario. Además, la bifurcación es supercrítica. pues para los mismos puntos que en las ecuaciones anteriores,

$$\frac{\partial^2 M_{osc}^{k_1}}{\partial \theta^2} \frac{\partial M_{osc}^{k_1}}{\partial \bar{i}} < 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 M_{rot}^{\pm k_1}}{\partial \theta^2} \frac{\partial M_{rot}^{\pm k_1}}{\partial \bar{i}} < 0, \quad (2.57)$$

Estudiando el comportamiento de los subarmónicos de Melnikov en el límite  $k_1 \rightarrow \infty$ , resulta inmediato comprobar que

$$\frac{1}{2} \lim_{k_1 \rightarrow \infty} M_{osc}^{k_1}(t_0) = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} M_{rot}^{\pm k_1}(t_0) = M^\pm(t_0), \quad (2.58)$$

lo que indica que la bifurcación homoclina puede entenderse como el límite de una secuencia de bifurcaciones subarmónicas de silla nodo. Para unos valores dados de  $\omega, \gamma, \bar{\alpha}$ , las bifurcaciones subarmónicas correspondientes a subarmónicos oscilantes se acercan a la curva correspondiente a la bifurcación homoclina desde valores menores de  $\bar{i}$  y las bifurcaciones correspondientes a subarmónicos rotantes desde valores superiores.

En las figuras 2.3-2.7, se representa el cociente  $\bar{i}/\bar{\alpha}$  frente a  $\omega$  a lo largo de la curva de bifurcación para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ . Fácilmente puede apreciarse la convergencia de las bifurcaciones subarmónicas hacia lo homoclina, hecho que incluso ha impedido representar las curvas correspondientes a bifurcaciones de subarmónicos de orden superior al confundirse éstas con la homoclina.

En estas curvas, crecientes con  $\omega$ , la forma no se ve afectada por los valores del parámetro  $\gamma$ , aunque sí influye en el hecho de que para un valor dado de  $\omega$ , el valor del cociente  $\bar{i}/\bar{\alpha}$  aumenta con este parámetro. Asimismo, la convergencia hacia la bifurcación homoclina es más rápida cuanto mayor sea  $\gamma$ , siendo ésta más acusada para valores pequeños de  $\omega$ .

### 2.1.3 Estabilidad de los subarmónicos

El método más usual para calcular la estabilidad de los subarmónicos que se originan después de una bifurcación consiste en utilizar un desarrollo en serie y luego aplicar

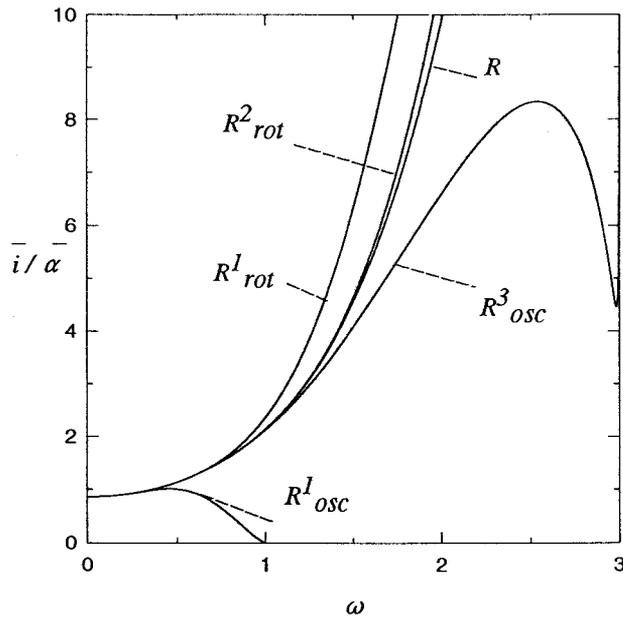


Figura 2.3: Curvas de bifurcación,  $\gamma = -0.99$

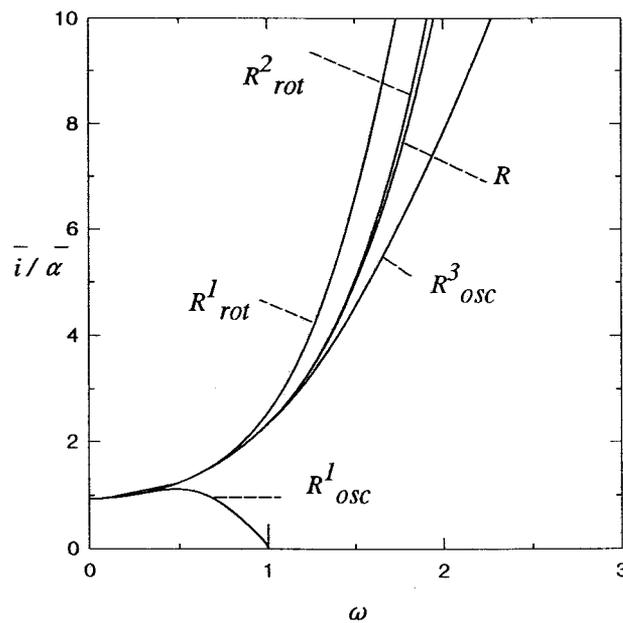


Figura 2.4: Curvas de bifurcación,  $\gamma = -0.8$

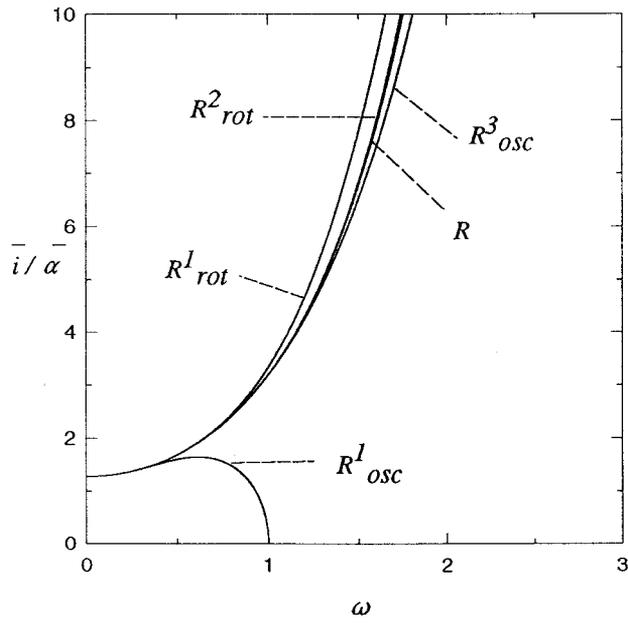


Figura 2.5: Curvas de bifurcación,  $\gamma = 0$

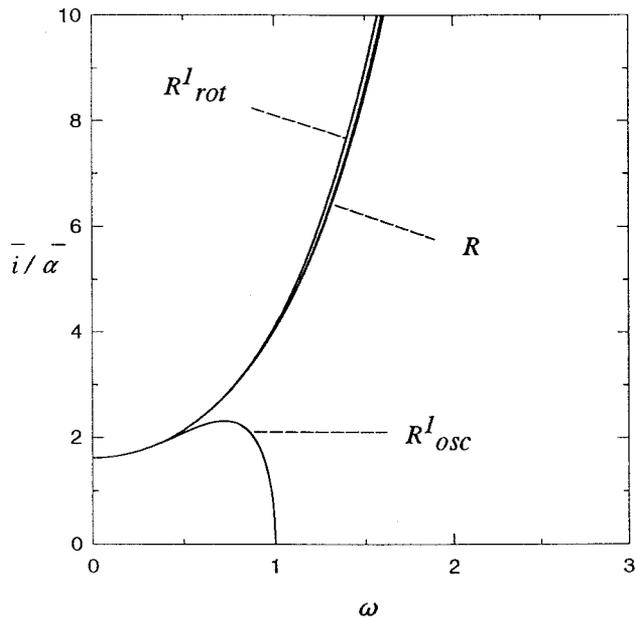


Figura 2.6: Curvas de bifurcación,  $\gamma = 0.8$

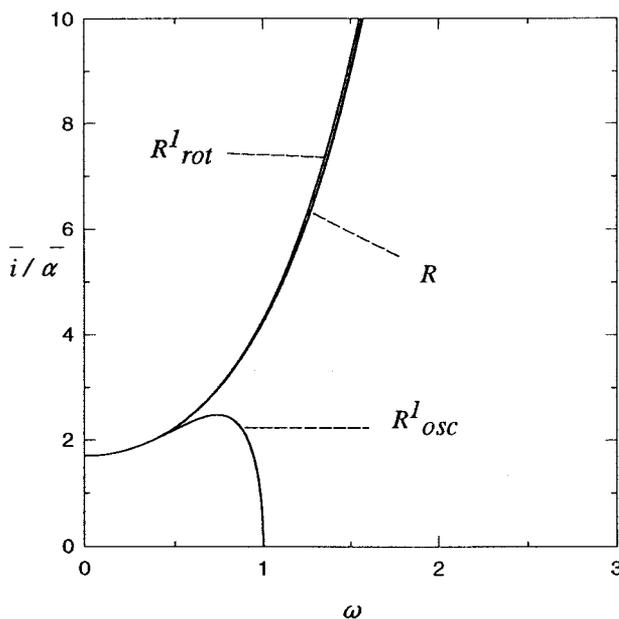


Figura 2.7: Curvas de bifurcación,  $\gamma = 0.99$

el método de promediado (averaging) [Gree83, Gree84, Koc85, Wig90]. Los pasos a seguir son

- Transformar del sistema 2.2 a las coordenadas acción-ángulo del sistema hamiltoniano asociado  $I, \theta$ , tanto para las soluciones oscilantes como para las rotantes.
- Transformar, en un entorno de la solución resonante  $I = I^{k_1}$  con periodo  $k_1 T = 2\pi/\Omega^{k_1}$ , donde  $\Omega^{k_1}$  es la frecuencia angular del sistema hamiltoniano, las nuevas coordenadas de la forma.

$$I = I^{k_1} + \sqrt{\epsilon}h, \theta = \Omega^{k_1}t + \phi.$$

- Transformar  $(h, \phi) \rightarrow (\bar{h}, \bar{\phi})$ , promediando hasta el término de orden  $\epsilon$ . Esta operación conduce a un sistema autónomo de ecuaciones que permite averiguar la estabilidad de las soluciones subarmónicas de la ecuación 2.2. Las ecuaciones resultan ser:

$$\dot{\bar{h}} = \sqrt{\epsilon} \frac{1}{2\pi} \bar{M}^{k_1} \left( \frac{\bar{\phi}}{\Omega(I^{k_1})} \right) + \epsilon \frac{\partial \bar{F}}{\partial I}(\bar{\phi}) \bar{h},$$

$$\dot{\bar{\phi}} = \sqrt{\epsilon} \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I^{k_1}) \bar{h} + \epsilon \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial I^2}(I^{k_1}) \bar{h}^2 + \bar{G}(\bar{\phi}) \right), \quad (2.59)$$

donde las derivadas de  $\Omega = \Omega(I)$  se calculan en  $I^{k_1}$ .

Si los términos de orden  $\epsilon$  se desprecian, el sistema es conservativo con Hamiltoniano

$$H = \sqrt{\epsilon} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I^{k_1}) \frac{\bar{h}^2}{2} - V(\bar{\phi}) \right) \quad (2.60)$$

donde

$$V(\bar{\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{M}^{k_1} \left( \frac{\bar{\phi}}{\Omega(I^{k_1})} \right) d\bar{\phi}.$$

Para este orden en  $\epsilon$ , el estudio del sistema es fácil, ya que sus puntos fijos vendrán dados por los ceros de las funciones de Melnikov correspondientes. Sin embargo, para calcular la estabilidad de estas soluciones resulta necesario llegar hasta el siguiente orden en  $\epsilon$ , hecho que se traduce en la necesidad de efectuar largos y tediosos cálculos. Sin embargo, los resultados obtenidos recientemente por Yagasaki [Yag96, Yag96b] permiten averiguar esta estabilidad de manera rápida y sencilla.

En el sistema 2.2, una vez que se ha producido la bifurcación subarmónica, la correspondiente función subarmónica de Melnikov tiene dos ceros que hacen que las derivadas 2.44 y 2.45 tengan un signo diferente para cada uno de ellos. Además, utilizando 2.11, 2.12 y el hecho de que la traza del jacobiano del término de perturbación,  $\vec{f}_1$ , tomada a lo largo de una órbita periódica, y calculada sobre un periodo, resulta ser

$$L = \int_0^{k_1 T} -\bar{\alpha}(1 + \gamma \cos X_1) dt < 0, \quad (2.61)$$

al ser el integrando siempre negativo. Según [Yag96, Yag96b], de los dos subarmónicos que se originan, uno es estable y el otro no. En la aplicación de Poincaré del sistema completo uno corresponde a un punto de silla y otro a un sumidero (sink).

La figura 2.8 muestra cualitativamente el mapa de Poncaré en las proximidades de la bifurcación para el caso  $k_1 = 1$  correspondiente a una bifurcación subarmónica oscilante. El sentido de la órbita viene dado por 2.11.

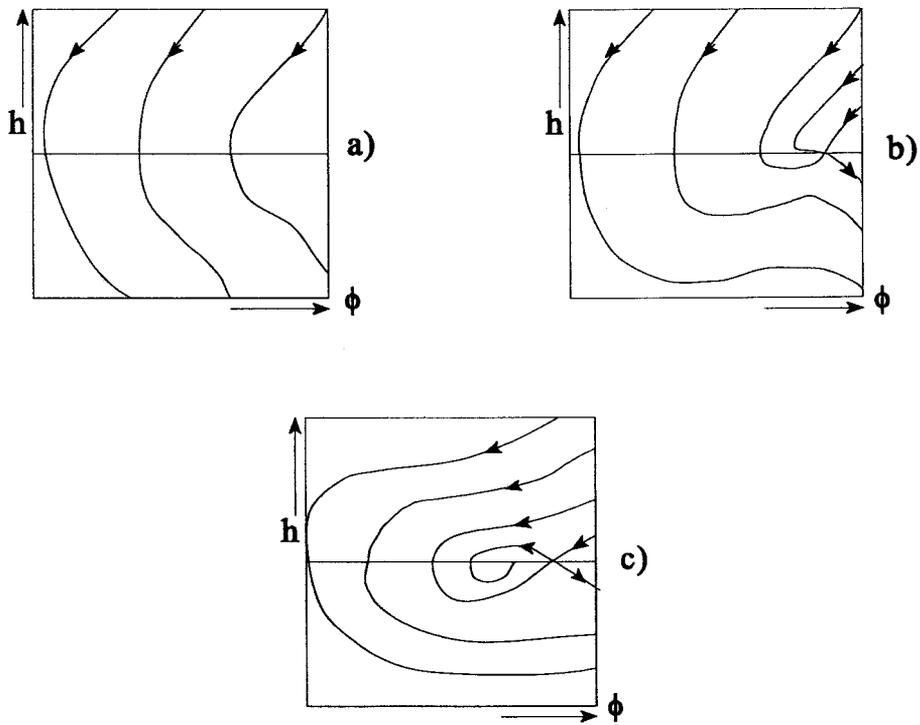


Figura 2.8: Mapa de Poncaré a)  $\bar{i}/\bar{\alpha} > R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma)$ , b)  $\bar{i}/\bar{\alpha} \approx R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma)$ , c)  $\bar{i}/\bar{\alpha} > R_{osc}^{k_1}(\omega, \gamma)$

### 2.1.4 Comparación con el modelo de oscilador con fricción lineal

A la vista de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, cabe preguntarse si es posible obtener resultados similares en lo que respecta a la aparición de bifurcaciones homoclinas o subarmónicas mediante un modelo de oscilador con un coeficiente de fricción efectivo constante.

Las ecuaciones 2.18, 2.30, 2.31 indican que el sistema se comporta como un oscilador con fricción lineal ( $\gamma = 0$ ) cuyo coeficiente de fricción viene dado por

$$\alpha_{efe} = \alpha \left( 1 + \frac{\gamma}{3} \right), \quad (2.62)$$

para el caso de bifurcaciones homoclinas, y

$$\alpha_{efe} = \alpha \left( 1 + \gamma \frac{J_2(m)}{J_1(m)} \right), \quad (2.63)$$

$$\alpha_{efe} = \alpha \left( 1 + \gamma \frac{\bar{J}_2(m)}{\bar{J}_1(m)} \right), \quad (2.64)$$

para bifurcaciones subarmónicas, oscilantes y rotantes, respectivamente. Representando gráficamente la contribución del término no lineal, dado por la función que multiplica al coeficiente  $\gamma$ , frente al parámetro  $\omega$  para la bifurcación homoclina y las primeras bifurcaciones subarmónicas, como muestra la figura 2.9, puede apreciarse fácilmente que para valores pequeños del parámetro  $\omega$  el sistema se comporta aproximadamente como un oscilador con fricción lineal cuyo coeficiente de rozamiento efectivo viniera dado por la ecuación 2.62. Aunque en el caso de la bifurcación homoclina esto resulta cierto para cualquier valor del parámetro  $\omega$ , los efectos del término no lineal de fricción se hacen notar en los subarmónicos cada vez más cuanto mayor sea el valor de este parámetro.

### 2.1.5 Resultados numéricos

Para comprobar el rango de validez de los resultados obtenidos al aplicar el método de Melnikov al sistema 2.2, se han llevado a cabo una serie de simulaciones numéricas.

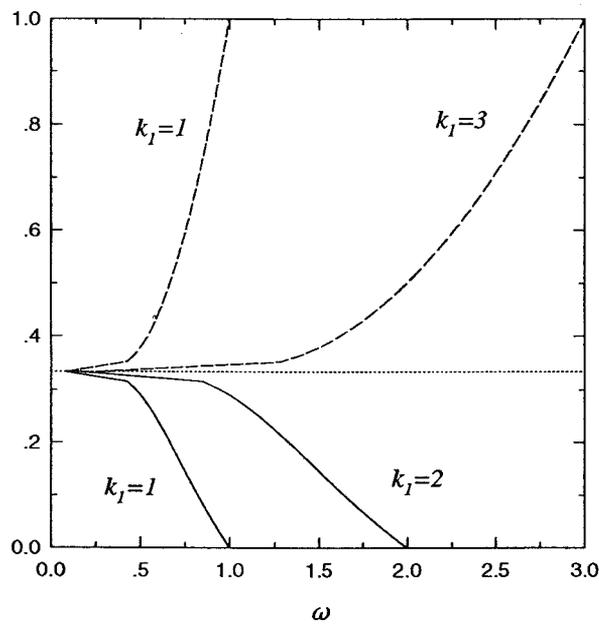


Figura 2.9: Gráficas de las funciones  $J_2(m)/J_1(m)$  (líneas discontinuas),  $\bar{J}_2(m)/\bar{J}_1(m)$  (línea continua) frente al parámetro de control  $\omega$  para diversas bifurcaciones subarmónicas. También se representa el valor constante  $1/3$  (línea de puntos).

Los detalles de los procedimientos numéricos empleados se encuentran en el apéndice B.

En primer lugar se ha estudiado la aparición de subarmónicos, encontrando para diversos valores de los parámetros  $\omega$ ,  $\epsilon\bar{\alpha}$  y  $\gamma$  el valor crítico del parámetro  $\epsilon\bar{\alpha}$  correspondiente a la bifurcación subarmónica. En la tabla 2.1 se representan estos valores junto con el valor crítico de  $\epsilon\bar{\alpha}$ , calculado mediante las funciones subarmónicas de Melnikov. Como fácilmente puede apreciarse, la concordancia resulta ser bastante buena, incluso para valores relativamente altos del término de perturbación.

Analizando más en detalle los resultados obtenidos se ha encontrado que, para diversos intervalos de valores de los parámetros de control, coexisten diferentes subarmónicos, pudiendo el sistema presentar uno u otro comportamiento dependiendo de las condiciones iniciales. También ha sido imposible encontrar, con un grado de precisión aceptable, subarmónicos de orden superior a los que figuran en la tabla. Este hecho puede justificarse porque los dominios de atracción de los subarmónicos son más pequeños cuanto mayor es su periodo [Gree83], lo que se traduce en la dificultad de encontrar las condiciones iniciales apropiadas, aún realizando una exploración exhaustiva del espacio de las fases. Por otra parte, al ser las derivadas de las frecuencias angulares 2.11, 2.12 funciones que tienden a infinito cuando  $m$  se aproxima a uno, el rango de validez en  $\epsilon$  disminuye al aumentar el orden de los subarmónicos, hecho que puede dificultar aún más la búsqueda numérica de subarmónicos de orden superior [Yag96, Yag96b].

Otra cuestión interesante en relación con la posible existencia de atractores caóticos en el sistema, consiste en averiguar hasta qué valores del término de perturbación la función de Melnikov predice adecuadamente la aparición de bifurcaciones homoclinas. Para responder a esta pregunta se han realizado algunas comprobaciones numéricas mediante el uso del programa DSTOOL [Guc92], encontrando el punto fijo del mapa de Poincaré del sistema completo 2.2, calculando sus variedades estables e inestables y variando, para unos valores dados de los parámetros  $\omega$ ,  $\epsilon\bar{\alpha}$  y  $\gamma$ , el parámetro  $\epsilon\bar{\alpha}$  hasta encontrar el valor crítico que produce la tangencia entre las variedades. Los resultados obtenidos, junto con los que predice el método de Melnikov, se presentan en la tabla 2.2. De nuevo puede apreciarse un gran concordancia entre los valores teóricos y

Régimen	$k_1$	$\omega$	$\gamma$	$\epsilon\bar{\alpha}$	Teórico	Numérico
Osc.	1	0.8	-0.99	0.04	0.0204	$0.0204 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	-0.99	0.4	0.2042	$0.1823 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	-0.99	0.04	0.2640	$0.2640 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	-0.99	0.4	2.640	$2.744 \pm 0.001$
Rot.	1	1.5	-0.99	0.04	0.2523	$0.2530 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	-0.8	0.04	0.0278	$0.0278 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	-0.8	0.4	0.2782	$0.2455 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	-0.8	0.04	0.3138	$0.3140 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	-0.8	0.4	3.138	$3.578 \pm 0.001$
Rot.	1	1.5	-0.8	0.04	0.2636	$0.2681 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0	0.04	0.0590	$0.5887 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0	0.2	0.2947	$0.3003 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0	0.04	0.5237	$0.5246 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0	0.2	2.618	$2.808 \pm 0.001$
Rot.	1	1.5	0	0.04	0.3111	$0.3160 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0.8	0.04	0.0901	$0.0900 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0.8	0.15	0.3378	$0.3276 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0.8	0.04	0.7335	$0.7360 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0.8	0.15	2.751	$2.932 \pm 0.001$
Rot.	1	1.5	0.8	0.04	0.3586	$0.3415 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0.99	0.04	0.0975	$0.0975 \pm 0.0001$
Osc.	1	0.8	0.99	0.15	0.3655	$0.3531 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0.99	0.04	0.7834	$0.7864 \pm 0.0001$
Osc.	3	2	0.99	0.15	2.938	$3.160 \pm 0.001$
Rot.	1	1.5	0.99	0.04	0.3700	$0.3664 \pm 0.0001$

Tabla 2.1: Valores teóricos y numéricos del parámetro  $\bar{\epsilon}$  correspondientes a diferentes bifurcaciones subarmónicas para varios valores de los parámetros  $\omega$ ,  $\epsilon\bar{\alpha}$  y  $\gamma$ .

$\omega$	$\gamma$	$\epsilon\bar{\alpha}$	Teórico	Numérico
0.8	-0.99	0.04	0.064	$0.062 \pm 0.001$
0.8	-0.99	0.4	0.645	$1.16 \pm 0.01$
0.8	-0.8	0.04	0.0709	$0.070 \pm 0.002$
0.8	-0.8	0.4	0.709	$1.14 \pm 0.01$
0.4	0	0.04	0.061	$0.082 \pm 0.001$
0.4	0	0.4	0.613	$0.615 \pm 0.001$
0.4	0.8	0.04	0.078	$0.096 \pm 0.001$
0.4	0.8	0.4	0.777	$0.752 \pm 0.001$
0.4	0.99	0.04	0.082	$0.100 \pm 0.001$
0.4	0.99	0.4	0.818	$0.786 \pm 0.001$

Tabla 2.2: Valores teóricos y numéricos del parámetro  $\epsilon\bar{\alpha}$  correspondiente a la bifurcación homoclina para varios valores de  $\gamma$  y  $\omega$ .

numéricos. Al aumentar el parámetro  $\gamma$ , que controla la contribución del término no lineal al coeficiente de fricción, las predicciones teóricas y numéricas son mucho más coincidentes que para valores altos del parámetro  $\epsilon\bar{\alpha}$ , parámetro que gobierna la magnitud del término completo de fricción.

## 2.2 Oscilador con fricción no lineal generalizada

En la sección anterior se presenta un estudio, realizado fundamentalmente mediante el método de Melnikov, en el que se tratan algunos aspectos de la dinámica de un oscilador forzado armónicamente, cuyo término de fricción es suma de dos términos, uno constante de valor  $\alpha$ , y otro de la forma  $\alpha\gamma\cos X_1$ , donde el parámetro  $\gamma$  modula la amplitud relativa, respecto al parámetro constante, de la contribución no lineal al amortiguamiento. Los resultados obtenidos indican que el valor de los parámetros de control que dan lugar a órbitas homoclinas y la aparición de estados caóticos estables vienen condicionados por la contribución de este término no lineal al coeficiente de rozamiento.

Una cuestión importante en relación con los resultados anteriores, consiste en averiguar hasta qué punto los valores de los parámetros de control, que dan lugar a

ese tipo de comportamientos, dependen de la forma y periodo de la función no lineal que aparece en el coeficiente de rozamiento. Para responder a esta pregunta se ha realizado un estudio del sistema descrito por las ecuaciones 1.21. En este sistema, la función no lineal que aparece en el término de fricción es una función genérica de la variable  $X_1$ , de forma y periodo variables, controlados por los nuevos parámetros de control  $m$  y  $T$ . Utilizando el método de Melnikov y mediante simulaciones numéricas se ha estudiado la influencia de estos parámetros sobre este tipo de fenómenos.

Resulta conveniente reescribir las ecuaciones 1.21 en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\text{sen}X_1 + \epsilon(\bar{i}\text{sen}\omega t - \bar{\alpha}(1 + \gamma\text{cd}(\omega_0 X_1, m)))X_2,\end{aligned}\quad (2.65)$$

siendo  $\bar{\epsilon}i = i$ ,  $\epsilon\bar{\alpha} = \alpha$ , y  $\epsilon$  un nuevo parámetro que permite controlar explícitamente la magnitud del término de perturbación que actúa sobre el sistema hamiltoniano base ( $\epsilon = 0$ ). Este sistema hamiltoniano resulta ser el mismo que en el caso 2.1.

### 2.2.1 Función de Melnikov

Utilizando los resultados obtenidos en 2.1, y empleando la misma notación, la función de Melnikov del sistema 2.65 viene dada por

$$M^\pm(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_0(\Gamma_\pm^0(t)) \wedge \vec{f}_1(\Gamma_\pm^0(t), t + t_0) dt, \quad (2.66)$$

donde los signos positivo o negativo corresponden a cada una de las órbitas homoclinas que posee el sistema hamiltoniano base y vienen dadas por la ecuación 2.4. Las funciones  $\vec{f}_0$  y  $\vec{f}_1$  resultan ser

$$\begin{aligned}\vec{f}_0 &= (X_2, -\text{sen}X_1) \\ \vec{f}_1 &= (0, \bar{i}\text{sen}\omega t - \bar{\alpha}(1 + \gamma\text{cd}(\omega_0 X_1, m)))X_2.\end{aligned}\quad (2.67)$$

Explícitamente, introduciendo las ecuaciones de las órbitas homoclinas, resulta

$$\begin{aligned}M^\pm(t_0) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} 2\bar{i}\text{sech}\text{sen}\omega(t + t_0) dt - \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} 4\bar{\alpha}\text{sech}^2 t (1 + \gamma\text{cd}(2\omega_0(\arctan(\sinh t), m))) dt.\end{aligned}\quad (2.68)$$

El cálculo de estas integrales se detalla en el apéndice A, y el resultado es

$$M^\pm(t_0) = \pm 2\pi i \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sen}\omega t_0 - 8\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\gamma I_3(m, T)}{2} \right), \quad (2.69)$$

donde

$$I_3(m, T) = \frac{2\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2(2n+1)\pi^2/T)}{1 - (2\pi/T)^2(4n+2)^2} \operatorname{cosech} \left( \frac{(n+1/2)\pi K(1-m)}{K(m)} \right). \quad (2.70)$$

Esta función  $I_3(m, T)$  da cuenta de la contribución a la función de Melnikov del término no lineal que aparece en el término de fricción. Un estudio sobre sus propiedades, que se detalla en el apéndice A, indica que

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_3(m, T) = 0, \quad (2.71)$$

independiente del valor del parámetro  $m$ , es decir, de la forma de la función. Este resultado, como podía esperarse, indica que la contribución al rozamiento de una función rápidamente oscilante tiende a 0 sin que tenga influencia su forma.

Para valores del parámetro  $T \geq 2\pi$ , la función  $I_3(m, T)$  resulta ser una función positiva creciente con el periodo, es decir, la contribución a la función de Melnikov del término de fricción no lineal aumenta. Físicamente puede interpretarse este resultado como si la influencia de la fricción fuese más relevante al variar éste más lentamente. En el límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_3(m, T) = 2, \quad (2.72)$$

que es justamente el valor correspondiente a un coeficiente de fricción constante. Para valores del periodo  $T < 2\pi$ , y mediante simulaciones numéricas, se han encontrado intervalos en los que esta función resulta decreciente e incluso negativa. No obstante, cuando esto ocurre, los valores de esta función son próximos a cero. p.e.,  $I_3(0.5, \pi/2) = -0.0283$ . Las figuras 2.10, 2.11 muestran el comportamiento típico de esta función. Como fácilmente puede apreciarse, para valores de  $T < 2\pi$ , la función alcanza rápidamente valores próximos a cero.

