

B. 6974
X

LBS 1004885

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
SECRETARIA

5-9-86

ENTRADA N.º 3700

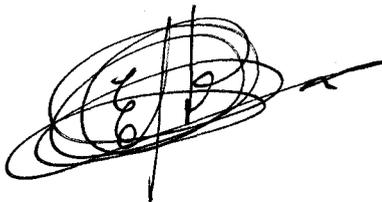
ANALISIS NUMERICO DEL PROBLEMA

INCOMPRESIBLE DE NAVIER-STOKES:

METODOS DE TIPO DIRECCIONES ALTERNADAS.

V.ºB.º

El DIRECTOR DEL TRABAJO



Fdo. Enrique Fernández Cara

Memoria que presenta
Mercedes Marín Beltrán
para optar al grado de
Doctor en Ciencias
Matemáticas
Sevilla, Septiembre 1986.



Fdo. Mercedes Marín Beltrán

Mi agradecimiento

Al Prof. Dr. D. Antonio Valle Sánchez por iniciarme en mi dedicación a la investigación científica.

Al Prof. Dr. D. Enrique Fernández Cara, director de este trabajo, por la eficaz orientación y colaboración que en todo momento me ha prestado.

A todos mis compañeros de la Cátedra de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de Córdoba y en especial al Prof. Dr. D. José Luis Cruz Soto director de la misma, por cuanto contribuyeron a crear el ambiente necesario para la realización de esta memoria.

Mi más sincera gratitud

A mis padres
y
a Manuel Jesús

INDICE

PROLOGO

INTRODUCCION

0.1 Descripción física del problema.....	1
0.2 Resultados teóricos de existencia y unicidad..	17
0.3 Discretización en la variable tiempo.....	24
0.4 El método de las direcciones alternadas.....	33
0.5 Discretización en espacio.....	39
0.6 Resultados numéricos.....	47

CAPITULO I

1.1 Descripción de la discretización en tiempo....	51
1.2 Descripción de la aproximación en espacio.....	60

CAPITULO II

2.1 Resultados de estabilidad y convergencia para ALG 1.....	79
2.2 Demostración del Teorema 2.1.....	84

CAPITULO III

3.1 Resultados de estabilidad y convergencia para ALG 2.....	105
3.2 Demostración del teorema 3.1.....	107

CAPITULO IV

4.1 Resolución efectiva de los problemas.....	121
4.1.1 Resolución de los problemas quasi-lineales.....	121
4.1.2 Resolución de los problemas de tipo quasi-Stokes.....	129
4.1.3 Resolución de los sistemas lineales.....	131

4.2 Otras condiciones de contorno.....136

4.3 El problema de diseño óptimo.....141

REFERENCIAS.....144

PROLOGO. RESUMEN DEL TRABAJO

La descripción matemática del estado de un fluido en movimiento, en una región Ω de \mathbb{R}^n ($n=2$ ó 3) durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, $T > 0$, se realiza por medio de una función que determina la distribución del campo de velocidades del mismo, $u(x, t)$, y de dos cualesquiera de las variables termodinámicas asociadas, por ejemplo la presión $p(x, t)$ y la densidad $\rho(x, t)$. Las demás variables termodinámicas quedan determinadas a partir de éstas mediante la ecuación de estado de la materia. Dicho de otra forma, conocidas las n componentes de la velocidad u , la presión p y la densidad ρ tenemos determinado completamente el comportamiento de un fluido en movimiento.

Las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos se deducen de las distintas leyes de conservación para la masa, la cantidad de movimiento y la energía. La primera de ellas, también llamada ecuación de continuidad, se escribe

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0$$

Si suponemos que el fluido es ideal, es decir, si las partículas del fluido están libres de rozamiento interno, y en presencia de un campo externo de fuerzas $f(x, t)$ actuando sobre el mismo, llegamos a la ecuación de movimiento (ó de equilibrio de momentos), deducida por L. Euler en 1755

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = - \frac{\nabla p}{\rho} + f$$

Como es bien sabido, para determinar la ó las soluciones de (1)-(2) que nos interesan, es preciso asociar a estas ecuaciones alguna ó algunas condiciones de contorno sobre la frontera $\partial\Omega$ de Ω . En el caso de un fluido ideal, éstas condiciones deben traducir el hecho de que el fluido no puede atravesar ninguna pared sólida. Cuando el problema corresponde al movimiento de un fluido interior a una región en reposo, obtenemos

$$(3) \quad u \cdot \vec{n} |_{\partial\Omega} = 0 ,$$

donde $\vec{n} = \vec{n}(x)$ es el vector normal unitario a Ω en los puntos $x \in \partial\Omega$. En el caso general de una pared en movimiento $u \cdot \vec{n}$ debe naturalmente coincidir con la componente correspondiente de la velocidad de la pared.

Para llegar a una descripción completa del movimiento del fluido, necesitamos una ecuación más, complementaria de (1)-(2). Dicha ecuación se obtiene a partir del Principio de Conservación de la Energía que, escrito de forma adecuada, establece una nueva relación entre las variables ρ , u y p . En este trabajo, nos centraremos en un tipo particular de fluidos, llamados incompresibles, que son los que verifican la relación:

$$(4) \quad \text{div } u = 0 .$$

Así, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido incompresible son:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = - \frac{\nabla p}{\rho} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \text{div } u = 0 \end{array} \right.$$

Naturalmente, hemos de completar el sistema (5) con condiciones iniciales para u y ρ (salvo si las soluciones son estacionarias), y con la condición de contorno (3).

Durante mucho tiempo, la Mecánica de Fluidos se redujo al análisis de fluidos ideales, cuya característica esencial consiste en la hipótesis que en ellos se hace de ausencia de rozamiento interno entre las partículas ó viscosidad. Se encontró una gran variedad de ellos, resultando aceptable como técnica de estudio la teoría de funciones de variable compleja, introducida en Mecánica de Fluidos por Helmholtz y Kirchhoff. Sin embargo, la famosa paradoja de Euler-D'Alembert, de acuerdo con la cual la resultante de las fuerzas

que actúan sobre un obstáculo colocado en un fluido ideal en la dirección principal de la corriente es igual a cero, indica que la teoría de fluidos ideales adolece de ciertos defectos y no es conveniente en la descripción de determinadas situaciones. El eliminar ésta y otra serie de paradojas trajo consigo la introducción de un modelo matemático de un fluido viscoso (con rozamiento interno entre las partículas), para cuya modelización (2) está sustituida por la ecuación de Navier-Stokes:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u) + \mu \Delta u + \rho f .$$

Aquí, μ es un parámetro positivo (la viscosidad dinámica del fluido) y $\lambda = 2\mu/3$. Generalmente, sólo depende de la temperatura.

Felizmente, este modelo constituye una salida a todos los absurdos acumulados en la teoría de fluidos ideales.

En el caso de un fluido viscoso, se produce un cambio fundamental en el comportamiento de las partículas próximas a una pared sólida. Efectivamente, la disipación de energía debida al rozamiento de las partículas, hace que éstas se adhieran a la pared, verificándose en consecuencia la así llamada condición de no deslizamiento

$$(7) \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega .$$

Obsérvese que (7) exige la anulación de las componentes normal y tangenciales de la velocidad, mientras que para un fluido ideal, sólo se anulaba la componente normal (en el caso general de una superficie móvil, la velocidad ha de coincidir naturalmente con la de dicha superficie).

En este trabajo, estudiaremos desde un punto de vista numérico las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, incompresible (i.e. $\operatorname{div} u = 0$), isotermo (i.e. $\mu = \text{cte.}$) y homogéneo (i.e. con densidad constante $\rho = \rho_0$) y supondremos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n con $n=2$ ó 3 , de frontera (suficientemente) regular.

En el Parágrafo 0.2, recordaremos algunos resultados conocidos de existencia, unicidad y regularidad de solución, tanto para el problema estacionario como para el problema no estacionario. Se trata de resultados relativos a soluciones de los problemas generalizados correspondientes que, bajo ciertas hipótesis de regularidad de los datos, se convierten en soluciones clásicas.

El problema estacionario fue investigado primero por Lichtenstein y Odquist y, posteriormente por Leray y Schauder. El resultado que presentamos es una consecuencia típica del método de compacidad y nos dice que, para f suficientemente regular, el problema posee al menos una solución, siendo ésta única si $\nu = \mu/\rho_0$ es suficientemente grande.

La no unicidad de solución del problema estacionario ha sido investigada en los últimos años, debiéndose algunos resultados a P.H. Rabinowitz [18] y W. Velte [20], [21] entre otros.

Con respecto al problema dependiente del tiempo, se sabe, gracias a los trabajos de J. Leray [13-15] y E. Hopf [12], que si los datos son suficientemente regulares, existe al menos una solución, siendo ésta única si $n = 2$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes juegan un papel muy importante en numerosos campos de la Ciencia y la Ingeniería. Por ello, generalmente, se necesita una descripción no sólo cualitativa de sus soluciones sino también cuantitativa. Debido a la presencia de términos no lineales $(u \cdot \nabla)u$, su resolución presenta grandes dificultades y la solución exacta sólo se ha obtenido en un reducido número de casos. Por ejemplo, en los casos estacionarios siguientes:

- (1) Movimiento de un fluido viscoso engendrado por la rotación de un disco plano inmerso en el mismo, que gira alrededor de su eje. (T. Kármán, 1921).
- (2) Movimiento de un fluido entre dos paredes planas que forman un ángulo entre ellas. (G. Hamel, 1916).

(3) Movimiento de un "jet" ó chorro que sale de un tubo de pequeño radio situado en un medio ilimitado ocupado en su totalidad por el mismo fluido. (L. Landau, 1943).

Así pues, como la integración exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes no es viable en general, los datos necesarios en las Ciencias de la Ingeniería sólo pueden obtenerse mediante cálculo numérico. La resolución de dichas ecuaciones ha sido el objetivo perseguido por muchos autores en los últimos tiempos (para una lista de referencias, cf. por ejemplo [10, p. 244]).

Se necesitan desarrollar algoritmos de discretización apropiados, que conjuguen rapidez de cálculo y ahorro de memoria, pero hay que tener en cuenta otra dificultad y es que las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, en muchas condiciones realistas, son altamente oscilatorias ("comportamiento caótico") por lo que se corre el riesgo de obtener una información inútil si se desea resolverlas con excesiva precisión. Este comportamiento caótico (ó turbulento), sólo puede ser descrito parcialmente y ha motivado recientemente un análisis exhaustivo, basado en técnicas estadísticas, en técnicas de perturbaciones singulares ó en otras (cf. por ejemplo [16]).

La aproximación numérica del problema de evolución de Navier-Stokes se realiza en dos etapas; primero se discretiza en la variable t y, posteriormente, se realiza una aproximación en las variables espaciales.

Para llevar a cabo la aproximación en tiempo existen muchos esquemas clásicos y naturales, algunos de los cuales están expuestos en el Parágrafo 0.3.

Los esquemas descritos en el Capítulo I, se basan en un método de tipo direcciones alternadas muy parecido a los métodos de paso fraccionario (referencias básicas son Yanenko [21] y Marchonk [16]). Actualmente, se han usado métodos de esta clase para resolver multitud de problemas evolutivos; en particular, en relación con las ecuaciones de N-S,

han sido desarrollados por Chorin [1-4] , Fortin [9], Témam [19] y Glowinski [10]. En concreto, los esquemas ALG 1 y ALG 2 descritos en el Parágrafo 1.1, son una adaptación de otros dados por Glowinski en [11], cuyas propiedades de convergencia no habían sido estudiadas hasta el momento pero que han sido implementados para aplicaciones industriales, habiéndose obtenido muy buenos resultados numéricos (Parágrafo 0.6).

El método de direcciones alternadas utilizado, permite separar las dos dificultades fundamentales que aparecen ligadas al tratamiento numérico del problema:

- i) La presencia del término no lineal $(u \cdot \nabla)u$ que impide la resolución directa del problema discretizado en tiempo,
- ii) La condición de incompresibilidad $\text{div } u = 0$, que "liga" las distintas componentes de la velocidad;

de tal forma, al final quedará por resolver un número finito de

- a) Problemas elípticos lineales, donde permanece la condición $\text{div } u = 0$,
- b) Problemas elípticos quasi-lineales, donde la incógnita queda libre de la condición de incompresibilidad.

En el Parágrafo 1.2 se describen las aproximaciones en espacio de dichos esquemas, considerando una aproximación externa de Hilbert del espacio $H_0^1(\Omega)^n$. Posteriormente se dan varios ejemplos de aproximaciones en el sentido de las diferencias y elementos finitos.

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido la obtención de propiedades de estabilidad y convergencia para los dos esquemas descritos, ALG 1 y ALG 2 (Capítulos II y III). Con objeto de lograr estas propiedades, ha sido necesario modificar ligeramente los esquemas originales,

debidos a Glowinski, sobre todo en lo que respecta al tratamiento del término no lineal. De esta manera, usando un método de demostración del tipo empleado por Témam en [19] para esquemas más simples, hemos conseguido demostrar que, bajo ciertas hipótesis de consistencia verificadas por la aproximación en espacio, ambos esquemas son (al menos) condicionalmente estables. Esto es, si los pasos de discretización en espacio y tiempo poseen una cierta relación entre sí, entonces los algoritmos producen soluciones aproximadas que convergen (en un cierto sentido) a la solución del problema de Navier-Stokes. La etapa más compleja de la demostración prueba que, junto con otras hipótesis adicionales, en el caso de $n=2$, se obtienen ciertas propiedades de convergencia de carácter "fuerte".

De los dos esquemas, ALG 1, con dos pasos intermedios, es más simple que ALG 2 (de tres pasos intermedios), pero posee un error de truncamiento de menor orden. Si bien, en la práctica, ambos resultan aproximadamente igual de costosos, pues la mayor parte del tiempo de cálculo se emplea en la resolución del problema quasi-lineal, y éste aparece una sola vez en cada etapa.

Los resultados principales de este trabajo, contenidos en los Capítulos II y III, se basan en los que aparecen en las referencias [5-7]. Algunas experiencias numéricas que ilustran las mencionadas propiedades de convergencia, pueden encontrarse en [8].

El Capítulo IV comienza con la descripción del método utilizado para la resolución efectiva de los problemas lineales y quasi-lineales obtenidos después de discretizar. Para los problemas quasi-lineales, se utiliza un método de tipo gradiente conjugado tras reformular el problema en el sentido de los mínimos cuadrados. Los problemas lineales se resuelven utilizando un método iterado del tipo de Uzawa. Por último, recordamos que los problemas de tipo Dirichlet obtenidos en ambos casos, dan lugar, tras la discretización en espacio, a sistemas lineales que pueden resolverse mediante métodos directos como por ejemplo el método de Cholesky.

En un segundo apartado, se comenta el problema relativo a condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas y de tipo Fourier, que corresponden al movimiento de un fluido alrededor de un obstáculo y/o en un canal.

El Capítulo IV finaliza con una aplicación tecnológica importante, ligada a la determinación de perfiles aerodinámicos (airfoils) de carácter óptimo: problema de control geométrico con la ecuación de Navier-Stokes como ecuación de estado.

REFERENCIAS.-

- | 1 | CHORIN, A.J. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problem". J. Comput. Phy. 2, 12-26 (1967).

- | 2 | CHORIN, A.J. "Numerical solution of incompressible flow problems" en Studies in Numerical Analysis, 2, 64-71 (1968).

- | 3 | CHORIN, A. J. "On the convergence and approximation of discrete approximation to the Navier-Stokes equations" Math. Comput. 23, 341-353 (1968).

- | 4 | CHORIN, A.J. "Numerical study of slightly viscous flow" J. Fluid Mech. 57, 785-796, (1973).

- | 5 | FERNANDEZ-CARA, E. y MARIN, M. "The convergence of a numerical method of solution of the Navier-Stokes equations". International Symposium on Numerical Analysis, Madrid, Sept. (1985).

- | 6 | FERNANDEZ-CARA, E. y MARIN, M. "Análisis numérico de varios algoritmos para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes". II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, Barcelona, Junio (1986).

- | 7 | FERNANDEZ-CARA, E. y MARIN, M. "The convergence of two numerical schemes for the Navier-Stokes equations". Pendiente de publicación.

- | 8 | FERNANDEZ-CARA, E. y MARIN, M. Revista Internacional sobre Métodos de Cálculo y Diseño en Ingeniería, aparecerá.

- | 9 | FORTIN, M. "Approximation d'un opérateur de projection et application à un schéma de résolution numérique des équations de Navier-Stokes" Thèse de 3ème cycle, Université Paris-Sud, Orsay (1970).

- | 10| GLOWINSKI, R. "Numerical methods for nonlinear variational problem" 2^a Ed. Springer-Verlag (1984).

- | 11| GLOWINSKI, R., MANTEL, B., PERIAUX, J. y PIRONNEAU, O. "A finite element approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Functional least squares methods of solution". Computer Methods in Fluids. K. Morgan, C. Taylor y A. Brebbia eds. p. 84-133. Pentech Press, Londres, Inglaterra (1980).

- | 12| HOPF, E. "Über die Anfangswertanfgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen". Math. Nachr. 4, 213-231 (1951).

- | 13| LERAY, J. "Etude de diverses équations intégrales non-linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique". J. Math. Pures Appl. 12, 1-82 (1933).

- | 14| LERAY, J. "Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois". J. Math. Pures Appl. 13, 331-418 (1934).

- | 15| LERAY, J. "Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace". Acta Math. , 63, 193-248 (1934).

- | 16| MACLAURIN, D., PAPANICOLAU, G. Y PIRONNEAU O. "Simulation numérique de la turbulence par homogénéisation des structures de sous-maillages". Rapport INRIA 185 (1983).

- | 17| MARCHOUK, G.I. "Methods of numerical mathematics". Springer, New-York (1975).

- | 18| RABINOWITZ, P. H. "Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem". Arch. Rat. Mech. Anal. 29, 32-57 (1968).

- | 19| TEMAM, R. "Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations". 2^a Ed. North-Holland, Amsterdam (1977).

- |20| VELTE, W. "Stabilitätsverhalten und verzweigung stationärer lösungen der Navier-Stokesschen gleichungen". Arch. Rat. Mech. Anal. 16, 97-125 (1964).
- |21| VELTE, W. "Stabilitäts und verzweigung stationärer lösungen der Navier-Stokesschen gleichungen beim Taylor problem". Arch. Rat. Mech. Anal. 22, 1-14 (1966).
- |22| YANENKO, N. N. "The methods of fractional steps". Springer, New-York, Heidelberg, Berlin (1971).

0.- INTRODUCCION.

0.1. DESCRIPCION FISICA DEL PROBLEMA.

Supongamos que un fluido se mueve en una región Ω de \mathbb{R}^n durante un cierto intervalo de tiempo $[0, T]$, $T > 0$. Aquí, $n=2$ ó 3 .

Las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos describen el comportamiento del mismo y se basan en las llamadas Hipótesis del Continuo, que dicen:

1.- Para todo $t \in [0, T]$, existe una función vectorial $u(\cdot, t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamada campo de velocidades en el tiempo t con la propiedad de que toda partícula inicialmente situada en un punto $x \in \Omega$ describe la curva $y = \psi(x, t)$ donde ψ es solución del problema de Cauchy

$$(0.1) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = u(\psi, t) , t \in [0, T] \\ \psi(x, 0) = x \end{cases}$$

Supondremos u , al menos, lo suficientemente regular para que este problema tenga solución única. La función $\psi_t : \Omega \rightarrow \Omega$, definida por $\psi_t(x) = \psi(x, t)$ $x \in \Omega$, llamada campo de flujo en el instante t , es un difeomorfismo.

2.- Para todo $t \in [0, T]$, existe una función escalar $\rho(\cdot, t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ llamada densidad del fluido verificando:

$$\rho(x, t) > 0 \quad x \in \Omega$$

Si W es un conjunto medible contenido en Ω , tenemos:

$$(0.2) \quad m(W, t) = \int_W \rho(x, t) dx$$

donde $m(W, t)$ es la masa que ocupa el fluido en el tiempo t .

A continuación, deduciremos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que deben satisfacer u y ρ .

La primera relación es consecuencia del Principio local de conservación de la masa que dice:

"Sea W una bola incluida en Ω ; llamaremos W_t al conjunto

$$W_t = \psi_t(W) \equiv \psi(W, t);$$

o sea: W_t es la región de Ω que ocupan las partículas que inicialmente estaban en W en el tiempo t .

Consideremos la función

$$(0.3) \quad t \in [0, T] \rightarrow m(W_t, t) = \int_{W_t} \rho(y, t) dy;$$

el Principio afirma que esta función es constante."

En otras palabras, la masa asociada a las partículas permanece invariante a lo largo del tiempo.

Supondremos ρ suficientemente regular. Así, si se cumple el Principio de conservación de la masa, tendremos:

$$(0.4) \quad \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(y, t) dy = 0$$

A partir de aquí obtenemos la Ecuación de continuidad. Para ello, tomando

$$J(x, t) = \det \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x, t) \right\}$$

y aplicando (0.1), resulta $J(x, 0) = \det(\text{Id.}) = 1$; supongamos T lo suficientemente pequeño para que $J(x, t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

Veamos que $\forall t \in [0, T]$ se verifica:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\psi(x, t), t) J(x, t)$$

$$= \operatorname{div} u(\psi(x, t), t) \cdot J(x, t).$$

En efecto, por ejemplo para $n=3$,

$$\frac{\partial}{\partial t} J(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} (\psi(x, t), t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i},$$

obtenemos, como queríamos, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \cdot J(x, t) \\ &= \operatorname{div} u \cdot J(x, t) \equiv (\nabla \cdot u) J(x, t) \end{aligned}$$

Hagamos ahora en (0.4) $y = \psi(x, t)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\int_W \rho(\psi(x, t), t) \cdot J(x, t) dx \right] \\ &= \int_W \left\{ \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\psi(x, t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\psi(x, t), t) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right] J(x, t) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{div} u(\psi(x, t), t) \cdot J(x, t) \cdot \rho(\psi(x, t), t) \right\} dx \\ &= \int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(y) \cdot u_i(y) + \rho(y) \cdot \operatorname{div} u(y) \right] J(x, t) dx \\ &= \int_{W_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right] dy ; \end{aligned}$$

en esta última igualdad, se ha deshecho el cambio de variable y hemos tenido en cuenta que

$$\nabla \rho \cdot u + \rho \operatorname{div} u = \operatorname{div}(\rho u)$$

Hemos obtenido pues que

$$\int_{W_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right] dy = 0 \quad \forall W_t$$

de donde se deduce la ecuación de continuidad:

$$(0.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot u) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T]$$

La ecuación (0.5) puede también escribirse en la forma

$$(0.5') \quad \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_W \operatorname{div}(\rho u) dx \equiv - \int_{W_t} \rho u \cdot \vec{n} d\Gamma$$

$$\forall W \subset \Omega, \text{ bola abierta y } \forall t \in [0, T],$$

donde $\vec{n}(x)$ es el vector normal unitario exterior a W en los puntos $x \in \partial W$ y $d\Gamma$ es la medida superficial de W , definida del modo habitual. Así escrita, (0.5') significa que la variación de la cantidad de masa habida en W en el instante t coincide (cambiada se signo) con la cantidad de masa que sale de W (a través de ∂W) en dicho instante.

Por otra parte, la 2ª Ley de Newton ó Ley de equilibrio de los momentos nos dice que "La variación sufrida por la cantidad de movimiento en una parte del fluido, en un instante t , es igual a la resultante de las fuerzas que se le aplican", esto es:

$$(0.6) \quad \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \cdot u dx = \vec{F}_{W_t} \quad \forall W_t$$

donde $\rho \cdot u$ es el vector densidad de momento (ó simplemente momento) y \vec{F}_{W_t} la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la región W_t .

A partir de ahora, supondremos que el vector \vec{F}_{W_t} se descompone en la suma de dos vectores, que agrupan respectivamente a las

a) Fuerzas de interacción (ó fuerzas de tensión), determinadas por una densidad superficial, cuya resultante será designada por \vec{T}_{W_t} .

b) Fuerzas externas (debidias a la acción de la gravedad, de un campo magnético...), de resultante \vec{B}_{W_t} .

Se dice que un fluido es ideal si todas las fuerzas superficiales son normales, esto es: existe una función escalar $p: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ (llamada presión del fluido y sufi-

cientemente regular), tal que:

$$(0.7) \quad \vec{T}_{W_t} = - \int_{\partial W_t} p \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad \forall W_t.$$

En otras palabras, dos capas adyacentes del fluido sólo interaccionan en la dirección normal y las partículas están libres de rozamiento interno. Se suele decir también que el fluido es no viscoso (cf. más adelante).

Supondremos también que existe $f: \Omega \rightarrow [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo de fuerzas integrable, tal que las fuerzas externas aplicadas a W_t vienen dadas por:

$$(0.8) \quad \vec{B}_{W_t} = \int_{W_t} \rho f \, dx$$

Así pues, en un fluido ideal se verificará:

$$(0.9) \quad \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho u \, dx = - \int_{\partial W_t} p \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{W_t} \rho \cdot f \, dx \equiv \vec{F}_{W_t} \cdot \vec{v}_{W_t}$$

Con objeto de reducir (0.9) a una ecuación puntual, utilizaremos el conocido

Teorema del Transporte :

"Si $g: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suficientemente regular y W es una bola contenida en Ω , entonces la función

$$t \rightarrow \gamma(t) = \int_{W_t} \rho(y, t) g(y, t) \, dy$$

es continuamente diferenciable y además

$$\gamma'(t) = \int_{W_t} \rho(y, t) \left[\frac{\partial g}{\partial t}(y, t) + (u(y, t) \cdot \nabla) g(y, t) \right] dy "$$

En efecto, haciendo $y = \psi(x, t)$ obtenemos

$$\gamma(t) = \int_W \rho(\psi(x, t), t) g(\psi(x, t), t) \cdot J(x, t) \, dx$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u \right] g J(x,t) dx \\ &+ \int_W \rho \left[\frac{\partial g}{\partial t} + (u \cdot \nabla) g \right] J(x,t) dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (0.5), llegamos a

$$\gamma'(t) = \int_{W_t} \rho \left(\frac{\partial g}{\partial t} + (u \cdot \nabla) g \right) dy$$

En consecuencia,

$$(0.10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\int_{W_t} \rho u dx \right) = \int_{W_t} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) dx \\ \int_{W_t} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) dx = - \int_{W_t} \nabla p dx + \int_{W_t} \rho f dx \end{cases}$$

Como (0.10) debe ser cierto para toda bola contenida en Ω , obtenemos la llamada Ecuación de Euler:

$$(0.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = - \frac{\partial p}{\rho} + f \quad \text{en } \Omega \times [0, T]$$

La ecuación (0.11), junto con (0.5), constituye un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas (las tres componentes de u , p y ρ) si $n=3$, ó 3 ecuaciones con 4 incógnitas si $n=2$. Luego necesitamos más ecuaciones para llegar a una descripción completa del movimiento del fluido.

Para ello, utilizaremos el Principio de conservación de la energía, que afirma que la energía total del sistema se mantiene constante a lo largo del intervalo $[0, T]$. Sea E_{tot} la energía total; entonces:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{int} + E_{ext},$$

donde

$$E_{\text{cin}} = \text{Energía cinética} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx ,$$

$E_{\text{int}} = \text{Energía interna del fluido,}$

$E_{\text{ext}} = \text{Energía externa del fluido, debida a la acción del campo de fuerzas } f.$

Por simplicidad en lo que sigue, supondremos que

$$(0.12) \quad \frac{d}{dt} E_{\text{ext}} = 0$$

Esto se verifica al menos para $f \equiv \text{cte.}$

De acuerdo con el mencionado Principio,

$$(0.13) \quad \frac{d}{dt} [E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}] = 0$$

Estudiaremos dos casos particularmente interesantes:

1) Supongamos $E_{\text{cin}} = \text{cte.}$; por (0.13),

$$(0.14) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx \right) = 0$$

y de aquí tenemos, utilizando de nuevo el Teorema del transporte, que

$$(0.15) \quad \int_{\Omega} u \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) dx = 0;$$

usando la ecuación de Euler (0.11) con $f = 0$, tenemos que

$$(0.16a) \quad \int_{\Omega} u \cdot \nabla p \, dx = 0 ,$$

de donde, gracias al Teorema de la divergencia, llegamos a:

$$(0.16) \quad - \int_{\Omega} (\text{div } u) p \, dx + \int_{\partial \Omega} p \cdot u \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0$$

Una suposición completamente natural es (para una frontera en reposo)

$$(0.17) \quad u \cdot \vec{n} |_{\partial\Omega} = 0 ;$$

dicho de otra forma, el fluido no puede atravesar la frontera sólida $\partial\Omega$ ⁽¹⁾. De (0.16) y (0.17), obtenemos:

$$(0.18) \quad \int_{\Omega} p \cdot \text{div } u \, dx = 0$$

Para que se verifique (0.18) basta con que se tenga $\text{div } u = 0$ en $\Omega \times [0, T]$.

Es decir, la Ley de conservación de la Energía, se verifica automáticamente si imponemos

$$(0.19) \quad \text{div } u = 0 ,$$

lo cual se traduce en el hecho de que el volumen ocupado por el fluido no varía en el tiempo, o sea, el fluido es incompresible (en efecto, $\frac{\partial J}{\partial t} = (\text{div } u) J$). Además, para un fluido ideal incompresible, la energía cinética se mantiene constante.

En este caso, las ecuaciones que describen el movimiento del fluido quedan como sigue:

$$(0.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \cdot u) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = - \frac{\nabla p}{\rho} \\ \text{div } u = 0 \end{array} \right. \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

2) Supongamos ahora que la energía interna del fluido viene dada por una expresión de la forma

$$E_{\text{int}} = \int_{\Omega} \rho \omega \, dx ,$$

(1) La condición (0.17) recibe el nombre de condición de deslizamiento (slip condition).

donde $\omega = \omega(x, t)$ es una determinada función (densidad de energía ó entalpía por unidad de masa).

Usando (0.13) y (0.16a), obtenemos :

$$(0.21) \quad \int_{\Omega} u(\rho \nabla \omega - \nabla p) \, dx + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \, dx = 0$$

Hagamos sobre el fluido la llamada Hipótesis de isentropicidad:

"Supongamos que existe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{O} = (p_0, p_1)$ y que existe un difeomorfismo $R : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_+$ estrictamente creciente tales que:

$$i) \quad \frac{1}{R} \in L^1_{loc}([p_0, p_1])$$

$$ii) \quad \begin{aligned} p(x, t) \in \overline{\mathcal{O}} & \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ p(x, t) \in \mathcal{O} & \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

$$iii) \quad \rho(x, t) = R(p(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

En estas hipótesis, si tomamos

$$(0.22) \quad \omega(x, t) = \int_{p_0}^{p(x, t)} \frac{ds}{R(s)} ,$$

se anula el primer sumando de (0.21); teniendo en cuenta que si p es solución de (0.11) entonces $(p + cte)$ también lo es, basta elegir p_0 de forma adecuada para que se tenga

$$(0.23) \quad \int_{\Omega} p(x, t) \, dx = 0 ,$$

y entonces también se anulará el segundo sumando de (0.21).

Así pues, en el caso de un fluido isentrópico, se conserva la energía total y las ecuaciones del movimiento se convierten en:

$$(0.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla \omega \\ \rho = R(p) \quad \omega = \int_{p_0}^p \frac{ds}{R(s)} \end{array} \right. \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

Un caso particular de fluidos isentrópicos lo constituyen aquéllos que verifican la ley de los gases perfectos : $\rho = A p^\gamma$.

Tanto (0.20) (fluido ideal incompresible), como (0.24) (fluido ideal isentrópico), deberán ser complementados con condiciones iniciales para u y ρ (salvo si las soluciones buscadas son estacionarias), y con la condición de contorno (0.17) (cond. de deslizamiento).

Hasta ahora, hemos trabajado con la hipótesis (0.9) de fluido ideal. Esta hipótesis parece admisible para el estudio de determinados movimientos de un fluido tales como problemas de caída libre ("jets"), pero no es apropiada en otros casos. Por ejemplo, cuando se considera el movimiento de un fluido en torno a un obstáculo, no es lícito suponer (al menos cerca de éste) que no existen fuerzas de rozamiento interno entre las partículas.

Supondremos ahora pues que el fluido es no ideal, esto es, que pueden existir fuerzas tangenciales entre dos capas adyacentes del mismo.

Por la ecuación (0.9), teníamos:

$$(0.25) \quad \vec{F}_{W_t} = \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \cdot u \, dx = \vec{T}_{\partial W_t} + \vec{B}_{W_t}$$

y estamos suponiendo ahora que:

$$(0.26) \quad \vec{T}_{W_t} = - \int_{\partial W_t} p \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial W_t} \vec{g}(x, t) \cdot \vec{n} \, ds ,$$

donde \underline{g} es una matriz no singular que introduce fuerzas superficiales no necesariamente normales. Estas fuerzas, debidas al rozamiento entre las partículas, reciben el nombre de Fuerzas de viscosidad, y se dice entonces que el fluido es viscoso.

Algunas consideraciones de simetría (ó isotropía del fluido, véase por ejemplo /15/) llevan a la conclusión siguiente:

$$(0.27) \quad \underline{g} = \lambda (\text{div } u) \cdot \text{Id.} + 2\mu D$$

donde

Id. \equiv tensor (matriz) identidad ,

D \equiv tensor linealizado de deformaciones,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\lambda, \mu: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu > 0 \quad \text{viscosidad dinámica del fluido (1)}$$

Llevando (0.27) a (0.25) obtenemos la ecuación de Navier-Stokes :

$$(0.28) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\text{div } u) + \mu \Delta u + \rho f$$

que, junto con la ecuación de continuidad (0.5) y alguna ley de conservación de la energía, determinan el movimiento de un fluido viscoso y compresible.

(1) Generalmente, μ sólo depende de la temperatura, i.e. $\mu(x, t) = M(\theta(x, t))$ para $\theta(x, t)$ la temperatura del fluido en el punto x y en el instante t .

Si suponemos ahora que el fluido es viscoso, incompresible (i.e. $\text{div } u = 0$), isotermo (luego $\mu \equiv \text{cte.}$) y homogéneo (i.e. con densidad constante $\rho = \rho_0$), llegamos a la ecuación incompresible de Navier-Stokes:

$$(0.29) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \mu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

$$(0.30) \quad \text{div } u = 0$$

Dividiendo (0.29) por ρ_0 , introduciendo la cte. $\nu = \mu / \rho_0$ (la viscosidad cinemática del fluido) y realizando un cambio evidente de notación para p y para f , llegamos a la forma más usual:

$$(0.31a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f ,$$

$$(0.31b) \quad \text{div } u = 0 .$$

Otro punto de vista consiste en suponer que (0.31) es la versión adimensional ó normalizada de la ecuación de Navier-Stokes (0.29), a la cual se llega como sigue. Pongamos

$$(0.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_* \rho' \quad , \quad p = p_* p' \quad , \quad u = u_* u' \quad , \quad x = L_* x' \quad , \\ t = T_* t' \quad , \quad f = \left(\frac{p_* u_*}{T_*} \right) f' \quad , \end{array} \right.$$

donde ρ_* , L_* y T_* son respectivamente una densidad característica, longitud característica y tiempo característico para el fluido y $u_* = L_*/T_*$, $p_* = u_*^2 \rho_*$.

