UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Dpto. de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial

Extensiones de Fragmentos de la Aritmética

Memoria presentada por
Andrés Cordón Franco
para optar al grado de Doctor
por la Universidad de Sevilla

Andrés Cordón Franco

V.º B.º El Director de la Tesis

D. Alejandro Fernández Margarit

Sevilla, Mayo de 2003

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor D. Alejandro Fernández Margarit, por su inestimable labor de dirección y por la confianza depositada en mí. Así como al profesor D. F. Félix Lara Martín, por su siempre interesante asesoramiento, tanto científico como técnico.

También quiero hacer constar mi agradecimiento a todos los compañeros del Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Sevilla, por su ayuda y su trato cordial. Muy especialmente, al profesor D. Fernando Sancho Caparrini.

Y, por supuesto, quiero agradecer a mi familia, y a quien está a mi lado, su cariño y apoyo constantes.

A todos, gracias.

A mis padres,
Miguel y Francisca

Contenido

Introducción

En Matemáticas, el principio de inducción proporciona un método formal de prueba y constituye un aspecto esencial para el análisis de uno de sus objetos fundamentales: los números naturales. La obtención de un sistema deductivo formal para los números naturales fue el objetivo principal de los trabajos sobre números de Guiseppe Peano (*Arithmetices principia nova exposita, 1889*). El sistema de axiomas que propone Peano incluye una versión formalizada del principio de inducción:

$$\forall X\ [0 \in X \wedge \forall n\,(n \in X \rightarrow n+1 \in X)\ \rightarrow\ \forall n\,(n \in X)].$$

Este sistema es de segundo orden: se cuantifica tanto sobre números como sobre conjuntos de números. Sin embargo, lo que hoy en día llamamos la Aritmética de Peano, **PA**, es una teoría de primer orden que consta de dos clases bien diferenciadas de axiomas no lógicos:

(–) axiomas que corresponden a propiedades elementales de números, y

(–) un esquema de axiomas de **inducción**: para cada fórmula de primer orden, φ, el principio de inducción para φ, $\mathbf{I}_\varphi$.

El objetivo general del estudio de la Aritmética de Peano es obtener una mayor comprensión de la potencia y las limitaciones de ciertos métodos de prueba sobre números naturales: inducción, minimización, principios combinatorios, etc. Demostrar un teorema en la Aritmética de Peano nos informa sobre los recursos lógico–matemáticos que son necesarios para la prueba de dicha propiedad. Por otra parte, **PA** puede indentificarse con la teoría de conjuntos finitos; por lo tanto, una prueba en **PA** supone un análisis de los principios combinatorios empleados. De esta manera, el hecho de que una propiedad sobre números (válida en la estructura estándar) no sea demostrable en **PA** pone de manifiesto que la Combinatoria finita no es suficiente para establecer la validez de dicha propiedad.

Un procedimiento para refinar el análisis anterior es estratificar la teoría **PA** en una jeraquía de teorías (*fragmentos*). En lugar de considerar el principio de inducción para toda fórmula de primer orden, sólo permitimos el uso de dicho principio para fórmulas de cierta complejidad sintáctica. Éste es el contexto general en el que se enmarca el trabajo desarrollado en la presente memoria.

Llamaremos *fragmentos clásicos* a los que se obtienen al restringir el principio de inducción, o bien otros esquemas relacionados (minimización, colección, ...), a la clase de fórmulas Σ_n o Π_n. El estudio de estos fragmentos se remonta a los trabajos de C. Parsons en los años 70. Posteriormente, en [21], J. Paris y L. Kirby establecieron las relaciones básicas entre ellos. Desde entonces, en los trabajos sobre Modelos de la Aritmética, se han introducido otros esquemas de axiomas al estilo de los fragmentos clásicos. Dichos esquemas expresan propiedades motivadas, bien por la Combinatoria finita (por ejemplo, el principio del palomar o el principio de Paris–Harrington), bien por la Teoría de la Demostración (principios de reflexión), o bien por la Teoría de la Recursión.

Una característica fundamental del estudio de Fragmentos de la Aritmética es su estrecha relación con la Teoría de la Recursión. Destacamos tres aspectos básicos de esta relación.

(–) Definibilidad en el modelo estándar:

El lenguaje de la Aritmética está diseñado para el estudio de propiedades de los números naturales. Asimismo, resulta una herramienta útil para la clasificación de conjuntos de números. Para conjuntos definibles en el modelo estándar, la complejidad sintáctica de la fórmula que lo define se corresponde con la complejidad computacional del mismo. En particular, la clase de los conjuntos recursivamente enumerables coincide con la clase de los conjuntos definibles por una fórmula de complejidad Σ_1, y la clase de los conjuntos recursivos coincide con la clase de los conjuntos definibles mediante una fórmula de complejidad Δ_1 (es decir, una fórmula Σ_1 equivalente a una fórmula Π_1).

(–) El carácter efectivo del concepto de prueba. Aritmetización:

Aritmetizar consiste en asociar, de manera recursiva, a cada objeto de una clase un número natural que lo codifica. Además, se exige que las relaciones y funciones básicas entre los objetos de la clase puedan ser descritas mediante procedimientos recursivos.

Una fórmula es una sucesión finita de símbolos, por tanto, es posible asociar a cada fórmula, o bien a cada sucesión finita de fórmulas, un número natural que la codifica (que llamaremos *número de Gödel*). La propiedad central de dicha codificación es que la relación *"x es una prueba de y"* es recursiva. Es decir, dados una teoría, **T**, y dos números naturales, a, b, existe un procedimiento recursivo para decidir, a partir de los axiomas de **T**, si la sucesión de fórmulas codificada por a es, o no, una prueba en **T** de la fórmula codificada por b. Además, puesto que es posible enumerar de forma efectiva las fórmulas para las cuales existe una prueba, el conjunto de los números que codifican teoremas de **T** es un conjunto recursivamente enumerable, en los axiomas de **T**.

(–) Clasificación de funciones recursivas mediante especificaciones aritméticas:

Uno de los problemas generales de la Teoría de la Recursión es clasificar funciones recursivas. Se trata de estratificar esta clase de funciones en una jerarquía. Una aproximación natural es clasificar las funciones recursivas de acuerdo con una medida que describa su complejidad. Una de estas medidas consiste en el concepto de *función recursiva en una teoría.*

Dadas una teoría en el lenguaje de la Aritmética, $\mathbf{T}$, *y una función total* $f : \omega \longrightarrow \omega$, *se dice que* f *es recursiva en* T *si existe una fórmula,* $\varphi(x,y) \in \Sigma_1$, *tal que:*

(a) *Para todo* $n, m \in \omega$, $\quad f(n) = m \iff \mathcal{N} \models \varphi(n,m)$.

(b) $\mathbf{T} \vdash \forall x \, \exists y \, \varphi(x,y)$.

Se puede interpretar la fórmula $\varphi(x,y)$ como en un *programa aritmético* que calcula la función f. En este contexto, la fórmula $\forall x \, \exists y \, \varphi(x,y)$ expresa que f es una función total. Puede entonces considerarse que la función f es más compleja, cuanto mayor sea la potencia de los principios necesarios para probar que una especificación de f, $\varphi(x,y) \in \Sigma_1$, define una función total.

Los fragmentos clásicos son teorías adecuadas para describir y estudiar jerarquías de funciones recursivas. En este sentido, un resultado básico, debido, independientemente, a G. Takeuti, G. Mints y C. Parsons, es que la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Sigma_1$ es la clase de las funciones primitivas recursivas. Asimismo, también se conocen caracterizaciones de la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I}\Sigma_n$ ($n \geq 1$), o en la Aritmética de Peano (véase [12]), ya sea en términos de la jerarquía de Schwichtenberg–Wainer, o bien mediante la consideración de principios combinatorios tipo Ramsey (principio de Paris–Harrington).

Caracterizar la clase de las funciones recursivas en una teoría, $\mathbf{T}$, proporciona una forma de medir su potencia. Más aún, puesto que la fórmula que expresa que una función es total es de complejidad Π_2, este enfoque conduce al estudio de las Π_2–consecuencias de $\mathbf{T}$.

Nótese que si $\mathbf{T} \vdash \forall x \, \exists y \, \varphi(x,y)$, entonces $\mathbf{T} \vdash \forall x \, (\exists y \, \varphi(x,y) \leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0})$. Luego, si $\varphi(x,y)$ es una especificación de una función total, en el sentido de la definición anterior, entonces $\exists y \, \varphi(x,y)$ es una fórmula $\Delta_1(\mathbf{T})$, es decir, una fórmula Σ_1 equivalente a una fórmula Π_1, y la teoría $\mathbf{T}$ prueba dicha equivalencia.

Como se ha puesto de manifiesto en las consideraciones anteriores, las fórmulas Δ_{n+1} (es decir, las fórmulas Σ_{n+1} equivalentes a una fórmula Π_{n+1}) aparecen, de manera natural, en el estudio de Fragmentos de la Aritmética. No obstante, a diferencia de los fragmentos clásicos, las relaciones entre las teorías obtenidas al restringir los principios de inducción y minimización a la clase de fórmulas Δ_{n+1} no son del todo conocidas. En este contexto, el problema principal es establecer la relación entre los esquemas de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}. Hacia el año 1985, circuló un manuscrito de H. Friedman en el que se afirmaba que ambos esquemas son equivalentes (véase [11], página 398). Sin embargo, en [6], dicha equivalencia aparece como un problema abierto (problema 34), y se atribuye a J. Paris. Por esta razón, en el presente trabajo, nos referiremos a la equivalencia

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1} ,$$

como la *Conjetura de Paris–Friedman.*

Siguiendo la prueba habitual de $\mathbf{L}\Pi_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, se obtiene que el fragmento $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$. En cambio, no es posible adaptar la prueba de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Pi_{n+1}$, al menos de forma sencilla, para obtener que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$. En dicha prueba, para establecer que el principo de minimización para una fórmula $\varphi(x) \in \Pi_{n+1}$ es válido, es necesario emplear el principio de inducción para la fórmula $\forall x < y\, \neg\varphi(x)$. Ahora bien, para ello, se debe justificar que dicha fórmula es equivalente a una fórmula Σ_{n+1}. En el caso de los fragmentos clásicos, esta dificultad se supera usando el esquema de colección. El fragmento de colección para fórmulas Σ_{n+1}, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, garantiza el cierre bajo cuantificación acotada de las clases de fórmulas Σ_{n+1} y Π_{n+1}. Dicho de forma esquemática, para fragmentos clásicos se verifica la siguiente ecuación:

$$\text{Minimización} = \text{Inducción} + \text{Colección}.$$

Entonces, puesto que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, se obtiene la equivalencia entre minimización e inducción.

Para adaptar la prueba anterior al caso de los fragmentos para fórmulas Δ_{n+1}, es necesario justificar que, en modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$, la clase de fórmulas Δ_{n+1} es cerrada bajo cuantificación acotada. Una manera de hacerlo es demostrar que $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ y obtener así la equivalencia deseada sin más que repetir la prueba de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Pi_{n+1}$. Ahora bien, nos encontramos con el siguiente obstáculo:

$$(\textit{R. Gandy})\ \ \mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}.$$

Por tanto, probar que $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ es equivalente a establecer que la Conjetura es cierta. En este contexto, la cuestión central es determinar si, en modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$, la clase de fórmulas Δ_{n+1} es cerrada bajo cuantificación acotada.

Desde otro punto de vista, podríamos adaptar las pruebas habituales de separación entre fragmentos clásicos para demostrar que la Conjetura es falsa. Ahora bien, aparecen los siguientes impedimentos.

En primer lugar, la herramienta empleada en [21], y otros muchos trabajos sobre Modelos de la Aritmética, para separar fragmentos es el uso de estructuras construidas a partir de elementos definibles. Bajo ciertas condiciones (véase **I–6**), estas estructuras proporcionan modelos del esquema $\mathbf{I}\Sigma_n$ que no son modelos de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ (y, por tanto, tampoco de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$). Sin embargo, no es conocido, en general, si dichas estructuras de elementos definibles son o no modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$, lo que impide el uso de dicha técnica para concluir que la Conjetura de Paris–Friedman es falsa.

Por otra parte, con el propósito de refutar la Conjetura, podríamos usar otras técnicas para construir modelos. En el estudio de Modelos de la Aritmética, se han empleado técnicas muy potentes; por ejemplo, el Teorema de Completitud Aritmetizado o la teoría de Envolturas e Indicadores. Sin embargo, una característica común es que las estructuras obtenidas mediante estos procedimientos son *segmentos iniciales* de otra estructura. Ahora bien, bajo hipótesis bastante generales (véase **I.5.1**), las subestructuras iniciales son modelos de esquemas de colección. Luego, como consecuencia del resultado de R. Gandy, también lo son del fragmento de minimización (y, por tanto, de inducción) para fórmulas Δ_{n+1}.

En los trabajos [10] y [16], se introducen los fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (que, a lo largo de la presente memoria, llamaremos *fragmentos relativizados*), como herramienta para obtener una mejor comprensión de la Conjetura de Paris–Friedman. La idea es cambiar la parte semántica de los esquemas para fórmulas Δ_{n+1} (la equivalencia entre una fórmula Σ_{n+1} y una fórmula Π_{n+1} es válida en un modelo), por una condición sintáctica (la equivalencia entre la fórmula Σ_{n+1} y la fórmula Π_{n+1} es demostrable en una teoría $\mathbf{T}$).

Con este propósito, en dichos trabajos se define, para cada teoría $\mathbf{T}$, la clase de fórmulas

$$\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Sigma_{n+1} : \text{ existe } \psi \in \Pi_{n+1} \text{ tal que } \mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\},$$

y se introducen los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Asimismo, se considera una versión del principio de colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (véase **I–4.B**). La importancia de este último fragmento reside en que permite garantizar el cierre bajo cuantificación acotada de la clase de fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Para estudiar las relaciones entre la teoría $\mathbf{T}$ y sus fragmentos relativizados, se introducen también los siguientes conceptos (Δ_{n+1}*–propiedades*):

(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–inducción si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–minimización si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Los resultados obtenidos en [8], [10] y [16] ponen de manifiesto que los conceptos anteriores son herramientas adecuadas para el estudio de los fragmentos relativizados. Los autores establecen una condición suficiente para que la versión relativizada de la Conjetura de Paris–Friedman sea cierta: $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección (véase [10], 2.4), y prueban un teorema de jerarquía para las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, cuando $\mathbf{T}$ es un fragmento clásico; es decir, $\mathbf{T}$ es $\mathbf{I}\Sigma_m$ $(m \geq n)$, $\mathbf{PA}$, o bien $\mathbf{Th}(\mathcal{N})$ (véase [10], 6.6 y 6.7). Asimismo, otra propiedad esencial es la relación entre los fragmentos relativizados (de una teoría $\mathbf{T}$) y el conjunto de las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$: para toda teoría con Δ_{n+1}–inducción, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es una extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Además, se establecen condiciones para obtener la equivalencia entre estas dos teorías. En este sentido, un resultado destacado es la equivalencia entre $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})$ (véase [8], 2.4 y 5.5). Ahora bien, queda pendiente caracterizar la clase de teorías para las cuales se verifica la propiedad anterior.

(P1) Caracterizar las teorías $\mathbf{T}$ para las cuales

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

Por otra parte, las propiedades de las teorías $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ no son del todo conocidas, ni aún cuando $\mathbf{T}$ es un fragmento clásico. Un problema central al respecto, que aparece explícitamente como problema abierto en [10] y [16], es obtener un teorema de jerarquía para dichas teorías.

(P2) ¿Es estricta la siguiente jerarquía?

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n).$$

Aparte de los problemas pendientes, una ampliación del estudio de fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, iniciado en [10] y [16], es determinar hasta qué punto los resultados allí obtenidos dependen de que la teoría $\mathbf{T}$ posea "buenas propiedades". La técnica empleada en dichos trabajos se basa en caracterizar las fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ como fórmulas acotadas de una extensión adecuada del lenguaje de la Aritmética. La idea central para ello es expresar las Π_{n+2}–consecuencias de $\mathbf{T}$ como $\mathbf{I}\Sigma_n$, más un conjunto de funciones no decrecientes de grafo Π_n–definible. Este método exige ciertas propiedades de regularidad para la teoría $\mathbf{T}$. Es necesario que toda función de grafo Π_n, tal que $\mathbf{T}$ prueba que es una función total, esté acotada por una función no decreciente. Esta condición de regularidad se verifica para teorías con Δ_{n+1}–colección (de hecho, es una propiedad equivalente). Ahora bien, ¿qué ocurre para teorías que no tienen Δ_{n+1}–colección?

Otro modo natural de continuar el estudio de fragmentos relativizados es considerar las versiones sin parámetros de los mismos. En diversos trabajos (véanse, como referencia principal, [13] y [15]), se han estudiado las versiones sin parámetros de los fragmentos

clásicos: $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$, $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$, etc. Esto es, teorías obtenidas cuando restringimos los esquemas clásicos a fórmulas en las que no ocurren parámetros (variables libres adicionales). Además, en [10], se prueba que toda extensión de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$ tiene Δ_{n+1}–colección. Esto pone de manifiesto la importancia de los fragmentos sin parámetros para el estudio de fragmentos relativizados.
Las propiedades de las versiones sin parámetros de los fragmentos clásicos, en particular, las relaciones entre ellos, son diferentes a las de las versiones con parámetros. Pero, ¿qué sucede en el caso de los fragmentos relativizados?

El estudio de las cuestiones anteriores constituye un objetivo fundamental del trabajo desarrollado en la presente memoria:

(O1) Continuar el estudio de fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, prestando especial atención a sus versiones sin parámetros, que hasta el momento no han sido consideradas.

Además, pretendemos obtener resultados sobre fragmentos relativizados de $\mathbf{T}$ bajo las condiciones más generales posibles para la teoría $\mathbf{T}$. Como se ha observado con anterioridad, esto requiere usar un método distinto al empleado en los trabajos [10] y [16].

En la presente memoria se propone una <u>nueva metodología</u> para el estudio de fragmentos relativizados: el análisis de sus **extensiones**. La idea básica en la que se sustenta esta metodología es la siguiente:

Sea $\mathbf{T}$ *el fragmento objeto de estudio. Supongamos que verifica la siguiente condición:*

(C1) *Existe* Γ *conjunto de fórmulas de* complejidad acotada *(*$\Gamma \subseteq \Sigma_k$ *o* Π_k*) tal que:*

$$\mathbf{T} + \Gamma \implies \mathbf{S},$$

donde $\mathbf{S}$ *es otro fragmento cuyas propiedades son bien conocidas (en general, será un fragmento clásico, con o sin parámetros).*

Entonces, es posible obtener propiedades de la teoría $\mathbf{T}$ *mediante el estudio de las extensiones del fragmento* $\mathbf{S}$*.*

Para ilustrar la idea anterior, veamos cómo aplicar el método propuesto en el estudio de propiedades básicas de un fragmento, relativas a la complejidad de sus axiomas y a su relación con otras teorías. Sea $\mathbf{T}$ una teoría que cumple la condición **(C1)** anterior.

<u>Complejidad axiomática:</u>
Sea Γ' una clase de fórmulas. Si $\mathbf{T}$ es Γ'–axiomatizable, puesto que $\mathbf{T} + \Gamma \implies \mathbf{S}$, entonces $\mathbf{S}$ posee una extensión que es $\Gamma' \cup \Gamma$–axiomatizable.
Por tanto, para obtener que $\mathbf{T}$ no es una teoría Γ'–axiomatziable, es suficiente probar que:

$$\mathbf{S} \text{ no posee extensiones } \Gamma' \cup \Gamma\text{–axiomatizables.}$$

Resultados de separación:
Sea $\mathbf{T}'$ una teoría. Si $\mathbf{T}'$ es una extensión de $\mathbf{T}$, puesto que $\mathbf{T} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{S}$, entonces $\mathbf{T}' + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{S}$.
Por tanto, para obtener que $\mathbf{T}'$ no es una extensión del fragmento $\mathbf{T}$, basta probar que:

$$\mathbf{T}' + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{S}.$$

Un resultado central de la presente memoria es que los fragmentos relativizados verifican la condición **(C1)** anterior. Por tanto, la metodología descrita permite reducir el estudio de éstos al análisis de las extensiones de los fragmentos clásicos (y sus versiones sin parámetros). Este hecho justifica el segundo objetivo fundamental del presente trabajo:

(O2) Estudiar extensiones de complejidad acotada de Fragmentos de la Aritmética. Es decir, obtener propiedades de las extensiones de un fragmento que puedan ser descritas como una teoría conocida más un conjunto de fórmulas Γ de complejidad acotada ($\Gamma \subseteq \Sigma_k$ o Π_k).

La técnica empleada en diversos trabajos sobre Modelos de la Aritmética ([12], [14], [20]) para separar fragmentos es el uso de estructuras obtenidas mediante elementos definibles. Esto es, dado un modelo, $\mathfrak{A}$, se considera la clase de los elementos definibles en $\mathfrak{A}$ por fórmulas Σ_{n+1}, que notaremos $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$.

Dicha técnica es adecuada para el estudio de extensiones de fragmentos. Las estructuras $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ (ō bien, otras estructuras asociadas) satisfacen que:

(–) no son modelos de esquemas de inducción o colección,

(–) conservan propiedades con respecto al *modelo ambiente* $\mathfrak{A}$. Es decir, si φ es una fórmula válida en $\mathfrak{A}$ que no supera cierta complejidad, entonces también es válida en la estructura asociada a $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ (recordemos que estamos interesados en extensiones de complejidad acotada).

Para obtener resultados óptimos sobre extensiones usando esta herramienta, es necesario, como paso previo, establecer propiedades más generales sobre las estructuras $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Este propósito motiva el tercer objetivo fundamental de nuestro trabajo:

(O3) Refinar propiedades sobre estructuras de elementos definibles, prestando especial atención a aquellos resultados que establecen que en dichas estructuras no son válidos esquemas de inducción o colección.

El material presentado en esta memoria está organizado en tres grandes bloques. Cada uno de ellos se corresponde con uno de los objetivos fundamentales señalados. En el capítulo **II**, estudiamos propiedades de estructuras de elementos definibles. Haciendo uso de los resultados allí obtenidos, investigamos extensiones de complejidad acotada en el capítulo **III**. A su vez, aplicando los resultados sobre extensiones, según la metodología anteriormente propuesta, desarrollamos un estudio sistemático de fragmentos relativizados en el capítulo **IV** de la memoria. Además, en el capítulo **I**, reunimos resultados preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo y, en el capítulo **V**, recopilamos las cuestiones que se han ido planteando a lo largo de este trabajo y que, finalmente, han quedado sin resolver.

En lo que sigue, describiremos de manera más detallada los contenidos del trabajo. Prestaremos especial atención a la discusión de los resultados obtenidos.

(•) Capítulo II: Elementos definibles

Motivación y objetivos:

La propiedad central de las estructuras de elementos Σ_{n+1}–definibles de un modelo, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, o bien de elementos Σ_{n+1}–definibles usando un parámetro $p \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$, es que proporcionan modelos de esquemas de inducción que no lo son de esquemas de colección. Asimismo, para obtener modelos de colección pero no de inducción, se introduce el segmento inicial determinado por la estructura de elementos Σ_{n+1}–definibles, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ (o bien $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$).

(R1) *(Paris, Kirby) Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $p \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es no estándar. Entonces:*

- (–) *$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es modelo de $\mathbf{I}\Sigma_n$, pero no de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.*
- (–) *$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es modelo de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, pero no de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$.*

En [15], R. Kaye, J. Paris y C. Dimitracopoulos refinan el resultado **(R1)** en el estudio de las relaciones entre fragmentos sin parámetros. La idea para ello se basa en obtener condiciones, bajo las cuales, una estructura es modelo de un fragmento si, y sólo si, lo es de la correspondiente versión sin parámetros. Recordamos que, en general, los esquemas sin parámetros son teorías más débiles que sus versiones con parámetros. Al respecto, los autores establecen los siguientes resultados:

([15], 1.9) *Si* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, *entonces:*

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \iff \mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}.$$

([15], 1.5) *Si* $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, *entonces:*

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Pi^-_{n+1}.$$

Nótese que las condiciones anteriores están relacionadas con la distribución de los elementos definibles en el modelo:

$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \iff$ todos los elementos de $\mathfrak{B}$ son Σ_{n+1}–definibles,

$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \iff$ la clase de los elementos Σ_{n+1}–definibles no está acotada en $\mathfrak{B}$.