Para valores del periodo  $T \geq 2\pi$ , la función  $I_3(m, T)$  es una función positiva y creciente del parámetro  $m$ , lo que indica que la contribución de este término resulta

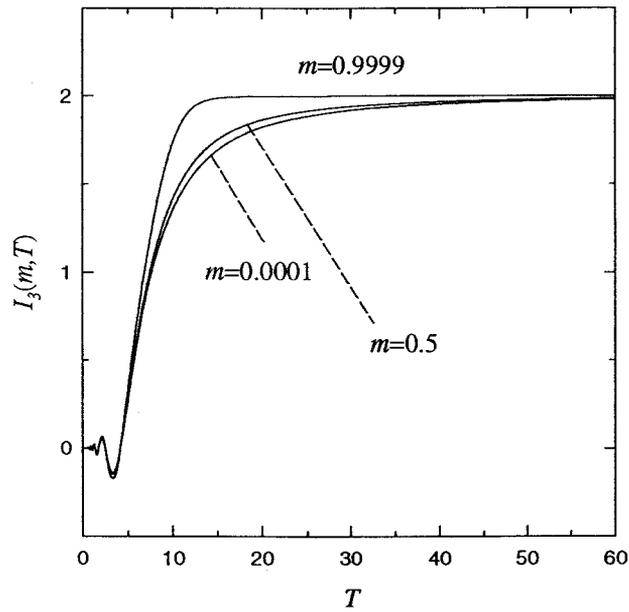


Figura 2.10: Representación gráfica de la función  $I_3(m, T)$  frente al periodo  $T$  correspondiente a diversos valores del parámetro  $m$ .

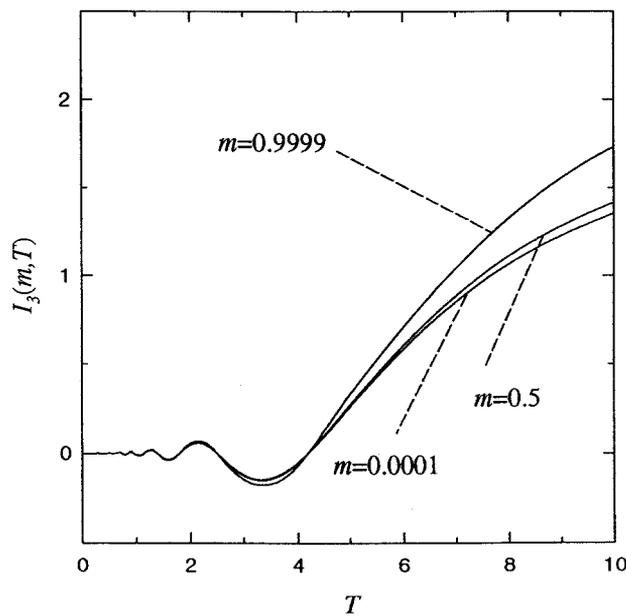


Figura 2.11: Detalle de la figura 2.10

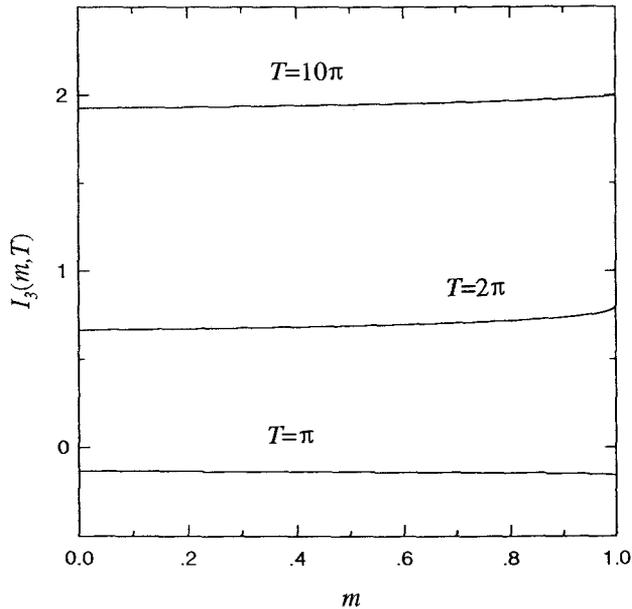


Figura 2.12: Representación gráfica de la función  $I_3(m, T)$  frente  $m$  correspondiente a diversos valores del parámetro  $T$ .

más significativa cuanto más parecido sea el término de fricción a una onda cuadrada. En el límite

$$\lim_{m \rightarrow 0} I_3(m, T) = \frac{2\cos(2\pi^2/T)}{1 - 16\pi^2/T^2}, \quad (2.73)$$

que para  $T = 2\pi$  se reduce a la encontrada en la sección 2.1. En el caso de onda cuadrada

$$\lim_{m \rightarrow 1} I_3(m, T) = \frac{T^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2(2n+1)\pi^2/T)}{2n+1 T^2 - 2\pi^2 - 8n\pi^2 - 8n^2\pi^2}. \quad (2.74)$$

Para valores del período  $T < 2\pi$ , mediante simulaciones numéricas, se han encontrado intervalos en los que  $I_3(m, T)$  llega a ser decreciente con el parámetro  $m$ , aunque en estos casos tiende rápidamente a cero. Las figuras 2.12, 2.13 muestran la dependencia de esta función con el parámetro  $m$  para diversos valores del período  $T$ .

A la vista de las figuras 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, puede apreciarse fácilmente que el valor de  $I_3(m, T)$  sólo resulta ser significativamente distinto de cero cuando el período  $T$  es del orden o mayor que  $2\pi$ . A su vez, al crecer el período, esta función crece rápidamente y prácticamente alcanza su valor límite para periodos del orden

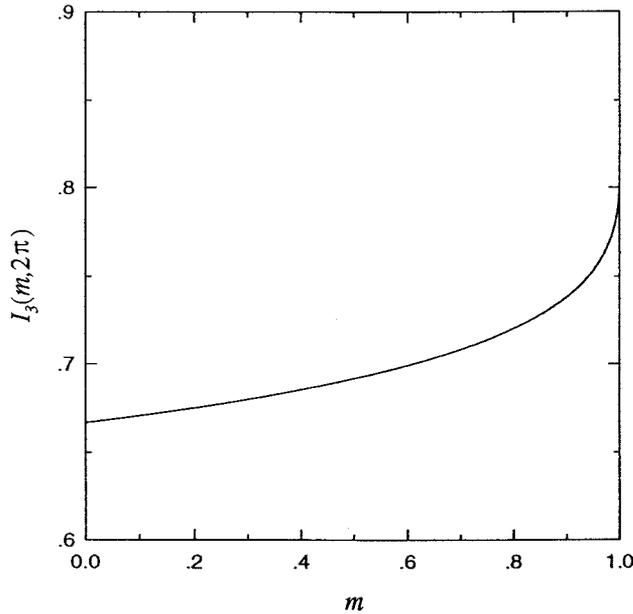


Figura 2.13: Representación gráfica de la función  $I_3(m, 2\pi)$ .

de  $T = 10\pi$ . La dependencia con el valor del parámetro  $m$ , es decir, con la forma de la función no lineal  $\text{cd}(\omega_0 t, m)$ , sólo resulta apreciable para periodos del orden de  $T = 2\pi$ . Incluso en estos casos esta dependencia es muy suave, como muestra la tabla 2.3.

La condición necesaria para que existan bifurcaciones homoclinas en el sistema 2.65 consiste en que la función de Melnikov posea algún cero, por lo que tendrá que cumplirse

$$\frac{\bar{i}}{\bar{\alpha}} > R(\omega, \gamma, m, T), \quad (2.75)$$

donde ,

$$R(\omega, \gamma, m, T) = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{\gamma I_3(m, T)}{2} \right) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (2.76)$$

La traza del jacobiano del término de perturbación,  $\vec{f}_1$ , tomada a lo largo de una órbita homoclina del sistema sin perturbar, y calculada sobre un periodo es negativa

$$L = \int_0^T -\bar{\alpha}(1 + \gamma \text{cd}(\omega_0 X_1, m)) dt < 0, \quad (2.77)$$

ya que el integrando siempre lo es. Dado que la función de Melnikov del sistema 2.65

$m$	$I_3$
0	2/3
0.2	0.6750
0.5	0.6918
0.9	0.7384
$1 - 10^{-15}$	0.8264
1	0.8284

Tabla 2.3: Valores de la función  $I_3(m, 2\pi)$  correspondientes a algunos valores del parámetro elíptico  $m$ .

cumple condiciones similares a 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26 en el punto  $(\pm\omega t_0, \bar{i}_0) = (\pm\pi/2, \bar{\alpha}R(\omega, \gamma, m, T))$ , como puede comprobarse fácilmente, el mapa de Poincaré del sistema completo posee un punto de silla disipativo y sus variedades estables e inestables intersectan. Si  $\bar{i} < \bar{i}_0$  se separan y si  $\bar{i} > \bar{i}_0$  se cortan. La ecuación  $\bar{i} = \bar{i}_0$  define la curva de bifurcación homoclina en el espacio de parámetros.

Debido al comportamiento de la función  $I_3(m, T)$ , para valores del periodo pequeños ( $T \ll 2\pi$ ) las curvas de bifurcación serán similares a las de un oscilador cuyo coeficiente de fricción sea constante de valor  $\bar{\alpha}$ . Para valores grandes del periodo ( $T \gg 2\pi$ ), de nuevo serán similares a las de un oscilador con coeficiente de fricción constante de valor  $\bar{\alpha}(1 + \gamma)$ . El rango de valores más interesante corresponde a periodos del orden de  $T = 2\pi$ , pudiéndose apreciar la dependencia de los valores de los parámetros de control que dan lugar a la bifurcación homoclina con la forma de la función que controla el coeficiente de rozamiento. En la figura 2.14 se representa, para varios valores de los parámetros  $\gamma$  y  $m$ , el valor del cociente  $\bar{i}_0/\bar{\alpha}$  frente a  $\omega$ . Para un valor dado del parámetro  $\gamma$  estas curvas son muy parecidas entre sí. Cuando aumenta el parámetro  $m$  el valor necesario del cociente  $\bar{i}_0/\bar{\alpha}$ , correspondiente a un valor dado de  $\omega$  aumenta. Cuando el término de fricción tiende a parecerse a una onda cuadrada, aumenta el valor necesario de la excitación para conseguir la bifurcación, aunque de manera suave.

Los resultados anteriores indican que la dependencia con la forma de la función que controla el término de fricción  $\bar{\alpha}(1 + \gamma \text{cd}(\omega_0 t, m))$  no resulta ser muy relevante. Para

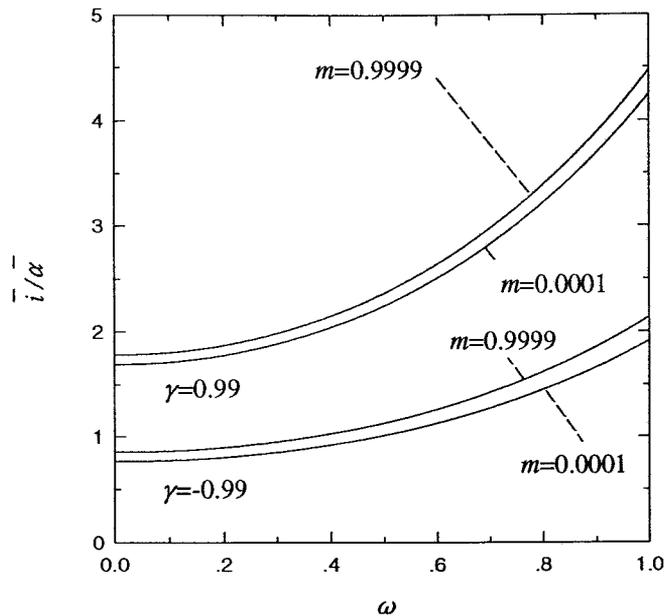


Figura 2.14: Curva de bifurcación  $\bar{i}/\alpha$  frente a  $\omega$  para diversos valores de  $m$  y  $\gamma$  y  $T = 2\pi$ .

periodos grandes o pequeños rápidamente alcanza los valores límites independientes del valor de  $m$ . Incluso en los casos más favorables, cuando el periodo es del orden de  $2\pi$ , la dependencia es muy pequeña. Todo esto lleva a considerar que los resultados obtenidos en la sección 2.1 son prácticamente extrapolables al caso de un sistema con un término de fricción generalizado del tipo estudiado, al menos en lo referente a la aparición de bifurcaciones homoclinas cuando las perturbaciones del sistema hamiltoniano base son pequeñas.

### 2.2.2 Simulación numérica

Los resultados obtenidos en la sección anterior muestran que la aparición de bifurcaciones homoclinas depende del término de fricción no lineal. Para analizar esta dependencia en relación con otros tipos de comportamientos, en especial, con la aparición de estados caóticos estables, se han realizado una serie de simulaciones numéricas calculando diversos diagramas de bifurcación. En cada diagrama se representa la sección

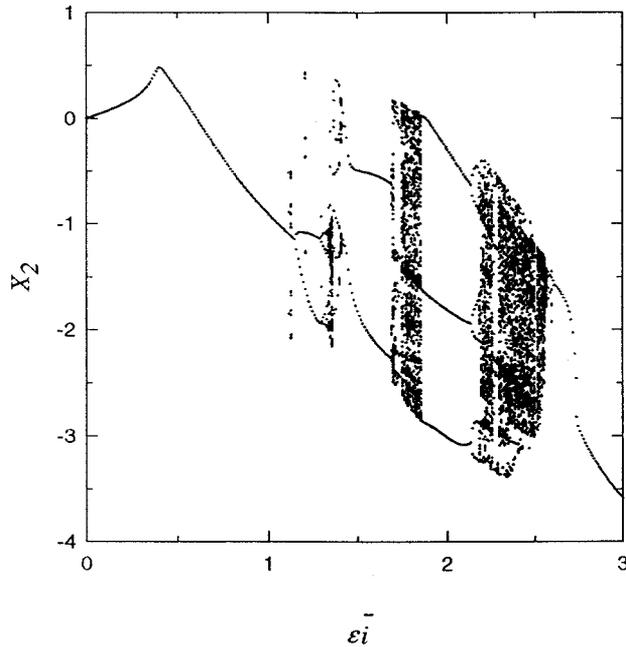


Figura 2.15: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $\omega = 0.8$ ,  $T = \pi/2$  y  $m = 0.1$ .

de Poincaré del sistema correspondiente a la variable  $X_2$  frente al parámetro  $\epsilon \bar{i}$ . En todas las simulaciones se ha elegido valores fijos de los parámetros  $\omega = 0.8$  y  $\epsilon \bar{\alpha} = 0.4$ , que resultan típicos en el contexto de las uniones Josephson [Pal91, Pal93, Pal95], y varios valores de los parámetros  $\gamma$  ( $|\gamma| < 1$ ) y  $m$  ( $0 \leq m \leq 1$ ).

Para estudiar la influencia del periodo  $T = 4K(m)/\omega_0$  del coeficiente de fricción no lineal sobre el comportamiento del sistema, se han elegido valores característicos de este parámetro correspondientes a valores de baja, alta y media frecuencia.

En las figuras 2.15, 2.16 se muestran dos diagramas de bifurcación correspondientes a un valor del periodo de la perturbación  $T = \pi/2$  y dos valores del parámetro  $m$  próximos a sus valores extremos. Puede apreciarse fácilmente la similitud entre ellos y la práctica equivalencia con el diagrama de bifurcación que muestra la figura 2.17, correspondiente a un coeficiente de fricción constante. Los resultados para otros valores de los parámetros  $m$  y  $\gamma$  confirman este hecho, comprobado también para otros valores del periodo  $T < \pi/2$ . El sistema es prácticamente equivalente a un sistema

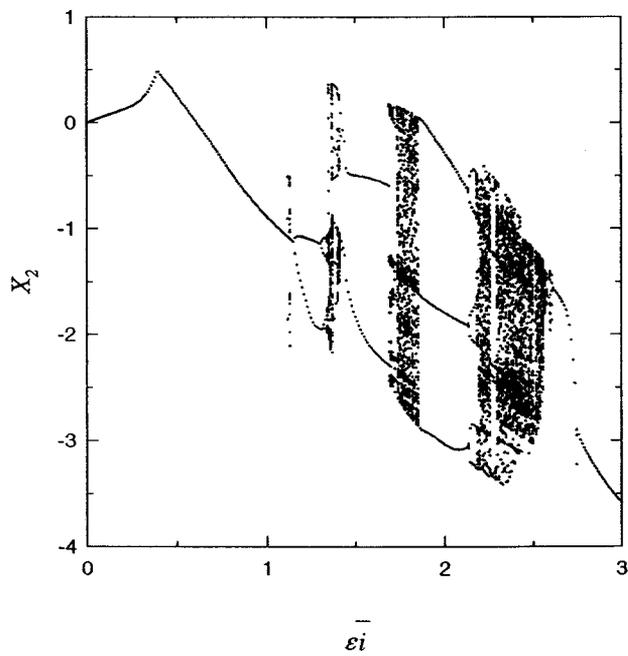


Figura 2.16: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $\omega = 0.8$ ,  $T = \pi/2$  y  $m = 0.99$ .

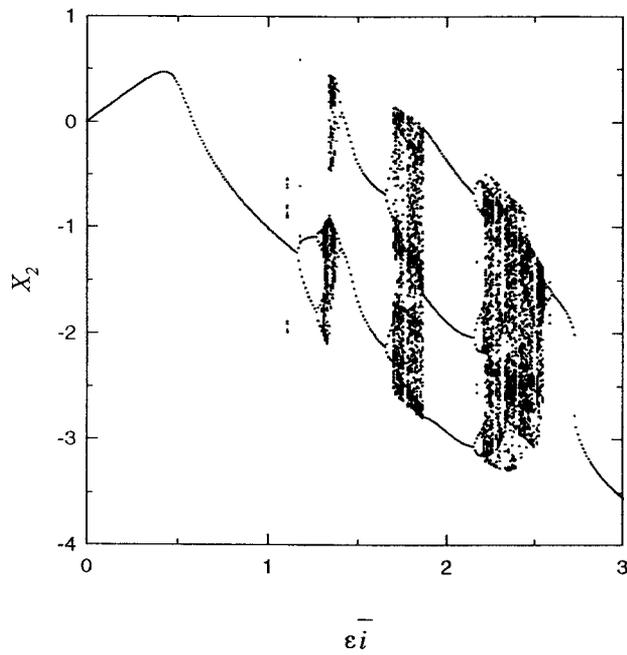


Figura 2.17: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0$  y  $\omega = 0.8$ .

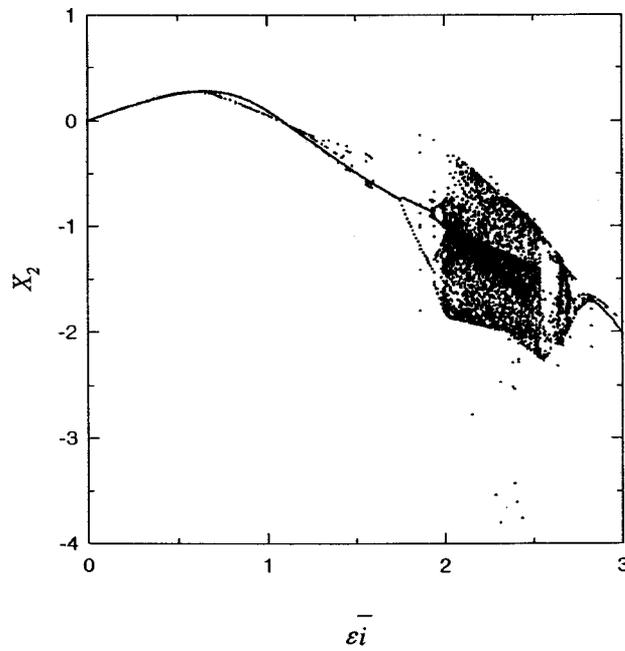


Figura 2.18: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $\omega = 0.8$ ,  $T = 10\pi$  y  $m = 0.1$ .

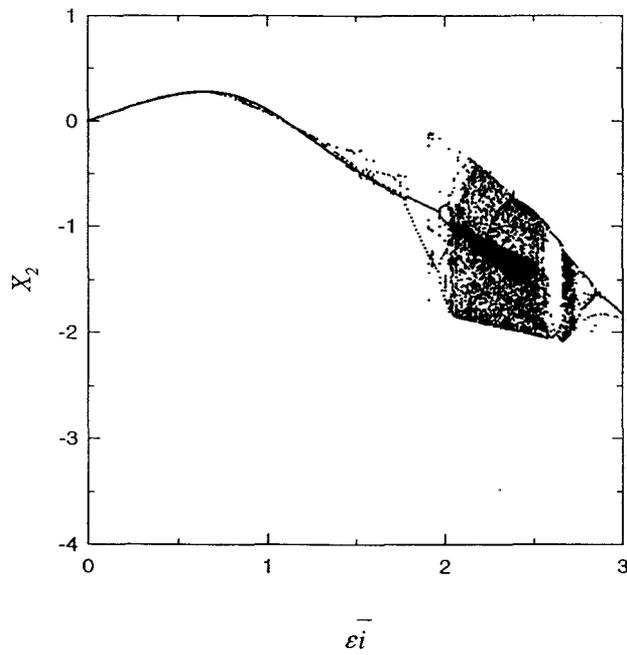


Figura 2.19: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4, \gamma = 0.9, \omega = 0.8, T = 10\pi$  y  $m = 0.99$ .

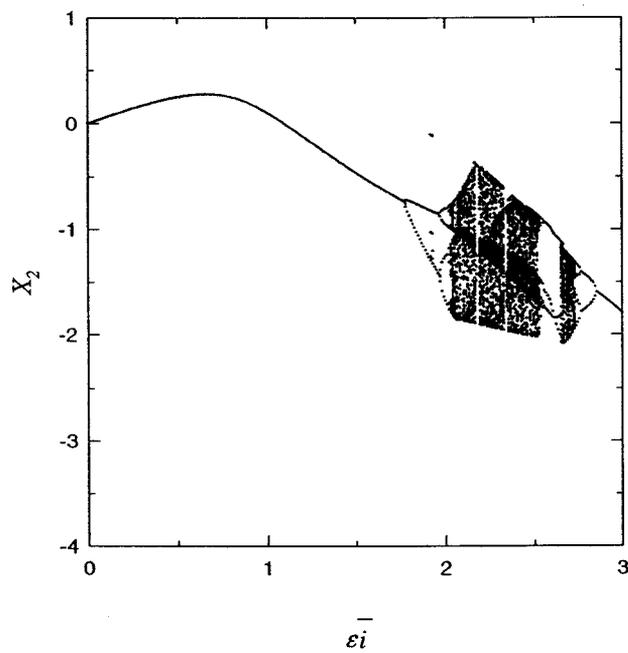


Figura 2.20: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.76$ ,  $\gamma = 0.0$  y  $\omega = 0.8$ .

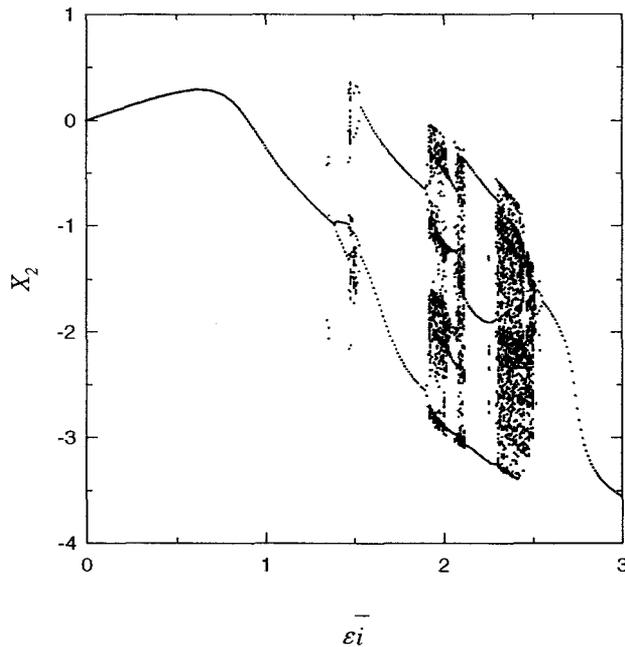


Figura 2.21: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4, \gamma = 0.9, \omega = 0.8, T = 2\pi, m = 0.1$ .

con fricción constante de valor  $\alpha$ .

Las figuras 2.18, 2.19 muestran dos diagramas de bifurcación correspondientes al valor de  $T = 10\pi$  y los mismos valores del parámetro  $m$  que en el caso anterior. Resulta evidente su similitud con el que se muestra en la figura 2.20, que corresponde a un coeficiente de fricción constante. Las simulaciones realizadas para otros valores de los parámetros  $m$  y  $\gamma$  siguen mostrando esta analogía, comprobada para otros valores del periodo  $T > 10\pi$ . El efecto del coeficiente de rozamiento generalizado es equivalente a un coeficiente constante de valor  $\alpha(1 + \gamma)$ .

Las figuras 2.21, 2.22 corresponden al valor de  $T = 2\pi$  y los mismos valores anteriores del parámetro  $m$ . Fácilmente puede apreciarse que las diferencias son mínimas. Las simulaciones realizadas para otros valores de los parámetros  $\gamma$  y  $m$  muestran el mismo tipo de comportamiento.

En definitiva, en el rango de valores estudiados los resultados obtenidos numéricamente coinciden globalmente con los obtenidos mediante el método de Melnikov.

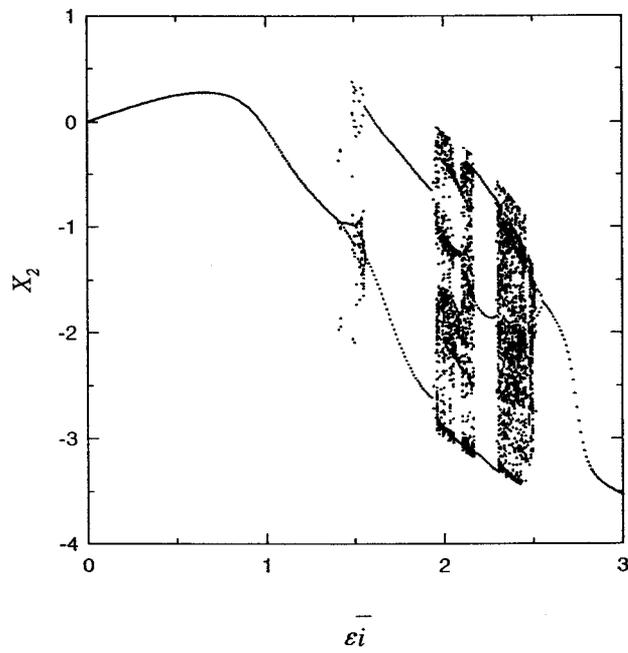


Figura 2.22: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4, \gamma = 0.9, \omega = 0.8, T = 2\pi, m = 0.99$ .

La influencia del parámetro  $m$ , es decir, con la forma exacta del término de fricción no lineal, no resulta muy relevante en la dinámica del sistema. Lo anteriormente expuesto lleva a considerar que los resultados obtenidos en el estudio del sistema 1.20 son extrapolables para el caso de coeficientes de fricción del tipo estudiado cuando el periodo de la función que controla este término es del orden de  $T = 2\pi$ .

A la vista de los diagramas de bifurcación obtenidos, resulta inmediato comprobar que los casos correspondientes a los valores  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 0.9$  con  $T = 2\pi$ , aunque diferentes, muestran el mismo tipo de comportamiento cualitativo en el sistema. Este hecho permite de nuevo intentar reproducir, mediante un modelo con fricción lineal, los comportamientos que aparecen en el modelo con fricción generalizada. Este problema se estudiará con detalle en el capítulo siguiente.

### 2.3 Sistema con forzamiento generalizado

Al estudiar el sistema descrito por las ecuaciones 1.20 se ha considerado que la excitación externa venía dada por la función armónica  $\text{sen}\omega t$ . Para considerar mecanismos de excitación no lineales se ha realizado un estudio del sistema descrito por las ecuaciones 1.23, donde ya la excitación resulta ser una función de forma y periodo variable que viene dada por la función elíptica de Jacobi  $\text{sn}(\omega t, m)$ , donde el parámetro  $\omega$  está relacionado con el periodo de esta excitación de la forma  $\omega = 4K(m)/T$ , siendo  $K(m)$  la integral elíptica completa de primera especie de parámetro  $m$  y  $T$  el periodo de la excitación. El parámetro  $m$  controla la forma de esta función, que oscila entre la función armónica ( $m = 0$ ) y una onda cuadrada ( $m = 1$ ). Este estudio se ha realizado utilizando el método de Melnikov y simulaciones numéricas.

De la misma forma que en las secciones anteriores, resulta conveniente reescribir el sistema 1.23 de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\text{sen}X_1 + \epsilon(\bar{i}\text{sn}(\omega t, m) - \bar{\alpha}(1 + \gamma\cos X_1)X_2), \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde  $\bar{i} = i$  y  $\epsilon\bar{\alpha} = \alpha$ , siendo  $\epsilon$  un parámetro que permite controlar explícitamente la magnitud del término de perturbación que actúa sobre el sistema hamiltoniano

base ( $\epsilon = 0$ ), que resulta ser el mismo que en los casos estudiados en las secciones anteriores y por lo tanto cumple las condiciones para que pueda aplicarse el método de Melnikov.