Sustituyendo en (0.29), llegamos a (0.31) con las cantidades adimensionales $u'(x', t')$, $p'(x', t')$, $f'(x', t')$, pero en este caso ν está sustituido por Re^{-1} , donde

$$(0.33) \quad Re = \frac{\rho_*}{\mu} L_* u_*$$

es el número de Reynolds del fluido. Una consecuencia importante del hecho de que esta normalización es posible para

cualquier fluido viscoso incompresible isoterma y homogéneo es la ley de similitud de Reynolds: " El movimiento del fluido sólo depende de la geometría de Ω , del instante t y del parámetro Re ".

El parámetro Re posee muchas y muy diversas interpretaciones (recuérdese que, en el problema normalizado (0.31), $v = Re^{-1}$). Probablemente, la más importante es la que dice que Re es el cociente de los órdenes de magnitud entre las fuerzas convectivas ó de transporte (i.e. fuerzas inerciales) y las fuerzas de rozamiento interno ó viscosidad. En efecto, dicho cociente vale

$$\frac{om(\rho_0(u \cdot \nabla)u)}{om(\mu \Delta u)} = \frac{\rho_* u_*^2 / L_*}{\mu u_* / L_*^2} = \frac{\rho_* u_* L_*}{\mu} = Re$$

Supongamos que Re posee un valor muy grande; en este caso las ecuaciones de N-S incompresibles se aproximan formalmente por las ecuaciones de Euler. Sin embargo, en las hipótesis de existencia de paredes sólidas en reposo, se observa la aparición de grandes variaciones de la velocidad tangencial que convierten el problema de paso al límite $Re \rightarrow +\infty$ en un problema de perturbaciones singulares de tratamiento muy complicado. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso del movimiento de un fluido en torno a un obstáculo (cf., por ejemplo, [5,20]).

Si, por el contrario, Re posee un valor próximo a 0, entonces una buena aproximación del problema de Navier-Stokes es el llamado problema de Stokes, que posee carácter lineal:

$$(0.34) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

El tipo de movimiento seguido por el fluido se denomina, en este caso, deslizando ("creeping motion").

En este trabajo, supondremos siempre que el movimiento

del fluido viene regido por (0.31), junto con otras condiciones (iniciales y de contorno) complementarias. Haremos la hipótesis siguiente de regularidad de Ω :

$$(0.35) \left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ es un abierto acotado de } \mathbb{R}^n \text{ con } n=2 \text{ ó } 3, \text{ de} \\ \text{frontera } \Gamma = \partial\Omega \text{ suficientemente regular (por} \\ \text{ejemplo, continuamente diferenciable a trozos, con} \\ \Omega \text{ localmente situado a un lado de } \Gamma \text{).} \end{array} \right.$$

La primera cuestión concerniente a (0.31) es la determinación de un problema de contorno bien planteado que le esté asociado. Esto es aún un problema abierto, pero parece (y ha sido probado en el caso de $n=2$) que (0.31) debe ir completado con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

- Condición inicial:

$$(0.36) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \quad (u_0 \text{ dada})$$

- Condición de contorno:

$$(0.37) \quad u(x,t) = g(x,t) \quad x \in \Gamma \quad t \in (0,T) \quad (g \text{ dado})$$

Aquí, debido a la incompresibilidad del fluido, el dato g ha de satisfacer:

$$\int_{\Gamma} g \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

La condición (0.37) determina el valor del campo de velocidades sobre Ω . Así, $g(x,t)$ es la velocidad del punto x , situado sobre la "pared" $\partial\Omega$ en el instante t . Si por simplicidad, suponemos que la pared está en reposo, (0.37) se convierte en

 (1) En efecto, si u es solución de (0.31), (0.36), (0.37), tenemos:

$$\int_{\Gamma} g \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = 0$$

$$(0.37') \quad u(x,t) = 0 \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T)$$

y nos dice que el fluido se adhiere a la pared (condición de no deslizamiento, "no-slip condition"). Desde el punto de vista matemático, (0.37) es una condición adecuada, ya que la e.d.p. que verifica u es (ahora y no antes, en el caso de un fluido ideal) de tipo parabólico (i.e. posee derivadas segundas espaciales y sólo derivadas de primer orden en t).

Finalmente, digamos que, cuando se pretende determinar soluciones estacionarias (i.e. independientes de t) de (0.31), la condición inicial deja de tener sentido y sólo (0.37) debe ser utilizada para completar el sistema de ecuaciones (de carácter elíptico):

$$(0.38) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

0.2.- RESULTADOS TEORICOS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.-

A continuación, especificaremos la notación utilizada en este trabajo, fijaremos nuestro marco funcional y enunciaremos algunos resultados conocidos de existencia, unicidad y regularidad de solución para el problema de Navier-Stokes, tanto en el caso evolutivo como en el estacionario.

Como en la Sección precedente, sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado ($n=2$ ó 3) verificando (0.35), $T > 0$ y $Q = \Omega \times (0, T)$. Usaremos las siguientes notaciones:

a) Para un conjunto $\emptyset \subset \mathbb{R}^q$, $\mathcal{D}(\emptyset) = \{\psi / \psi \in C^\infty(\emptyset), \text{ soporte de } \psi \subset \emptyset\}$ (espacio de las funciones test sobre \emptyset).

b) $C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) = \{f / f \in C^0(\bar{\Omega}), C \text{ cte. tal que } |f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^\alpha \forall x, x' \in \bar{\Omega}\}$, con $\alpha \in (0, 1]$, (espacio de funciones continuas y α -Holderianas en $\bar{\Omega}$). Es un espacio de Banach con la norma

$$(0.39) \quad \|f\|_{C^{0, \alpha}} = \max_{x \in \Omega} |f(x)| + \max_{x, x' \in \Omega} \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^\alpha}$$

c) $C_{x, t}^{\alpha_1, \alpha_2}(\bar{Q}) = \{f / f \in C^0(\bar{Q}) \text{ y } \exists C_1, C_2 \text{ ctes. tal que}$

$$|f(x, t) - f(x', t)| \leq C_1 |x - x'|^{\alpha_1};$$

$$|f(x, t) - f(x, t')| \leq C_2 |t - t'|^{\alpha_2}$$

$$\forall (x, t), (x', t), (x, t') \in Q \}$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$. Es un espacio de Banach con la norma

$$(0.40) \quad \|f\|_{C_{x, t}^{\alpha_1, \alpha_2}} = \max_Q |f(x, t)| + \max_Q \frac{|f(x, t) - f(x', t)|}{|x - x'|^{\alpha_1}} + \max_Q \frac{|f(x, t) - f(x, t')|}{|t - t'|^{\alpha_2}}$$

d) $H^1(\Omega) = \{v / v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega)^n\}$, espacio de Hilbert para la norma:

$$(0.41) \quad \|v\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \quad (1)$$

e) $H^1_0(\Omega)$ = adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$; en $H^1_0(\Omega)$, la seminorma

$$(0.42) \quad \|v\|_{H^1_0} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

es de hecho una norma, equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$ (gracias a la desigualdad de Poincaré, que dice que $\int |\psi|^2 dx \leq C(\Omega) \int |\nabla \psi|^2 dx \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde $C(\Omega)$ es una constante sólo dependiente de Ω).

f) $W^{m,p}(\Omega) = \{v / D^j v \in L^p(\Omega) \quad \forall |j| \leq m\}$, espacio de Banach para la norma

$$(0.43) \quad \|v\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|D^j v\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \equiv \left(\sum_{|j| \leq m} \int_{\Omega} |D^j v|^p dx \right)^{1/p}$$

g) $\mathcal{U} = \{v / v \in \mathcal{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0 \text{ en } \Omega\}$

h) V = adherencia de \mathcal{U} en $H^1_0(\Omega)^n$; V estará dotado del producto escalar y la norma inducidas por $H^1_0(\Omega)^n$, que llamaremos respectivamente $((\cdot, \cdot))$ y $\|\cdot\|$.

i) H = adherencia de \mathcal{U} en $L^2(\Omega)^n$; está dotado del producto escalar y la norma inducidos de $L^2(\Omega)^n$, que llamaremos respectivamente (\cdot, \cdot) y $|\cdot|$.

El espacio V es un subespacio de H denso en él. Además, la inyección $V \hookrightarrow H$ es compacta (2). Denotemos por H' y V' los espacios duales de H y V , y sea i la inyección de V en H .

(1) Aquí las derivadas se entienden en el sentido de las distribuciones sobre Ω ($\nabla v = (D_1 v, \dots, D_n v)$ ($\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}$)).

(2) Aquí se utiliza de forma esencial que Ω es acotado.

El operador adjunto i^* es lineal y compacto de H' en V' . Como es habitual, utilizaremos el Teorema de Riesz para identificar H y H' , llegando así a las siguientes inyecciones (todas compactas):

$$V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'$$

Aquí, cada espacio es denso en el siguiente.

Como consecuencia de las identificaciones anteriores, el producto de dualidad $\langle f, u \rangle$ entre $f \in V'$ y $u \in V$ es una extensión del producto escalar en H y, cuando $f \in H$, tenemos

$$\langle f, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in V$$

$$j) \quad b(u, v, w) = \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j \, dx \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)^n.$$

b es una forma trilineal continua sobre $H_0^1(\Omega)^n$ que verifica:

$$(0.44) \quad b(u, v, v) = 0 \quad \forall u \in V \quad v \in H_0^1(\Omega)^n,$$

$$(0.45) \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad \forall u \in \bar{V} \quad v, w \in H_0^1(\Omega)^n.$$

$$k) \quad \hat{b}(u, v, w) = \frac{1}{2} (b(u, v, w) - b(u, w, v)) \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)^n$$

\hat{b} es también una forma trilineal continua sobre $H_0^1(\Omega)^n$ que verifica (0.45) para $u \in H_0^1(\Omega)^n$,

$$(0.46) \quad \hat{b}(u, v, w) = b(u, v, w) \quad \text{si } u \in V \quad v, w \in H_0^1(\Omega)^n,$$

$$(0.47) \quad \hat{b}(u, v, v) = 0 \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Nuestro objetivo es resolver el problema incompresible de Navier-Stokes con condición de Dirichlet homogénea, cuya formulación clásica es la siguiente:

Hallar una función $u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una función $p: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$(0.48) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \text{grad } p = f \quad \text{en } Q,$$

$$(0.49) \quad \text{div } u = 0 \quad \text{en } Q,$$

$$(0.50) \quad u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T),$$

$$(0.51) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega,$$

donde f y u_0 son funciones dadas, definidas en $\Omega \times [0, T]$ y Ω respectivamente.

Supongamos que u y p son soluciones (clásicas) de (0.48) - (0.51), $u \in C^2(Q)$, $p \in C^1(Q)$. Obviamente $u \in L^2(0, T; V)$ y, si v es un elemento de \mathcal{U} es fácil ver (|22|) que

$$(0.52) \quad \frac{d}{dt} (u, v) + v((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v) .$$

Por densidad, es inmediato que (0.52) se verifica cualquiera que sea v en V . Esto sugiere la siguiente formulación débil del problema (0.48)-(0.51)

Dados $f \in L^2(0, T; V')$ y $u_0 \in H$, hallar u tal que:

$$(0.53) \quad u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) , ,$$

$$(0.54) \quad \frac{d}{dt} (u(t), v) + v((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \\ \forall v \in V, \quad t \text{ c.p.d. en } [0, T],$$

$$(0.55) \quad u(0) = u_0$$

Antes de referirnos a la existencia de solución de (0.53)-(0.55), será necesario justificar que la condición inicial (0.55) posee sentido. Es relativamente sencillo probar que si $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, entonces $u : [0, T] \rightarrow V$ coincide c.p.d. en $[0, T]$ con una función continua de $[0, T]$ en V' (recuérdese que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ con inyecciones compactas y densas). Por tanto, la igualdad (0.55) posee sentido entendida como una igualdad en V' .⁽¹⁾

La existencia de solución de este problema está asegurada por el siguiente resultado debido a Hopf (cf. |14|).

(1) De hecho, cuando $n=2$, puede probarse que u coincide c.p.d. en $[0, T]$ con una función absolutamente continua de $[0, T]$ en H y puede darse un sentido a (0.55) como igualdad en H .

Teorema 1.a Dados f y u_0 en las condiciones precedentes, existe al menos una función u que satisface (0.53)-(0.55). Además, si $n=2$, u es la única solución.

Puede probarse sin excesiva dificultad que si u es solución de (0.53)-(0.55), entonces define una distribución con valores en \mathbb{R}^n

$$(x,t) \in Q \rightarrow u(t)(x) \in \mathbb{R}^n$$

tal que existe una nueva distribución $p \in \mathcal{D}'(Q)$ junto con la cual u es solución (generalizada, es decir en el sentido de las distribuciones sobre Q) de (0.48)-(0.49). Además, como $u(t) \in V$ c.p.d. en $[0,T]$, también se tiene (0.50) en un sentido generalizado; finalmente, (0.55) es una formulación débil de (0.51). La relación existente entre las soluciones clásicas y generalizadas de (0.48)-(0.51) queda determinada por las hipótesis de regularidad que se hacen sobre algunos de los datos (f , u_0 y Ω) del problema. En este sentido, tenemos el siguiente resultado de regularidad (cf. [13]).

Teorema 1.b Supongamos $f \in C_{x,t}^{2h,h}(Q)$ para algún $h > 0$,

$$(0.56) \quad \int_0^T (|f| + |f_t|) dt < \infty, \quad u_0 \in V \cap W^{2,2}(\Omega)$$

y $\partial\Omega$ de clase C^2 . Entonces, toda solución generalizada u del problema (0.53)-(0.55), es una solución clásica; más precisamente, es una función continua en Q , las derivadas $D_i u$, $D_{ij} u$, $1 \leq i, j \leq n$, son Hölder-continuas y la derivada $D_t u$ es continua en Q . Además la presión p tendrá derivadas $D_i p$ continuas en Q , $1 \leq i \leq n$.

En el caso de un fluido en régimen estacionario, i.e. independiente del instante de observación, el problema considerado es

$$(0.57) \quad -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \text{grad } p = f \quad \text{en } \Omega$$

$$(0.58) \quad \text{div } u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$(0.59) \quad u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

Al igual que hicimos antes, si f , u y p son suficientemente regulares y satisfacen (0.57)-(0.59) entonces $u \in V$ y, para cada $v \in \mathcal{U}$,

$$(0.60) \quad v((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v) ;$$

por densidad, (0.60) debe verificarse cualquiera que sea v en V . Recíprocamente, si $u \in V$ y verifica (0.60) $\forall v \in \mathcal{U}$, entonces u define una distribución sobre Ω con valores en \mathbb{R}^n y además existe una distribución $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que el par (u,p) verifica (0.57)-(0.59) en el sentido generalizado habitual.

Así, la formulación variacional δ generalizada del problema estacionario queda: dada $f \in V'$, hallar $u \in V$ tal que:

$$(0.61) \quad v((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V.$$

Tenemos los siguientes resultados (para la demostración, véanse [22] y [13] resp.):

Teorema 2.a Dada $f \in V'$, existe al menos una función $u \in V$ que verifica (0.61). Además, existe una constante $C = C(n)$ (i.e. sólo dependiente de n) tal que, si

$$(0.62) \quad v^2 > C(n) \|f\|_{V'} ,$$

la solución de (0.61) es única.

Teorema 2.b

a) Si $f \in L^r(\Omega)^n$, $r \geq 6/5$, y $\partial\Omega$ es de clase C^2 , entonces toda solución generalizada (u,p) del problema (0.61) verifica: $u \in W^{2,r}(\Omega)^n$, $\text{grad } p \in L^r(\Omega)^n$ y además

$$(0.63) \quad \|u\|_{W^{2,r}} + \|\text{grad } p\|_{L^r} \leq C$$

donde $C = C(\|f\|_{L^r}, r, \Omega)$.

b) Si, además $r > 3/2$ y $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, entonces la solución es clásica; más precisamente, $u \in C^{0,(2-(3/r))}(\Omega)$ y $D^\beta u$, $\text{grad } p \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ para $|\beta| = 2$.

En el caso del apartado a) tenemos que para $f \in L^r(\Omega)^n$ con $r \geq 6/5$, las funciones $u_i \in W^{2,r} \hookrightarrow L^6$ (1), y $D_i u_j \in W^{1,r} \hookrightarrow L^2$ de donde $u_i D_i u_j \in L^{3/2}(\Omega)$ (2). Luego la igualdad (0.61) es una igualdad casi por doquier en Ω ; en este sentido, se dice que u y p son soluciones fuertes de nuestro problema.

 (1) Los teoremas de inyección de Sobolev nos dicen que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

(2) Utilizamos aquí que

$$\int_{\Omega} (u_i D_i u_j)^s dx \leq \left[\int_{\Omega} (u_i)^6 \right]^{s/6} \left[\int_{\Omega} (D_i u_j)^2 \right]^{s/2}$$

para $1 = \frac{s}{6} + \frac{s}{2}$, i.e. para $s = 3/2$.

0.3. DISCRETIZACION EN LA VARIABLE TIEMPO.

La aproximación numérica del problema de evolución de Navier-Stokes se lleva a cabo en dos niveles; en una primera etapa, se discretiza en la variable t y, posteriormente, se introduce una aproximación en las variables espaciales.

Existen muchos esquemas clásicos y naturales para llevar a cabo la discretización en tiempo. Expondremos a continuación a modo de ejemplo cuatro esquemas bien conocidos (véase por ejemplo [22]). Consideraremos el intervalo $[0, T]$ dividido en N subintervalos de amplitud k ,

$$(0.64) \quad k = T/N. \quad (1)$$

Asociamos a k y a la función f las f^1, \dots, f^N , donde

$$(0.65) \quad f^m = \frac{1}{k} \int_{(m-1)k}^{mk} f(t) dt \quad m=1 \dots N \quad f^m \in L^2(\Omega)^n$$

En cada esquema definimos recursivamente, para cada k , una familia de funciones u_k^0, \dots, u_k^N de V (u_k^m es una aproximación de $u(mk)$), comenzando en todos ellos con

$$(0.66) \quad u_k^0 \equiv \text{proyección ortogonal de } u_0 \text{ sobre } V, \text{ para el producto escalar de } L^2(\Omega)^n.$$

1.- Esquema semi-implícito.-

Para $m \geq 0$, obtenemos u_k^{m+1} de u_k^m resolviendo el problema lineal:

(1) Por simplicidad, todos los subintervalos de aproximación en la variable t se tomarán de la misma longitud. Un análisis similar correspondería a una elección de "paso variable".

$$(0.67) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} (u_k^{m+1} - u_k^m, v) + \nu ((u_k^{m+1}, v)) + b(u_k^m, u_k^{m+1}, v) = (f^{m+1}, v) \\ \forall v \in V, u_k^{m+1} \in V \end{array} \right.$$

El esquema anterior posee un error de truncamiento local de orden k .

En efecto, (0.67) conduce formalmente a la expresión

$$(0.68) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} [u((m+1)k) - u(mk)] - \nu \Delta (u((m+1)k) \\ + (u(mk) \cdot \nabla) u((m+1)k) + \text{grad } p((m+1)k) = f((m+1)k) \end{array} \right.$$

Si suponemos u, p y f lo suficientemente regulares (por ej., C^3), obtenemos, desarrollando por Taylor en torno al valor $t = mk$, que el error local cometido es

$$(0.69) \left\{ \begin{array}{l} e_{mk} = u_t(mk) + \frac{k}{2} u_{tt}(\xi_1) - \nu \Delta u(mk) - k\nu \Delta u_t(\xi_2) \\ + (u(mk) \cdot \nabla) u(mk) + k(u(mk) \cdot \nabla) u_t(\xi_3) + \text{grad } p(mk) \\ + k \text{ grad } p_t(\xi_4) - f(mk) - kf_t(\xi_5) \end{array} \right. ,$$

donde $mk < \xi_i < (m+1)k$ para $1 \leq i \leq 5$.

Teniendo en cuenta que u y p verifican (0.48) en mk y que las derivadas de u, p y f permanecen acotadas, obtenemos finalmente:

$$(0.70) \quad |e_{mk}| \leq \frac{k}{2} C_1 + kC_2 + kC_3 + kC_4 + kC_5 = kC^*.$$

2.-Esquema de Crank-Nicholson.-

Para $m \geq 0$, obtenemos u_k^{m+1} de u_k^m resolviendo el problema lineal:

$$(0.71) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} (u_k^{m+1} - u_k^m, v) + \nu \left(\left(\frac{u_k^{m+1} + u_k^m}{2}, v \right) \right) + b\left(u_k^m, \frac{u_k^{m+1} + u_k^m}{2}, v\right) \\ = (f^{m+1}, v) \quad \forall v \in V, u_k^{m+1} \in V. \end{array} \right.$$

La ecuación variacional (0.71) es una adaptación del esquema clásico de Crank-Nicholson, que de nuevo conduce a un error local de orden k (puede comprobarse razonando como en el caso precedente).

3.-Esquema semi-explicito.-

Para $m \geq 0$, obtenemos u_k^{m+1} de u_k^m resolviendo el siguiente problema, de tipo quasi-Stokes:

$$(0.72) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} (u_k^{m+1} - u_k^m, v) + \nu (u_k^{m+1}, v) + b(u_k^m, u_k^m, v) = (f^{m+1}, v) \\ \forall v \in V, \quad u_k^{m+1} \in V \end{array} \right.$$

Se trata de un esquema implícito sólo en la parte lineal del operador de Navier-Stokes, i.e. en los términos ligados a la presencia de fuerzas de viscosidad. De nuevo puede probarse que el error local de discretización es de orden k .

4.-Esquema totalmente explícito.-

Para $m \geq 0$, obtenemos u_k^{m+1} de u_k^m explícitamente, sin más que utilizar la siguiente identidad en V :

$$(0.73) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} (u_k^{m+1} - u_k^m, v) + \nu (u_k^m, v) + b(u_k^m, u_k^m, v) = (f^{m+1}, v) \\ \forall v \in V, \quad u_k^{m+1} \in V \end{array} \right.$$

El esquema (0.73) recibe el nombre de totalmente explícito porque en él u_k^{m+1} se calcula de u_k^m sin necesidad de invertir ninguna matriz que contenga productos escalares en V . Sin embargo, la presencia de la condición de incompresibilidad $\text{div } u = 0$ (la necesidad de buscar u_k^{m+1} en V), haría necesario el conocimiento explícito de una base de V , lo cual, evidentemente, no es posible. Formalmente, (0.73) puede escribirse en la forma

$$(0.73)' \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k^{m+1} = u_k^m - k \{ -v \Delta u_k^m + (u_k^m \cdot \nabla) u_k^m \\ \quad + \text{grad } p_k^m - f^{m+1} \} , \end{array} \right.$$

donde $p_k^m \in L^2(\Omega)$ debe elegirse convenientemente, para que se tenga $u_k^m \in V$.

Notemos que, en todos los esquemas, el problema que define a u_k^{m+1} es un problema lineal. Así, en cualquiera de los cuatro casos, la discretización en la variable t reduce el problema a una sucesión finita de ecuaciones variacionales lineales

$$(0.74) \quad a(u, v) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in V \quad u \in V,$$

donde $a(.,.)$ es una forma bilineal definida sobre V continua y coerciva (además independiente de m para los esquemas (0.72) y (0.73)):

$$(0.75) \quad a(v, v) \geq \frac{1}{k} \|v\|^2$$

y L es una forma lineal continua sobre V (que, en general, varía con m).

En estas hipótesis, la existencia y unicidad de solución de (0.74) está garantizada por el Lema de Lax-Milgram. Sin embargo, con objeto de ilustrar el método de compacidad (cf. [16], [21]) junto con el procedimiento de Galerkin, para la resolución de (0.75), daremos a continuación una demostración constructiva de la existencia y unicidad de solución de (0.74):

Existencia Puesto que V es separable, por ser un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)^n$ que es separable, posee una "base" numerable $\{v_1, \dots, v_m, \dots\}$.

Sea V_m el subespacio generado por v_1, \dots, v_m . Para cada entero fijo m definimos una solución aproximada de (0.74) en V_m . Esta solución aproximada será aquel $u_m \in V_m$,

$$(0.76) \quad u_m = \sum_{j=1}^m \xi_{jm} v_j \quad \xi_{jm} \in \mathbb{R},$$

determinado por:

$$(0.77) \quad a(u_m, v) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in V_m$$

La ecuación (0.77) es equivalente a un sistema lineal de m ecuaciones para las m componentes ξ_{jm} de u_m :

$$(0.78) \quad \sum_{j=1}^m \xi_{jm} a(v_j, v_i) = \langle L, v_i \rangle \quad i=1 \dots m$$

La existencia y unicidad de u_m quedará probada si vemos que el sistema (0.78) es regular, o lo que es igual si el sistema homogéneo asociado:

$$(0.79) \quad \sum_{j=1}^m \xi_j a(v_j, v_i) = 0 \quad i=1 \dots m$$

posee como única solución la trivial $\xi_1 = \dots = \xi_m = 0$. Pero si ξ_1, \dots, ξ_m satisfacen (0.79), entonces multiplicando cada ecuación (0.79) por el correspondiente ξ_i y sumando dichas ecuaciones, obtenemos:

$$\sum_{i,j=1}^m \xi_i \xi_j a(v_i, v_j) = 0$$

y, por la bilinealidad de a ,

$$a\left(\sum_{i=1}^m \xi_i v_i, \sum_{j=1}^m \xi_j v_j\right) = 0.$$

Usando (0.75) encontramos que

$$\sum_{i=1}^m \xi_i v_i = 0$$

y, puesto que v_1, \dots, v_m son linealmente independientes, concluimos que $\xi_1 = \dots = \xi_m = 0$.

Tomando ahora $v=u_m$ en (0.77), obtenemos

$$a(u_m, u_m) = \langle L, u_m \rangle$$

y de aquí, por (0.75), se sigue que:

$$\frac{1}{k} \|u_m\|^2 \leq a(u_m, u_m) = \langle L, u_m \rangle \leq C \|u_m\|$$

$$\|u_m\| \leq k C$$

que nos dice que la sucesión u_m está acotada uniformemente (i.e. independientemente de m) en V . Puesto que las bolas cerradas de un espacio de Hilbert son débilmente compactas existirá un elemento u de V y una subsucesión $\{u_{m'}\}$, $m' \rightarrow \infty$ de u_m tal que:

$$u_{m'} \rightarrow u \text{ en } V\text{-débil, cuando } m' \rightarrow \infty$$

Sea v un elemento fijo de V_j para algún j . Para $m' \geq j$, $v \in V_{m'}$, y, de acuerdo con (0.77), tenemos:

$$a(u_{m'}, v) = \langle L, v \rangle$$

Tomando límite en esta ecuación cuando $m' \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $a(\cdot, v)$ es débilmente continua, obtenemos:

$$(0.80) \quad a(u, v) = \langle L, v \rangle$$

La igualdad (0.80) es válida para cada $v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ y este espacio es denso en V . Luego, por la continuidad de $a(u, \cdot)$, (0.80) se verificará para todo v de V . Lo cual prueba que u es solución de (0.74).

Unicidad Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (0.74) y sea $u = u_1 - u_2$; tenemos:

$$a(u_1, v) = a(u_2, v) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in V$$

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Tomando $v = u$ y teniendo en cuenta (0.75), se tiene que

$$\frac{1}{k} \|u\|^2 \leq a(u, u) = 0,$$

de donde se sigue que $u = 0$ y por tanto $u_1 = u_2$.

Una vez descritos los esquemas semi-discretizados en tiempo, se procede al estudio de la estabilidad de los mismos.

"A grosso modo", la estabilidad de un esquema (en el sentido usual del Análisis Numérico), consiste en la posibilidad de dar estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas. Dicho de otra forma, en el caso de las discretizaciones precedentes, el esquema será estable si, para alguna constante C independiente de k , se tiene

$$\|u_k\| \leq C ,$$

donde u_k es (por ejemplo) la función definida por

$$u_k: [0, T] \rightarrow V , u_k|_{[mk, (m+1)k]} \equiv u_k^m \quad \forall m,$$

y $\|\cdot\|$ es alguna norma en (por ejemplo) $L^2(0, T; V)$. Volveremos más adelante sobre este importante concepto. Un esquema que sea estable bajo ciertas hipótesis sobre los parámetros de discretización se dice condicionalmente estable; en caso de que permanezca estable sin necesidad de imponer condiciones adicionales, se dirá incondicionalmente estable.

Existe un equilibrio entre el trabajo computacional ligado a un esquema y su estabilidad. Así, de los cuatro esquemas que hemos dado los dos primeros son más difíciles de resolver, puesto que la incógnita permanece en el término no lineal ⁽¹⁾, pero son ambos incondicionalmente estables; sin embargo, aunque los dos últimos se resuelven más fácilmente (el último de ellos es explícito), hemos de imponer ciertas condiciones sobre k para conseguir su estabilidad.

Como acabamos de indicar, para el estudio de la estabilidad de los esquemas precedentes, para cada k asociamos a los elementos u_k^1, \dots, u_k^N la función aproximada

(1) Aún cuando el problema a resolver es lineal.

$$(0.81) \quad u_k : [0, T] \rightarrow V \hookrightarrow L^2(\Omega)^n,$$

constante en cada intervalo $[(m-1)k, mk)$ y definida por:

$$(0.82) \quad u_k(t) = u_k^m \quad \forall t \in [(m-1)k, mk),$$

y tratamos de obtener estimaciones uniformes de u_k en algún subespacio de $L^2(0, T; L^2(\Omega)^n) \cong L^2(Q)^n$. Si estas estimaciones son "buenas", la compacidad de la inyección de este subespacio en $L^2(Q)^n$ implicará la existencia de subsucesiones convergentes que permitan pasar al límite en la ecuación. En este sentido, la estabilidad implica la convergencia.

En la obtención de dichas estimaciones, utilizaremos un procedimiento clásico, relacionado con el método de Galerkin, que tiene en cuenta la separabilidad de V y la validez de los teoremas de inyección de Sobolev.

Cuando la dimensión del espacio es 2, los resultados de convergencia pueden mejorarse (en general) sensiblemente. El razonamiento es como sigue. Tomando $v=u(t)$ en (0.54) y teniendo en cuenta (0.47), obtenemos

$$(0.83) \quad \left(\frac{d}{dt} u(t), u(t) \right) + \nu \left(u(t), u(t) \right) = \langle f(t), u(t) \rangle.$$

Dado que, para $n=2$, se verifica

$$(0.84) \quad \left(\frac{d}{dt} u(t), u(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 \quad \text{c.p.d. en } [0, T]^{(1)},$$

también

$$(0.85) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu \|u(t)\|^2 = \langle f(t), u(t) \rangle;$$

integrando entre 0 y t y usando (0.55) se llega a:

(1) Recuérdese que u coincide c.p.d. con una función absolutamente continua de $[0, T]$ en H .

$$(0.86) \quad |u(t)|^2 + 2 \int_0^t \|u(s)\|^2 ds = |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle ds,$$

que es la llamada Igualdad de la Energía, válida para todo t de $[0, T]$ cuando $n=2$.

En este caso, esta igualdad, junto con la convergencia débil, nos da propiedades de convergencia de carácter más fuerte para las subsucesiones. Por otra parte, la unicidad de solución implicará la convergencia de toda la sucesión.

Los detalles de este procedimiento están descritos más adelante para una clase particular de esquemas de discretización. Por una parte, los esquemas son más complejos y, por otra, nos hará falta aproximar previamente en espacio para obtener las deseadas estimaciones uniformes.

La discretización en espacio y tiempo de las ecuaciones de evolución puede dar lugar a esquemas inestables ó condicionalmente estables donde, como ya dijimos antes, las soluciones no están acotadas a menos que los parámetros de discretización satisfagan alguna restricción. El estudio de la inestabilidad no lineal es un problema complicado. Nuestro estudio, basado en el método de la energía, proporciona sólo propiedades de estabilidad condicional, aunque los resultados numéricos obtenidos muestran la validez de la aproximación en situaciones no tan restrictivas.

0.4.- EL METODO DE LAS DIRECCIONES ALTERNADAS.-

El método de las direcciones alternadas constituye una técnica especial de discretización en la variable temporal t que se usa con frecuencia para la resolución de problemas de evolución y , en especial, para aquellas ecuaciones que contengan términos de difusión, i.e. ligados a un operador de segundo orden.

Con objeto de ilustrar dicho método, tomemos como modelo el siguiente problema lineal para la ecuación del calor:

$$(0.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{en } G \times (0, T) \\ u = g \quad \text{sobre } \gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } G \end{array} \right.$$

Aquí, $G = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ es un rectángulo de \mathbb{R}^2 cuya frontera denotamos por γ ; f , g y u_0 son funciones dadas, cuyas propiedades de regularidad son suficientes para que tengan validez los resultados de existencia y unicidad "standard", así como las expresiones que siguen (cf. por ejemplo [10]).

0.4.1.- Método de direcciones alternadas del tipo Peaceman-Rachford.-

Para cada k dado anteriormente por (0.64), definiremos una familia de funciones $u_k^0, u_k^{1/2}, u_k^1, \dots, u_k^{N-1/2}, u_k^N$ que pretenden ser aproximaciones de u en sucesivos instantes de tiempo. Más precisamente,

$$u_k^{m+1/2} = u(\cdot, (m+1/2)k) \quad \text{en } G$$

$$\text{para } 0 \leq m \leq N-1, \quad i=1, 2.$$

Comenzaremos con :

$$(0.88) \quad u_k^0 = u_0$$

Después, para $m \geq 0$ e $y \in (a_2, b_2)$ fijo, obtenemos $u_k^{m+1/2}$ a partir de u_k^m resolviendo el siguiente problema en la variable x :

$$(0.89) \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_k^{m+1/2} - u_k^m}{k/2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1/2}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_k^m}{\partial y^2} \\ & = f(x, y, (m+1/2)k) \quad \text{para } x \in (a_1, b_1), \\ & u_k^{m+1/2}(a_1) = g(a_1, y, (m+1/2)k), \\ & u_k^{m+1/2}(b_1) = g(b_1, y, (m+1/2)k); \end{aligned} \right.$$

a continuación para $x \in (a_1, b_1)$ fijo, calculamos u_k^{m+1} resolviendo el siguiente problema en la variable y :

$$(0.90) \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_k^{m+1} - u_k^{m+1/2}}{k/2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1/2}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1}}{\partial y^2} \\ & = f(x, y, (m+1)k) \quad \text{para } y \in (a_2, b_2), \\ & u_k^{m+1}(a_2) = g(x, a_2, (m+1)k), \\ & u_k^{m+1}(b_2) = g(x, b_2, (m+1)k). \end{aligned} \right.$$

El error local de discretización en cada uno de los dos pasos ligados al intervalo $[mk, (m+1)k)$ es de orden k . En efecto, comprobémoslo para (0.89) (análogamente se haría para (0.90)). La ecuación (0.89) es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} [u((m+1/2)k) - u(mk)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((m+1/2)k) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (mk) \\ = f((m+1/2)k) \end{aligned}$$

Así, el error cometido en este paso será

$$\begin{aligned} e_{m+1/2} = & u_t(mk) + \frac{k}{4} u_{tt}(\xi_1) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(mk) + \frac{k}{2} u_t(\xi_2)] \\ & - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (mk) - [f(mk) + \frac{k}{2} f_t(\xi_3)], \end{aligned}$$

donde $mk < \xi_i < (m+1/2)k \quad 1 \leq i \leq 3$

Por tanto,

$$|e_{m+1/2}| \leq \frac{k}{4} c_1 + \frac{k}{2} c_2 + \frac{k}{2} c_3 < k c^* ,$$

que es lo que queríamos probar.