Cuando no se usa elementos del modelo como parámetros, las estructuras de elementos Σ_{n+1}–definibles verifican las propiedades anteriores. Concretamente, todos los elementos de $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ son Σ_{n+1}–definibles y la clase de los elementos Σ_{n+1}–definibles es cofinal en $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$. En consecuencia, a partir de **(R1)**, en [15] se prueba que:

(R2) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *tal que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es modelo de* $\mathbf{I}\Sigma_n$, *pero no de* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$.

(–) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es modelo de* $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, *pero no de* $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$.

Además, en general, el resultado **(R2)** no es válido si permitimos el uso de parámetros para definir elementos.

El objetivo del capítulo **II** es generalizar los resultados **(R1)** y **(R2)**, desde dos puntos de vista:

(G1) Debilitar la hipótesis sobre el *modelo ambiente* $\mathfrak{A}$.
En los dos resultados se exige que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Ahora bien, ¿es posible establecer **(R1)** y **(R2)** para modelos de teorías más débiles?

(G2) Caracterizar clases *especiales* de elementos de $\mathfrak{A}$, de modo que, cuando $p \in \mathfrak{A}$ es un elemento de alguna de dichas clases, entonces:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I}\Pi^-_{n+1}.$$

Con este propósito, estudiaremos dos clases de elementos de $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A})$ = la clase de los elementos Π_n–definibles en $\mathfrak{A}$. Es decir, definibles mediante una fórmula Π_n.

$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A})$ = la clase de los elementos Π_n–minimales en $\mathfrak{A}$. Es decir, aquellos que son el menor elemento de $\mathfrak{A}$ que satisface una fórmula Π_n.

Las clases de los elementos Π_n–definibles, y Π_n–minimales, han sido consideradas con anterioridad en varios trabajos, ya sea implícitamente ([13], [15]), o bien de forma explícita ([9], [16], [20]). Sin embargo, hasta el momento, sus propiedades no han sido estudiadas de manera sistemática.

Resultados obtenidos:

En la primera parte del capítulo, estudiamos cómo se distribuyen los elementos Π_n–definibles y Π_n–minimales en un modelo $\mathfrak{A}$. La distribución de estos elementos es una herramienta fundamental para la obtención de sus propiedades.
Estamos interesados en determinar cuándo una clase de elementos es un *segmento inicial* de una estructura, y cuándo es *cofinal* en la estructura. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos clases de elementos de un modelo, escribiremos $\mathcal{A} \subset^e \mathcal{B}$, para indicar que $\mathcal{A}$ es un segmento inicial propio de $\mathcal{B}$; y $\mathcal{A} \subset^c \mathcal{B}$, para indicar que $\mathcal{A}$ es cofinal y propio en $\mathcal{B}$. El siguiente teorema agrupa los resultados obtenidos al respecto.

TEOREMA: **(II.2.6, II.2.13, II.2.15)**
Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \subset^e \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \subset^c \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \subset^c \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, p).$$

Además, si no usamos parámetros, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$.

Nótese que algunos de los resultados recogidos en el teorema anterior se prueban en la memoria bajo hipótesis más débiles. Por ejemplo, para demostrar que $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p)$ es cofinal en $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$, es suficiente suponer que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. Además, algunos resultados se prueban para un conjunto arbitrario X de parámetros del modelo.
Por otra parte, las clases de elementos Π_0–definibles, Π_0–minimales y Σ_0–definibles coinciden y, en modelos de $\mathbf{I}\Delta_0$, son cofinales en la clase de los elementos Σ_1–definibles (**II.2.6**).

En la segunda parte del capítulo **II**, abordamos los dos objetivos **(G1)** y **(G2)** expuestos con anterioridad. Grosso modo, obtenemos que:

(–) En **(R1)** y **(R2)** es posible debilitar la hipótesis sobre el modelo ambiente, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$ (donde $\mathbf{exp}$ es una fórmula Π_2 que expresa que la función exponencial es total).

(–) Los elementos Π_{n+1}–definibles, y Π_{n+1}–minimales, verifican la condición requerida en **(G2)**.

Para ello, siguiendo algunas de las ideas que aparecen en [15], obtenemos primero condiciones, bajo las cuales, una estructura es modelo de un fragmento sin parámetros si, y sólo si, lo es del correspondiente esquema con parámetros. Comprobamos después que las estructuras $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$, cuando p es un elemento Π_{n+1}–definible (o Π_{n+1}–minimal), satisfacen dichas condiciones.

TEOREMA: (**II.3.2**, **II.3.4**)

(a) *Supongamos que* $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{B})$. *Entonces:*

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \iff \mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}.$$

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \iff \mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

(b) *Supongamos que* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$. *Entonces:*

$$p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)).$$

$$\left.\begin{array}{r} p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B}^s\Sigma_{n+1}^- \end{array}\right\} \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)).$$

$$\left.\begin{array}{r} p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{B}^s\Sigma_{n+1}^- \end{array}\right\} \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)).$$

Donde $\mathbf{B}^s\Sigma_{n+1}^-$ es una versión del esquema de colección sin parámetros (introducida en [13] y [15]) que permite probar que las clases de fórmulas Σ_{n+1}^-, Π_{n+1}^- son cerradas bajo cuantificación acotada.

Por último, a partir de las propiedades anteriores, obtenemos el resultado central del capítulo: la generalización de **(R1)** y **(R2)** deseada. En el siguiente teorema, debe entenderse que, bajo las hipótesis señaladas para el modelo ambiente, $\mathfrak{A}$, y supuesto que la estructura de elementos Σ_{n+1}–definibles es no estándar; entonces la estructura considerada no es modelo del fragmento indicado.

TEOREMA: (**II.3.5**, **II.3.7**, **II.3.8**, **II.3.13**)

(a) *Sin parámetros:*

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$	$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$
$\mathbf{I}\Sigma_n^-$	no $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^- + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$
$\mathbf{I}\Sigma_n^- + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$	no $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$

(b) *$p \in \mathfrak{A}$ cualquiera:*

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$	$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$
$\mathbf{I}\Sigma_n$	no $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$
$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$	no $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$

(c) $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$:

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$
$\mathbf{I}\Sigma_n$	no $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$
$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$

(d) $p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$:

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$
$\mathbf{I}\Sigma_n$	no $\mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$
$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1}$
$\mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$	no $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$

Las técnicas para las pruebas de los resultados del capítulo son, en líneas generales, las empleadas en [13] y [15]. Más aún, como se hará notar en el texto, la demostración de algunos de los resultados obtenidos aparece, implícitamente, en los trabajos anteriores. Sin embargo, en la presente memoria, se han refinado estos resultados y se prueban bajo hipótesis más generales. Además, estas generalizaciones son cruciales para el estudio de extensiones de Fragmentos desarrollado en el capítulo **III**.

(•) Capítulo III: Extensiones de complejidad acotada

Motivación y objetivos:

Como se hizo notar previamente, la metodología propuesta para el estudio de fragmentos relativizados conduce al estudio de extensiones de fragmentos clásicos (o de sus versiones sin parámetros), obtenidas a partir de una teoría, $\mathbf{T}_1$, y un conjunto de fórmulas de *complejidad acotada*, Γ:

$$(\star) \quad \mathbf{T}_1 + \Gamma \implies \mathbf{T}.$$

Para medir la complejidad de una extensión, emplearemos dos criterios:

(–) La complejidad sintáctica de sus axiomas:

Diremos que $\mathbf{T}'$ es una Γ–extensión de $\mathbf{T}$ si $\mathbf{T}'$ es una teoría Γ–axiomatizable y consistente que extiende a $\mathbf{T}$ (definición **III.1.1**).

(–) La complejidad descriptiva, desde el punto de vista de la Teoría de la Recursión, del conjunto de sus axiomas (identificado con un conjunto de números naturales, mediante la codificación de Gödel):

Diremos que $\mathbf{T}'$ es Γ–definible si existe una fórmula $\varphi(x) \in \Gamma$ que define, en el modelo estándar, el conjunto de los axiomas de $\mathbf{T}'$ (definición **III.1.2**).

En las secciones **2** y **3** del capítulo, estudiamos las extensiones obtenidas si prescindimos de la teoría $\mathbf{T}_1$ en $(\star)$. Los objetivos principales son:

(-) determinar el menor nivel de la jerarquía Aritmética, Γ, tal que el fragmento $\mathbf{T}$ posee una Γ–extensión,

(-) investigar la complejidad descriptiva de las Γ–extensiones del fragmento.

Para la anterior clasificación, consideraremos la siguiente jerarquía de fórmulas del lenguaje de la Aritmética.

$$\cdots \subseteq \begin{array}{c}\Sigma_n \\ \\ \Pi_n\end{array} \subseteq \cup_n \subseteq \vee_n \subseteq \begin{array}{c}\Sigma_{n+1} \\ \\ \Pi_{n+1}\end{array} \subseteq \cdots$$

Donde $\cup_{n+1} = \Sigma_{n+1} \cup \Pi_{n+1}$ y $\vee_n = \{\varphi \vee \theta : \varphi \in \Sigma_n, \theta \in \Pi_n\}$.

En la sección **4**, consideramos extensiones de la forma descrita en $(\star)$. En este contexto, el problema central es:

(-) dados $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}$ tales que $\mathbf{T}_1 \Rightarrow\!\!\!\not\Leftarrow \mathbf{T}$ y un conjunto de fórmulas, Γ, obtener condiciones, sobre la complejidad de las fórmulas en Γ, que permitan asegurar que $\mathbf{T}_1 + \Gamma \Rightarrow\!\!\!\not\Leftarrow \mathbf{T}_2$.

<u>Resultados obtenidos</u>:

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos en la sección **2** sobre la existencia de Γ–extensiones de los fragmentos clásicos, sus versiones sin parámetros y sus versiones para fórmulas $\bar{\Delta}_{n+1}$.

TEOREMA:

(a) <u>$n \geq 0$</u>: (**III.2.2, III.2.4.1, III.2.5.1, III.2.8.1**)

	Π_{n+3}	Σ_{n+3}	Π_{n+2}	Σ_{n+2}	Π_{n+1}	Σ_{n+1}
$\mathbf{I\Sigma}_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$	sí	no				
$\mathbf{I\Delta}_{n+1}$	sí	no, (1)	no, (2)	no		
$\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{B}^s\mathbf{\Sigma}^-_{n+1}$, $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$			sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$	no		
$\mathbf{I\Pi}^-_{n+1}, \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$					sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$	no

(b) <u>$n = 0$</u>: (**III.2.2**, **III.2.4.1**, **III.2.5.2**, **III.2.7**, **III.2.8.2**)

	Π_3	Σ_3	Π_2	Σ_2	Π_1	Σ_1
$\mathbf{I}\Sigma_1$	sí	no				
$\mathbf{B}\Sigma_1$	sí	no, (3)				
$\mathbf{I}\Delta_1$	sí	no, (1)	no, (2)			
$\mathbf{I}\Sigma_1^-$			sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathcal{N})$	no		
$\mathbf{B}^s\Sigma_1^-, \mathbf{B}\Sigma_1^-$			sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathcal{N})$	no, (1)	no	
$\mathbf{UI}\Delta_1$			sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathcal{N})$	¿?		
$\mathbf{I}\Pi_1^-$					sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$	no
$\mathbf{L}\Delta_1^-$					sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$	no, (3)
$\mathbf{I}\Delta_1^-$					sí, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$	no, (1)
$\mathbf{I}\Delta_0$					sí	no, (1)

Donde:
(1), *para extensiones verdaderas.*
(2), *para extensiones consistentes con* **PA**.
(3), *para extensiones consistentes con* **exp**.

Nótese que, en el caso $n > 0$, obtenemos resultados óptimos para todos los fragmentos considerados, salvo $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$. En el caso $n = 0$, los resultados para $\mathbf{I}\Sigma_1$, $\mathbf{I}\Sigma_1^-$, $\mathbf{I}\Pi_1^-$ son también óptimos. Sin embargo, para el resto han quedado problemas sin resolver. En relación a los esquemas de colección, quedan pendientes las siguientes cuestiones:

(–) $\mathbf{B}\Sigma_1^-$no posee Σ_3–extensiones.

(–) $\mathbf{B}\Sigma_1^-$ (y $\mathbf{B}^s\Sigma_1^-$) no posee Σ_2–extensiones.

Ahora bien, responder afirmativamente a alguna de los problemas anteriores implica una respuesta negativa al siguiente problema abierto:

$$(\mathbf{NE})\ \mathbf{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}\Sigma_1.$$

Este último problema está relacionado con el problema de la extensión final, que se considera en [4] como el *problema abierto más importante en el estudio de Fragmentos de la Aritmética.*
La relación entre algunos problemas que en el presente trabajo han quedado sin resolver y el problema (**NE**) no es exclusiva del teorema anterior, sino que aparece en otras cuestiones y así se hará notar en la memoria a lo largo de la exposición.

La herramienta fundamental para la prueba de los resultados anteriores, así como en el resto del capítulo **III**, es el uso de estructuras de elementos definibles. En líneas generales, la idea para demostrar que una teoría $\mathbf{T}$ no extiende a un fragmento consiste en obtener una estructura de elementos definibles (a veces, usando parámetros), que sea modelo de $\mathbf{T}$, pero no del fragmento. En este punto, las generalizaciones de **(R1)** y **(R2)**, que obtuvimos en el capítulo **II**, desempeñan un papel esencial para que las propiedades obtenidas sean óptimas.

Para el estudio de extensiones de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$ y de Σ_{n+2}–extensiones de $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$, hemos tenido que usar técnicas distintas. En el primer caso, siguiendo algunas ideas de [9] y [16], empleamos resultados obtenidos por K. McAloon en [19], (véase **III.2.4**). En el segundo caso, usamos un resultado que relaciona el crecimiento de las funciones recursivas en una teoría con su complejidad sintáctica (véase **III.2.6**).

Como se observa en el cuadro previo, los fragmentos sin parámetros, a diferencia de los fragmentos clásicos, poseen extensiones de complejidad sintáctica menor que la dada por su axiomatización natural. Por ejemplo, $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$ es una teoría Σ_{n+2}–axiomatizada, no es Π_{n+2}–axiomatizable y, sin embargo, posee Π_{n+1}–extensiones: $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Ahora bien, dicha Π_{n+1}–extensión es muy compleja desde el punto de vista de la complejidad descriptiva. Como veremos esta propiedad es común a los fragmentos sin parámetros: poseen extensiones de complejidad sintáctica menor que la dada por su axiomatización natural, pero estas extensiones tienen gran complejidad descriptiva.

Para investigar la propiedad anterior, en la sección **3**, introducimos el concepto de teoría de tipo $k \to m$ (definición **III.3.1**). Diremos que $\mathbf{T}$ es de tipo $k \to m$ si posee Π_k–extensiones y, para cualquier Π_k-extensión de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}') = \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$.
Del hecho de que un fragmento sea de tipo $k \to m$ ($m \geq 1$), se deducen propiedades de axiomatización: $\mathbf{T}$ no posee Π_k–extensiones que sean Σ_m-definibles y, por tanto, $\mathbf{T}$ no es finitamente axiomatizable. Para obtener estas conclusiones, en el concepto *tipo* $k \to m$, no es esencial que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}') = \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$. De hecho, es suficiente que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ sea recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$. Esto motiva debilitar la definición anterior (**III.3.3**). Diremos que $\mathbf{T}$ es de tipo $k \to^w m$ si posee Π_k–extensiones y, para cualquier Π_k–extensión de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$.

El siguiente teorema recoge las principales propiedades obtenidas al respecto:

TEOREMA: (**III.3.5**, **III.3.7**, **III.3.9**, **III.3.11**, **III.3.13**)

(a) *Teorías de tipo $k \rightarrow m$:*

	$n+3 \rightarrow n+2$	$n+2 \rightarrow n+2$	$n+2 \rightarrow n+1$	$n+1 \rightarrow n+1$
$\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$	no	sí	sí	no
$\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$	no	¿?	sí	no
$\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$	no	no	sí	sí
$\mathbf{L}\Delta^-_{n+1} + \mathbf{exp}$	no	no	sí	sí, $n \geq 1$
$\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$	no	no	¿?	sí, $n \geq 1$

(b) *Teorías de tipo $k \rightarrow^w m$:*

$\mathbf{L}\Delta^-_1$	$1 \rightarrow^w 1$
$\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$	$n+2 \rightarrow^w n+2$

Como se observa en el cuadro anterior, quedan pendientes los problemas:

(–) ¿Es $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ de tipo $n+2 \rightarrow n+2$?

(–) ¿Es $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ de tipo $n+2 \rightarrow n+1$?

La primera cuestión está conectada con la existencia de elementos no estándar Π_{n+1}–definibles en modelos de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ (véase **III.3.14**). La segunda, está relacionada con la Conjetura de Paris–Friedman. En efecto, si $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ no es de tipo $n+2 \rightarrow n+1$, entonces la Conjetura es falsa (véanse **III.3.12.1** y **III.3.12.2**).

Por último, en la sección **4**, abordamos el problema de extensiones de la forma descrita en ($\star$), en toda su generalidad: ¿$\mathbf{T}_1 + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{T}$?

El siguiente teorema agrupa los resultados que han sido probados en el trabajo. En cada caso, debe entenderse que:

(–) el conjunto de fórmulas Γ satisface las hipótesis señaladas,

(–) $\mathbf{T}_1 + \Gamma$ es consistente, y

(–) $\mathbf{T}_1 + \Gamma$ no extiende a la teoría $\mathbf{T}$.

TEOREMA: (**III.4.1**, **III.4.5**, **III.4.7**, **III.4.9**)

$\mathbf{T}_1$	Γ	$\mathbf{T}$
$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$	$\Gamma \subseteq \Sigma_{n+3}$	$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$
$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$	$\Gamma \subseteq \Sigma_{n+3}$	$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$
$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$	$\Gamma \subseteq \Sigma_{n+3}$ $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp} + \Gamma$ consistente	$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$
$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$	$\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2}$	$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$
$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$	$\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2}$	$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$
$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$	$\Gamma = \Gamma' + \varphi$, $\Gamma' \subseteq \Pi_{n+2}$ $\varphi \in \Sigma_{n+2}$, Γ' recursivo $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \Gamma$ consistente	$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$
$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$	$\Gamma \subseteq \Pi_{n+2}$ Γ recursivo	$\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$

De nuevo, nótese que los resultados obtenidos son, en general, óptimos.

(•) Capítulo IV: Fragmentos Relativizados

Motivación y objetivos:

En el capítulo **IV** de la memoria, continuamos el estudio de los fragmentos relativizados, iniciado en [10] y [16]. El objetivo fundamental es establecer, para estos esquemas, las propiedades habituales en el estudio de Fragmentos de la Aritmética:

(–) Relaciones entre Fragmentos Relativizados.

(–) Relaciones entre Fragmentos Clásicos y Relativizados.

(–) Resultados de Conservación.

(–) Resultados de Axiomatización (complejidad axiomática, teorías finitamente axiomatizables).

Prestamos especial atención a las versiones sin parámetros de los fragmentos relativizados, ya que estas teorías no han sido consideradas con anterioridad. En primer lugar, introducimos las versiones de los conceptos considerados en los trabajos [10] y [16] en el estudio de fragmentos relativizados: fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, esquemas de inducción, colección y minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y Δ_{n+1}^--propiedades (véase la definición **IV.2.1**).

En [10] y [16], se pone de manifiesto que los fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ están relacionados con la clase $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Motivados por esta relación, la metodología que

usaremos en el capítulo se basa en dividir los modelos de un fragmento relativizado en dos clases: los que son modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y los que no lo son.
Es posible asociar a cada esquema relativizado un esquema clásico (con o sin parámetros), sin más que considerar la teoría obtenida al restringir el esquema en cuestión a fórmulas $\Sigma_{n+1}^{(-)}$, en lugar de a fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$. De esta manera, se obtiene la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \longmapsto & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \\
\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \longmapsto & \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \longmapsto & \mathbf{I}\Sigma_{n+1}\ (\Longleftrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1}) \\
\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \longmapsto & \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \\
\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \longmapsto & \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \longmapsto & \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-\ (\Longleftrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1}^-)
\end{array}$$

El resultado central del capítulo, y la aportación más novedosa de la presente memoria, es que la clase de los modelos de un fragmento relativizado está contenida en la unión de los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ (o bien, de una subteoría suya, en el caso de minimización sin parámetros) y la clase de los modelos del fragmento clásico asociado.

Por ejemplo, un modelo de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es, o bien un modelo de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, o bien un modelo de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Por tanto, si $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, entonces:

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

En consecuencia, según la metodología anteriormente propuesta, es posible deducir propiedades del fragmento $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ a partir del estudio de extensiones de complejidad acotada de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Para el resto de esquemas relativizados, se verifican propiedades análogas.

Para describir de manera sintáctica la unión de dos clases de modelos, se introduce el concepto de disyunción de dos teorías (definición **IV.3.1**):

$$\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2 = \{\varphi_1 \vee \varphi_2 :\ \varphi_1 \in \mathbf{T}_1 \text{ y } \varphi_2 \in \mathbf{T}_2\}.$$

Dicho concepto es simple, pero ha resultado muy útil para expresar, de manera compacta y sugerente, propiedades de fragmentos relativizados.

Resultados obtenidos:

En la primera parte del capítulo (sección **3**), se establecen los resultados centrales del presente trabajo.

TEOREMA: (**IV.3.4**, **IV.3.7.1**, **IV.3.8**)
(a) *Con parámetros:*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{I}\Sigma_{n+1}. \\ \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{B}\Sigma_{n+1}. \\ \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{I}\Sigma_{n+1}. \end{aligned}$$

(b) *Sin parámetros: Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$ *(*$\mathbf{E}_0$ *= fórmulas abiertas).*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}. \\ \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}. \\ \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}) \vee \mathbf{I}\Pi^-_{n+1}. \end{aligned}$$

Para los esquemas de inducción y colección (con o sin parámetros), si la teoría $\mathbf{T}$ posee la $\Delta^{(-)}_{n+1}$–propiedad correspondiente, entonces, del teorema anterior, se obtiene una caracterización de los modelos del fragmento relativizado de $\mathbf{T}$. Por ejemplo, si $\mathbf{T}$ es una teoría con Δ_{n+1}–inducción, entonces la clase de los modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es exactamente la unión de los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y los modelos de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ (véanse **IV.3.6**, **IV.3.9**).

Los resultados obtenidos para el esquema de minimización sin parámetros difieren de los anteriores. Hemos probado que los modelos de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ están contenidos en la unión de los modelos de $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$ y los modelos de $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$. Sin embargo, no sabemos si el resultado es cierto si, en lugar de $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$, consideramos $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, o bien la clase de fórmulas intermedia $\mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.
Por tanto, no hemos podido obtener una caracterización de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ a partir de la disyunción de $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$ y una clase adecuada de teoremas de $\mathbf{T}$. Debido a este hecho, el grado de generalidad de los resultados obtenidos para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es menor que el de las propiedades obtenidas para los restantes esquemas relativizados.

Como consecuencia del teorema anterior, empleando los resultados sobre extensiones de complejidad acotada del capítulo **III**, obtenemos propiedades de las Π_{n+2}–extensiones de fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$.

TEOREMA: (**IV.3.18**, **IV.3.20**, **IV.3.22**, **IV.3.25**)
Con parámetros:

Sea $\mathbf{T}'$ *una teoría* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*
(–) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$*, entonces* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(–) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *y* $\mathbf{T}' + \mathbf{exp}$ *consistente, entonces* $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Sin parámetros:

Sea $\mathbf{T}'$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

(–) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *entonces se tiene una de las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$,

(b) *existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y* $\mathbf{T}' + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

(–) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *entonces se tiene una de las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$,

(b) *existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \varphi) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

(–) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *y* $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ *es consistente, entonces se tiene una de las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$,

(b) *existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y* $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

Por lo tanto, una Π_{n+2}–extensión de un fragmento sin parámetros relativizado, o bien extiende a una parte de los teoremas de $\mathbf{T}$ (condición **(a)**), o bien es compleja, desde el punto de vista de la complejidad descriptiva (condición **(b)**). Por ello, en algunos resultados de este capítulo, cuya prueba descansa en el teorema anterior, es necesario añadir ciertas hipótesis bastante generales para asegurar que, cuando se usa el teorema, no se tiene la condición **(b)** (véanse **IV.5.20**, **IV.5.22**, **IV.5.23**).