### 2.3.1 Función de Melnikov

Utilizando la misma notación que en las secciones anteriores, la función de Melnikov viene dada por

$$M^\pm(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_0(\Gamma_\pm^0(t)) \wedge \vec{f}_1(\Gamma_\pm^0(t), t + t_0) dt, \quad (2.79)$$

donde los signos positivos o negativos corresponden a cada una de las órbitas homoclinas del sistema hamiltoniano base y vienen dadas por las ecuaciones 2.4. Las funciones  $\vec{f}_0$  y  $\vec{f}_1$  resultan ser

$$\begin{aligned} \vec{f}_0 &= (X_2, -\text{sen} X_1) \\ \vec{f}_1 &= (0, i \text{sn}(\omega t, m) - \bar{\alpha}(1 + \gamma \cos X_1) X_2). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Explícitamente, esta función resulta ser

$$\begin{aligned} M^\pm(t_0) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} 2i \bar{\alpha} \text{sech} t \text{sn}(\omega(t + t_0), m) dt - \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} 4\bar{\alpha} \text{sech}^2 t (1 + \gamma \cos(2 \arctan(\sinh t))) dt. \end{aligned} \quad (2.81)$$

El cálculo de estas integrales se detalla en el apéndice A y el resultado es

$$M^\pm(t_0) = \pm 2i \bar{\alpha} F(t_0, m) - 8\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right), \quad (2.82)$$

donde

$$\begin{aligned} F(t_0, m) &= \\ &= \frac{\pi^2}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \text{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \text{sech} \left( \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right) \\ &\text{sen} \left( \frac{2\pi(2n+1)t_0}{T} \right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

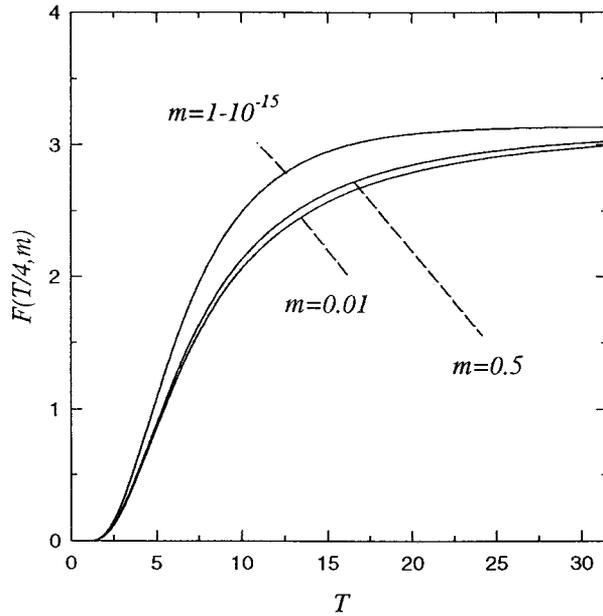


Figura 2.23: Representación de la función  $F(T/4, m)$  frente al periodo  $T$  para diversos valores del  $m$ .

El valor máximo de esta función se encuentra en  $t_0 = T/4$  y en este caso

$$\begin{aligned}
 F(T/4, m) = & \frac{\pi^2}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \\
 & \operatorname{sech} \left( \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right) > 0. \tag{2.84}
 \end{aligned}$$

Mediante simulaciones numéricas se ha comprobado que  $F(T/4, m)$  es creciente en las variables  $T$  y  $m$ . Las figuras 2.23, 2.24, 2.25 muestran los comportamientos típicos de esta función

Esta función, como función del parámetro elíptico  $m$ , responde a las características típicas de este tipo de funciones que aparecen en el estudio de osciladores no lineales sometidos a excitaciones de forma variable [Cha93, Cha95]. Asimismo, esta dependencia resulta más acusada para periodos del orden de  $2\pi$ , como puede apreciarse fácilmente en la figura 2.25, que muestra en detalle esta dependencia para el caso

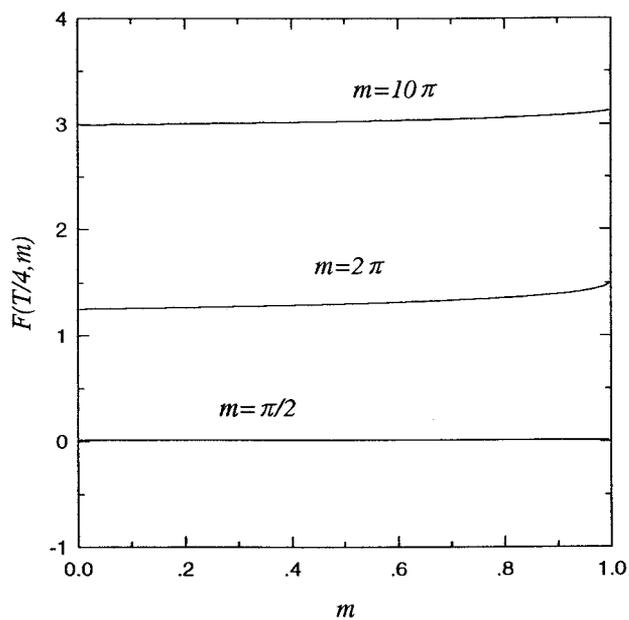


Figura 2.24: Representación de la función  $F(T/4, m)$  frente al parámetro elíptico  $m$  para diversos valores del periodo  $T$ .

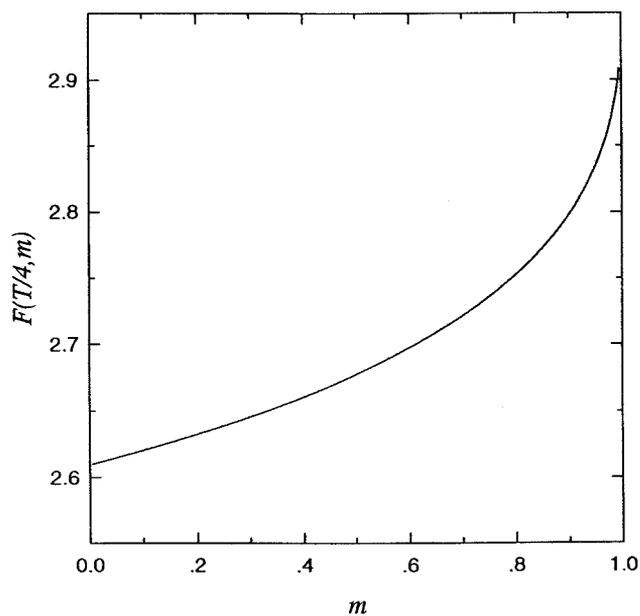


Figura 2.25: Representación de la función  $F(T/4, m)$  frente al parámetro elíptico  $m$  y  $T = 5\pi$ .

$T = 5\pi$ . Los valores límites son independientes del valor de  $m$  y resultan

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(T/4, m) = 0, \quad (2.85)$$

Como era de esperar, la contribución de una excitación rápidamente oscilante a la función de Melnikov tiende a cero.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(T/4, m) = \pi \operatorname{cd}(0, m) = \pi, \quad (2.86)$$

que corresponde al caso de una excitación constante. Para una excitación armónica,

$$\lim_{m \rightarrow 0} F(T/4, m) = \pi \operatorname{sech} \left( \frac{\pi^2}{T} \right), \quad (2.87)$$

que para  $T = 2\pi$  se reduce al resultado correspondiente al sistema 1.20. En el límite en el que la excitación es una onda cuadrada ( $m = 1$ )

$$F(T/4, 1) = 4 \left( \arctan e^{T/4} - \frac{\pi}{4} \right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \arctan e^{(2n+3)T/4} - \arctan e^{(2n+1)T/4} \right), \quad (2.88)$$

que resulta una serie alternada cuyos términos tienden a cero y por lo tanto es convergente. Para los valores límites del periodo  $T$

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(T/4, 1) = 0, \quad (2.89)$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(T/4, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t dt = \pi. \quad (2.90)$$

La condición necesaria para que se produzca una bifurcación homoclina en el sistema 2.78 consiste en que la función de Melnikov debe de poseer algún cero, para ello tendrá que cumplirse

$$\frac{\bar{i}}{\bar{\alpha}} > R(\gamma, m, T), \quad (2.91)$$

donde ,

$$R(\omega, \gamma, m, T) = \frac{4(1 + \gamma/3)}{F(T/4, m)}. \quad (2.92)$$

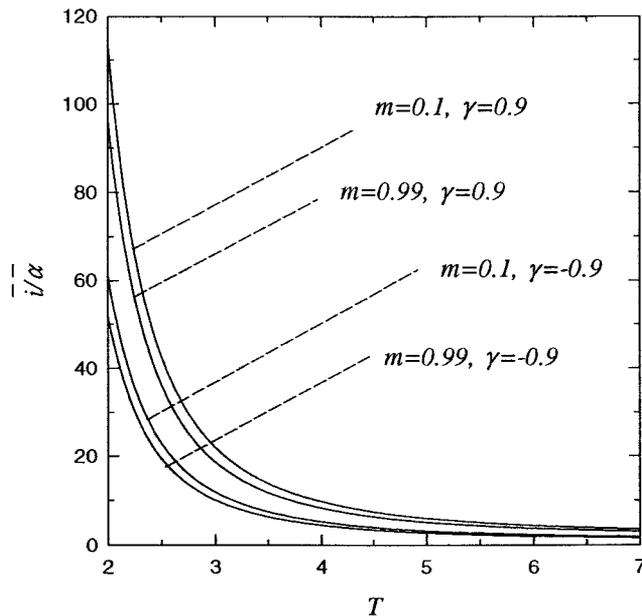


Figura 2.26: Curvas de bifurcación homoclina correspondientes a diversos valores de los parámetros  $\gamma$  y  $m$ .

Es inmediato comprobar que la traza del jacobiano del término de perturbación,  $\vec{f}_1$ , tomada a lo largo de una órbita homoclina del sistema sin perturbar y calculada sobre un periodo, es negativa. Al cumplir la función de Melnikov condiciones similares a 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, como puede comprobarse fácilmente, el mapa de Poincaré del sistema completo posee un punto de silla disipativo y sus variedades estables e inestables se intersectan. Si  $\bar{i} < \bar{i}_0 = \bar{\alpha}R(\gamma, m, T)$  se separan y si  $\bar{i} > \bar{i}_0$  se cortan. La ecuación  $\bar{i} = \bar{i}_0$  define la curva de bifurcación homoclina (siempre que el parámetro  $\epsilon$  sea suficientemente pequeño). La figura 2.26 muestra esta curva para diversos valores de los parámetros  $\gamma$  y  $m$  como función del periodo  $T$ .

Al aumentar el parámetro elíptico  $m$  la excitación tiende a parecerse a una onda cuadrada. Los valores de  $\bar{i}_0$  disminuyen, es decir, la amplitud de la excitación necesaria para que se produzca la bifurcación es menor.

Estos resultados son relevantes de para abordar el problema de la supresión o reducción de caos en sistemas similares al estudiado. Entre los métodos propuestos para controlar la aparición de estados caóticos [Rol93, Ott90], para sistemas de osciladores

descritos por ecuaciones del tipo

$$\ddot{X} + f(X, \dot{X}) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad (2.93)$$

uno de los más usados consiste en añadir una pequeña perturbación al sistema de la forma  $B \operatorname{sen} \beta t$ . En este caso, suponiendo que para  $B = 0$  el sistema se encuentre en un estado caótico, se pueden buscar condiciones que permiten obtener los valores de  $B$  y  $\beta$  que hacen desaparecer esos estados. Parece ser que para que esto ocurra la perturbación debe de estar en resonancia con el sistema. Este hecho sugiere que el término completo de excitación  $A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} \beta t$  podrían ser términos del desarrollo en serie de Fourier de una función periódica que debería guardar una estrecha relación con las soluciones del sistema hamiltoniano base [Bra91, Raj92]. Recientemente, se han propuesto mecanismos de control de caos basados en variar la forma de la excitación [Cha93, Cha95].

En el sistema estudiado, y a la vista de las curvas de bifurcación, puede apreciarse fácilmente que el parámetro elíptico  $m$ , que controla la forma de la excitación, puede utilizarse para conseguir que en sistema se produzca o no la bifurcación homoclina, hecho que posibilita introducir un mecanismo de control de caos mediante la variación de la forma de la excitación. Al variar el valor del parámetro  $m$  el sistema puede presentar una transición al caos, transición que ha sido recientemente descrita [Cha95].

### 2.3.2 Simulación numérica

Los resultados obtenidos mediante el método de Melnikov sólo resultan válidos para valores suficientemente pequeños del parámetro  $\epsilon$  y únicamente proporcionen información sobre la aparición de bifurcaciones homoclinas. Para averiguar la influencia que la forma de la excitación tiene sobre la dinámica del sistema, sobre todo en lo referente a la aparición de estados caóticos estables, se han realizado una serie de simulaciones numéricas. Estas simulaciones se han basado en el cálculo de diagramas de bifurcación correspondientes a la variable  $X_2$  frente a  $\bar{c}_1$  para diversos valores de los parámetros  $m$ ,  $\bar{c}_1$  y  $\gamma$ . Todos estos valores se han elegido de manera que se encuentren dentro de los valores típicos de estos parámetros en el contexto de las uniones Josephson, como se describe en el capítulo 1. Asimismo, se ha tomado el valor del

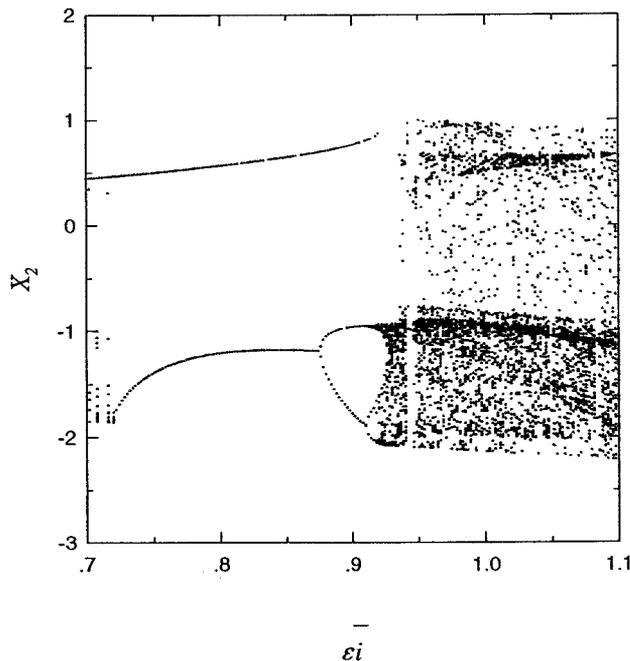


Figura 2.27: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y  $\gamma = 0.8$ ,  $m = 0.1$ ,  $\bar{\epsilon}\alpha = 0.4$  y  $T = 5\pi$ .

periodo  $T = 5\pi$ , valor que se encuentra dentro del intervalo de valores para los que la dependencia de la función de Melnikov con la forma de la excitación resulta más acusada.

Las figuras 2.27, 2.28 muestran los diagramas de bifurcación correspondientes a  $m = 0.1$  y  $m = 0.99$  respectivamente para los valores de  $\gamma = 0.8$  y  $\bar{\epsilon}\alpha = 0.4$ . Puede apreciarse que existen valores del parámetro  $\bar{\epsilon}i$  para los que el sistema presenta comportamiento caótico, de manera que en cada uno de ellos existe un valor mínimo del parámetro  $\bar{\epsilon}i = \bar{\epsilon}i_{caos}$  para el que el sistema posee estados caóticos.

En general, se ha comprobado que al aproximarse la forma de la excitación a una onda cuadrada, el valor  $\bar{\epsilon}i_{caos}$  decrece. En la figura 2.29 se representa este valor crítico frente al parámetro  $m$  para diversos valores de los parámetros  $\bar{\epsilon}\alpha$  y  $\gamma$  junto con los valores que predice el método de Melnikov correspondientes a la bifurcación homoclina.

A la vista de los resultados obtenidos, que se muestran en la figura 2.29, el valor

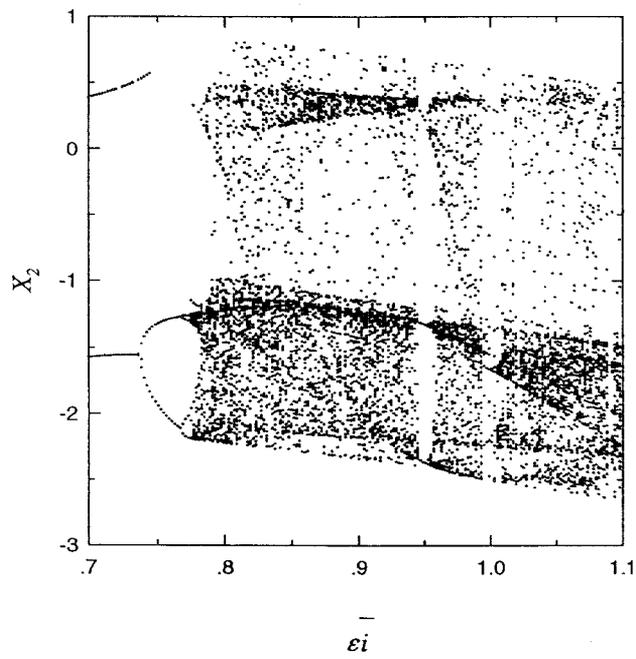


Figura 2.28: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y  $\gamma = 0.8$ ,  $m = 0.99$ ,  $\epsilon \bar{\alpha} = 0.4$  y  $T = 5\pi$

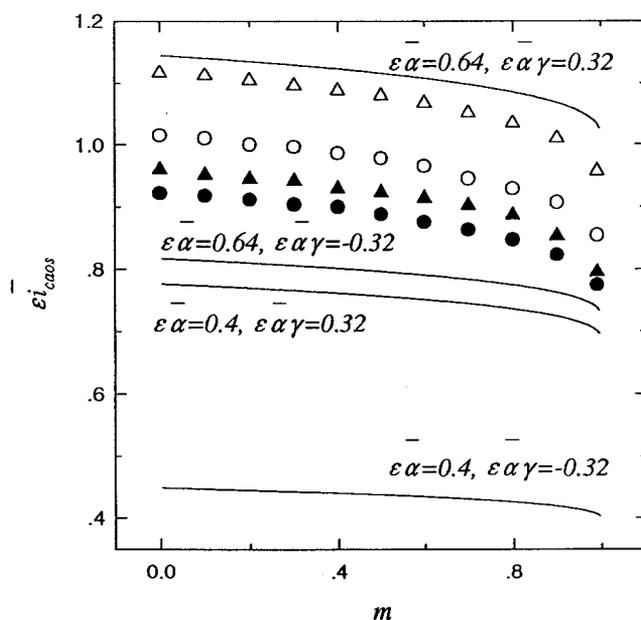


Figura 2.29: Valor crítico  $\bar{\epsilon}i_{caos}$  frente al parámetro  $m$  correspondiente al valor  $T = 5\pi$ . Los símbolos rellenos corresponden al valor  $\bar{\epsilon}\bar{\alpha}\bar{\gamma} = -0.32$  y los huecos a  $\bar{\epsilon}\bar{\alpha}\bar{\gamma} = 0.32$ . Los círculos corresponden a  $\bar{\epsilon}\bar{\alpha} = 0.4$  y los triángulos a  $\bar{\epsilon}\bar{\alpha} = 0.64$ . Las líneas indican los valores correspondientes a la bifurcación homoclina calculados mediante el método de Melnikov.

$\bar{\epsilon}_{i_{caos}}$  crece con el parámetro  $m$ , si el resto de los parámetros de control permanecen constantes. A su vez, para un valor fijo de  $\epsilon\bar{\alpha}$ , al aumentar la contribución del término no lineal de fricción, a través del valor  $\epsilon\bar{\alpha}\gamma$ , el valor crítico  $\bar{\epsilon}_{i_{caos}}$  aumenta. Lo mismo ocurre si, manteniendo constante la contribución no lineal a la fricción, aumentase el coeficiente lineal de fricción.

En definitiva, y en el rango de valores estudiado, la forma de la excitación resulta crucial para la aparición de comportamientos caóticos en el sistema. Este hecho puede utilizarse para controlar el caos. Asimismo, los valores de los parámetros que controlan los coeficientes de fricción lineal y no lineal resultan determinantes en la aparición de este tipo de fenómenos.

Por último, y ya para terminar este capítulo, los resultados obtenidos al analizar los sistemas 1.20, 1.21, 1.23 indican que el comportamiento del sistema depende del valor del coeficiente  $\gamma$  y de su signo. Este hecho sugiere la posibilidad de explorar sistemas más generales, en los que se incluiría un nuevo parámetro de control,  $\phi$ , fase inicial de la función que controla el coeficiente de fricción, que podría jugar un papel crucial en el comportamiento de esta clase de osciladores.

## Capítulo 3

# Estudio de una unión Josephson con efectos de interferencias bajo una excitación armónica

Anteriormente se ha analizado, empleando fundamentalmente el método de Melnikov y técnicas basadas en simulaciones numéricas, algunos aspectos de la dinámica de una serie de osciladores con términos no lineales de fricción bajo excitaciones periódicas. En todo este estudio el interés se ha centrado en encontrar valores de los parámetros de control que hacen que el sistema experimente una bifurcación homoclina, fenómeno que puede resultar precursor de la aparición de caos, y caos. No obstante, y a la vista de cualquiera de los diagramas de bifurcación global calculados previamente, puede observarse que todos estos sistemas presentan una gran variedad y riqueza de comportamientos, no sólo en el rango de valores de los parámetros de control para los que se presenta caos, sino también en las zonas en las que se presenta comportamiento periódico.

Para estudiar más detalladamente todo este tipo de fenómenos se ha elegido el sistema descrito por las ecuaciones 1.20, ya que resulta bastante representativo de toda una familia de osciladores sometidos a potenciales de la forma  $V(x) = -\cos x$ , con fricción no lineal controlada por una función periódica de la variable  $x$ , y excitados armónicamente. Asimismo, este modelo describe bastante bien una unión

Josephson excitada mediante una fuente de intensidad en la que se consideran efectos de interferencias entre corrientes. Encontrar efectos en este tipo de sistemas que pudieran atribuirse directamente al término de interferencias podrían permitir a ayudar a resolver la aparente contradicción entre los valores experimentales y teóricos del coeficiente  $\gamma$  que controla estos efectos no lineales.

Como en la práctica resulta imposible analizar toda la variedad de comportamientos que el sistema 1.20 presenta en función de todos los parámetros de control, básicamente se ha estudiado los cambios en la dinámica en función del parámetro  $\omega$  [Pal91, Pal93]. Los valores de los restantes parámetros de control se han considerado fijos, eligiéndolos de manera que resulten representativos de los que se utilizan cuando se estudian este tipo de sistemas en el contexto de las uniones Josephson.

Para el valor del parámetro  $\alpha$ , los valores típicos se encuentran en el intervalo  $0.03 \leq \alpha \leq 0.7$ , indicando que el sistema lineal correspondiente se encuentra en régimen subamortiguado [Mac83, McC68], se ha elegido  $\alpha = 0.4$ . Con respecto al coeficiente  $\gamma$ , como ya se ha mencionado en el primer capítulo, su valor resulta ser próximo a  $-0.9$ . Como algunas experiencias en uniones Pb-Pb han mostrado que  $\gamma = -0.9 \pm 0.2$  [Ped72], se ha elegido el valor  $\gamma = -0.8$ , que se encuentra dentro del rango de valores obtenido experimentalmente. Los parámetros  $i$  y  $\omega$  dan cuenta de una acción externa sobre el sistema, de manera que se ha elegido  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0 \leq \omega \leq 1.2$  [Pal91, Pal93, Yao86].

Con respecto a las técnicas y procedimientos numéricos utilizados, aunque en este capítulo se mencionan brevemente algunos de ellos, en el apéndice B se exponen en detalle todos los métodos empleados.

La estructura de este capítulo está dividida en secciones. En la primera sección se presentan, a grandes rasgos, las características y fenómenos más importantes que presenta el sistema estudiado en el rango de valores de los parámetros de control elegido. Posteriormente, y en las siguientes secciones, se estudian en detalle los más relevantes. Seguidamente se exponen los resultados de un estudio sobre cierto tipo de fenómeno que se presenta cuando se analiza la dinámica del sistema en función de los valores de dos parámetros de control,  $\omega$  y  $\gamma$  y que se encuentra relacionado con algunos cambios en la estructura de los atractores caóticos. La última sección está

dedicada a estudiar la posibilidad de simular mediante un modelo con un coeficiente de fricción lineal todos los comportamientos encontrados en el sistema y a encontrar algunos efectos que pudieran atribuirse directamente al término no lineal de fricción.

### 3.1 Introducción

Como primer paso para estudiar el comportamiento del sistema 1.20 se ha obtenido el diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$ , que se presenta en la figura 3.1. Aunque sólo se muestra el intervalo de valores del parámetro de control  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ , para valores menores el comportamiento resulta ser cualitativamente similar al caso de  $\omega = 0.45$  y para valores en el intervalo  $0.73 \leq \omega \leq 1.2$ , análogo al caso de  $\omega = 0.73$ .

Con el fin de estudiar la influencia que el coeficiente  $\gamma$  tiene en el sistema, se han obtenido los diagramas de bifurcación correspondientes a los valores  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 0.8$ , que se muestran en la figuras 3.2 y 3.3, respectivamente. Como puede apreciarse fácilmente las diferencias entre los diagramas son significativas, lo que indica que el valor de este coeficiente puede resultar determinante para los tipos de comportamientos que pueda presentar el sistema. Incluso en el diagrama correspondiente al valor  $\gamma = 0.8$ , se puede observar que en el rango de valores estudiado el sistema no presenta caos.

A la vista del diagrama que se presenta en la figura 3.1, resulta inmediato comprobar que el sistema alterna estados caóticos con otros de comportamiento periódico. Incluso pueden coexistir distintos tipos de comportamiento para un mismo valor del parámetro de control. En estos casos el estado final del sistema depende de las condiciones iniciales.

En el intervalo de valores  $0.718 \leq \omega \leq 1.2$ , el sistema presenta un único atractor que consiste en una órbita periódica de periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Al disminuir el valor del parámetro de control aparecen toda una serie de bifurcaciones que culminan en la aparición de un atractor caótico. A su vez, y para un valor  $\omega \approx 0.67$ , aparece una órbita periódica de periodo  $T = 6\pi/\omega$  que coexiste con el atractor caótico anterior.

Para valores menores del parámetro de control  $\omega$  el atractor caótico desaparece, el

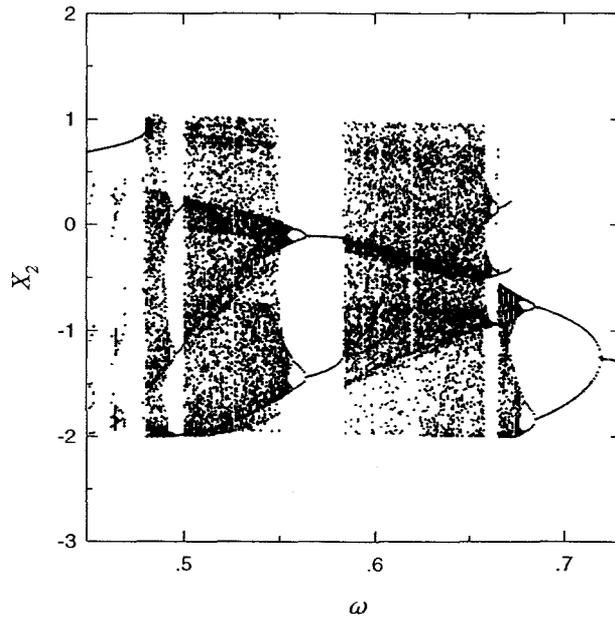


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ .

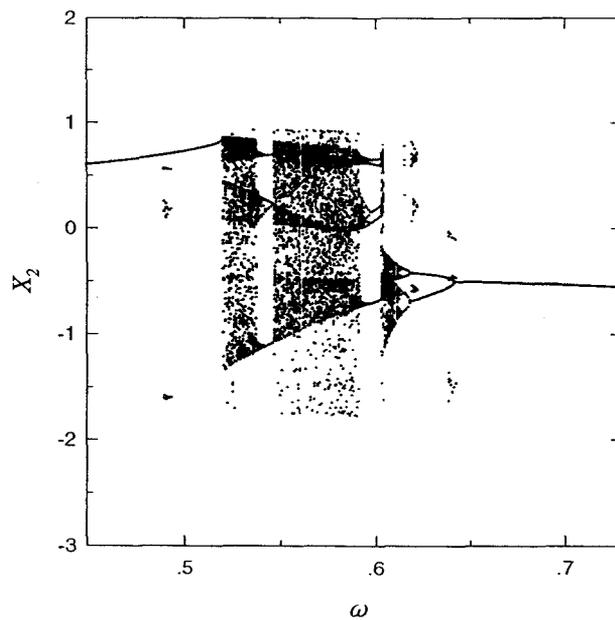


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ .

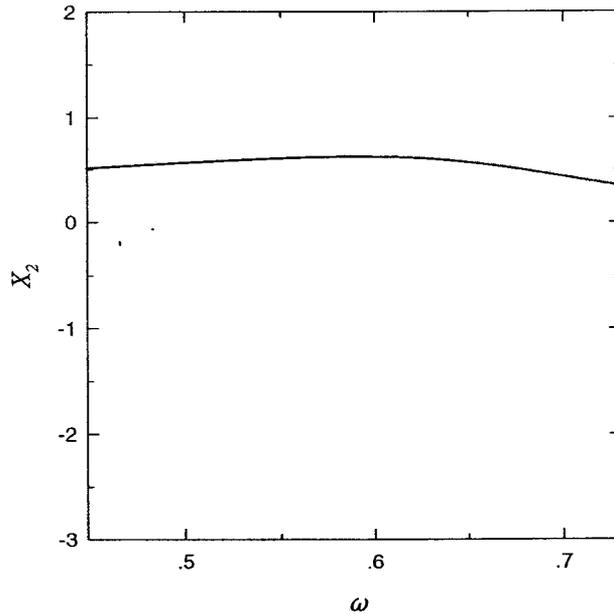


Figura 3.3: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ .

único atractor posible es entonces la órbita periódica que, al disminuir  $\omega$ , experimenta una secuencia de bifurcaciones y se transforma en un atractor caótico.

Para valores aún menores del parámetro de control el sistema alterna estados de comportamiento periódico y caótico. Una especial relevancia posee el entorno de valores del parámetro  $\omega$  alrededor del valor  $\omega = 0.57$  en el que coexisten dos órbitas periódicas que, al disminuir  $\omega$ , se transforman en atractores caóticos. A su vez, alrededor de  $\omega = 0.5$  existe una ventana de comportamiento periódico, apareciendo una órbita periódica de periodo  $T = 6\pi/\omega$  que de nuevo, y mediante una cascada de bifurcaciones que se producen al disminuir  $\omega$ , se transforma en un atractor caótico.

En el intervalo de valores  $\omega \leq 0.48$  básicamente se puede apreciar un único tipo de comportamiento que consiste en una órbita periódica de periodo  $T = 2\pi/\omega$ , aunque existe un pequeño intervalo de valores de  $\omega$  para los que aparece un atractor que coexiste con el anterior, atractor que inicialmente es una órbita periódica de periodo  $T = 2\pi/\omega$  pero que rápidamente, al disminuir  $\omega$ , experimenta una secuencia de bifurcaciones y desaparece.

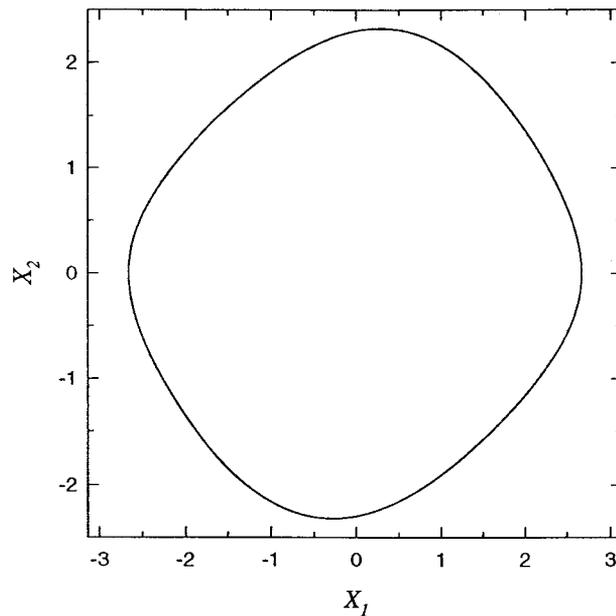


Figura 3.4: Trayectoria en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondiente a la órbita periódica y simétrica para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.72$ .

Debido a la gran complejidad de comportamientos que presenta el sistema, resulta conveniente realizar una exposición más detallada de éstos dividiendo el intervalo de valores del parámetro de control en varios subintervalos. Esta división se ha llevado a cabo de modo que resulte más fácil la comprensión de todo este tipo de fenómenos. A ello están dedicadas las secciones siguientes.

### 3.2 Bifurcaciones en el intervalo $1.2 \geq \omega \geq 0.67$

En el intervalo de valores  $1.2 \geq \omega \geq 0.718$  el sistema descrito por las ecuaciones 1.20 sólo presenta un único atractor, una órbita periódica de periodo  $T = 2\pi/\omega$  oscilante y simétrica. La figura 3.4 muestra esta órbita para el valor  $\omega = 0.72$ .

Para el valor  $\omega = \omega_c \approx 0.718$  esta órbita experimenta una bifurcación de simetría, se vuelve inestable y se originan dos órbitas oscilantes, periódicas de periodo  $T = 2\pi/\omega$  y antisimétricas. La figura 3.5 muestra estas dos órbitas para el valor de  $\omega = 0.71$ .

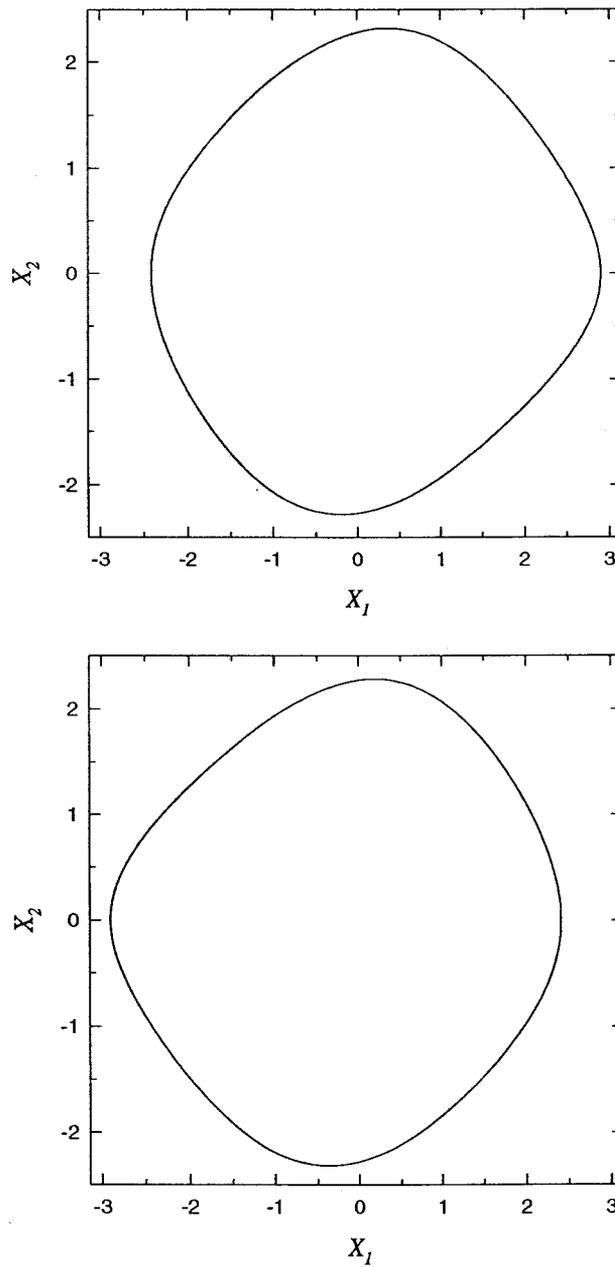


Figura 3.5: Trayectorias en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondientes a las dos órbitas periódicas antisimétricas para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.71$ .

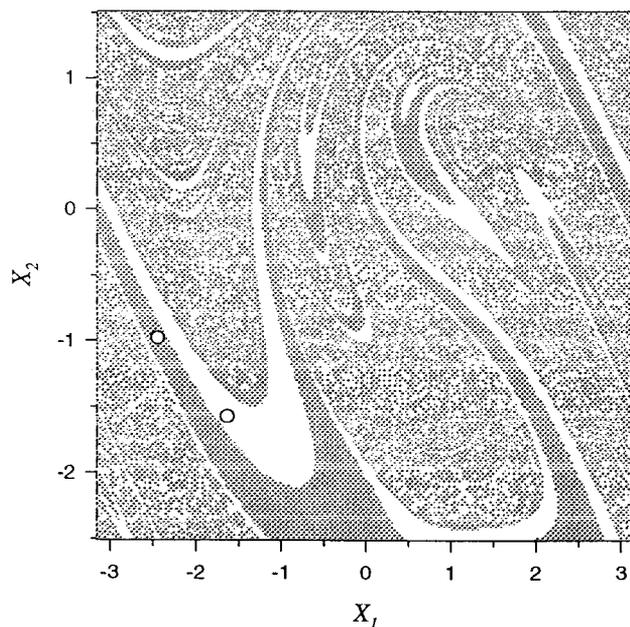


Figura 3.6: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondientes a las dos órbitas periódicas antisimétricas que coexisten para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.71$ . También se representan las secciones de Poincaré de estas dos órbitas (centro de los círculos en blanco).

Cuando en el sistema coexisten dos atractores, el comportamiento final está determinado por las condiciones iniciales, estando formado el dominio de atracción de cada atractor por el conjunto de condiciones iniciales que hacen que el sistema alcance, en el estado estacionario, este atractor. Usando el método ICM (interpolated cell-mapping) [Ton87], se han determinado los dominios de atracción de cada uno de estos atractores. La figura 3.6 muestra estos dominios para el valor  $\omega = 0.71$ . Fácilmente puede apreciarse que la estructura de estos dominios tiene apariencia fractal, lo que puede implicar un alto grado de impredecibilidad en el comportamiento final del sistema, ya que resulta ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Condiciones iniciales muy parecidas pueden dar lugar a estados finales distintos.

Al disminuir el valor del parámetro  $\omega$  cada una de estas órbitas antisimétricas experimentan una cascada de bifurcaciones de tipo “flip”, también llamadas de doblamiento de periodo (period doubling) o bifurcaciones subarmónicas [Guc83], en la

que las órbitas se vuelven inestables y aparecen órbitas periódicas de periodo el doble que la anterior. Esta cascada, llamada de Feigenbaum [Guc83], y que comienza en  $\omega \approx 0.685$ , culmina en la transformación de las dos órbitas antisimétricas en atractores caóticos antisimétricos, como muestra la figura 3.7. En este caso el sistema presenta una doble sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que los dominios de atracción tienen una estructura fractal, y a su vez, el estado final resulta ser caótico.

Para valores menores del parámetro  $\omega$  los dos atractores caóticos antisimétricos se funden en un único atractor caótico y simétrico, como muestra la figura 3.8.

Junto a los dos atractores caóticos antisimétricos existe un atractor periódico, que consiste en una órbita periódica de periodo  $T = 6\pi/\omega$  simétrica y oscilante, originado a través de una bifurcación de silla nodo que ocurre para el valor  $\omega \approx 0.6722$ .

Para analizar este fenómeno de fusión en detalle se han calculado los dominios de atracción de cada uno de los dos atractores caóticos antisimétricos anteriores antes de que se produzca la fusión, como se muestra en la figura 3.9.

Puede apreciarse que la antigua órbita simétrica, que ahora es inestable, se encuentra justamente en la frontera de los dominios de atracción de los dos atractores caóticos antisimétricos, siendo simultáneamente la órbita de silla accesible de los dos dominios de atracción [Gre87].

Al disminuir el valor del parámetro  $\omega$ , y siempre en el contexto de la reducción del sistema de ecuaciones diferenciales a un mapa mediante la técnica de las secciones de Poincaré, los dos atractores caóticos, que se encuentran muy próximos a la variedad inestable de esta órbita de silla, se aproximan a ésta hasta que se produce una colisión simultánea de los dos atractores y de su órbita de silla accesible. Para el valor  $\omega \approx 0.6706$  las variedades estables e inestables de ésta experimentan una tangencia y para valores inferiores se cortan. Cada uno de los atractores caóticos pueden acceder al dominio de atracción del otro, ya que condiciones iniciales que pertenecían a uno de los dos dominios anteriores, en su evolución, pasan cerca del punto de silla, viéndose impulsadas a atravesar la antigua frontera entre los dominios a través de la variedad inestable de este punto, alcanzando de esta manera el dominio de atracción del otro atractor [Soe88].

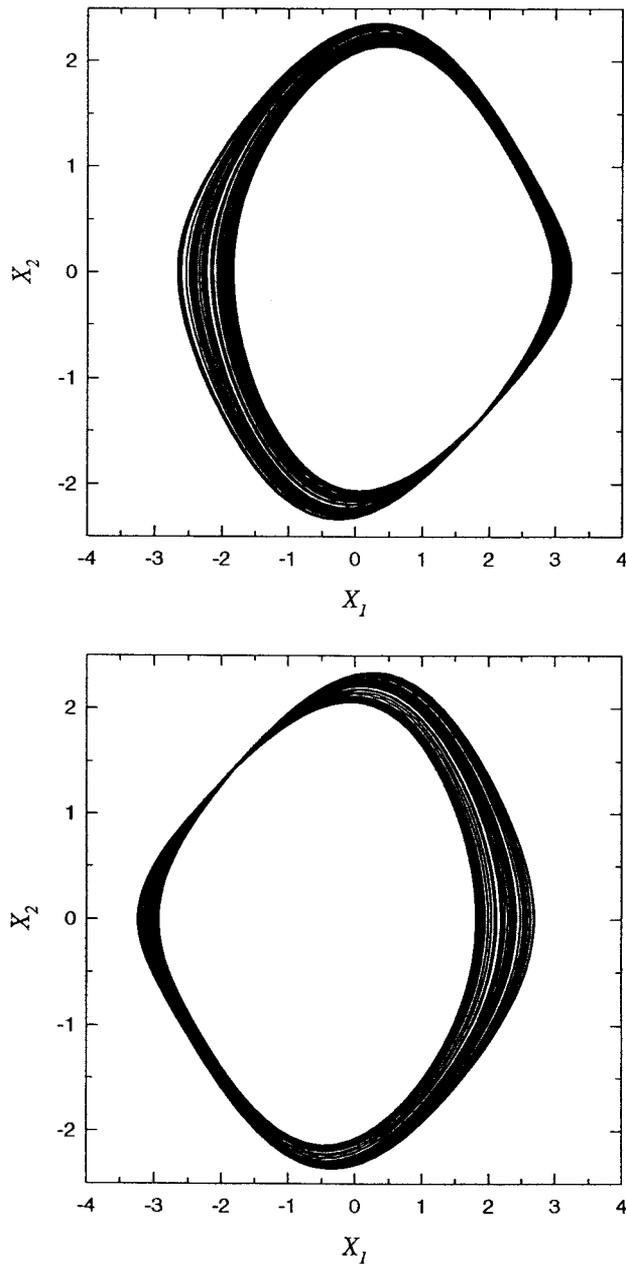


Figura 3.7: Atractores caóticos antisimétricos correspondientes a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.675$ .

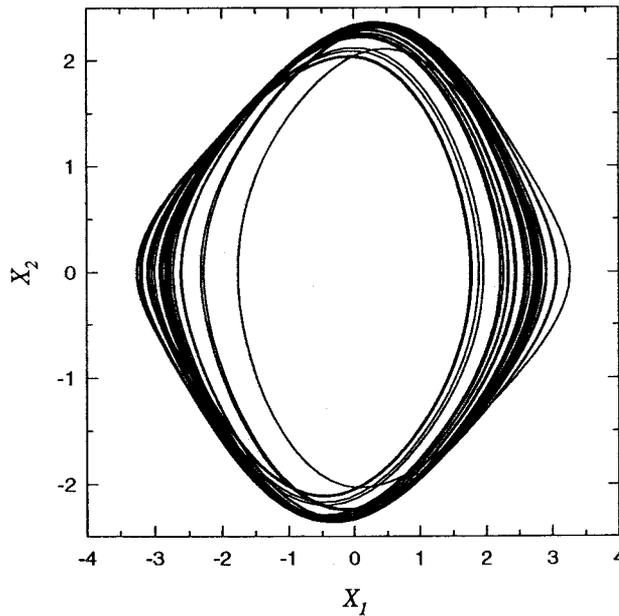


Figura 3.8: Atractor caótico simétrico correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.666$ .

Este fenómeno, que posee todas las características de una crisis de contorno (boundary crisis) [Gre83, Gre83b, Gre87] sin embargo posee unos rasgos propios, ya que en situaciones parecidas uno de los dos atractores desaparece o bien, en el caso de crisis interiores [Gre83, Gre83b, Gre87], experimenta un aumento o disminución brusca en su tamaño (en el sentido del espacio que ocupa en el espacio de las fases). En este caso, al producirse una colisión simultánea entre los dos atractores y la órbita de silla, los dos dominios de atracción se fusionan y el atractor resultante consiste únicamente en la unión de los dos anteriores, como muestra la figura 3.10. Este tipo de fenómeno, consecuencia de la simetría del sistema, ha sido descrito en otros tipos de sistemas, como, p.e., osciladores lineales a trozos forzados armónicamente [Kle90].

### 3.3 Bifurcaciones en el intervalo $0.67 \geq \omega \geq 0.582$

Después de haberse producido la fusión de los dos atractores caóticos, en el sistema coexisten dos atractores, uno que es caótico y simétrico y otro que es periódico,

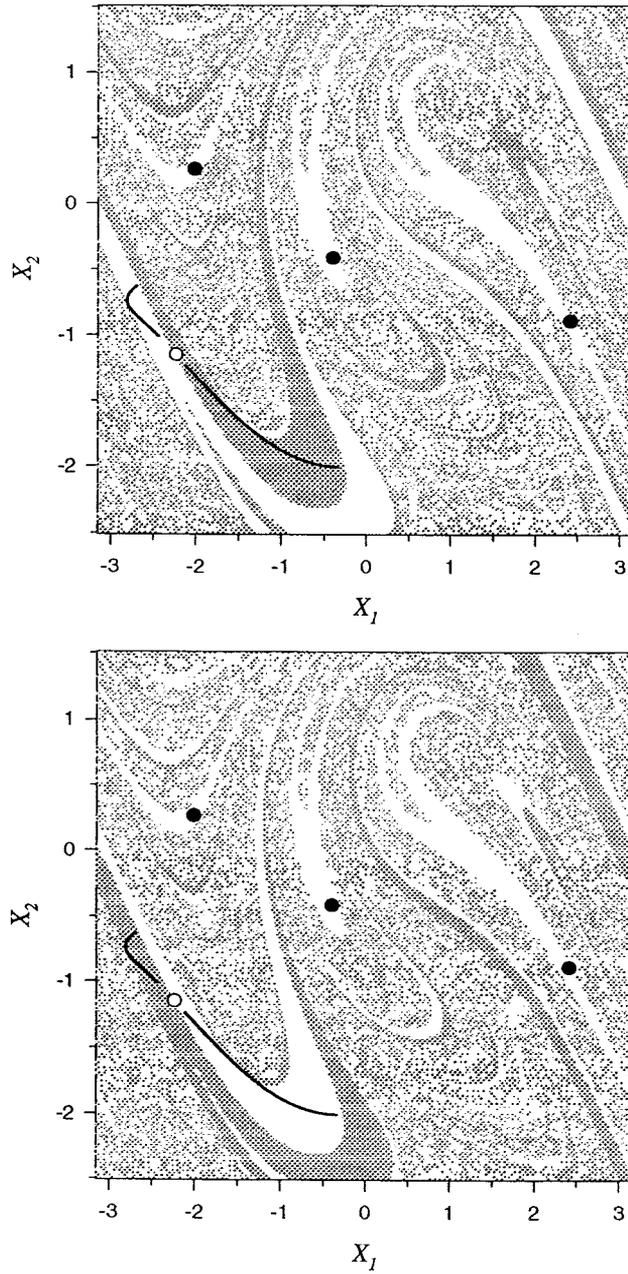


Figura 3.9: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  de cada uno de los dos atractores caóticos antisimétricos (en gris) correspondientes a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.672$ . También se representan las secciones de Poincaré de cada uno de estos dos atractores (en negro), de su órbita de silla accesible (círculo en blanco), y de la órbita periódica que coexiste con ellos (círculos en negro).

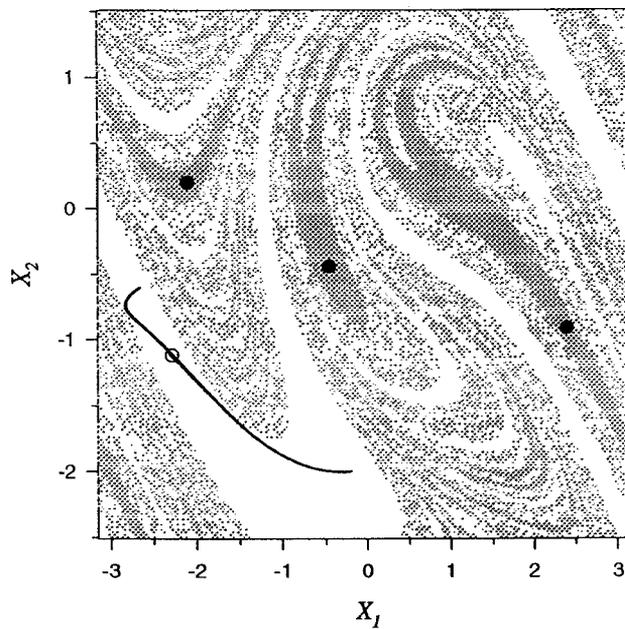


Figura 3.10: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondientes al atractor simétrico (en blanco) y el atractor periódico que coexiste con él (en gris) para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4, \gamma = -0.8, i = 0.8$  y  $\omega = 0.67$ . También se representan las secciones de Poincaré del atractor caótico (en negro), de la antigua órbita de silla accesible (círculo en blanco), y de la órbita periódica que coexiste con ellos (círculos en negro).

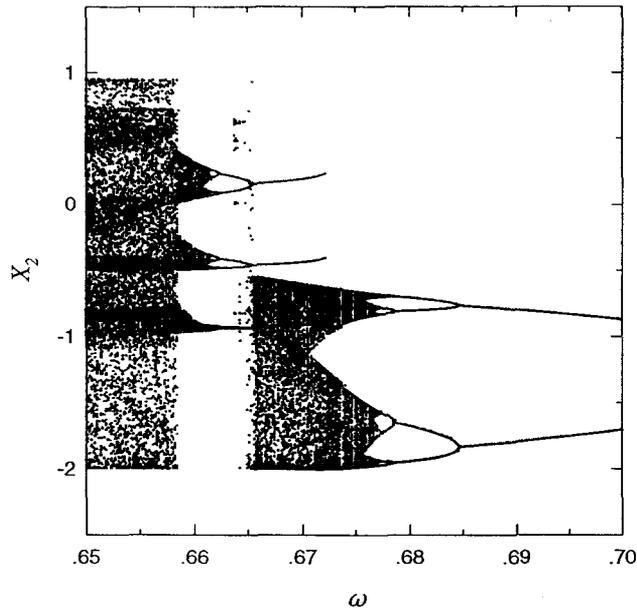


Figura 3.11: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.65 \leq \omega \leq 0.7$ .

correspondiente a una órbita oscilante simétrica de periodo  $6\pi/\omega$ , que llamaremos triperiódico. El sistema opta por uno u otro dependiendo de las condiciones iniciales, como se muestra en la figura 3.10. Al disminuir el parámetro de control,  $\omega$ , el atractor caótico desaparece, como muestra la figura 3.11.

Para estudiar este fenómeno en detalle se han calculado los dominios de atracción de los dos atractores anteriores. También se han calculado las órbitas de silla accesibles desde cada uno de los dominios de atracción, apareciendo una desde el dominio del atractor caótico y otra desde el dominio del atractor periódico [Gre87]. Esta última resulta ser justamente la órbita inestable originada en la bifurcación de silla nodo que dio lugar a este último atractor. La figura 3.12 muestra los dominios de atracción y todas estas órbitas para el valor de  $\omega = 0.666$ . Estos dominios de atracción tienen apariencia fractal, lo que implica una fuerte dependencia de las condiciones iniciales, incluso cuando el comportamiento final del sistema es periódico.

Al disminuir el valor del parámetro  $\omega$ , el atractor caótico, que se encuentra próximo a la variedad inestable de su órbita de silla accesible, se aproxima a ésta y colisiona con

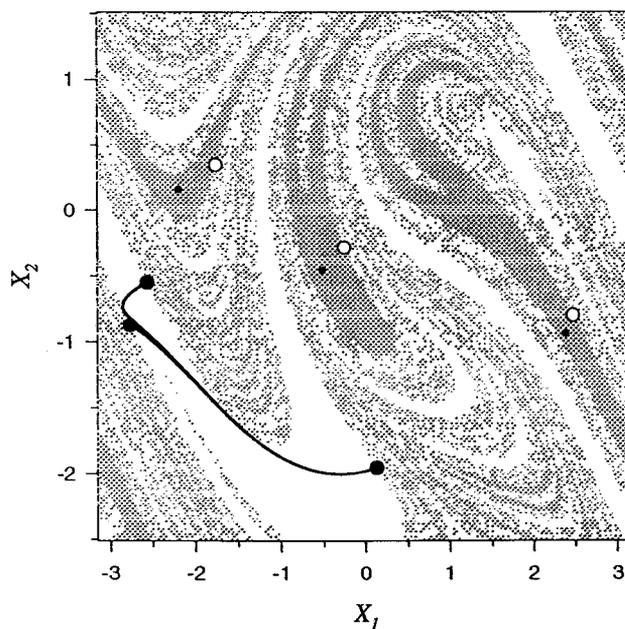


Figura 3.12: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondientes al atractor caótico simétrico (en blanco) y la órbita periódica (en negro) para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.666$ . También se muestran las secciones de Poincaré correspondientes al atractor caótico (en negro), su órbita de silla accesible (centro de los grandes puntos negros), la órbita triperiódica estable (puntos en negro) y su órbita de silla accesible (círculos en blanco).

ella para un valor crítico  $\omega_c = 0.6655995 \pm 0.0000005$ . En ese momento se produce una tangencia entre la variedad estable e inestable de esta órbita de silla. Al disminuir  $\omega$  estas variedades se cortan y por lo tanto el dominio de atracción de la órbita periódica se vuelve accesible a las condiciones iniciales que pertenecían al antiguo dominio de atracción del atractor caótico, ya que éstas, en su evolución, pasarán cerca de la órbita de silla, viéndose impulsadas a través de su variedad inestable, al nuevo dominio de atracción. El sistema experimenta una crisis de contorno (boundary crisis) [Gre87] y el atractor caótico desaparece. Fenómenos similares se han descrito en una gran cantidad de sistemas y en particular en osciladores forzados [Tho86]. Más información sobre este tipo de fenómenos, puede encontrarse en [Gre83, Gre83b, Gre83c, Gre87, McD85].

Este fenómeno de crisis está estrechamente relacionado con los fenómenos de histéresis observados por Huberman y Crutchfield [Hub79]. Cuando el parámetro de control disminuye, la destrucción del atractor caótico resulta posible porque previamente han aparecido dos órbitas, una estable y otra inestable, mediante una bifurcación de silla nodo. Este hecho permite que existan simultáneamente dos atractores. Para valores del parámetro  $\omega$  muy cercanos al valor correspondiente a la crisis ( $\omega \approx 0.6653$ ), la órbita triperiódica simétrica experimenta una bifurcación de simetría que da lugar a dos órbitas antisimétricas periódicas.

Una vez que ha desaparecido el atractor caótico el sistema evoluciona hasta llegar al estado estacionario. El tiempo que emplea cada trayectoria en alcanzarlo depende de las condiciones iniciales, y si éstas pertenecían al antiguo dominio de atracción del atractor caótico, emplearán cierto tiempo en pasar cerca de la antigua órbita de silla accesible y de esta forma relajar al estado estacionario, pareciendo, durante cierto periodo de tiempo, que todavía existe el atractor caótico. Este fenómeno, denominado caos transitorio (transient chaos), ha sido observado en una gran cantidad de sistemas, como por ejemplo en péndulo excitados paramétricamente en el término de rozamiento [Bla92].

Este tipo de comportamientos han sido ampliamente estudiados sobre todo en el contexto de mapas bidimensionales [Gre86] llegando a la conclusión de que el tiempo promedio  $T$  de una transición de este tipo responde a una ley de escalas de la forma  $|p - p_c|^{-\delta}$ , donde  $p$  es el parámetro de control,  $p_c$  el valor crítico de este parámetro

correspondiente a la crisis y  $\delta$  es el denominado exponente crítico de la transición caótica. Este exponente está relacionado con la estabilidad de la órbita inestable con la que colisiona el atractor caótico o bien con otra órbita inestable que se encuentra en el mismo atractor. Generalmente, resulta ser mayor que  $1/2$  para mapas bidimensionales, aunque para sistemas de mayor dimensión alcanza valores bastante superiores [Gre86, Gre87b, Som92].

Para poder determinar la ley de escalas correspondiente a la crisis de contorno que se produce alrededor del valor  $\omega = 0.666$ , se ha calculado el tiempo medio de transición para algunos valores del parámetro de control próximos (y menores) que el valor crítico. Aunque los detalles del procedimiento empleado se encuentran en el apéndice B, para cada valor de  $\omega$  se ha calculado el conjunto de condiciones iniciales que alcanzan rápidamente el estado estacionario, conjunto conocido como el núcleo del dominio (basin core). La figura 3.13 muestra este núcleo para  $\omega = 0.665$ , pudiéndose apreciar fácilmente que resulta muy parecido al antiguo dominio de atracción del atractor periódico antes de la crisis. Realmente, y debido a la bifurcación de simetría, antes mencionada, el núcleo que se representa corresponde a la unión de los dos núcleos correspondientes a los dominios de atracción de cada uno de los dos atractores periódicos que coexisten.

Eliminando las condiciones iniciales que pertenecen a este núcleo, se ha determinado el tiempo que tarda en relajarse cada una de ellas, elaborando una serie de histogramas similares al que aparece en la figura 3.14. En estos histogramas se ha representado el número de condiciones iniciales  $N$  frente al número de ciclos (cada ciclo corresponde a un tiempo  $t = 2\pi/\omega$ ) que tarda en alcanzar el estado estacionario  $N_\tau$ .

A la vista de estos histogramas se puede suponer que la distribución de probabilidad para una transición caótica responde a una ley de la forma

$$P(\tau) = \frac{C}{T} e^{-\tau/T}, \quad (3.1)$$

donde  $C$  es una constante y  $T$  da cuenta del tiempo medio de transición. Representando  $\ln N$  frente a  $N_\tau$  la gráfica resultante resulta ser aproximadamente una recta de pendiente  $-T^{-1}$ , como muestra la figura 3.15.