Tanto en (0.89) como en (0.90), hemos de resolver problemas lineales en una dimensión que, en el caso de (0.89), son siempre del tipo siguiente:

$$(0.89') \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \mu \psi = \phi(x) \quad x \in (a_1, b_1) \\ \psi(a_1) = c_1 \\ \psi(b_1) = c_2 \end{array} \right.$$

En el caso de (0.90), habrá que resolver problemas tales como

$$(0.90') \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \mu \xi = \psi(y) \quad y \in (a_2, b_2) \\ \xi(a_2) = d_1 \\ \xi(b_2) = d_2 \end{array} \right.$$

Ambos problemas, (0.89') y (0.90'), poseen solución única, por ser de la forma

$$(0.91) \quad a(u, v) = (L, v)$$

donde $a(u, v) = \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) + \mu(u, v)$ es una forma bilineal continua y coerciva sobre $H^1(a_1, b_1)$ y $(L, v) = \langle \phi, v \rangle$ es una forma lineal y continua sobre $H^1(a_1, b_1)$. El Lema de Lax-Milgram nos garantiza en estas condiciones la existencia y unicidad de solución.

0.4.2.- Método de direcciones alternadas del tipo de Strang.-

Este método, a diferencia del anterior, posee tres pasos intermedios. Así, definiremos ahora para cada k una

familia de funciones $u_k^0, u_k^{1/4}, u_k^{3/4}, u_k^1, \dots, u_k^{N-1/4}, u_k^N$, comenzando con

$$(0.92) \quad u_k^0 = u_0.$$

Posteriormente, para $m \geq 0$ e $y \in (a_2, b_2)$ fijo obtenemos $u_k^{m+1/4}$ a partir de u_k^m resolviendo el problema en x :

$$(0.93) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_k^{m+1/4} - u_k^m}{k/4} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1/4}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_k^m}{\partial y^2} \\ & = f(x, y, (m+1/4)k) \quad \text{para } x \in (a_1, b_1), \\ & u_k^{m+1/4}(a_1) = g(a_1, y, (m+1/4)k), \\ & u_k^{m+1/4}(b_1) = g(b_1, y, (m+1/4)k), \end{aligned} \right.$$

Fijando ahora $x \in (a_1, b_1)$ calculamos $u_k^{m+3/4}$ resolviendo el siguiente problema en y

$$(0.94) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_k^{m+3/4} - u_k^{m+1/4}}{k/2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1/4}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+3/4}}{\partial y^2} \\ & = f(x, y, (m+3/4)k) \quad \text{para } y \in (a_2, b_2), \\ & u_k^{m+3/4}(a_2) = g(x, a_2, (m+3/4)k), \\ & u_k^{m+3/4}(b_2) = g(x, b_2, (m+3/4)k), \end{aligned} \right.$$

Finalmente, fijando $y \in (a_2, b_2)$ calculamos u_k^{m+1} resolviendo el problema en x :

$$(0.95) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_k^{m+1} - u_k^{m+3/4}}{k/4} - \frac{\partial^2 u_k^{m+1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_k^{m+3/4}}{\partial y^2} \\ & = f(x, y, (m+1)k) \quad \text{para } y \in (a_2, b_2), \\ & u_k^{m+1}(a_1) = g(x, a_1, (m+1)k), \\ & u_k^{m+1}(b_1) = g(x, b_1, (m+1)k). \end{aligned} \right.$$

Al igual que en el método anterior obtenemos que los problemas (0.93) y (0.95) son del mismo tipo que (0.89') y el problema (0.94) es del tipo de (0.90'). En consecuencia, todos ellos poseen solución única.

Desde el punto de vista físico-geométrico, cada etapa de alguno de estos métodos obedece a una etapa de difusión en una dirección (coincidente con alguno de los ejes). Dicho de otra forma, por ejemplo para dar validez a la aproximación $(0.88)-(0.90)$, admitimos que durante el semi-intervalo $(mk, (m+1/2)k)$ el proceso de difusión se realiza sólo en direcciones paralelas al eje OX, mientras que para $t \in ((m+1/2)k, (m+1)k)$ tal proceso tiene lugar sólo en direcciones ortogonales a las precedentes.

Hemos visto cómo, mediante métodos de tipo direcciones alternadas reducimos, en el caso $n=2$, la resolución de una ecuación en derivadas parciales a la de familias de ecuaciones diferenciales ordinarias (para la ecuación del calor n -dimensional, un proceso similar permite la reducción a la resolución de familias uniparamétricas de ecuaciones en derivadas parciales con $n-1$ variables espaciales). Evidentemente, este tipo de discretización reduce considerablemente la dificultad numérica. La idea básica de estos métodos es pues, separar las distintas dificultades que presenta el problema.

En el caso de las ecuaciones de N-S existen dos dificultades fundamentales relacionadas con el tratamiento numérico:

- i) La presencia del término no lineal de transporte $b(u, u, v)$, que impide la resolución directa del problema discretizado en tiempo,
- ii) La condición de incompresibilidad $\text{div } u = 0$, esto es, el hecho de que $u(t)$ deba pertenecer a V , que "liga" las distintas componentes de u y dificulta la construcción de un subespacio de dimensión finita de V que posea una base "manejable".

Usando un método conveniente de tipo direcciones alternadas, conseguiremos separar ambas dificultades, de tal manera que el problema no estacionario quede aproximado por una sucesión finita de problemas elípticos (estacionarios)

de dos tipos distintos, cada uno de los cuales ligado única y exclusivamente a una de las dos dificultades mencionadas. Como se verá, al final quedará por resolver un número finito de

- a) Problemas elípticos lineales de tipo quasi-Stokes,
- b) Problemas elípticos quasi-lineales, donde la incógnita queda libre de la condición de incompresibilidad.

0.5.- DISCRETIZACION EN ESPACIO.-

Una vez que se ha discretizado en la variable tiempo el siguiente paso será introducir una discretización en las variables espaciales. Para ello, recordaremos el concepto de aproximación externa de un espacio de Hilbert arbitrario W , que consiste en los siguientes elementos (cf. [22]):

- a) Un espacio de Hilbert F y una aplicación lineal, continua e inyectiva \bar{w} de W en F .
- b) Una familia de tripletas $\{W_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ (donde \mathcal{H} es una sucesión generalizada de $\mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ que converge a cero), en la cual, para cada $h \in \mathcal{H}$,
 - i) W_h es un espacio de Hilbert finito dimensional con producto escalar $(\cdot, \cdot)_h$ y norma $\|\cdot\|_h$.
 - ii) p_h es una aplicación lineal continua de W_h en F (operador de prolongación).
 - iii) r_h es una aplicación de W en W_h , posiblemente discontinua (operador de restricción).

Supondremos que la aproximación es

(A1) Estable, esto es $\|p_h\|_{\mathcal{L}(W_h; F)} \equiv \sup_{\substack{u_h \in W_h \\ \|u_h\|_h = 1}} \|p_h u_h\|_F$ está acotado independientemente de h .

(A2) Convergente, es decir:

(A2)₁ $p_h r_h w \rightarrow \bar{w} w$ fuertemente en F cuando $h \in \mathcal{H}$, $h \rightarrow 0$, $\forall w \in W$.

(A2)₂ si $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}' \rightarrow 0$, $w_{h'} \in W_{h'}$, $\forall h' \in \mathcal{H}'$ y

$p_{h'} w_{h'} \rightarrow \psi$ débilmente en F cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$,

entonces $\psi \in \bar{w}(W)$.

Hagamos notar aquí, que este concepto de estabilidad

(en espacio) no coincide con el concepto de estabilidad (en espacio y tiempo) que de alguna forma hemos introducido en la Sección 0.3 aunque existe (como veremos) relación entre ellos.

Supongamos dada una aproximación externa estable de un espacio de Hilbert W "convergente" en el sentido restrictivo siguiente: los operadores r_h están definidos sólo en un subespacio denso \mathcal{W} de W y la condición $(A2)_1$ se verifica sólo para los $w \in \mathcal{W}$, permaneciendo igual la condición $(A2)_2$. Entonces es posible extender la definición de los operadores de restricción r_h a todo el espacio W de tal manera que la condición $(A2)_1$ continua siendo válida para todo $w \in W$ (para la demostración de este resultado c.f. [22]). Por tanto en las condiciones precedentes, podemos afirmar sin que ello suponga restricción, que la aproximación es estable y convergente.

Veamos a continuación, a partir de una aproximación externa, cómo puede construirse la aproximación de un problema variacional del tipo de (0.74). Así, si W es un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, continua y coerciva sobre W ,

$$(0.96) \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W \quad (\alpha > 0),$$

y L es una forma lineal continua sobre W ; denotemos por u la única solución de

$$(0.97) \quad a(u, v) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in W, u \in W.$$

Con objeto de aproximar u , supongamos dada una aproximación externa de Hilbert, estable y convergente del espacio W , $\{(W_h, r_h, p_h)_{h \in \mathcal{H}}, \bar{\omega}, F\}$ y supongamos que para cada $h \in \mathcal{H}$ tenemos:

- (i) Una forma bilineal continua $a_h(\cdot, \cdot)$ sobre W_h que es coerciva, de tal manera que $\exists \alpha_0 > 0$, independiente de h , tal que

$$(0.98) \quad a_h(u_h, u_h) \geq \alpha_0 \|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h \in W_h$$

(ii) Una forma lineal continua sobre W_h , $L_h \in W'_h$, tal que

$$(0.99) \quad \|L_h\|_{W'_h} \leq \beta ,$$

con β independiente de h .

Asociamos a la ecuación (0.97) la siguiente familia de problemas aproximados:

Para $h \in \mathcal{H}$ dado, buscar u_h tal que:

$$(0.100) \quad a_h(u_h, v_h) = \langle L_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in W_h, u_h \in W_h.$$

En las condiciones precedentes para a_h y L_h , está claro que el problema (0.100) posee una única solución.

Para que las soluciones aproximadas u_h converjan hacia la solución exacta u , hará falta relacionar las formas a_h y L_h con a y L resp. mediante las así llamadas hipótesis de consistencia, que son:

(i) Si $v_h \rightarrow v$ débilmente y $w_h \rightarrow w$ fuertemente cuando $h \rightarrow 0$ (1), entonces

$$(0.101) \quad \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} a_h(v_h, w_h) = a(v, w) & \text{y} \\ \lim_{h \rightarrow 0} a_h(w_h, v_h) = a(w, v) \end{cases}$$

(ii) Si $v_h \rightarrow v$ débilmente cuando $h \rightarrow 0$, entonces

$$(0.102) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \langle L_h, v_h \rangle = \langle L, v \rangle$$

En las condiciones (0.96), (0.98), (0.99), (0.101) y (0.102) la solución u_h de (0.83) converge fuertemente hacia la solución u de (0.97) cuando $h \rightarrow 0$ (para la demostración, cf. [22], [23]).

 (1) Decimos que $v_h \rightarrow v$ fuertemente (resp. débilmente) si $p_h v_h \rightarrow \bar{w}v$ fuertemente en F (resp. débilmente).

Consideremos ahora un problema elíptico no lineal:

$$(0.103) \quad a(u,v) + b(u,u,v) = (L,v) \quad \forall v \in W, u \in W$$

donde a y L tienen las propiedades anteriores y b es una forma trilineal continua sobre W que verifica $b(u,v,v) = 0 \quad \forall u,v \in W$. Utilizando el método de compacidad (combinado con el procedimiento de Galerkin) de forma análoga a la descrita en la Sección 0.3, no es difícil probar que (0.103) posee al menos una solución.

Intentamos de nuevo aproximar la solución u . Para ello, consideremos al igual que para el problema lineal, una aproximación de Hilbert externa, estable y convergente de W y supongamos que estamos en las hipótesis (0.98) y (0.99). Para la aproximación de la forma b , supongamos dada para cada $h \in \mathcal{H}$ una forma trilineal continua b_h sobre W_h , tal que :

$$(0.104) \quad |b_h(u_h, v_h, w_h)| \leq c(n, \Omega) \|u_h\|_h \|v_h\|_h \|w_h\|_h \\ \forall u_h, v_h, w_h \in W_h,$$

donde la constante $c = c(n, \Omega)$ depende de n y Ω pero no de h , y tal que

$$(0.105) \quad b_h(u_h, v_h, v_h) = 0 \quad \forall u_h, v_h \in W_h$$

Las hipótesis de consistencia son ahora (0.101), (0.102) y

iii) Si $v_h \rightarrow v$ débilmente cuando $h \rightarrow 0$, y si $w \in W$ entonces

$$(0.106) \quad \lim_{h \rightarrow 0} b_h(v_h, v_h, r_h w) = b(v, v, w)$$

El problema aproximado, para un $h \in \mathcal{H}$ fijo, consiste en buscar $u_h \in W_h$ tal que

$$(0.107) \quad a_h(u_h, v_h) + b_h(u_h, u_h, v_h) = (L_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h;$$

este problema posee solución, que además es única si $\alpha_0^2 > c(n, \Omega)$ (cf. [22], [23]).

En las hipótesis (0.96), (0.98)-(0.106) la familia $p_h u_h$ contiene subsucesiones que convergen fuertemente en F . Y si alguna subsucesión converge hacia \bar{u} entonces u es solución de (0.103). Si la solución de (0.103) es única, entonces toda la familia $p_h u_h$ converge hacia u , cuando $h \rightarrow 0$.

Más adelante, haremos elecciones particulares de W y de la aproximación del mismo. En efecto, como ya hemos indicado, habremos de discretizar problemas del tipo de quasi-Stokes, donde $W = V$ y problemas elípticos quasi-lineales (análogos al problema estacionario de N-S pero sin la condición $\text{div } u = 0$), donde tomaremos $W = H_0^1(\Omega)^n$.

En la determinación de las aproximaciones correspondientes, utilizaremos técnicas asociadas a diversos métodos de discretización, tales como métodos de tipo diferencias finitas ó de tipo elementos finitos.

a) Para una aproximación de W en el sentido de las diferencias finitas, tomaremos $\mathcal{H} = \prod_{j=1}^n (0, h_j^0]$ y, para $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{H}$, definiremos:

(i) $\vec{h}_i \equiv$ el vector $h_i \vec{e}_i$, donde la j -ésima coordenada de \vec{e}_i es δ_{ij} , i.e. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n .

(ii) $\mathcal{R}_h = \{x \in \mathbb{R}^n / x = j_1 \vec{h}_1 + \dots + j_n \vec{h}_n, j_i \in \mathbb{Z} \ 1 \leq i \leq n\}$.

(iii) $\sigma_h(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - h_i/2, x_i + h_i/2]$ para cada $x \in \mathcal{R}_h$. El conjunto $\sigma_h(x)$ se denomina bloque centrado en x .

(iv) $\sigma_h(x, r) = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ -r \leq \alpha \leq +r}} \sigma_h(x + (\alpha/2) \vec{h}_i)$ para cada $r \geq 0$.

Si $r=0$, pondremos $\sigma_h(x, 0) = \sigma_h(x)$.

(v) $\omega_{hx} =$ la función característica del bloque $\sigma_h(x)$.

(vi) δ_{ih} (o bien δ_i) = el operador en diferencias finitas definido a su vez por

$$(\delta_i \psi)(x) = (\psi(x+\vec{h}_i/2) - \psi(x-\vec{h}_i/2)) / h_i .$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces pondremos $\delta_h^\alpha \equiv \delta_{1h}^{\alpha_1} \delta_{2h}^{\alpha_2} \dots \delta_{nh}^{\alpha_n}$.

(vii) A cada conjunto abierto G de \mathbb{R}^n , y para cada entero $k \geq 0$, le asociamos las aproximaciones siguientes

$$(0.108) \quad G_h^k = \{x / x \in \mathcal{R}_h, \sigma_h(x, k) \subset G\}$$

$$(0.109) \quad G_h^k = \{x / x \in \mathcal{R}_h, \sigma_h(x, k) \cap G \neq \emptyset\}$$

(viii) A menudo se precisan otros operadores en diferencias finitas, tales como v_{ih} y \bar{v}_{ih} , definidos resp. por

$$(0.110) \quad v_{ih} \phi(x) = (\phi(x+\vec{h}_i) - \phi(x)) / h_i$$

$$(0.111) \quad \bar{v}_{ih} \phi(x) = (\phi(x) - \phi(x-\vec{h}_i)) / h_i .$$

b) Para una aproximación en el sentido del método de elementos finitos, tomaremos $\mathcal{H} = (0, h_0]$ y, para un abierto acotado G de \mathbb{R}^n , se dirá que una familia de n -símplices $(1) \{T_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ es una triangularización admisible de G si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) Todo $T \in \mathcal{T}_h$ posee diámetro $\delta(T) \equiv h_T \leq h$,

ii) $G(h) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \subset G$

(1) Un n -símplex T es la envolvente convexa de $(n+1)$ puntos no contenidos en un mismo hiperplano $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n$ llamados los vértices del n -símplex.

iii) Si $T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$, entonces $T_i \cap T_j = \emptyset$ y, ó bien $T_i \cap T_j = \emptyset$ ó bien $T_i \cap T_j$ es una cara m -dimensional perteneciente a ambos (para algún $m, 0 \leq m \leq n-1$).

Denotaremos por $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ una familia de triangulaciones admisibles de G ; a cada una de ellas le asociamos los siguientes valores:

$$(0.112) \quad \rho(h) = \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T,$$

$$(0.113) \quad \rho'(h) = \inf_{T \in \mathcal{T}_h} \rho'_T,$$

$$(0.114) \quad \sigma(h) = \sup_{T \in \mathcal{T}_h} (\rho_T / \rho'_T),$$

donde $\rho = \rho_T$ es el diámetro de la menor bola que contiene a T y $\rho' = \rho'_T$ es el diámetro de la mayor bola contenida en T (la magnitud de T).

En el método de los elementos finitos, el objetivo final consiste en hacer tender $\rho(h)$ a 0. Más tarde haremos algunas restricciones sobre los $\sigma(h)$ a fin de obtener aproximaciones convergentes.

Una subfamilia de la familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ se llamará una familia regular de triangulaciones de G si $\sigma(h)$ permanece acotado cuando $\rho(h) \rightarrow 0$, i.e.

$$(0.115) \quad \sigma(h) \leq \alpha < +\infty \text{ para } \rho(h) \rightarrow 0$$

y $G(h)$ converge hacia G en el siguiente sentido:

" Para cada conjunto compacto $K \subset G$, existe $\delta = \delta(K) > 0$ tal que si $\rho(h) \leq \delta(K)$ entonces $G(h) \supset K$.

Continuaremos denotando por $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ una familia regular de triangulaciones admisibles de G .

Dado $h \in \mathcal{H}$, a cada $T \in \mathcal{T}_h$ le asociamos:

i) Un espacio P_T de dimensión finita n_T (generalmente P_T es un espacio de funciones polinómicas)

ii) Un conjunto Σ_T de n_T grados de libertad, i.e. n_T formas lineales ϕ_i , $1 \leq i \leq n_T$, definidas sobre P_T .

Entonces, la tripleta (T, P_T, Σ_T) es un elemento finito si el conjunto Σ_T es P_T -unisolvante, i.e. si existen n_T funciones $p_i, i=1, \dots, n_T$, del espacio P_T , linealmente independientes, tales que:

$$(0.116) \quad \phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_T.$$

Las funciones p_i ($1 \leq i \leq n_T$) se llaman funciones de base del elemento finito (ó funciones de forma, en la terminología de las Ciencias de la Ingeniería), pues de la relación (0.116), se obtiene:

$$(0.117) \quad p = \sum_{i=1}^{n_T} \phi_i(p) p_i \quad \forall p \in P_T$$

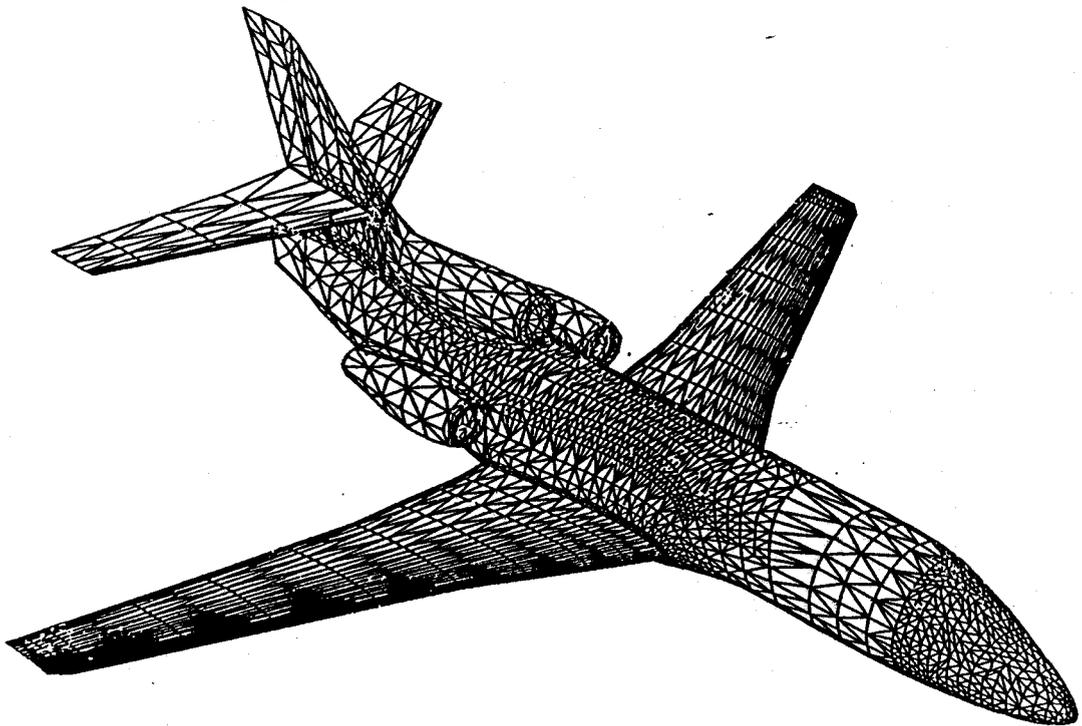
Cuando el conjunto de grados de libertad Σ_T está constituido por los valores de la función en ciertos puntos (convenientemente elegidos) del conjunto T , llamados nodos, el elemento finito se dice de tipo Lagrange, mientras que si en los grados de libertad aparece el valor de alguna derivada parcial se dice que es de tipo Hermite.

Habitualmente, fijar un método de elementos finitos consiste en fijar una familia regular de triangulaciones admisibles y un tipo de elemento finito, i.e. un espacio P_T y un conjunto de grados de libertad Σ_T para cada $T \in \mathcal{T}_h$ ($h \in \mathcal{H}$) de tal manera que todos ellos puedan obtenerse fácilmente a partir de un elemento finito de referencia $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.

0.6. RESULTADOS NUMERICOS.

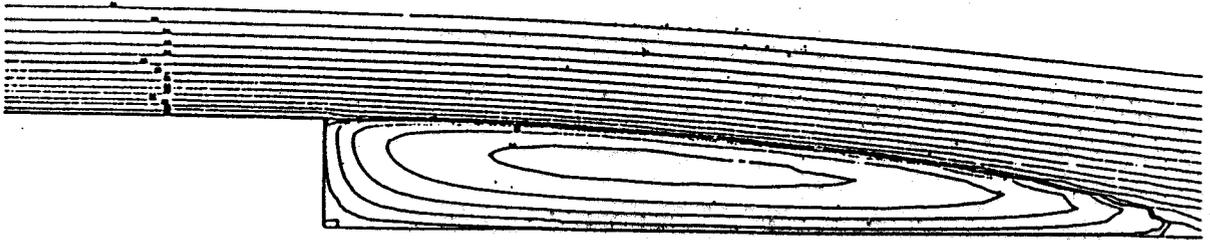
Los esquemas de discretización que posteriormente describiremos y cuya convergencia probaremos, se han obtenido modificando dos algoritmos debidos a R. Glowinski et al. (1980), que han producido muy buenos resultados numéricos.

Veremos a continuación algunos de estos resultados. El objetivo final de los cálculos realizados es determinar el campo de velocidades del aire en torno a un avión (que es el obstáculo al fluido; ver Fig 0.1). Como etapa previa, la geometría del problema queda limitada a una parte del mismo, en concreto una sección plana de una tobera ("nozzle").



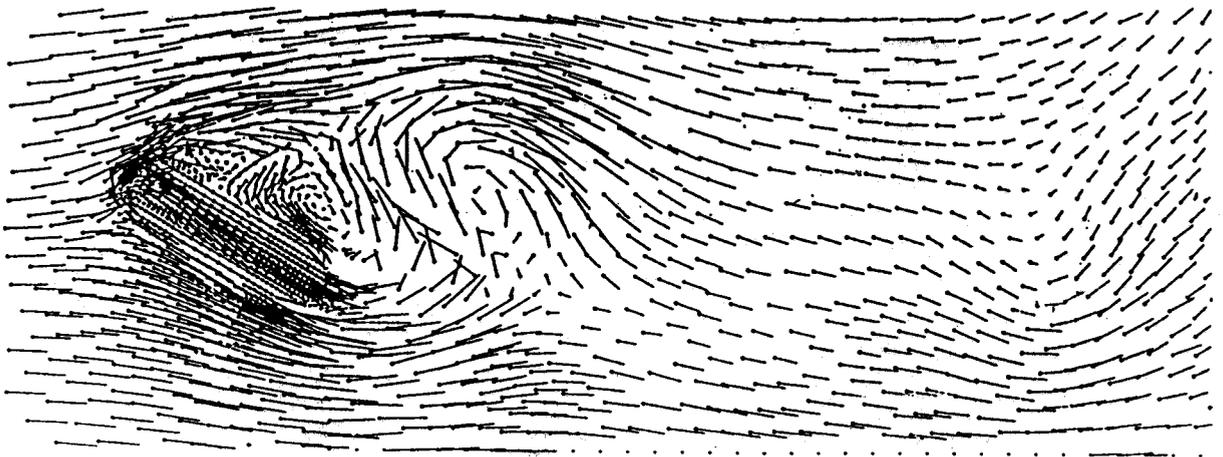
-Fig. 0.1-

Mallado tridimensional por elementos finitos usado para el cálculo (Avión Marcel Dassault-Breguet Aviations, Falcon 50)



-Fig 0.2-

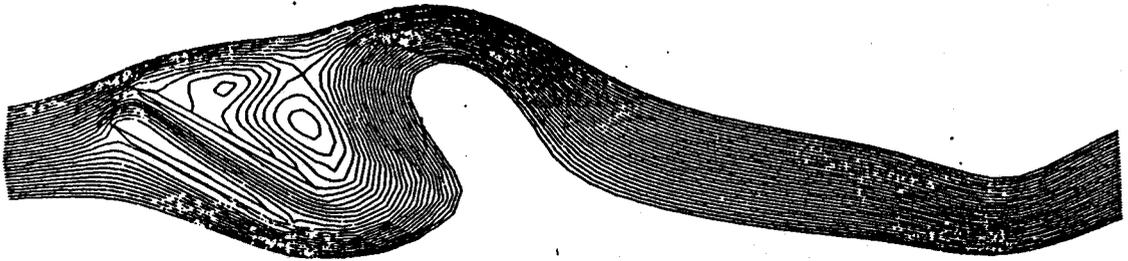
La Fig.0.2 muestra un ejemplo test del método de Głowinski sobre un escalón; se trata del dibujo de las líneas de corriente con ángulo de incidencia nulo y n° de Reynolds $Re = 191.0$.



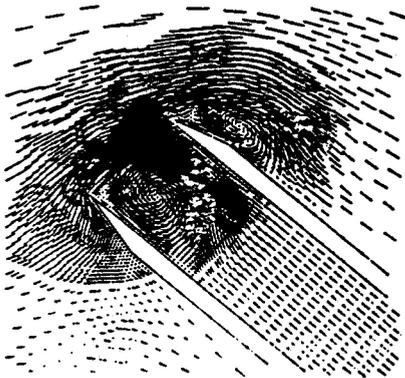
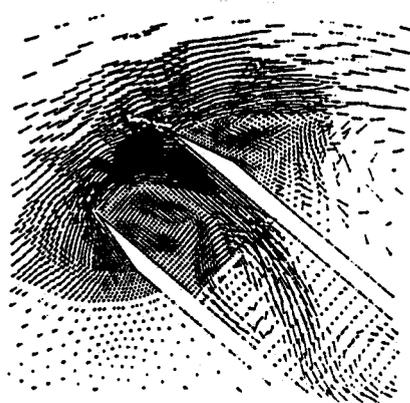
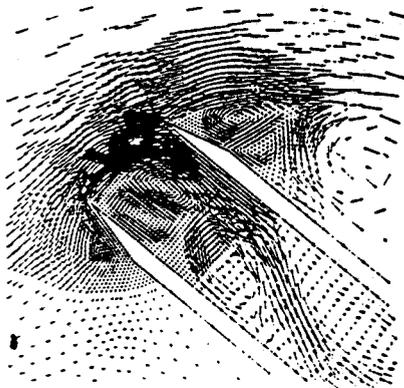
-Fig. 0.3-

La Fig.0.3 corresponde a una tobera idealizada. El dibujo muestra la distribución de velocidades alrededor y detrás de la tobera; aquí, $Re=100$, el tiempo considerado ha sido de 100 sg. y el paso de discretización en tiempo utili-

zado es $k=0.1$. La Fig.0.4 muestra las líneas de corriente del fluido del problema anterior.



-Fig. 0.4-



-Fig 0.5-

La Fig.0.5 muestra otra visión del campo de velocidades sobre el mismo problema, con un n° de Reynolds mayor, $Re=750$, cuando se realizan 40, 60, 120 y 140 ciclos de iteración. Evidentemente, la Figura posee apariencia realista, con formación de vórtices alrededor y dentro de la tobera.

El hecho de que los resultados numéricos sean admisibles quedará justificado rigurosamente por los teoremas de convergencia enunciados más adelante.

CAPITULO I.-

1.1. DESCRIPCION DE LA DISCRETIZACION EN TIEMPO.

Elegiremos un pequeño paso de discretización en tiempo $k > 0$, con $N=T/k$, y un parámetro $\theta \in (0, 1/2]$.

ALG 1 Describiremos primero un método de direcciones alternadas del tipo de Peaceman-Rachford. Definimos las funciones $u^0, u^{1/2}, u^1, \dots, u^{N-1/2}, u^N(1)$, como sigue:

$$(1.1) \quad u^0 = u_0;$$

después, dado $m \geq 0$ y $u^m \in H^1_0(\Omega)^n$, calculamos la solución $u^{m+1/2}$ de

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{1}{k/2}(u^{m+1/2} - u^m, v) + v(\theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^m, v) = (f^{m+1/2}, v) \\ - \hat{b}(u^m, u^m, v) \quad \forall v \in V, u^{m+1/2} \in V, \end{cases}$$

y calculamos una solución u^{m+1} de

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{k/2}(u^{m+1} - u^{m+1/2}, w) + v((1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, w) \\ + \hat{b}(u^{m+1}, (1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, w) = (f^{m+1}, w) \\ \forall w \in H^1_0(\Omega)^n, u^{m+1} \in H^1_0(\Omega)^n \end{cases}$$

En (1.2) y (1.3), $f^{m+i/2}$ está dada por

(1) $u^{m+i/2}$ $i=1,2$ depende de k , para simplificar, pondremos $u^{m+i/2}$ en lugar de $u_k^{m+i/2}$.

$$f^{m+i/2}(x) = \frac{2}{k} \int_{(m+\frac{i-1}{2})k}^{(m+\frac{i}{2})k} f(x,t) dt \quad \text{para } i=1,2.$$

ALG 2 Consideraremos a continuación otro método de direcciones alternadas del tipo de Strang. Definiremos ahora las funciones $u^0, u^{1/4}, u^{3/4}, u^1, \dots, u^{N-1/4}, u^N$ como sigue:

$$(1.4) \quad u^0 = u_0;$$

después, dados $m \geq 0$ y $u^m \in H_0^1(\Omega)^n$, calculamos la solución $u^{m+1/4}$ de

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{k/4} (u^{m+1/4} - u^m, v) + v ((\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^m, v)) = (f^{m+1/4}, v) \\ - \hat{b}(u^m, u^m, v) \quad \forall v \in V, u^{m+1/4} \in V, \end{cases}$$

calculamos una solución $u^{m+3/4}$ de

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{k/2} (u^{m+3/4} - u^{m+1/4}, w) + v ((1-\theta)u^{m+3/4} + \theta u^{m+1/4}, w) \\ + \hat{b}(u^{m+3/4}, (1-\theta)u^{m+3/4} + \theta u^{m+1/4}, w) = (f^{m+3/4}, w) \\ \forall w \in H_0^1(\Omega)^n, u^{m+3/4} \in H_0^1(\Omega)^n \end{cases}$$

y finalmente calculamos la solución u^{m+1} de

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{1}{k/4} (u^{m+1} - u^{m+3/4}, v) + v ((\theta u^{m+1} + (1-\theta)u^{m+3/4}, v)) \\ = (f^{m+1}, v) - \hat{b}(u^m, u^{m+3/4}, v) \quad \forall v \in V, u^{m+1} \in V, \end{cases}$$

En (1.5)-(1.7) hemos usado la siguiente notación

$$f^{m+3/4}(x) = \frac{2}{k} \int_{(m+\frac{1}{4})k}^{(m+\frac{3}{4})k} f(x,t) dt ,$$

$$f^{m+i/4}(x) = \frac{4}{k} \int_{(m+\frac{i-1}{4})k}^{(m+\frac{i}{4})k} f(x,t)dt \quad \text{para } i=1 \text{ e } i=4 .$$

Obviamente, cada $u^{m+i/j}$ es, al menos formalmente, una aproximación de $u(.,(m+i/j)k)$.