En la segunda parte del capítulo **IV** (secciones **4** y **5**), se estudian las propiedades de axiomatización y las relaciones entre fragmentos relativizados de $\mathbf{T}$. La técnica fundamental consiste en combinar los resultados anteriores con el estudio de las extensiones de complejidad acotada del capítulo **III**.

A continuación, enumeramos las propiedades más destacadas al respecto.

(**A**) Propiedades de Axiomatización:

El siguiente cuadro resume las propiedades de axiomatización obtenidas para fragmentos relativizados (para fragmentos sin parámetros, suponemos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$). Destacamos que, bajo hipótesis muy generales sobre la teoría $\mathbf{T}$, los resultados son óptimos.

TEOREMA: (**IV.4.1**, **IV.4.2**, **IV.4.6**, **IV.4.7**, **IV.4.8**)

	Π_{n+3}	Σ_{n+3}	$\vee_{n+2}$	$\cup_{n+2}$	Π_{n+2}	Σ_{n+2}	Π_{n+1}	Σ_{n+1}
$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$	sí	no, (1)			sí, (2)	no, $n > 0$		
$\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$	sí	no, (3)			sí, (4)	no, $n > 0$		
$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$			sí	no, (5)	sí, (2)	no, (6)		
$\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$			sí	no, (5)	no, (7)	no, $n > 0$		
$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$					no, (8)	sí	no, $n > 0$	no, $n > 0$

Donde:

(1), *si* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(2), *si* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(3), *si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(4), *si* $\mathbf{I\Sigma}_n \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(5), *si* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(6), *si* $n \geq 1$ *y* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.
(7), *si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(8), *si* $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$.

Nótese que en el análisis de la complejidad axiomática anterior no es necesario suponer ninguna Δ_{n+1}–propiedad para la teoría $\mathbf{T}$. Esto constituye un ejemplo de cómo la metodología empleada permite probar resultados sobre fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, sin necesidad de suponer propiedades de regularidad sobre $\mathbf{T}$.

Del cuadro anterior, se deduce que si $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, entonces las teorías $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ son Π_{n+2}–axiomatizables. Si, además, suponemos que $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–inducción, entonces obtenemos que dichas teorías son equivalentes a $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Este resultado resuelve el problema abierto (**P1**), anteriormente enunciado.

TEOREMA: (**IV.4.1**)
Son equivalentes:
(a) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *y* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*

Destacamos que también se obtienen condiciones que permiten determinar si los fragmentos relativizados son, o no, teorías finitamente axiomatizables (véanse **IV.4.3**, **IV.4.4**, **IV.4.10**, **IV.4.11**, **IV.4.12**).

(**B**) Relaciones entre Fragmentos Relativizados.

El siguiente teorema reúne las relaciones básicas entre fragmentos relativizados. Si bien, para escribir el resultado de forma compacta, exigimos que la teoría $\mathbf{T}$ posea cierta Δ_{n+1}–propiedad, en el texto de la memoria puede comprobarse que, para la prueba de algunas partes del teorema, dicha hipótesis no es necesaria.

TEOREMA: **(IV.5.9, IV.5.10, IV.5.12, IV.5.14, IV.5.15, IV.5.16)**

(a) *Sea* $\mathbf{T}$ *con* Δ_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \nRightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(–) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(b) *Se tiene que:*

(b.1) $(n \geq 1)$ *Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \nRightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(–) $\mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(b.2) *Sea* $\mathbf{T}$ *con* Δ_{n+1}*–colección. Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.

(–) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.

(–) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(c) *Sea* $\mathbf{T}$ *con* $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$*–minimización. Supongamos que* $n \geq 1$ *y* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, *o bien que* $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \nRightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. *Entonces:*

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

(d) *Supongamos que* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \nRightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *y* $\mathbf{I\Sigma}_n \nRightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$. *Entonces:*

$$\mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \nLeftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \nLeftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

En la sección **5**, también estudiamos la relación entre los fragmentos relativizados y los fragmentos clásicos. A este respecto, destacamos que los fragmentos relativizados sin parámetros de la teoría $\mathbf{Th}(\mathcal{N})$ coinciden con las versiones sin parámetros de los fragmentos clásicos. Concretamente:

TEOREMA: **(IV.5.7)**

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^- &\iff \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-. \\ \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^- &\iff \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^-. \\ \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^- &\iff \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-. \end{aligned}$$

(C) Fragmentos Relativizados de dos teorías.

Puesto que la fórmula que expresa la equivalencia entre un fórmula Σ_{n+1} y otra Π_{n+1} es de complejidad Π_{n+2}, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ determina los fragmentos relativizados de $\mathbf{T}$. Un resultado fundamental obtenido el presente trabajo es que, en condiciones muy generales, se verifica un recíproco de la propiedad anterior.

TEOREMA: (**IV.5.18**, **IV.5.19**, **IV.5.20**, **IV.5.22**, **IV.5.23**)

(a) *Sean* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ *con* Δ_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(–) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)$.

(b) *Sean* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ *con* Δ_{n+1}*–colección tales que ambas prueban* **exp**. *Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(–) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)$.

(c) *Sean* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ *verdaderas.*

(c.1) *Supongamos que ambas teorías tienen* Δ^-_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(–) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$.

(c.2) *Supongamos que ambas teorías son extensiones de* $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. *Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(–) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$.

(c.3) *Supongamos que ambas teorías tienen* $(\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})$*–minimización.*
Si $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$, *entonces* $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_1)$.

El teorema anterior es una herramienta muy útil para estudiar jerarquías de fragmentos relativizados. Reduce el problema de separar dos fragmentos relativizados a separar las Π_{n+2}–consecuencias de dos teorías. Mediante este método, en la presente memoria, se obtiene una prueba más simple del teorema de jerarquía para las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})$ y se resuelve uno de los principales problemas abiertos en los trabajos [10] y [16]: el teorema de jerarquía para esquemas de colección.

TEOREMA: (**IV.6.9**)
La siguiente cadena de teorías es estricta:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \models\!\!\!\Rightarrow \ldots \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n).$$

Por último, en la sección **6**, estudiamos las propiedades de fragmentos relativizados de $\mathbf{T}$, cuando $\mathbf{T}$ es un fragmento clásico. Las hipótesis en los resultados obtenidos en el capítulo **IV** son lo suficientemente generales como para estos resultados se puedan aplicar para los fragmentos clásicos. En consecuencia, establecemos, en la mayor parte de los casos, propiedades óptimas.

Los siguientes diagramas resumen las relaciones básicas entre esta clase de fragmentos.

DIAGRAMA 1:

Relaciones entre fragmentos relativizados de fragmentos clásicos

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{I}\Sigma_n^- & & \Longleftarrow^* & & \mathbf{I}\Sigma_n & & & & \\
\Updownarrow & & & & \Updownarrow & & & & \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- & \Longleftarrow^* & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})^- \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+2})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+2})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+2}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+2}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{n+2})^- \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^- \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) & \Longmapsto & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Updownarrow \\
\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- & \Longmapsfrom & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} & \Longmapsto & \mathbf{B}\Sigma_{n+1} & \Longmapsto & \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-
\end{array}
$$

IV.6.10 **IV.5.7** **IV.2.6.1**	**IV.6.7**	**IV.6.10** **IV.5.7**	**IV.6.4**	**IV.6.9** **IV.6.4**	**IV.6.6**	**IV.6.9** **IV.6.5**	**IV.6.5**	**IV.6.10** **IV.5.7**

Donde: ($\Longleftarrow^*$ *es:* $\Longmapsfrom$, *para* $n > 0$; *y* $\Longleftrightarrow$, *para* $n = 0$.)

DIAGRAMA 2:

Relaciones entre fragmentos relativizados (sin parámetros) de fragmentos clásicos

		$I\Sigma_n^-$				
		$\Updownarrow$				
		$L\Delta_{n+1}(I\Sigma_n^-)^-$	$\Longleftrightarrow$	$I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n^-)^-$	$\Longleftarrow^*$	$I\Sigma_n$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n^-)^-$
		$\Updownarrow$		$\Uparrow_*$		
		$L\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-$	$\Longleftarrow^*$	$I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-$	$\Longleftrightarrow$	$I\Sigma_n$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-$
		$\Uparrow$		$\Uparrow$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+1}^-)^-$	$\not\Longleftarrow$ ${}_1\not\Longleftarrow$	$L\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+1}^-)^-$	$\Longleftarrow_2$	$I\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+1}^-)^-$	$\not\Longrightarrow$ $\not\Longrightarrow^*$	$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+1}^-)^-$
		$\underline{\Uparrow}$		$\underline{\Uparrow}$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\not\Longleftrightarrow$ ${}_1\not\Longleftrightarrow$	$L\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})^-$	$\Longleftarrow\!\!\mid$	$I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\mid\!\!\Longrightarrow$	$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})$
		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+2}^-)$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+2}^-)^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\not\Longleftrightarrow$ ${}_1\not\Longleftrightarrow$	$L\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+2}^-)^-$	$\Longleftarrow\!\!\mid$	$I\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+2}^-)^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\mid\!\!\Longrightarrow$	$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+2}^-)$
		$\underline{\Uparrow}$		$\underline{\Uparrow}$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})^-$	$\not\Longleftrightarrow$	$L\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})^-$	$\Longleftarrow\!\!\mid$	$I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\not\Longleftrightarrow$ $\mid\!\!\Longrightarrow$	$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})$ $B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+2})^-$
		$\underline{\Uparrow}$		$\underline{\Uparrow}$		
		$\vdots$		$\vdots$		
		$\underline{\Uparrow}$		$\underline{\Uparrow}$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(PA)$ $B^*\Delta_{n+1}(PA)^-$	$\not\Longleftrightarrow$	$L\Delta_{n+1}(PA)^-$	$\Longleftarrow\!\!\mid$	$I\Delta_{n+1}(PA)^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\not\Longleftrightarrow$ $\mid\!\!\Longrightarrow$	$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(PA)$ $B^*\Delta_{n+1}(PA)^-$
		$\underline{\Uparrow}$		$\underline{\Uparrow}$		
$B\Sigma_{n+1},\ B\Sigma_{n+1}^-$ $B^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ $B^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$	$\not\Longleftrightarrow$	$L\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$	$\Longleftarrow\!\!\mid$	$I\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$	$\not\Longleftrightarrow$ $\not\Longleftrightarrow$ $\mid\!\!\Longrightarrow$	$B\Sigma_{n+1}$ $B^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ $B^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$ $\Updownarrow$ $B\Sigma_{n+1}^-$
		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		
		$I\Pi_{n+1}^-$		$I\Sigma_{n+1}^-$		
	IV.5.16	**IV.2.6.1** **IV.6.10** **IV.5.7**	**IV.5.15**	**IV.2.6.2** **IV.6.10** **IV.5.7**	**IV.5.16**	

Donde:

$\Longleftarrow^*$ *es:* $\Longleftarrow\!\!\mid$ *si* $n \geq 1$ *y* $\Longleftrightarrow$ *si* $n = 0$; $\not\Longrightarrow^*$ *es:* $\not\Longrightarrow$ *si* $n \geq 1$ *y* $\Longrightarrow$ *si* $n = 0$.

${}_1\not\Longleftarrow$ *es:* $\not\Longleftarrow$ *si* $n \geq 1$ *y ¿? si* $n = 0$; $\Longleftarrow_2$ *es:* $\Longleftarrow$ *si* $n = 0$ *y ¿? si* $n > 0$.

Nótese que en el diagrama anterior queda pendiente completar las relaciones entre fragmentos relativizados de la teoría $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. Concretamente:

(–) Determinar la relación entre las teorías:

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Pi}^-_{n+1})^-, \quad \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Pi}^-_{n+1})^-, \quad \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}^-_{n})^-.$$

(–) ¿$\mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{I\Pi}^-_1)^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I\Pi}^-_1)^-$?

(–) ¿$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Pi}^-_{n+2})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Pi}^-_{n+2})^-$?

Capítulo I

Preliminares

1 El lenguaje de la Aritmética

A lo largo de la presente memoria, trabajaremos en el lenguaje usual de la Aritmética de primer orden, $\mathcal{L}$. Éste es el lenguaje de primer orden con igualdad que consta de los siguientes símbolos no lógicos (que corresponden a las operaciones habituales entre números naturales): $\mathbf{0}$, símbolo de constante, $\mathbf{S}$, símbolo de función 1–ario, $+$ y $\cdot$, símbolos de función binarios y $<$, símbolo de predicado binario.
Denotaremos por $\mathcal{N}$ el modelo estándar, es decir, la $\mathcal{L}$–estructura cuyo universo es el conjunto de los números naturales, ω, con la interpretación usual de los símbolos de $\mathcal{L}$.

Para simplificar la escritura, usaremos las notaciones y abreviaturas habituales. Por ejemplo, escribiremos:

(–) $x \leq y$ en lugar de $x < y \vee x = y$,

(–) $\mathbf{t} + 1$ en lugar de $\mathbf{S}(\mathbf{t})$,

(–) Cuantificación acotada: Sean $\mathbf{t}$ un término de $\mathcal{L}$, en el que no ocurre la variable x, y φ una fórmula de $\mathcal{L}$. Escribiremos:
$\exists x \leq \mathbf{t}\, \varphi$ en lugar de $\exists x\, (x \leq \mathbf{t} \wedge \varphi)$,
$\forall x \leq \mathbf{t}\, \varphi$ en lugar de $\forall x\, (x \leq \mathbf{t} \rightarrow \varphi)$.

Notaremos por Form a la clase de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ y por **Sent** a la clase de las fórmulas cerradas (es decir, sin variables libres).
Las fórmulas de $\mathcal{L}$ pueden estratificarse en una jerarquía atendiendo a la alternancia entre cuantificadores existenciales y universales no acotados.

La Jerarquía Aritmética es la clasificación de las fórmulas de $\mathcal{L}$ que se obtiene como sigue:

(–) $\mathbf{E}_0$ es el conjunto de las fórmulas abiertas (sin cuantificadores) de $\mathcal{L}$.

(–) $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ es la clase de las fórmulas acotadas (esto es, la menor clase de fórmulas de $\mathcal{L}$ que contiene a las fórmulas abiertas, y es cerrada bajo conectivas proposicionales ($\neg$, $\vee$) y cuantificación acotada).

(–) Para cada $n \in \omega$:

$\Sigma_{n+1} = \{\exists \vec{x}\, \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \, : \varphi \in \Pi_n\}$ y $\Pi_{n+1} = \{\forall \vec{x}\, \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \, : \varphi \in \Sigma_n\}$.

A partir de operaciones Prenex, se obtiene que:

(–) las clases Σ_n, Π_n son cerradas bajo disyunciones y conjunciones,

(–) la negación de una fórmula Σ_n (respectivamente, Π_n) es una fórmula Π_n (respectivamente, Σ_n).

Notaremos también:

(–) $\cup_n = \Sigma_n \cup \Pi_n$.

(–) $\vee_n = \{\varphi \vee \theta \; : \; \varphi \in \Sigma_n, \, \theta \in \Pi_n\}$.

Se verifican las siguientes relaciones entre las clases de fórmulas anteriores:

$$\ldots \subseteq \begin{array}{c} \Sigma_n \\ \\ \Pi_n \end{array} \subseteq \cup_n \subseteq \vee_n \subseteq \begin{array}{c} \Sigma_{n+1} \\ \\ \Pi_{n+1} \end{array} \subseteq \ldots$$

Sea $\varphi(\vec{x}, y)$ una fórmula de $\mathcal{L}$. Escribiremos $\exists! y\, \varphi(\vec{x}, y)$ para denotar la fórmula:

$$\exists y\, \varphi(\vec{x}, y) \wedge \forall z, u\, (\varphi(\vec{x}, z) \wedge \varphi(\vec{x}, u) \rightarrow z = u).$$

Esto es, y es el único elemento que satisface $\varphi(\vec{x}, y)$. Escribiremos $y = (\mu z)\, (\varphi(\vec{x}, z))$ para denotar la fórmula:

$$\varphi(\vec{x}, y) \wedge \forall z < y\, \neg \varphi(\vec{x}, z).$$

Esto es, y es el menor elemento que satisface $\varphi(\vec{x}, y)$.

NOTA I.1.1. Sea $\varphi(\vec{x}, y)$ una fórmula Π_n tal que una teoría, $\mathbf{T}$, demuestra que dicha fórmula es funcional, es decir, $\mathbf{T} \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, \varphi(\vec{x}, y)$.
Escribiremos $\mathbf{f}(\vec{x}) = y$ en lugar de $\varphi(\vec{x}, y)$. Además:

Si $\theta \in \Sigma_{n+1}$, entonces $\theta(\mathbf{f}(\vec{x}))$ denotará $\exists y\, (\mathbf{f}(\vec{x}) = y \wedge \theta(y)) \in \Sigma_{n+1}$,

Si $\theta \in \Pi_{n+1}$, entonces $\theta(\mathbf{f}(\vec{x}))$ denotará $\forall y\, (\mathbf{f}(\vec{x}) = y \rightarrow \theta(y)) \in \Pi_{n+1}$.

Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ teorías. Escribiremos:

$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{T}'$, si todo modelo de $\mathbf{T}$ es modelo de $\mathbf{T}'$ ($\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{T}'$),

$\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{T}'$, si $\mathbf{T}$ no es una extensión de $\mathbf{T}'$,

$\mathbf{T} \not\Longleftrightarrow \mathbf{T}'$, si $\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{T}$,

$\mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{T}'$, si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ son equivalentes,

$\mathbf{T} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{T}'$, si $\mathbf{T}$ es una extensión de $\mathbf{T}'$ y $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{T}$ (es decir, $\mathbf{T}$ es una extensión propia de $\mathbf{T}'$).

Sea Γ una clase de fórmulas de $\mathcal{L}$. Definimos las teorías:

$$\mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \Gamma \cap \mathbf{Sent} : \mathbf{T} \vdash \varphi\}, \qquad \mathbf{Th}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\mathrm{Form}}(\mathbf{T}).$$
$$\mathbf{Th}_\Gamma(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \Gamma \cap \mathbf{Sent} : \mathfrak{A} \models \varphi\}, \qquad \mathbf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathbf{Th}_{\mathrm{Form}}(\mathfrak{A}).$$
$$\mathbf{D}_\Gamma(\mathfrak{A}) = \{\varphi(\vec{c}) : \varphi(\vec{v}) \in \Gamma,\, \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{c}),\, \vec{c} \in \mathfrak{A}\}, \qquad \mathbf{DE}(\mathfrak{A}) = \mathbf{D}_{\mathrm{Form}}(\mathfrak{A}).$$

Y los conjuntos de fórmulas:

$$\Gamma(\mathbf{T}) = \{\varphi \in \mathrm{Form} : \text{ existe } \theta \in \Gamma \text{ tal que } \mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \theta\}.$$
$$\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\mathbf{Th}(\mathfrak{A})), \qquad \Delta_n(\mathfrak{A}) = \Sigma_n(\mathfrak{A}) \cap \Pi_n(\mathfrak{A}).$$

Diremos que $\mathbf{T}$ es una teoría verdadera si $\mathcal{N}$ es modelo de $\mathbf{T}$.

2 Esquemas axiomáticos: inducción, minimización y colección

Se denominan fragmentos de la Aritmética a las teorías obtenidas a partir de una teoría base y esquemas axiomáticos restringidos a fórmulas de una cierta estructura sintáctica (Σ_n, Π_n, ...). Estos esquemas expresan propiedades válidas en el modelo estándar. Los esquemas clásicos son:

(–) **Inducción**: que expresa el principio de inducción matemática. Esto es, el axioma de inducción para $\varphi(x, \vec{v})$, respecto a x, es la fórmula:

$$\mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v}) \equiv \varphi(\mathbf{0}, \vec{v}) \wedge \forall x\,(\varphi(x, \vec{v}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{v})) \rightarrow \forall x\, \varphi(x, \vec{v}).$$

(–) **Minimización**: todo conjunto no vacío posee elemento mínimo. Esto es, el axioma de minimización para $\varphi(x, \vec{v})$, respecto a x, es la fórmula:

$$\mathbf{L}_{\varphi,x}(\vec{v}) \equiv \exists x\, \varphi(x, \vec{v}) \rightarrow \exists x\,(\varphi(x, \vec{v}) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(y, \vec{v})).$$

(–) **Colección**: el rango de una función de dominio acotado es un conjunto acotado. Esto es, el axioma de colección para $\varphi(x, y, \vec{v})$, respecto a x, y, es la fórmula:

$$\mathbf{B}_{\varphi,x,y}(z,\vec{v}) \equiv \forall x \leq z\, \exists y\, \varphi(x,y,\vec{v}) \rightarrow \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y,\vec{v}).$$

(–) **Colección fuerte**: si una función parcial tiene dominio acotado, entonces el rango está acotado. Esto es, el axioma de colección fuerte para $\varphi(x,y,\vec{v})$, respecto a x, y, es la fórmula:

$$\mathbf{S}_{\varphi,x,y}(\vec{v}) \equiv \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, (\exists y\, \varphi(x,y,\vec{v}) \rightarrow \exists y \leq u\, \varphi(x,y,\vec{v})).$$

Como teoría base, emplearemos $\mathbf{P}^-$. Denotaremos por $\mathbf{P}^-$ la teoría dada por un conjunto finito de axiomas Π_1 cuyos modelos son la parte no negativa de anillos conmutativos, discretamente ordenados (véase [14], capítulo 2). Todo modelo de $\mathbf{P}^-$ comienza con una copia de los números naturales, que identificaremos con el modelo estándar, $\mathcal{N}$; y, a continuación, aparecen el resto de los elementos del modelo (elementos no estándar).

Si Γ es una clase de fórmulas de $\mathcal{L}$, se obtienen los siguientes fragmentos:

$$\mathbf{I}\Gamma \;=\; \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} \,:\, \varphi \in \Gamma\}, \qquad \mathbf{L}\Gamma \;=\; \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} \,:\, \varphi \in \Gamma\}.$$

Para los fragmentos de colección y colección fuerte, usaremos $\mathbf{I}\Delta_0$ como teoría base:

$$\mathbf{B}\Gamma \;=\; \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_{\varphi,x,y} \,:\, \varphi \in \Gamma\}, \qquad \mathbf{S}\Gamma \;=\; \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{S}_{\varphi,x,y} \,:\, \varphi \in \Gamma\}.$$

Estos fragmentos son subteorías de la Aritmética de Peano, es decir, de la teoría:

$$\mathbf{PA} \;=\; \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} \,:\, \varphi \text{ fórmula de } \mathcal{L}\}.$$

Llamaremos <u>fragmentos clásicos</u> a los esquemas anteriores cuando Γ es la clase de fórmulas Σ_n o Π_n. En [21], J. Paris y L. Kirby establecen las relaciones entre los esquemas de inducción, minimización y colección para fórmulas Σ_n y Π_n. Posteriormente, en [5], P. Clote completa el estudio de las relaciones entre estas teorías, considerando el esquema de colección fuerte.

Teorema I.2.1. **(Diagrama de Paris–Kirby).** *Para todo $n \in \omega$:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{I}\Sigma_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Pi_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Sigma_n & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Pi_n \\
\Uparrow & & & & & & \\
\mathbf{B}\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}\Pi_n & & & & \\
\Uparrow & & & & & & \\
\mathbf{I}\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{S}\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{S}\Pi_n & &
\end{array}$$

Si analizamos la forma sintáctica de los axiomas de los fragmentos anteriores (en algunos casos es necesario considerar formulaciones equivalentes), se obtiene que:

PROPOSICIÓN I.2.2.
(a) $\mathbf{I}\Delta_0$ *es* Π_1*–axiomatizable.*
(b) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *son* Π_{n+3}*–axiomatizables.*

Desde un punto de vista sintáctico, una propiedad básica del esquema $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ es que garantiza el cierre bajo cuantificación acotada de las clases Σ_{n+1} y Π_{n+1}.