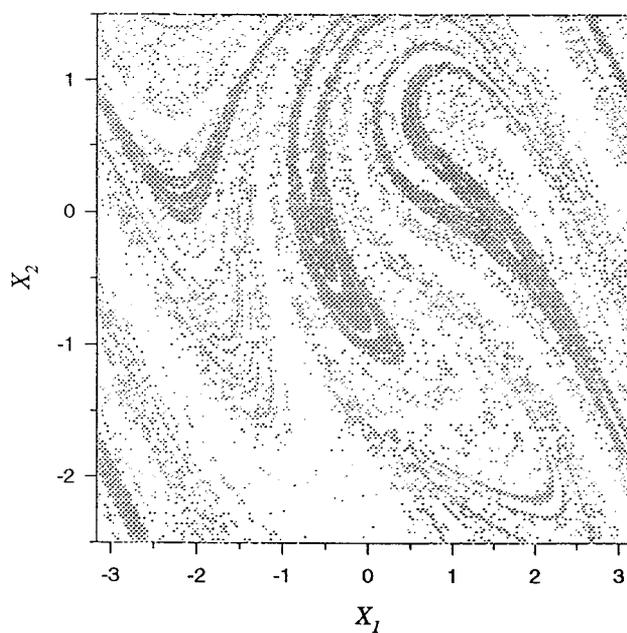


Figura 3.13: Unión de los dos núcleos de los dominios de atracción correspondientes a los dos atractores antisimétricos (en negro) para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.665$ .

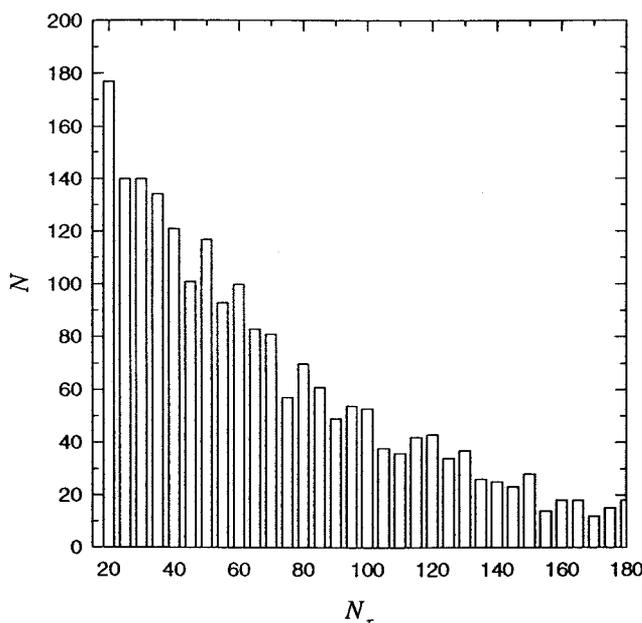


Figura 3.14: Histograma correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.665$ .

Repitiendo este cálculo para varios valores del parámetro  $\omega$  se han obtenido los valores que figuran en las tablas 3.1, 3.2. Representando  $\ln T$  frente a  $\ln(\omega_c - \omega)$  se ha obtenido la recta de la figura 3.16, cuyo coeficiente de regresión resulta ser  $r = 0.9956$ . A partir de ella se ha determinado el valor del exponente crítico que resulta ser  $\delta = 1.040$ . Este valor se encuentra dentro del rango de valores típicos para este exponente en el contexto de mapas bidimensionales, como es el caso del mapa de Ikeda [Gre86], o el encontrado en algunos sistemas oscilantes [Som92].

El antiguo atractor periódico originado mediante una bifurcación de silla nodo que ocurría para  $\omega \approx 0.672$ , es una órbita de periodo  $6\pi/\omega$  simétrica y oscilante, como muestra la figura 3.17.

Prácticamente a la vez que se produce la crisis de contorno, este atractor periódico experimenta una bifurcación de simetría, se vuelve inestable y da lugar a dos órbitas oscilantes antisimétricas, como muestra la figura 3.18.

Calculando los dominios de atracción de cada una de estas órbitas puede apreciarse fácilmente que de nuevo presentan una estructura fractal, como muestra la figura 3.19,

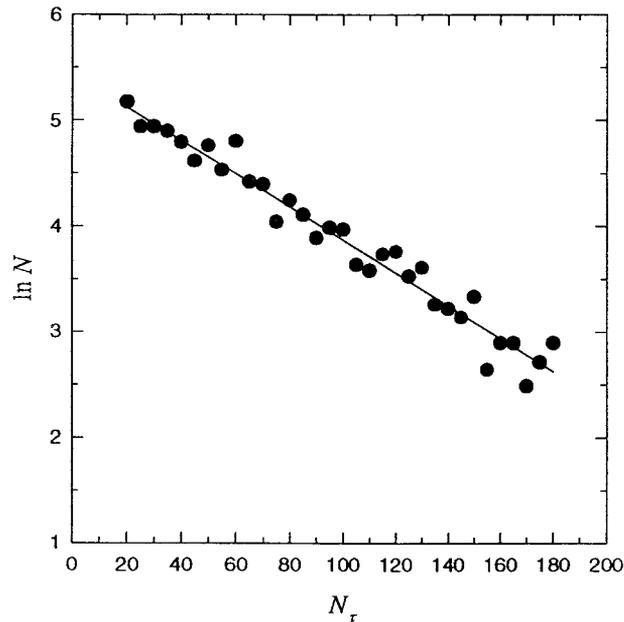


Figura 3.15: Gráfica  $\ln N$  frente a  $N_r$  correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.665$ .

$\omega$	$T$	$\ln T$	$r$
0.66520	100.73	4.61	0.863
0.66515	91.276	4.51	0.991
0.66510	79.41	4.37	0.957
0.66500	64.10	4.16	0.980
0.66490	57.49	4.05	0.988

Tabla 3.1: Tiempos medios de transición  $T$  para diversos valores del parámetro  $\omega$  y  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$ . También se incluyen los logaritmos de  $T$  y los coeficientes de regresión  $r$  de las rectas que han sido necesarias calcular para determinar estos valores.

$\omega_c - \omega$	$\ln(\omega_c - \omega)$	$\ln T$
$3.99510^{-4}$	-7.826	4.61
$4.49510^{-4}$	-7.7073	4.51
$4.99510^{-4}$	-7.602	4.37
$5.99510^{-4}$	-7.420	4.16
$6.99510^{-4}$	-7.265	4.05

Tabla 3.2: Logaritmos de los tiempos medios de transición  $T$  frente a la diferencia de valores  $\omega_c - \omega$  y sus logaritmos.

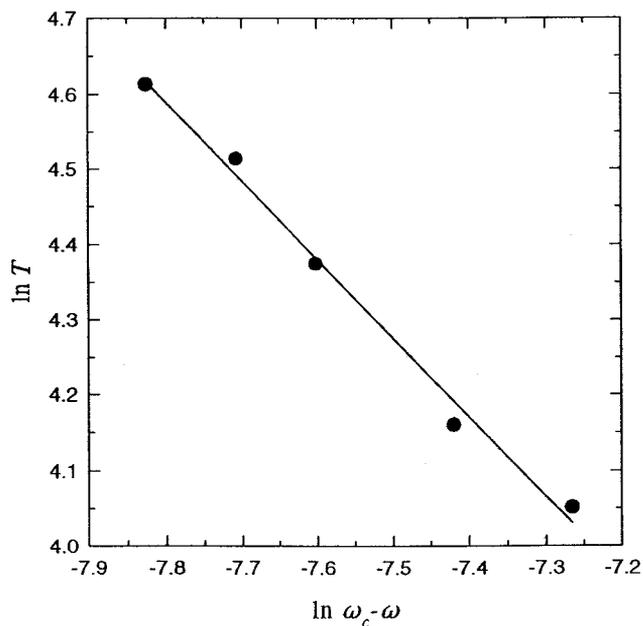


Figura 3.16: Gráfica de  $\ln T$  frente a  $\ln(\omega_c - \omega)$  correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$ . La pendiente de esta recta resulta ser  $m = -1.0236$  y el coeficiente de regresión  $r = 0.9$

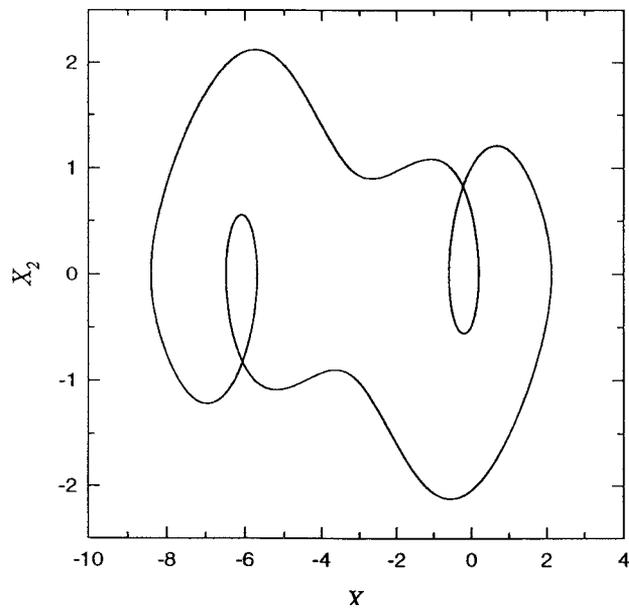


Figura 3.17: Trayectoria en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondiente a la órbita triperiódica simétrica para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.67$ .

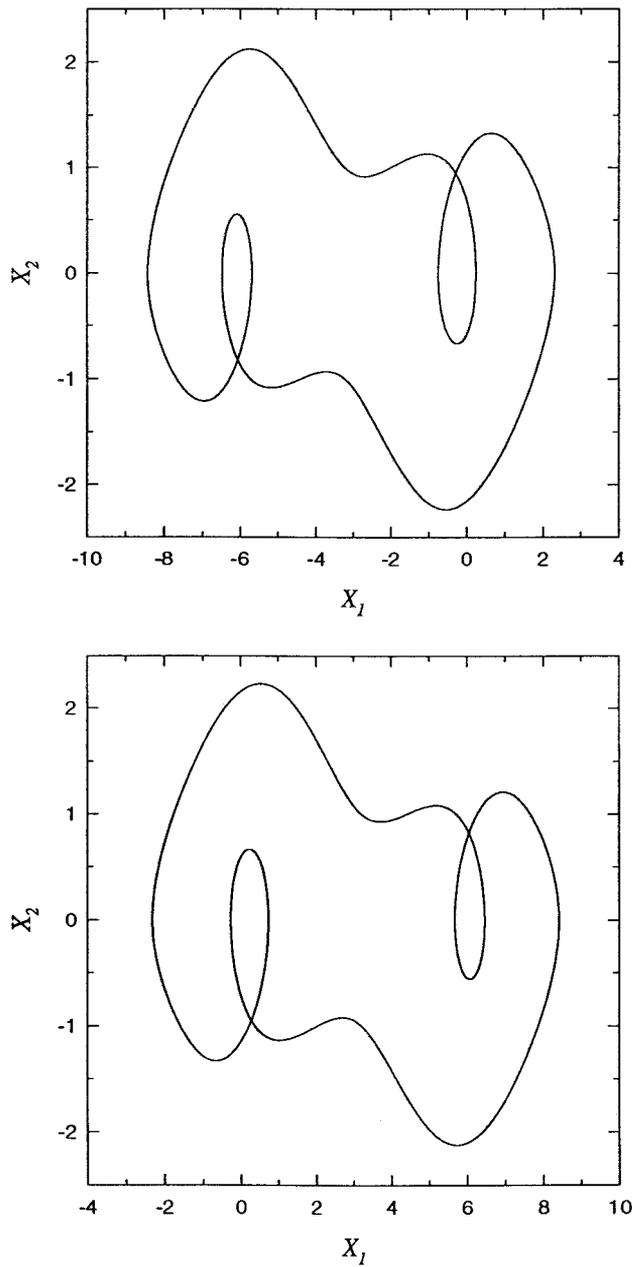


Figura 3.18: Trayectorias en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondientes a las órbitas periódicas antisimétricas para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.664$ .

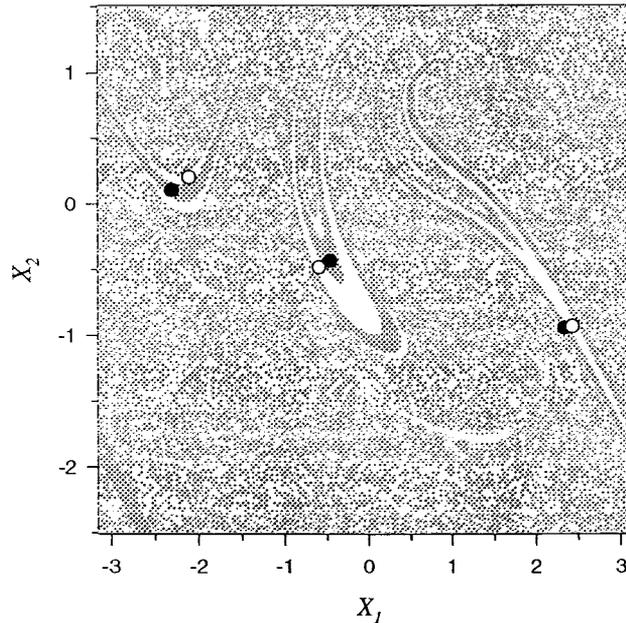


Figura 3.19: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondiente a las dos órbitas periódicas antisimétricas que coexisten para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.664$ . También se representan las secciones de Poincaré correspondientes a estas órbitas (círculos en negro y en blanco)

lo que indica que el sistema resulta ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales, a pesar de que el comportamiento final sea periódico.

Al decrecer el valor del parámetro  $\omega$ , cada uno de estos atractores experimenta una cascada de bifurcaciones de doblamiento de periodo (period doubling) dando lugar a la existencia simultánea de dos atractores caóticos antisimétricos. De forma parecida al fenómeno descrito en la sección anterior, estos dos atractores se funden en uno solo, dando como resultado un único atractor caótico simétrico, como el representado en la figura 3.20.

Al ser éste el único atractor que existe en el sistema, la antigua órbita inestable que constituía la órbita de silla accesible de este atractor antes de la crisis de contorno se ha incorporado al dominio de atracción de éste, como se muestra en la figura 3.21.

Al disminuir el valor de  $\omega$ , el atractor caótico colisiona con esta órbita inestable, se produce una crisis interior [Gre83, Gre83b], y el atractor aumenta bruscamente de

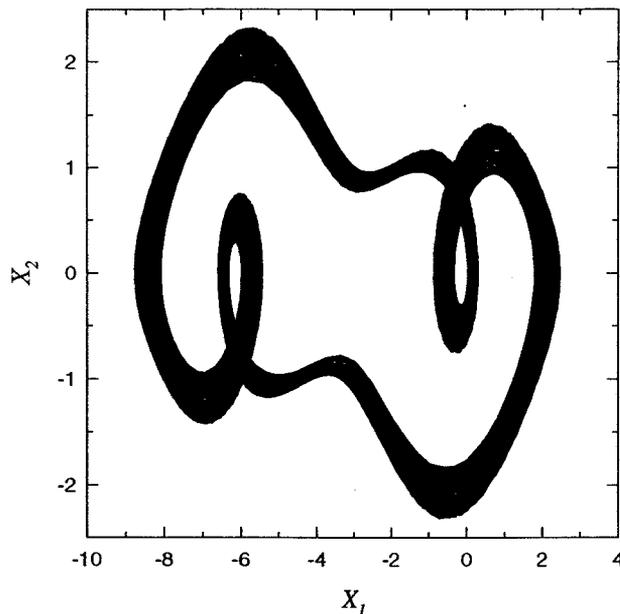


Figura 3.20: Atractor caótico simétrico correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.659$ .

tamaño, convirtiéndose en un atracto caótico rotante, como se muestra en la figura 3.22.

Para valores inferiores del parámetro de control, y en el intervalo de valores estudiado en esta sección, el comportamiento del sistema es cualitativamente similar, es decir, existe un único atractor caótico parecido al mostrado en la figura 3.22. No obstante, se han detectado pequeñas ventanas (pequeños intervalos de valores del parámetro  $\omega$ ) de comportamiento periódico, fenómeno bastante común en este tipo de sistemas [Jac91].

### 3.4 Estudio del intervalo $0.54 \geq \omega \geq 0.582$

Para el valor del parámetro de control  $\omega \approx 0.582$  el sistema, que para valores superiores presentaba comportamiento caótico, experimenta una bifurcación, desaparece el atractor caótico y se originan dos atractores que consisten en dos órbitas rotantes antisimétricas de periodo  $T = 2\pi/\omega$ , a la vez que dos órbitas inestables, cada una

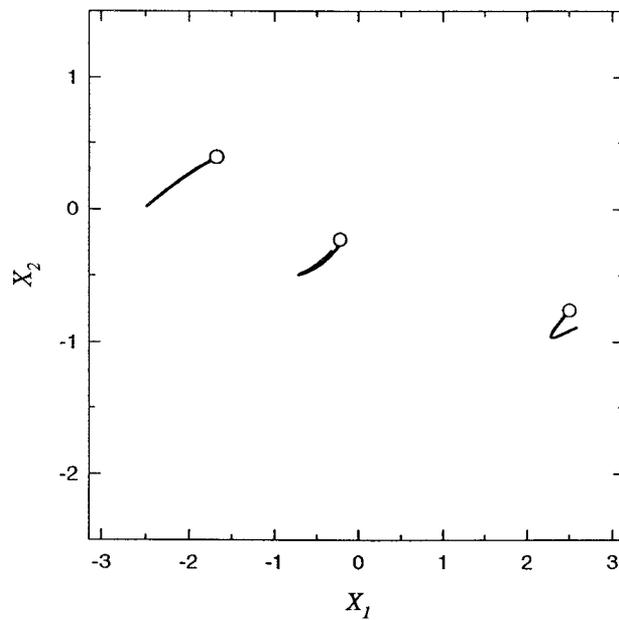


Figura 3.21: Secciones de Poincaré correspondientes al atractor caótico simétrico (en negro) para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.659$ . También se representan las secciones de Poincaré correspondientes a la órbita inestable que está a punto de colisionar con el atractor.

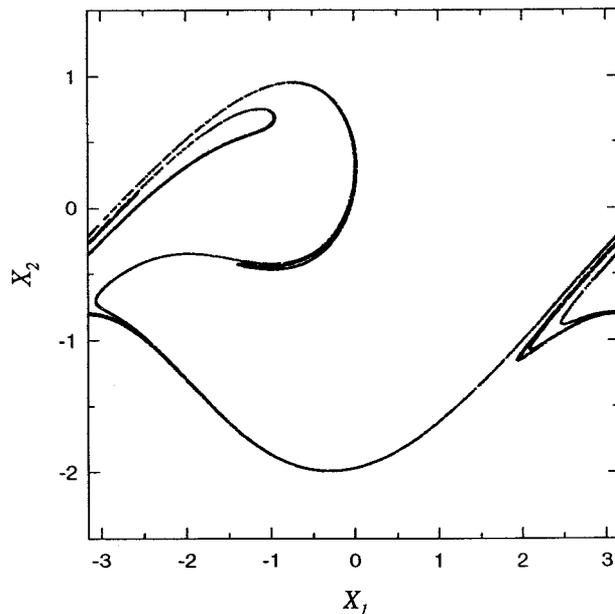


Figura 3.22: Secciones de Poincaré correspondientes al atractor caótico (en negro) para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.64$ .

de ellas asociada a una de las estables. Este fenómeno, conocido como subducción (subduction) [Gre83], es bastante frecuente y básicamente consiste en la aparición de un atractor no caótico dentro de un atractor caótico, reemplazando el primero al segundo. La figura 3.23 muestra estas órbitas para  $\omega = 0.58$ . Al disminuir el valor del parámetro  $\omega$  cada una de estas órbitas experimentan una cascada de bifurcaciones de doblamiento de periodo (period doubling) dando lugar a dos atractores caóticos antisimétricos.

El hecho de que simultáneamente aparezcan dos órbitas periódicas imprime unas características particulares a este fenómeno. Normalmente, al ocurrir una subducción, el atractor periódico que se origina no destruye el dominio de atracción del antiguo atractor caótico, simplemente lo reemplaza. En nuestro caso las simetrías que posee el sistema obligan a que las órbitas antisimétricas aparezcan en parejas, lo que hace que el antiguo dominio de atracción “se rompa” en dos. La figura 3.24 muestra estos dominios para un valor del parámetro de control  $\omega = 0.551$ , que de nuevo muestran apariencia fractal, hecho que hace que el sistema sea fuertemente dependiente de las

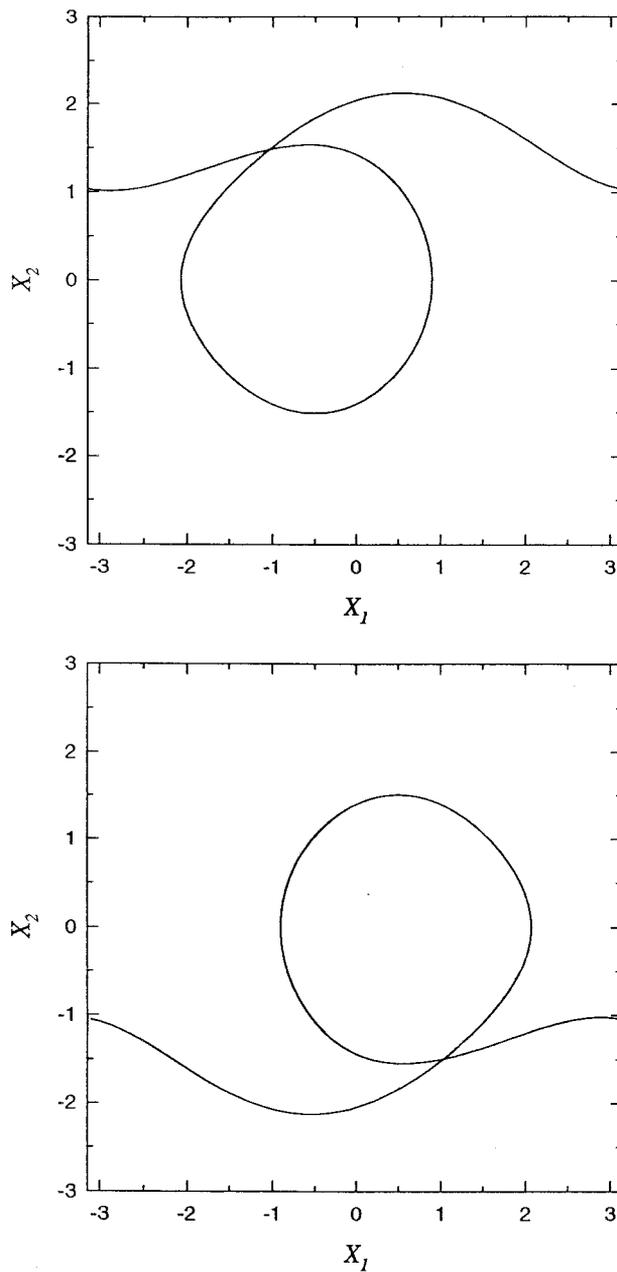


Figura 3.23: Trayectorias en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondientes a las órbitas periódicas antisimétricas para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.58$ .

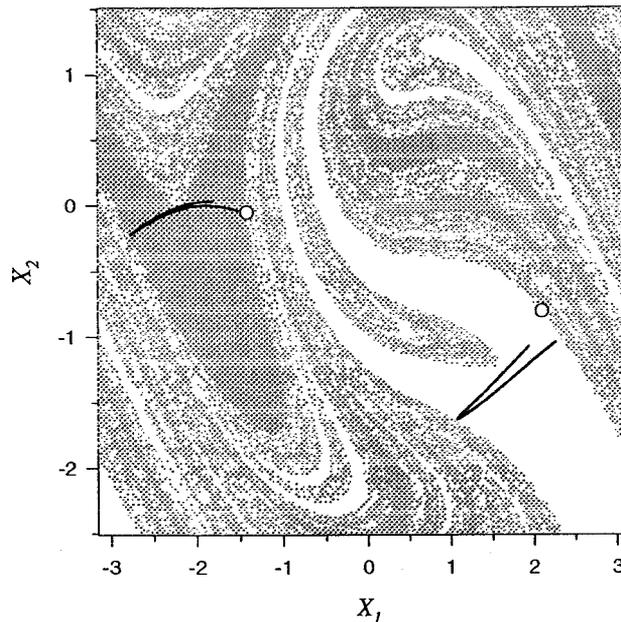


Figura 3.24: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondiente a las atractores caóticos antisimétricos que coexisten para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.551$ . También se representan las secciones de Poincaré correspondientes a estas atractores (en negro) y a las dos órbitas inestables.

condiciones iniciales, a pesar de que el estado final sea periódico.

Básicamente, al decrecer el valor del parámetro de control  $\omega$ , el sistema presenta un único tipo de comportamiento posible, un atractor caótico, rotante y simétrico, similar al mostrado en las figuras 3.20 y 3.21. No obstante, aparecen algunas ventanas de comportamiento periódico, como la que se origina para el valor  $\omega \approx 0.5$ . En este caso, y mediante una subducción, el atractor caótico se transforma en un atractor periódico, rotante y simétrico de periodo  $T = 6\pi/\omega$ . Al disminuir  $\omega$  se produce una secuencia de bifurcaciones similar a la descrita en las secciones anteriores, bifurcación de simetría, cascada de doblamiento de periodo, caos y fusión de los atractores caóticos antisimétricos en uno solo, simétrico y mayor que la suma de los dos anteriores.

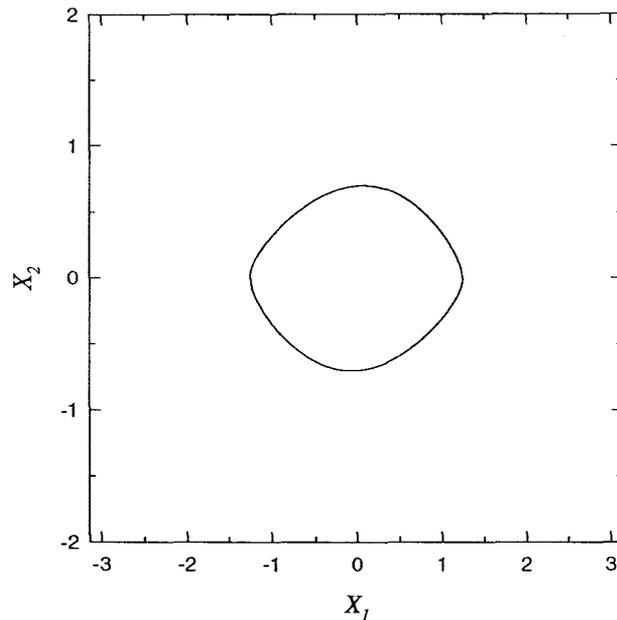


Figura 3.25: Trayectoria en el espacio de las fases  $(X_1, X_2)$  correspondiente a la órbita periódica simétrica para los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.45$ .

### 3.5 Estudio del intervalo $0.49 \geq \omega > 0$

Para el valor del parámetro de control  $\omega \approx 0.48$  el sistema, que presentaba un único atractor, caótico, simétrico y rotante, experimenta una subducción. El atractor caótico desaparece y en su lugar se origina un atractor periódico, de periodo  $T = 2\pi/\omega$ , simétrico y oscilante, como se muestra en la figura 3.25.

Como puede observarse en el diagrama de bifurcación global que se muestra en la figura 3.26, existen algunos intervalos de valores del parámetro de control para los que existen otros atractores simultáneos. Estos atractores poseen un dominio de atracción pequeño, lo que hace difícil su observación. Básicamente son órbitas periódicas que rápidamente experimentan una secuencia de bifurcaciones similar a la descrita en secciones anteriores y desaparecen posteriormente mediante una crisis de contorno.

Al disminuir el valor de  $\omega$ , la amplitud de la órbita periódica oscilante disminuye, y como era de esperar, en el límite  $\omega = 0$ , es decir, cuando la excitación a la que se

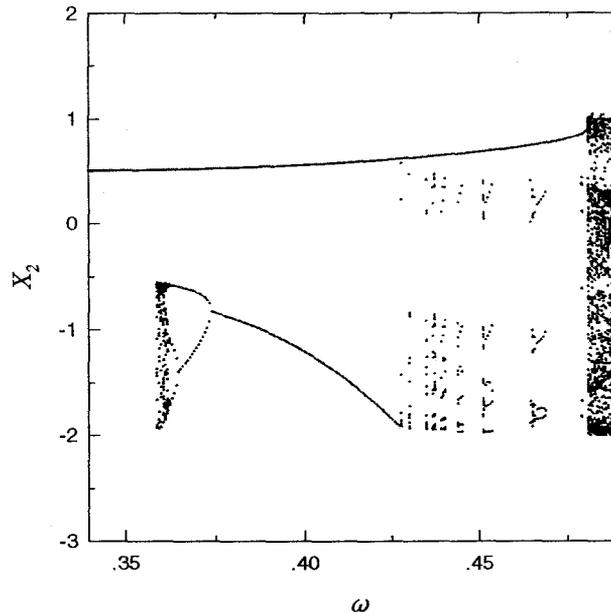


Figura 3.26: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.8$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.34 \leq \omega \leq 0.49$ .

ve sometido el sistema es constante, tiende a cero y el sistema alcanza un punto de equilibrio.