Observamos, como ya anunciábamos, que la discretización en tiempo ha reducido el problema, en ambos casos, a resolver una serie de problemas elípticos de dos tipos, en cada uno de los cuales ha desaparecido una de las dificultades inherentes al problema. Los problemas (1.2), (1.5) y (1.7) son problemas lineales del tipo quasi-Stokes (c.f. (0.34)). Pueden escribirse todos ellos en la forma:

$$(1.8) \quad \begin{cases} -\mu \Delta u + \lambda u + \nabla p = g & , \quad \text{div } u = 0 \quad \text{en } \Omega , \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega . \end{cases}$$

Los problemas (1.3) y (1.6) son problemas quasi-lineales (donde ha desaparecido la incompresibilidad), cuya formulación general es :

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\mu \Delta u + \lambda u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{2}(\text{div } u)u = g & \text{en } \Omega , \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega ; \end{cases}$$

en (1.8) y (1.9) μ y λ son parámetros positivos y $g \in L^2(\Omega)^n$; estos datos están determinados por v , k , m y el algoritmo seleccionado.

La existencia y unicidad de solución para el problema (1.8) queda asegurada sin más que tener en cuenta su formulación variacional:

$$\text{"Buscar } u \in V \text{ tal que } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V" ,$$

donde $a(u,v) = \mu ((u,v)) + \lambda(u,v)$ es una forma bilineal, continua y coerciva sobre V y $L(v) = (g,v)$ es una forma

lineal continua sobre V. En estas condiciones, como vimos en la Sección 0.3, existe una única solución del problema.

Veamos, a continuación, que el problema quasi-lineal (1.9) posee solución. Para ello consideremos la siguiente formulación equivalente del mismo: "Buscar $u \in H_0^1(\Omega)^n$ tal que

$$(1.10) \quad \mu((u,v)) + \lambda(u,v) + \hat{b}(u,u,v) = (g,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n."$$

Sea $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ una base topológica de $H_0^1(\Omega)^n$ densa en él (su existencia está asegurada por ser $H_0^1(\Omega)^n$ separable).

Para cada $m \geq 1$, definimos una solución aproximada de (1.10) mediante las relaciones

$$(1.11) \quad u_m = \sum_{i=1}^m \xi_{im} w_i, \quad \xi_{im} \in \mathbb{R},$$

$$(1.12) \quad \mu((u_m, w_k)) + \lambda(u_m, w_k) + \hat{b}(u_m, u_m, w_k) = (g, w_k) \quad k=1..m.$$

Las ecuaciones (1.12) constituyen un sistema no lineal para las $\xi_{1m}, \dots, \xi_{mm}$ y la existencia de una solución de tal sistema no es obvia, pero es consecuencia del Lema siguiente (para su demostración cf. [14]):

Lema: Sea X un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $[..]$ y norma $[.]$ y sea P una aplicación continua de X en sí mismo tal que:

$$(1.13) \quad [P(\xi), \xi] > 0 \quad \text{para} \quad [\xi] = k > 0$$

entonces existe $\xi \in X, [\xi] \leq k$ tal que

$$(1.14) \quad P(\xi) = 0.$$

Usando este resultado, queda asegurada la existencia de u_m : tomemos como X el espacio engendrado por w_1, \dots, w_m , sea el producto escalar en X el inducido por $H_0^1(\Omega)^n$, y $P = P_m$ definido por

$$[P_m(u), v] = (P_m(u), v) = \mu (u, v) + \lambda (u, v) + \hat{b}(u, u, v) - (g, v)$$

$$\forall u, v \in X .$$

La continuidad de la aplicación P_m es inmediata y, además se verifica (1.13) para k suficientemente grande porque, gracias a (0.47),

$$\begin{aligned} [P_m(u), u] &= \mu \|u\|^2 + \lambda |u|^2 + \hat{b}(u, u, u) - (g, u) \\ &= \mu \|u\|^2 + \lambda |u|^2 - (g, u) \geq \mu \|u\|^2 - \|g\|_{V'} \|u\| , \end{aligned}$$

de donde

$$[P_m(u), u] \geq \|u\| (\mu \|u\| - \|g\|_{V'})$$

Así pues, existe al menos una solución de (1.11)-(1.12).

Multiplicando ahora (1.12) por ξ_{k_m} y sumando las correspondientes igualdades para $k=1\dots m$, obtenemos:

$$(1.15) \quad \mu \|u_m\|^2 + \lambda |u_m|^2 + \hat{b}(u_m, u_m, u_m) = (g, u_m)$$

y, por (0.47),

$$\mu \|u_m\|^2 + \lambda |u_m|^2 = (g, u_m) \geq \|g\|_{V'} \|u_m\|$$

de donde

$$(1.16) \quad \|u_m\| \leq \frac{1}{\mu} \|g\|_{V'} .$$

Puesto que la sucesión $\{u_m\}$ permanece acotada en $H_0^1(\Omega)^n$, existe una función u en $H_0^1(\Omega)^n$ y una subsucesión $m' \rightarrow \infty$ tal que

$$(1.17) \quad u_{m'} \rightarrow u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega)^n .$$

Como la inyección de $H_0^1(\Omega)^n$ en $L^2(\Omega)^n$ es compacta, tenemos también que

$$(1.18) \quad u_{m'} \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega)^n$$

Veamos que en los supuestos (1.17) y (1.18) se verifica que

$$(1.19) \quad \hat{b}(u_{m'}, u_{m'}, v) \rightarrow \hat{b}(u, u, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^n.$$

En efecto,

$$\hat{b}(u_{m'}, u_{m'}, v) = \frac{1}{2} [b(u_{m'}, u_{m'}, v) - b(u_{m'}, v, u_{m'})] ;$$

por una parte,

$$b(u_{m'}, v, u_{m'}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{m',i} u_{m',j} D_i v_j \, dx ,$$

pero $u_{m',i}$ converge hacia u_i en la topología fuerte de $L^2(\Omega)^n$. Puesto que $D_i v_j \in L^\infty(\Omega)$, es fácil ver que

$$\int_{\Omega} u_{m',i} u_{m',j} D_i v_j \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u_i u_j D_i v_j \, dx ;$$

$$\text{luego } b(u_{m'}, v, u_{m'}) \rightarrow b(u, v, u).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} b(u_{m'}, v, u_{m'}) &= \int_{\Omega} u_{m',i} D_i u_{m',j} v_j \, dx \\ &= - \int_{\Omega} D_i u_{m',i} u_{m',j} v_j \, dx - \int_{\Omega} u_{m',i} D_i v_j u_{m',j} \, dx \end{aligned}$$

y como $u_{m'} \rightarrow u$ fuertemente en $L^2(\Omega)^n$ y $\text{div } u_{m'} \rightarrow \text{div } u$ débilmente en $L^2(\Omega)^n$, tenemos finalmente que

$$b(u_{m'}, u_{m'}, v) \rightarrow b(u, u, v) ,$$

con lo que se verifica (1.19).

Para probar la unicidad de solución, habrá que trasladarse al problema aproximado también en espacio, pues sólo tomando los pasos de discretización en espacio y tiempo sometidos a determinadas restricciones y suficientemente

pequeños obtendremos las desigualdades que permitan asegurar tal propiedad del problema quasi-lineal.

Veamos, a continuación, que el esquema ALG 1 posee un error de truncamiento local de orden k .

En efecto, (1.2) conduce formalmente a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{k/2} [u((m+1/2)k) - u(mk)] - \theta v \Delta u((m+1/2)k) - (1-\theta)v \Delta u(mk) \\ + \nabla p((m+1/2)k) = f((m+1/2)k) - (u(mk) \cdot \nabla)u(mk) \\ - \frac{1}{2} (\operatorname{div} u(mk))u(mk) \end{aligned}$$

Si suponemos u , p y f lo suficientemente regulares (e.g. de clase C^3), obtenemos, desarrollando por Taylor alrededor de mk , que el error local cometido es

$$\begin{aligned} e_1(mk) = u_t(mk) + \frac{k}{4} u_{tt}(\xi_1) - \theta v [\Delta u(mk) + \frac{k}{2} \Delta u_t(\xi_2)] \\ - (1-\theta)v \Delta u(mk) + [\nabla p(mk) + \frac{k}{2} \nabla p_t(\xi_3)] \\ + (u(mk) \cdot \nabla)u(mk) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u(mk))u(mk) \\ - [f(mk) + \frac{k}{2} f_t(\xi_4)] \end{aligned}$$

$$\text{donde } mk < \xi_i < (m+1/2)k \quad 1 \leq i \leq 4$$

teniendo en cuenta que u y p verifican (0.48) en mk y que las derivadas de u , p y f están acotadas, obtenemos finalmente:

$$|e_1(mk)| \leq \frac{k}{4} C_1 + \frac{k v \theta}{2} C_2 + \frac{k}{2} C_3 + \frac{k}{2} C_4 \equiv k C_1^*$$

Por otra parte la expresión formal de (1.3) es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k/2} [u((m+1)k) - u((m+1/2)k)] - \theta \nabla \Delta u((m+1/2)k) \\ & - (1-\theta) \nabla \Delta u((m+1)k) + [u((m+1)k) \cdot \nabla] [(1-\theta)u((m+1)k) \\ & + \theta u((m+1/2)k)] + \frac{1}{2} \operatorname{div} u((m+1)k) \cdot [(1-\theta)u((m+1)k) \\ & + \theta u((m+1/2)k)] = f((m+1)k) \end{aligned}$$

En las mismas hipótesis de regularidad anteriores, desarrollando por Taylor alrededor de $(m+1/2)k$ obtenemos que el error local cometido es

$$\begin{aligned} e_2((m+1/2)k) &= u_t((m+1/2)k) + \frac{k}{4} u_{tt}(\xi_1) - \theta \nabla \Delta u((m+1/2)k) \\ &- (1-\theta) \nabla [\Delta u((m+1/2)k) + \frac{k}{2} u_t(\xi_2)] \\ &+ \{ [u((m+1/2)k) + \frac{k}{2} u_t(\xi_3)] \cdot \nabla \} \{ (1-\theta) [u((m+1/2)k) \\ &+ \frac{k}{2} u_t(\xi_3)] + \theta u((m+1/2)k) \} + \frac{1}{2} \{ \operatorname{div} [u((m+1/2)k) \\ &+ \frac{k}{2} u_t(\xi_3)] \} \{ (1-\theta) [u((m+1/2)k) + \frac{k}{2} u_t(\xi_3)] + \theta u((m+1/2)k) \\ &- [f((m+1/2)k) + \frac{k}{2} f_t(\xi_4)] \} \end{aligned}$$

donde $(m+1/2)k < \xi_i < (m+1)k$ $1 \leq i \leq 4$, y nuevamente teniendo en cuenta que u verifica (0.48) en $(m+1/2)k$, obtenemos:

$$|e_2((m+1/2)k)| \leq k C_2^*$$

Análogamente, puede probarse que el error del esquema ALG 2 es de orden k^2 .

A pesar de que ALG 2 es más complejo que ALG 1, en la práctica resulta casi tan económico como éste, debido al hecho de que el problema lineal ((1.2), (1.5) ó (1.7)) puede resolverse rápidamente. La mayor parte del tiempo de cálculo asociado a la resolución de una etapa completa del método de direcciones alternadas ((1.2)-(1.3) ó (1.5)-(1.7)) se utiliza de hecho para resolver el subproblema no lineal ((1.3) ó (1.6)). Como veremos más adelante, una técnica bien adaptada consiste en reformular éste en el sentido de los

mínimos cuadrados y aplicar algoritmos de tipo gradiente conjugado en el cálculo del mínimo correspondiente.

Observemos que el parámetro θ acompaña, en todos los casos, a la función con divergencia nula, i.e. a la aproximación de u que continúa verificando hipótesis de incompresibilidad. Así, según varíe θ entre $1/2$ y 0 , "otorgamos mayor ó menor importancia" al hecho de que el fluido sea incompresible. Desde un punto de vista físico, puede pensarse que (por ejemplo) ALG 1 corresponde, en cada intervalo $(mk, (m+1)k)$, a dos etapas de movimiento del fluido:

- a) Una primera etapa (de duración $k/2$ unidades de tiempo) en la que el fluido obedece a un movimiento pseudo-deslizante, libre prácticamente de fuerzas inerciales.
- b) Una segunda etapa en la cual, por el contrario, las fuerzas convectivas cobran importancia pero, por el contrario, el fluido deja de ser incompresible.

Desde el punto de vista computacional, la elección óptima de θ es $\theta=1/2$ (resp. $\theta=2/3$) si se usa ALG 1 (resp. ALG 2), debido a que, para dicho valor de θ , muchos de los subprogramas pueden usarse tanto para los subproblemas lineales como para los no lineales, con la correspondiente reducción de programación.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA APROXIMACIÓN EN ESPACIO.

Para aproximar en las variables espaciales los problemas (1.8) y (1.9), consideraremos una aproximación externa de Hilbert del espacio $H_0^1(\Omega)^n = \{(W_h, r_h, P_h)_{h \in \mathcal{H}}, \bar{\omega}, F\}$.

Para cada $h \in \mathcal{H}$ supondremos dados un subespacio V_h de W_h y una aplicación $s_h: V \rightarrow V_h$ de tal forma que se tenga:

$$(A3) \quad \begin{cases} s_h w \rightarrow w \text{ fuertemente en } L^2(\Omega)^n \text{ cuando } h \in \mathcal{H}, h \rightarrow 0, \\ \text{para cada } w \in \mathcal{V} \end{cases} .$$

$$(A4) \quad \begin{cases} \{(V_h, P_h|_{V_h}, s_h)_{h \in \mathcal{H}}, \bar{\omega}|_V, F\}, \text{ observada como una aproximación externa de } V, \text{ es estable y convergente.} \end{cases}$$

En estas hipótesis, el problema aproximado de (1.8) será el siguiente:

$$(1.20) \quad \mu((u_h, v_h))_h + \lambda(u_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h. \quad (1)$$

Claramente, al igual que (1.8), el problema finito-dimensional (1.20) posee solución única.

Para discretizar el problema (1.9), supongamos dada, para cada $h \in \mathcal{H}$, una forma trilineal continua \hat{b}_h definida sobre W_h . En este caso, el problema aproximado de (1.9) queda como sigue:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \mu((u_h, v_h))_h + \lambda(u_h, v_h) + \hat{b}_h(u_h, u_h, v_h) &= (g, v_h) \\ \forall v_h \in W_h, u_h \in W_h. \end{aligned}$$

El problema es aún no lineal. Es fácil ver que posee solución, (se razona como hicimos para (1.9)). Se puede

(1) Como antes, $((\cdot, \cdot))_h$ designa el producto escalar en W_h .

probar también que, bajo ciertas restricciones para k y h (que en la práctica se verifican siempre que se esté en la situación de los resultados de convergencia que siguen; cf. el Cap IV), la solución es única.

A continuación, y puesto que será de utilidad en el siguiente Capítulo, escribiremos los algoritmos ALG 1 y ALG 2 en su versión totalmente discretizada.

ALG 1 Definimos las funciones $u_h^0, u_h^{1/2}, u_h^1, \dots, u_h^{N-1/2}, u_h^N$ como sigue:

$$(1.22) \quad u_h^0 = \text{la proyección ortogonal de } u^0 \text{ en } V_h \text{ para el producto escalar } (\cdot, \cdot);$$

después, dados $m \geq 0$ y $u_h^m \in W_h$, calculamos la solución $u_h^{m+1/2}$ de

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k/2} (u_h^{m+1/2} - u_h^m, v_h) + v ((\theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta)u_h^m), v_h)_h \\ & = (f^{m+1/2}, v_h) - \hat{b}_h(u_h^m, u_h^m, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^{m+1/2} \in V_h \end{aligned} \right.$$

y posteriormente una solución u_h^{m+1} de

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k/2} (u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}, w_h) + v ((1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, w_h)_h \\ & + \hat{b}_h(u_h^{m+1}, (1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, w_h) = (f^{m+1}, w_h) \\ & \quad \forall w_h \in W_h, u_h^{m+1} \in W_h. \end{aligned} \right.$$

ALG 2 Definimos las funciones $u_h^0, u_h^{1/4}, u_h^{3/4}, u_h^1, \dots, u_h^{N-1/4}, u_h^N$ como sigue:

$$(1.25) \quad u_h^0 = \text{la proyección ortogonal de } u^0 \text{ en } V_h \text{ para el producto escalar } (\cdot, \cdot);$$

después, dados $m \geq 0$ y $u_h^m \in W_h$, calculamos la solución $u_h^{m+1/4}$ de

$$(1.26) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k/4} (u_h^{m+1/4} - u_h^m, v_h) + v ((\theta u_h^{m+1/4} + (1-\theta)u_h^m), v_h)_h \\ & = (f^{m+1/4}, v_h) - \hat{b}_h(u_h^m, u_h^m, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^{m+1/4} \in V_h \end{aligned} \right.$$

posteriormente una solución $u_h^{m+1/4}$ de

$$(1.27) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k/2} (u_h^{m+3/4} - u_h^{m+1/4}, w_h) + v (((1-\theta)u_h^{m+3/4} + \theta u_h^{m+1/4}), w_h)_h \\ & + \hat{b}_h(u_h^{m+1/4}, (1-\theta)u_h^{m+3/4} + \theta u_h^{m+1/4}, w_h) = (f^{m+3/4}, w_h) \\ & \quad \forall w_h \in W_h, u_h^{m+3/4} \in W_h \end{aligned} \right.$$

y finalmente la solución u_h^{m+1} de

$$(1.28) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k/4} (u_h^{m+1} - u_h^{m+1/4}, v_h) + v ((\theta u_h^{m+1} + (1-\theta)u_h^{m+1/4}), v_h)_h \\ & = (f^{m+1}, v_h) - \hat{b}_h(u_h^m, u_h^{m+1/4}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^{m+1} \in V_h. \end{aligned} \right.$$

En consecuencia, después de haber introducido discretizaciones en las variables de espacio y tiempo, se ha de resolver un número finito de problemas finito-dimensionales. En el caso de los problemas del tipo de quasi-Stokes nos encontramos, desafortunadamente, con que no es fácil, en general, hallar una base de V_h ; esto sugiere resolver tales problemas mediante un método iterado, del tipo de Uzawa ó Arrow-Hurwicz que describiremos más adelante. Una ventaja de la utilización de un método de este tipo es la obtención de una aproximación $p_h^{m+1/2}$ en ALG 1, (resp. $p_h^{m+1/4}$, p_h^{m+1} en ALG 2) para la presión p en el tiempo $(m+1/2)k$ (resp. $(m+1/4)k$ y $(m+1)k$).

Por otra parte, como ya hemos anunciado, resulta conveniente resolver los problemas no lineales mediante una formulación conveniente en el sentido de los mínimos cuadrados, combinada con algoritmos de tipo gradiente conjugado.

A continuación, presentamos algunos ejemplos particulares de aproximación en espacio.

APROX 1 Consideraremos en primer lugar una aproximación en el sentido de las diferencias finitas. En este caso,

$$\mathcal{H} = \prod_{i=1}^n (0, h_i^0], \text{ con } h_i^0 > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Consideraremos el espacio de Hilbert $F = L^2(\Omega)^{n(n+1)}$, dotado del producto escalar habitual, y sea $\omega : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow F$ la aplicación definida por

$$(1.29) \quad \bar{\omega}(u) = (u, D_1 u, \dots, D_n u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Es claro que

$$\|\bar{\omega}u\|_F = \|u\|_{H_0^1(\Omega)^n}$$

por lo que $\bar{\omega}$ es una aplicación lineal continua e inyectiva de $H_0^1(\Omega)^n$ en F .

Para cada $h \in \mathcal{H}$, tenemos:

$$(1.30) \quad W_h = \{w_h / w_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^1} w_h(M) w_{hM}(x), w_h(M) \in \mathbb{R}^n\} \quad (1)$$

Las funciones w_{hM} , con $M \in \Omega_h^1$, constituyen una base de W_h . La dimensión de W_h es $n \cdot N(h)$ donde $N(h)$ es el cardinal de Ω_h^1 ; así pues, W_h tiene dimensión finita.

Dotaremos W_h del producto escalar $((\dots))_h$, definido por

$$(1.31) \quad ((v_h, w_h))_h = \int_{\Omega} v_h(x) w_h(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_i v_h(x) \delta_i w_h(x) dx$$

$$\forall v_h, w_h \in W_h.$$

 (1) Recuérdese la notación introducida en la Sección 0.5.

Para cada $h \in \mathcal{H}$, el operador de prolongación p_h es el análogo discreto de \bar{w} , i.e.

$$(1.32) \quad p_h u_h = (u_h, \delta_1 u_h, \dots, \delta_n u_h) \quad \forall u_h \in W_h.$$

Se verifica entonces que

$$\|p_h u_h\|_F = \|u_h\|_h,$$

por lo cual

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(W_h, F)} = 1.$$

Como ya hemos visto, bastará por otra parte definir la aplicación r_h en un subconjunto denso (e.g. $\mathcal{D}(\Omega)^n$) de $H_0^1(\Omega)^n$. Pongamos entonces

$$(1.33) \quad (r_h u)(M) = u(M) \quad \forall M \in \Omega_h^1 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)^n$$

las relaciones (1.33) determinan una aplicación $r_h: \mathcal{D}(\Omega)^n \rightarrow W_h$ y no es difícil probar que la correspondiente aproximación externa de $H_0^1(\Omega)^n$, es estable y convergente.

Consideremos ahora el nuevo producto escalar $((\dots))_{W_{ho}}$, definido por

$$(1.34) \quad ((v_h, w_h))_{W_{ho}} = \sum_{i=1}^n \delta_i v_h \cdot \delta_i w_h \, dx \quad \forall v_h, w_h \in W_h;$$

entonces es fácil ver que $((\dots))_h$ y $((\dots))_{W_{ho}}$ introducen normas equivalentes, con constantes de equivalencia independientes de h . En consecuencia, con este nuevo producto escalar sobre cada W_h , los operadores de prolongación p_h continúan verificando la condición de estabilidad (A1) de la Sección 0.5.

Pongamos ahora

$$(1.35) \quad V_h = \{v_h / v_h \in W_h, \operatorname{div}_h v_h \equiv \sum_{i=1}^n \nabla_{ih} v_{ih}(M) = 0 \quad \forall M \in \Omega_h^1\}$$

Desgraciadamente, no es fácil construir explícitamente

una base del subespacio V_h de W_h . Finalmente, introducimos la aplicación $s_h: \mathcal{U} \rightarrow V_h$, definida como sigue:

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_h v = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1} (s_h v)(M) w_{hM} \quad \text{con} \\ (s_h v)_i(M) = \text{valor medio de } v_i \text{ en la cara} \\ x_i = (m_i - \frac{1}{2})h_i \text{ de } \sigma_h(M) \end{array} \right.$$

(compruébese que con la definición (1.36) tenemos $s_h(v) \in V_h \forall v \in \mathcal{U}$). Entonces no es difícil probar que, con esta elección de s_h se verifican (A3) y (A4).

En el caso del problema lineal (1.8), con esta aproximación queda introducido el correspondiente problema aproximado (1.20). La forma $v_h \rightarrow \mu(u_h, v_h)_h + \lambda(u_h, v_h) - (g, v_h)$ aparece como una forma lineal definida sobre W_h que se anula en V_h . Así pues, introduciendo los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones que definen V_h (cf. (1.35)), encontramos que existen $\lambda_M \in \mathbb{R}$, $M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1$ tales que la ecuación

$$(1.37) \quad \mu(u_h, v_h)_h + \lambda(u_h, v_h) - (g, v_h) = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1} \lambda_M \sum_{i=1}^n (v_{ih} v_{ih}(M))$$

se verifica para todo $v_h \in W_h$.

Introduzcamos ahora el operador $D_h \in \mathcal{L}(W_h, L^2(\Omega))$, definido por

$$(1.38) \quad D_h v_h = \sum_{i=1}^n v_{ih} v_{ih} \quad \forall v_h \in W_h ;$$

su adjunto $D_h^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), W_h)$ está dado por

$$(1.39) \quad (D_h^* \theta, v_h) = (\theta, D_h v_h) \quad \forall v_h \in W_h \quad \forall \theta \in L^2(\Omega)^n.$$

Sea Π_h la función escalonada que se anula fuera de $\Omega(h) = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1} \sigma_h(M)$ y que satisface:

$$(1.40) \quad \Pi_h(x) = \Pi_h(M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i} \lambda_M \quad \forall x \in \sigma_h(M), M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1;$$

entonces, (1.37) puede escribirse como sigue

$$\mu((u_h, v_h))_h + \lambda(u_h, v_h) - (g, v_h) = (\Pi_h, D_h^* v_h)$$

ó bien, equivalentemente,

$$(1.41) \quad \mu((u_h, v_h))_h + \lambda(u_h, v_h) - D_h^* \Pi_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in W_h$$

Tomando sucesivamente $v_h = w_{hM} e_j$ para $M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1$ $j=1 \dots n$ podemos interpretar (1.41) como el esquema (que toma la forma clásica de un esquema en diferencias):

$$(1.42) \quad -\mu \sum_{i=1}^n \delta_{ih}^2 u_h(M) + \lambda u_h(M) + (\nabla_h \Pi_h)(M) = g_h(M), M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1,$$

donde $\nabla_h(\Pi_h(M))$ es el vector $(\nabla_{1h} \Pi_h(M), \dots, \nabla_{nh} \Pi_h(M))$ y

$$(1.43) \quad g_h(M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i} \int_{\sigma_h(M)} g(x) dx .$$

La ecuación (1.42), junto con

$$(1.44) \quad \sum_{i=1}^n (\nabla_{ih} u_{ih})(M) = 0, M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1,$$

constituyen una versión discreta de (1.8); $-D_h^* \Pi_h$ es la "aproximación" de grad p, $-D_h^*$ es un operador gradiente discreto.

Como ya dijimos, la resolución directa de (1.20) no es fácil pues no conocemos una base explícita de V_h . Una alternativa consiste en resolver el sistema lineal (1.41), (1.44), donde las incógnitas son

$$(1.45) \quad u_{1h}(M), \dots, u_{nh}(M), \Pi_h(M), M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1 .$$

Este sistema posee una solución única, definida salvo

una constante aditiva para Π_h ; la "no unicidad" dificulta su tratamiento numérico; por otra parte, la matriz de coeficientes asociada está mal condicionada. Por todo ello conviene emplear métodos iterados, para resolver (1.20), que no precisan el conocimiento explícito de una base de V_h y que además proporcionan aproximaciones de $p^{m+1/2}$ (y por tanto de $p = p(x,t)$). Nótese que, en gran número de casos, interesa conocer el comportamiento de la presión del fluido, más que el de la velocidad de éste. La descripción de algunos de estos métodos será presentada más adelante, en el Cap. IV.

Puede probarse que para soluciones u y p de (1.8) suficientemente regulares, la aproximación precedente conduce a una estimación $\|u-u_h\| = O(h)$ (cf. [22]).

En el caso del problema quasi-lineal (1.9), esta aproximación se utiliza junto con la siguiente definición para \hat{b}_h :

$$(1.46) \quad \hat{b}_h(u_h, v_h, w_h) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n \left[\int_{\Omega} u_{ih} (\delta_{ih} v_{jh}) w_{jh} \, dx - \int_{\Omega} u_{ih} v_{jh} (\delta_{ih} w_{jh}) \, dx \right] \quad \forall u_h, v_h, w_h \in W_h.$$

El correspondiente problema discreto (1.21) es aún no lineal. Veremos en el Capítulo IV que puede resolverse utilizando técnicas de mínimos cuadrados combinadas con algoritmos de tipo gradiente conjugado.

El error cometido, como en el caso lineal, obedece a una estimación del tipo $\|u-u_h\| = O(h)$.

APROX 2 ($n = 2$) Tomemos $\mathcal{H} = (0,1]$ y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ una familia regular de triangulaciones admisibles de Ω .

Para cada $h \in \mathcal{H}$, sea:

$$(1.47) \quad W_h = \{ w_h / w_h \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^2), w_h|_K \in P_2(K)^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ w_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \} \quad (1)$$

Así definido, W_h es un subespacio finito-dimensional de $H_0^1(\Omega)^2$ y cada función $w_h \in W_h$ está unívocamente determinada por sus valores (en \mathbb{R}^2) en los vértices y puntos medios de los ejes de los triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ pertenecientes a Ω . (ver Fig 1.1). Tomemos:

$$(1.48) \quad ((v_h, w_h))_h = (v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in W_h,$$

$$(1.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_h w \in W_h, r_h w = w \text{ en los vértices y puntos medios de} \\ \text{los triángulos } K \in \mathcal{T}_h \text{ pertenecientes a } \Omega, \\ \text{para cada } w \in \mathcal{D}(\Omega)^2, \end{array} \right.$$

$$(1.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = H_0^1(\Omega)^2, \bar{w}: H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow H_0^1(\Omega)^2 \text{ el operador identidad} \\ P_h: W_h \rightarrow H_0^1(\Omega)^2 \text{ el operador de inyección canónica.} \end{array} \right.$$

Es un resultado clásico que la anterior aproximación (interna, pues $F = H_0^1(\Omega)^2$) de $H_0^1(\Omega)^2$ satisface (A1) y (A2).

Por otra parte, pongamos

$$(1.51) \quad V_h = \{ v_h / v_h \in W_h, \int_K \text{div } v_h \, dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \};$$

la condición " $\int_K \text{div } v_h = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ " es una versión discreta de la condición de incompresibilidad $\text{div } v = 0$. Notemos que las funciones $v_h \in V_h$ pertenecen a $H_0^1(\Omega)^2$ pero no a V , esto es $V_h \not\subset V$. Aunque es fácil determinar una base de W_h , no ocurre igual con V_h .

Sea $s_h v = r_h v + v_h^*$ para cada $v \in \mathcal{U}$, donde $v_h^* \in W_h$ está definida por:

(1) $P_m(K)$ es el espacio de las funciones polinomiales definidas de K en \mathbb{R} de grado menor o igual que m .

(1.52a) $v_h^* = 0$ en cada vértice de un triángulo $K \in \mathcal{T}_h$,

(1.52b)
$$\left\{ \begin{aligned} v_h^*(A_{12}) \cdot \vec{n}_{12} &= \left\{ \frac{3}{2} \int_0^1 v(\sigma A_1 + (1-\sigma)A_2) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (v(A_1) + 4v(A_{12}) + v(A_2)) \right\} \cdot \vec{n}_{12} \end{aligned} \right.$$

 para cada punto medio A_{12} de un eje $A_1 A_2$ con \vec{n}_{12}
 un vector unitario ortogonal al segmento $A_1 A_2$.

obtenemos así una aproximación (externa)

(1.53) $\{(V_h, P_h V_h, s_h)_{h \in (0,1]}, \bar{w}|_V, H_0^1(\Omega)^2\}$

del espacio V , para la cual (A3) y (A4) pueden ser demostradas fálmente.

Introduciendo la forma bilineal $\alpha(.,.)$, definida por

(1.54) $\alpha(u, v) = \mu(u, v) + \lambda(u, v),$

el problema aproximado de (1.8) resulta ser:

(1.55) $\alpha(u_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h.$

Claramente, (1.55) posee solución única.

Puesto que V_h viene dado por (1.51), deben existir algunos $\lambda_K, K \in \mathcal{T}_h$, tales que

(1.56) $\alpha(u_h, w_h) = (g, w_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_K \left(\int_K \text{div } w_h dx \right) \quad \forall w_h \in W_h$

Es evidente entonces que existe una función escalonada

(1.57) $\Pi_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Pi_h(K) \cdot \chi_K,$

tal que se verifica

$$(1.58) \quad \alpha(u_h, w_h) - (\Pi_h, \operatorname{div} w_h) = (g, w_h) \quad \forall w_h \in W_h,$$

que no es sino versión discretizada de (1.8), una vez que (1.8) se escribe en la forma equivalente

$$(1.59) \quad \alpha(u, v) - (p, \operatorname{div} v) = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2$$

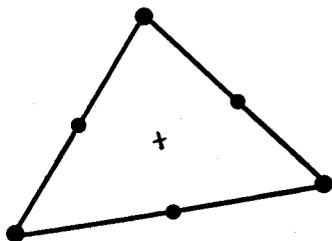
Así, Π_h puede ser observada como una aproximación de p que queda completamente determinada por sus valores $\Pi_h(K)$ con $K \in \mathcal{T}_h$ (tienen validez los comentarios hechos en relación con Π_h para APROX 1).

Puede probarse que, para u y p suficientemente regulares, se tiene que $\|u - u_h\| = O(h)$ (cf. [22]).

Para la aproximación del problema quasi-lineal (1.9), batará volver a (1.21), con \hat{b}_h definida por

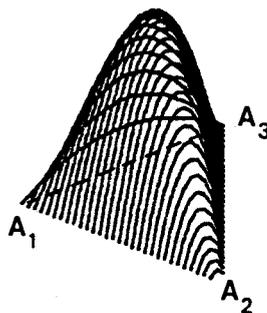
$$(1.60) \quad \hat{b}_h(u_h, v_h, w_h) = \hat{b}(u_h, v_h, w_h) \quad \forall u_h, v_h, w_h \in W_h.$$

De nuevo el error verifica $\|u - u_h\| = O(h)$.



-Fig 1.1-

Aproximación en espacio usando el elemento finito de Fortin [8].



-Fig 1.2-

Gráfica de la función burbuja.

APROX 3 ($n = 2$) Sea ahora W_h^* el espacio de aquellas funciones de $H_0^1(\Omega)^2$ que pueden escribirse como suma de una

función w_h del espacio W_h definido en APROX 2 y una función $\sigma_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma_h(K) \cdot \beta_K$, donde $\sigma_h(K) \in \mathbb{R}^2$ para cada $K \in \mathcal{T}_h$ y β_K es la función burbuja ("bubble") asociada a $K \in \mathcal{T}_h$ (ver Fig. 1.2). Dicho de otra forma, para cada triángulo K de coordenadas baricéntricas $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ (1), se tiene

$$(1.61) \quad \beta_K(x) = \begin{cases} \lambda_1^K(x) \lambda_2^K(x) \lambda_3^K(x) & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De nuevo W_h^* es un subespacio finito dimensional de $H_0^1(\Omega)^2$. Los grados de libertad asociados a las componentes de una función $w_h \in W_h$ son sus valores en los puntos indicados en la Fig. 1.3 (cf. [3]).

Tomemos de nuevo

$$(1.62) \quad ((v_h, w_h))_h = (v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in W_h$$

y r_h, p_h, F y \bar{w} definidos como en APROX 2 (lo cual es lícito pues $W_h \subset W_h^*$). Se prueba fácilmente que esta aproximación de $H_0^1(\Omega)^2$ continúa satisfaciendo (A1) y (A2).

Pongamos también

$$(1.63) \quad V_h^* = \{v_h / v_h \in W_h^*, \int_K q \cdot \text{div } v_h \, dx = 0 \quad \forall q \in P_1(K), \\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

(1) Las coordenadas baricéntricas $\lambda_j = \lambda_j(x)$ $1 \leq j \leq 3$ de un punto $x \in \mathbb{R}^2$ con respecto a los tres vértices $A_j = (a_{ij})_{i=1}^2$ de un triángulo $K \in \mathcal{T}_h$, son las (únicas) soluciones del sistema lineal:

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1$$

Claramente, si $x \in \mathbb{R}^2$, tenemos $x = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) A_j$.