PROPOSICIÓN I.2.3. (Parsons, [22]) *Para todo* $n \in \omega$*:*
(a) $\varphi \in \Sigma_{n+1} \implies \forall x \leq z\, \varphi \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.
(b) $\varphi \in \Pi_{n+1} \implies \exists x \leq z\, \varphi \in \Pi_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.

DEFINICIÓN I.2.4. Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$.
(a) Diremos que $I \subseteq \mathfrak{A}$ es un segmento inicial de $\mathfrak{A}$ si

$$\forall a \in I\, \forall b \in \mathfrak{A}\, (b \leq a \Longrightarrow b \in I).$$

(b) Diremos que I es un corte de $\mathfrak{A}$ si, además, I es cerrado bajo la función sucesor.
(c) $\Sigma_0(\varphi)$ es la menor clase de fórmulas de $\mathcal{L}$ que contiene a las fórmulas abiertas y a la fórmula φ, y es cerrada bajo conectivas proposicionales y cuantificación acotada.
(d) $\Sigma_0(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \Sigma_0(\varphi)$.

Una propiedad esencial de los modelos de $\mathbf{I}\Sigma_n$ es que ningún corte propio es definible, por una fórmula $\Sigma_0(\Sigma_n)$.

PROPOSICIÓN I.2.5. **(Principio de Overspill)**. *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_0(\Sigma_n)$, $\vec{a} \in \mathfrak{A}$, *I un corte propio de $\mathfrak{A}$. Entonces:*

$$\forall b \in I,\ \mathfrak{A} \models \varphi(b, \vec{a}) \iff \exists c \notin I,\ \mathfrak{A} \models \forall x \leq c\, \varphi(x, \vec{a}).$$

J. Paris y H. Friedman establecieron, independientemente, el siguiente resultado de conservación entre los fragmentos de colección e inducción.

TEOREMA I.2.6. **(Paris–Friedman)**. *Para todo* $n \in \omega$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *es una extensión* Π_{n+2}*–conservativa de* $\mathbf{I}\Sigma_n$*. Es decir, para cada* $\varphi \in \Pi_{n+2}$ *cerrada:*

$$\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \varphi \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi.$$

Como referencia general, para consultar una prueba de estos y otros resultados sobre fragmentos clásicos, véase [12] o [14].

3 Exponenciación. Validez parcial

Exponenciación:

En [11] se muestra una fórmula Δ_0, $\exp(x, y, z)$, que define, en el modelo estándar, el grafo de la función exponencial y tal que $\mathbf{I\Delta_0}$ prueba las propiedades usuales de la exponenciación (para más detalles, véase [12], capítulo V). Por ejemplo, son teoremas en $\mathbf{I\Delta_0}$:

$$\exp(x, 0, z) \leftrightarrow z = 1.$$

$$\exp(x, y + 1, z) \leftrightarrow \exists u\,(\exp(x, y, u) \wedge z = u \cdot x).$$

$$\exp(x, y, z) \wedge \exp(x, y, z') \rightarrow z = z'.$$

$$y < y' \wedge \exp(x, y, z) \wedge \exp(x, y', z') \rightarrow z < z'.$$

Sin embargo, la teoría $\mathbf{I\Delta_0}$ no demuestra que la función exponencial es total, es decir, $\mathbf{I\Delta_0} \nvdash \mathbf{exp}$, donde $\mathbf{exp}$ es la Π_2 fórmula: $\forall x, y\, \exists z \exp(x, y, z)$ (en lugar de $\exp(x, y, z)$, escribiremos a veces $x^y = z$).

La teoría $\mathbf{I\Delta_0 + exp}$ es una herramienta muy importante en el estudio de Fragmentos de la Aritmética. Una propiedad esencial de dicho fragmento es que permite definir predicados de validez.

3.A Codificación

Codificando tuplas y sucesiones:

En modelos de $\mathbf{IE_0}$, es posible codificar tuplas finitas utilizando la función J de Cantor. Sea $\langle x, y\rangle = z$ la fórmula:

$$2 \cdot z = (x + y) \cdot (x + y + 1) + 2 \cdot x.$$

Lema I.3.1. *Son teoremas en* $\mathbf{IE_0}$*:*

(a) $\forall x\, \exists y\, (2 \cdot y = x \cdot (x + 1))$.

(b) $\forall x, y\, \exists! z\, (\langle x, y\rangle = z)$.

(c) $\forall x, y, z\, (\langle x, y\rangle = z \rightarrow x \leq z \wedge y \leq z)$.

(d) $\forall z\, \exists! x, y\, (\langle x, y\rangle = z)$.

(e) $\forall x, y\, (\langle x, y\rangle \leq (x + y)^2)$.

Notaremos por $u = (x)_0$ y $u = (x)_1$ a las inversas izquierda y derecha, respectivamente, de la función J de Cantor.

Para codificar cualquier tupla de longitud finita, basta considerar una composición adecuada a partir de la función J. Por ejemplo, una manera de codificar triples es:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle.$$

En cualquier caso, dada una tupla, $\vec{x}$, notaremos por $\langle\vec{x}\rangle$ a una generalización adecuada de la función J.

La función β de Gödel permite codificar sucesiones de longitud arbitraria en modelos de $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ (para detalles, véase [14], capítulo 4). Sea $\beta(x, z) = w$ la fórmula Δ_0

$$\mathbf{Rm}((x)_0, (z+1)\cdot(x)_1 + 1) = w,$$

donde $\mathbf{Rm}(x, y) = w$ es una fórmula acotada que define, en modelos de $\mathbf{IE_0}$, a la función resto de la división euclídea. Consideraremos las funciones longitud y proyección asociadas:

$$\begin{array}{lcl} \lg(x) = y & \iff & \beta(x, 0) = y. \\ (x)_v = y & \iff & \beta(x, v+1) = y. \end{array}$$

A veces, emplearemos también la notación $\langle\vec{y}\rangle$ para referirnos a la codificación de Gödel de la sucesión $\vec{y}$.

Teoría de conjuntos finitos en $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$:

La siguiente fórmula Δ_0 permite desarrollar la teoría de conjuntos finitos, en modelos de $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$:

$$x \in y \quad\iff\quad \exists u \le y\, \exists w < 2^x\, (y = 2^{x+1}\cdot u + 2^x + w).$$

(Esto es, $x \in y$ expresa que el dígito x–ésimo del desarrollo en base 2 de y es 1)

Esta fórmula permite interpretar cada elemento de un modelo de $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ como un conjunto finito. Podemos asimismo definir, mediante fórmulas acotadas, los conceptos habituales en la teoría de conjuntos finitos (operaciones entre conjuntos, aplicación inyectiva, cardinal de un conjunto, etc...). La teoría $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ prueba las propiedades básicas de estos conceptos (para consultar los detalles, véase [12], capítulo I). En particular, demuestra una versión del Principio del Palomar para conjuntos finitos.

Notaremos por $(< x)$ al conjunto de los elementos menores que x, es decir:

$$(< x) = 2^x - 1$$

Proposición I.3.2. *Son teoremas en* $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$:

(a) $x \in y \to x < y$.

(b) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z < x) \quad [\![y = (< x)]\!]$.

(c) *Para cada x existe un único $y = card(x)$, para el que existe una aplicación biyectiva de x en $(< y)$.*

(d) **(Principio del Palomar)** *Si card*$(x) <$ *card*(y)*, entonces no existe ninguna aplicación inyectiva de* y *en* x*. En particular, si* $x < y$*, entonces no existe ninguna aplicación inyectiva de* $(< y)$ *en* $(< x)$*.*

Además, se verifica la siguiente versión del axioma de separación:

PROPOSICIÓN I.3.3. **(Separación).**

(a) *Para cada* $\varphi(x, v) \in \Delta_0$*, se tiene que:*

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \vdash \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z < x \wedge \varphi(z, v)).$$

(b) *Si* $n > 0$*, para cada* $\varphi(x, v) \in \Sigma_0(\Sigma_n)$*, se tiene que:*

$$\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z < x \wedge \varphi(z, v)).$$

3.B Predicados de validez parcial

Mediante una de las aritmetizaciones usuales de la sintaxis de los lenguajes de primer orden (véase, por ejemplo, [14], capítulo 9), es posible asociar a cada fórmula de $\mathcal{L}$, $\varphi(\vec{x})$, un número natural, $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner$, que denominaremos número de Gödel de la fórmula.
Asimismo, las operaciones sintácticas entre variables, términos y fórmulas de $\mathcal{L}$ pueden ser descritas mediante fórmulas Σ_1, de manera que $\mathbf{I}\Sigma_1$ prueba las propiedades elementales de estas operaciones.

Dada una teoría, $\mathbf{T}$, recursivamente axiomatizada (esto es, tal que el conjunto de los números de Gödel de sus axiomas es recursivo), podemos obtener fórmulas de $\mathcal{L}$ que expresan los conceptos sintácticos habituales, para $\mathbf{T}$. En particular, existe una fórmula Π_1 cerrada, $\mathbf{Con}(\mathbf{T})$, que describe la propiedad "la teoría $\mathbf{T}$ es consistente".

En [12], aparecen los siguientes resultados al respecto (I–4.34, III–2.22, V–5.29):

PROPOSICIÓN I.3.4.

(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \mathbf{Con}(\mathbf{I}\Sigma_n)$.

(b) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \nvdash \mathbf{Con}(\mathbf{I}\Sigma_{n+1})$.

(c) $\mathbf{PA} \nvdash \mathbf{Con}(\mathbf{PA})$.

(d) $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \nvdash \mathbf{Con}(\mathbf{I}\Delta_0)$.

Podemos también desarrollar una aritmetización de la semántica, y obtener así fórmulas que definen, en modelos de $\mathbf{I}\Sigma_1$, los predicados de validez para fórmulas Σ_n y Π_n.

TEOREMA I.3.5. *Para cada $n > 0$, existen $\mathbf{Sat}_{\Sigma_n}(x,y) \in \Sigma_n$ y $\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(x,y) \in \Pi_n$ tales que:*

(a) *Para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$, se tiene que:*

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathbf{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \langle \vec{y} \rangle) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}).$$

(b) *Para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n$, se tiene que:*

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \langle \vec{y} \rangle) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}).$$

En [18], aparece por primera vez un predicado de validez para fórmulas Δ_0. En [12], encontramos el siguiente resultado (corolario 5.5, capítulo V) relativo a la existencia de una fórmula Δ_0 de validez para fórmulas acotadas.

TEOREMA I.3.6. *Existe una fórmula Δ_0, $\mathcal{V}_0(x,z,u)$, tal que:*

(a) *Para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$, existe $k \in \omega$ tal que:*

$$\mathbf{I\Delta_0} \vdash u \geq 2^{(\max(\vec{x})+2)^k} \rightarrow (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathcal{V}_0(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \langle \vec{x} \rangle, u)).$$

(b) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$, y $\vec{a}, b, d \in \mathfrak{A}$ tales que d es no estándar y $\mathfrak{A} \models b > 2^{(\max(\vec{a})+2)^d}$, entonces, para cada $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$, se tiene que:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \mathcal{V}_0(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \langle \vec{a} \rangle, b).$$

Como consecuencia de la existencia de predicados de validez, se obtiene que los fragmentos clásicos son, en general, teorías finitamente axiomatizables.

PROPOSICIÓN I.3.7.

(a) *$\mathbf{I\Sigma_{n+1}}$ es finitamente axiomatizable.*

(b) *Para $n > 0$, $\mathbf{B\Sigma_{n+1}}$ es finitamente axiomatizable.*

(c) *$\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$, $\mathbf{B\Sigma_1} + \mathbf{exp}$ son finitamente axiomatizables.*

Es un problema abierto saber si, en **I.3.7–(c)**, se puede eliminar la función exponencial. Esto es, averiguar si $\mathbf{I\Delta_0}$, o bien $\mathbf{B\Sigma_1}$, es una teoría finitamente axiomatizable.

La codificación de Gödel permite identificar cada conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, Γ, con un conjunto de números naturales (el conjunto de los números de Gödel de las fórmulas de Γ). A lo largo del presente trabajo, empleamos dicha identificación. El contexto aclarará si consideramos Γ como conjunto de fórmulas, o bien como el conjunto de los números de Gödel de sus elementos.

4 Fragmentos de la Aritmética

4.A Fragmentos sin parámetros y fragmentos para fórmulas Δ_{n+1}

Fragmentos sin parámetros:

En [13] y [15], se introducen varias teorías obtenidas, a partir de los fragmentos clásicos, restringiéndolos a fórmulas en las que no ocurren parámetros (variables libres adicionales).

Sea Γ una clase de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$. Escribiremos $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Gamma^-$ para significar que $\varphi \in \Gamma$ y que $x_1, \ldots, x_k$ son todas las variables que ocurren libres en φ.

Inducción y minimización:

Los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas de Γ sin parametros son, respectivamente:

$$\mathbf{I}\Gamma^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Gamma^-\}, \qquad \mathbf{L}\Gamma^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Gamma^-\}.$$

Colección:

Consideramos ahora una nueva versión del principio de colección. Para cada fórmula $\varphi(x, y, \vec{v})$ de $\mathcal{L}$, notaremos por $\mathbf{B}^{\star}_{\varphi,x,y}$ a la siguiente fórmula:

$$\forall x \, \exists y \, \varphi(x, y, \vec{v}) \rightarrow \forall z \, \exists u \, \forall x \leq z \, \exists y \leq u \, \varphi(x, y, \vec{v}).$$

Esto es, la restricción de una función de dominio ω a un dominio acotado posee rango acotado. De esta manera, obtenemos dos versiones del fragmento de colección para fórmulas sin parámetros:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Gamma^- &= \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}^{\star}_{\varphi,x,y} : \varphi(x, y) \in \Gamma^-\}, \\ \mathbf{B}^{\mathbf{s}}\Gamma^- &= \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_{\varphi,x,y}(z) : \varphi(x, y) \in \Gamma^-\}. \end{aligned}$$

NOTA I.4.1. No se considera el fragmento de colección fuerte para fórmulas de Γ sin parámetros, pues, para las clases de fórmulas que habitualmente consideraremos ($\Gamma = \Sigma_n$ o Π_n), dicho fragmento resulta equivalente a $\mathbf{S}\Gamma$. Esto es:

$$\mathbf{S}\Sigma^-_{n+1} \Longleftrightarrow \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \Longleftrightarrow \mathbf{S}\Pi_n \Longleftrightarrow \mathbf{S}\Pi^-_n.$$

El esquema $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ prueba la siguiente versión *uniforme* del principio de colección:

$$\forall \vec{v}, x \, \exists \vec{y} \, \varphi(x, \vec{y}, \vec{v}) \rightarrow \forall z, \vec{v} \, \exists u \, \forall x \leq z \, \exists \vec{y} \leq u \, \varphi(x, \vec{y}, \vec{v}),$$

para cada $\varphi(x, \vec{y}, \vec{v}) \in \Sigma_{n+1}$ (véase [13], lema 11.1).

La importancia del fragmento $\mathbf{B}^{\mathbf{s}}\Sigma^-_{n+1}$ reside en que esta teoría, con respecto al cierre bajo cuantificación acotada de las clases de fórmulas Σ^-_{n+1} y Π^-_{n+1}, juega un papel similar al de la teoría $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, para las clases Σ_{n+1} y Π_{n+1}.

Aserto I.4.1.1. *Para todo $n \in \omega$:*

(i) $\varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1} \implies \forall x \leq z\, \varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1}(\mathbf{B^s}\Sigma^-_{n+1})$.

(ii) $\varphi(x) \in \Pi^-_{n+1} \implies \exists x \leq z\, \varphi(x) \in \Pi^-_{n+1}(\mathbf{B^s}\Sigma^-_{n+1})$.

Fragmentos para fórmulas Δ_{n+1}:

En diversos trabajos, se han considerado fragmentos de la Aritmética para fórmulas Δ_{n+1}, esto es, para fórmulas Σ_{n+1} equivalentes a una fórmula Π_{n+1}. Según el tratamiento que demos a los parámetros en las fórmulas Δ_{n+1}, obtenemos distintos esquemas axiomáticos.

Inducción y minimización:

Los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1} son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\Delta_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \theta(x,\vec{v})) \rightarrow \mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \varphi \in \Sigma_{n+1},\, \theta \in \Pi_{n+1}\},\\
\mathbf{L}\Delta_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \theta(x,\vec{v})) \rightarrow \mathbf{L}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \varphi \in \Sigma_{n+1},\, \theta \in \Pi_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

No consideramos los esquemas de colección, o colección fuerte, para fórmulas Δ_{n+1}, pues, de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{B}\Pi_n$ y $\mathbf{S}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{S}\Pi_n$, se sigue que dichos fragmentos son equivalentes, respectivamente, a $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ y a $\mathbf{S}\Sigma_{n+1}$.

Inducción y minimización uniformes:

R. Kaye introduce, en [13], las versiones uniformes de los esquemas de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}: se permite que ocurran parámetros en las fórmulas Δ_{n+1}, pero éstos son tratados de manera uniforme, en el siguiente sentido.

Los fragmentos de inducción y minimización uniformes para fórmulas Δ_{n+1} son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{UI}\Delta_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall\vec{v}\,\forall x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \theta(x,\vec{v})) \rightarrow \forall\vec{v}\,\mathbf{I}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \varphi \in \Sigma_{n+1},\, \theta \in \Pi_{n+1}\},\\
\mathbf{UL}\Delta_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall\vec{v}\,\forall x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \theta(x,\vec{v})) \rightarrow \forall\vec{v}\,\mathbf{L}_{\varphi,x}(\vec{v}) : \varphi \in \Sigma_{n+1},\, \theta \in \Pi_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

No consideramos los esquemas de colección uniforme, o colección fuerte uniforme, para fórmulas Δ_{n+1}, pues dichos fragmentos son equivalentes, respectivamente, a $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ y a $\mathbf{S}\Sigma_{n+1}$.

Inducción y minimización sin parámetros:

Los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1} sin parámetros son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\Delta^-_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \theta(x)) \rightarrow \mathbf{I}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1},\, \theta(x) \in \Pi^-_{n+1}\},\\
\mathbf{L}\Delta^-_{n+1} &= \mathbf{P}^- + \{\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \theta(x)) \rightarrow \mathbf{L}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1},\, \theta(x) \in \Pi^-_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

No consideramos los esquemas de colección, o colección fuerte, para fórmulas Δ_{n+1} sin parámetros, pues dichos fragmentos son equivalentes, respectivamente, a $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ y a $\mathbf{S}\Sigma_{n+1}(\Longleftrightarrow \mathbf{S}\Sigma^-_{n+1})$.

El siguiente teorema resume las propiedades básicas de los fragmentos sin parámetros y los fragmentos para fórmulas Δ_{n+1}.

TEOREMA I.4.2.

(a) Relaciones entre fragmentos.

(a.1) *Para todo $n \in \omega$, se tiene que:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{L}\Pi^-_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{L}\Sigma^-_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{L}\Delta^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Delta^-_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma^-_{n} \\
\Updownarrow & & \not\Updownarrow & & \not\Updownarrow & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \Uparrow^\star \\
\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} & \Longleftrightarrow & \mathbf{UL}\Delta_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{UI}\Delta_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_{n} \\
\underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & & & \underline{\Uparrow} & & \underline{\Uparrow} & & \\
\mathbf{I}\Sigma_{n+1} & \models\!\!\!\Longrightarrow & \mathbf{B}\Sigma_{n+1} & & \Longleftrightarrow & & \mathbf{L}\Delta_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1} & &
\end{array}$$

Donde $\Uparrow^\star = \underline{\Uparrow}$ *si* $n > 0$, *y* $\Uparrow^\star = \Updownarrow$ *si* $n = 0$.

(a.2) *Para* $n > 0$, *se tiene que* $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(b) Propiedades de conservación.

(b.1) $\underline{\mathbf{I}}\Sigma_{n+1}$ *es una extensión* Σ_{n+3}*–conservativa de* $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$.

(b.2) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *es una extensión* Σ_{n+3}*–conservativa de* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$.

(b.3) *($n > 0$)* $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$ *es una extensión* $\bigvee_{n+1}$*–conservativa de* $\mathbf{I}\Sigma^-_n$.

(b.4) *Si* $\varphi \in \Sigma_2$ *es cerrada, entonces:*

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Pi^-_1 \vdash \varphi.$$

(b.5) *Si* $\varphi \in \Pi_2$ *es cerrada, entonces:*

$$\mathbf{I}\Pi^-_1 \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \vdash \varphi.$$

(c) Propiedades de axiomatización.

(c.1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$, $\mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1}$ *son* Π_{n+3}*–axiomatizables.*

(c.2) $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$, $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$, $\mathbf{UI}\Delta_{n+1}$, $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$ *son* $\bigvee_{n+2}$*–axiomatizables.*

(c.3) $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$, $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$, $\mathbf{I}\Delta^-_{n+1}$ *son* Σ_{n+2}*–axiomatizables.*

(d) Teorías finitamente axiomatizables.

(d.1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1} + \mathbf{exp}$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1} + \mathbf{exp}$ *son finitamente axiomatizables.*

(d.2) *Las siguientes teorías no son finitamente axiomatizables:*

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{B^s}\Sigma_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{UI}\Delta_{n+1},\ \ \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-},\ \ \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}.$$

Enumeramos los trabajos donde pueden encontrarse pruebas de los resultados recopilados en el teorema **I.4.2.**

(–) Relaciones entre fragmentos:
Las relaciones entre fragmentos sin parámetros se establecen en [15]. Una prueba de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}$ puede encontrarse en [12]. La equivalencia entre $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$ y $\mathbf{UL}\Delta_{n+1}$ se establece en [13]. Los resultados $\mathbf{I}\Sigma_n^{-} \not\Leftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$, $\mathbf{I}\Sigma_n \not\Leftrightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$, $\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ y, para $n > 0$, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-} \not\Leftrightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$ pueden encontrarse en [7] y [9]. Para una prueba de $\mathbf{I}\Delta_1^{-} \not\Leftrightarrow \mathbf{UI}\Delta_1$, véase [3] (en dicho trabajo, el autor emplea la notación $sI\Delta_1$ para denotar a la teoría $\mathbf{UI}\Delta_1$).

(–) Propiedades de conservación:
Los resultados **(b.1)**, **(b.2)**, **(b.4)** y **(b.5)** se establecen en [13] y en [15].
El resultado **(b.3)** se prueba en [1]. Este resultado no es cierto para $n = 0$. De hecho, de **I.4.2–(b.4)** y de **I.4.3**, se sigue que $\mathbf{I}\Pi_1^{-}$ no es una extensión Π_1–conservativa de $\mathbf{I}\Delta_0$.

(–) Propiedades de axiomatización:
Se obtienen, de manera sencilla, analizando la forma sintáctica de los axiomas de cada una de las teorías anteriores (en algunos casos, es necesario considerar formulaciones equivalentes de dichas teorías).

(–) Teorías finitamente axiomatizables:
Los resultados positivos se obtienen como consecuencia de la existencia de predicados de validez parcial. Para los resultados negativos, véanse [7], [9] y [15].

Como consecuencia del teorema 5.33 del capítulo V de [12] (extensión de los resultados obtenidos por Wilkie y Paris en [24]), se obtiene que:

TEOREMA I.4.3. *Existe $\varphi \in \Pi_1$ cerrada tal que:*

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \vdash \varphi \quad y \quad \mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \varphi.$$

Para completar el diagrama de teorías que aparece en el teorema **I.4.2**, el principal problema pendiente es establecer la relación entre los esquemas de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}, en sus tres versiones.

(–) Conjetura de Paris–Friedman:

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{I}\Delta_{n+1}.$$

(–) Conjetura de Paris–Friedman uniforme:

$$\mathbf{UL}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{UI}\Delta_{n+1}.$$

(–) Conjetura de Paris–Friedman sin parámetros:

$$\mathbf{L}\Delta^-_{n+1} \iff \mathbf{I}\Delta^-_{n+1}.$$

El trabajo [9] está conectado con los problemas anteriores. Allí se prueba que:

(–) $\mathbf{UL}\Delta_{n+1} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}$.