### 3.6 Curvas de crisis

En la sección 3.3 se ha estudiado un proceso de crisis de contorno por el que un atractor caótico simétrico colisiona con su órbita de silla accesible y después desaparece. A su vez, el atractor periódico que coexiste con él también tiene una órbita de silla accesible que, al producirse la crisis, se incorpora a su dominio de atracción. Al disminuir el valor del parámetro de control, este atractor, que se ha convertido en caótico mediante una secuencia de bifurcaciones, colisiona con ella, se produce una crisis interior y experimenta un salto en su longitud.

Esta secuencia de crisis de contorno seguida de crisis interior que se produce al disminuir el valor del parámetro de control  $\omega$  puede producirse para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ , pudiéndose calcular, de esta manera, las curvas en el espacio  $(\gamma, \omega)$

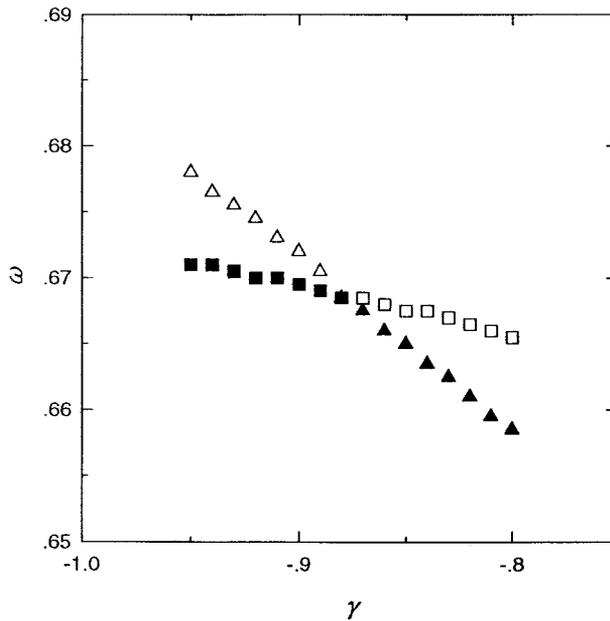


Figura 3.27: Curvas de crisis (crisis loci) en el plano  $(\gamma, \omega)$  correspondiente a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $i = 0.8$ . Los centros de los triángulos representan las crisis del atractor caótico de tres trozos y los centros de los cuadrados las crisis del otro atractor caótico. Los símbolos rellenos representan crisis interior y los huecos crisis de contorno.

correspondientes a las dos crisis anteriormente descritas (crisis loci).

Para llevar a cabo este estudio se ha elegido el intervalo  $-1 < \gamma \leq -0.8$ , dado que para estos valores aparecen los fenómenos más interesantes y también porque para valores algo mayores al límite superior de este intervalo la crisis de contorno ya no se produce. La figura 3.27 muestra estas curvas en el espacio de parámetros  $(\gamma, \omega)$ .

Observando estas dos curvas se aprecian que se intersectan en un punto  $(\gamma, \omega) \approx (-0.88, 0.669)$ , indicando que para estos valores las dos crisis se producen simultáneamente. La figura 3.28 ilustra este fenómeno, mostrando los dominios de atracción de los dos atractores, sus secciones de Poincaré y sus órbitas de silla accesibles.

Las variedades estables de las órbitas de silla se encuentran situadas en la frontera de los dominios de atracción, a la vez que los dos atractores caóticos descansan sobre las variedades inestables de estas órbitas [Gre86, Gre87]. Cuando se producen simultáneamente las dos crisis, los dos atractores caóticos colisionan con sus órbitas

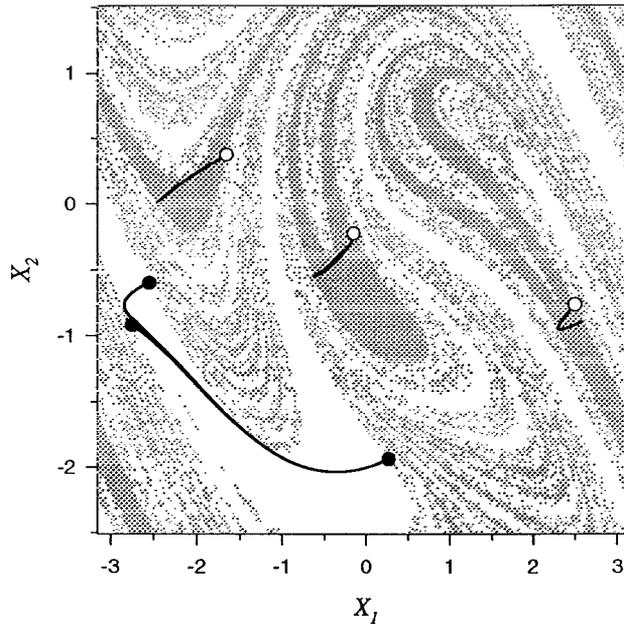


Figura 3.28: Dominios de atracción en el plano  $(X_1, X_2)$  correspondientes al atractor de tres trozos (en negro) y al atractor caótico de un solo trozo que coexiste con el anterior (en blanco), correspondientes a los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.88$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega = 0.6695$ . También se representan las secciones de Poincaré de los dos atractores caóticos y sus órbitas de silla accesibles (centros de los círculos en negro y de los círculos huecos).

de silla accesibles, sus variedades estables e inestables experimentan una tangencia y luego se cortan transversalmente. Una vez que ha tenido lugar esta doble colisión, las condiciones iniciales pertenecientes a cada uno de los antiguos dominios de atracción pueden atravesar la antigua frontera de manera que sólo existe un único atractor caótico, siendo de mayor longitud que cualquiera de los dos atractores que coexisten antes de las crisis. La figura 3.29 muestra el diagrama de bifurcación para un valor del parámetro  $\gamma$  muy próximo al correspondiente a la intersección de las dos curvas de crisis, pudiéndose apreciar fácilmente la doble colisión y el salto en longitud del atractor caótico resultante, atractor que resulta similar al que se muestra en las figuras 3.20 y 3.21.

Para valores inferiores del parámetro  $\gamma$ , los dos tipos de crisis que cada atractor experimenta se intercambian. El atractor de tres trozos experimenta una crisis de

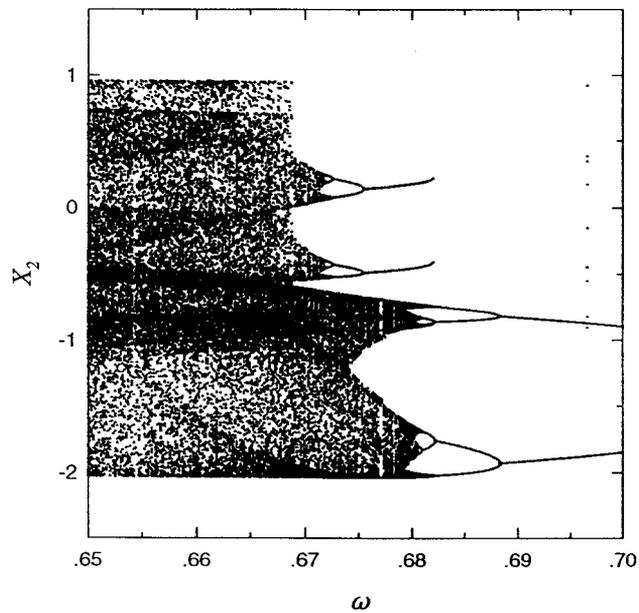


Figura 3.29: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.88$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.65 \leq \omega \leq 0.70$ . Para este valor de  $\gamma$  y el valor  $\omega = 0.669$ , las dos crisis son prácticamente simultáneas.

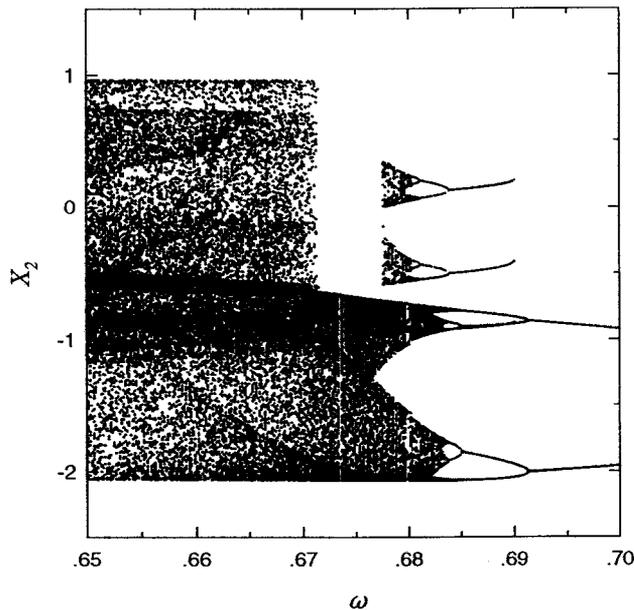


Figura 3.30: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = -0.95$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.65 \leq \omega \leq 0.70$ .

contorno y el atractor de un solo trozo experimenta una crisis interior que lo convierte de nuevo en un atractor similar al de las figuras 3.20 y 3.21. Este nuevo tipo de comportamiento puede visualizarse en el diagrama de bifurcación de la figura 3.30.

Observando las correspondientes curvas de crisis de cada atractor por separado, el punto de intersección delimita dos ramas, una correspondiente a crisis interiores y la otra a crisis de contorno. Este punto no es un vértice [Gal93], es decir, no es un punto que pertenece a una curva de crisis de contorno en el que un atractor experimenta una crisis interior y simultáneamente su dominio de atracción sufre una metamorfosis [Gre87].

Considerando los valores de los parámetros de control correspondientes a la intersección de las dos curvas de crisis, puede decirse que en este punto el sistema experimenta un cambio global que se caracteriza porque los dos atractores involucrados intercambian entre sí el tipo de crisis que experimentan. Un fenómeno parecido, en el que se ven envueltos cambios en las órbitas de silla accesibles de atractores

caóticos, se ha encontrado en un oscilador de Duffing con un potencial de dos pozos [Ued90].

### 3.7 Modelo con coeficiente de fricción lineal efectivo

Una cuestión importante consiste en saber si un modelo similar con fricción lineal puede reproducir toda la serie de fenómenos descritos en las secciones anteriores. Los resultados obtenidos en el capítulo 2 mediante el método de Melnikov indican que, en lo que respecta a la aparición de bifurcaciones homoclinas y subarmónicas, y en el rango de valores del parámetro  $\omega$  considerado, el sistema debe de comportarse aproximadamente como un oscilador con fricción lineal con un coeficiente de fricción constante dado por

$$\alpha_{efe} \approx \alpha \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right). \quad (3.2)$$

No obstante, cabe preguntarse si esta afirmación sigue siendo válida para todo el conjunto de fenómenos encontrados.

Para responder a esta cuestión se ha realizado una exhaustiva simulación de un modelo de oscilador con fricción lineal ( $\gamma = 0$ ), estudiando la aparición de fenómenos similares a los descritos en las secciones anteriores, en función de los valores de  $\alpha$  y  $\omega$ . Realizando diferentes diagramas de bifurcación, como los que se muestran en las figuras 3.31, 3.32, se ha encontrado que los comportamientos más parecidos se obtienen para valores del parámetro  $\alpha$  en el intervalo  $0.25 \leq \alpha \leq 0.30$ . El método de Melnikov, para los valores de los parámetros de control empleados, predice un coeficiente de fricción efectivo  $\alpha_{efe} = 0.29$ .

Observando las figuras 3.31, 3.32, puede apreciarse fácilmente que es posible reobtener la gran mayoría de los fenómenos descritos en las secciones anteriores en el modelo con fricción lineal, aunque utilizando un coeficiente de fricción menor. No obstante, y con el fin de estudiar con más detalle las posibles analogías o diferencias entre los dos modelos, se han obtenido las curvas de bifurcación correspondientes al sistema con coeficiente de fricción lineal en función de los parámetros de control

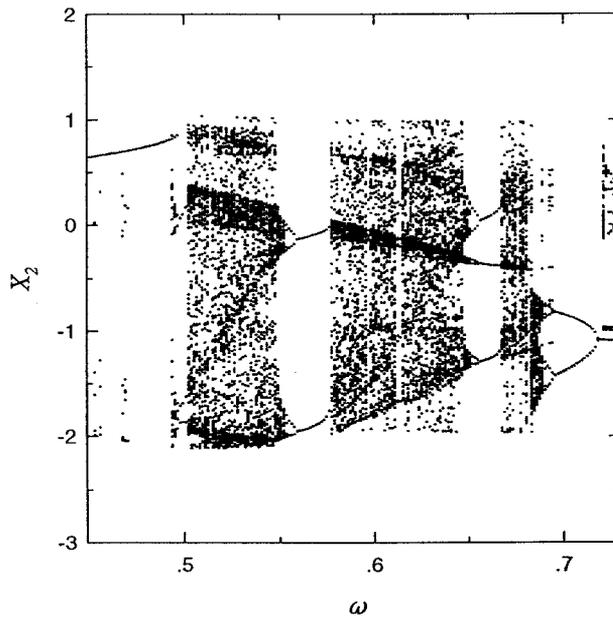


Figura 3.31: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.3$ ,  $\gamma = 0$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ .

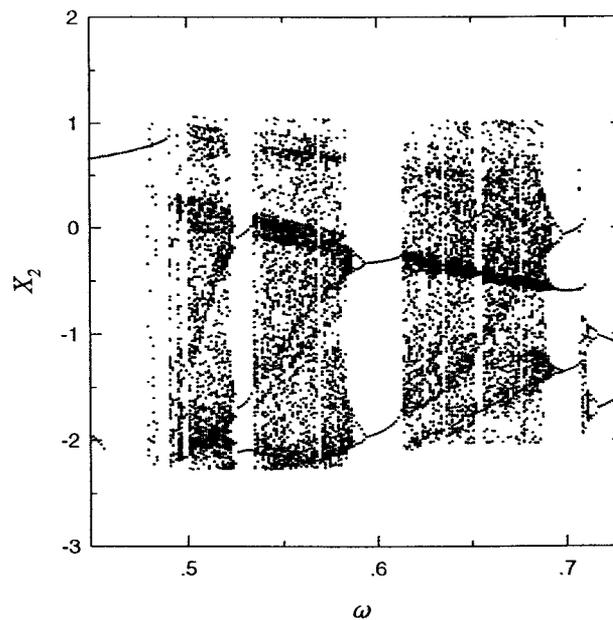


Figura 3.32: Diagrama de bifurcación correspondiente a la variable  $X_2$  y los valores de los parámetros de control  $\alpha = 0.26$ ,  $\gamma = 0$ ,  $i = 0.8$  y  $\omega$  en el intervalo  $0.45 \leq \omega \leq 0.73$ .

$(\omega, \alpha)$ . Las curvas correspondientes a las principales bifurcaciones se representan en la figura 3.33.

En esta figura, las curvas representadas dan cuenta del siguiente tipo de bifurcaciones

- La curva 1 da cuenta de la bifurcación de simetría del único atractor periódico, oscilante y simétrico, que aparecía para valores altos del parámetro  $\omega$ .
- La curva 2 (punteada en la figura) da cuenta de una bifurcación de silla nodo que da lugar a un atractor periódico, de periodo  $T = 6\pi/\omega$ , oscilante y simétrico (órbita triperiódica).
- La curva 3 indica que el atractor que experimenta la bifurcación de simetría dada por la curva 1 se ha convertido en caótico mediante una cascada de bifurcaciones de doblamiento de periodo.
- La curva 4 representa la aparición de un fenómeno de crisis que experimenta el atractor caótico indicado por la curva 3. Esta crisis puede ser de contorno, mediante la que desaparece el atractor, o interior, mediante la cual éste experimenta un salto en su longitud. El punto de intersección entre las curvas 4 y 5 delimita los dos tipos de crisis. Por encima de este punto la crisis es de contorno y por debajo la crisis es interior.
- La curva 5 indica la desaparición del atractor caótico mediante una subducción. El atractor resultante resulta ser similar al originado mediante la bifurcación de silla nodo dada por la curva 2.
- La curva 6 representa la aparición de caos a partir del atractor triperiódico. Esta transformación de un atractor periódico en caótico se realiza mediante una cascada de bifurcaciones de doblamiento de periodo. Posteriormente, al disminuir  $\omega$ , el atractor caótico sufre una crisis interior y experimenta un salto en su longitud.
- La curva 7 indica la aparición de dos órbitas rotantes antisimétricas mediante una subducción. Estas órbitas sufren un proceso similar al descrito en la sección

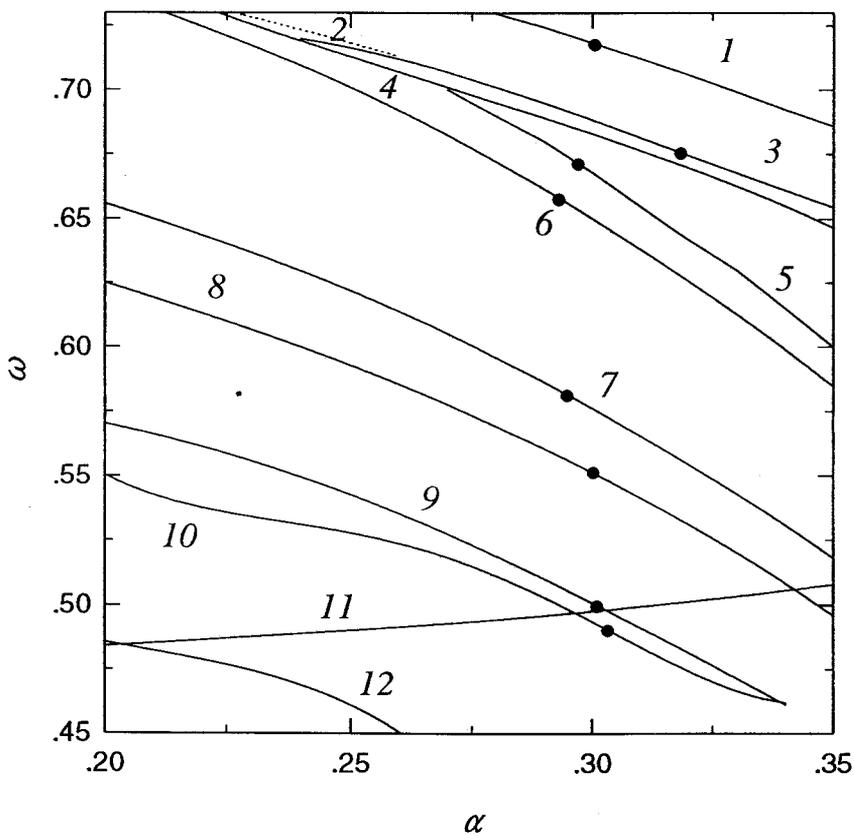


Figura 3.33: Curvas de bifurcación en función de los parámetros de control  $\alpha$  y  $\omega$  para los valores  $i = 0.8$  y  $\gamma = 0$ . También se muestra, mediante círculos en negro, los valores del parámetro  $\omega$  correspondientes al mismo tipo de bifurcaciones para los valores  $\alpha = 0.4$  y  $\gamma = -0.8$ .

3.4 y se transforman en un único atractor caótico y simétrico, fenómeno que se indica mediante la curva 8. Esta última curva intersecta a la curva 11. Este punto de intersección delimita dos ramas en la curva 8, la superior, en que el sistema experimenta el fenómeno descrito anteriormente, y la inferior, correspondiente a valores de los parámetros de control para los que las dos órbitas rotantes experimentan una crisis de contorno y después desaparecen.

- La curvas 9 y 10 dan cuenta de la aparición y la transición al caos de una órbita de periodo  $T = 6\pi/\omega$  similar a la estudiada en la sección 3.4. Al intersectar ambas curvas a la curva 11, el punto de intersección delimita dos ramas, la superior, donde ocurre el fenómeno anteriormente expuesto, y la inferior, en la que la curva 10 indica la desaparición del atractor mediante una crisis de contorno.
- La curva 11 refleja la aparición, mediante un fenómeno de subducción, de una órbita periódica similar a la que se describe en la sección 3.5. Las intersecciones de esta curva indican que la aparición de esta órbita, en los intervalos que coexiste con atractores periódicos, se realiza mediante una bifurcación de silla nodo.
- La curva 12 indica la aparición de una órbita periódica mediante una bifurcación de silla nodo similar a las descritas en la sección 3.5.

Sólamamente se han representado las curvas de bifurcación más importantes. Asimismo, y para valores del parámetro  $\alpha$  en el límite superior aparecen otros atractores para valores altos del parámetro  $\omega$  que no se han detectado en el modelo de fricción no lineal.

Representando mediante círculos en negro los valores del parámetro  $\omega$  correspondientes a cada una de las bifurcaciones que experimenta el modelo con fricción no lineal, estudiadas en las anteriores secciones, puede apreciarse que el modelo lineal con un coeficiente de fricción efectivo  $\alpha_{efe} \approx 0.3$  reproduce bastante bien las bifurcaciones indicadas por las curvas 1,3,5,6,7,8, y 9, aunque existen algunas diferencias

- Se produce un ligero desplazamiento hacia valores mayores del coeficiente  $\alpha$  para la bifurcación dada por la curva 3.
- Aunque para un valor similar del parámetro  $\omega$  al caso de fricción no lineal puede reproducirse la bifurcación dada por la curva 5 en el modelo lineal, en este último, la órbita triperiódica aparece mediante un fenómeno de subducción, después de que un atractor caótico experimente una crisis interior y siendo su aparición responsable de la desaparición de este último atractor. En el caso no lineal aparece mediante una bifurcación de silla nodo coexistiendo con el atractor caótico.
- El fenómeno de crisis de contorno descrita en la sección 3.3, para valores similares del parámetro  $\omega$  al caso de fricción no lineal, resulta imposible de reproducir mediante el modelo lineal. En el intervalo de valores correspondiente, el atractor caótico dado por la curva 3, al disminuir el parámetro  $\omega$ , experimente una crisis interior, desapareciendo mediante la subducción comentada anteriormente. Explorando el comportamiento del sistema para diversos valores de  $\alpha$  se ha conseguido, para una valor del coeficiente de fricción lineal,  $\alpha_{efe} \approx 0.19$  reproducir el fenómeno descrito en la sección 3.3, aunque los valores de  $\omega$  correspondientes resultan ser mucho mayores que los del modelo de fricción no lineal.
- Frente a la transición al caos del atractor periódico originado por la bifurcación indicada por la curva 10 que aparece en el modelo de fricción no lineal, en el modelo lineal, y para un rango de valores de los parámetros de control similar, el atractor experimenta una crisis y después desaparece
- Para encontrar valores parecidos del parámetro  $\omega$  al caso de fricción no lineal correspondientes a la bifurcación dada por la curva 11, resulta necesario utilizar un coeficiente efectivo  $\alpha_{efe} \approx 0.19$ .

Todos los puntos anteriormente expuestos llevan a considerar que, si bien un modelo con fricción lineal puede reproducir la mayoría de los fenómenos estudiados, cuando se encuentran involucrados fenómenos de crisis, el efecto del término no lineal es determinante en el comportamiento del sistema.

# Apéndice A

## Cálculos relativos al análisis de Melnikov

En este apéndice se detallan los cálculos que han sido necesarios efectuar para realizar el estudio, mediante el método de Melnikov, de los sistemas que se presentan en el capítulo 2

### A.1 Oscilador forzado armónicamente 2.2

En primer lugar, para calcular las derivadas del periodo de las órbitas 2.5, 2.6 se han utilizado las expresiones para las derivadas de las integrales elípticas que figuran en [Gra80]. Los resultados 2.7, 2.8 son inmediatos.

Para calcular las derivadas de las frecuencias angulares 2.11, 2.12 hay que calcular primeramente la derivada de la acción del sistema 2.2 sin perturbar ( $\epsilon = 0$ ) con respecto al parámetro  $m$ . Para ello resulta necesario escribir el hamiltoniano 2.3 sobre las órbitas periódicas, de manera que

$$H = 2m, \tag{A.1}$$

$$H = \frac{2}{m}, \tag{A.2}$$

para órbitas oscilantes y rotantes, respectivamente. Para ello se ha hecho uso de la relación  $\cos X_1 = 1 - 2m \operatorname{sn}^2(t, m)$ , para órbitas oscilantes y  $\cos X_1 = 1 - 2 \operatorname{sn}^2(t/\sqrt{m}, m)$ ,

para rotantes.

Utilizando estas expresiones, la regla de la cadena y el hecho de que  $dH/dI = \Omega(I)$ , resulta inmediato obtener las derivadas

$$\frac{dI^m}{dm} = \frac{4K(m)}{\pi}, \tag{A.3}$$

$$\frac{dI^m}{dm} = -\frac{2K(m)}{\pi m^{3/2}}, \tag{A.4}$$

para órbitas oscilantes y rotantes respectivamente, donde  $I^m$  resulta ser la acción tomada sobre las órbitas periódicas. Utilizando estas ecuaciones es muy fácil obtener las expresiones 2.11 y 2.12. Cuando  $m \rightarrow 1$ , mediante el uso de las propiedades asintóticas de las funciones elípticas [Abra72, Gra80], también resulta fácil comprobar que 2.11 y 2.12 (en valor absoluto) tienden a infinito.

### A.1.1 Función de Melnikov

Para calcular la función de Melnikov del sistema 1.20, la ecuación 2.17 puede escribirse como

$$M^\pm(t_0) = \pm 2\bar{i}I_1 - 4\bar{\alpha}I_2 - 4\bar{\alpha}\gamma I_3, \tag{A.5}$$

donde el signo positivo o negativo corresponde a cada una de las órbitas homoclinas 2.4, e  $I_1, I_2, I_3$  resultan ser las integrales

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{secht} \text{sen} \omega(t + t_0) dt \tag{A.6}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2 t dt \tag{A.7}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2 t \cos(2\arctan(\text{sen} ht)) dt. \tag{A.8}$$

Para calcular A.6, es necesario, utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas, transformarla en dos integrales de la forma

$$I_1 = \cos \omega t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{secht} \text{sen} \omega t dt + \text{sen} \omega t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{secht} \cos \omega t dt, \tag{A.9}$$

y, de acuerdo con [Gra80], la primera integral es nula y la segunda resulta ser  $\pi \text{sech}(\pi\omega/2)$ . En definitiva, el valor de A.6 es

$$I_1 = \pi \text{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \text{sen} \omega t_0. \tag{A.10}$$

El cálculo de la segunda integral,  $I_2$ , da como resultado

$$I_2 = 2. \quad (\text{A.11})$$

Por último, la integral,  $I_3$ , utilizando las propiedades de las funciones del integrando y realizando el cambio de variable  $u = 2\arctan(\operatorname{sen}ht)$ , se transforma en una integral inmediata de la forma

$$I_3 = \int_0^\pi \cos \frac{u}{2} \cos u du = \frac{2}{3}. \quad (\text{A.12})$$

En definitiva, utilizando todos estos resultados, la función de Melnikov resulta

$$M^\pm(t_0) = \pm 2\pi I \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sen}\omega t_0 - 8\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{3}\right). \quad (\text{A.13})$$

### A.1.2 Función subarmónica de Melnikov. Soluciones oscilantes

La función de Melnikov para soluciones oscilantes viene dada por la ecuación 2.28, que puede escribirse de la forma

$$M_{osc}^{k_1/k_2}(t_0) = 2\bar{i}\sqrt{m}I_1 - 4\bar{\alpha}m(1 + \gamma)I_2 + 8m^2\bar{\alpha}\gamma I_3, \quad (\text{A.14})$$

siendo

$$I_1 = \int_0^{k_1 T} \operatorname{sen}\omega(t + t_0) \operatorname{cn}(t, m) dt, \quad (\text{A.15})$$

$$I_2 = \int_0^{k_1 T} \operatorname{cn}^2(t, m) dt, \quad (\text{A.16})$$

$$I_3 = \int_0^{k_1 T} \operatorname{sn}^2(t, m) \operatorname{cn}^2(t, m) dt, \quad (\text{A.17})$$

y la condición de resonancia exige que  $\omega = k_1\pi/2k_2K(m)$ .

Para el cálculo de  $I_1$  resulta necesario emplear el desarrollo en serie de Fourier de la función  $\operatorname{cn}(t, m)$  [Abra72],

$$\operatorname{cn}(t, m) = \frac{2\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 + q^{2n+1}} \cos(2n + 1) \frac{\pi t}{2K(m)}, \quad (\text{A.18})$$

donde

$$q = e^{-\pi K(1-m)/K(m)}. \quad (\text{A.19})$$

Utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas, realizando el cambio de variable  $u = \pi t/2K(m)$  y este desarrollo,  $I_1$  resulta ser

$$I_1 = \frac{4\cos\omega t_0}{m^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} I_{11} + \frac{4\text{sen}(\omega t_0)}{m^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} I_{12}, \quad (\text{A.20})$$

donde

$$I_{11} = \int_0^{2\pi k_2} \text{sen}(k_1 u/k_2) \cos(2n+1) u du \quad (\text{A.21})$$

$$I_{12} = \int_0^{2\pi k_2} \cos(k_1 u/k_2) \cos(2n+1) u du. \quad (\text{A.22})$$

Según [Gra80],  $I_{11} = 0$ , e  $I_{12}$  sólo es distinto de 0 si  $k_2 = 1$  y  $k_1$  impar, siendo el valor de  $I_1$  ( $k_1$  impar):

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \text{sen}\omega t_0 \text{sech} \left( \frac{\pi k_1 K(1-m)}{2K(m)} \right), \quad (\text{A.23})$$

y la condición de resonancia

$$\omega = \frac{k_1 \pi}{2K(m)}. \quad (\text{A.24})$$

El cálculo de  $I_2$  e  $I_3$ , resulta ser, para  $k_2 = 1$

$$I_2 = \frac{4}{m} [E(m) - (1-m)K(m)], \quad (\text{A.25})$$

$$I_3 = \frac{4}{3m^2} [(2-m)E(m) - 2(1-m)K(m)]. \quad (\text{A.26})$$

En definitiva, la función subarmónica de Melnikov correspondiente a las órbitas oscilantes es

$$\begin{aligned} M_{osc}^{k_1}(t_0) &= 4\pi I \text{sen}\omega t_0 \text{sech} \left( \frac{k_1 \pi K(1-m)}{2K(m)} \right) - 16\alpha(1+\gamma) [E(m) - (1-m)K(m)] \\ &\quad + \frac{32}{3} \alpha \gamma [(2-m)E(m) - 2(1-m)K(m)] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

siendo  $k_1$  impar y  $\omega = k_1 \pi/2K(m)$ . Utilizando las definiciones de  $J_1(m)$ ,  $J_2(m)$ ,  $J_3(k_1, k_2, m)$  2.32, 2.33, 2.34, se obtiene el resultado que se presenta en el capítulo 2.