El espacio V_h definido en APROX 2 no está incluido en V_h^* ; las funciones de V_h^* son de estructura más general que las de V_h , pero satisfacen condiciones más restrictivas en cuanto a su incompresibilidad aproximada.

Sea ahora $s_h v = r_h v + v_h^*$ para cada $v \in \mathcal{U}$, donde v_h^* está dada por:

$$(1.64) \quad \begin{cases} v_h^* = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma_h(x) \beta_K, \\ \sigma_{hi}(K) = \frac{60}{\text{area } K} \left\{ \int_{\partial K} x_i (v_h \cdot \vec{n}) d\Gamma - \int_K v_{hi} dx \right\}, \quad i=1,2. \end{cases}$$

Es de nuevo relativamente sencillo probar que se verifican las condiciones (A3) y (A4).

El problema aproximado de (1.8) es de nuevo (1.20) con la misma definición de $(\cdot, \cdot)_h$ que en APROX 2. En este caso, la aproximación Π_h^* de la presión es una función lineal a trozos (no necesariamente continua), determinada separadamente en cada $K \in \mathcal{T}_h$ por sus valores en los vértices.

En efecto, puesto que v_h^* viene dado por (1.63), existirán unos multiplicadores de Lagrange Λ_K^i , $i=0,1,2$, $K \in \mathcal{T}_h$, tales que:

$$(1.65) \quad \begin{cases} \mu(u_h, v_h) + \lambda(u_h, v_h) - (g, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Lambda_K^0 \int_K \text{div } v_h dx \\ + \sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Lambda_K^i \int_K x_i \text{div } v_h dx. \end{cases}$$

Denotemos por Π_h^* la función definida c.p.d. en Ω que se anula fuera de $\Omega(h)$ y es igual c.p.d. a $\Lambda_K^0 + x_1 \Lambda_K^1 + x_2 \Lambda_K^2$ en cada $K \in \mathcal{T}_h$. Entonces el segundo miembro de (1.65) vale

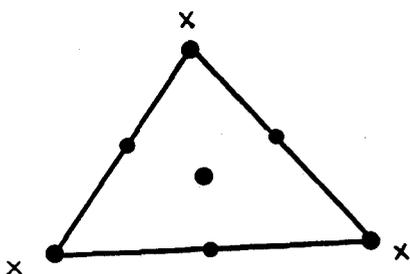
$$(1.66) \quad \int_{\Omega} \Pi_h^* \text{div } v_h dx = (\Pi_h^*, \text{div } v_h)$$

y, de nuevo, obtenemos un análogo discreto de (1.59):

$$(1.67) \quad \begin{cases} \mu((u_h, v_h)) + \lambda(u_h, v_h) - (\Pi_h^*, \operatorname{div} v_h) \\ = (g, v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \end{cases}$$

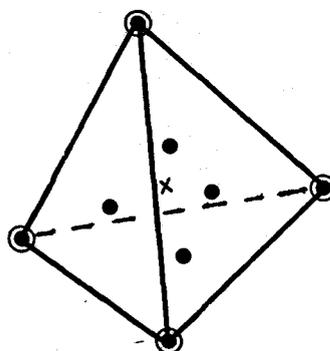
En este caso, se deduce que, bajo determinadas hipótesis de regularidad para u y p , $\|u - u_h\| = O(h^2)$ (véase [22]).

La aproximación del problema no lineal se puede llevar a cabo de forma análoga a como se hizo en APROX 2.



-Fig 1.3-

Aproximación en espacio usando el elemento finito de Témam [22].



-Fig 1.4-

Aproximación en espacio usando el elemento finito de Fortin [8].

APROX 4 ($n = 3$) Dado un tetraedro $K \in \mathcal{T}_h$, denotemos por A_i^K ($1 \leq i \leq 4$) sus vértices y por B_i^K ($1 \leq i \leq 4$) los baricentros de sus caras. Es fácil ver que una función polinomial de grado 3 de K en \mathbb{R}^3 está unívocamente determinada por sus valores en todos los puntos A_i^K, B_i^K con $1 \leq i \leq 4$, y los valores de sus primeras derivadas en los puntos $A_i^K, 1 \leq i \leq 4$ (ver Fig.1.4). Tomemos ahora

$$(1.68) \quad W_h = \{w_h / w_h \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^3), w_h|_K \in P_3(K)^3 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

De nuevo es un subespacio finito-dimensional de $H_0^1(\Omega)^3$, que

será dotado del producto escalar inducido por $H_0^1(\Omega)^3$. Definimos

$$(1.69) \left\{ \begin{array}{l} r_h w \in W_h, \quad r_h w = w \text{ en } A_i^K, B_i^K \\ \text{y } Dr_h w = Dw \text{ en } A_i^K, \quad 1 \leq i \leq 4, \\ K \in \mathcal{T}_h, \quad \text{para cada } w \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \end{array} \right.$$

$$(1.70) \left\{ \begin{array}{l} F = H_0^1(\Omega)^3, \quad \bar{w}: H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow H_0^1(\Omega)^3 \text{ el operador identidad,} \\ P_h: W_h \rightarrow H_0^1(\Omega)^3 \text{ el operador de inyección canónica.} \end{array} \right.$$

Una vez más no es difícil probar que la aproximación precedente (interna, pues $F=H_0^1(\Omega)^3$) de $H_0^1(\Omega)^3$ verifica (A1) y (A2).

Introduzcamos por otra parte el espacio

$$(1.71) \quad V_h = \{ v_h / v_h \in W_h, \int_K \text{div } v_h \, dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

y sea $s_h v = r_h v + v_h^*$ para cada $v \in \mathcal{U}$, donde $v_h^* \in W_h$ está definido por:

$$(1.72) \left\{ \begin{array}{l} v_h^* = 0 \text{ y } Dv_h^* = 0 \text{ en cada } A_i^K, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad K \in \mathcal{T}_h, \\ \text{la componente de } v_h^*(B_i^K) \text{ que es tangente a la} \\ \text{cara de } K \text{ de la cual } B_i^K \text{ es baricentro, es cero,} \\ \text{para } 1 \leq i \leq 4 \quad K \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

Con esta elección para s_h , se verifican las condiciones (A3) y (A4).

Usando (1.71), se deduce el problema discretizado (1.55); de nuevo puede asegurarse la existencia de una función Π_h que verifica (1.58). Π_h es una función escalonada (del tipo de (1.57)), y por tanto está determinada por sus valores en cada tetraedro $K \in \mathcal{T}_h$.

La regularidad de u permite una estimación de la forma $\|u-u_h\| = O(h)$ (cf. [22]).

El problema no lineal puede ser aproximado como en APROX 2.

APROX 5 Debido a la condición $\text{div } u = 0$, no es posible aproximar V por un espacio de funciones lineales continuas a trozos (Fortin [8]). Nuestro propósito es describir una aproximación de V por un método de elementos finitos lineales no conformes, o sea, funciones lineales a trozos pero discontinuas.

Sea \mathcal{T}_h una triangulación admisible de Ω . Si $K \in \mathcal{T}_h$, denotemos de nuevo por A_i , $1 \leq i \leq n+1$, los vértices de K e introduzcamos además:

$K_i \equiv (n-1)$ -cara que no contiene a A_i ,

$B_i \equiv$ baricentro de la cara K_i ,

$G \equiv$ baricentro de K .

Entonces, puesto que las coordenadas baricéntricas de B_i respecto de las A_j , $j \neq i$, valen $(1/n)$, tenemos:

$$GB_i = \sum_{j \neq i} (GA_j/n) = \sum_{j=1}^{n+1} (GA_j/n) - (GA_i/n),$$

de donde

$$GB_i = -(GA_i/n),$$

puesto que $\sum_{j=1}^{n+1} GA_j = 0$ (las coordenadas baricéntricas de G con respecto a A_1, \dots, A_{n+1} son iguales a $(1/(n+1))$). Deducimos de esto que

$$nB_i B_j = n(GB_j - GB_i) = GA_i - GA_j = -A_i A_j$$

y de aquí que los vectores $B_i B_j$, $j=2, \dots, n+1$, son linealmente independientes, del mismo modo que lo son los

vectores $A_1, A_j, j=2, \dots, n+1$. Así pues, podemos definir las coordenadas baricéntricas de un punto P respecto de los B_1, \dots, B_{n+1} , y las denotaremos por μ_1, \dots, μ_{n+1} .

También, para cada conjunto de $(n+1)$ números $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ dado, existe una y sólo una función lineal que toma en los puntos B_1, \dots, B_{n+1} los valores $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ resp., y esta función está dada por

$$(1.73) \quad u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mu_i(x).$$

Pongamos

$$W_h = \{w_h / w_h \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h \text{ se anula fuera de } \Omega(h), \\ w_h(B_i^K) = 0 \text{ si la cara } i \text{ de } K \text{ está sobre } \Gamma, \\ w_h(B_i^K) = w_h(B_{i'}^{K'}) \text{ si la cara } i \text{ de } K \text{ y la cara } i' \text{ de } K' \text{ son adyacentes} \}.$$

De acuerdo con lo que precede, una función $w_h \in W_h$ está completamente determinada por sus valores en los puntos $B_i^K, K \in \mathcal{T}_h$.

Sea $U_h = \{B_i^K \subset \overset{\circ}{\Omega}(h), K \in \mathcal{T}_h\}$ y, para cada $B \in U_h$, sea w_{hB} la función lineal en cada $K \in \mathcal{T}_h$ que verifica

$$\begin{cases} w_{hB}(B) = 1, \\ w_{hB}(M) = 0 \quad \forall M \in U_h, M \neq B. \end{cases}$$

Claramente, el soporte de w_{hB} es la unión de los dos símplices que contienen el punto B .

Los vectores $w_{hB} e_i$, con $B \in U_h, 1 \leq i \leq n$, constituyen una base de W_h , y se tiene que $W_h \subset H_0^1(\Omega)^n$. Dotamos W_h del producto escalar

$$(1.74) \quad \begin{aligned} \llbracket u_h, v_h \rrbracket_h &= (u_h, v_h) + \sum_{i=1}^n (D_{ih} u_h, D_{ih} v_h) \\ &\equiv (u_h, v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^n \int_K D_i u_h \cdot D_i v_h dx, \end{aligned}$$

que juega un papel análogo discreto del producto escalar de $H_0^1(\Omega)^n$. Aquí, $D_{ih}v_h$ es la función de $L^2(\Omega)^n$ definida por

$$D_{ih}v_h = D_i v_h \text{ c.p.d. en } K, \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h.$$

Sean

$$(1.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = L^2(\Omega)^{n(n+1)}, \bar{w} : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow F \text{ con } v = (v, D_1 v, \dots, D_n v) \\ P_h : W_h \rightarrow F, P_h v_h = (v_h, \delta_{1h} v_h, \dots, \delta_{nh} v_h) \text{ y} \\ r_h w = w \text{ en todo } B \in U_h, \text{ para cada } w \in \mathcal{D}(\Omega)^n \end{array} \right.$$

Entonces, $\{(W_h, P_h, r_h)_{h \in \mathcal{H}}, \bar{w}, F\}$ es una aproximación externa estable y convergente del espacio $H_0^1(\Omega)^n$.

Consideremos ahora el producto escalar

$$(1.76) \quad (u_h, v_h)_{W_{ho}} = \sum_{i=1}^n (D_{ih} u_h, D_{ih} v_h)$$

que es equivalente al anterior.

$$\text{Sea ahora } V_h = \{v_h / v_h \in W_h, \sum_{i=1}^n D_{ih} u_{ih} = 0\}$$

la condición $\sum_{i=1}^n D_{ih} u_{ih} = 0$ equivale a $\text{div } u_h = 0$ en K , $\forall K$

$\in \mathcal{T}_h$. Pongamos

$$s_h w(B) = (1/\text{med}(K')) \int_{K'} w \, d\Gamma \quad \forall B \in U_h, \text{ para cada } w \in \mathcal{D}(\Omega)^n,$$

donde B es el baricentro de la $(n-1)$ cara K' . Con esta elección, $s_h u \in V_h$ y $\{(V_h, P_h, s_h)_{h \in \mathcal{H}}, \bar{w}|_V, F\}$ es una aproximación externa de V estable y convergente.

El problema aproximado de (1.8) viene dado por

$$\mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + \lambda (u_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h$$

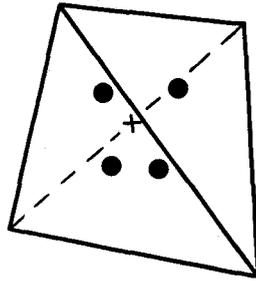
y posee exactamente una solución u_h . Existe también una

función escalonada Π_h que verifica

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, dx + \lambda (u_h, w_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Pi_h \operatorname{div} w_h \, dx = (g, w_h) \quad \forall w_h \in W_h.$$

Los grados de libertad asociados a una función $w_h \in W_h$ y a una "presión discreta" Π_h están descritos en la Fig.1.5. Puede probarse que, bajo ciertas hipótesis de regularidad para u y p , se tiene la estimación (véase [22]).

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla(u - u_h)|^2 \, dx \right)^{1/2} = o(h)$$



-Fig 1.5-

Aproximación en espacio
usando el elemento finito
de Thomasset [24].

El problema no lineal puede ser tratado de forma análoga a como se hizo en aproximaciones anteriores.

En el caso $n = 2$, es factible construir explícitamente una base de V_h (ver Crouzeix [4]).

CAPITULO II.

2.1 RESULTADOS DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA PARA ALG 1.-

En este Capitulo y en el siguiente, supondremos dadas aproximaciones externas de $H_0^1(\Omega)^n$ y V que satisfacen las siguientes hipótesis de consistencia (con $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}' \rightarrow 0$; mientras que no se indique lo contrario, las convergencias que siguen se producen con $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$):

H1: Si $u_h, \in L^2(0, T; V_h,)$ $\forall h' \in \mathcal{H}'$,

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h, \rightarrow u \text{ débilmente en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^n) = L^2(Q)^n, \\ P_h, u_h, \rightarrow \psi \text{ débilmente en } L^2(0, T; F) \end{array} \right.$$

entonces $\psi = \bar{\omega} u$ para algún $u \in L^2(0, T; V)$.

H2: Si $v_h, , w_h, \in L^2(0, T; W_h,)$ $\forall h' \in \mathcal{H}'$,

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_h, v_h, \rightarrow \bar{\omega} v \text{ débilmente en } L^2(0, T; F) \text{ y} \\ P_h, w_h, \rightarrow \bar{\omega} w \text{ fuertemente en } L^2(0, T; F) , \end{array} \right.$$

para algunos $v, w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)$, entonces

$$\int_0^T \langle v_h, (t), w_h, (t) \rangle_h dt \rightarrow \int_0^T \langle v(t), w(t) \rangle dt$$

Supondremos dada una familia \hat{b}_h de formas trilineales (cada \hat{b}_h definida naturalmente de $W_h \times W_h \times W_h$ en \mathbb{R}), de tal manera que se tenga:

H3: Si $u_h, v_h \in L^2(0, T; W_h)$, $\forall h' \in \mathcal{H}'$,

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h, u_h \rightarrow \bar{\omega} u \text{ débilmente en } L^2(0, T; F), \\ u_h \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(Q)^n, \\ p_h, v_h \rightarrow \bar{\omega} v \text{ débilmente en } L^2(0, T; F), \end{array} \right.$$

para algunos $u, v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)$, y por otra parte $\psi_k \rightarrow \psi$ fuertemente en $L^\infty(0, T)$ cuando $k \rightarrow 0$, entonces se tiene:

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \hat{b}_h(u_h(t), v_h(t), \psi_k(t) r_h, w) dt \\ + \int_0^T \hat{b}(u(t), v(t), \psi(t) w) dt \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k \rightarrow 0 \text{ para cada } w \in \mathcal{U}. \end{array} \right.$$

También supondremos que las formas trilineales \hat{b}_h satisfacen

$$(2.5) \quad \hat{b}_h(v_h, w_h, w_h) = 0 \quad \forall v_h, w_h \in W_h.$$

H4: Si $v_h \in L^2(\mathbb{R}; V_h)$, $v_h = 0$ c.p.d. en $\mathbb{R} \setminus [0, T]$,

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T |v_h(t)|_h^2 dt \leq \text{cte.}, \\ \int_0^T |\tau|^{2\beta} |\hat{v}_h(\tau)|^2 \leq \text{cte. para algún } \beta > 0, \end{array} \right.$$

para todo $h' \in \mathcal{H}'$, entonces $\{v_h\}$ es precompacto en $L^2(Q)^n$. En (2.6), \hat{v}_h denota la transformada de Fourier de la función v_h .

En el espacio finito-dimensional W_h , las normas $\|\cdot\|_h$ y $|\cdot|$ (inducida por $L^2(\Omega)^n$) son equivalentes. Más precisamente, tenemos:

$$(2.7) \quad \frac{1}{d_0} |w_h| \leq \|w_h\|_h \leq S(h) |w_h| \quad \forall w_h \in W_h.$$

En lo sucesivo, d_0 y $S(h)$ denotarán las mejores constantes que satisfacen (2.7). Obviamente, $S(h)$ no puede estar acotada para $h \rightarrow 0$; de hecho, el orden de crecimiento de $S(h)$ está determinado por la aproximación particular elegida. Por otra parte, supondremos que existe una constante positiva d_1 , independiente de h , tal que:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\hat{b}_h(u_h, v_h, w_h)| \leq d_1 \|u_h\|_h \|v_h\|_h \|w_h\|_h \\ \forall u_h, v_h, w_h \in W_h \quad \forall h \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

Gracias a (2.7), (2.8), tenemos

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\hat{b}_h(v_h, v_h, w_h)| \leq S_1(h) |v_h| \|v_h\|_h |w_h| \\ \forall v_h, w_h \in W_h \quad h \in \mathcal{H} \end{array} \right.$$

para alguna constante $S_1(h)$. En lo sucesivo, denotaremos por $S_1(h)$ la mejor constante para la que se satisface (2.9) (evidentemente, $S_1(h) \leq d_1 S(h)^2$).

Con objeto de enunciar un resultado de convergencia para ALG 1, definiremos para cada $k > 0$ y cada $h \in \mathcal{H}$ las funciones u_{kh} , v_{kh} , \tilde{u}_{kh} y \tilde{v}_{kh} como sigue:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{kh}, v_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h \\ \text{son constantes en cada intervalo } [mk, (m+1)k), \\ u_{kh}(t) = u_h^m \quad \text{y} \quad v_{kh}(t) = u_h^{m+1/2} \quad \forall t \in [mk, (m+1)k), \end{array} \right.$$

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{kh}(t), \tilde{v}_{kh}(t) : [0, T] \rightarrow W_h \\ \text{son continuas y lineales sobre cada } [mk, (m+1)k), \\ \tilde{u}_{kh}(mk) = u_h^m \quad \text{y} \quad \tilde{v}_{kh}(mk) = u_h^{m+1/2} \quad \forall m=0, 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Teorema 2.1 En las condiciones precedentes para la aproximación externa de $H_0^1(\Omega)^n$ y las formas trilineales \hat{b}_h , existen constantes e_0 y e_1 dependientes sólo de

$$|u_0|, \|f\|_{L^2(0,T;H)}, \nu, d_0, d_1 \text{ y } \theta$$

tales que, si h y k satisfacen

$$(2.12) \quad kS(h)^2 \leq e_0, \quad kS_1(h)^2 \leq e_1,$$

se tienen las siguientes propiedades:

- Existen \mathcal{H}' , $\mathcal{H}' \rightarrow 0$ y $\{k'\}$, $k' \rightarrow 0$ tales que las correspondientes subsucesiones $u_{k'h'}$, $v_{k'h'}$, $\tilde{u}_{k'h'}$ y $\tilde{v}_{k'h'}$ convergen fuertemente en $L^2(Q)^n$ y débilmente-* en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)$ hacia la misma función $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Las correspondientes $p_{h'} u_{k'h'}, \dots, p_{h'} \tilde{v}_{k'h'}$ convergen débilmente en $L^2(0,T;F)$ hacia $\bar{w}u$.
- Si \mathcal{H}' y $\{k'\}$ satisfacen a), entonces el límite común u es una solución de (0.53)-(0.55).
- En consecuencia, si $n = 2$, las sucesiones completas $u_{kh'}, \dots, \tilde{v}_{kh'}$ convergen hacia la (única) solución de (0.53)-(0.55).
- Finalmente, si $n = 2$, $\theta \in (0, 1/2)$ y h y k satisfacen

$$(2.12') \quad kS^2(h) \rightarrow 0, \quad kS_1^2(h) \rightarrow 0,$$

entonces las sucesiones $p_h u_{kh'}, \dots, p_h \tilde{v}_{kh'}$ convergen fuertemente en $L^2(0,T;F)$.

Antes de pasar a la demostración de este teorema, hagamos algunos comentarios sobre el mismo. En primer lugar, digamos que la condición (2.12) puede ser observada como una condición de estabilidad, que nos dice que para $|h|$ pequeño, esto es, para una buena aproximación en las variables espa-

ciales, k no puede ser demasiado grande (en [22] se prueba que, para las aproximaciones particulares estudiadas en el Capítulo anterior, $S(h)$ se comporta como $|h|^{-p}$ cuando $h \rightarrow 0$ para algún $p > 0$). En la demostración del Teorema veremos que una elección admisible para e_0 y e_1 corresponde a la que satisfaga:

$$(2.13) \quad (1-\theta)^2 e_0 v^2 + d_1^2 e_1 \Lambda(e_0, e_1, \theta) \leq v/32, \text{ donde}$$

$$(2.14) \quad \Lambda(\alpha, \beta, \theta) = |u_0|^2 + (1-\theta)^2 \alpha^2 v^2 |u_0|^2 + d_1^2 \alpha \beta |u_0|^4 \\ + \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) (d_0^2 / 2v) \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2$$

El Teorema 2.1, nos dice que ALG1 es (al menos) condicionalmente estable y que, cuando se verifica la condición de estabilidad (2.12), produce soluciones aproximadas del problema de Navier-Stokes (0.53)-(0.55).

2.2.-DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2.1.-

El esquema de la demostración es el siguiente:

1^{er}. paso: Algunas estimaciones "a priori" sobre las funciones u_{kh} , v_{kh} , ... (obtenidas a partir de las u_h^m , $u_h^{m+1/2}$, ...).

2^o. paso: Una estimación uniforme para la transformada de Fourier \hat{v}_{kh} de la función \tilde{v}_{kh} (que, junto con la compacidad de algunas inyecciones de tipo Sobolev, permitirá más adelante el paso al límite en el término no lineal).

3^{er} paso: Elección de algunas subsucesiones convergentes.

4^o paso: Demostración de que el límite común es una solución.

5^o paso: Resultados de convergencia fuerte (a partir de la identidad de la energía).

Para no complicar excesivamente la notación, suprimiremos el subíndice h en los dos primeros pasos.

1^{er} paso: Tomando $v = u^{m+1/2}$ en (1.23), obtenemos:

$$(2.15) \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1/2}|^2 - |u^m|^2 + |u^{m+1/2} - u^m|^2 + kv\theta \|u^{m+1/2}\|^2 \\ + kv(1-\theta) \|u^m\|^2 + kv(1-\theta) (u^m, u^{m+1/2} - u^m) \\ + k\hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2}) = k(f^{m+1/2}, u^{m+1/2}). \end{array} \right.$$

Por otra parte, utilizando (1.24) con $w = \theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}$ se tiene

$$(2.16) \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1}|^2 - |u^{m+1/2}|^2 + (1-2\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ + k_v \| \theta u^{m+1/2} + (1-\theta) u^{m+1} \|^2 = k(f^{m+1}, \theta u^{m+1/2} + (1-\theta) u^{m+1}) \end{array} \right.$$

y de (2.16), usando la primera desigualdad de (2.7),

$$(2.17) \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1}|^2 - |u^{m+1/2}|^2 + (1-2\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ + \frac{k_v}{2} \| \theta u^{m+1/2} + (1-\theta) u^{m+1} \|^2 \leq (k d_0^2 / 2v) |f^{m+1}|^2 \end{array} \right.$$

El desarrollo de (2.15) conduce a la siguiente desigualdad (donde se ha utilizado (2.5) y (2.7)):

$$\begin{aligned} & |u^{m+1/2}|^2 - |u^m|^2 + |u^{m+1/2} - u^m|^2 + k_v \theta \|u^{m+1/2}\|^2 + k_v (1-\theta) \|u^m\|^2 \\ & \leq k d_0 |f^{m+1/2}| |u^{m+1/2}| + k_v (1-\theta) S(h) \|u^m\| |u^{m+1/2} - u^m| \\ & - k \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2} - u^m), \end{aligned}$$

que se convierte, utilizando la segunda desigualdad de (2.7) y (2.8), en

$$(2.18) \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1/2}|^2 - |u^m|^2 + \frac{1}{2} |u^{m+1/2} - u^m|^2 + \frac{k_v \theta}{2} \|u^{m+1/2}\|^2 \\ + k_v (1-\theta) \|u^m\|^2 \leq (k d_0^2 / 2v \theta) |f^{m+1/2}| \\ + k^2 v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^m\|^2 + k d_1^2 S_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2. \end{array} \right.$$

Si sumamos (2.17) y (2.18) y dejamos en el miembro de la derecha sólo los términos relativos a f obtenemos lo siguiente:

$$(2.19) \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1}|^2 - |u^m|^2 + \frac{1}{2} |u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ + k_v (1-\theta) \|u^m\|^2 + \frac{k_v \theta}{4} \|u^{m+1/2}\|^2 + \frac{k_v}{4} \| \theta u^{m+1/2} + (1-\theta) u^{m+1} \|^2 \\ + \frac{k_v}{4} \{ \| \theta u^{m+1/2} + (1-\theta) u^{m+1} \|^2 + \theta \|u^{m+1/2}\|^2 \} \\ - k^2 \{ v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^m\|^2 + d_1^2 S_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2 \} \\ \leq (k d_0^2 / 2v \theta) |f^{m+1/2}|^2 + (k d_0^2 / 2v) |f^{m+1}|^2. \end{array} \right.$$

Obsérvese que

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\theta a + (1-\theta)b)^2 + \theta a^2 \geq \theta(1+\theta-\gamma^2(1-\theta))a^2 \\ + (1-\theta)(1-\theta-\frac{\theta}{\gamma^2})b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \\ \text{para } \gamma \text{ tal que } \theta/(1-\theta) < \gamma^2 < (1+\theta)/(1-\theta). \end{array} \right.$$

En particular, tomando $\gamma = \frac{1+2\theta}{2(1-\theta)}$, se tiene

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\theta a + (1-\theta)b)^2 + \theta a^2 \geq \frac{\theta}{2}a^2 + (1-\theta)\frac{(1-\theta)}{1+2\theta}b^2 \\ \geq \frac{\theta}{2}a^2 + \frac{(1-\theta)}{4}b^2 \geq \frac{\theta}{2}a^2 + \frac{1}{8}b^2. \end{array} \right.$$

De donde (2.19) implica:

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1}|^2 - |u^m|^2 + \frac{1}{2}|u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta)|u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ + kv(1-\theta)\|u^m\|^2 + \frac{kv\theta}{4}\|u^{m+1/2}\|^2 + \frac{kv}{4}\|\theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}\|^2 \\ + \frac{kv}{4}\left\{\frac{\theta}{2}\|u^{m+1/2}\|^2 + \frac{1}{8}\|u^{m+1}\|^2\right\} - k^2\{v^2(1-\theta)^2s(h)^2\|u^m\|^2 \\ + d_1^2s_1(h)^2\|u^m\|^2|u^m|^2\} \\ \leq (kd_0^2/2v\theta)|f^{m+1/2}|^2 + (kd_0^2/2v)|f^{m+1}|^2 \end{array} \right.$$

y, agrupando convenientemente los términos,

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u^{m+1}|^2 - |u^m|^2 + \frac{1}{2}|u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta)|u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ + kv(1-\theta)\|u^m\|^2 + \frac{3kv\theta}{8}\|u^{m+1/2}\|^2 + \frac{kv}{4}\|\theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}\|^2 \\ + k\left[\frac{v}{32}\|u^{m+1}\|^2 - k(v^2(1-\theta)^2s(h)^2\|u^m\|^2\right. \\ \left.+ d_1^2s_1(h)^2\|u^m\|^2|u^m|^2)\right] \\ \leq (kd_0^2/2v\theta)|f^{m+1/2}|^2 + (kd_0^2/2v)|f^{m+1}|^2. \end{array} \right.$$

Sea r un entero entre 0 y N . Sumando estas expresiones para $m=0, 1, \dots, r$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & |u^{r+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^r |u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta) \sum_{m=0}^r |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\
 & + kv(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^m\|^2 + \frac{3kv\theta}{8} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1/2}\|^2 \\
 & + \frac{kv}{4} \sum_{m=0}^r \|\theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}\|^2 + k \left\{ \frac{v}{32} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 \right. \\
 & \left. - k \sum_{m=1}^r (v^2(1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^m\|^2 + d_1^2 S_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2) \right\} \leq \lambda_r,
 \end{aligned}$$

donde λ_r es la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 \lambda_r \leq & |u^0|^2 + k^2 v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^0\|^2 + k^2 d_1^2 S_1(h)^2 \|u^0\|^2 |u^0|^2 \\
 & + (kd_0^2/2v\theta) \sum_{m=0}^r |f^{m+1/2}|^2 + (kd_0^2/2v) \sum_{m=0}^r |f^{m+1}|^2
 \end{aligned}$$

Nuestro próximo objetivo es acotar el valor de λ_r :

$$\begin{aligned}
 \lambda_r \leq & |u^0|^2 + k^2 v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^0\|^2 + k^2 d_1^2 S_1(h)^2 \|u^0\|^2 |u^0|^2 \\
 & + (kd_0^2/2v\theta) \sum_{m=0}^{N-1} |f^{m+1/2}|^2 + (kd_0^2/2v) \sum_{m=0}^{N-1} |f^{m+1}|^2 \equiv \lambda_N \\
 \leq & |u_0|^2 + k^2 v^2 (1-\theta)^2 S(h)^4 |u_0|^2 + k^2 d_1^2 S_1(h)^2 S(h)^2 |u_0|^4 \\
 & + (d_0^2/2v) \left(\frac{1+\theta}{\theta} \right) \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2 \\
 \leq & |u_0|^2 + e_0^2 (1-\theta)^2 |u_0|^2 + d_1^2 e_0 e_1 |u_0|^4 \\
 & + (d_0^2/2) \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2.
 \end{aligned}$$

Recurriendo a (2.12), llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
 \lambda_r \leq & |u_0|^2 + e_0^2 v^2 (1-\theta)^2 |u_0|^2 + d_1^2 e_0 e_1 |u_0|^4 \\
 & + (d_0^2/2v) \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2;
 \end{aligned}$$

el segundo miembro de la misma es igual a $\Lambda(e_0, e_1, \theta)$ (con Λ definido por (2.14)).

Probemos ahora por inducción que

$$\begin{aligned}
 & |u^{r+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^r |u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta) \sum_{m=0}^r |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\
 & + kv(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^m\|^2 + \frac{3kv\theta}{8} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1/2}\|^2 \\
 (2.24) \quad & + \frac{kv}{4} \sum_{m=0}^r \|\theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}\|^2 \\
 & \leq \lambda_r \leq \lambda_N \leq \Lambda(e_0, e_1, \theta) \quad \text{para } r=1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

(a) Para $r = 0$, basta utilizar (2.23) con $m = 0$.

(b) Supongamos que las igualdades precedentes son ciertas para r sustituido por $m = 0, 1 \dots r-1$. En particular $|u^m|^2 \leq \lambda_m \leq \Lambda(e_0, e_1, \theta)$ para $m \leq r$ y, siempre que se tenga (2.13),

$$\begin{aligned}
 & \frac{v}{32} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 - k \sum_{m=1}^r (v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 \|u^m\|^2 \\
 & + d_1^2 s_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2) \\
 & \geq \left\{ \frac{v}{32} - [v^2(1-\theta)^2 ks(h)^2 + d_1^2 ks_1(h)^2 \Lambda(e_0, e_1, \theta)] \right\} \sum_{m=1}^r |u^m|^2 \\
 & \geq \left\{ \frac{v}{32} - [v^2(1-\theta)^2 e_0 + d_1^2 e_1 \Lambda(e_0, e_1, \theta)] \right\} \sum_{m=1}^r |u^m|^2 \\
 & \geq 0.
 \end{aligned}$$

Obviamente, (2.24) proporciona una estimación "a priori" para las funciones u^m y $u^{m+1/2}$:

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \max_{0 \leq m \leq N} |u^m|^2 + \sum_{m=0}^N |u^{m+1/2} - u^m|^2 + \sum_{m=0}^N |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\
 & + k \sum_{m=0}^N \|u^m\|^2 + k \sum_{m=0}^N \|u^{m+1/2}\|^2 \leq \text{cte.}
 \end{aligned} \right.$$

Aquí y en lo que sigue, las constantes sólo dependen de la magnitud de los datos (i.e. $|u_0|$, $\|f\|_{L^2(0,T;H)}$ y v), del parámetro de implicidad θ y de las cotas e_0 y e_1 de $kS(h)^2$ y $kS_1(h)^2$ resp. La estimación (2.25) tiene como consecuencias las siguientes propiedades de estabilidad para las funciones u_k , v_k , \tilde{u}_k y \tilde{v}_k :

$$(2.26a) \left\{ \begin{array}{l} \|u_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \|u_k\|_{L^2(0,T;W_h)} \\ + \|pu_k\|_{L^2(0,T;F)} \leq \text{cte.}, \\ \text{lo mismo para } v_k, \tilde{u}_k \text{ y } \tilde{v}_k. \end{array} \right.$$

$$(2.26b) \left\{ \begin{array}{l} \|u_k - v_k\|_{L^2(Q)^n} \leq \text{cte.} \sqrt{k}, \\ \text{lo mismo para } u_k - \tilde{u}_k, u_k - \tilde{v}_k, \text{ etc...} \end{array} \right.$$

2º paso: Si sumamos (1.23) con m reemplazada por $m+1$ y (1.24) con $w=v \in V$, obtenemos:

$$(2.27) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{k}(u^{m+3/2} - u^{m+1/2}, v) = (f^{m+3/2} + f^{m+1}, v) - \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, v) \\ - \hat{b}(u^{m+1}, (1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, v) \\ - v((\theta u^{m+3/2} + 2(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}), v) \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

las igualdades (2.27) también pueden escribirse en la siguiente forma:

$$(2.28) \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{d}{dt}(\tilde{v}_k(t), v) = (g_k(t), v) \\ \forall v \in V, t \text{ c.p.d. en } [0, T], \end{array} \right.$$

donde la función $g_k : [0, T] \rightarrow V$ está definida por

$$(2.29) \left\{ \begin{aligned} (g_k(t), v) &= -v((\theta u^{m+3/2} + 2(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, v) \\ &\quad - \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, v) - \hat{b}(u^{m+1}, (1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, v) \\ &\quad - (f^{m+3/2} + f^{m+1}, v) \quad \forall v \in V, t \in [mk, (m+1)k]. \end{aligned} \right.$$

Así, de (2.7) y (2.8) resulta que

$$(2.30) \left\{ \begin{aligned} \|g_k(t)\| &\leq v\|\theta u^{m+3/2} + 2(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}\| + d_1 \|u^{m+1}\|^2 \\ &\quad + d_1 \|u^{m+1}\| \|(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}\| + d_0 |f^{m+3/2} + f^{m+1}| \\ &\quad \text{para } t \in [mk, (m+1)k] \end{aligned} \right.$$

y, por tanto,

$$(2.31) \left\{ \begin{aligned} \int_0^T \|g_k(t)\| dt &\leq k \sum_{m=0}^{N-1} (v\|\theta u^{m+3/2} + 2(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}\| \\ &\quad + d_1 \|u^{m+1}\|^2 + d_1 \|u^{m+1}\| \|(1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}\| \\ &\quad + d_0 |f^{m+3/2} + f^{m+1}|). \end{aligned} \right.$$

El segundo miembro de (2.31) está evidentemente acotado gracias a (2.25).