(–) $(n > 0)$ $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$.

Sin embargo, quedan sin resolver las cuestiones:

$$¿\mathbf{I}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{UL}\Delta_{n+1}? \qquad ¿\mathbf{UI}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}?$$

4.B Fragmentos Relativizados

Motivados por el estudio de la relación entre las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$, en [8], [10] y [16], los autores consideran fragmentos de la Aritmética obtenidos al restringir los esquemas axiomáticos clásicos a la clase de fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Dada una teoría consistente, $\mathbf{T}$, definimos:

$$\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \{\varphi(x,\vec{v}) \in \Sigma_{n+1} \,:\, \text{existe } \psi(x,\vec{v}) \in \Pi_{n+1} \text{ tal que } \mathbf{T} \vdash \varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v})\}.$$

Los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) &= \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} \,:\, \varphi(x,v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}, \\ \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) &= \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} \,:\, \varphi(x,v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}. \end{aligned}$$

Para el esquema de colección, se considera el siguiente fragmento:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_{\varphi,x,y}(z,v) \,:\, \varphi(x,v) \in \Pi_n,\ \exists y\, \varphi(x,y,v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})\}.$$

Si $\varphi(x,\vec{v}) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x,\vec{v}) \in \Pi_{n+1}$, entonces la fórmula $\forall \vec{v}, x\,(\varphi(x,\vec{v}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{v}))$ es Π_{n+2}. Por tanto, los fragmentos introducidos, que llamaremos *fragmentos relativizados*, sólo dependen de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

PROPOSICIÓN I.4.4.

(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(b) *Si* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, *entonces* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Para el estudio los fragmentos relativizados, en [10] y [16], se consideran las siguientes propiedades para una teoría, $\mathbf{T}$.

(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–inducción si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–minimización si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(–) $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}–cerrada si la clase $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es cerrada, en $\mathbf{T}$, bajo cuantificación acotada.

PROPOSICIÓN I.4.5.
(a) *Se tiene que:*
  (a.1) *Si* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{UI}\Delta_{n+1}$, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*
  (a.2) *Si* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección.*
  (a.3) $\mathbf{I}\Sigma_n$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección.*
(b) *Se tiene que:*
  (b.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción* $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*
  (b.2) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección* $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene* Δ_{n+1}*–coleción.*
  (b.3) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización* $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización.*
(c) *Son equivalentes:*
  (c.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección.*
  (c.2) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización.*
  (c.3) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción y es* Δ_{n+1}*–cerrada.*

PROPOSICIÓN I.4.6. *Si* $\mathbf{T}$ *es* Δ_{n+1}*–cerrada, entonces:*

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}).$$

5 Extensiones finales y cofinales

Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{P}^-$ tales que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ y $n \in \omega$.

(–) Diremos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura n–elemental de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$, si, para toda fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$ y $\vec{a} \in \mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}).$$

(–) Diremos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura inicial de $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{B}$ es una extensión final de $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{A} \subset^e \mathfrak{B}$, si:

$$\forall b \in \mathfrak{B}\ [\exists a \in \mathfrak{A}\,(b \leq a) \implies b \in \mathfrak{A}].$$

(–) Diremos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura cofinal de $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{B}$ es una extensión cofinal de $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{A} \subset^c \mathfrak{B}$, si:

$$\forall b \in \mathfrak{B}\ \exists a \in \mathfrak{A}\ (b \leq a).$$

(–) El segmento inicial determinado por $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, $\mathcal{S}(\mathfrak{B},\mathfrak{A})$, es la subestructura inicial de $\mathfrak{B}$ cuyo universo es el conjunto $\{b \in \mathfrak{B} : \exists a \in \mathfrak{A}\,(b \leq a)\}$.

TEOREMA I.5.1. **(Teorema de extensiones finales).** *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$ *y* $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ *tales que* $\mathfrak{A} \subset^e \mathfrak{B}$ *propia. Entonces:*

(a) $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

(b) $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+2}$.

TEOREMA I.5.2. **(Teorema de extensiones cofinales).** *Sean* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \mathbf{P}^-$ *tales que* $\mathfrak{A} \subset^c \mathfrak{B}$. *Entonces:*

(a) $\mathfrak{A} \prec_0 \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_n$. $\mathfrak{A} \prec_0 \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$.

TEOREMA I.5.3. **(Splitting en Fragmentos).** *Sean* $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$ *tales que* $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n$. *Entonces:*

(a) $\mathfrak{A} \prec^c_{n+1} \mathcal{S}(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \prec^e_n \mathfrak{B}$.

(b) $\mathcal{S}(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{B} \implies \mathcal{S}(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

El siguiente teorema, debido a K. McAloon, pone de manifiesto que todo modelo numerable, y no estándar, de $\mathbf{I\Delta}_0$ puede obtenerse como una extensión final de un modelo, no estándar, de **PA** (para una prueba del resultado, véase el teorema V–1.2 de [12]).

TEOREMA I.5.4. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_0$ *no estándar y numerable. Existe* $\mathfrak{B} \prec^e_0 \mathfrak{A}$ *no estándar tal que* $\mathfrak{B} \models \mathbf{PA}$.

NOTA I.5.5. **(Problema de la extensión final).**
El teorema de extensiones finales destaca la utilidad del esquema $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$, desde un punto de vista semántico. Además, para $n > 0$, un recíproco de **I.5.1** es cierto: todo modelo numerable de $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ posee una extensión $(n+1)$–elemental, final y propia. Sin embargo, es un importante problema abierto saber si el resultado anterior es también cierto para $n = 0$ (problema de la extensión final):

(EF) (Paris,Wilkie) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_1$ *numerable. Existe* $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta}_0$ *tal que* $\mathfrak{A} \prec^e_0 \mathfrak{B}$ *propia.*

La cuestión anterior está relacionada con el siguiente problema abierto:

(NE) $\mathbf{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1$.

En [25], Wilkie y Paris prueban que, o bien **(EF)** es falso, o bien **(NE)** es falso.

6 Elementos definibles

En este trabajo, para estudiar propiedades de fragmentos de la Aritmética, emplearemos, como metodología básica, estructuras de elementos definibles.
Fijamos aquí las definiciones y enunciamos algunas propiedades de estas estructuras (como referencia, véase [12], capítulo IV; o bien [14], capítulo 10).

Sean $\mathfrak{A}$ una estructura, $X \subseteq \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}$ y $n \in \omega$.

(–) Diremos que a es Σ_n–definible en $\mathfrak{A}$ sobre X si existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p}).$$

(–) $\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) = \{a \in \mathfrak{A} : a \text{ es } \Sigma_n\text{–definible en } \mathfrak{A} \text{ sobre } X\}$.

(–) $\mathfrak{I}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{S}(\mathfrak{A}, \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X))$.

Si $X = \emptyset$, escribiremos $\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{I}_n(\mathfrak{A})$. Si $X = \{\vec{p}\}$, escribiremos $\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, \vec{p})$, $\mathfrak{I}_n(\mathfrak{A}, \vec{p})$.

Proposición I.6.1. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$. Entonces:*

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$.

(b) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec^c_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec^e_n \mathfrak{A}$.

(c) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Sigma_n$.

(d) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \neq \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

Proposición I.6.2. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$. Entonces:*

(a) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

(b) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A}, X)$.

Proposición I.6.3. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $p \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es no estándar. Entonces:*

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *no es cofinal en* $\mathfrak{A}$.

(b) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

(c) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$.

Como consecuencia del primer teorema de Incompletitud de Gödel, se obtienen modelos en los que existen elementos no estándar definibles.

PROPOSICIÓN I.6.4. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_0$ *una teoría recursivamente axiomatizable. Entonces, existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *tal que* $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ *es no estándar.*

En [13], R. Kaye establece el siguiente refinamiento de **I.6.1**.

PROPOSICIÓN I.6.5. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. *Entonces:*

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$.

(b) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_n$.

7 El sistema estándar. Saturación

Teoría de la recursión:

Un aspecto esencial en el estudio de Modelos de la Aritmética es su interrelación con la Teoría de la Recursión. Suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos y resultados básicos de la Teoría de la Recursión. En particular, emplearemos los conceptos habituales en el estudio de recursividad relativa: A recursivo en B, A recursivamente enumerable en B, A $\mathbf{m}$–reducible a B, conjunto $\mathbf{m}$–completo, ... (como referencia general, véase [23]). Destacamos algunos resultados que usaremos en el capítulo **III**.

PROPOSICIÓN I.7.1. *Son equivalentes:*

(a) *A es recursivamente enumerable.*

(b) *A es Σ_1–definible en el modelo estándar.*

PROPOSICIÓN I.7.2.

(a) **(Teorema de la negación)**. *Son equivalentes:*

  (a.1) *A es recursivo en B.*

  (a.2) *A y $\omega - A$ son recursivamente enumerables en B.*

(b) *Si A es $\mathbf{m}$–reducible a B y B es recursivamente enumerable en C, entonces A es recursivamente enumerable en C.*

(c) *Si A es recursivamente enumerable en B y B es recursivo en C, entonces A es recursivamente enumerable en C.*

PROPOSICIÓN I.7.3.

(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ *es Π^0_{n+1}–completo y, por tanto, no es Σ_{n+1}–definible.*

(b) $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N})$ *es Σ^0_{n+1}–completo y, por tanto, no es Π_{n+1}–definible.*

El sistema estándar:

Sean $(x)_y = z$ la fórmula Δ_0, considerada en **3.A**, que define a la función β de Gödel y $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$. Describimos a continuación una forma de codificar conjuntos de números naturales mediante elementos de $\mathfrak{A}$ (como refencia general, véase [14], capítulo 11).

(–) Sea $a \in \mathfrak{A}$. El conjunto codificado por a en $\mathfrak{A}$, C_a, es:

$$C_a = \{n \in \omega : \mathfrak{A} \models (a)_n \neq 0\}.$$

(–) Sea $A \subseteq \omega$. Diremos que A está codificado en $\mathfrak{A}$ si existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $A = C_a$.

(–) El sistema estándar de $\mathfrak{A}$, $SSy(\mathfrak{A})$, es la colección de los conjuntos codificados en $\mathfrak{A}$.

PROPOSICIÓN I.7.4. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_0$ no estándar. Entonces:*

(a) $A \subseteq \omega$ *recursivo* $\Longrightarrow$ $A \in SSy(\mathfrak{A})$.

(b) $\mathfrak{A} \prec_0 \mathfrak{B}$ $\Longrightarrow$ $SSy(\mathfrak{A}) \subseteq SSy(\mathfrak{B})$.

(c) $\mathfrak{A} \subset^e \mathfrak{B}$ $\Longrightarrow$ $SSy(\mathfrak{A}) = SSy(\mathfrak{B})$.

El concepto de *conjunto de Scott* caracteriza la estructura del sistema estándar de un modelo, no estándar, de $\mathbf{I}\Delta_0$.
Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de subconjuntos de ω. Diremos que $\mathcal{A}$ es un conjunto de Scott si se verifican las siguientes condiciones:

(–) si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $\omega - A \in \mathcal{A}$,

(–) si $A \in \mathcal{A}$ y B es recursivo en A, entonces $B \in \mathcal{A}$,

(–) si $T \in \mathcal{A}$ es un árbol binario infinito (codificado adecuadamente como un conjunto de números naturales), entonces existe una rama infinita, R, de T tal que $R \in \mathcal{A}$.

TEOREMA I.7.5. *Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ no estándar. Entonces $SSy(\mathfrak{A})$ es un conjunto de Scott.*

Modelos recursivamente saturados:

Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$, $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{A}$, Γ una clase de fórmulas de $\mathcal{L}$ y $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_r; a_1, \dots, a_k)$ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L} + \{a_1, \dots, a_k\}$.

(–) Diremos que $\mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$ es un tipo sobre $\mathfrak{A}$ si es finitamente satisfactible. Es decir, para cualesquiera $\varphi_1(\vec{x}, \vec{a}), \dots, \varphi_m(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$:

$$\mathfrak{A} \models \exists \vec{x}\, (\varphi_1(\vec{x}, \vec{a}) \wedge \dots \wedge \varphi_m(\vec{x}, \vec{a})).$$

(–) Diremos que $\mathfrak{A}$ realiza a $\mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$ si existen $\vec{b} \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}(\vec{b}; \vec{a})$, esto es, tales que, para toda $\varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{b}, \vec{a})$.

(–) Diremos que $\mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$ es un Γ tipo si:

$$\mathbf{P}(\vec{x}, \vec{v}) = \{\varphi(\vec{x}, \vec{v}) : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathbf{P}(\vec{x}, \vec{a})\} \subseteq \Gamma.$$

Diremos que es un tipo corto si existe j, $1 \leq j \leq k$, tal que la fórmula $x < a_j$ pertenece a $\mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})$.
Diremos que es un tipo recursivo si $\{\ulcorner \varphi(\vec{x}, \vec{v}) \urcorner : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathbf{P}(\vec{x}; \vec{a})\}$ es un conjunto recursivo.

(–) $\mathfrak{A}$ es recursivamente saturado si realiza a todo tipo recursivo sobre $\mathfrak{A}$.

(–) $\mathfrak{A}$ es (corto) Γ–recursivamente saturado si realiza a todo Γ tipo recursivo (corto) sobre $\mathfrak{A}$.

PROPOSICIÓN I.7.6. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$. *Existe* $\mathfrak{B}$ *extensión elemental de* $\mathfrak{A}$ *tal que* $\mathfrak{B}$ *es recursivamente saturado.*

PROPOSICIÓN I.7.7. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ *no estándar. Entonces,* $\mathfrak{A}$ *es corto* Δ_0*–recursivamente saturado.*

Teorema de McAloon:

En [19], K. McAloon prueba el siguiente teorema, que emplearemos para el estudio de extensiones de $\mathbf{I\Delta_{n+1}}$. La prueba de dicho teorema requiere herramientas muy potentes (Teorema de Completitud Aritmetizado, Teorema de Incompletitud de Mostowski–Friedman).

TEOREMA I.7.8. ([19], teorema 6.1) *Sean* $\mathbf{T}$ *una extensión consistente de* $\mathbf{PA}$ *y* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *tal que* $\mathbf{T} \in SSy(\mathfrak{A})$. *Entonces, para cada* $n \in \omega$, *existe* $\mathfrak{B}$ *tal que:*

(a) $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(c) *Existen* $\varphi(x, \vec{v}) \in \Delta_{n+1}(\mathfrak{B})$ *y* $\vec{b} \in \mathfrak{B}$ *tales que:*

$$\omega = \{c \in \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \models \varphi(c, \vec{b})\}.$$

8 Envolturas

En [10] y [16], se introduce el concepto de Π_n*–envoltura fuerte* (una generalización de las envolturas, tal y como fueron introducidas por K. McAloon en [20]), como herramienta para el estudio de la separación de fragmentos relativizados.

Se dice que $\varphi(u, x, y) \in \Sigma_{n+1}^-$ es una Π_n–envoltura de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}_0$ si:

(–) Para todo $k \in \omega$:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists! y\, \varphi(k, x, y),$$
$$\mathbf{T} \vdash x_1 \leq x_2 \wedge \varphi(k, x_1, y_1) \wedge \varphi(k, x_2, y_2) \rightarrow y_1 = y_2.$$

(–) Para todo $k \in \omega$, $\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k+1, x, y) \rightarrow \exists z < y\, \varphi(k, x, y)$.

(–) Para cada $\psi(x,y) \in \Pi_n^-$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$, existe $k \in \omega$ tal que:

$$\mathbf{T}_0 \vdash \varphi(k,x,y) \rightarrow \exists z < y\, \psi(x,z).$$

Consideramos las siguientes fórmulas:

(–) $\mathbb{K}_0(x) = y$ es la fórmula $(x+1)^2 = y$.

(–) Para cada $n \geq 1$, $\mathbb{K}_n(x) = y$ es la fórmula $\mathbb{E}(x,x,y)$, donde $\mathbb{E}_n(u,x,y)$ es la fórmula Π_n considerada en el teorema 5.13 de [10] para obtener una Π_n–envoltura (fuerte) de $\mathbf{I}\Sigma_n$ en $\mathbf{I}\Sigma_n$.

Una fórmula Σ_{n+1} similar a la fórmula $\mathbb{K}_n(x) = y$ anterior ha sido considerada por R. Kaye en [13].

LEMA I.8.1. ([10], 5.13) *Para todo $n \in \omega$:*

(a) $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \forall x\, \exists! y\, (\mathbb{K}_n(x) = y)$.

(b) $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathbb{K}_n(x) = y \rightarrow x^2 < y$.

(c) $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash x_1 < x_2 \wedge \mathbb{K}_n(x_1) = y_1 \wedge \mathbb{K}_n(x_2) = y_2 \rightarrow y_1 \leq y_2$.

La noción de Π_n–envoltura *fuerte* es un reforzamiento del concepto de Π_n–envoltura. La propiedad adicional que se le exige a una tal envoltura es, esencialmente, la recogida en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN I.8.2. ([10], 5.13) *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ y $\mathfrak{B}$ un segmento inicial de $\mathfrak{A}$ cerrado bajo $\mathbb{K}_n(x)$ (es decir, tal que para todo $a,b \in \mathfrak{A}$, si $a \in \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \models \mathbb{K}_n(a) = b$, entonces $b \in \mathfrak{B}$). Entonces, $\mathfrak{B} \prec_n^e \mathfrak{A}$.*

En [8], siguiendo una construcción desarrollada en [13] por R. Kaye para el análisis de fragmentos sin parámetros, se obtiene una Π_n–envoltura fuerte, dada por iteración y diagonalización (al estilo de la construcción de la función de Ackermann).
Como en la definición 3.6 de [8], consideramos las siguientes fórmulas Π_n.

DEFINICIÓN I.8.3.

(a) Para cada $n \in \omega$, escribiremos:

$IT_{\mathbb{K}_n}(z,x,y) \iff$ "z–ésima iteración de la función $\mathbb{K}_n(x) = y$".

$D_n(x,y) \iff IT_{\mathbb{K}_n}(x+2, x+1, y)$.

(b) Para cada $n,m \in \omega$, notaremos:

$$\mathbb{K}_{n,m}(x) = y \iff IT_{\mathbb{K}_n}(m,x,y).$$

LEMA I.8.4. ([8], esencialmente 3.7) *Para todo $n, m \in \omega$, se tiene que:*
(a) $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x\, \exists! y\, (\mathbb{K}_{n,m}(x) = y)$.
(b) $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathbb{K}_{n,m+1}(x) = y \leftrightarrow \exists z \leq y\, (\mathbb{K}_{n,m}(x) = z \wedge \mathbb{K}_n(z) = y)$.
(c) $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash IT_{\mathbb{K}_n}(z_1, x, y_1) \wedge IT_{\mathbb{K}_n}(z_2, x, y_2) \wedge z_1 < z_2 \rightarrow y_1 < y_2$.
(d) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, D_n(x, y)$.

Empleando como herramienta la Π_n–envoltura fuerte dada en [8], se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA I.8.5. ([8], 5.4) *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión consistente de* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. *Entonces,* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *no es finitamente axiomatizable.*

En [13], con el propósito de analizar la clase de las funciones recursivas en $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$, R. Kaye establece el siguiente resultado.

TEOREMA I.8.6. ([13], 9.14) *Sean* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x) \in \Sigma^-_{n+1}$. *Entonces:*

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I}_{\varphi_1} + \ldots + \mathbf{I}_{\varphi_k} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}).$$

9 Reglas de inducción y colección

Un importante campo de estudio en Fragmentos de la Aritmética es el análisis de los principios de inducción o colección, considerados como reglas de inferencia.

Regla de inducción:

$$\mathrm{IR}: \quad \frac{\varphi(0, v),\ \forall x\, (\varphi(x, v) \rightarrow \varphi(x+1, v))}{\forall x\, \varphi(x, v)}$$

Regla de colección:

$$\mathrm{CR}: \quad \frac{\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y, v)}{\forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x, y, v)}$$

Algunos trabajos destacados en esta materia son [1], [2], o [3]. En éste último, para el estudio de la teoría $\mathbf{I\Delta}_1$, L. Beklemishev considera la siguiente versión de la regla de inducción para fórmulas Δ_{n+1}.

Regla de Δ_{n+1}–inducción:

$$\Delta_{n+1}\text{–IR}: \quad \frac{\forall x\,(\varphi(x,v) \leftrightarrow \psi(x,v))}{\mathbf{I}_{\varphi,x}},$$

donde: $\varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x,v) \in \Pi_{n+1}$.

Sea $\mathbf{T}$ una teoría y Γ una clase de fórmulas.

(–) Denotaremos por Γ–IR a la regla de inducción restringida a fórmulas $\varphi(x,v)$ de la clase Γ.

(–) Denotaremos por $\mathbf{T} + \Gamma$–IR al cierre de $\mathbf{T}$ bajo la lógica de primer orden y aplicaciones de Γ–IR.

(–) Denotaremos por $[\mathbf{T}, \Gamma\text{–IR}]$ al cierre de $\mathbf{T}$ bajo la lógica de primer orden y aplicaciones no anidadas de Γ–IR (es decir, sólo podemos aplicar IR si las premisas son teoremas de $\mathbf{T}$).

Análogamente, se definen las teorías:

$$\mathbf{T} + \Gamma\text{–CR}, \quad [\mathbf{T}, \Gamma\text{–CR}], \quad \mathbf{T} + \Delta_{n+1}\text{–IR}, \quad [\mathbf{T}, \Delta_{n+1}\text{–IR}].$$

En los trabajos [8] y [10], se relacionan las reglas de inducción y colección con los fragmentos relativizados. En la sección **IV–5.G** de la presente memoria, obtendremos varios resultados al respecto.

Capítulo II

Elementos definibles

1 Introducción

Las estructuras de elementos definibles fueron introducidas por J. Paris y L. Kirby ([21], 1978) en el estudio de relaciones entre fragmentos de la Aritmética. El resultado central es que dichas estructuras permiten separar los esquemas de inducción y colección (**I.6.1**, **I.6.3**).

(R1) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Sigma}_n$ *y* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

(–) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ *y* $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$.

El uso de estructuras de elementos definibles es también una herramienta fundamental en el estudio de relaciones entre fragmentos sin parámetros desarrollado en [13] y [15]. En estos trabajos, se obtienen condiciones bajo las cuales una estructura es modelo de un fragmento si, y sólo si, lo es de la versión sin parámetros del fragmento (por ejemplo, véanse 1.5 y 1.9 en [15]). Dichas condiciones permiten adaptar el resultado **(R1)** para esquemas sin parámetros (si bien ahora no se permite emplear elementos del modelo como parámetros para obtener elementos definibles).

(R2) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ *tal que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Sigma}_n$ *y* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$.

(–) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ *y* $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$.

Además, es fácil comprobar que, en general, el resultado **(R2)** no es cierto si permitimos el uso de parámetros para definir elementos.

En efecto, sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ y $p \in \mathfrak{A}$ no estándar cualesquiera. Entonces, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ y $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ son modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$ y $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ (ya que ambas teorías son verdaderas y Σ_{n+3}–axiomatizables).

El objetivo del presente capítulo es generalizar los resultados **(R1)** y **(R2)** desde dos puntos de vista:

(G1) Debilitar la hipótesis sobre el modelo *ambiente* $\mathfrak{A}$.

(G2) Caracterizar una clase *especial* de elementos de un modelo, $\mathfrak{A}$, de manera que, cuando $p \in \mathfrak{A}$ es un elemento de dicha clase, podemos asegurar que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-;$$

o bien, que dichas estructuras no son modelos de otros fragmentos relacionados.

Con este propósito, estudiaremos dos clases de elementos de $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A})$ = la clase de los elementos $\underline{\Pi_n\text{–definibles}}$ en $\mathfrak{A}$.

$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A})$ = la clase de los elementos $\underline{\Pi_n\text{–minimales}}$ en $\mathfrak{A}$.