### A.1.3 Función subarmónica de Melnikov. Soluciones rotantes

Para soluciones rotantes, la función subarmónica de Melnikov viene dada por la ecuación 2.29 que puede reescribirse como

$$M_{rot}^{\pm k_1/k_2}(t_0) = \pm \frac{2\bar{i}}{\sqrt{m}} I_1 - \frac{4\bar{\alpha}}{m} (1 + \gamma) I_2 + \frac{8\bar{\alpha}\gamma}{m} I_3, \quad (\text{A.28})$$

donde

$$I_1 = \int_0^{k_1 T} \text{sen} \omega(t + t_0) \text{dn} \left( \frac{t}{\sqrt{m}}, m \right) dt \quad (\text{A.29})$$

$$I_2 = \int_0^{k_1 T} \text{dn}^2 \left( \frac{t}{\sqrt{m}}, m \right) dt \quad (\text{A.30})$$

$$I_3 = \int_0^{k_1 T} \text{dn}^2 \left( \frac{t}{\sqrt{m}}, m \right) \text{sn}^2 \left( \frac{t}{\sqrt{m}}, m \right) dt. \quad (\text{A.31})$$

Los signos positivos y negativos corresponden a cada una de las dos familias de soluciones rotantes que hay para cada valor de la energía, y la condición de resonancia es

$$\omega = \frac{k_1 \pi}{\sqrt{m} K(m) k_2}. \quad (\text{A.32})$$

Para calcular  $I_1$ , resulta conveniente utilizar el desarrollo de Fourier de la función  $\text{dn}(t, m)$  que, según [Abra72] es

$$\text{dn}(t, m) = \frac{\pi}{2K(m)} + \frac{2\pi}{K(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos \frac{2n\pi t}{K(m)}, \quad (\text{A.33})$$

donde  $q$  está definido de la misma manera que en la ecuación A.19. Utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas y el cambio de variable  $u = \pi t / K(m) \sqrt{m}$

$$I_1 = \cos \omega t_0 I_{11} + \text{sen} \omega t_0 I_{12}, \quad (\text{A.34})$$

siendo

$$I_{11} = \frac{\pi \sqrt{m}}{2} \int_0^{2\pi k_2} \text{sen} \left( \frac{k_1 u}{k_2} \right) du + 2\sqrt{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \int_0^{2\pi k_2} \text{sen} \left( \frac{k_1 u}{k_2} \right) \cos(nu) du, \quad (\text{A.35})$$

$$I_{12} = \frac{\pi\sqrt{m}}{2} \int_0^{2\pi k_2} \cos\left(\frac{k_1 u}{k_2}\right) du + 2\sqrt{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \int_0^{2\pi k_2} \cos\left(\frac{k_1 u}{k_2}\right) \cos(nu) du. \quad (\text{A.36})$$

Según [Gra80],  $I_{11}$  resulta ser nula y  $I_{12}$  sólo es diferente de cero si  $k_2 = 1$ . El cálculo es inmediato y el resultado es:

$$I_1 = \pi\sqrt{m} \operatorname{sech}\left(\frac{k_1 \pi K(1-m)}{K(m)}\right) \operatorname{sen} \omega t_0. \quad (\text{A.37})$$

Utilizando de nuevo el mismo cambio de variable que para el cálculo de  $I_1$ ,

$$I_2 = 2\sqrt{m} E(m), \quad (\text{A.38})$$

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{m}} 2(1-m) [K(m) - E(m)] + \frac{2}{3\sqrt{m}} [(2-m)E(m) - 2(1-m)K(m)]. \quad (\text{A.39})$$

En definitiva, la función subarmónica de Melnikov para soluciones rotantes resulta ser

$$M_{rot}^{\pm k_1}(t_0) = \pm 2\pi i \operatorname{sen} \omega t_0 \operatorname{sech}\left(\frac{k_1 \pi K(1-m)}{K(m)}\right) - \frac{8\bar{\alpha}}{\sqrt{m}} (1+\gamma) E(m) + \frac{8\bar{\alpha}\gamma}{m^{\frac{3}{2}}} \left( 2(1-m) [K(m) - E(m)] + \frac{2}{3} [(2-m)E(m) - 2(1-m)K(m)] \right), \quad (\text{A.40})$$

siendo  $\omega = k_1 \pi / \sqrt{m} K(m)$ . Utilizando las definiciones de  $\bar{J}_1(m)$ ,  $\bar{J}_2(m)$ ,  $\bar{J}_3(k_1, k_2, m)$  2.35, 2.36, 2.37 el resultado resulta ser el mismo que el que se presenta en el capítulo 2

## A.2 Oscilador forzado armónicamente 1.21

La función de Melnikov correspondiente al sistema descrito por las ecuaciones 1.21 resulta muy parecida a la correspondiente a 2.2. La única diferencia reside en  $I_3$ , que ahora es

$$I_3(m, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{cd}(2\omega_0 \arctan(\sinh t)) dt, \quad (\text{A.41})$$

donde  $\omega_0 = 4K(m)/T$ . Para calcular el valor de esta integral resulta conveniente utilizar el desarrollo en serie de la función elíptica  $\text{cd}(\omega_0 t, m)$  [Abra72]

$$\text{cd}(\omega_0 t, m) = \frac{2\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}} \cos(2n+1) \frac{2\pi t}{T}, \quad (\text{A.42})$$

donde  $q = e^{-\pi K(1-m)/K(m)}$ .

Utilizando este desarrollo, y realizando el cambio de variable  $u = 2\arctan(\sinh t)$ , el cálculo se reduce a una serie de integrales inmediatas y el resultado puede escribirse, utilizando las propiedades de las funciones hiperbólicas, como

$$I_3(m, T) = \frac{2\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)2\pi^2/T)}{1 - (2\pi/T)^2(4n+2)^2} \text{cosech} \left[ \frac{(n+1/2)\pi K(1-m)}{K(m)} \right]. \quad (\text{A.43})$$

Aplicando el criterio de la raíz [Rud76] es fácil ver que la serie es absolutamente convergente. Cuando el periodo  $T$  es muy pequeño, el valor límite de  $I_3(m, T)$  es

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_3(m, T) = 0, \quad (\text{A.44})$$

y para periodos muy grandes, utilizando el valor límite de la función

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cd}(\omega_0 t, m) = 1, \quad (\text{A.45})$$

el valor de  $I_3(m, T)$  es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_3(m, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 t dt = 2. \quad (\text{A.46})$$

Cuando el parámetro  $m$  es muy pequeño

$$\lim_{m \rightarrow 0} \text{cd}(\omega_0 t, m) = \cos\left(\frac{2\pi X_1}{T}\right), \quad (\text{A.47})$$

y la función  $I_3(m, T)$  es

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} I_3(m, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 t \cos\left(\frac{4\pi \arctan(\sinh t)}{T}\right) dt \\ &= \frac{2\cos(2\pi^2/T)}{1 - 16\pi^2/T^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

que para  $T = 2\pi$  se reduce a la expresión de  $I_3$  correspondiente al sistema 2.2.

Para valores del parámetro  $m$  próximo a la unidad, el cálculo del valor límite de  $I_3(m, T)$  es más complicado. En este caso, resulta conveniente utilizar la expresión

$$\lim_{m \rightarrow 1} \text{cd}(\omega_0 t, m) = \text{sgn} \left( \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (\text{A.49})$$

y el desarrollo de Fourier de la onda cuadrada [Cha95]

$$\text{sgn} \left( \cos \frac{2\pi t}{T} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cos \left( \frac{(2n+1)2\pi t}{T} \right). \quad (\text{A.50})$$

Al utilizar el desarrollo de Fourier para representar una onda cuadrada existen puntos donde la función y su desarrollo difieren (fenómeno de Gibbs). No obstante, estos puntos constituyen un conjunto de medida nula (en el sentido de Lebesgue) y no influyen en el resultado de la integral [Rud76].

Utilizando las expresiones anteriores y el cambio de variable  $u = 2\arctan(\sinh t)$

$$\lim_{m \rightarrow 1} I_3(m, T) = \frac{T^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\cos(2(2n+1)\pi^2/T)}{T^2 - 2\pi^2 - 8n\pi^2 - 8n^2\pi^2}. \quad (\text{A.51})$$

La función  $I_3(m, T)$ , como función del periodo, es una función positiva y creciente para valores del periodo  $T \geq 2\pi$ , ya que, realizando el cambio de variable  $u = 2\arctan(\sinh(t))$ ,

$$I_3(m, T) = \int_0^\pi \cos \frac{u}{2} \text{cd}(\omega_0 u, m) dt. \quad (\text{A.52})$$

Para  $T = 2\pi$ , la función  $\text{cd}(\omega_0 u, m)$  es positiva en el intervalo  $0 \leq u \leq \pi/2$  y negativa en  $\pi/2 \leq u \leq \pi$ , alcanzando los mismos valores en ambos intervalos con signos diferentes. Al ser la función  $\cos u/2$  positiva y decreciente en el intervalo de integración, la contribución del intervalo  $0 \leq u \leq \pi/2$  será mayor (en valor absoluto) que en el otro intervalo y la integral A.52 será positiva. Esto ocurrirá siempre que  $T \geq 2\pi$ . El estudio del crecimiento o decrecimiento de esta función con respecto al parámetro  $T$  se realiza calculando la derivada [Abra72]

$$\frac{\partial I_3(m, T)}{\partial T} = \frac{4(1-m)K(m)}{T^2} \int_0^\pi u \cos \frac{u}{2} \frac{\text{sn}(\omega_0 u, m)}{\text{dn}^2(\omega_0 u, m)} du, \quad (\text{A.53})$$

que es positiva siempre que  $T \geq 2\pi$ , ya que en el intervalo de integración todas las funciones lo son. Para valores menores del periodo, diversas simulaciones numéricas

han permitido encontrar intervalos en los cuales  $I_3(m, T)$  resulta ser una función decreciente del periodo, alcanzando incluso valores negativos. Cuando esto ocurre, los valores obtenidos son muy próximos a cero.

El estudio del crecimiento o decrecimiento de la función  $I_3(m, T)$  con respecto al parámetro  $m$ , se lleva a cabo calculando la derivada

$$\frac{\partial I_3(m, T)}{\partial m} = \int_0^\pi \cos \frac{u}{2} \frac{\partial \text{cd}(\omega_0 u, m)}{\partial m} du. \quad (\text{A.54})$$

Los cálculos explícitos resultan largos y tediosos. Sin embargo, argumentos cualitativos permiten averiguar algunas de sus características. Al aumentar el parámetro  $m$ , la función  $\text{cd}(\omega_0 u, m)$  tiende a convertirse en una onda cuadrada. Para un valor dado de la variable  $u$ , si la función es positiva es creciente con  $m$  (derivada positiva) y si la función es negativa es decreciente con  $m$  (derivada negativa), teniendo simetría respecto al punto en que la función se anula. Esto es cierto para todos los valores de  $u$  excepto para los puntos correspondientes a máximos, mínimos y ceros, que no varían, aunque este hecho no influye en el resultado de la integral. Como la función  $\cos(u/2)$  es decreciente y positiva, para  $T \geq 2\pi$  el intervalo de integración en que el integrando es positivo contribuye a la integral más que el intervalo de integración en el que el integrando es negativo. Por todo ello la integral resulta positiva y la función  $I_3(m, T)$  es creciente con el periodo  $T$ .

Para valores menores del periodo se han encontrado, mediante diversas simulaciones numéricas, intervalos en los que esta función es decreciente con  $m$ , aunque en estos casos el valor de  $I_3(m, T)$  es siempre próximo a cero.

Los resultados numéricos obtenidos para valores pequeños del periodo  $T$  deben de interpretarse con algunas precauciones, ya que la serie A.43, al tender rápidamente a cero al disminuir el parámetro  $T$ , converge más lentamente y resulta necesario considerar cada vez más términos del desarrollo para obtener valores próximos a los reales, hecho que puede ser la causa de las pequeñas oscilaciones que aparecen en las figuras 2.10 y 2.11.

### A.3 Oscilador con forzamiento generalizado

El cálculo de la función de Melnikov correspondiente al sistema descrito por las ecuaciones 1.23 resulta muy parecido a los casos anteriores. La única integral nueva es

$$F(t_0, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sechtsn}(\omega(t + t_0), m) dt, \quad (\text{A.55})$$

donde  $\omega = 4K(m)/T$ .

Esta función respecto a la variable  $t_0$  es periódica de periodo  $T$  y, debido a las propiedades de las funciones del integrando, posee ceros en los puntos  $t_0 = \pm T/2$ . Asimismo, calculando su derivada con respecto a la variable  $t_0$  [Abra72]

$$\frac{\partial F(t_0, m)}{\partial t_0} = \omega \int_{-\infty}^{\infty} \text{sechtsn}(\omega(t + t_0), m) \text{dn}(\omega(t + t_0), m) dt, \quad (\text{A.56})$$

ésta es nula en los puntos  $t_0 = \pm T/4$ , indicando que la función posee extremos en esos puntos.

Para calcular el valor de  $F(t_0, m)$ , resulta conveniente emplear el desarrollo en serie de la función elíptica  $\text{sn}(\omega(t + t_0), m)$  [Abra72]

$$\begin{aligned} \text{sn}(\omega(t + t_0), m) = & \frac{\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \text{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \\ & \text{sen} \left( \frac{2\pi(2n+1)(t+t_0)}{T} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

por lo que

$$\begin{aligned} F(t_0, m) = & \frac{\pi}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \text{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \text{sechtsin} \left( \frac{2\pi(2n+1)(t+t_0)}{T} \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

El cálculo es inmediato y resulta

$$\begin{aligned} F(t_0, m) = & \frac{\pi^2}{\sqrt{m}K(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \text{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \\ & \text{sech} \left( \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right) \text{sen} \left( \frac{2\pi(2n+1)t_0}{T} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Mediante el criterio de la raíz resulta fácil comprobar que la serie es absolutamente convergente ( $m < 1$ ) y para  $t_0 = T/4$  su valor es

$$F(T/4, m) = \frac{\pi^2}{\sqrt{mK(m)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{cosech} \left( \frac{\pi K(1-m)(2n+1)}{2K(m)} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{(2n+1)\pi^2}{T} \right), \quad (\text{A.60})$$

que es positivo, ya que se trata de una serie en la que alternan términos positivos y negativos y el valor absoluto de cada término decrece con  $n$ . En el punto  $t_0 = -T/4$  se cumple

$$F(-T/4, m) = -F(T/4, m). \quad (\text{A.61})$$

A la vista de todos los resultados anteriores puede afirmarse que la función  $F(t_0, m)$ , como función de la variable  $t_0$ , posee un máximo en  $t_0 = T/4$  y un mínimo en  $t_0 = -T/4$ . Las simulaciones numéricas realizadas para diversos valores de  $T$  y  $m$  ( $0 < m < 1$  y  $0 < T < 100\pi$ ) muestran que la función  $F(T/4, m)$  es una función creciente con el periodo  $T$  y respecto al parámetro elíptico  $m$ . Utilizando el desarrollo A.60 resulta fácil comprobar que

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(T/4, m) = 0, \quad (\text{A.62})$$

y, utilizando el desarrollo en serie de las funciones elípticas,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(T/4, m) = \pi \operatorname{cd}(0, m) = \pi. \quad (\text{A.63})$$

En el límite en que la excitación resulta ser una función armónica ( $m = 0$ ),

$$\lim_{m \rightarrow 0} F(T/4, m) = \pi \operatorname{sech} \left( \frac{\pi^2}{T} \right), \quad (\text{A.64})$$

que para el valor  $T = 2\pi$  se reduce al resultado obtenido en el caso correspondiente al sistema 1.20. En el límite en el que la excitación es una onda cuadrada ( $m = 1$ ) resulta conveniente utilizar la igualdad

$$\operatorname{sn}(\omega(t + T/4), 1) = \operatorname{sgn} \left( \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right), \quad (\text{A.65})$$

y por tanto

$$F(T/4, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}t \operatorname{sgn} \left( \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right) dt. \quad (\text{A.66})$$

Utilizando el hecho de que el integrando es una función par,

$$F(T/4, 1) = 2 \int_0^{T/4} \operatorname{sech}t dt + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{nT/2+T/4}^{(n+1)T/2+T/4} \operatorname{sech}t dt, \quad (\text{A.67})$$

y calculando las integrales

$$F(T/4, 1) = 4 \left( \operatorname{arctane}^{T/4} - \frac{\pi}{4} \right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \operatorname{arctane}^{(2n+3)T/4} - \operatorname{arctane}^{(2n+1)T/4} \right), \quad (\text{A.68})$$

que resulta una serie alternada cuyos términos tienden a cero. Para los valores límites del periodo  $T$

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(T/4, 1) = 0, \quad (\text{A.69})$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(T/4, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}t dt = \pi. \quad (\text{A.70})$$

# Apéndice B

## Métodos numéricos

A lo largo de todo este trabajo se han analizado algunos aspectos de la dinámica de un conjunto de osciladores descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Gran parte de los resultados se han obtenido mediante técnicas de simulación numérica, siendo necesario, para una mejor comprensión e interpretación de estos resultados, conocer en detalle los métodos utilizados. El objetivo de este apéndice consiste en exponer, brevemente, el conjunto de técnicas y procedimientos empleados.

En general, un sistema dinámico no autónomo de orden  $n$  viene descrito por un sistema de ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{B.1}$$

donde  $x(t) \in R^n$  y  $f : R^n \rightarrow R^n$  se denomina campo vectorial, función del tiempo. Si esta función es periódica de periodo  $T$ , se dice que el campo es periódico en el tiempo, como es el caso de los sistemas estudiados 1.20, 1.21, 1.23. La solución de la ecuación anterior que en el tiempo  $t = t_0$  pasa por el punto  $x_0$  se denotará por  $\phi_t(x_0, t_0)$ .

En el trabajo realizado ha sido necesario frecuentemente calcular una trayectoria en función de una condición inicial dada (normalmente se ha elegido  $t_0 = 0$ ). Para ello se han tenido que resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema en cuestión. Aunque existen muchos algoritmos de integración, se ha elegido un método de Runge-Kutta de cuarto orden con control adaptativo del paso de integración, que aunque no es el más rápido, sí que resulta bastante fiable

[Teu92]. No obstante, y para comprobar algunos resultados, se han utilizado también algunas rutinas de integración de diferentes librerías matemáticas que se encuentran instaladas en los ordenadores del C.I.C.A. (Centro de Informática Científica de Andalucía). En todas las ocasiones, los resultados obtenidos mediante el empleo de estas rutinas coincidían con los obtenidos mediante el método de Runge-Kutta.

## B.1 Mapa de Poincaré

Cualquier sistema dinámico no autónomo, de orden  $n$ , y periódico en el tiempo, puede transformarse en un sistema autónomo de orden  $n + 1$  definido en el cilindro  $R^n \times S^1$  mediante la transformación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta T/2\pi) & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T & \theta(t_0) &= 2\pi t_0/T, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde  $T$  es el periodo de la función  $f$  y la nueva variable,  $\theta = 2\pi t/T$ , es periódica de periodo  $2\pi$ . Considerando el hiperplano definido por

$$\Sigma := \{(x, \theta) \in R^n \times S^1 : \theta = \theta_0\}, \quad (\text{B.3})$$

cada tiempo  $t = T$ , la trayectoria  $(x(t), \theta(t))$  intersecta ese hiperplano. Construyendo la aplicación  $P_N : \Sigma \rightarrow \Sigma (R^n \rightarrow R^n)$  definida por

$$P_N(x) = \phi_{t_0+T}(x, t_0), \quad (\text{B.4})$$

se obtiene un mapa discreto, llamado mapa o aplicación de Poincaré [Guc83, Wig90]. Una trayectoria  $\phi_t(x_0, t_0)$  se reduce a un conjunto discreto de puntos, denominados secciones de Poincaré.

Cuando se estudian sistemas dinámicos no autónomos esta técnica resulta ser muy útil, ya que permite reducir el estudio de sistemas continuos al estudio de mapas discretos, con todas las ventajas que ello conlleva. Señalar simplemente que para sistemas autónomos este tipo de reducción puede también llevarse a cabo fácilmente [Guc83, Wig90].

Si el sistema dinámico posee alguna solución periódica de periodo  $T$ , en el mapa de Poincaré correspondiente se convierte en un punto fijo  $x^*$  de manera que  $x^* = P_N(x^*)$ . Si la órbita es un subarmónico de periodo  $kT$ , siendo  $k$  un número entero, en el mapa de Poincaré se transforma en una órbita de la forma  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*\}$ . En el caso de soluciones con dos frecuencias, una de ellas análoga a la de la función  $f$ , en el mapa de Poincaré aparece una curva difeomórfica con un círculo. Si esta órbita es un subarmónico de orden  $k$  de la frecuencia de la función  $f$ , aparecen  $k$  curvas de este tipo. Cuando el sistema se encuentra en un estado de caos, en el mapa de Poincaré aparece una figura que generalmente exhibe una estructura complicada [Par89].

A la hora de analizar los sistemas descritos por las ecuaciones 1.20, 1.21, y 1.23, la técnica de la reducción de un sistema continuo a un mapa discreto mediante la aplicación de Poincaré ha sido ampliamente utilizada. Para ello, y partiendo de una condición inicial, elegida para un tiempo  $t_0 = 0$ , se han resuelto las ecuaciones diferenciales correspondientes, obteniendo los valores  $\{x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots\}$ , que permiten estudiar numéricamente el mapa de Poincaré correspondiente.

Frecuentemente ha sido necesario, a partir de una condición inicial, obtener el estado estacionario del sistema ( $t \rightarrow \infty$ ). Para ello se ha resuelto en primer lugar las ecuaciones obteniendo el valor de la solución en el tiempo  $t_{tran} = 200T$  para luego, suponiendo que ya se encontraba en el estado estacionario, realizar la aplicación de Poincaré. Para comprobar que el sistema se encuentra realmente en el estado estacionario, en una gran cantidad de ocasiones, se ha vuelto a calcular la aplicación de Poincaré suponiendo que  $t_{tran} = 400T$  obteniendo, en todos los casos, un resultado similar al anterior.

## B.2 Atractores

El análisis del estado estacionario de un sistema dinámico ( $t \rightarrow \infty$ ) resulta ser de capital importancia, ya que este tipo de comportamientos están directamente relacionados con los estados observables del sistema.

Muy relacionado con estos estados se encuentran los denominados atractores del sistema. Aunque matemáticamente pueden definirse de forma precisa [Guc83, Wig90],

básicamente, y como su nombre indica, pueden entenderse como un conjunto de puntos del espacio de las fases, próximos entre sí, hacia el que tienden un conjunto de trayectorias del sistema. A veces puede ocurrir que coexistan varios atractores simultáneamente, optando el sistema por uno u otro en función de las condiciones iniciales. Al conjunto de condiciones iniciales que se ven atraídas hacia un determinado atractor se le denomina dominio de atracción de ese atractor.

En este trabajo se ha planteado frecuentemente el problema de encontrar todos los posibles atractores que posee el sistema para unos determinados valores de los parámetros de control. Para determinar estos atractores se ha seleccionado la zona del espacio de las fases  $-\pi \leq X_1 \leq \pi$ ,  $-2.5 \leq X_2 \leq 1.5$ , eligiendo un número de condiciones iniciales aleatoriamente distribuidas en ese intervalo que ha oscilado entre 200 y 1000 y calculando, para cada condición inicial, el estado estacionario que permite obtener las coordenadas de los puntos que forman el atractor correspondiente a esa condición inicial. Una vez calculado los posibles atractores, y para comprobar que son todos, se ha doblado el número de condiciones iniciales y repetido el proceso. En todos los casos se han obtenido los mismos resultados. Asimismo, también se han explorado un rango mayor de valores de la variable  $X_2$  ( $-100 \leq X_2 \leq 100$ ), no encontrando ninguna diferencia con los resultados anteriores.

Básicamente, los atractores que se han encontrado han sido órbitas periódicas y atractores caóticos. En el caso de órbitas periódicas, la identificación del tipo de atractor ha resultado inmediata, no siendo así en el caso de atractores caóticos.

Aunque el concepto de atractor caótico o extraño se puede definir de forma precisa [Wig90], en la práctica resulta extremadamente difícil probar rigurosamente que un sistema posee un atractor caótico, existiendo, hoy en día, sólo algunos resultados parciales en casos muy determinados [Guc83, Wig90]. Una de las características que posee un atractor caótico consiste en que una trayectoria que tienda hacia él, en el estado estacionario, muestra una fuerte dependencia con las condiciones iniciales. Asimismo, y realizando la aplicación de Poincaré correspondiente, aparece una figura, generalmente complicada, que no se corresponde con la de una órbita periódica o cuasi periódica.

En el trabajo realizado, y siempre en el contexto de la aplicación de Poincaré,

se ha considerado, empleando el criterio más utilizado [Jac91], que un atractor es caótico cuando en el mapa correspondiente ha aparecido una figura extraña de manera que una trayectoria que tendiera hacia el atractor, en su estado estacionario, experimentara una fuerte dependencia con las condiciones iniciales. Para analizar la dependencia con las condiciones iniciales se han calculado los exponentes de Lyapunov [Guc83, Wig90], que dan cuenta de la expansión o compresión de un volumen del espacio fásico próximo a un atractor. Siempre que uno de estos exponentes sea positivo puede afirmarse que el sistema es fuertemente dependiente de las condiciones iniciales [Par89].

En nuestro caso, y cuando en la aplicación de Poincaré ha aparecido un atractor con una apariencia extraña, se ha calculado el mayor de los exponentes de Lyapunov utilizando un método que se basa en estudiar la evolución de un volumen en el espacio de las fases observando su razón de compresión y expansión. Este método resulta ser bastante fiable, al menos para el cálculo del mayor de los exponentes [Par89]. En todos los casos se ha comprobado que el mayor de los exponentes de Lyapunov era positivo.

### B.3 Dominios de atracción

A lo largo de este trabajo uno de los problemas más importantes que se ha presentado ha sido el de calcular los dominios de atracción de un conjunto de atractores que coexisten simultáneamente para unos valores dados de los parámetros de control. Incluso, en alguna ocasión, se ha estudiado la variación de estos dominios en función de los valores de estos parámetros.

Este cálculo, para el que resulta necesario determinar el estado estacionario de un gran conjunto de condiciones iniciales, implica, sobre todo cuando este número es alto, un gran esfuerzo de computación. Para evitar en parte este problema se ha utilizado un método aproximado, denominado ICM (Interpolated Cell Mapping) que permite acelerar bastante este proceso, obteniendo a la vez excelentes resultados [Ton87]. Básicamente, este método consiste en cuadricular la zona del espacio de las fases que se quiere estudiar, siempre que contenga al menos un atractor del sistema,

utilizar las coordenadas del centro de cada celda como condición inicial y calcular su trayectoria en un tiempo  $t = T$ . Para calcular la trayectoria a partir de una condición inicial dada se calculan las coordenadas de los centros de las celdas más próximas que forman un rectángulo alrededor de ésta. Seguidamente, y para calcular el valor de las coordenadas en un tiempo  $t = T$ , se interpola entre los puntos resultantes de la evolución de los centros de las antiguas celdas. Repitiendo este proceso se puede calcular rápidamente, y con un coste de computación mínimo, cualquier estado estacionario. Si alguna condición inicial, a lo largo de su evolución, cae fuera de la zona estudiada, se considera que su atractor está fuera de la zona.

En nuestro estudio, y como todos los atractores se encuentran en el intervalo  $-\pi \leq X_1 \leq \pi$ ,  $-2.5 \leq X_2 \leq 1.5$ , se ha explorado esta zona del espacio de las fases, cuadrículándola en  $300 \times 200$  celdas (realmente, y para evitar que exista un número significativo de trayectorias que se escapen de esta zona, al cuadricular se ha elegido el intervalo  $-2.7 \leq X_2 \leq 1.7$ ).

En primer lugar se han calculado el conjunto de atractores que coexisten para unos valores dados de los parámetros de control, determinando sus secciones de Poincaré. En el caso de atractores caóticos, al menos se han obtenido 2000 secciones de Poincaré, de manera que al representarlo gráficamente la figura obtenida sea representativa del atractor completo. Posteriormente, y mediante el método ICM, se han vuelto a calcular todos los atractores y sus dominios de atracción. En todos los casos el conjunto de atractores obtenidos ha resultado idéntico al ya calculado anteriormente, lo que indica la exactitud del método empleado.

Para considerar que una condición inicial dada pertenecía al dominio de un determinado atractor se ha exigido que durante 10 iteraciones se encontrara a una distancia  $d < 0.01$  de éste. Si esto no ocurre para ningún atractor, se ha supuesto que el sistema no había alcanzado el estado estacionario y se ha seguido iterando el sistema. Como condiciones iniciales se han tomado los centros de las celdas en el intervalo  $-\pi \leq X_1 \leq \pi$ ,  $-2.5 \leq X_2 \leq 1.5$ . Este conjunto de condiciones iniciales (del orden de 60000) proporciona un número suficiente de puntos para que puedan representarse gráficamente los dominios de atracción de cualquier atractor.