Así pues $\|g_k\|_{L^1(0, T; V)}$ está uniformemente acotado.

Prolonguemos la función g_k por 0 fuera de $[0, T]$, obteniendo así una función \tilde{g}_k que verifica la siguiente igualdad para todo t :

$$(2.32) \quad \frac{d}{dt} (\tilde{v}_k(t), v) = (\tilde{g}_k(t), v) + (u^0, v) \delta_0 - (u^N, v) \delta_T \quad \forall v \in V$$

Aquí, δ_0 y δ_T designan las distribuciones masa de Dirac en 0 y T resp.

Por otra parte, aplicando la transformada de Fourier en ambos miembros de (2.32), obtenemos

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\pi i \tau (\hat{v}_k(\tau), v) = (\hat{g}_k(\tau), v) + (u^0, v) - (u^N, v) \exp(-2\pi i \tau T) \\ \forall v \in V, \end{array} \right.$$

donde \hat{v}_k y \hat{g}_k denotan las transformadas de Fourier de \tilde{v}_k y \tilde{g}_k resp.

Utilizando (2.33) con $v = \hat{v}_k(\tau)$, y tomando módulos, resulta que

$$(2.34) \quad 2\pi |\tau| |\hat{v}_k(\tau)|^2 \leq |\hat{g}_k(\tau)| |\hat{v}_k(\tau)| + C_1 |\hat{v}_k(\tau)|,$$

puesto que u^0 y u^N permanecen acotados.

Debido a que $|g_k|_{L^1(0, T; V)} \leq \text{cte.}$, tenemos también

$$|\hat{g}_k(\tau)| \leq \int_0^T |g_k(t)| dt \leq \text{cte.} = C_2,$$

y por tanto

$$(2.35) \quad |\tau| |\hat{v}_k(\tau)|^2 \leq C_3 |\hat{v}_k(\tau)|$$

Para un β fijo, $\beta \in (0, 1/4)$, se verifica que

$$(2.36) \quad |\tau|^{2\beta} \leq C_4(\beta) (1+|\tau|)/(1+|\tau|^{1-2\beta}) \quad \forall \tau \in \mathbb{R};$$

según esto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^2 |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau &\leq C_4(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\beta}} |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau \\ &= C_4(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{v}_k(\tau)|^2}{1+|\tau|^{1-2\beta}} d\tau + C_4(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\beta}} |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq C_4 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau + C_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{v}_k(\tau)|}{1+|\tau|^{1-2\beta}} d\tau \\ &\leq C_4 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau \\ &\quad + C_5 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\beta})^2} \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

La integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\beta})^2}$ es finita si $\beta < 1/4$,

ya que

$$\frac{1}{(1+|\tau|^{1-2\beta})^2} = \frac{C}{1+|\tau|^{2(1-2\beta)}} = \frac{C}{1+|\tau|^\sigma} \quad \text{con } \sigma > 1$$

y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{1+|\tau|^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Además,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_k(\tau)|^2 d\tau \leq d_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_k(\tau)|_h^2 d\tau = d_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{v}_k(t)|_h^2 dt \leq \text{cte.}$$

Como consecuencia, obtenemos la siguiente estimación para la transformada de Fourier $\hat{\varphi}_k$ de \tilde{v}_k

$$(2.37) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\beta} |\hat{\varphi}_k(\tau)|^2 d\tau \leq \text{cte.} \quad \text{para algún } \beta \in (0, 1/4)$$

3^{er} paso Utilizando (2.8a) para las funciones \tilde{v}_{kh} y la primera hipótesis de consistencia H1, se deduce la existencia de $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}, \mathcal{H}' \rightarrow 0$ y $\{k'\} \rightarrow 0$ tales que, para algún $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, se tiene:

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{k', h'} \rightarrow u \text{ débilmente-}^* \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n) \text{ y} \\ p_{h'} \tilde{v}_{k', h'} \rightarrow \bar{u} \text{ débilmente en } L^2(0, T; F) \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Por otra parte, gracias a (2.26a) para \tilde{v}_{kh} , (2.37) y H4, está claro que se pueden elegir las subsucesiones \mathcal{H} y $\{k'\}$ de tal forma que junto con (2.38), se tenga:

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{kh} \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(Q)^n \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta (2.26b), obtenemos las mismas propiedades de convergencia (2.38) y (2.39) para las sucesiones $u_{k'h'}$, $v_{k'h'}$ y $\tilde{u}_{k'h'}$.

4° paso: Elegimos $\psi \in \mathcal{U}$ y tomamos $v = s_h \psi$ en (2.27). Sea ζ una función de $C^1([0, T])$ con $\zeta(T) = 0$. Multiplicando (2.27) (donde $v = s_h \psi$) por $\zeta(t)$ e integrando por partes en $[0, T]$, se llega a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_0^T (\tilde{v}_{kh}(t), \zeta'(t) s_h \psi) dt \\
 & + \nu \int_0^T \langle \theta v_{kh}(t) + \theta v_{kh}(t+k) + 2(1-\theta) u_{kh}(t+k), \zeta(t) s_h \psi \rangle_h dt \\
 (2.40) \quad & + \int_0^T \hat{b}(u_{kh}(t+k), u_{kh}(t+k), \zeta(t) s_h \psi) dt \\
 & + \int_0^T \hat{b}(u_{kh}(t+k), (1-\theta) u_{kh}(t+k) + \theta v_{kh}(t), \zeta(t) s_h \psi) dt \\
 & = 2(\tilde{v}_{kh}(0), s_h \psi) \zeta(0) + 2 \int_0^T (f_k(t), \zeta(t) s_h \psi) dt.
 \end{aligned}$$

Aquí, la función $f_k : [0, T] \rightarrow H$ es constante en cada intervalo $[mk, (m+1)k)$ y está definida por

$$(2.41) \quad f_k(t) = \frac{1}{2} [f^{m+1} + f^{m+3}/2] \quad \forall t \in [mk, (m+1)k).$$

La expresión (2.40), en forma reducida, se escribe como sigue:

$$(2.42) \quad -2I_{kh} + \nu J_{kh} + L_{kh} + M_{kh} = 2P_{kh} + 2Q_{kh}$$

Notemos en primer lugar que $P_{k'h'} \rightarrow (u_0, \psi) \zeta(0)$ cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$, $k' \rightarrow 0$. En efecto, debido a (A5) sabemos que $\bigcup_h v_h$ es denso en $L^2(\Omega)^n$ y esto nos dice que $u_h^0 \rightarrow u_0$ fuertemente en $L^2(\Omega)^n$.

Por otra parte, de (2.27) se tiene

$$\begin{aligned}
 (u_h^{1/2} - u_h^0, s_h \psi) &= \frac{k}{2} (f^{1/2}, s_h \psi) - \frac{kv}{2} (\theta u_h^{1/2} + (1-\theta) u_h^0, s_h \psi)_h \\
 - \frac{k}{2} \hat{b}_h(u_h^0, u_h^0, s_h \psi) &= \int_0^{k/2} (f(t), s_h \psi) dt \\
 - \frac{v}{2} \int_0^k (\theta v_{kh}(t) + (1-\theta) u_{kh}(t), s_h \psi)_h dt \\
 - \frac{k}{2} \int_0^k \hat{b}_h(u_{kh}(t), u_{kh}(t), s_h \psi) dt ;
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta H2, H3 y el hecho de que $s_h \psi \rightarrow \psi$ fuertemente en $L^2(\Omega)^n$, se obtiene fácilmente que

$$(u_h^{1/2} - u_h^0, s_h \psi) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad (u_h^{1/2}, s_h \psi) \rightarrow (u_0, \psi).$$

Por otra parte, $f_k \rightarrow f$ fuertemente en $L^2(Q)^n$ cuando $k \rightarrow 0$. En efecto,

$$(2.43) \quad f_k(t) = \frac{1}{2} [f^{m+1} + f^{m+3/2}] = \frac{1}{2} [\hat{f}_k(t) + \tilde{f}_k(t)];$$

veamos que $\hat{f}_k \rightarrow f$ fuerte en $L^2(Q)^n$ (análogamente se probaría la convergencia de $\tilde{f}_k(t)$). Tenemos que

$$f^{m+1} = \frac{2}{k} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} f(x,t) dt$$

la aplicación $T_k : f \rightarrow \hat{f}_k$ es lineal de $L^2(0,T;H)$ en $L^2(0,T;H)$ y además es continua, puesto que

$$\begin{aligned}
 \|T_k f\|_{L^2(0,T;H)}^2 &= \int_0^T |T_k f(t)|^2 dt = \sum_{m=0}^{N-1} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} |\hat{f}_k(t)|^2 dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} |f^{m+1}|^2 dt = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} |f^{m+1}| \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 ;
 \end{aligned}$$

por ello, basta probar que $T_k \psi \rightarrow \psi$ para funciones ψ que estén en un subespacio denso de $L^2(0,T;H)$, por ejemplo $C([0,T];H)$.

Así,

$$\begin{aligned}
 \|T_k \psi - \psi\|_{L^2(0, T; H)}^2 &= \int_0^T |T_k \psi(t) - \psi(t)|^2 dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} \left| \frac{2}{k} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} \psi(s) ds - \psi(t) \right|^2 dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} |\psi(\xi_m) - \psi(t)|^2 dt \\
 &\leq \sum_{m=0}^{N-1} \int_{(m+1/2)k}^{(m+1)k} \epsilon_k^2 dt \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow 0$. En la tercera igualdad hemos aplicado el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral a la función ψ , teniéndose pues $(m+1/2)k < \xi_m < (m+1)k$ para cada m .

En consecuencia, tenemos:

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{k'h'} \rightarrow \int_0^T (f(t), \zeta(t)\psi) dt \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Por otra parte, usando de nuevo H2, H3 y las propiedades de convergencia (2.38) y (2.39) para $u_{k'h'}$ y $v_{k'h'}$, se obtiene fácilmente que

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{J_{k'h'}} + L_{k'h'} + M_{k'h'} + 2v \int_0^T (u(t), (t)\psi) dt \\ + 2 \int_0^T \hat{b}(u(t), u(t), (t)\psi) dt \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Finalmente, de (2.39) obtenemos:

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{k'h'} \rightarrow \int_0^T (u(t), \zeta(t)\psi) dt \\ \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

La consecuencia de (2.44)-(2.46) y de la convergencia de $P_{k'h'}$, es que la función límite u satisface:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (u(t), \zeta'(t) \psi) dt + \nu \int_0^T (u(t), \zeta(t) \psi) dt \\
 & + \int_0^T \hat{b}(u(t), u(t), \zeta(t) \psi) dt = (u_0, \psi) \zeta(0) \\
 & + \int_0^T (f(t), \zeta(t) \psi) dt,
 \end{aligned}$$

y esto para toda función $\psi \in \mathcal{V}$ y para toda función $\zeta \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ que satisfaga $\zeta(T) = 0$. Por continuidad la misma igualdad seguirá verificándose para toda $\psi \in V$. En particular, eligiendo ζ arbitrariamente en $\mathcal{D}(0, T)$, y teniendo en cuenta (0.46), se observa u verifica (0.54). Por último, tomando $\zeta \in \mathcal{D}([0, T])$ con $\zeta(0) = 1$ se deduce que

$$\begin{aligned}
 (u_0, \psi) &= - \int_0^T (u(t), \zeta'(t) \psi) dt + \nu \int_0^T (u(t), \zeta(t) \psi) dt \\
 &+ \int_0^T \hat{b}(u(t), u(t), \zeta(t) \psi) dt - \int_0^T (f(t), \zeta(t) \psi) dt \\
 &= (u(0), \psi) \quad \forall \psi \in V,
 \end{aligned}$$

con lo cual (0.55) también es cierto. En otras palabras, u es una solución del problema de Navier-Stokes (0.53)-(0.55).

5° paso: Supongamos ahora que $n = 2$, $\theta < 1/2$ $kS(h)^2 \rightarrow 0$, $kS_1(h)^2 \rightarrow 0$ y probemos que $p_k u_{kh} \rightarrow \bar{u}u$ en la topología fuerte de $L^2(0, T; F)$ cuando $h \in \mathcal{H}$, $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$. Introducimos las funciones $z_{kh}, w_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h$, constantes en cada intervalo $[mk, (m+1)k]$ y definidas por

$$(2.47) \quad \begin{cases} z_{kh}(mk) = u_h^{m+1}, w_{kh}(mk) = \theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta) u_h^{m+1} \\ \text{para } m = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Veamos que, en las hipótesis del Teorema para cada $h \in \mathcal{H}$ podemos elegir una función $u_h^+ \in L^2(0, T; W_h)$ de manera que se tenga

(2.48) $p_h u_h^+ + \bar{w}u$ fuertemente en $L^2(0, T; F)$ cuando $h \in \mathcal{H}$, $h \rightarrow 0$.

El resultado es obvio si u es una función escalonada (en t)

$$u = \sum_{i=1}^s u_i \chi_{[a_i, b_i]} \quad u_i \in V \quad [a_i, b_i] \subset [0, T],$$

porque bastaría tomar $u_h^+ = \sum_{i=1}^s s_h u_i \chi_{[a_i, b_i]} \in L^2(0, T; V_h)$.

Puesto que la aproximación es convergente, es fácil ver que, para las funciones u_h^+ así definidas, se cumple (2.48).

Supongamos ahora que u es una función arbitraria de $L^2(0, T; V)$. Dado $n \geq 1$, existirá una función escalonada u_n tal que

$$(2.49) \quad \begin{cases} \|u_n - u\|_{L^2(0, T; V)} \leq 1/n \\ \|\bar{w}u_n - \bar{w}u\|_{L^2(0, T; F)} \leq c_0/n \end{cases}$$

Por otra parte, para un n fijo $p_h u_{nh}^+ + \bar{w}u_n$ fuertemente en $L^2(0, T; F)$, luego existe $\eta_n > 0$ tal que, si $|h| < \eta_n$, entonces

$$(2.50) \quad \|p_h u_{nh}^+ - \bar{w}u_n\|_{L^2(0, T; F)} \leq 1/n$$

podemos tomar además $\eta_n \leq (\eta_{n-1}, 1/n)$, obteniéndose de esta forma una sucesión $\{\eta_n\}$ con las propiedades

$$\eta_n < \eta_{n-1} < \dots < \eta_1, \quad \eta_n \rightarrow 0.$$

Para cada $h \in \mathcal{H}$, pongamos

$$u_h^+ = u_{nh}^+ \quad \text{si} \quad \eta_{n-1} < |h| < \eta_n.$$

Es ahora inmediato que, con esta elección, se cumple (2.48).

Con objeto de probar el aptdo. d) del Teorema, comenzaremos considerando la siguiente expresión (donde $\alpha_{kh} \uparrow 1$

cuando $h \in \mathcal{H}$, $h \rightarrow 0$ y $\beta_{kh}, \gamma > 0$):

$$(2.51) \left\{ \begin{aligned} x_{kh} &= |u_h^N - u(T)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ 2(1-\theta) |u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}|^2 \\ &+ |u_h^{m+1/2} - u_h^m|^2 \} + 2\alpha_{kh} \nu \int_0^T \|w_{kh}(t) - u_h^+(t)\|_h^2 dt \\ &- \beta_{kh} \nu \int_0^T \|v_{kh}(t) - z_{kh}(t)\|_h^2 dt - \gamma \nu \int_0^T \|v_{kh}(t) - u_{kh}(t)\|_h^2 dt \end{aligned} \right.$$

Para el resultado de convergencia fuerte, utilizaremos el siguiente argumento:

Sean $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}' \rightarrow 0$ y $k' \rightarrow 0$ tales que u_h^N , converge débilmente en $L^2(\Omega)^n$ hacia una función χ .

(i) Veremos que

$$(2.52) \quad (\chi - u(T), v) = 0 \quad \forall v \in H$$

(ii) Además, para $|h|$ y k suficientemente pequeños

$$(2.53) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ 2(1-\theta) |u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}|^2 + |u_h^{m+1/2} - u_h^m|^2 \} \\ &\geq \beta_{kh} \nu \int_0^T \|v_{kh}(t) - z_{kh}(t)\|_h^2 dt \\ &+ \gamma \nu \int_0^T \|v_{kh}(t) - u_{kh}(t)\|_h^2 dt, \end{aligned} \right.$$

de donde $x_{kh} \geq 0$.

(iii) Usando (2.52) y (2.53), probaremos que, para elecciones convenientes de α_{kh} , β_{kh} y γ , la correspondiente sucesión $x_{k', h'}$ verifica:

$$x_{k', h'} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h' \in \mathcal{H}', h' \rightarrow 0 \text{ y } k' \rightarrow 0;$$

por tanto, se tendrá que

$$\int_0^T \|w_{k', h'} - u_h^+\|_h^2 dt \rightarrow 0$$

y, necesariamente, $p_{h'} u_{k', h'} \rightarrow \bar{w}u$ fuertemente en $L^2(0, T; F)$.

Puesto que este argumento se ha aplicado a unas subse-
 ciones arbitrarias para las que u_h^N converge, y estamos en
 situación de unicidad de solución, el resultado de conver-
 gencia fuerte es válido para la sucesión completa $\{p_h u_{kh}\}$.

Supongamos por el momento que (2.52) y (2.53) son
 ciertos. De nuevo, por simplicidad en la notación suprimire-
 mos el subíndice h ; nótese que x_k puede escribirse en la
 forma $x_k^1 + x_k^2 + x_k^3$, donde

$$(2.54) \quad x_k^1 = |u(T)|^2 + 2\alpha_k \nu \int_0^T \|u^+\|^2 dt ,$$

$$(2.55) \quad x_k^2 = -2(u^N, u(T)) - 4\alpha_k \nu \int_0^T (w_k, u^+) dt ,$$

$$x_k^3 = x_k - x_k^1 - x_k^2$$

Observamos que

$$(2.56) \quad x_k^1 = |u(T)|^2 + 2 \nu \int_0^T \|u\|^2 dt ,$$

$$(2.57) \quad x_k^2 = -2|u(T)|^2 - 4\nu \int_0^T \|u\|^2 dt$$

cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$ y $k' \rightarrow 0$.

Por otra parte, si tomamos en (1.24) $w = u^{m+1} - u^{m+1/2}$ y
 operamos en el término trilineal, obtendremos

$$|u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 + \frac{k\nu}{2} ((1-\theta)u^{m+1} + \theta u^{m+1/2}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) \\
 + \frac{k\hat{b}}{2}(u^{m+1}, u^{m+1/2}, u^{m+1}) = \frac{k}{2}(f^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) .$$

Sumando para $m=0, \dots, N-1$ y desarrollando la expresión co-
 rrespondiente, resulta:

$$(2.58) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 + k \nu \sum_{m=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} \|u^{m+1}\|^2 - \frac{1}{2} (u^{m+1}, u^{m+1/2}) \right] \\ & - \frac{\theta}{2} \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 - \frac{1}{2\nu} \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, u^{m+1/2}) \\ & = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) \end{aligned} \right.$$

Tomando ahora $v=u^{m+1/2}$ en (1.23) y $w=\theta u^{m+1/2}+(1-\theta)u^{m+1}$ en (1.24) y sumando ambas expresiones para $m=0, \dots, N-1$, llegamos a la igualdad

$$(2.59) \left\{ \begin{aligned} & |u^N|^2 - |u^0|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-2\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \} \\ & + k v \sum_{m=0}^{N-1} \{ \theta(1+\theta) \|u^{m+1/2}\|^2 + (1-\theta)^2 \|u^{m+1}\|^2 \\ & + 2\theta(1-\theta) (u^{m+1/2}, u^{m+1}) + (1-\theta) (u^m, u^{m+1/2}) \\ & + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2}) \} = k \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1/2}, u^{m+1/2}) \\ & + (f^{m+1}, \theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}) \}. \end{aligned} \right.$$

De (2.58) y (2.59), resulta que

$$\begin{aligned} & |u^N|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 + 2(1-\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \} \\ & + k v \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ \frac{\theta-1}{2} \|u^{m+1/2} - u^m\|^2 + \left(\frac{1-2\theta}{4} - \theta(1-\theta) \right) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 \right. \\ & + \frac{1-\theta}{2} \|u^m\|^2 + \left(\frac{1}{4} + \theta + \frac{\theta}{2} \right) \|u^{m+1/2}\|^2 + \left(\frac{1}{4} + (1-\theta) \right) \|u^{m+1}\|^2 \\ & \left. - \frac{1}{2v} \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, u^{m+1/2}) + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2}) \right\} = |u^0|^2 \\ & + \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) + k \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1/2}, u^{m+1/2}) \\ & + (f^{m+1}, \theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}) \} \end{aligned}$$

luego X_k^3 puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} X_k^3 = & A_k + B_k + |u^0|^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 + 2(1-\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \\ & - k v \sum_{m=0}^{N-1} p^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \theta) \}; \end{aligned}$$

aquí, se ha utilizado la notación siguiente:

$$(2.60) \quad A_k = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) + 0,$$

$$(2.61) \quad \left\{ \begin{aligned} B_k &= k \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1}, \theta u^{m+1/2} + (1-\theta)u^{m+1}) \\ &\quad + (f^{m+1/2}, u^{m+1/2}) \} + 2 \int_0^T (f, u) dt, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} p^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \theta) &= (\gamma - \frac{1-\theta}{2}) \|u^{m+1/2} - u^m\|^2 \\ &\quad + (\beta_k + (2\alpha_k - 1)\theta(1-\theta) + \frac{1-2\theta}{4}) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 + \frac{1-\theta}{2} \|u^m\|^2 \\ &\quad + (\frac{1}{4} - (2\alpha_k - 1)\theta + \frac{\theta}{2}) \|u^{m+1/2}\|^2 + (\frac{1}{4} - (2\alpha_k - 1)(1-\theta)) \|u^{m+1}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2}) - \frac{1}{2v} \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, u^{m+1/2}). \end{aligned}$$

También puede escribirse

$$(2.62) \quad \left\{ \begin{aligned} X_k^3 &= A_k + B_k + C_k + |u^0|^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 \\ &\quad + 2(1-\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \} - k v \sum_{m=0}^{N-1} q^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \theta), \end{aligned} \right.$$

donde

$$(2.63) \quad C_k = \frac{k}{2} - (1-\theta - a_k) (|u^N|^2 - |u^0|^2),$$

$$(2.64) \quad q^m = p^m - \frac{1}{2} (1-\theta - a_k) \|u^m\|^2 + \frac{1}{2} (1-\theta - a_k) \|u^{m+1}\|^2,$$

$$(2.65) \quad a_k = a_{kh} = \sqrt{k} S_1(h) + 0.$$

Puesto que $kS(h)^2 \rightarrow 0$, también se verifica que $C_k \rightarrow 0$.

Si probamos que $X_k^3 \leq A_k + B_k + C_k + |u^0|^2$ para $|h|$ y k suficientemente pequeños y para una elección apropiada de α_k , β_k y γ , entonces estará probado el aptdo. (iii) sobre la convergencia de X_k . En efecto, esta desigualdad para X_k^3 lleva a

$$0 \leq X_k \leq X_k^1 + X_k^2 + A_k + B_k + C_k + |u^0|^2,$$

y el segundo miembro converge hacia

$$|u(0)|^2 - |u(T)|^2 - 2v \int_0^T \|u\|^2 dt + 2 \int_0^T (f, u) dt = 0$$

(resulta evidente que la hipótesis $n = 2$ es esencial: debe tener vigor la igualdad de la energía). Luego, para que se verifique (iii), es suficiente determinar α_k, β_k , y γ tales que se tenga

$$(2.66) \quad -k \vee q^m \leq \frac{1}{2} \|u^{m+1/2} - u^m\|^2 + (1-\theta) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 \quad \forall m$$

cuando $|h|$ y k son suficientemente pequeños.

Tomemos $\alpha_k = 1 - (a_k/2)$ (entonces $\alpha_k \uparrow 1$). Una expresión para q^m es la siguiente:

$$\begin{aligned} q^m &= \left(\gamma - \frac{1-\theta}{2} \right) \|u^{m+1/2} - u^m\|^2 + (\beta_k + \beta^*) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 \\ &+ (a_k/2) \|u^m\|^2 + \left(\frac{1-2\theta}{4} + \theta a_k \right) \|u^{m+1/2}\|^2 \\ &- \left(\frac{1-2\theta}{4} \right) (1-2a_k) \|u^{m+1}\|^2 + \frac{1}{\nu} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2} - u^m) \\ &- \frac{1}{2\nu} \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2}) \end{aligned}$$

donde $\beta^* = \beta^*(\theta, k, h) > 0$ (pues $\theta < 1/2$). Tomemos

$\beta_k \geq \beta'_k + \omega_k$ y $\gamma = \gamma' + \frac{1-\theta}{2}$, con $\beta'_k, \gamma' > 0$ y ω_k suficientemente grande.

Entonces

$$\begin{aligned} &(\beta_k + \beta^*) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 + \left(\frac{1-2\theta}{4} + \theta a_k \right) \|u^{m+1/2}\|^2 \\ &- \left(\frac{1-2\theta}{4} \right) (1-2a_k) \|u^{m+1}\|^2 \geq \beta'_k \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 + (a_k/4) \|u^{m+1}\|^2. \end{aligned}$$

Aquí, hemos utilizado el hecho de que para ω_k suficientemente grande (basta $\omega_k > \frac{4}{a_k} \left(\frac{1-2\theta}{4} \right)^2 - 3\theta^2(1-a_k) + \theta$) se verifica

$$\begin{aligned} &\left[\omega_k + (1-a_k)\theta(1-\theta) + \frac{1-2\theta}{4} \right] \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 + \left[\frac{1-2\theta}{4} + \theta a_k \right] \|u^{m+1/2}\|^2 \\ &- \left[\frac{1-2\theta}{4} - \left(\frac{1}{4} - \theta \right) a_k \right] \|u^{m+1}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

También sabemos que:

$$(2.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v} |\hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/2} - u^m)| \leq \frac{1}{v} S_1(h) |u^m| \|u^m\| |u^{m+1} - u^m| \\ \leq \frac{d}{v} S_1(h) \|u^m\| |u^{m+1/2} - u^m| \leq (a_k/2) \|u^m\|^2 \\ + (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) |u^{m+1/2} - u^m|^2, \end{array} \right.$$

donde d es una constante. Análogamente, se tiene:

$$(2.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2v} |\hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, u^{m+1} - u^{m+1/2})| \leq (a_k/4) \|u^{m+1}\|^2 \\ + (d^2 S_1(h)^2 / 4v^2 a_k) \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2. \end{array} \right.$$

Gracias a estas elecciones de γ y β_k , (2.67) y (2.68), llegamos a la siguiente desigualdad

$$q^m \geq \gamma' \|u^{m+1/2} - u^m\|^2 + \beta_k' \|u^{m+1} - u^{m+1/2}\|^2 \\ - (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 + |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \}.$$

Así pues,

$$-k v q^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \theta) \leq (d^2 / 2v a_k) k S_1(h)^2 \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 \\ + |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \}.$$

Luego, para que se verifique (2.66), basta con que se tenga

$$(d^2 / 2v a_k) k S_1(h) \{ |u^{m+1/2} - u^m|^2 + |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 \} \\ \leq \frac{1}{2} |u^{m+1/2} - u^m|^2 + (1-\theta) |u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2,$$

ó sea:

$$(2.69) \quad (d^2 / 2v a_k) k S_1(h) < \min\left(\frac{1}{2}, (1-\theta)\right).$$

Evidentemente, para $k S_1(h)_2 \neq 0$, se cumple la condición (2.69) para $|h|$ y k suficientemente pequeños.

Queda por probar (2.52) y (2.53). Usando de nuevo (1.23) y (1.24), encontramos:

$$\begin{aligned}
& (u_h^{m+1} - u_h^m, v_h) + \frac{kv}{2} ((1-\theta)u_h^{m+1} + 2\theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta)u_h^m, v_h)_h \\
& + \frac{k\hat{b}}{2}(u_h^m, u_h^m, v_h) + \frac{k\hat{b}}{2}(u_h^{m+1}, (1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, v_h) \\
& = \frac{k}{2}(f^{m+1/2}, v_h) + \frac{k}{2}(f^{m+1}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

Sumando para $m=0, \dots, N-1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& (u_h^N - u_h^0, v_h) + \frac{kv}{2} \sum_{m=0}^{N-1} ((1-\theta)u_h^{m+1} + 2\theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta)u_h^m, v_h)_h \\
& + \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ \hat{b}(u_h^m, u_h^m, v_h) + \hat{b}(u_h^{m+1}, (1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, v_h) \} \\
& = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1/2}, v_h) + (f^{m+1}, v_h) \} \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de convergencia deducidas anteriormente para las sucesiones u_{kh} y v_{kh} , y procediendo como en la 4ª etapa con $v_h = s_h v$, $v \in \mathcal{U}$, se puede pasar al límite fácilmente (cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$ y $k' \rightarrow 0$), obteniéndose:

$$\begin{aligned}
& (\chi - u_0, v) + v \int_0^T (u(t), v) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v) dt \\
& = \int_0^T (f(t), v) dt \quad \forall v \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

Pero, además, de la propia ecuación (0.54), se sigue que

$$\begin{aligned}
& (u(T) - u_0, v) + v \int_0^T (u(t), v) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v) dt \\
& = \int_0^T (f(t), v) dt \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Luego

$$(\chi - u(T), v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

y, como \mathcal{U} es denso en H , concluimos que se verifica (2.52).

Finalmente, notemos que (2.53) es consecuencia de (2.7) y del hecho de que $kS(h)^2 \rightarrow 0$.

CAPITULO III.

3.1 RESULTADOS DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA PARA ALG 2.-

Supondremos, en este Capítulo, que se verifican las mismas hipótesis de consistencia H1-H4 introducidas en el Capítulo precedente. Para demostrar un resultado de convergencia para ALG 2, consideraremos para cada $k > 0$ y para cada $h \in$ las funciones u_{kh}^* , v_{kh}^* y w_{kh}^* , definidas como sigue:

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} u_{kh}^*, v_{kh}^*, w_{kh}^* : [0, T] \rightarrow W_h, \quad \text{constantes en cada} \\ \text{intervalo } [mk, (m+1)k), \text{ definidas resp. por} \\ u_{kh}^*(t) = u_h^m, v_{kh}^*(t) = u_h^{m+1/4} \quad \text{y } w_{kh}^*(t) = u_h^{m+3/4} \\ \forall t \in [mk, (m+1)k), \end{array} \right.$$

y sean

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{kh}(t), \bar{v}_{kh}(t), \bar{w}_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h, \quad \text{continuas y} \\ \text{lineales en cada } [mk, (m+1)k) \text{ definidas por} \\ \bar{u}_{kh}(mk) = u_h^m, \bar{v}_{kh}(mk) = u_h^{m+1/4} \quad \text{y } \bar{w}_{kh}(t) = u_h^{m+3/4} \\ \text{para } m=0, 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3.1 En las condiciones precedentes, existen constantes γ_0 y γ_1 dependientes sólo de

$$|u_0|, \|f\|_{L^2(0, T; H)}, \nu, d_0, d_1 \text{ y } \theta$$

tales que si k y h verifican (2.12), para γ_0 y γ_1 , entonces las conclusiones a), b) y c) del Teorema 2.1 son ciertas para las sucesiones u_{kh}^* , v_{kh}^* , w_{kh}^* , \bar{u}_{kh} , \bar{v}_{kh} y \bar{w}_{kh} . Más aún, si $n=2$ y se cumple (2.12'), se tiene convergencia fuerte de

las sucesiones $p_k u_{kh}^*, \dots, p_k \bar{w}_{kh}$ en $L^2(0, T; F)$.

En este caso, veremos que una elección admisible para γ_0 y γ_1 , corresponde a la que satisfaga:

$$(3.3) \quad (1-\theta)^2 \gamma_0 v^2 + d_1^2 \gamma_1 \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \theta) \leq \theta v$$

con Λ dado por (2.14).

El Teorema 1.3, nos dice que ALG 2 es (al menos) condicionalmente estable.

3.2.-DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.1.-

La demostración de este resultado sigue los mismos pasos que la del Teorema 2.1. Al igual que antes, suprimiremos por comodidad el índice h en las dos primeras etapas.

1^{er} paso: Estimaciones a priori.