2 Elementos Π_n–definibles y Π_n–minimales

2.A Definiciones y propiedades básicas

DEFINICIÓN II.2.1. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$–estructura, $X \subseteq \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}$ y $n \in \omega$.

(a) Diremos que a es $\underline{\Pi_n\text{-definible}}$ en $\mathfrak{A}$ sobre X, si existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que la fórmula $\varphi(x, \vec{v})$ define al elemento a a partir de la tupla $\vec{p}$; esto es:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p}).$$

(b) Diremos que a es $\underline{\Pi_n\text{–minimal}}$ en $\mathfrak{A}$ sobre X, si existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que a es el menor elemento que satisface $\varphi(x, \vec{p})$ en $\mathfrak{A}$; esto es:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \forall x < a\, \neg\varphi(x, \vec{p}).$$

(Notaremos $\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\,(\varphi(x, \vec{p}))$).

(c) Notaremos:

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) = \{a \in \mathfrak{A} \,:\, \text{a es } \Pi_n\text{–definible en } \mathfrak{A} \text{ sobre } X\}.$$

$$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) = \{a \in \mathfrak{A} \,:\, \text{a es } \Pi_n\text{–minimal en } \mathfrak{A} \text{ sobre } X\}.$$

Si $X = \emptyset$, omitiremos la referencia al conjunto X y escribiremos $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A})$ y $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A})$, respectivamente. Si $X = \{\vec{p}\}$, escribiremos $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, \vec{p})$ y $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, \vec{p})$.

NOTAS II.2.2. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$–estructura y $X \subseteq \mathfrak{A}$.

(a) Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$ (para $n = 0$, no es necesario colección), entonces:

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) \text{ y } \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) \text{ son subestructuras de } \mathfrak{A}.$$

Veámoslo para la clase de los elementos Π_n–definibles (para los elementos Π_n–minimales, la prueba es similar). Sean $a_1, a_2 \in \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$. Veamos que 0, $a_1 + 1$, $a_1 + a_2$, $a_1 \cdot a_2$ están en $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$. Sean $\varphi_1(x_1, \vec{y}), \varphi_2(x_2, \vec{z}) \in \Pi_n$ y $\vec{p}, \vec{q} \in X$ tales que:

(–) $\varphi_1(x_1, \vec{y})$ define a a_1 en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}$.
(–) $\varphi_2(x_2, \vec{z})$ define a a_2 en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{q}$.

Entonces, las siguientes fórmulas $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ definen, respectivamente, a los elementos 0, $a_1 + 1$, $a_1 + a_2$, $a_1 \cdot a_2$ en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}, \vec{q}$ (para $a_1 \cdot a_2$, suponemos que $a_1 \cdot a_2 \neq 0$):

$$x = \mathbf{0}.$$
$$\exists w \leq x\, (\varphi_1(w, \vec{y}) \wedge x = \mathbf{S}(w)).$$
$$\exists x_1, x_2 \leq x\, (\varphi_1(x_1, \vec{y}) \wedge \varphi_2(x_2, \vec{z}) \wedge x = x_1 + x_2).$$
$$\exists x_1, x_2 \leq x\, (\varphi_1(x_1, \vec{y}) \wedge \varphi_2(x_2, \vec{z}) \wedge x = x_1 \cdot x_2).$$

(b) ($n > 0$) Sean $\vec{a} \in \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X)$. Entonces:

$$\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X \cup \{\vec{a}\}) = \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X),$$
$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X \cup \{\vec{a}\}) = \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X),$$
$$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X \cup \{\vec{a}\}) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X).$$

Podemos suponer que la tupla $\vec{a}$ está formada por un único elemento, a.
Veámoslo para la estructura $\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X)$. Sean $b \in \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X \cup \{a\})$, $\vec{p}, \vec{q} \in X$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$ y $\theta(x, y, \vec{z}) \in \Sigma_n$ tales que:

(–) $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$.
(–) $\mathfrak{A} \models \theta(b, a, \vec{q}) \wedge \exists! x\, \theta(x, a, \vec{q})$.

Sea $\delta(x, \vec{v}, \vec{z})$ la siguiente fórmula:

$$\exists y\, (\varphi(y, \vec{v}) \wedge \theta(x, y, \vec{z})).$$

Entonces, $\delta(x, \vec{v}, \vec{z}) \in \Sigma_n$ (pues $n > 0$) y define a b en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}, \vec{q} \in X$.

Veámoslo ahora para $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$ (para $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$, la prueba es similar).
Sean $b \in \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X \cup \{a\})$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$, $\theta(x, y, \vec{z}) \in \Pi_n$ y $\vec{p}, \vec{q} \in X$ tales que:

(–) $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$.
(–) $\mathfrak{A} \models \theta(b, a, \vec{q}) \wedge \exists! x\, \theta(x, a, \vec{q})$.

Sea $\delta(x, \vec{v}, \vec{z})$ la siguiente fórmula:

$$\forall y\, (\varphi(y, \vec{v}) \rightarrow \theta(x, y, \vec{z})).$$

Entonces, $\delta(x, \vec{v}, \vec{z}) \in \Pi_n$ (pues $n > 0$) y define a b en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}, \vec{q} \in X$.

NOTAS II.2.3. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras y $X \subseteq \mathfrak{A}$.

(a) Si $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$, entonces:

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{B}, X) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X),$$
$$\mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X).$$

Veámoslo para $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$ (para $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$, la prueba es similar).
Sea $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X) \cap \mathfrak{A}$. Puesto que $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X)$, existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\mathfrak{B} \models a = (\mu x)\, (\varphi(x, \vec{p}))$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{p}) \\ \mathfrak{B} \models \forall x\, (x < a \rightarrow \neg\varphi(x, \vec{p})) \\ \mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{b}) \wedge \forall x < a\, \neg\varphi(x, \vec{p}).$$

Por tanto, $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$.

(b) Si $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$, entonces:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}, X),$$
$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{B}, X),$$
$$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X).$$

Veámoslo para $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ (para las dos estructuras restantes, la prueba es similar).
($\subseteq$): Sea $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. Veamos que $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}, X)$. Existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_{n+1}$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \\ \mathfrak{A} \models \forall x\, (\varphi(x, \vec{p}) \rightarrow x = a) \\ \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \vec{p}) \rightarrow x = a).$$

Luego, $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}, X)$.

($\supseteq$): Sea $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}, X)$. Veamos que $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. Existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_{n+1}$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{p}) \\ \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{p}).$$

Sea $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p})$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \\ \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{p}).$$

Puesto que $\mathfrak{B} \models \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$, se tiene que $a = b \in \mathfrak{A}$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \varphi(b, \vec{p}) \\ \mathfrak{B} \models \forall x\, (\varphi(x, \vec{p}) \to x = b) \\ \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B},\ b \in \mathfrak{A} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{A} \models \varphi(b, \vec{p}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \vec{p}) \to x = b).$$

Luego, $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$.

(c) $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B} \implies \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X) \cap \mathfrak{A}$.

($\subseteq$): Sea $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$. Veamos que $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X)$. Existen $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\, (\varphi(x, \vec{p}))$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \\ \mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{p}).$$

Supongamos que existe $b \in \mathfrak{B}$ tal que $b < a$ y $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \vec{p})$. De $b < a$, puesto que $\mathfrak{A}$ es una subestructura inicial de $\mathfrak{B}$, se sigue que $b \in \mathfrak{A}$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models b < a \wedge \varphi(b, \vec{p}) \\ \mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B},\ b \in \mathfrak{A} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{A} \models b < a \wedge \varphi(b, \vec{p}).$$

Lo cual está en contradicción con $\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\, (\varphi(x, \vec{p}))$. Por tanto, $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, X)$.

($\supseteq$): Se sigue de **(a)**.

NOTA II.2.4. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$–estructura y $X \subseteq \mathfrak{A}$. Entonces:

$$\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) \ \subseteq\ \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) \ \subseteq\ \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) \ \subseteq_{(1)}\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X).$$

$[\![$(1) para $n > 0$, suponemos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n]\!]$.

($\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$):
Podemos suponer que $n > 0$. Sean $a \in \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X)$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p}).$$

Entonces, $\mathfrak{A} \models \forall z\, (\varphi(z, \vec{p}) \to z = a)$. Por tanto, la Π_n fórmula

$$\forall z\, (\varphi(z, \vec{v}) \to z = x)$$

define al elemento a en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}$.

($\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$):
Sean $a \in \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{p})$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{p}) \wedge \forall x < a\, \neg\varphi(x, \vec{p})$. Por tanto, $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$.

($\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$):
Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$. Sean $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_n$ y $\vec{p} \in X$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\,(\varphi(x,\vec{p})).$$

Sea $\theta(x,\vec{v})$ una fórmula Σ_{n+1} equivalente en $\mathbf{B}\Sigma_n$ (si $n = 0$, no es necesario colección) a la fórmula $\varphi(x,\vec{v}) \wedge \forall z < x\, \neg\varphi(z,\vec{v})$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \theta(a,\vec{p}) \wedge \exists! x\, \theta(x,\vec{p})$.

Además, nótese que las estructuras anteriores coinciden para $n = 0$, esto es:

$$\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_0}(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{M}_0(\mathfrak{A}, X).$$

(Es suficiente tener en cuenta que si $\varphi(x,\vec{v})$ es una fórmula acotada, entonces la fórmula $\varphi(x,\vec{v}) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(y,\vec{v})$ también lo es).

2.B Existencia de elementos Π_n–definibles y Π_n–minimales no estándar

A lo largo del presente trabajo, una técnica fundamental para el estudio de propiedades de fragmentos es considerar estructuras de elementos Σ_{n+1}–definibles a partir de un elemento Π_n–definible, o Π_n–minimal, no estándar.
En primer lugar, establecemos condiciones sobre un modelo, $\mathfrak{A}$, que nos permitan asegurar la existencia, en $\mathfrak{A}$, de elementos no estándar Π_n–definibles, o Π_n–minimales.

Nota II.2.5. En [18], H. Lessan obtiene una condición necesaria, y suficiente en modelos de $\mathbf{I}\Sigma_n^-$, para que existan elementos no estándar Σ_{n+1}–definibles.

Aserto II.2.5.1. ([18], 2.2.15) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. *Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N} \iff \mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Prueba del aserto:
($\Longrightarrow$): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$, de **I.6.5**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Supongamos que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$. Entonces, $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

($\Longleftarrow$): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Entonces, $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Sean $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^-$ una fórmula que define al elemento a en $\mathfrak{A}$. Puesto que $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$, entonces $\mathcal{N} \models \exists x\, \varphi(x)$. Luego, existe $k \in \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(k)$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \varphi(k)$. Por tanto, $k = a \in \mathcal{N}$. □

La clase de los elementos Π_n–definibles está contenida en la clase de los elementos Σ_{n+1}–definibles. En consecuencia, del resultado anterior, se sigue que la condición $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es una condición necesaria para que existan elementos no estándar Π_n–definibles. De hecho, se tiene lo siguiente.

Aserto II.2.5.2. *Supongamos que* $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}.$$

Prueba del aserto:
Sea $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A})$. Entonces, existe $\varphi(x) \in \Pi_n^-$ tal que $\mathfrak{A} \models a = (\mu x)(\varphi(x))$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$, se tiene que $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x) \\ \mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}\end{array}\right\} \begin{array}{ll} \Longrightarrow & \mathcal{N} \models \exists x\, \varphi(x) \\ \Longrightarrow & \text{existe } k \in \omega, \quad \mathcal{N} \models \varphi(k) \\ \Longrightarrow & \text{existe } k \in \omega, \quad \mathfrak{A} \models \varphi(k) \\ \Longrightarrow & \text{existe } k \in \omega, \quad a \leq k \\ \Longrightarrow & a \in \mathcal{N}\end{array}$$

Luego, $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$. Por tanto, también $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$ (pues $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathfrak{A})$). □

En lo que sigue, se probará que, en modelos de $\mathbf{I}\Sigma_n^-$, la condición anterior es también una condición suficiente.
Obtendremos dicho resultado como consecuencia del estudio de la distribución de los elementos Π_n–definibles, y Π_n–minimales, respecto de la clase de los elementos Σ_{n+1}–definibles.

PROPOSICIÓN II.2.6. *Sean $\mathfrak{A}$ una estructura y $X \subseteq \mathfrak{A}$.*

(a) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, entonces:*

$$\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) \text{ es cofinal en } \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X).$$

Además, si $X = \emptyset$, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$.

(b) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$ (para $n = 0$, no es necesario colección), entonces:*

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) \text{ es cofinal en } \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X).$$

Además, si $X = \emptyset$, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^s\Sigma_n^-$.

(c) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, entonces:*

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) \text{ es cofinal en } \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X).$$

Además, si $X = \emptyset$, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Puesto que $\mathfrak{A} \models (z)_0 \leq z$, el resultado se sigue del siguiente aserto.

Aserto II.2.6.1. *Para cada $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\langle a, b\rangle \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$.*

Prueba del aserto:
Sean $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$, $\vec{p} \in X$ y $\varphi(x, y, \vec{v}) \in \Pi_n$ tales que la fórmula $\exists y\, \varphi(x, y, \vec{v})$ define al elemento a en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}$, esto es:

(1) $\mathfrak{A} \models \exists y\, \varphi(a, y, \vec{p})$,

(2) $\mathfrak{A} \models \exists! x\, \exists y\, \varphi(x, y, \vec{p})$.

Por (1), se tiene que $\mathfrak{A} \models \exists u\, \varphi((u)_0, (u)_1, \vec{p})$. Sea $\theta(u, \vec{v}) \in \Pi_n$ la fórmula:

$$\varphi((u)_0, (u)_1, \vec{v}).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_n$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$), existe $c \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models c = (\mu u)\,(\theta(u, \vec{p}))$. Entonces, $c \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \theta(c, \vec{p})$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi((c)_0, (c)_1, \vec{p})$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \exists y\, \varphi((c)_0, y, \vec{p})$. Luego, de (2), se sigue que $a = (c)_0$. □

($\underline{X = \emptyset}$): Nótese que, en este caso, desaparecen los parámetros $\vec{v}$ de la fórmula, $\theta(u, \vec{v})$, considerada en la prueba de **(a)**. Por tanto, para obtener **(a)**, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$.

(**(b)**): Para $n = 0$, el resultado es trivial, pues $\mathcal{M}_0(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_0}(\mathfrak{A}, X)$. Supongamos que $n > 0$. Puesto que $\mathfrak{A} \models (z)_0 \leq z$, el resultado se sigue del siguiente aserto.

Aserto II.2.6.2. *Para cada $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$.*

Prueba del aserto:

Sean $a \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X)$, $\vec{p} \in X$, y $\varphi(x, y, \vec{v}) \in \Sigma_{n-1}$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\,(\forall y\, \varphi(x, y, \vec{p})).$$

Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \forall y\, \varphi(a, y, \vec{p}) \ \wedge\ \forall x < a\, \exists y\, \neg\varphi(x, y, \vec{p}).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_{n-1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n$), se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \forall y\, \varphi(a, y, \vec{p}) \ \wedge\ \exists u \forall x < a\, \exists y \leq u\, \neg\varphi(x, y, \vec{p}).$$

La fórmula $\forall x < z\, \exists y \leq u\, \neg\varphi(x, y, \vec{v})$ es equivalente en $\mathfrak{A}$ a una fórmula Π_{n-1} (si $n = 1$, es inmediato; si $n > 1$, pues $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}$). Luego, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n-1}$ ($\mathbf{B}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{L}\Pi_{n-1}$), se sigue que existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models b = (\mu u)\,(\forall x < a\, \exists y \leq u\, \neg\varphi(x, y, \vec{p})).$$

Informalmente, b es la menor cota de la función $\neg\varphi(x, y, \vec{p})$ cuando $x < a$. Por tanto:

$$\mathfrak{A} \models \forall y\, \varphi(a, y, \vec{p}) \ \wedge\ \forall x < a\, \exists y \leq b\, \neg\varphi(x, y, \vec{p}) \ \wedge\ \exists x < a\, \forall y < b\, \varphi(x, y, \vec{p}).$$

Sea $\theta(u, \vec{v})$ la fórmula:

$$\begin{cases} \forall y\, \varphi((u)_0, y, \vec{v}) \ \wedge\ \forall x < (u)_0\, \exists y \leq (u)_1\, \neg\varphi(x, y, \vec{v}) \wedge \\ \exists x < (u)_0\, \forall y < (u)_1\, \varphi(x, y, \vec{v}) \end{cases}$$

La fórmula anterior es equivalente en $\mathfrak{A}$ a una fórmula Π_n (si $n = 1$, es inmediato; si $n > 1$, pues $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}$). Sea $c \in \mathfrak{A}$ tal que $c = \langle a, b\rangle$. Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \theta(c, \vec{p})$,

(–) $\mathfrak{A} \models \exists! u\, \theta(u, \vec{p})$,

(–) $\theta(u, \vec{v}) \in \Pi_n(\mathfrak{A})$.

En consecuencia, $c \in \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X)$. □

($\underline{X = \emptyset}$): Nótese que, en este caso, desaparecen los parámetros $\vec{v}$ de la fórmula, $\varphi(u, \vec{v})$, considerada en la prueba de **(b)**. En consecuencia, para obtener **(b)**, es suficiente que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^s}\Sigma_n^-$ (recuérdese que $\mathbf{B^s}\Sigma_n^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$).

(**(c)**): Se sigue de **(a)** y **(b)**. ■

NOTA II.2.7. La idea para la prueba de la parte **(b)** de la proposición anterior aparece, de forma implícita, en el resultado 1.13 de [15].

TEOREMA II.2.8. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. *Son equivalentes:*

(a) $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.
(b) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$.
(c) $\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$.
(d) $\mathcal{M}_n(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$, por **II.2.6**, se tiene que:

$$\mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}) \text{ es no estándar} \Longleftrightarrow \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}) \text{ es no estándar} \Longleftrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \text{ es no estándar.}$$

En consecuencia, el teorema de sigue de **II.2.5.1**. ■

NOTA II.2.9. **(Sobre la existencia de elementos Π_{n+1}–definibles)**.
Por el teorema anterior, si $\mathfrak{A}$ es <u>modelo de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$</u>, entonces una condición suficiente para que, en $\mathfrak{A}$, existan elementos <u>no estándar</u> Π_{n+1}–definibles, o bien Π_{n+1}–minimales, es $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Ahora bien,

¿es posible debilitar la hipótesis sobre el modelo *ambiente* $\mathfrak{A}$?

En este sentido, el siguiente problema es relevante para el trabajo que desarrollaremos en el capítulo **III** y, a su vez, para el estudio de las propiedades de la versión sin parámetros del esquema $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (véase **III.3.14**).

(Π-DH) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *tal que* $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \text{ es no estándar.}$$

Nótese que, en **(Π-DH)**, es equivalente considerar que $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Pues, por **II.2.6–(b)**, en modelos de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$.

2.C Distribución de elementos definibles

El estudio de la distribución de los elementos definibles, o minimales, en un modelo es una herramienta fundamental para obtener propiedades sobre dichas clases de elementos. De los resultados obtenidos en la subsección anterior, se sigue que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \quad \subset \quad \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X) \quad \underset{(1)}{\subset^c} \quad \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \quad \underset{(2)}{\subset^c} \quad \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, X).$$

(1) $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$
(2) $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$

En lo que sigue, obtendremos condiciones (sobre el modelo ambiente $\mathfrak{A}$) que, para X un conjunto finito de parámetros en $\mathfrak{A}$, permiten asegurar que:

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, X)$,
(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ es un segmento inicial de $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$,
(–) las extensiones del diagrama anterior son propias.

NOTA II.2.10. En lo que resta del capítulo, enunciaremos algunos resultados para estructuras de elementos definibles, o minimales, a partir de un parámetro, p. Sin embargo, la siguiente observación justifica que dichos resultados son válidos para elementos definibles, o minimales, sobre cualquier conjunto finito, X.

Aserto II.2.10.1. *Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{IE}_0$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$ finito. Existe $p \in \mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}, X)$ tal que:*

$$\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, p), \quad \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_n}(\mathfrak{A}, p), \quad \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}, p).$$

Prueba del aserto:
Sean $q_1, \ldots, q_k \in \mathfrak{A}$ tales que $X = \{q_1, \ldots, q_k\}$. Basta tomar $p = \langle q_1, \ldots, q_k \rangle$.
Veamos, por ejemplo, que $\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, p)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{IE}_0$, en $\mathfrak{A}$ son válidas las propiedades usuales de la función J de Cantor (en particular, existe $\mathbf{t}(\vec{x})$ término de $\mathcal{L}$ que la acota).

($\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, p)$): Sea $a \in \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X)$. Entonces, existe $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$ verificando que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{q}) \wedge \exists! x\, \varphi(x, \vec{q})$. Sea $\theta(x, w) \in \Sigma_n$ la fórmula:

$$\exists \vec{v} \leq w\, (w = \langle \vec{v} \rangle \ \wedge \ \varphi(x, \vec{v})).$$

Entonces, $\theta(x, w)$ define al elemento a en $\mathfrak{A}$ a partir de p.

($\mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, p) \subseteq \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, X)$): Sea $a \in \mathfrak{K}_n(\mathfrak{A}, p)$. Entonces, existe $\varphi(x, w) \in \Sigma_n$ verificando que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, p) \wedge \exists! x\, \varphi(x, p)$. Sea $\theta(x, \vec{v}) \in \Sigma_n$ la fórmula:

$$\exists w \leq \mathbf{t}(\vec{v})\, (w = \langle \vec{v} \rangle \ \wedge \ \varphi(x, w)).$$

Entonces, $\theta(x,\vec{v})$ define al elemento a en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{q}$. □

$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$:

PROPOSICIÓN II.2.11. *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \text{ no es cofinal en } \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p).$$

Además, si no usamos parámetros, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$.

DEMOSTRACIÓN:
Por **I.6.1**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+2} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$. Entonces, por **I.6.3**:

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1} \text{ no estándar} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B},p) \text{ no es cofinal en } \mathfrak{B}.$$

Ahora bien, puesto que $\mathfrak{B} \prec_{n+2} \mathfrak{A}$ y $p \in \mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B},p) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. En consecuencia, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$.

(Sin parámetros): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$, por **I.6.5**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \prec_{n+2} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$. Entonces, por el caso general:

$$\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1} \text{ no estándar} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) \text{ no es cofinal en } \mathfrak{B}.$$

Ahora bien, puesto que $\mathfrak{B} \prec_{n+2} \mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ (**II.2.3–(b)**). En consecuencia, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$. ■

NOTA II.2.12. La condición exigida en **II.2.11** al modelo ambiente, $\mathfrak{A}$, no puede debilitarse a $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. En efecto, se verifica el siguiente resultado.

Aserto II.2.12.1. *Existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ *no estándar tal que:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \textit{ es cofinal en } \mathfrak{A}.$$

Prueba del aserto:
Sean $\mathfrak{B} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B})$ es no estándar (existe por **I.6.4**) y $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B})$. Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ [[**I.6.2**]].

(–) $\mathfrak{A}$ es no estándar.

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A}$.
De **I.6.1**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$. Luego, por **II.2.3–(b)**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B})$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B})$. En consecuencia, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B})$.

De lo anterior, se sigue el aserto. □

Sin embargo, cuando no usamos parámetros, es posible obtener una mejora del resultado **II.2.11** (véase la proposición **II.3.12**).

Nótese también que la proposición **II.2.11** no es cierta, en general, para la clase de los elementos Σ_0–definibles, esto es:

Aserto II.2.12.2. *Existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ *no estándar tal que:*

$$\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) \text{ es cofinal en } \mathfrak{A}.$$

Prueba del aserto:
Sean $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_0$ tal que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B})$ es no estándar (existe por **I.6.4**) y $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B})$. Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ $[\![\mathbf{I.6.1}]\!]$.

(–) $\mathfrak{A}$ es no estándar.

(–) $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A}$.
De **II.2.6**, se sigue que $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}))$. Ahora bien, puesto que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \prec_1 \mathfrak{B}$, entonces, por **II.2.3–(b)**, se tiene que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B})) = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$.