Para comprobar de nuevo la validez del método, se ha elegido un conjunto de  $100 \times$

100 condiciones iniciales en el intervalo estudiado y se han calculado los dominios de atracción mediante el método de integración directa. En todos los casos los resultados coincidían plenamente con los obtenidos mediante el método ICM.

En la mayoría de las ocasiones, al calcular los dominios de atracción, su apariencia ha resultado ser fractal. Ampliando zonas de estos dominios, y eligiendo un conjunto grande de condiciones iniciales en ellas, se ha comprobado que presentan estructuras complicada características de los objetos fractales.

## B.4 Fronteras de dominios de atracción

Como ya se ha comentado anteriormente, cuando se han calculado los dominios de atracción de los sistemas estudiados para unos valores de los parámetros de control, a menudo se ha encontrado que poseen apariencia fractal, lo que hace que el sistema presenta una fuerte dependencia de las condiciones iniciales aunque el comportamiento final no sea caótico. Asimismo, algunos de los fenómenos analizados están muy relacionados con la existencia de órbitas de silla en las fronteras de estos dominios accesibles desde el dominio de atracción de un determinado atractor, estas órbitas se denominan órbitas de silla accesibles [Gre87].

Aunque la frontera entre los dominios de atracción de varios atractores puede definirse de manera precisa [Par89], siempre consiste en la unión de una o más trayectorias, que en un espacio de las fases bidimensional se convierte en una curva. Cuando existen varios atractores, la frontera entre dos dominios está formada por la intersección de las trayectorias que forman la frontera de cada uno junto con algunos puntos de equilibrio que se encuentran justamente en ella. El caso más común consiste en una frontera formada por una órbita de silla junto con su variedad estable (conjunto de puntos que se aproximan a la órbita cuando  $t \rightarrow \infty$ ) [Par89].

En los casos que ha sido necesario determinar las órbitas de silla accesible desde el dominio de un atractor se ha utilizado un algoritmo [Gre87] que esquemáticamente consta de los siguientes pasos:

- Una vez calculados los atractores y sus dominios de atracción para unos valores dados de los parámetros de control, se eligen dos puntos próximos a la frontera

entre los dos dominios, p.e.,  $P_A$  que tiende al atractor  $A$ , y  $P_B$ , que tiende al atractor  $B$ .

- Se toman 64 puntos igualmente espaciados a lo largo del segmento  $P_AP_B$ , numerándolos secuencialmente.
- Se averiguan los estados estacionarios correspondientes a cada punto, determinando el mayor índice del punto que tiende al atractor  $A$  y llamándolo  $P_A$ .
- Se mueve el punto  $P_B$  una fracción  $(1/5)$  de la distancia  $P_AP_B$ , comprobando que el nuevo punto  $P_B$  tiende hacia el atractor  $B$ . En caso de que no sea así, se retrocede en pequeños pasos hasta encontrar el nuevo  $P_B$ .
- Se repite todo el proceso hasta conseguir que la distancia  $P_AP_B$  sea inferior a  $10^{-6}$ , calculando las 50 primeras secciones de Poincaré de cada punto, averiguando de esta forma el periodo de la órbita de silla accesible.

De esta manera se ha calculado la órbita de silla accesible del atractor  $B$ . Cambiando los puntos puede calcularse también la del atractor  $A$ .

Para comprobar que realmente la variedad estable de estas órbitas se encontraban a lo largo de la frontera entre los dominios, y siempre en el contexto de la aplicación de Poincaré, se ha utilizado el programa DSTOOL [Guc92] para calcularlas. También, utilizando el mismo programa, se han calculado las variedades inestables de estas órbitas (conjunto de puntos que se acercan a ella cuando  $t \rightarrow -\infty$ ). En todos los casos se ha comprobado que la variedad estable está en la frontera de los dominios y, en los fenómenos de crisis, el atractor caótico se encontraba en la dirección indicada por la variedad inestable de la órbita de silla en cuestión.

## B.5 Bifurcaciones

En general, cuando en un sistema dinámico varían sus parámetros de control pueden ocurrir cambios cualitativos en la estructura de las soluciones denominados bifurcaciones. Cuando afectan únicamente a órbitas periódicas o puntos de equilibrio, y

pueden estudiarse estudiando el sistema dinámico en las proximidades del punto u órbita en cuestión, se denominan bifurcaciones locales. Si estos cambios afectan a la estructura global de las soluciones, como es el caso de las bifurcaciones homoclinas, se le denominan bifurcaciones globales [Guc83, Wig90].

Para analizar las bifurcaciones que pueden tener lugar en un sistema dinámico resulta muy útil calcular el diagrama de bifurcación. En este diagrama se representa el estado estacionario del sistema frente a los parámetros de control [Par89, Wig90]. De esta manera resulta fácil visualizar la secuencia de bifurcaciones que el sistema experimenta.

En nuestro estudio, y a la hora de analizar las bifurcaciones que los sistemas 1.20, 1.21, 1.23 experimentan cuando se varía un parámetro de control, se han utilizado estos diagramas frecuentemente. Para calcularlos se han obtenido, para cada valor del parámetro de control, todos los posibles atractores del sistema. Seguidamente se han representado un número suficiente de secciones de Poincaré (al menos 100 por atractor) correspondientes a la variable  $X_2$  frente al parámetro de control.

Cuando se han analizado algunas bifurcaciones locales ha sido necesario averiguar qué tipo de bifurcación era. Aunque a la vista del diagrama de bifurcación en la mayoría de las ocasiones resultaba evidente, se ha utilizado el programa LOCBIF [Khi92] para confirmarlo. Asimismo, también se ha utilizado este programa para calcular los valores de los parámetros de control que daban lugar a la bifurcación (local) en los casos en que ha sido necesario.

El cálculo numérico de los valores de los parámetros de control que dan lugar a las bifurcaciones homoclinas que figura en el capítulo 2 se ha llevado a cabo mediante el programa DSTOOL [Guc92]. Para ello se han determinado los puntos fijos en el mapa de Poincaré correspondiente y sus variedades estables e inestables. Variando lentamente el parámetro de control se ha conseguido averiguar el valor crítico que hace que estas variedades sean tangentes.

## B.6 Crisis

Uno de los aspectos más importantes sobre los que se ha centrado este trabajo ha sido el estudio de una serie de fenómenos denominados crisis. En general, en una crisis, el atractor del sistema cambia bruscamente de forma cuando un parámetro de control cruza cierto valor crítico. Un atractor caótico puede desaparecer para dar lugar a otro, periódico o caótico.

En el contexto de mapas bidimensionales, cerca de los atractores caóticos siempre existen órbitas periódicas de silla, de manera que sus variedades estables e inestables influyen sobre las trayectorias que pasan por su vecindad, acercándolas a la órbita a lo largo de la variedad estable y alejándolas en la dirección de la variedad inestable. En el espacio fásico de un sistema dinámico no lineal existen gran cantidad de este tipo de órbitas, algunas incluso en el interior de los atractores caóticos, por lo que estos atractores se encontrarán en la dirección de sus variedades inestables. Si un atractor colisiona con una órbita inestable, también se producen tangencias entre las variedades estables e inestables de órbitas de este tipo (homoclinas o heteroclinas, en función de si ocurren entre las variedades del mismo punto o de distintos).

Cuando se produce una tangencia de este tipo, el atractor caótico se ve impulsado a través de la variedad inestable. Si la órbita en cuestión se encontraba en el interior del dominio de atracción del atractor caótico, éste experimenta un salto discontinuo en su longitud (crisis interior). Si por el contrario se encontraba en la frontera del dominio, el atractor caótico accede al dominio de atracción de otro atractor y desaparece (crisis de contorno), aunque se observa caos transitorio. Únicamente, como ha ocurrido varias veces en este estudio, cuando existe simetría en el sistema, los dos atractores antisimétricos se fusionan en uno solo cuando se produce la crisis. Para una exposición detallada de este tipo de fenómenos, consultar, p.e. [Gre83, Som92].

Al calcular los diagramas de bifurcación de los sistema estudiados, y siempre utilizando el mapa de Poincaré correspondiente, existen valores de los parámetros de control para los que parece que el sistema experimenta una crisis. Cuando en el texto se menciona que el sistema experimenta una crisis interior, en todos los casos se ha comprobado que, previo a la crisis, el atractor se encontraba próximo a una

órbita inestable que normalmente se originaba en una bifurcación (generalmente de silla nodo). Esta órbita se ha calculado mediante el programa LOCBIF [Khi92]. Asimismo, y después de la crisis, se ha comprobado que el atractor experimentaba un salto brusco en su longitud.

Cuando se han estudiado crisis de contorno, en todos los casos se han calculado las órbitas de silla accesibles para un valor del parámetro de control cercano y previo a la crisis, comprobando que siempre existe una muy próxima al atractor que experimenta la crisis. Después de la crisis se ha comprobado que, aunque puede observarse caos transitorio, el atractor correspondiente ha desaparecido. En todos los casos en los que se realizan afirmaciones sobre las variedades estables e inestables de estas órbitas de silla, mediante el programa DSTOOL [Guc92], que permita calcularlas, se han comprobado que son ciertas.

Para estudiar el fenómeno de caos transitorio que se detalla en el capítulo 3 resulta necesario determinar con gran exactitud el valor crítico del parámetro de control correspondiente a la crisis. Eligiendo un conjunto de valores de los parámetros de control correspondientes a un estado del sistema previo y cercano a la crisis, se han calculado 100 coordenadas pertenecientes al atractor caótico que va a experimentar este fenómeno. Variando ligeramente un parámetro de control ( $\omega$ ), y utilizando como condiciones iniciales las previamente calculadas, se ha calculado de nuevo el atractor caótico correspondiente. Utilizando valores grandes del tiempo (del orden de  $t = 2000T$ ), y repitiendo el proceso para diferentes valores del parámetro de control, se ha podido calcular el valor crítico correspondiente con gran precisión.

Con respecto a las curvas de crisis que figuran al final del capítulo 3, se ha calculado de la misma forma que en los casos descritos anteriormente. Para un valor dado de uno de los parámetros, se han buscado los valores críticos del otro parámetro. Variando ligeramente el valor del primer parámetro, se ha repetido todo el proceso, calculando los puntos que forman las curvas de crisis.

## B.7 Observaciones

Prácticamente todos los cálculos se han realizado en ordenador personal, aunque frecuentemente se han utilizado también los servicios informáticos del C.I.C.A. (Centro Informático Científico de Andalucía). Los programas se han escrito en Fortran utilizando el paquete informático FORTRAN POWERSTATION [Mic92]. Algunas rutinas, como las utilizadas para calcular los valores de funciones elípticas o generar números aleatorios, se han copiado de la referencia [Teu92].

Aunque el programa LOCBIF [Khi92] está diseñado para funcionar en un ordenador personal, y no ha aparecido ningún problema en trabajar con él, el programa DSTOOL [Guc92] está diseñado para trabajar en una estación de trabajo SUN. Gracias a la colaboración prestada por el Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, facilitando el acceso a sus equipos informáticos, ha sido posible trabajar con él.

# Conclusiones

En la presente memoria se ha llevado a cabo, mediante métodos perturbativos y simulaciones numéricas, un estudio sobre una clase de osciladores con fricción no lineal sometidos a excitaciones periódicas. A continuación se exponen detalladamente las principales conclusiones que se derivan de este trabajo.

1. Para un oscilador forzado armónicamente con fricción controlada por una función coseno se ha encontrado, mediante un método perturbativo, los valores de los parámetros de control que dan lugar a que el sistema experimente bifurcaciones subarmónicas y homoclinas. También se han comprobado numéricamente estos resultados.
2. Para el oscilador anterior se ha demostrado que, cuando la frecuencia de la excitación es baja, la cascada de bifurcaciones subarmónicas que culmina en una bifurcación homoclina puede reobtenerse mediante un modelo de fricción lineal con un coeficiente de amortiguamiento efectivo que se ha calculado. A frecuencias altas no es posible reproducir exactamente estos comportamientos mediante un modelo con fricción lineal.
3. Para un oscilador forzado armónicamente con fricción controlada por una función genérica de forma y periodo variable se ha demostrado que, para periodos grandes o pequeños de la función que controla el término de amortiguamiento, y siempre que la perturbación del sistema Hamiltoniano asociado sea suficientemente pequeña, la aparición de bifurcaciones homoclinas para unos valores dados de los parámetros de control puede reproducirse mediante un modelo con

fricción lineal y un coeficiente de fricción efectivo que se ha calculado. Mediante simulaciones numéricas se ha comprobado que, en el rango de valores de parámetros de control estudiado, esta analogía sigue siendo válida para cualquier tipo de comportamientos.

4. En el oscilador anterior, y siempre que la perturbación del sistema Hamiltoniano asociado sea suficientemente pequeña, se ha demostrado que la forma exacta de la función que controla el término de fricción no resulta ser muy relevante de cara a la aparición de bifurcaciones homoclinas. Mediante simulaciones numéricas se ha comprobado, en el rango de valores de los parámetros de control estudiados, que esta dependencia con la forma exacta del término de fricción se mantiene para cualquier tipo de comportamientos.
5. En un oscilador cuya fricción viene dada por una función del tipo coseno, se han considerado mecanismos de excitación más generales que vienen dados por funciones de periodo y forma variables. Mediante métodos perturbativos se han calculado las curvas de bifurcación homoclina en el espacio de parámetros. La dependencia de estas curvas con la forma del término de excitación resulta análoga a la encontrada en el análisis de otros fenómenos de este tipo y pueden estar relacionadas con algún tipo de propiedad inherente a una amplia clase de osciladores. Numéricamente se ha comprobado que estas curvas predicen cualitativamente la forma de las curvas de bifurcación en el espacio de parámetros que dan cuenta de la transición al caos.
6. Mediante una exhaustiva simulación numérica se han estudiado, en un rango de valores de los parámetros de control físicamente relevantes en el contexto de las uniones Josephson, y en el modelo de oscilador forzado armónicamente con fricción controlada por una función coseno, una amplia gama de fenómenos y comportamientos que el sistema puede presentar.
7. En el oscilador anterior, y aunque los resultados obtenidos mediante métodos perturbativos indican que en el rango de valores estudiado el sistema podría modelarse mediante un oscilador con fricción lineal, se han realizado una serie de

simulaciones numéricas comprobando que, aunque muchos de estos fenómenos pueden reobtenerse en un modelo con fricción constante, algunos de ellos, sobre todo los relacionados con las crisis, indican que los efectos del término no lineal en la fricción resultan importantes.

8. En el anterior modelo, y también mediante simulaciones numéricas, se han estudiado una serie de fenómenos que involucran simultáneamente a dos parámetros de control. Se ha encontrado un punto en el espacio de parámetros en el que el sistema experimenta un fenómeno de doble crisis, produciéndose una doble transferencia de crisis entre dos atractores distintos.

# Bibliografía

- [Abra72] ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications: New York.
- [Amb96] AMBIKA, G. (1996). *Phys. Lett. A*. **221** (5) 323. Linear scaling relations near onset of chaos for the Josephson junction model.
- [Ame49] AMERIO, L. (1949). *Ann. Math.* **4** (30) 75. Determinazione della condizioni di stabilita per gli integrali di una equazione intetressante l'elettrotecnica.
- [And66] ANDRONOV, A.A. VITT, E.A. AND KHAINEN, S.E. (1966). *Theory of Oscillators*. Pergamon Press: Oxford.
- [Arn83] ARNOLD, V.I. (1983). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [Aub83] AUBRY, S. AND LEDAERON, L. (1983). *Physica*. **8** 381. The discrete Frenkel-Koutorova model and its extensions.
- [Aur73] AURACHER, F., RICHRADS, P.L. AND ROCHLIN, G.I. (1973). *Phys. Rev. B*. **8** (9) 4183. Observability of quasiparticle-pair interference in superconducting weak links.
- [Bake90] BAKER, G.L. AND GOLLUB, J.P. (1990). *Chaotic Dynamics, an Introduction*. Cambridge University Press: Cambridge.
- [Bar82] BARONE, A. AND PATERNO, G. (1982). *Physics and Applications of the Josephson Effect*. Wiley: New York.

- [Bart86] BARTUCELLI, M. CHRISTIANSEN, P.L. PEDERSEN, N.F. AND SOERENSEN M.P. (1986). *Phys. Rev. B* **33** 4686. Prediction of chaos in a Josephson junction by the Melnikov-function technique.
- [Bel77] BELYNKH, V.N., PEDERSEN, N.F. AND SOERENSEN, O.H. (1977). *Phys. Rev. B.* **16** 4853. Shunted Josephson-junction model I-The autonomous case and II. The non-autonomous case.
- [Ben82] BEN-JACOB, E. GOLDHIMSCH, J. IMRY, Y. AND FISHMAN, S. (1982). *Phys. Rev. Lett.* **49** 599. Intermittent chaos in Josephson junctions.
- [Bene88] BENEDICKS, M. AND CARLESON, L.(1988). *Annals of Mathematics.* **133** (1) 73. The dynamics of the Henon map.
- [Bin84] BINDSLEV, J.H. AND LINDELOF, P.E. (1984). *Rev Mod. Phys.* **56** (3) 431. Static and dynamic interactions between Josephson junctions.
- [Bla92] BLACKBURN, J.A. SMITH, H.J.T. AND EDMUNDSON, D.E. (1990). *Phys. Rev. A.* **45** 593. Transient chaos in a parametrically damped pendulum.
- [Bra91] Y. BRAYMAN, I. GOLDHIRSCH (1991). *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545. Taming chaotic dynamics with periodic perturbations.
- [Cha93] R. CHACÓN, J. D. BEJARANO (1993). *Phys. Rev. Lett.* **71** 3103. Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations.
- [Cha95] CHACÓN, R. (1995) *Caos en Osciladores y Ecuaciones de Onda No Lineales bajo Perturbaciones Periódicas Generalizadas*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.
- [Cha95b] CHACÓN, R. (1995). *Phys. Rev. E.* **51** 765. Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbations.
- [Gal93] GALLAS, J.A.C., GREBOGI, C. YORKE, J.A. (1993). *Phys. Rev. Lett.* **71** 1359. Vertices in parameter space. Double crisis which destroy chaotic attractors.

- [Gra80] GRADSHTEYN, I.S. AND RYZHIK, I.M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press: New York.
- [Gre83] GREBOGI, C., OTT, E., YORKE, J.A. (1983). *Physica D.* **7** 181. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos.
- [Gre83b] GREBOGI, C. OTT, E. AND YORKE, J.A. (1983). *Phys. Rev. Lett.* **50** 935. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation.
- [Gre83c] GREBOGI, C. McDONALD, S.W. OTT, E. AND YORKE, J.A (1983). *Phys. Lett. A.* **99** 415. Final state sensitivity: an obstruction to predictability.
- [Gre86] GREBOGI, C. OTT, E. AND YORKE, J.A (1986). *Phys. Rev. Lett.* **57** 1284. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems.
- [Gre87] GREBOGI, C. OTT, E. AND YORKE, J.A. (1987). *Physica D.* **24** 243. Basin boundary metamorphoses: changes in accesible boundary orbits.
- [Gre87b] C. GREBOGI, E. OTT, F. ROMEIRAS, J.A. YORKE (1987). *Phys. Rev. A.* **36** 5365. Critical exponents for crisis-induced intermittency.
- [Gree83] GREENSPAN, B.D. AND HOLMES, P.J. (1983) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. G. Barenblatt, G. Iooss and D.D. Joseph, eds. Pitman: London.
- [Gree84] GREENSPAN, B.D. AND HOLMES, P.J. (1984). *SIAM J. Math. Anal.* **15** 69. Repeated resonance and homoclinic bifurcations in a periodically forced family of oscillators.
- [Gru81] GRÜNER, G. ZAWADOWSKI, A. AND CHAIKIN, P.M. (1981). *Phys. Rev. Lett.* **46** 511. Nonlinear conductivity and noise due to charge-density-wave depinning in NbSe<sub>3</sub>.
- [Gru85] GRÜNER, G. AND ZETTL, A. (1985). *Phys. Rep.* **119** (3) 119. CDW conduction: A novel collective transport phenomenon in solids.

- [Guc83] GUCKENHEIMER, J. AND HOLMES, P.J.(1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [Guc92] GUCKENHEIMER, J. MYERS, M.R. WICKLIN, F.J. AND WORFOLK, P.A. (1992). *DSTOOL: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface*. Center for Applied Mathematics. Cornell University: Ithaca NY.
- [Gwi85] GWINN, E.G. AND WESTERVELT, R.M. (1985). *Phys. Rev. Lett.* **54** 1613. Intermittent chaos and low-frequency noise in the driven damped pendulum.
- [Hol81] HOLMES, P.J. AND MARSDEN, J.E. (1981). *Arch. Rat. Mech. Anal.* **76** 135. A partial differential equation with infinitely periodic orbits: chaotic oscillations of a forced beam.
- [Hol82] HOLMES, P.J. MARSDEN, J.E. (1982). *Commun. Math. Phys.* **82** 523. Horseshoes in perturbations of Hamiltonians with two degrees of freedom.
- [Hub79] HUBERMAN, B.A. AND CRUTCHFIELD, J.P. (1979). *Phys. Rev. Lett.* **43** 1743. Chaotic states of anharmonic systems in periodic fields.
- [Hub80] HUBERMAN, B.A. CRUTCHFIELD, J.R. AND PACKARD, N.H. (1980). *Appl. Phys. Lett.* **37** 750. Noise phenomena in Josephson junctions.
- [Hum82] HUMIERES, D.D. BEASLEY, M.R. HUBERMAN, B.H. AND LIBCHABER, A. (1982). *Phys. Rev. A.* **26** 3483. Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum.
- [Ian85] IANSITI, M. QING HU, WESTERVELT, R.M. AND TINKHAM, M. (1985). *Phys. Rev. Lett.* **55** 747. Noise and chaos in a fractal basin boundary regime a Josephson junction.
- [Jac91] JACKSON, E.A. (1991). *Perspectives of Nonlinear Dynamics. (Vol 1 y 2)*. Cambridge University Press: Cambridge.

- [Jos62] JOSEPHSON, B.D. (1962). *Phys. Lett.* **1** 251. Possible new effects in superconductive tunneling.
- [Jos64] JOSEPHSON, B.D. (1964). *Rev. Mod. Phys.* **36** 216. Coupled superconductors.
- [Jos65] JOSEPHSON, B.D. (1965). *Adv. Phys.* **14** 419. Supercurrents through barriers.
- [Kee85] KEER, W.C. WILLIAMS, M.B. BISHOP, A.R. FESSER, K. LOMDAHL, P.S. AND TRULLIGER, S.E. (1985). *Z. Phys. B.* **59** 103. Symmetry and chaos in the motion of the damped driven pendulum.
- [Khi92] Khibnik, A. Kuznetsov, Y. Levitin, V. AND Nikolaev, E. (1992). *LOCBIF. Interactive Local BIFurcation analyzer*. Copyright by the authors.
- [Kle90] KLECZKA, M. KREUZER, E. AND WILMERS, C. (1990). *Nonlinear Dynamics in Engineering Systems*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [Koc85] KOCH, B.P. AND LEVEN, R.W. (1985). *Physica D.* **16** 1. Subharmonic and homoclinic bifurcations in a parametrically forced pendulum.
- [Kop82] KOPELL, N. AND WASHBURN, R. (1982). *IEEE Trans. Circuits Syst.* **30** 738. Chaotic motions in the two degree-of-freedom swing equations.
- [Lan74] LANGEBERG, D.N. (1974). *Rev. Phys. Appl.* **9** 35. Physical interpretation of the  $\cos\varphi$  term and implications for detectors.
- [Liu90] LIU, Z.R. (1990). *Phys. Lett. A.* **143** 213. Second order Melnikov function and its application.
- [Mac83] MACDONALD, A.H. AND PLISHKE, M. (1983). *Phys. Rev. B.* **27** 201. Study of the driven damped pendulum: Application to Josephson junctions and charge-density-wave systems.
- [Mat82] MATHER, J. *Topology.* **21** 457. Existence of quasi-periodic orbits for twist homomorphisms.

- [McC68] McCUMBER, D.E. (1968). *J. Appl. Phys.* **39** 3113. Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions.
- [McD85] McDONALD, S.W. GREBOGI, C. OTT, E. AND YORKE, J.A. (1985). *Physica D.* **17** 1985. Fractal basin boundaries.
- [Mel63] MELNIKOV, V.K.(1963). *Transactions of the Moscow Mathematical Society.* **12** 1. On the stability of the center for time periodic perturbations.
- [Mic92] MICROSOFT CORPORATION (1992). *Microsoft FORTRAN PowerStation. Version 1.0.*
- [Moo87] MOON, F.C. (1987). *Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers.* Wiley: New York.
- [Mora93] MORA, L. AND VIANA, M. (1993). *Acta. Math.* **171** 1. Abundance of strange attractors.
- [Mos73] MOSER, J.K. (1973). *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Study 77. Princeton University Press: Princeton.
- [Oct84] OCTAVIO, M. (1984). *Phys. Rev. B.* **29** 1231. Bifurcations, chaotic and intermittent solutions in the rf-biased Josephson junction.
- [Ott90] E. OTT, C. GREBOGI, J.A. YORKE (1990). *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196. Controlling chaos.
- [Pal91] PALMERO AND F. ROMERO ROMERO, F. (1991). *Phys. Lett. A.* **160** 553. Interior crises and symmetries in a driven Josephson junction.
- [Pal93] PALMERO AND F. ROMERO ROMERO, F. (1993). *Phys. Lett. A.* **179** 337. Crisis and transient chaos in a driven Josephson junction.
- [Pal95] PALMERO, F. ROMERO ROMERO, F. ROMERO , J.L AND ARCHILLA, J.F.R. (1995). *Phys. Lett. A.* **201** 186. Intersection of crisis loci in a driven nonlinearly damped oscillator.

- [Par89] T.S. PARKER, L.O. CHUA (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [Ped72] PEDERSEN, N.F., FINNEGAN, T.F., LANGENBERG (1972). *Phys. Rev. B.* **6** 4151. Magnetic field dependence and Q of the Josephson plasma resonance.
- [Ped73] PEDERSEN, N.F. AND SAERMARK, K. (1973). *Physica.* **69** 572. Analytical solution for a Josephson-junction model with capacitance.
- [Raj92] R. ROY, T.W. MURPHY JR, T.D. MAIER, Z. GILLS (1992). *Phys. Rev. Lett.* **68** 1259. Dynamic control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system.
- [Ric81] RICE, T.M. WHITEHOUSE, S. AND LITTLEWOOD, P. (1981). *Phys. Rev. B.* **24** 2751. Impurity pinning of discommensurations in charge density waves.
- [Rol93] R.W. ROLLINS, P. PARMANANDA, P. SHERARD (1993). *Phys. Rev. E.* **47** 780. Controlling chaos in highly dissipative systems. A simple recursive algorithm.
- [Ros78] ROSE-INNES, A.C. AND RHODERICH, E.H. (1978) *Introduction to Superconductivity*. Pergamon Press: Oxford.
- [Rud76] RUDIN, W. (1976). *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill. México.
- [Sam85] SALAM, F.M.A. AND SASTRY, S.S. (1985). *IEEE Trans. Circuits Syst.* **32** 784. Dynamics of the forced Josephson junction circuit: the region of chaos.
- [Soe88] SOERENSEN, DAVIDSON, A. PEDERSEN, N.F. AND PAGANO, S. (1988). *Phys. Rev. B.* **38** 5384. Crisis in a driven Josephson junction studied by cell mapping.
- [Som92] SOMMERER, J.C. AND GREBOGI, C. (1992). *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **2** (2) 383. Determination of crisis parameter values by direct observation of manifold tangencies.

- [Teu92] TEUKOLSKY, S.A. VETTERLING, W.T. AND FLANNERY B.P. (1992) *Numerical Recipes in FORTRAN. The art of scientific computing. Second Edition, with a separately available computer disk.* Cambridge University Press: Cambridge.
- [Tho86] THOMPSON, J.M.T. AND STEWART H.B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Wiley: New York.
- [Ton87] TONGUE, B.H. (1987). *Physica D.* **28** 401. On obtaining global nonlinear system characteristics through interpolated cell mapping.
- [Tri31] TRICOMI, F. *C.R. Acad. Sci. Paris.* **193** 635. Sur une équation différentielle de l'électrotechnique.
- [Ued90] Y. UEDA, S. YOSHIDA, H.B. STEWART, J.M.T. THOMPSON (1990). *Philos. Trans. R. Soc. A.* **332** 169. Basin explosions and escape phenomena in the twin-well Duffing oscillator: compound global bifurcations organizing behaviour.
- [Wig90] WIGGINS, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [Yag96] YAGASAKI, K. (1996). *Comunicación privada.* Bifurcations and chaos in forced oscillations: a refinement of the Melnikov method.
- [Yag96b] YAGASAKI, K. (1996). *SIAM J. Appl. Math.* **56** (6) 233. The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations.
- [Yao86] YAO, Y. (1986). *Phys. Lett. A.* **118** 59. Josephson junction circuit model and its global bifurcation diagram.
- [Zet82] ZETTL, A. AND GRÜNER, G. (1982). *Phys. Rev. B.* **25** 2081. Charge-density-wave in TaS<sub>3</sub>.

FAUSTINO PALMERO ACEBEDO

Bifurcaciones y Caos en Sistemas no Autonomos  
descritos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden.  
Estudio de una clase de osciladores con amortiguamiento  
no lineal bajo excitaciones periódicas.

APTO COM LAUDE (POR UNANIMIDAD)  
28 Mayo 97




R. Chl

El Vocal,  
  
El Doctorado,