Tomando $v=u^{m+1/4}$ en (1.26) y $v=u^{m+1}$ en (1.28) obtenemos sucesivamente

$$(3.4) \left\{ \begin{aligned} & 2|u^{m+1/4}|^2 - 2|u^m|^2 + 2|u^{m+1/4} - u^m|^2 + kv \|u^{m+1/4}\|^2 \\ & + kv(1-\theta) \|u^m\|^2 + kv(1-\theta) (u^m, u^{m+1/4} - u^m) \\ & + \hat{k}b(u^m, u^m, u^{m+1/4} - u^m) = k(f^{m+1/4}, u^{m+1/4}), \end{aligned} \right.$$

$$(3.5) \left\{ \begin{aligned} & 2|u^{m+1}|^2 - 2|u^{m+3/4}|^2 + 2|u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + kv\theta \|u^{m+1}\|^2 \\ & + kv(1-\theta) \|u^{m+3/4}\|^2 + kv(1-\theta) (u^{m+3/4}, u^{m+1} - u^{m+3/4}) \\ & + \hat{k}b(u^m, u^{m+3/4}, u^{m+1} - u^{m+3/4}) = k(f^{m+1}, u^{m+1}). \end{aligned} \right.$$

Tomando $v=\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}$ en (1.27), resulta

$$(3.6) \left\{ \begin{aligned} & |u^{m+3/4}|^2 - |u^{m+1/4}|^2 + (1-2\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \\ & + kv \|\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2 \\ & = k(f^{m+3/4}, \theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}) \leq (kd_0^2/2v) |f^{m+3/4}|^2 \\ & + \frac{kv}{2} \|\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2. \end{aligned} \right.$$

De (3.4), utilizando la primera desigualdad de (2.7) y (2.9), tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 2|u^{m+1/4}|^2 - 2|u^m|^2 + 2|u^{m+1/4} - u^m|^2 + kv\theta \|u^{m+1/4}\| + kv(1-\theta) \|u^m\|^2 \\
 & \leq (kd_0^2/2v\theta) |f^{m+1/4}|^2 + kv(1-\theta) S(h) \|u^m\| |u^{m+1/4} - u^m| \\
 & + kd_1 S_1(h) |u^m| \|u^m\| |u^{m+1/4} - u^m| + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 \\
 & \leq (kd_0^2/2v\theta) |f^{m+1/4}|^2 + (k^2 v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 / 2) \|u^m\|^2 \\
 & + (k^2 d_1^2 S_1(h)^2 / 2) \|u^m\|^2 |u^m|^2 + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 + \frac{1}{2} |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\
 & + \frac{1}{2} |u^{m+1/4} - u^m|^2 .
 \end{aligned}$$

luego

$$(3.7) \left\{ \begin{aligned}
 & 2|u^{m+1/4}|^2 - 2|u^m|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 \\
 & + kv(1-\theta) \|u^m\|^2 - k^2 \left\{ \frac{1}{2} v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^m\|^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} d_1^2 S_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2 \right\} \leq (kd_0^2/2v\theta) |f^{m+1/4}|^2 .
 \end{aligned} \right.$$

De forma análoga, (3.5) lleva a la desigualdad

$$(3.8) \left\{ \begin{aligned}
 & 2|u^{m+1}|^2 - 2|u^{m+3/4}|^2 + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1}\|^2 \\
 & + kv(1-\theta) \|u^{m+3/4}\|^2 - k^2 \left\{ \frac{1}{2} v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 \|u^{m+3/4}\|^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} d_1^2 S_1(h)^2 \|u^{m+3/4}\|^2 |u^m|^2 \right\} \leq (kd_0^2/2v\theta) |f^{m+1}|^2 .
 \end{aligned} \right.$$

Sumando (3.7), (3.8) y dos veces (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 & 2|u^{m+1}|^2 - 2|u^m|^2 + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\
 & + 2(1-2\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1}\|^2 \\
 & + kv(1-\theta) \|u^{m+3/4}\|^2 + \frac{kv\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 + kv(1-\theta) \|u^m\|^2 \\
 (3.9) \quad & + kv\theta \|u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2 - k^2 \left\{ (v^2 (1-\theta)^2 S(h)^2 / 2) \|u^{m+3/4}\|^2 \right.
 \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 & + (d_1^2 s_1(h)^2/2) |u^m|^2 \|u^{m+3/4}\|^2 + (\nu^2(1-\theta)^2 s(h)^2/2) \|u^m\|^2 \\
 & + (d_1^2 s_1(h)^2/2) \|u^m\|^2 |u^m|^2 \} \leq (kd_0^2/2\nu\theta) \{ |f^{m+1}|^2 \\
 & + |f^{m+1/4}|^2 + 2\theta |f^{m+3/4}|^2 \}
 \end{aligned}$$

y sumando (3.9) para $m=0\dots r$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & 2|u^{r+1}|^2 + \sum_{m=0}^r \{ |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \} \\
 & + 2(1-2\theta) \sum_{m=0}^r |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + \frac{k\nu\theta}{2} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 \\
 & + k\nu(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^{m+3/4}\|^2 + \frac{k\nu\theta}{2} \sum_{m=0}^r \|u^{m+1/4}\|^2 \\
 & + k\nu(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^m\|^2 + k\nu \sum_{m=0}^r \|\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2 \\
 & - k^2 \{ \sum_{m=0}^r (\nu^2(1-\theta)^2 s(h)^2/2) \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & + (d_1^2 s_1(h)^2/2) |u^m|^2 \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & + \sum_{m=0}^r (\nu^2(1-\theta)^2 s(h)^2/2) \|u^m\|^2 + (d_1^2 s_1(h)^2/2) \|u^m\|^2 |u^m|^2 \} \\
 & \leq (kd_0^2/2\nu\theta) \sum_{m=0}^r \{ |f^{m+1}|^2 + |f^{m+1/4}|^2 + 2\theta |f^{m+3/4}|^2 \} + 2|u^0|^2
 \end{aligned}$$

Al agrupar convenientemente los distintos términos, llegamos a

$$\begin{aligned}
 & |u^{r+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^r \{ |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\
 & + 2(1-2\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \} + \frac{k\nu}{2} \sum_{m=0}^r \{ \frac{1-\theta}{2} \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & + \frac{\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 + \|\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2 + (1-\theta) \|u^m\|^2 \}
 \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k}{4} \left\{ v\theta \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 + v(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^{m+3/4}\|^2 \right. \\
 & - k \sum_{m=0}^r \left[v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 \|u^{m+3/4}\|^2 \right. \\
 & + d_1^2 s_1(h)^2 |u^m|^2 \|u^{m+3/4}\|^2 \left. \right] - k \sum_{m=1}^r \left[v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 \|u^m\|^2 \right. \\
 & \left. + d_1^2 s_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2 \right] \} \leq \mu_r ,
 \end{aligned}$$

donde μ_r viene dado por la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mu_r \equiv & |u^0|^2 + (k^2 v^2 (1-\theta)^2 s(h)^2 / 4) \|u^0\|^2 + (k^2 d_1^2 s_1(h)^2 / 4) \|u^0\|^2 |u^0|^2 \\
 & + (k d_0^2 / 4 v \theta) \sum_{m=0}^r \left\{ |f^{m+1}|^2 + |f^{m+1/4}|^2 + 2\theta |f^{m+3/4}|^2 \right\} .
 \end{aligned}$$

Admitiendo que se verifica (2.12), es fácil probar que $\mu_r \leq \mu_N \leq \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \theta)$, con Λ dado por (2.14).

Probemos ahora que se verifica la misma desigualdad suprimiendo el tercer término entre llaves del miembro derecho. Al igual que en la demostración del teorema 2.1, utilizaremos un razonamiento de inducción:

(a) Para $r = 0$, basta usar (3.9) con $m = 0$.

$$\begin{aligned}
 & |u^1|^2 + \frac{1}{2} \left\{ |u^1 - u^{3/4}|^2 + |u^{1/4} - u^0|^2 + 2(1-2\theta) |u^{3/4} - u^{1/4}|^2 \right\} \\
 & + (kv\theta/4) \|u^1\|^2 + (kv(1-\theta)/4) \|u^{3/4}\|^2 + (kv\theta/4) \|u^{1/4}\|^2 \\
 & + (kv(1-\theta)/2) \|u^0\|^2 + (kv/2) \|\theta u^{1/4} + (1-\theta)u^{3/4}\|^2 \\
 & \leq |u^0|^2 + (k^2 v^2 (1-\theta)^2 s(h)^2 / 4) \|u^0\|^2 \\
 & + (k^2 d_1^2 s_1(h)^2 / 4) |u^0|^2 \|u^0\|^2 + (k d_0^2 / 4 v \theta) \left\{ |f^1|^2 + |f^{1/4}|^2 \right. \\
 & \left. + 2\theta |f^{3/4}|^2 \right\} - (kv(1-\theta)/4) \left\{ \|u^{3/4}\|^2 - kv(1-\theta) s(h)^2 \|u^{3/4}\|^2 \right. \\
 & \left. - (k d_1^2 s_1(h)^2 / v(1-\theta)) |u^0|^2 \|u^{3/4}\|^2 \right\} \leq \mu_0
 \end{aligned}$$

En esta última desigualdad se ha tenido en cuenta que, gracias a (3.3), la expresión entre llaves es positiva.

(b) Supongamos cierta la afirmación para $m=0,1,\dots,r-1$. En particular $|u^m|^2 \leq \mu_m \leq \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \theta)$ para $m \leq r$; entonces, utilizando (3.3)

$$\begin{aligned}
 & v\theta \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 + v(1-\theta) \sum_{m=0}^r \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & - k \sum_{m=0}^r (v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 \|u^{m+3/4}\|^2 + d_1^2 s_1(h)^2 |u^m|^2 \|u^{m+3/4}\|^2) \\
 & - k \sum_{m=1}^r (v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 \|u^m\|^2 + d_1^2 s_1(h)^2 \|u^m\|^2 |u^m|^2) \\
 & \geq [\theta - k(v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 + d_1^2 s_1(h)^2 \Lambda)] \sum_{m=0}^r \|u^{m+1}\|^2 \\
 & + [(1-\theta) - k(v^2(1-\theta)^2 s(h)^2 + d_1^2 s_1(h)^2 \Lambda)] \sum_{m=0}^r \|u^{m+3/4}\|^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Luego, para $r=0,1,\dots,N-1$ hemos probado que

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & |u^{r+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^r |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^r |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\
 & + (1-2\theta) \sum_{m=0}^r |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + (kv(1-\theta)/2) \sum_{m=0}^r \|u^m\|^2 \\
 & + (kv\theta/4) \sum_{m=0}^r \|u^{m+1/4}\|^2 + (kv(1-\theta)/4) \sum_{m=0}^r \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & + (kv/2) \sum_{m=0}^r \|\theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}\|^2 \\
 & \leq \mu_r \leq \mu_N \leq \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \theta)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

De (3.10) se obtienen inmediatamente afirmaciones "a priori" para las $u^m, u^{m+1/4}, u^{m+3/4}$:

$$(3.11) \left\{ \begin{array}{l} \max_{0 \leq m \leq N} |u^m|^2 + \sum_{m=0}^N \{ |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 + |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \\ + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \} + k \sum_{m=0}^N \|u^{m+3/4}\|^2 + k \sum_{m=0}^N \|u^{m+1/4}\|^2 \\ + k \sum_{m=0}^N \|u^m\|^2 \leq \text{cte.}, \end{array} \right.$$

donde la constante depende sólo de

$$\|u_0\|, |f|_{L^2(0,T;H)}, \nu, \theta, \gamma_0 \text{ y } \gamma_1$$

Las estimaciones (3.11) permiten establecer las siguientes propiedades de estabilidad para las funciones u_k^* , v_k^* , w_k^* , \bar{u}_k , \bar{v}_k y \bar{w}_k :

$$(3.12a) \left\{ \begin{array}{l} \|u_k^*\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \|u_k^*\|_{L^2(0,T;W_h)} \\ + \|pu_k^*\|_{L^2(0,T;F)} \leq \text{cte.}, \\ \text{lo mismo para } v_k^*, \dots, \bar{w}_k, \end{array} \right.$$

$$(3.12b) \left\{ \begin{array}{l} \|u_k^* - v_k^*\|_{L^2(Q)^n} \leq \text{cte.} \sqrt{k}, \\ \text{lo mismo para } u_k^* - w_k^*, u_k^* - \bar{u}_k, \text{ etc...} \end{array} \right.$$

2° paso: Razonando como en el Teorema 2.1, llegamos a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\beta} |\hat{u}_k(\tau)|^2 d\tau \leq \text{cte.} \text{ para algún } \beta \in (0, 1/4)$$

donde \hat{u}_k denota la transformada de Fourier de \bar{u}_k .

3^{er} paso Usando (3.12a) para las funciones \bar{v}_{kh} y la primera hipótesis de consistencia H1, deducimos la existencia de $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}, \mathcal{H}' \neq \emptyset$ y $k' \rightarrow 0$ tales que, para alguna $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, se tiene:

$$(3.13) \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{k', h'} \rightarrow u \text{ débilmente-}^* \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n), \\ p_{h'} \bar{u}_{k', h'} \rightarrow \bar{\omega} u \text{ débilmente en } L^2(0, T; F), \\ \bar{u}_{k', h'} \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(Q)^n, \end{array} \right.$$

cuando $h' \in \mathcal{H}, h' \rightarrow 0, k' \rightarrow 0$; teniendo en cuenta (3.12b), obtenemos las mismas propiedades de convergencia para las funciones $u_{k', h'}^*, \dots, \bar{w}_{k', h'}$.

4^o paso: Partiendo de la relación

$$\begin{aligned} 4 \frac{d}{dt} (\bar{u}_{kh}(t), v_h) + v (\theta u_h^{m+1} + 3(1-\theta)u_h^{m+3/4} + 3\theta u_h^{m+1/4} + (1-\theta)u_h^m, v_h)_h \\ + \hat{b}_h(u_h^m, u_h^m, v_h) + 2\hat{b}_h(u_h^{m+3/4}, \theta u_h^{m+1/4} + (1-\theta)u_h^{m+3/4}, v_h) \\ + \hat{b}_h(u_h^m, u_h^{m+3/4}, v_h) = (f^{m+1/4} + 2f^{m+3/4} + f^{m+1}, v_h) \end{aligned}$$

y trabajando como se hizo en el 4^o paso del Teorema 2.1, se concluye que la función límite u satisface (0.53)-(0.55).

5^o Paso: Supongamos ahora que $n=2, \theta < 1/2, kS(h)^2 \rightarrow 0, kS_1(h)^2 \rightarrow 0$ y probemos que $p_k u_{kh} \rightarrow \bar{\omega} u$ en la topología fuerte de $L^2(0, T; F)$ cuando $h \in \mathcal{H}, h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$. Introducimos las funciones $z_{kh}, \zeta_{kh}, \psi_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h$, constantes en cada intervalo $[mk, (m+1)k)$ satisfaciendo:

$$(3.14) \left\{ \begin{array}{l} z_{kh}(mk) = u_h^{m+1}, \zeta_{kh}(mk) = \theta u_h^{m+1/4} + (1-\theta)u_h^{m+3/4}, \\ \psi_{kh}(mk) = \theta u_h^{m+1} + (1-\theta)u_h^{m+3/4} \\ \text{para } m=0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

Al igual que hicimos en el Capítulo anterior, elegimos una función $u_h^+ \in L^2(0, T; W_h)$ que verifique (2.48).

Consideremos ahora la siguiente expresión (donde $\alpha_{kh} \uparrow 1$ cuando $h \in \mathcal{H}$, $h \rightarrow 0$ y $\beta_{kh}, \gamma, \lambda_{kh} > 0$):

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_{kh} &= 2|u_h^N - u(T)|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u_h^{m+1} - u_h^{m+3/4}|^2 \\ &+ 2(1-\theta) |u_h^{m+3/4} - u_h^{m+1/4}|^2 + |u_h^{m+1/4} - u_h^m|^2 \} \\ &+ 2\alpha_{kh} \nu \left\{ \int_0^T \|\zeta_{kh}(t) - u_h^+(t)\|_h^2 dt + \int_0^T \|\psi_{kh}(t) - u_h^+(t)\|_h^2 dt \right\} \\ &- \beta_{kh} \nu \int_0^T \|z_{kh}(t) - w_{kh}^*(t)\|_h^2 dt - \gamma \nu \int_0^T \|v_{kh}^*(t) - u_{kh}^*(t)\|_h^2 dt \\ &- \lambda_{kh} \nu \int_0^T \|w_{kh}^*(t) - v_{kh}^*(t)\|_h^2 dt . \end{aligned} \right.$$

Para probar el resultado de convergencia fuerte seguiremos un desarrollo análogo al hecho, en esta misma etapa, en el Capítulo anterior. De nuevo, por simplicidad en la notación suprimiremos el subíndice h ; escribamos Y_k en la forma $Y_k^1 + Y_k^2 + Y_k^3$, donde

$$(3.16) \quad Y_k^1 = 2|u(T)|^2 + 4\alpha_k \nu \int_0^T \|u^+\|^2 dt ,$$

$$(3.17) \quad Y_k^2 = -4(u^N, u(T)) - 4\alpha_k \nu \left\{ \int_0^T \langle \zeta_k, u^+ \rangle dt + \int_0^T \langle \psi_k, u^+ \rangle dt \right\}$$

$$Y_k^3 = Y_k - Y_k^1 - Y_k^2$$

Observamos que

$$(3.18) \quad Y_{k'}^1 = 2|u(T)|^2 + 4\nu \int_0^T \|u\|^2 dt ,$$

$$(3.19) \quad Y_{k'}^2 = -4|u(T)|^2 - 8\nu \int_0^T \|u\|^2 dt ,$$

cuando $h' \in \mathcal{H}'$, $h' \rightarrow 0$ y $k' \rightarrow 0$.

Por otra parte, si tomamos $v=u^{m+1/4}$ en (1.26), $v=u^{m+1}$ en (1.28) y $w=(1-\theta)u^{m+3/4}+\theta u^{m+1/4}$ en (1.27) y sumamos convenientemente las expresiones resultantes para $m = 0$,

$$\begin{aligned}
 (3.20) \left\{ \right. & 2|u^N|^2 - 2|u^0|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{ 2|u^{m+1/4}-u^m|^2 \\
 & + (1-2\theta)|u^{m+3/4}-u^{m+1/4}|^2 + 2|u^{m+1}-u^{m+3/4}|^2 \} \\
 & + kv \sum_{m=0}^{N-1} \{ \theta \|u^{m+1/4}\|^2 + \theta \|u^{m+1}\|^2 + \|(1-\theta)u^{m+3/4} + \theta u^{m+1/4}\|^2 \\
 & + (1-\theta)(u^m, u^{m+1/4}) + (1-\theta)(u^{m+3/4}, u^{m+1}) \\
 & + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/4}-u^m) + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^{m+3/4}, u^{m+1}-u^{m+3/4}) \} \\
 & = k \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1/4}, u^{m+1/4}) + (f^{m+3/4}, (1-\theta)u^{m+3/4} + \theta u^{m+1/4}) \\
 & \left. + (f^{m+1}, u^{m+1}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Tomando ahora $w=u^{m+3/4}-u^{m+1/4}$, operando en el término trilineal y sumando para $m=0, \dots, N-1$, resulta

$$\begin{aligned}
 (3.21) \left\{ \right. & 2 \sum_{m=0}^{N-1} |u^{m+3/4}-u^{m+1/4}|^2 + kv \sum_{m=0}^{N-1} \{ \|u^{m+3/4}\|^2 \\
 & - (u^{m+3/4}, u^{m+1/4}) - \theta \|u^{m+3/4}-u^{m+1/4}\|^2 \\
 & - \frac{1}{v} \hat{b}(u^{m+3/4}, u^{m+3/4}, u^{m+1/4}-u^{m+3/4}) \} \\
 & = k \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+3/4}, u^{m+3/4}-u^{m+1/4})
 \end{aligned}$$

De (3.20) y (3.21), resulta que

$$\begin{aligned}
 & 2|u^N|^2 + 2 \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1/4} - u^m|^2 + 2(1-\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \\
 & + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \} + kv \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ \frac{1-\theta}{2} \|u^m\|^2 + \frac{5\theta}{2} \|u^{m+1/4}\|^2 \right. \\
 & + \left. \left(\frac{1}{2} + \frac{5(1-\theta)}{2} \right) \|u^{m+3/4}\|^2 + \frac{\theta+1}{2} \|u^{m+1}\|^2 + \frac{\theta-1}{2} \|u^{m+1/4} - u^m\|^2 \right. \\
 & + \left. \left(\frac{1-4\theta(1-\theta)}{2} - \theta \right) \|u^{m+3/4} - u^{m+1/4}\|^2 + \frac{\theta-1}{2} \|u^{m+1} - u^{m+3/4}\|^2 \right. \\
 (3.22) \quad & + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/4} - u^m) + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^{m+3/4}, u^{m+1} - u^{m+3/4}) \\
 & - \frac{1}{v} \hat{b}(u^{m+3/4}, u^{m+3/4}, u^{m+1/4} - u^{m+3/4}) \} \\
 & = 2|u^0|^2 + k \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+3/4}, u^{m+3/4} - u^{m+1/4}) \\
 & + k \sum_{m=0}^{N-1} \{ (f^{m+1/4}, u^{m+1/4}) + (f^{m+3/4}, (1-\theta)u^{m+3/4} + \theta u^{m+1/4}) \\
 & + (f^{m+1}, u^{m+1}) \}.
 \end{aligned}$$

Luego Y_k^3 puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
 Y_k^3 = & A_k^* + B_k^* + 2|u^0|^2 - \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \\
 & + 2(1-\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \} \\
 & - kv \sum_{m=0}^{N-1} P_k^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \lambda_k, \theta) ;
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la siguiente notación:

$$(3.23) \quad A_k^* = k \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+3/4}, u^{m+3/4} - u^{m+1/4}) + 0$$

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{aligned} B_k^* &= k \sum_{m=0}^{N-1} (f^{m+1/4}, u^{m+1/4}) + (f^{m+1}, u^{m+1}) \\ &+ 2(f^{m+3/4}, \theta u^{m+1/4} + (1-\theta)u^{m+3/4}) + 4 \int_0^T (f, u) dt, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} p_*^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \lambda_k, \theta) &= (\gamma - \frac{1-\theta}{2}) \|u^{m+1/4} - u^m\|^2 \\ &+ (\lambda_k + (2\alpha_k - 1)\theta(1-\theta) + \frac{1-2\theta}{2}) \|u^{m+3/4} - u^{m+1/4}\|^2 \\ &+ (\beta_k + (4\alpha_k\theta - 1)(1-\theta)/2) \|u^{m+1} - u^{m+3/4}\|^2 + \frac{1-\theta}{2} \|u^m\|^2 \\ &+ (\frac{5\theta}{2} - 2\alpha_k\theta) \|u^{m+1/4}\|^2 + (\frac{1}{2} + (5-8\alpha_k)(1-\theta)/2) \|u^{m+3/4}\|^2 \\ &+ (\frac{1}{2} - (2\alpha_k - \frac{1}{2})\theta) \|u^{m+1}\|^2 + \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/4} - u^m) \\ &+ \frac{1}{v} \hat{b}(u^m, u^{m+3/4}, u^{m+1} - u^{m+3/4}) \\ &- \frac{1}{v} \hat{b}(u^{m+3/4}, u^{m+3/4}, u^{m+1/4} - u^{m+3/4}). \end{aligned}$$

También puede escribirse

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_k^3 &= A_k^* + B_k^* + C_k + 2|u^0|^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \{ |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \\ &+ 2(1-\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + |u^{m+1/4} - u^m|^2 \} \\ &- kv \sum_{m=0}^{N-1} q_*^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \lambda_k, \theta) \end{aligned} \right.$$

donde

$$(3.26) \quad q_*^m = p_*^m - \frac{1}{2}(1-\theta - a_k) |u^m|^2 + \frac{1}{2}(1-\theta - a_k) |u^{m+1}|^2$$

con C_k y a_k vienen dados por (2.63) y (2.65) resp.

Para seguir un desarrollo análogo al hecho en el Capítulo anterior hemos de determinar α_k , β_k , γ y λ_k tales que se tenga

$$\begin{aligned} & (\tau_k + (1-a_k)\theta(1-\theta) + \frac{1-2\theta}{2}) \|u^{m+3/4} - u^{m+1/4}\|^2 + \theta(a_k + \frac{1}{2}) \|u^{m+1/4}\|^2 \\ & - \theta(a_k - \frac{1}{2}) \|u^{m+3/4}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & (\omega_k + (2-a_k)\theta(1-\theta) + \frac{1-\theta}{2}) \|u^{m+1} - u^{m+3/4}\|^2 \\ & + (\theta(2-a_k) + a_k - 1) \|u^{m+3/4}\|^2 - (\theta(2-a_k) + (a_k/2) - 1) \|u^{m+1}\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

También sabemos que:

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{v} |\hat{b}(u^m, u^m, u^{m+1/4} - u^m)| \leq (a_k/2) \|u^m\|^2 \\ & + (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) |u^{m+1/4} - u^m|^2, \end{aligned} \right.$$

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{v} |\hat{b}(u^{m+3/4}, u^{m+3/4}, u^{m+3/4} - u^{m+1/4})| \leq (a_k/2) \|u^{m+3/4}\|^2 \\ & + (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2, \end{aligned} \right.$$

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{v} |\hat{b}(u^m, u^{m+3/4}, u^{m+1} - u^{m+3/4})| \leq (a_k/2) \|u^{m+3/4}\|^2 \\ & + (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \end{aligned} \right.$$

donde d es una constante.

Con estas elecciones para γ , β_k y λ_k , (3.28), (3.29) y (3.30) llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} q_*^m & \geq \gamma' |u^{m+1/4} - u^m|^2 + \lambda'_k |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + \beta'_k |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \\ & - (d^2 S_1(h)^2 / 2v^2 a_k) \{ |u^{m+1/4} - u^m|^2 + |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \\ & + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \}. \end{aligned}$$

Así pues

$$-k \nu q_*^m(\alpha_k, \beta_k, \gamma, \lambda_k, \theta) \leq (d^2/2\nu a_k) k S_1(h)^2 \{ |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\ + |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2 \} .$$

Luego para que se verifique (3.27) basta que:

$$(d^2/2\nu a_k) k S_1(h)^2 \{ |u^{m+1/4} - u^m|^2 + |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 \\ + |u^{m+1} - u^{m+3/4}| \} \leq |u^{m+1/4} - u^m|^2 \\ + 2(1-\theta) |u^{m+3/4} - u^{m+1/4}|^2 + |u^{m+1} - u^{m+3/4}|^2$$

ó sea:

$$(3.31) \quad (d^2/2\nu a_k) k S_1(h)^2 < \min(1, 2(1-\theta))$$

y, para $k S_1(h)^2 \rightarrow 0$, se cumple la condición (3.31) para $|h|$ y k suficientemente pequeños.

El resto de la demostración se hace de forma análoga a como se hizo en el Teorema 2.1.

CAPITULO IV.-

4.1. RESOLUCION EFECTIVA DE LOS PROBLEMAS.

Comentaremos en esta Sección los métodos numéricos de resolución de los problemas lineales y quasi-lineales obtenidos en cada paso de ALG 1 y ALG 2. Por simplicidad, nos limitaremos a trabajar sobre los problemas (1.8) y (1.9). El desarrollo que sigue puede adaptarse sin dificultad a los problemas discretizados correspondientes.

4.1.1.- Resolución de los problemas quasi-lineales.-

En cada paso de ALG 1 (resp. ALG 2) hay que resolver problemas elípticos no lineales (1.3) (resp. (1.6)) que toman la forma

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\mu \Delta u + \lambda u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u)u = g & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hemos visto ya que (4.1) posee solución. Este problema no proviene de ningún problema del Cálculo de Variaciones puesto que no existe ningún funcional sobre $H_0^1(\Omega)^n$ cuya diferencial coincida con $(v \cdot \nabla)v + \frac{1}{2} (\operatorname{div} v)v$. Sin embargo, usando una formulación conveniente en el sentido de los mínimos cuadrados, vamos a ser capaces de resolver (4.1) mediante métodos propios de la Programación no lineal.

Así, dada $v \in H_0^1(\Omega)^n$, definimos $y (=y(v)) \in H_0^1(\Omega)^n$ como la única solución de

$$(4.2) \quad \begin{cases} -\mu \Delta y + \lambda y = -\mu \Delta v + \lambda v + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{2} (\operatorname{div} v)v - g & \text{en } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Observamos que y se obtiene de v resolviendo n problemas de Dirichlet lineales independientes (uno para cada componente

de y). El problema (4.2) equivale al problema variacional lineal:

"Buscar $y \in H_0^1(\Omega)^n$ tal que

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx + \lambda \int_{\Omega} y \, z \, dx = \mu \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, z \, dx \\ + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v) z \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} v) v \, z \, dx - \int_{\Omega} g \, z \, dx \\ \forall z \in H_0^1(\Omega)^n \end{array} \right. ,$$

que posee solución única (cf. (0.91)).

Obsérvese que si v es solución del problema no lineal (4.1), entonces el correspondiente y , obtenido a través de (4.2), es $y = 0$. Por ello, parece natural introducir la siguiente formulación de tipo mínimos cuadrados del problema (4.1)

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"Buscar } u \in H_0^1(\Omega)^n \text{ tal que:} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \end{array} \right. ,$$

donde $J: H_0^1(\Omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$(4.5) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu |\nabla y|^2 + \lambda |y|^2 \} \, dx ,$$

con y definida a través de v resolviendo el problema lineal (4.2). Los problemas (4.1) y (4.4) son equivalentes en el sentido siguiente: Si u es solución de (4.1), también lo es de (4.4), con $J(u) = 0$; y, recíprocamente, si u es solución de (4.4) y $J(u) = 0$, entonces es también solución de (4.1).

Para resolver el problema de minimización (4.4) usamos un algoritmo de tipo gradiente conjugado, definido como sigue

Paso 0 Inicialización :

$$(4.6) \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^n \text{ dado;}$$

a partir de u^0 , calculamos $g^0 \in H_0^1(\Omega)^n$ resolviendo

$$(4.7) \quad \lambda \int_{\Omega} g^0 z \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla g^0 \cdot \nabla z \, dx = \langle J'(u^0), z \rangle \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)^n, \quad (1)$$

y hacemos

$$(4.8) \quad w^0 = g^0$$

Después, dados $m \geq 0$, u^m , g^m y w^m , calculamos u^{m+1} , g^{m+1} y w^{m+1} en la forma siguiente:

Paso 1 Descenso :

$$(4.9) \quad u^{m+1} = u^m - \lambda_m w^m,$$

donde λ_m es solución del problema de minimización unidimensional

$$(4.10) \quad \lambda_m \in \mathbb{R} \quad J(u^m - \lambda_m w^m) \leq J(u^m - \lambda w^m) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Paso 2 Construcción de una nueva dirección de descenso: Calculamos $g^{m+1} \in H_0^1(\Omega)^n$, resolviendo

$$(4.11) \quad \begin{cases} \lambda \int_{\Omega} g^{m+1} z \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla g^{m+1} \cdot \nabla z \, dx = \langle J'(u^{m+1}), z \rangle \\ \forall z \in H_0^1(\Omega)^n, \end{cases}$$

posteriormente tomamos

$$(4.12) \quad \gamma_m = \frac{\lambda \int_{\Omega} g^{m+1} (g^{m+1} - g^m) \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla g^{m+1} \cdot \nabla (g^{m+1} - g^m) \, dx}{\lambda \int_{\Omega} |g^m|^2 \, dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla g^m|^2 \, dx}$$

y, finalmente,

$$(4.13) \quad w^{m+1} = g^{m+1} - \gamma_m w^m.$$

(1) $J'(\cdot)$ denota el diferencial de $J(\cdot)$.

Cambiamos m por $m+1$ y volvemos a (4.9).

Los dos pasos no triviales del algoritmo (4.6)-(4.13) son:

- (i) La resolución del problema de minimización en una variable (4.10); el correspondiente λ_m puede calcularse de forma aproximada, por un método de dicotomía ó mediante el método de Fibonacci (cf. e.g. [18]) ó bien de manera exacta, sin más que calcular las raíces de una ecuación algebraica de tercer grado (en efecto, la función $J(u^m - \lambda w^m)$ es polinómica de cuarto grado). Por otra parte, como ya dijimos, en cada paso hemos de resolver n problemas de Dirichlet lineales asociados al operador elíptico $(\lambda \text{Id.} - \mu \Delta)$ para, dado v , obtener la correspondiente función y (prob. (4.2)).
- (ii) El cálculo de g^m a partir de u^m , que requiere la resolución de $2n$ problemas lineales de Dirichlet del tipo anterior. De ellos, n servirán para calcular $\langle J'(u^m), z \rangle$ (el cálculo de esta expresión se presenta a continuación) y los restantes n para obtener propiamente g^m mediante (4.11).

Sean $v \in H_0^1(\Omega)^n$ y δv una perturbación, $\delta v \in H_0^1(\Omega)^n$. Tenemos que

$$(4.14) \quad \langle J'(v), \delta v \rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(v + \theta \delta v) - J(v)}{\theta} ;$$

teniendo en cuenta (4.5),

$$\frac{1}{\theta} (J(v + \theta \delta v) - J(v)) = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu |\nabla y'|^2 + \lambda |y'|^2 \} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu |\nabla y|^2 + \lambda |y|^2 \} \right]$$

donde y es la solución de (4.2) e $y' = y'(\theta)$ es la solución de

$$\begin{aligned} -\mu \Delta y' + \lambda y' &= -\mu \Delta (v + \theta \delta v) + (v + \theta \delta v) + ((v + \theta \delta v) \cdot \nabla) (v + \theta \delta v) \\ &+ \frac{1}{2} (\text{div}(v + \theta \delta v))(v + \theta \delta v) - g \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 &= -\mu \Delta v + \lambda v + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)v \\
 &\quad + \theta \{ -\mu \Delta \delta v + \lambda \delta v + (\delta v \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)\delta v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \delta v)v \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)\delta v \} - \theta^2 \{ (\delta v \cdot \nabla)\delta v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \delta v)\delta v \}.
 \end{aligned}$$

Para $y' = y + \delta y$, obtenemos que

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{1}{\theta} (J(v + \theta \delta v) - J(v)) &= \frac{1}{\theta} \left(\mu \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \delta y + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\delta y)|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \int_{\Omega} y \delta y + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\delta y|^2 \right) = \int_{\Omega} \mu (\nabla y \cdot \nabla z_{\theta} + \lambda y z_{\theta}) \\
 &\quad + \theta \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{2} |\nabla z_{\theta}|^2 + \frac{\lambda}{2} |z_{\theta}|^2 \right).
 \end{aligned} \right.$$

Aquí, $z_{\theta} = \frac{1}{\theta} y$ y verifica $z_{\theta} \rightarrow z$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)^n$ cuando $\theta \rightarrow 0$, para z la solución de

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{aligned}
 -\mu \Delta z + \lambda z &= -\mu \Delta(\delta v) + \lambda(\delta v) + (\delta v \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)\delta v \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \delta v)v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)\delta v \quad \text{en } \Omega, \\
 z &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.
 \end{aligned} \right.$$

Así, tomando límites en (4.15) cuando $\theta \rightarrow 0$, obtenemos:

$$(4.17) \quad \langle J'(v), \delta v \rangle = \int_{\Omega} (\mu \nabla y \cdot \nabla z + \lambda y z).$$

El problema intermedio (4.16) equivale al problema variacional lineal:

"Buscar $z \in H_0^1(\Omega)^n$ tal que

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \mu \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla w \, dx + \lambda \int_{\Omega} z w \, dx &= \mu \int_{\Omega} \nabla \delta v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} \delta v w \, dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} ((\delta v \cdot \nabla)v) w \, dx + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)\delta v) w \, dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\operatorname{div} \delta v)v) w \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\operatorname{div} v)\delta v) w \, dx \\
 \forall w &\in H_0^1(\Omega)^n \quad "
 \end{aligned} \right.$$

Particularizando $w=y$ en (4.18), obtenemos de (4.17) que $J'(v)$ puede ser identificado con la forma lineal sobre $H_0^1(\Omega)^n$ definida por:

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle J'(v), z \rangle &= \mu \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx + \lambda \int_{\Omega} yz \, dx + \int_{\Omega} y((z \cdot \nabla)v) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} y((v \cdot \nabla)z) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} y((\operatorname{div} z)v) \, dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} y((\operatorname{div} v)z) \, dx \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)^n. \end{aligned} \right.$$

Obtenemos en consecuencia una representación integral de $\langle J'(u^m), z \rangle$, sin más que tomar $v=u^m$ en (4.19).