De lo anterior, se sigue el aserto. □

<u>$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es un segmento inicial de $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p)$:</u>

PROPOSICIÓN II.2.13. *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *y* $X \subseteq \mathfrak{A}$. *Entonces:*

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_0^e \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$.

(b) $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$.

(c) *Si* X *es cofinal en* $\mathfrak{A}$, *entonces* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$.

Además, si $X = \emptyset$, *basta con* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^s\Sigma_{n+1}^-$.

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Sabemos que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ es una subestructura de $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$. Veamos pues que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ es un segmento inicial de $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$.
Sean $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ y $b \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$ tales que $b \leq a$. Existe $\varphi(x, \vec{v}) \in \Pi_{n+1}$ que define a b en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p} \in X$. Sea $\theta(x, z, \vec{v})$ la fórmula:

$$\forall y \leq z\, (\varphi(y, \vec{v}) \rightarrow y = x).$$

Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \theta(b, a, \vec{p}) \wedge \exists! x\, \theta(x, a, \vec{p})$ $[\![b \leq a]\!]$,

(–) $\theta(x, z, \vec{v}) \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, entonces $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X \cup \{a\})$. Luego, por **II.2.2–(b)**, se tiene que $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$.

((**b**)): Es consecuencia de (**a**).

((**c**)): Puesto que X es cofinal en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{A}$. Luego, de (**b**), se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X) \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$.

($\underline{X = \emptyset}$): Nótese que, en este caso, desaparecen los parámetros $\vec{v}$ de la fórmula, $\theta(x, z, \vec{v})$, considerada en la prueba de (**a**). En consecuencia, para obtener (**a**), es suficiente que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^s\Sigma^-_{n+1}$. ■

NOTAS II.2.14. El resultado anterior es óptimo respecto al diagrama de estructuras previamente considerado. Es decir, en general, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ no es un segmento inicial de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ y, por tanto, tampoco lo es de $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, X)$.

Aserto II.2.14.1. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $p \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ es no estándar. Entonces:*

$$\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\subseteq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p).$$

Además, si no usamos parámetros, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$.

Prueba del aserto:
Supongamos, por reducción al absurdo, que:

(1) $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \subseteq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$.

Sean $\varphi(x, v) \in \Pi_{n+1}$ y $a, b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \varphi(a, b)$. Se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \varphi(a, b) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a, b).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n+1}$, existe $c \leq a$ tal que $\mathfrak{A} \models c = (\mu x)\,(\varphi(x, b))$. Entonces:

(-) $c \in \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$,
 pues $c \leq a$ y $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$.

(-) $c \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$,
 pues $c \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p, b) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ [[**II.2.2–(b)**]].

Luego, de (1), se sigue que $c \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$. Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, como en la prueba de **II.2.3–(a)**, obtenemos que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \varphi(c, b) \wedge \forall x < c\, \neg\varphi(x, b).$$

Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{L}\Pi_{n+1}$). Contradicción con **I.6.3**.

(Sin parámetros): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$, por **I.6.5**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \prec_{n+2} \mathfrak{A}$ y

$\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$. Por **II.2.3–(b)**, se tiene que $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Luego:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}).$$

Por el caso general para $\mathfrak{B}$, se tiene que $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) \neq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B})$. En consecuencia, $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. □

En modelos de $\mathbf{I}\Delta_0$, en general, la clase de los elementos Σ_0–definibles no es un segmento inicial de la clase de los elementos Σ_1–definibles. Por **II.2.6**, $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$. Luego, en este caso, se tiene que:

$$\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) \subseteq^e \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \iff \mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}).$$

Se verifica el siguiente aserto.

Aserto II.2.14.2. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ *tal que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}).$$

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$, se tiene que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Delta_0$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$. Entonces, $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_0$ no estándar y numerable. Por **I.5.4**, existe $\mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$ no estándar tal que $\mathfrak{C} \models \mathbf{PA}$. De **II.2.3**, se sigue que:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B} & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_0(\mathfrak{C}) = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{C}. \\ \mathfrak{B} \prec_1 \mathfrak{A} & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_0(\mathfrak{B}) = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}. \end{array}$$

En consecuencia, $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$. Por tanto, $\mathfrak{C}$ es un modelo no estándar de **PA** tal que $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{C})$ es cofinal en $\mathfrak{C}$. Lo cual contradice **II.2.11**. □

Subestructuras propias:

PROPOSICIÓN II.2.15. *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \neq \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p)$.
(b) $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \neq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$.
(c) $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \neq \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, p)$.

Además, si no usamos parámetros, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$.

DEMOSTRACIÓN:
((**a**)): De **II.2.6–(c)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p)$ es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, p)$. Por **II.2.11**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}, p)$. Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \neq \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p)$.

((**b**)): Por **II.2.13**, se tiene que $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A},p) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},p) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. De **II.2.14.1**, se sigue que $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \cap \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \neq \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. Luego, $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A},p) \neq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$.

((**c**)): Supongamos que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. Sean $\varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1}$ y $a,b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \varphi(a,b)$. Se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \varphi(a,b) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a,b).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Sigma_{n+1}$, existe $c \leq a$ tal que:

(1) $\mathfrak{A} \models c = (\mu x)\,(\varphi(x,b))$.

Entonces, se tiene que $c \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p,b) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ (la primera igualdad, por **II.2.2–(b)**). Por tanto, existe $\theta(x,w) \in \Pi_{n+1}$ tal que:

(2) $\mathfrak{A} \models c = (\mu x)\,(\theta(x,p))$.

Sea $\delta(x,v,w)$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x,v) \wedge \forall y < x\, \neg\theta(y,w).$$

Entonces:

(–) $\delta(x,v,w) \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$.
(–) $\mathfrak{A} \models \delta(c,b,p) \wedge \exists! x\, \delta(x,b,p)$ [[por (1) y (2)]].

En consecuencia, $c \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p,b) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ (la igualdad, por **II.2.2–(b)**). Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, como en la prueba de **II.2.3–(a)**, obtenemos que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \varphi(c,b) \wedge \forall x < c\, \neg\varphi(x,b).$$

Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1}$). Contradicción con **I.6.3**.

(Sin parámetros): ((**a**), (**b**)): Nótese que, en este caso, para aplicar los resultados **II.2.6–(c)**, **II.2.11**, **II.2.13** y **II.2.14.1**, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$.

((**c**)): Basta razonar como en la parte correspondiente de la prueba de **II.2.14.1**. ■

NOTA II.2.16. En la prueba de la proposición anterior, para aplicar el resultado **II.2.11**, es suficiente que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$ sea no estándar. Por tanto, para obtener **II.2.15–(a)**, basta suponer que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A},p)$ es no estándar. Sin embargo, el siguiente resultado nos dice que la hipótesis $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ no puede, en general, mejorarse sustancialmente.

Aserto II.2.16.1. *Existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar y*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}).$$

Prueba del aserto:
Por **II.2.12.1**, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ no estándar tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A}$. Tomamos $X = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Por **II.2.13–(c)**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X)$. Ahora bien, de **II.2.2–(b)**, se sigue que:

$$X = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) & = & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}), \\ \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, X) & = & \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}). \end{array} \right.$$

Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$. □

Las estructuras de elementos Π_{n+1}–definibles, o Π_{n+1}–minimales, se comportan de manera muy distinta a las estructuras de elementos Σ_{n+1}–definibles. Tanto en relación con los esquemas axiomáticos que son válidos en dichas estructuras, como en relación con las propiedades que se conservan entre la estructura y el modelo ambiente. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Aserto II.2.16.2. *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

(i) $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{IE}_0$ y $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \not\prec_0 \mathfrak{A}$.
(ii) $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{IE}_0$ y $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\prec_0 \mathfrak{A}$.

Prueba del aserto:
(**(i)**): Veamos primero que $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{IE}_0$. Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Entonces, puesto que $\mathbf{IE}_0$ demuestra las propiedades usuales de la función J de Cantor (véase **I–3.A**), de **II.2.6.2**, se sigue que $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$. Lo cual está en contradicción con **II.2.15–(b)**.
Además, se verifica que:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{IE}_0 \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{IE}_0 \\ \mathbf{IE}_0 \text{ es } \Pi_1\text{–axiomatizable} \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}, p) \not\prec_0 \mathfrak{A}.$$

(**(ii)**): Basta razonar como en la prueba de **(i)**, empleando ahora los resultados **II.2.6.1** y **II.2.15–(c)**. □

3 Estructuras de elementos definibles y fragmentos sin parámetros

En esta sección, obtendremos generalizaciones del resultado **(R1)** enunciado en la introducción del presente capítulo. El uso de dichas generalizaciones constituye una herramienta fundamental en el desarrollo del trabajo. Centramos nuestra atención en los dos siguientes refinamientos del resultado **(R1)**

(–) debilitar la hipótesis sobre el modelo ambiente: $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$,

(–) obtener fragmentos $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ más débiles que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ e $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$, respectivamente, tales que:

$$\begin{array}{lcl} p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \text{ (o } p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})) & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{T}_1. \\ p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \text{ (o } p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})) & \Longrightarrow & \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{T}_2. \end{array}$$

El punto de partida se basa en que, bajo ciertas condiciones sobre la distribución de los elementos definibles de una estructura $\mathfrak{A}$, dicha estructura es modelo de un fragmento sin parámetros si, y sólo si, es modelo del correspondiente esquema con parámetros (recordemos que, en general, los fragmentos sin parámetros son teorías más débiles que los correspondientes esquemas con parámetros).

3.A $\mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$

DEFINICIÓN II.3.1. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ teorías. Escribiremos $\mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$ para indicar que:

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_1 \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathbf{T}_2.$$

PROPOSICIÓN II.3.2.

(a) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1})$.

(b) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{I\Delta}^-_{n+1}, \mathbf{I\Delta}_{n+1})$.

(c) $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{I\Sigma}_{n+1})$.

(d) ([15], 1.5) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}, \mathbf{I\Sigma}_{n+1})$.

(e) ([15], 1.13) $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1})$.

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Sea $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$ y las teorías $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ y $\mathbf{L\Delta}_{n+1}$ son equivalentes, basta ver que si $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}$.
Sean $a \in \mathfrak{A}$, $\varphi(x, v) \in \Sigma_{n+1}$ y $\theta(x, v) \in \Pi_{n+1}$ tales que:

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi(x, a) \leftrightarrow \theta(x, a)$,

(2) $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, a)$.

Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, existe una fórmula $\delta(v) \in \Sigma^-_{n+1}$ que define al elemento a en $\mathfrak{A}$. Consideramos las fórmulas:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1(x) & \equiv & \exists v\, (\delta(v) \wedge \varphi(x, v)). \\ \theta_1(x) & \equiv & \forall v\, (\delta(v) \rightarrow \theta(x, v)). \end{array}$$

Entonces, se tiene que:

(–) $\varphi_1(x) \in \Sigma^-_{n+1}$, $\theta_1(x) \in \Pi^-_{n+1}$,

(–) $\mathfrak{A} \models \varphi_1(x) \leftrightarrow \theta_1(x)$ $[\![(1)]\!]$,
(–) $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi_1(x)$ $[\![(2)]\!]$.

Luego, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta^-_{n+1}$, se sigue que existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models b = (\mu x)\,(\varphi_1(x))$. Puesto que $\delta(v)$ define al elemento a, entonces $\mathfrak{A} \models b = (\mu x)\,(\varphi(x, a))$.

((**b**)): La prueba es similar a la de (**a**).

((**c**)): El resultado se sigue de **I.6.5**–(**b**).

((**d**)): Sea $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$, basta demostrar que si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$.
Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. Por inducción sobre $m \in \omega$, veremos que, para todo $m \leq n+1$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_m$.

<u>$m = 0$</u>: Inmediato, pues $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}^-_0 \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0$.

<u>$m \to m+1$</u>: Podemos suponer que $m \leq n$ y, por hipótesis de inducción, que $\mathfrak{A}$ es modelo de $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \mathbf{I\Sigma}_m$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Pi}_{m+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{m+1}$).
Sean $\varphi(x, v) \in \Pi_{m+1}$ y $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$. Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A}$, existe $c \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que $\langle a, b\rangle < c$. Sea $\theta(z) \in \Sigma^-_{n+1}$ una fórmula que define en $\mathfrak{A}$ al elemento c.

Aserto II.3.2.1. $\mathfrak{A} \models \exists x\,(x = 2^c)$.

Prueba del aserto:
Sea $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+1}$ la fórmula:

$$\exists y, z, w\,(\theta(z) \wedge z = w + x \wedge y = 2^w),$$

(esto es, la fórmula $\delta(x)$ expresa la propiedad : *"existe el elemento 2^{c-x}"*).
Es evidente que $\mathfrak{A} \models \delta(c)$. Por tanto, ya que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Sigma}^-_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$), existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models d = (\mu x)\,(\delta(x))$. Veamos que $d = 0$.
En caso contrario, existe e tal que $d = e + 1$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \delta(d)$, existen d_1, d_2 tales que $\mathfrak{A} \models c = d_2 + d \wedge d_1 = 2^{d_2}$. Entonces, se tiene que $\mathfrak{A} \models 2 \cdot d_1 = 2^{(d_2+1)}$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \delta(e)$. Lo anterior está en contradicción con que d es el menor elemento que satisface $\delta(x)$ en $\mathfrak{A}$. Luego, se tiene que $\mathfrak{A} \models \delta(0)$ y, por tanto, $\mathfrak{A} \models \exists x\,(x = 2^c)$. □

Sean $\varphi_1(x, y, v) \in \Sigma_m$ tal que $\varphi(x, v)$ es la fórmula $\forall y\, \varphi_1(x, y, v)$ y $\gamma(w)$ la fórmula siguiente:

$$\exists s, z\,[\theta(z) \wedge \forall u < z\,(\exists y \leq s\, \neg\varphi_1((u)_0, y, v) \vee u \in w)].$$

Por el aserto **II.3.2.1**, existe $e \in \mathfrak{A}$ tal que $e = 2^{c+1} - 1$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \forall x \leq c\,(x \in e)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \gamma(e)$. Además, $\gamma(w)$ es equivalente en $\mathfrak{A}$ a una fórmula Σ^-_{m+1}

(si $m = 0$ es inmediato; si $0 < m \leq n$, puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_m$ ($\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_m$)). Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Sigma}^-_{n+1}$ y $m \leq n$, existe $e_0 \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models e_0 = (\mu w)\,(\gamma(w))$. Entonces:

Aserto II.3.2.2. $\mathfrak{A} \models \forall u < c\,(\varphi((u)_0,(u)_1) \leftrightarrow u \in e_0)$.

Prueba del aserto:
Sea $c' \in \mathfrak{A}$ tal que $c' < c$. Entonces:

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi((c')_0,(c')_1) \rightarrow c' \in e_0$.
Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi((c')_0,(c')_1)$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \forall y\,\varphi_1((c')_0,y,(c')_1)$ y, por tanto, $\mathfrak{A} \models \forall s\,\forall y \leq s\,\varphi_1((c')_0,y,(c')_1)$. Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A} \models \forall s\,\forall y \leq s\,\varphi_1((c')_0,y,(c')_1)\\ \mathfrak{A} \models \gamma(e_0)\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models c' \in e_0.$$

(2) $\mathfrak{A} \models c' \in e_0 \rightarrow \varphi((c')_0,(c')_1)$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathfrak{A} \models c' \in e_0$ y $\mathfrak{A} \not\models \varphi((c')_0,(c')_1)$. Entonces, se tiene que $\mathfrak{A} \models \exists y\,\neg\varphi_1((c')_0,y,(c')_1)$. Luego, existe $e_2 \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_1((c')_0,e_2,(c')_1)$. Sea $e_1 = e_0 - \{c'\}$ (nótese que $e_1 < e_0$). Puesto que $\mathfrak{A} \models \gamma(e_0)$, existe $e' \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \forall u < c\,[\exists y \leq e'\,\neg\,\varphi_1((u)_0,y,(u)_1) \vee u \in e_0)].$$

Sea $e'' = \max(e',e_2)$. Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \forall u < c\,[\exists y \leq e''\,\neg\,\varphi_1((u)_0,y,(u)_1) \vee u \in e_1)].$$

Luego, $\mathfrak{A} \models \gamma(e_1) \wedge e_1 < e_0$. Lo cual contradice que $\mathfrak{A} \models e_0 = (\mu w)\,(\gamma(w))$.

De (1) y (2), se sigue el aserto. □

Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall y\,\varphi_1(a,y,b)$, por el aserto **II.3.2.2**, se tiene que $\mathfrak{A} \models \langle a,b\rangle \in e_0$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \exists x\,(\langle x,b\rangle \in e_0)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}_0$, entonces existe $a' \leq a$ tal que $\mathfrak{A} \models a' = (\mu x)\,(\langle x,b\rangle \in e_0)$. Luego, de nuevo por **II.3.2.2**, $\mathfrak{A} \models a' = (\mu x)\,(\forall y\,\varphi_1(x,y,b))$.

((e)): Sea $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$, basta demostrar que si $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.
Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Pi}_n$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$). Sean $\varphi(x,y,v) \in \Pi_n$ y $a,b \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\,\exists y\,\varphi(x,y,b)$. Podemos suponer que:

(–) $\mathfrak{A} \models \forall x\,\exists y\,\varphi(x,y,b)$,

(en caso contrario, se considera la fórmula $a < x \vee \varphi(x,y,b)$ y se razona análogamente). Puesto que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, existe $\theta(v,u,z) \in \Sigma^-_n$ tal que la Σ_{n+2} fórmula $\exists u\,\forall z\,\theta(v,u,z)$ define al elemento b en $\mathfrak{A}$. Sea $c \in \mathfrak{A}$ tal que la fórmula $\forall z\,\theta(v,c,z)$ define a b en $\mathfrak{A}$. Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \forall v,x\,\exists y\,(\exists u\,\forall z\,\theta(v,u,z) \rightarrow \varphi(x,y,v)).$$

Por tanto:

$$\mathfrak{A} \models \forall v, x\, \exists y\, \forall u\, \exists z\, (\theta(v, u, z) \rightarrow \varphi(x, y, v)).$$

En consecuencia:

$$\mathfrak{A} \models \forall v, x, u\, \exists y, z\, (\theta(v, u, z) \rightarrow \varphi(x, y, v)).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$, de **I.4.1** y lo anterior, se sigue que existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq d\, \exists z\, (\theta(b, c, z) \rightarrow \varphi(x, y, b)).$$

Luego:

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq d\, (\forall z\, \theta(b, c, z) \rightarrow \varphi(x, y, b)).$$

Puesto que la fórmula $\forall z\, \theta(v, c, z)$ define a b en $\mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall z\, \theta(b, c, z)$. Por tanto:

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq d\, \varphi(x, y, b).$$

Lo que prueba (**e**). ■

NOTA II.3.3. La prueba de **II.3.2–(d)** es, esencialmente, la de la proposición 1.5 de [15]. La parte (**e**) aparece, de forma implícita, en la prueba del resultado 1.13 del mismo trabajo.

El siguiente resultado proporciona un método para obtener modelos (no estándar) en los que todos sus elementos son Σ_n–definibles, en el propio modelo.

PROPOSICIÓN II.3.4. *Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$–estructura y $X \subseteq \mathfrak{A}$.*

(**a**) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^{-}$, entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})).$$

(**b**) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, entonces:*

$$X \subseteq \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)).$$

$$\left.\begin{array}{r} X \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{B}^{s}\Sigma_{n+1}^{-} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)).$$

(**c**) *Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^{s}\Sigma_{n+1}^{-}$, entonces:*

$$X \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) = \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)).$$

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^{-}$, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Luego, de **II.2.3–(b)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$.

((**b**)): Sean $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$, $\varphi(x, \vec{v}) \in \Sigma_{n+1}$ y $\vec{p} \in X$ tales que $\varphi(x, \vec{v})$ define al elemento a en $\mathfrak{A}$ a partir de $\vec{p}$ (podemos suponer que la tupla $\vec{p}$ está formada por un solo parámetro, p). Entonces, $\mathfrak{A} \models \varphi(a, p) \wedge \forall x\, (\varphi(x, p) \rightarrow x = a)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Por tanto:

(1) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a,p) \wedge \forall x\,(\varphi(x,p) \rightarrow x = a)$.

Supongamos que $X \subseteq \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$. De $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$, se sigue que existe $\theta(v) \in \Pi^-_{n+1}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \theta(p) \wedge \forall v\,(\theta(v) \rightarrow v = p).$$

Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, entonces:

(2) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \theta(p) \wedge \forall v\,(\theta(v) \rightarrow v = p)$.

Sea $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+2}$ la fórmula $\exists v\,(\theta(v) \wedge \varphi(x,v))$. Por (1) y (2), se tiene que $\delta(x)$ define al elemento a en $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. Por tanto, $a \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}))$.

Supongamos que $X \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{B}^{\mathrm{s}}\Sigma^-_{n+1}$. De $p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$, se sigue que existe $\theta(v) \in \Pi^-_{n+1}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \theta(p) \wedge \forall v < p\, \neg\theta(v).$$

Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, entonces:

(3) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \theta(p) \wedge \forall v < p\, \neg\theta(v)$.

Sea $\delta(x)$ la fórmula:

$$\exists v\,(\theta(v) \wedge \forall w < v\, \neg\theta(w) \wedge \varphi(x,v)).$$

Por (1) y (3), $\delta(x)$ define al elemento a en $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$. Ahora bien, $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+2}(\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\Sigma^-_{n+1})$. Por tanto, $a \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X))$.

((**c**)): Como en (**b**), sean $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$, $\varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1}$ y $p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a,p) \wedge \forall x\,(\varphi(x,p) \rightarrow x = a)$. Puesto que $\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\Sigma^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$. Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \mathbf{I}\Sigma_n$. Por tanto:

(4) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a,p) \wedge \forall x\,(\varphi(x,p) \rightarrow x = a)$.

De $p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$, se sigue que existe $\theta(v) \in \Pi^-_{n+1}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \theta(p) \wedge \forall v < p\, \neg\theta(v).$$

Sea $\theta_1(v,y) \in \Sigma_n$ tal que $\theta(v)$ es la fórmula $\forall y\, \theta_1(v,y)$. Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \theta(p) \wedge \forall v < p\, \exists y\, \neg\theta_1(v,y).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^{\mathrm{s}}\Sigma^-_{n+1}$, entonces:

$$\mathfrak{A} \models \theta(p) \wedge \exists u\, \forall v < p\, \exists y \leq u\, \neg\theta_1(v,y).$$

La fórmula anterior es, o bien la conjunción de una fórmula Π_1 y otra Σ_1, si $n = 0$; o bien la conjunción de una fórmula Π_{n+1} y otra $\Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_n)$, si $n > 0$. Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y, para $n > 0$, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ y $\mathfrak{A}$ son modelos de $\mathbf{B}\Sigma_n$, se tiene que:

(5) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X) \models \theta(p) \wedge \exists u\, \forall v < p\, \exists y \leq u\, \neg\theta_1(v,y)$.

Sea $\delta(x)$ la fórmula:

$$\exists v\,(\theta(v) \wedge \exists u\,\forall w < v\,\exists y \leq u\,\neg\theta_1(w,y) \wedge \varphi(x,v)).$$

Entonces, se tiene que:

(–) $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X))$,
(–) $\delta(x)$ define al elemento a en $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$ (se sigue de (4) y (5)).

Lo que prueba **(c)**. ∎

3.B $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ no es modelo de T

TEOREMA II.3.5. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ y $p \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}.$$

Además, si no usamos parámetros, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_n$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{I\Sigma}_n$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$.
Sea $a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ un elemento no estándar.