En resumen, el algoritmo completo queda como sigue:

- (i) Partimos de $u^0 \in H_0^1(\Omega)^n$ dado.
- (ii) Calculamos y^0 de (4.2) con $v=u^0$ (problema de Dirichlet)
- (iii) Calculamos $\langle J'(u^0), z \rangle$ de (4.19) con $v=u^0$ e $y=y^0$.
- (iv) Calculamos g^0 de (4.7) (problema de Dirichlet).
- (v) Tomamos $w^0=g^0$.

Para $m \geq 0$, conocidos u^m, g^m, w^m :

- (vi) Calculamos $\lambda_m \in \mathbb{R}$ con $J(u^m - \lambda_m w^m) \leq J(u^m - \lambda w^m) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (vii) Tomamos $u^{m+1} = u^m - \lambda_m w^m$.
- (viii) Calculamos y^{m+1} de (4.2) con $v=u^{m+1}$ (problema de Dirichlet).
- (ix) Calculamos $\langle J'(u^{m+1}), z \rangle$ de (4.19) con $v=u^{m+1}$ y $y=y^{m+1}$.
- (x) Calculamos g^{m+1} de (4.11) (problema de Dirichlet).
- (xi) Calculamos γ_m de (4.12) a partir de g^{m+1} y g^m .

(xii) Tomamos $w^{m+1} = g^{m+1} - \gamma_m w^m$.

(xiii) Cambiamos m por $m+1$ y volvemos a (vi).

Hemos visto ya que cada paso del algoritmo (4.6)-(4.13) requiere la resolución de $4n$ problemas de Dirichlet para el operador $(\lambda \text{Id} - \mu \Delta)$. Es conveniente por ello disponer de un método eficaz de resolución numérica de tales problemas.

Obsérvese que, para una división uniforme del intervalo $[0, T]$, los parámetros λ y μ son independientes de m . En consecuencia, la elección de una aproximación particular en las variables espaciales reduce los mencionados problemas de Dirichlet para $(\lambda \text{Id} - \mu \Delta)$ a sistemas lineales de ecuaciones donde la matriz de los coeficientes es siempre la misma. Parece, pues, adecuada una factorización de Cholesky para dicha matriz (al principio del programa) y limitar los cálculos en (ii)-(iv) y (viii)-(x) a la resolución de sistemas triangulares (véase más adelante). Por el contrario, si el método de discretización en la variable t es de paso variable, la resolución de los sistemas lineales que provienen de los problemas de Dirichlet para $(\lambda \text{Id} - \mu \Delta)$ resulta costosa por métodos directos (ahora μ depende de m !). Una alternativa interesante consiste en utilizar algoritmos de tipo relajación.

El hecho de que $J'(v)$ se conozca a partir de la representación (4.20) no es ningún inconveniente grave cuando el problema (4.1) queda aproximado en el sentido de los elementos finitos, pues sólo necesitamos conocer los valores de $\langle J'(v), w \rangle$ para w perteneciente a una base del subespacio finito-dimensional de $H_0^1(\Omega)^n$ correspondiente.

En el caso del problema discretizado (1.21), la adaptación del algoritmo (i)-(xiii) es la siguiente:

(i)' Partimos de $u_h^0 \in W_h$ dado por (1.22).

(ii)' Calculamos y_h^0 de

$$(4.20) \quad \begin{cases} \mu (y_h, z_h)_h + \lambda (y_h, z_h) = \mu (v_h, z_h)_h + \lambda (v_h, z_h) \\ + \hat{b}_h(v_h, v_h, z_h) - (g, z_h) \quad \forall z_h \in W_h \end{cases}$$

con $v = u_h^0$.

(iii)' Calculamos $\langle J'(u_h^0), z_h \rangle$ de (4.19) con $v = u_h^0$ e $y = y_h^0$.

(iv)' Calculamos $g_h^0 \in W_h$ resolviendo

$$(4.21) \quad \mu (g_h^0, z_h)_h + \lambda (g_h^0, z_h) = \langle J'(u_h^0), z_h \rangle \quad \forall z_h \in H_0^1(\Omega)^n.$$

(v)' Tomamos $w_h^0 = g_h^0$.

Para $m \geq 0$, conocidos u_h^m, g_h^m, w_h^m :

(vi)' Calculamos $\lambda_h^m \in \mathbb{R}$ con $J(u_h^m - \lambda_h^m u_h^m) \leq J(u_h^m - \lambda_h^m w_h^m) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(vii)' Tomamos $u_h^{m+1} = u_h^m - \lambda_h^m w_h^m$.

(viii)' Calculamos y_h^{m+1} de (4.20) con $v_h = u_h^{m+1}$.

(ix)' Calculamos $\langle J'(u_h^{m+1}), z_h \rangle$ de (4.19) con $v = u_h^{m+1}$ e $y = y_h^{m+1}$.

(x)' Calculamos g_h^{m+1} resolviendo

$$\mu (g_h^{m+1}, z_h)_h + \lambda (g_h^{m+1}, z_h) = \langle J'(u_h^{m+1}), z_h \rangle \quad \forall z_h \in W_h.$$

(xi)' Calculamos γ_h^m de

$$(4.22) \quad \gamma_h^m = \frac{\mu (g_h^{m+1}, g_h^{m+1} - g_h^m)_h + \lambda (g_h^{m+1}, g_h^{m+1} - g_h^m)}{\mu \|g_h^m\|_h^2 + \lambda |g_h^m|^2}$$

(xii)' Tomamos $w_h^{m+1} = g_h^{m+1} - \gamma_h^m w_h^m$.

(xiii)' Cambiamos m por $m+1$ y volvemos a (vi)'.

4.1.2.- Resolución de los problemas tipo quasi-Stokes.-

El problema (1.3) (resp. (1.6)) que aparece en cada paso de ALG 1 (resp. ALG 2) es de la forma

$$(4.23) \quad \begin{cases} \lambda^* u - \mu^* \Delta u + \nabla p = g, \quad \text{div } u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Para su resolución, es clásico utilizar algoritmos con origen en la Teoría de Optimización. Aquí nos referiremos exclusivamente al algoritmo de Uzawa.

Comenzamos con una función dada

$$(4.24) \quad p^0 \in L^2(\Omega)^n.$$

Después, conocido p^m , definimos u^m y p^{m+1} ($m \geq 0$) mediante:

$$(4.25) \quad \begin{cases} \lambda^* u^m - \mu^* \Delta u^m = g - \nabla p^m & \text{en } \Omega, \\ u^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(4.26) \quad p^{m+1} = p^m - \rho \nabla u^m.$$

Se supone que $\rho > 0$ es un escalar dado. Acerca de la convergencia del algoritmo (4.24)-(4.26), tenemos el resultado siguiente:

Teorema 4.1 Supongamos que

$$(4.27) \quad 0 < \rho < 2 \frac{\mu^*}{n}.$$

Entonces, cualquiera que sea $p^0 \in L^2(\Omega)^n$ se verifica:

$$(4.28) \quad \begin{cases} u^m \rightarrow u & \text{fuertemente en } H_0^1(\Omega)^n, \\ p^m \rightarrow p & \text{fuertemente en } L^2(\Omega)^n, \end{cases}$$

donde $\{u, p\}$ es la única solución de (4.23) que verifica

$$(4.29) \quad \int_{\Omega} p \, dx = \int_{\Omega} p^{\circ} \, dx.$$

(Para la demostración, véase [11], p. 303).

En cada paso del algoritmo (4.24)-(4.26) deben resolverse, de nuevo, n problemas de Dirichlet independientes para $(\lambda^* \text{Id} - \mu^* \Delta)$. Como ya anunciábamos en el Capítulo I, si se toma $\theta = 1/2$ (resp. $\theta = 2/3$) en ALG 1 (resp. ALG 2), se sigue que $(\lambda \text{Id} - \mu \Delta) = (\lambda^* \text{Id} - \mu^* \Delta) = (\frac{2}{k} \text{Id} - \frac{\nu}{2} \Delta)$ (resp. $(\lambda \text{Id} - \mu \Delta) = 2(\lambda^* \text{Id} - \mu^* \Delta) = (\frac{4}{k} \text{Id} - \frac{2\nu}{3} \Delta)$), con lo cual muchos de los subprogramas pueden utilizarse tanto para los subproblemas lineales como para los no lineales, reduciendo así memoria y tiempo de programación.

El algoritmo precedente posee una cierta analogía con el método de "compresibilidad artificial" de Chorin-Yanenko (cf. [11]).

En la práctica, suele utilizarse en lugar de (4.24)-(4.26) el siguiente método de tipo lagrangiano aumentado, cuya convergencia es más rápida (cf. [11]). Notemos que el problema (4.23) es equivalente a

$$(4.30) \quad \begin{cases} \lambda^* u - \mu^* \Delta u - r \nabla(\nabla \cdot u) + \nabla p = g & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con r parámetro positivo.

La generalización natural de (4.24)-(4.26) es tomar una función inicial dada

$$(4.31) \quad p^{\circ} \in L^2(\Omega)^n.$$

Después, para $m \geq 0$ y p^m dados, calculamos u^m, p^{m+1} mediante:

$$(4.32) \quad \begin{cases} \lambda^* u^m - \mu^* \Delta u^m - r \nabla(\nabla \cdot u^m) = g - \nabla p^m & \text{en } \Omega, \\ u^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(4.33) \quad p^{m+1} = p^m - \rho \nabla \cdot u^m, \quad \rho > 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Con respecto a la convergencia de (4.31)-(4.33), tenemos el

Teorema 4.2 Si en (4.31)-(4.33), ρ satisface:

$$(4.34) \quad 0 < \rho < 2\left(r + \frac{\mu^*}{n}\right).$$

Entonces, cualquiera que sea $p^0 \in L^2(\Omega)^n$ se tiene

$$(4.35) \quad \begin{cases} u^m \rightarrow u \text{ fuertemente en } H_0^1(\Omega)^n, \\ p^m \rightarrow p \text{ fuertemente en } L^2(\Omega)^n, \end{cases}$$

donde $\{u, p\}$ es la única solución de (4.23) que verifica

$$(4.36) \quad \int_{\Omega} p \, dx = \int_{\Omega} p^0 \, dx.$$

Se suele tomar $\rho = r$ ya que puede probarse que en este caso la velocidad de convergencia del algoritmo se hace óptima. Sin embargo, en la práctica existe una cota superior para los valores de r : para valores de r excesivamente grandes, el problema (4.32) se convierte en mal condicionado y la solución es excesivamente sensible a los errores de redondeo.

Desde el punto de vista práctico, (4.32) es más complicado de resolver que (4.25), pues las componentes de u^m están ligadas en (4.32) por el término lineal $\nabla(\nabla \cdot u^m)$ (el operador diferencial asociado a (4.32) guarda estrecha relación con el operador lineal de elasticidad; véase [9]).

4.1.3.- Resolución de sistemas lineales.-

Hemos visto como, a la hora de resolver tanto los problemas quasi-lineales de 4.1.1 como los problemas

lineales de 4.1.2, todo queda reducido a problemas de Dirichlet cuya formulación variacional es:

$$(4.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \int_{\Omega} z \cdot w \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} h \cdot w \, dx \\ \forall w \in H_0^1(\Omega)^n, \quad z \in H_0^1(\Omega)^n. \end{array} \right.$$

En su versión discreta, (4.37) se convierte en

$$(4.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \int_{\Omega} z_h \cdot w_h \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla z_h \cdot \nabla w_h \, dx = \int_{\Omega} h \cdot w_h \, dx \\ \forall w_h \in W_h, \quad z_h \in W_h, \end{array} \right.$$

donde W_h es un subespacio finito-dimensional de $H_0^1(\Omega)^n$.

Denotando por ψ_i , $1 \leq i \leq I$, las funciones de base de W_h , la determinación de $z_h = \sum_{i=1}^I z_j \psi_j$, solución del problema (4.38), se consigue resolviendo el sistema lineal

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^I \left[\lambda \int_{\Omega} \psi_j \psi_i \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dx \right] z_j = \int_{\Omega} h \cdot \psi_i \, dx, \\ 1 \leq i \leq I. \end{array} \right.$$

Una elección adecuada de las ψ_i hace que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz banda. Por otra parte, una numeración conveniente de los distintos grados de libertad asociados al espacio W_h , reduce considerablemente la anchura de la banda (para detalles, cf. por ejemplo [1]).

Supongamos, por ejemplo, que Ω es un dominio poligonal y que \mathcal{T}_h es una triangulación de $\bar{\Omega}$. Introducimos el espacio de dimensión finita

$$W_h = \{ w \in C^0(\bar{\Omega})^n; w|_{\Gamma} = 0; w|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

donde k es un entero ≥ 1 . Elijamos una numeración de 1 a I de los nodos a_i de los elementos finitos que pertenecen al abierto Ω y elijamos las funciones de base ψ_i , $1 \leq i \leq I$, de

W_h , definidas por $\psi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq I$. En estas condiciones, (4.39) se convierte en

$$(4.40) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^I \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \psi_j \psi_i \, dx + \sum_{m=1}^n \int_K \frac{\partial \psi_j}{x_m} \frac{\partial \psi_i}{x_m} \, dx \right] \right\} z_j \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K h \psi_i \, dx, \quad 1 \leq i \leq I. \end{aligned} \right.$$

Así, la matriz A de (4.40) es hueca (porque si los nodos a_i y a_j no pertenecen al mismo triángulo K , el correspondiente coeficiente a_{ij} de A es nulo), simétrica, definida positiva y (como hemos indicado), gracias a una buena numeración de los nodos, una matriz banda de anchura de banda pequeña en relación con su dimensión. La resolución numérica del sistema, podrá realizarse con ayuda de un método directo, tal como el método de Cholesky, que conserva la estructura (y la anchura) de banda.

Recordemos brevemente dicho método (cf. por ejemplo [19]), escribiendo (4.40) en la forma

$$(4.41) \quad Az = b,$$

con A simétrica y definida positiva. En estas condiciones existe una descomposición de A de la forma

$$(4.42) \quad A = L \cdot L^t,$$

siendo L una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Fácilmente puede comprobarse que los coeficientes l_{ij} de L vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$(4.43) \quad \left\{ \begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{j1} &= a_{1j}/l_{11}, \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned} \right\} \quad \text{para la columna 1;}$$

una vez determinadas las $(i-1)$ primeras columnas,

$$(4.44) \quad \left. \begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2} \\ l_{ji} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{b_{ii}}, \quad i+1 \leq j \leq n \end{aligned} \right\} \text{para la columna } i$$

La resolución de $Az = b$ equivale entonces a resolver sucesivamente los sistemas triangulares $Ly = b$ y $L^t z = y$.

Así, las componentes y_i , $i=1,2,\dots,n$, del vector y están dadas en forma recursiva por

$$(4.45) \quad y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k) / l_{ii} \quad (\text{bajada de Cholesky});$$

posteriormente, para $i=n, n-1, \dots, 1$, las z_i obedecen a la fórmula recursiva

$$(4.46) \quad z_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} z_k) / l_{ii} \quad (\text{subida de Cholesky}).$$

Hagamos por último, un breve comentario sobre la forma de calcular los valores de las integrales que aparecen en (4.40); dichas integrales son de alguno de los tipos siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_K \psi_i \psi_j \\ \text{b)} \quad & \int_K \frac{\partial \psi_i}{\partial x_m} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_m} \\ \text{c)} \quad & \int_K \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \psi_l \\ \text{d)} \quad & \int_K g \psi_i \end{aligned}$$

Las integrales a)-c) pueden ser calculadas exactamente con ayuda de alguna fórmula de cuadratura, pues si $\psi_i|_K$, $\psi_j|_K$, $\psi_l|_K \in P_K$, los integrandos serán polinomios de grado $2k$, $2(k-1)$ y $(3k-1)$ resp.

En el caso d), sin embargo, la utilización de una fórmula de cuadratura se hace, en general, necesaria. Parece adecuado (y consistente con el cálculo de las integrales a)-c)) elegir la misma fórmula de cuadratura (exacta para polinomios de grado $3k-1$) que en el caso precedente. Por ejemplo, para $n=2$, $k=2$, es adecuado utilizar

$$\int_K g \psi_i \approx \frac{|k|}{3} ((g\psi_i)(b_1) + (g\psi_i)(b_2) + (g\psi_i)(b_3)) ,$$

donde b_i , $1 \leq i \leq 3$, son los puntos medios de los lados del triángulo K .

En la práctica, como hemos indicado, las matrices A que formalmente aproximan al operador $(\lambda Id - \mu \Delta)$, siempre que la discretización en la variable t se haya realizado con un paso fijo, pueden ser factorizadas al principio, pues son comunes a todos los problemas de Dirichlet que aparecen.

4.2. OTRAS CONDICIONES DE CONTORNO.

En esta Sección nos referiremos al problema de Navier-Stokes asociado a condiciones de contorno diferentes de (0.37').

Si buscamos aproximar numéricamente un fluido que se mueve alrededor de un obstáculo δ en un canal, es apropiado elegir un dominio Ω grande (una aproximación de una región de flujo no acotada) y resolver (0.31) junto con alguna de las siguientes condiciones de contorno:

$$(4.47a) \quad u = g \text{ sobre } \partial\Omega ,$$

$$(4.47b) \quad u = g_0 \text{ sobre } \Gamma_0 , \quad \frac{\partial u}{\partial n} - p\vec{n} = g_1 \text{ sobre } \Gamma_1 .$$

Aquí, g , g_0 y g_1 son funciones dadas sobre $\partial\Omega$, Γ_0 y Γ_1 resp. (podemos suponer, por ejemplo, que son continuas), $\int_{\Gamma} g \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0$ y Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos medibles de tales que

$$(4.48) \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega , \quad \int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} d\Gamma = 0 .$$

Estas son las condiciones más naturales para los movimientos descritos en las Fig. 4.1-4.3. Notemos que la segunda condición de (4.47b) significa que las fuerzas superficiales sobre Γ_1 están dadas y, cuando $\int_{\Gamma_1} d\Gamma > 0$, la presión está definida sin ambigüedad.

Los algoritmos presentados en el Cap. I pueden adaptarse sin gran dificultad al caso en el cual (4.47a) ó (4.47b) reemplaza a (0.37'). Por ejemplo, si se desea aplicar un análogo de ALG 1 con la nueva condición de contorno (4.47a), considerando una aproximación por elementos finitos, (1.23) queda sustituido por:

$$(4.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k/2} (u_h^{m+1/2} - u_h^m, v_h) + v((\theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta)u_h^m, v_h))_h \\ = (f^{m+1/2}, v_h) - \hat{b}_h(u_h^m, u_h^m, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^{m+1/2} \in g_h + V_h. \end{array} \right.$$

Análogamente, el paso (1.24) se convierte en:

$$(4.50) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k/2} (u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}, w_h) + v((1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, w_h)_h \\ + \hat{b}_h(u_h^{m+1}, (1-\theta)u_h^{m+1} + \theta u_h^{m+1/2}, w_h) = (f^{m+1}, w_h) \\ \forall w_h \in W_h, u_h^{m+1} \in g_h + W_h, \end{array} \right.$$

donde g_h es una aproximación (convenientemente elegida) de g , asociada a la triangulación \mathcal{T}_h y perteneciente a $H_0^1(\Omega)^n$. Una posible construcción de g_h está descrita a continuación (para más detalles, cf. [11]).

Sea V_h el espacio dado por

$$(4.51) \quad \gamma V_h = \{ \mu_h \mid \mu_h = v_h|_{\Gamma}, v_h \in V_h \};$$

es decir, γV_h es el espacio de las trazas sobre Γ de las funciones $v_h \in V_h$.

Si V_h está definido por

$$(4.52) \quad V_h = \{ v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega})^2, v_h|_K \in P_2^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

γV_h es el espacio de aquellas funciones definidas sobre Γ , que toman valores en \mathbb{R}^2 , continuas sobre Γ y cuadráticas a trozos sobre los lados de los triángulos de \mathcal{T}_h contenidos en Ω .

Nuestro problema consiste en construir una aproximación g_h de g tal que

$$(4.53) \quad g_h \in \gamma V_h, \quad \int_{\Gamma} g_h \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0.$$

Obsérvese que, para $\Pi_h g$ el único elemento de γV_h obtenido a partir de los valores tomados por g en los nodos de \mathcal{T}_h pertenecientes a Γ , tenemos, en general, que $\int_{\Gamma} \Pi_h g \cdot \vec{n} \, d\Gamma \neq 0$. Para salvar la anterior dificultad procedemos como sigue:

(i) Definimos una aproximación \vec{n}_h de \vec{n} como la solución del siguiente problema variacional lineal (de dimensión finita) en γV_h :

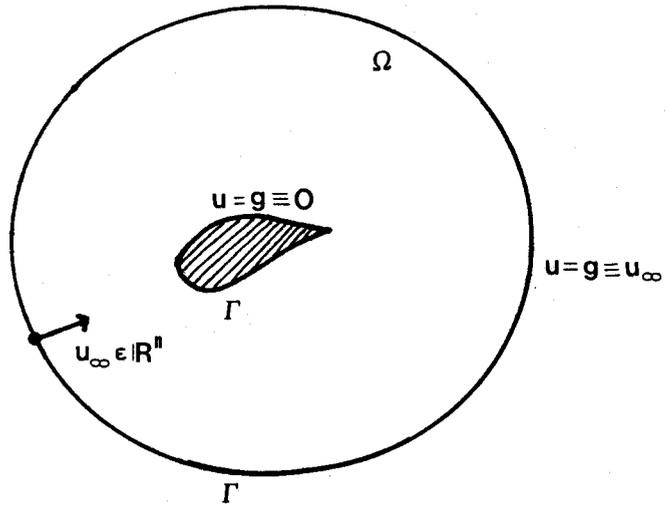
$$(4.54) \quad \vec{n}_h \in \gamma V_h, \quad \int_{\Gamma} \vec{n}_h \cdot \mu_h \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \mu_h \, d\Gamma \quad \forall \mu_h \in \gamma V_h$$

el problema (4.54) equivale a un sistema lineal cuya matriz es banda, simétrica, definida positiva y bastante fácil de resolver.

(ii) Entonces definimos g_h por:

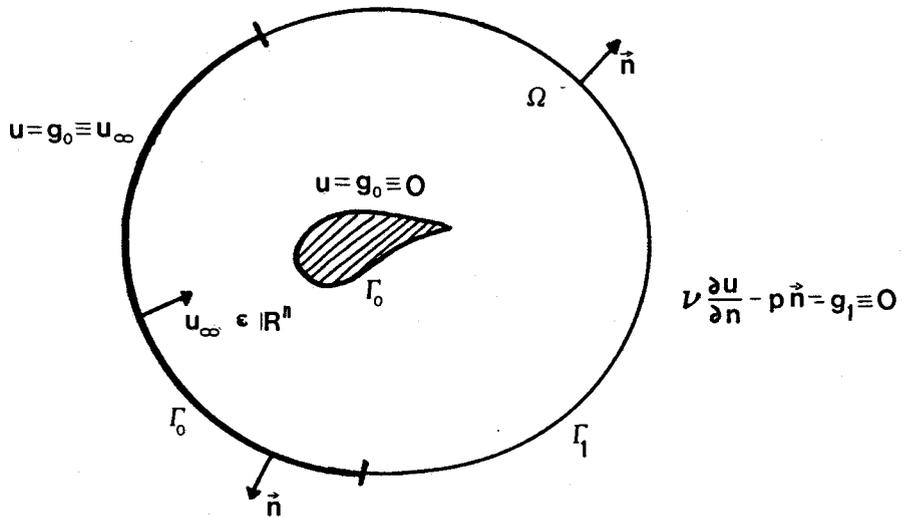
$$(4.55) \quad g_h = \Pi_h g - \left(\frac{\int_{\Gamma} \Pi_h g \cdot \vec{n} \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{n}_h \, d\Gamma} \right) \vec{n}_h,$$

y es fácil ver que (4.54) y (4.55) implican (4.53).



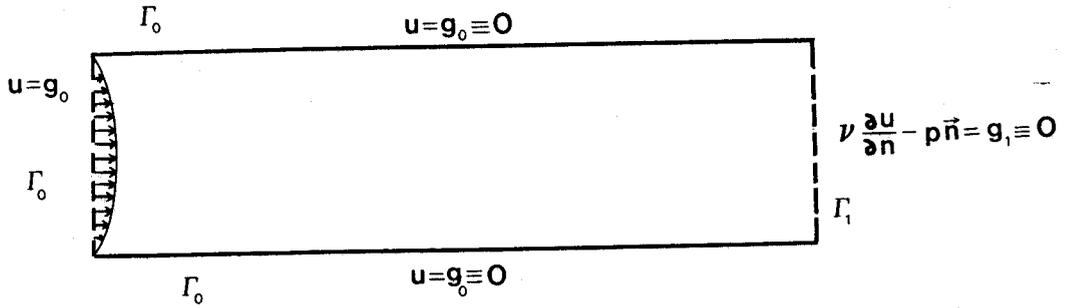
-Fig. 4.1-

Fluido alrededor de un obstáculo (I). La frontera se compone de dos partes una "aproximación del infinito", donde $g \equiv u_\infty$, y la pared sólida del cuerpo, donde $g \equiv 0$.



-Fig. 4.2-

Fluido alrededor de un obstáculo (II). La frontera $\partial\Omega$ está compuesta por tres partes: una "aproximación de entrada ("inlet") del infinito", donde $u_\infty \cdot \vec{n} < 0$ y $u \equiv u_\infty$, la pared sólida del cuerpo, donde $u \equiv 0$ y una "aproximación de salida ("outlet") del infinito", donde $u_\infty \cdot \vec{n} \geq 0$ y $\frac{\partial u}{\partial n} - p \vec{n} \equiv 0$.



-Fig 4.3-

Fluido en un canal. La frontera $\partial\Omega$ está compuesta de cuatro partes: una "aproximación "inlet" del infinito", donde el perfil de velocidades está prescrito (fluido de Poiseuille, cf. e.g. [15]), las dos paredes sólidas, donde se verifica la condición de no deslizamiento $u \equiv 0$ y una aproximación "outlet" del infinito", donde $\frac{\partial u}{\partial n} - p\vec{n} = 0$.

4.3.- EL PROBLEMA DE DISEÑO OPTIMO.

Consideraremos un fluido que llena un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (grande; eventualmente $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$) salvo un (pequeño) obstáculo $S \subset \Omega$ (de acuerdo con la terminología usual, S es una carena).

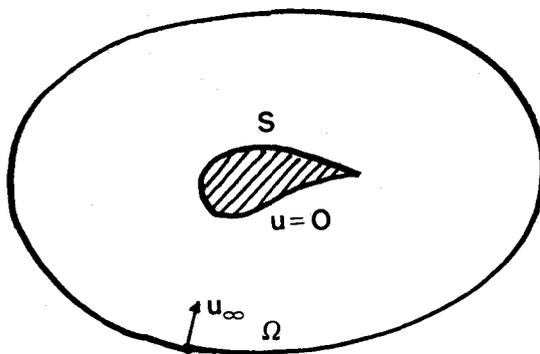
Un problema de diseño óptimo asociado al problema de Navier-Stokes será:

$$(4.56) \quad \text{Min}_{S \in \mathcal{S}} \{ E(S, u, p) / u = u(S), p = p(S), \text{ solución de (4.57)} \},$$

donde

$$(4.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad \text{en } (\Omega \setminus S) \times (0, T), \\ \text{div } u = 0 \quad \text{en } (\Omega \setminus S) \times (0, T), \\ u = u_\infty \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial S, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } (\Omega \setminus S). \end{array} \right.$$

Aquí, \mathcal{S} es una conveniente clase de perfiles admisibles, $E: \mathcal{S} \times H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u_\infty \in \mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega \times (0, T))^n$, $u_0 \in L^2(\Omega)^n$, $\text{div } u_0 = 0$ en Ω .



-Fig 4.4-

El problema (4.56)-(4.57) posee un especial interés (desde el punto de vista de las Ciencias de la Ingeniería)

cuando la familia está formada por:

- (i) Carenas de volumen dado $V_1 > 0$,
- (ii) Carenas de medida superficial dada $V_2 > 0$,
- (iii) Carenas alrededor de un objeto dado.

Otros casos interesantes pueden encontrarse en [16], [17].

Por otra parte, $E(S,u,p)$ es un criterio (diferenciable ó no) de optimalidad. Ejemplos típicos de criterios son:

- La resistencia al arrastre de S ,
- La cantidad de energía disipada en el fluido en la unidad de tiempo (debido a la presencia de fuerzas de viscosidad),
- La distancia (por ejemplo en algún L^p) de la temperatura asociada al fluido, $\Theta(S)$, a una distribución deseada de temperatura,
- Alguna combinación de los criterios precedentes.

Bajo ciertas hipótesis adicionales sobre S , podrían utilizarse los argumentos de D. Chenais [2] (aunque esto no está hecho de forma detallada en la literatura existente) para probar que (4.56)-(4.57) posee al menos una solución.

En cuanto a su resolución numérica, la dificultad fundamental estriba en el hecho de que S no posee ni siquiera estructura de espacio vectorial. Por ello, supondremos \mathcal{H} una sucesión generalizada de \mathbb{R}_+ convergente hacia 0. a cada $h \in \mathcal{H}$ le asociamos una familia S_h de M_h -tuplas $\{a_h^k\}_{k=1}^{M_h}$ de puntos de $\bar{\Omega}$. Un subespacio W_h finito-dimensional de $H^1(\Omega)^n$ y un subespacio H_h finito-dimensional de $L^2(\Omega)$. Para cada $h \in \mathcal{H}$, el problema aproximado de diseño óptimo se

escribe:

$$(4.58) \quad \min_{\{a_h^k\} \in S_h} \{ E_h(\{a_h^k\}_{k=1}^{M_h}, u_h, p_h) / u_h \in W_h, p_h \in H_h \text{ son solución del correspondiente problema aproximado de (4.57)} \} .$$

Dado que (4.58) es, para cada $h \in \mathcal{H}$, un problema de minimización finito-dimensional con dependencia continua del estado aproximado u_h respecto de la variable

$$\{a_h^k\}_{k=1}^{M_h}$$

y que $\bar{\Omega}$ es acotado, se tendrá la existencia de soluciones de (4.58) siempre que S_h sea un cerrado (y por tanto compacto) de $(\mathbb{R}^n)^{M_h}$.

La cuestión que queda abierta es la siguiente: ¿Convergen las soluciones de (4.58) (en algún sentido) hacia la solución de (4.56) en el caso de que para aproximar el problema (4.57) utilizamos algunos de los algoritmos (ALG 1 ó ALG 2) expuestos en este trabajo?.

Problemas análogos, en el caso estacionario, han sido estudiados desde el punto de vista numérico por Glowinski-Pironneau [12] y E. Fernández-Cara [7]. Un resultado de convergencia en este caso puede encontrarse en [6].

REFERENCIAS.-

- | 1 | BERNADOU, M. et al. "MODULEF, une bibliothèque modulaire d'éléments finis" INRIA (1984).
- | 2 | CHENAIS, D. "On the existence of a solution in a domain identification problem" J. Math. Anal. Appl. 52 (2) (1975).
- | 3 | CIARLET, P. G. "The finite element method for elliptic problems" North-Holland, Amsterdam, Holanda (1978).
- | 4 | CROUZEIX, M. y RAVIART, P. A. "Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations" RAIRO, Serie Anal. Num. 3, 33-76 (1973).
- | 5 | ECKHAUS, W. "Asymptotic Analysis of singular perturbations" North-Holland, Amsterdam, Holanda (1979).
- | 6 | FERNANDEZ-CARA, E. "Sobre la aproximación numérica de un problema de control geométrico" Collectánea Math. 3, XXXIII, 225-247 (1982).
- | 7 | FERNANDEZ-CARA, E. Thèse de Doctorat de 3ème. Cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (1981).
- | 8 | FORTIN, M. Thèse de Doctorat de 3ème. Cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (1972).
- | 9 | FORTIN, M y THOMASSET, F. "Application aux équations de Stokes et de Navier-Stokes" en Methodes de Lagrangien augmenté . Appl. a le Res. Num. de Prob. aux Lim., ed. M. Fortin, R. Glowinski 45-89, Dunod-Bordas, Paris (1982).
- | 10 | FRIEDMAN, A. "Partial differential equations of parabolic type" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1964).

- | 11| GLOWINSKI, R. "Numerical methods for nonlinear variational problem" 2^a Ed. Springer-Verlag, New-York (1984).
- | 12| GLOWINSKI, R. y PIRONNEAU, O. "Optimum design with Lagrangian finite elements: Design of a electromagnet" Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 15, 277-308 (1978).
- | 13| LADYZHENSKAYA, O. A. "The mathematical theory of viscous incompressible flow" 2^a Ed., Gordon and Breach, New-York (1969).
- | 14| LIONS, J. L. "Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires" Dunod, Gauthiers-Villars, Paris (1969).
- | 15| LANDAU, L. y LIFCHITZ, E. "Mécanique des fluides" Mir, Moscú (1971).
- | 16| PIRONNEAU, O. Thèse de Doctorat de 3^{ème}. Cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (1976).
- | 17| PIRONNEAU, O. "On optimum design in fluid mechanics" J. Fluid. Mech. 64, part I, 97-110 (1974).
- | 18| RAO, SS. "Optimization theory and applications" Wiley Eastern Limited (1979).
- | 19| RAVIART, P. A. y THOMAS, J. M. "Introduction a l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles" MASSON, Paris (1983).
- | 20| SCHLITCLING, H. "Boundary-layer theory" Mcgraw-Hill, New York (1969).
- | 21| TARTAR, L. "Topics in nonlinear analysis" Pub. Math. d'Orsay 78.13, Orsay (1979).
- | 22| TEMAM, R. "Navier-Stokes equations" 2^a Ed. North-Holland, Amsterdam, Holanda (1977).

- |23| TEMAM, R. "Analyse numérique" Presses Universitaires de France, Paris (1970).
- |24| THOMASSET, F. "Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations" Springer, Berlin (1981).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D^{ña} Mercedes María Beltrán
titulada "Análisis Numérico del Problema incompresible
de Navier-Stokes: Métodos de Tipo Dirección
alternaados"

Acordó otorgarle la calificación de Apto "Cum
laude", por unanimidad.

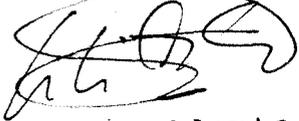
Sevilla, 18 de octubre

1986

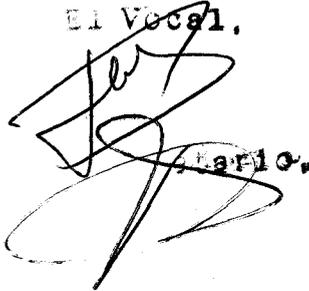
El Vocal.

El Vocal.

El Vocal.



El Presidente.



El Secretario.



El Doctorado.