<u>$n > 0$</u>:
Consideramos $\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(x,y) \in \Pi^-_n$ un predicado de validez para fórmulas Π_n cuyas propiedades se prueban en $\mathbf{I\Sigma}_1$ (veáse **I.3.5**). Entonces:

Aserto II.3.5.1. $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \forall u \leq a\,\exists w < a\,\exists x \begin{cases} \forall z < x\,\neg\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w,\langle z,p\rangle) \wedge \\ \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w,\langle x,p\rangle) \wedge u = (x)_0 \end{cases}$

Prueba del aserto:
Sea $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ tal que $b \leq a$. Existe $\varphi(x,y,v) \in \Pi_n$ tal que la Σ_{n+1} fórmula $\exists y\,\varphi(x,y,v)$ define al elemento b en $\mathfrak{A}$ a partir de p. Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, la fórmula $\exists y\,\varphi(x,y,v)$ también define al elemento b a partir de p en $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$.
Sea $\theta(z,v) \in \Pi_n$ la fórmula:

$$\varphi((z)_0,(z)_1,v)).$$

De la prueba de **II.2.6–(a)**, se sigue que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \exists x\,(\forall z < x\,\neg\theta(z,p) \wedge \theta(x,p) \wedge b = (x)_0).$$

Sea $k = \ulcorner\theta(z,v)\urcorner$. Entonces:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \exists x\,(\forall z < x\,\neg\mathbf{Sat}_{\Pi_n}(k,\langle z,p\rangle) \wedge \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(k,\langle x,p\rangle) \wedge b = (x)_0).$$

Luego:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \exists w < a\, \exists x \begin{cases} \forall z < x\, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle z,p\rangle) \wedge \\ \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x,p\rangle) \wedge b = (x)_0 \end{cases}$$

Lo que prueba el aserto. □

Puesto que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, por el aserto anterior, existe $c \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ tal que:

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \forall u \leq a\, \exists w < a\, \exists x < c \begin{cases} \forall z < x\, \neg \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle z,p\rangle) \wedge \\ \mathbf{Sat}_{\Pi_n}(w, \langle x,p\rangle) \wedge u = (x)_0 \end{cases}$$

Por tanto, en $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ existe una aplicación $\Sigma_0(\Sigma_n)$ inyectiva de $(< a+1)$ en $(< a)$. Lo cual contradice el principio del palomar (véanse **I.3.2** y **I.3.3**).

<u>$n = 0$</u>:
Sea $d \in \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$ un elemento no estándar. Consideramos $\mathcal{V}_0(v_0,v_1,v_2) \in \Delta_0$ un predicado de validez para fórmulas acotadas (véase **I.3.6**).
Puesto que $\mathcal{M}_0(\mathfrak{A},p)$ es cofinal en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$ (**II.2.6–(a)**), razonando como en el caso $n > 0$, se obtiene que:

$$\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p) \models \forall u \leq a\, \exists w < a\, \exists x \begin{cases} \forall z < x\, \neg \mathcal{V}_0(w, \langle z,p\rangle, 2^{(z+p+2)^d}) \wedge \\ \mathcal{V}_0(w, \langle x,p\rangle, 2^{(x+p+2)^d}) \wedge u = (x)_0 \end{cases}$$

Por tanto, en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$, es válida la siguiente fórmula:

$$\forall u \leq a\, \exists w < a\, \exists x, y \begin{cases} y = 2^{(x+p+2)^d} \wedge \\ \forall z < x\, \exists y_1 \leq y\, [y_1 = 2^{(z+p+2)^d} \wedge \neg \mathcal{V}_0(w, \langle z,p\rangle, y_1)] \\ \wedge\, \mathcal{V}_0(w, \langle x,p\rangle, y) \wedge u = (x)_0 \end{cases}$$

Puesto que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{B}\Sigma_1$, existe $c \in \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$ tal que, en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$, se satiface la siguiente fórmula:

$$\forall u \leq a\, \exists w < a\, \exists x, y < c \begin{cases} y = 2^{(x+p+2)^d} \wedge \\ \forall z < x\, \exists y_1 \leq y\, [y_1 = 2^{(z+p+2)^d} \wedge \neg \mathcal{V}_0(w, \langle z,p\rangle, y_1)] \\ \wedge\, \mathcal{V}_0(w, \langle x,p\rangle, y) \wedge u = (x)_0 \end{cases}$$

Por tanto, en $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$ existe una aplicación Δ_0 inyectiva de $(< a+1)$ en $(< a)$. Esto contradice el principio del palomar para aplicaciones Δ_0 en $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$ (véase **I.3.2**).

<u>(Sin parámetros)</u>: Nótese que, en la prueba anterior, usamos la hipótesis, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, para asegurar que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{I}\Sigma_n$; y para aplicar el resultado **II.2.6**. Por tanto, si no empleamos parámetros de $\mathfrak{A}$, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. ■

NOTA II.3.6. Para $n > 0$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \mathbf{exp}$ y, por tanto, en el resultado anterior, obtenemos que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. Sin embargo, no sabemos si en el caso $n = 0$ podemos eliminar la exponencial. Esto es, queda pendiente el siguiente problema:

(K1H) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma_1}.$$

Ahora bien, el problema anterior está relacionado con el problema **(NE)**. En efecto:

Aserto II.3.6.1. *Supongamos que* $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1}$. *Entonces:*

(i) *Existen* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *no estándar tales que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

(ii) *Existe* $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta_0}$ *tal que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B})$ *es no estándar y* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

Prueba del aserto:

((i)): Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$ y $a \in \mathfrak{A}$ no estándar. Sea $\theta(x) \in \Pi_1^-$ tal que $\neg\mathbf{exp}$ es la fórmula $\exists x\, \theta(x)$. Existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(b)$. Sea $p = \langle a, b \rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \prec_1 \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Delta_0} + \theta(b) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Delta_0} + \exists x\, \theta(x) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B\Sigma_1}. \end{aligned}$$

((ii)): Sea $\varphi \in \Pi_1$ cerrada tal que $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Delta_0} \nvdash \varphi$ (existe por **I.4.3**). Por **I.6.4**, existe $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi$ tal que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{B})$ es no estándar. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \prec_1 \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}) \models \mathbf{B\Sigma_1}. \end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado. □

TEOREMA II.3.7.

(a) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^-$ *tal que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}_{n+1}^- + \mathbf{exp}.$$

(b) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^- + \mathbf{exp}.$$

$$p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^- + \mathbf{exp}.$$

(c) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^-$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar.Entonces:*

$$p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^- + \mathbf{exp}.$$

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^-$, de **II.3.5**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$ y, de **II.3.4–(a)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Luego, por **II.3.2–(a)**, se tiene que:

$$\mathrm{eq}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}), \mathbf{L\Delta}_{n+1}^-, \mathbf{B\Sigma}_{n+1}).$$

Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}_{n+1}^- + \mathbf{exp}$.

((b)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, de **II.3.5**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$.

($p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$): Por **II.3.4–(b)**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. Luego, de **II.3.2–(e)**, se sigue que:

$$\mathrm{eq}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p), \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1}).$$

Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$.

($p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$): Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1}$. Entonces, de **II.3.4–(b)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$, Luego, de **II.3.2–(e)**, se sigue que:

$$\mathrm{eq}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p), \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1}).$$

Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$. Contradicción.

((c)): De **II.3.5**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1}$, de **II.3.4–(c)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Ahora bien, $\mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$; luego, por **II.3.2–(e)**, se tiene que:

$$\mathrm{eq}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p), \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}, \mathbf{B\Sigma}_{n+1}).$$

Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$. ■

COROLARIO II.3.8.

(a) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_n + \mathbf{exp}$ *tal que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}.$$

(b) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}.$$
$$p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1}.$$

(c) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$p \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN:
El corolario se sigue de **II.3.7**. En efecto:

($n > 0$): Puesto que $\mathbf{B^s\Sigma}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_1$, y $\mathbf{I\Sigma}^-_1 \vdash \mathbf{exp}$.

($n = 0$): De $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_0$, se sigue que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p) \prec_1 \mathfrak{A}$. Luego, puesto que $\mathbf{exp}$ es una fórmula Π_2 cerrada y $\mathfrak{A} \models \mathbf{exp}$, entonces $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{exp}$. ■

NOTA II.3.9. El resultado anterior es óptimo, en el siguiente sentido:

(–) no es posible, en general, añadir parámetros en **II.3.8–(a)**,

(–) no es posible, en general, considerar $p \notin \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ en **II.3.8–(b)**.

Aserto II.3.9.1.

(i) *Existen* $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$ *y* $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ *no estándar tales que:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-.$$

(ii) *Existen* $\mathfrak{B} \models \mathbf{PA}$ *y* $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A})$ *no estándar tales que:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-.$$

Prueba del aserto:

((i)): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ (para garantizar que un tal modelo existe, véase **III.1.3.4**). Por **II.2.8**, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \\ \Longrightarrow \ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-. \end{array}$$

((ii)): Sea $\mathfrak{B} \models \mathbf{PA} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+3}}(\mathcal{N})$ (para garantizar que un tal modelo existe, véase **III.1.3.4**). Por **II.2.8**, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \\ \Longrightarrow \ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-. \end{array}$$

Lo que prueba el aserto. □

3.C $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ no es modelo de T

En primer lugar, estableceremos versiones de los resultados **I.6.1** y **I.6.2** para la estructura $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, X)$ cuando $X = \emptyset$ (veremos que, en este caso, podemos debilitar las hipótesis sobre el modelo ambiente $\mathfrak{A}$).

LEMA II.3.10.

(a) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. *Entonces,* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$.

(b) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$.

(b.1) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

(b.2) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A})$.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): ($n = 0$): Puesto que $\mathbf{I}\Delta_0 \iff \mathbf{I}\Delta_0^-$, el resultado se sigue de **I.6.1**.

($n > 0$): Es inmediato que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \subset^c \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_0^e \mathfrak{A}$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$, de **I.6.5**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_n$ (y, por tanto, también $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B}\Sigma_n$). Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_0 \mathfrak{A} \\ \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_0 \mathfrak{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_0 \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}).$$

Luego, del teorema de extensiones cofinales (**I.5.2**), se sigue **(a)**.

((**b**)): ((**b.1**)): Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, el resultado se sigue del teorema Splitting en Fragmentos (**I.5.3**).

((**b.2**)): Sean $\varphi(x,y) \in \Pi_n^-$ tal que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, $a \in \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que $a \leq b$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq b\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y).$$

Sea $\theta(z)$ la fórmula $\exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$. Dicha fórmula es Σ_{n+1} en $\mathbf{B}\Sigma_n$ (para $n=0$, no es necesario colección).
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ son modelos de $\mathbf{I}\Sigma_n$ (**I.6.1**). En consecuencia, para $n > 0$, se tiene que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ y $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$ son modelos de $\mathbf{B}\Sigma_n$. Entonces:

$$\begin{array}{rll}\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq b\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y) & \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \theta(b) & [\![\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}]\!] \\ & \Longrightarrow \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \theta(b) & [\![\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})]\!] \\ & \Longrightarrow \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \exists y\, \varphi(a,y) & [\![a \leq b]\!].\end{array}$$

Luego, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$. ■

PROPOSICIÓN II.3.11. *Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ y $X \subseteq \mathfrak{A}$. Entonces:*
(**a**) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},X),X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$.
(**b**) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},X),X) = \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$.
Además, si $X = \emptyset$, basta con $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((**a**)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$, por **I.6.1**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Sean $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$ y $\mathfrak{C} = \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$. Entonces, por **II.2.3–(b)**, se tiene que:

$$X \subseteq \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{C} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B},X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{C},X).$$
$$X \subseteq \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B},X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X).$$

Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{C},X) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},X)$. Lo que prueba **(a)**.

((**b**)): Se sigue de **(a)**.

($\underline{X = \emptyset}$): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. Por **I.6.5**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y, de **II.3.10–(a)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Basta ahora razonar como en el caso anterior. ■

PROPOSICIÓN II.3.12. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$ *no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \text{ no es cofinal en } \mathfrak{A}.$$

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos lo contrario. Entonces, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \mathcal{S}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}), \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Por tanto, de **II.3.2–(d)**, se sigue que $\mathrm{eq}(\mathfrak{A}, \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}, \mathbf{I\Sigma}_{n+1})$. Luego, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ es no estándar,

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathfrak{A}$.

Lo cual está en contradicción con **I.6.3**. ■

TEOREMA II.3.13.

(a) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}.$$

(b) *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^{-}$ *tal que* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}.$$

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. De **II.3.11**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p), p)$ es cofinal en $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p)$. Entonces:

(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ no estándar,

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{B}, p)$ cofinal en $\mathfrak{B}$.

Lo cual está en contradicción con **I.6.3**.

((b)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^{-}$, de **II.3.11**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}))$ es cofinal en $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Luego, por **II.3.12**, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$. ■

NOTA II.3.14. El teorema anterior es óptimo: en general, no es posible añadir parámetros en **II.3.13–(b)**, ni aún cuando sean elementos Π_{n+1}–definibles.

Aserto II.3.14.1. *Existen* $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$ *y* $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ *no estándar tales que:*

$$\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}.$$

Prueba del aserto:
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ (para garantizar que un tal modelo existe, véase **III.1.3.4**). Por **II.2.8**, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \prec_n \mathfrak{A}\\ \mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}.$$

Lo que prueba el aserto. □

4 Aplicaciones

El estudio de los elementos Π_{n+1}–definibles, y Π_{n+1}–minimales, desarrollado en el presente capítulo, permite simplificar algunas pruebas de resultados sobre fragmentos sin parámetros. Por ejemplo, veamos una prueba de las proposiciones 3.2 y 3.3 de [15], sobre la complejidad axiomática de las teorías $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$ y $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$.

LEMA II.4.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría tal que:*
(i) $\mathcal{N} \models \mathbf{T}$.
(ii) $\mathbf{T}$ *es recursivamente axiomatizable.*
(iii) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$.
Entonces, $\mathbf{T}$ *no es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Entonces, existen teorías $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ tales que:

(–) $\mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$,
(–) $\mathbf{T}_1$ es Σ_{n+2}–axiomatizable,
(–) $\mathbf{T}_2$ es Π_{n+2}–axiomatizable.

Por **(i)**, la teoría $\mathbf{T}_3 \equiv \mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es consistente. Además:

Aserto II.4.1.1. $\mathbf{T}_3 \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

Prueba del aserto:
Supongamos lo contrario. Puesto que $\mathbf{T}$ es $\cup_{n+2}$–axiomatizable y $\mathcal{N} \models \mathbf{T}$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$. En consecuencia, $\mathbf{T}_3 \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Y, por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_3) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.
Ahora bien, $\ulcorner\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})\urcorner$ es un conjunto Π^0_{n+2}–completo. Sin embargo, de **(ii)**, se sigue $\ulcorner\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_3)\urcorner$ es Σ_{n+2}–definible. Contradicción. □

Por el aserto, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_3$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. De **II.2.8**, se sigue que existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$. Entonces:

Aserto II.4.1.2. $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$.

Prueba del aserto:
Por **I.6.1**, se tiene que $\mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Puesto que $\mathbf{T}_1$ es Σ_{n+2}–axiomatizable y $\mathcal{N} \models \mathbf{T}_1$, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}_1$. De $\mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$, se sigue que $\mathfrak{B}$ es modelo de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. En consecuencia, $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1$.
Puesto que $\mathbf{T}_2$ es Π_{n+2}–axiomatizable y $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_2$, de $\mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, se sigue que $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_2$. En consecuencia, $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$. □

Por **(iii)**, del aserto anterior, se sigue que $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$. Puesto que $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$, lo anterior está en contradicción con **II.3.8–(b)**. ■

Como consecuencia inmediata de **II.4.1**, se obtiene que:

PROPOSICIÓN II.4.2.
(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ *no es* U_{n+2}*–axiomatizable.*
(b) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$ *no es* U_{n+2}*–axiomatizable.*

Por último, veamos una prueba del teorema 3.6 de [15], empleando el resultado **II.3.5**.

TEOREMA II.4.3. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente y* Π_{n+1}*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$*. Entonces,* $\mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

DEMOSTRACIÓN:
Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Entonces, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n^-$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y, de **II.2.8**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A} & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T} & [\![\mathfrak{A} \models \mathbf{T},\ \mathbf{T} \text{ es } \Pi_{n+1}\text{–ax.}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- & [\![\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1} & [\![\mathbf{II.3.2\text{–}(d)}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{exp} & \end{array}$$

Lo anterior está en contradicción con **II.3.5–(a)**. ■

Capítulo III

Extensiones de complejidad acotada

1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es el estudio de extensiones de complejidad acotada de Fragmentos de la Aritmética. Para medir la complejidad de una extensión, usaremos dos criterios:

(–) la complejidad sintáctica de sus axiomas (consideramos que los axiomas de una teoría son fórmulas cerradas),

(–) la complejidad, desde el punto de vista de la Teoría de la Recursión, del conjunto de sus axiomas (identificado con un conjunto de números naturales, mediante la codificación de Gödel).

Más concretamente:

Complejidad sintáctica:

DEFINICIÓN III.1.1. Sean $\mathbf{T}$ una teoría consistente y Γ una clase de fórmulas. Diremos que $\mathbf{T}$ posee una Γ–extensión si existe $\mathbf{T}'$, y diremos que $\mathbf{T}'$ es una Γ–extensión de $\mathbf{T}$, tal que:

(–) $\mathbf{T}'$ es consistente,

(–) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{T}$,

(–) $\mathbf{T}'$ está Γ–axiomatizada; es decir, $\mathbf{Ax}(\mathbf{T}) \subseteq \Gamma \cap \mathbf{Sent}$.

Complejidad descriptiva:

DEFINICIÓN III.1.2. Sean $\mathbf{T}$ una teoría y Γ una clase de fórmulas. Diremos que $\mathbf{T}$ es una teoría Γ-definible si existe una fórmula $\varphi(x) \in \Gamma$ que define, en el modelo estándar, el conjunto de los axiomas de $\mathbf{T}$. Es decir, tal que, para toda fórmula cerrada, θ:

$$\theta \in \mathbf{Ax}(\mathbf{T}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\ulcorner\theta\urcorner).$$

Los objetivos principales de este capítulo son:

(a) Determinar el menor nivel de la Jerarquía Aritmética, Γ, tal que $\mathbf{T}$ posee una Γ–extensión.

(b) Investigar, para fragmentos que posean una extensión de complejidad sintáctica menor que la dada por su axiomatización natural, lo *difícil* (desde el punto de vista de la complejidad descriptiva) que es el conjunto de los axiomas de dicha extensión.

NOTA III.1.3. A continuación, se enumeran una serie de resultados elementales sobre extensiones verdaderas que emplearemos a lo largo del presente capítulo.

Aserto III.1.3.1. $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \iff \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N})$.

Prueba del aserto:
($\Longleftarrow$): Inmediato.

($\Longrightarrow$): Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})$ y $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ cerrada tal que $\mathcal{N} \models \varphi$. Sea $\theta(x) \in \Pi_n$ tal que φ es $\exists x\, \theta(x)$. Existe $k \in \omega$ tal que $\mathcal{N} \models \theta(k)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \theta(k)$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \varphi$. □

Aserto III.1.3.2. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría verdadera.*

(i) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Π_n*-axiomatizable, entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$.

(ii) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Σ_{n+1}*-axiomatizable, entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$.

(iii) *Si* $\mathbf{T}$ *es* $\vee_{n+1}$*-axiomatizable, entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$.

Prueba del aserto:
(**(i)**): Inmediato.

(**(ii)**): Supongamos que $\mathbf{T}$ es Σ_{n+1}–axiomatizable. Entonces, $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$. Luego, por **III.1.3.1**, $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$.

(**(iii)**): Supongamos que $\mathbf{T}$ es $\vee_{n+1}$–axiomatizable. Puesto que $\vee_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+2}$, entonces $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$. Luego, por **III.1.3.1**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$. □

Aserto III.1.3.3. *Sea* $\mathbf{T}$ *una extensión consistente de* $\mathbf{P}^-$. *Entonces:*

(i) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$.

(ii) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Π_1*-axiomatizable, entonces* $\mathbf{T}$ *es verdadera.*

Prueba del aserto:
((**i**)): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$. Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{P}^-$, $\mathcal{N} \prec_0 \mathfrak{A}$. Entonces, $\mathcal{N} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$.

((**ii**)): Si $\mathbf{T}$ es Π_1–axiomatizable, entonces $\mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$. Luego, de (**i**), se sigue que $\mathcal{N} \models \mathbf{T}$. □

Aserto III.1.3.4.

(i) *Sea* $\mathbf{T}$ *consistente tal que* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}).$$

(ii) *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Σ_{n+1}*–definible y* $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \mathbf{Sent}$ *tales que* $\mathbf{T}+\Gamma$ *es consistente. Entonces:*

$$\mathbf{T}+\Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Prueba del aserto:
((**i**)): Es evidente que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Veamos la implicación contraria. Sean $\varphi \in \Pi_{n+1}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ y, por tanto, $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi \\ \mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

((**ii**)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T}+\Gamma \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}+\Gamma$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Luego, $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Puesto que $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+1}$, se tiene que $\mathcal{N} \models \Gamma$; y, en consecuencia, Γ es un conjunto de fórmulas verdaderas. Luego, por **III.1.3.1**, $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \Gamma$. Por tanto, de (**i**), se sigue que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}+\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Contradicción (puesto que $\mathbf{T}$ es Σ_{n+1}–definible, el conjunto $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}+\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}))$ es Σ_{n+1}–definible; mientras que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es Π^0_{n+1}–completo). □

2 Existencia de Γ–extensiones: Resultados negativos

2.A Con parámetros

La herramienta principal que emplearemos para obtener propiedades sobre la no existencia de extensiones de complejidad acotada es el teorema **III.2.1**, que generaliza un resultado de D. Leivant.
En [17], Leivant demuestra que la teoría $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ no posee Π_{n+2}–extensiones. En el presente trabajo, obtenemos que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$ (y, en consecuencia, $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$) no posee Σ_{n+3}–extensiones.
La prueba de **III.2.1** consiste en construir, dada una teoría consistente, $\mathbf{T}$, un modelo de una parte finita de $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+3}}(\mathbf{T})$, que no es modelo de $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. Dicho modelo se obtiene a partir de una estructura de elementos Σ_{n+1}–definibles.

TEOREMA III.2.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente y* Σ_{n+3}*–axiomatizable. Entonces:*

$$\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}.$$

DEMOSTRACIÓN:
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$. Puesto que la teoría $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$ es finitamente axiomatizable, existe $\varphi \in \Sigma_{n+3}$ cerrada tal que:

(1) $\varphi \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$.
(2) $\mathbf{T} \vdash \varphi$.

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ no estándar. Entonces, por (1) y (2), se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$.
Sea $\theta(x) \in \Pi^-_{n+2}$ tal que φ es la fórmula $\exists x\, \theta(x)$. De (2), se sigue que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \theta(x)$. Por tanto, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a)$. Sea b un elemento no estándar de $\mathfrak{A}$.

Aserto III.2.1.1. $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \varphi$.

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \theta(a) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \\ \theta(x) \in \Pi_{n+2} \\ a \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \theta(a).$$

Luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \exists x\, \theta(x)$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \varphi$. □

Ahora bien, de (1) y del aserto, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{exp}$. Entonces:

(–) $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n$,
(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b)$ es no estándar, $[\![b \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b)]\!]$

(–) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{exp}$.

Lo anterior está en contradicción con **II.3.5**. ■

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos que las teorías $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ (en este último caso, para $n > 0$) no poseen Σ_{n+3}–extensiones.

TEOREMA III.2.2. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente y* Σ_{n+3}*–axiomatizable. Entonces:*

(a) $\mathbf{T} \not\Rrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$.

(b) $(n > 0)$ $\mathbf{T} \not\Rrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

(c) $(n = 0)$ *Si* $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ *es consistente, entonces* $\mathbf{T} \not\Rrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1$.

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{exp}$, el resultado se sigue de **III.2.1**.

((**b**)): Puesto que, para $n > 0$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \mathbf{exp}$, el resultado se sigue de **III.2.1**.

((**c**)): Supongamos lo contrario. Entonces:

$$\mathbf{T} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1 + \mathbf{exp}.$$

Luego, $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ es una Σ_3–extensión consistente de $\mathbf{B}\Sigma_1 + \mathbf{exp}$. Lo cual está en contradicción con **III.2.1**. ■

NOTA III.2.3. **(Exponenciación y extensión final).**
Puesto que los fragmentos de inducción y colección para fórmulas Σ_{n+1} son teorías Π_{n+3}–axiomatizables, trivialmente se tiene que dichos fragmentos poseen Π_{n+3}–extensiones. Por tanto, el resultado anterior es óptimo, salvo para la teoría $\mathbf{B}\Sigma_1$. Sabemos que dicha teoría no posee Σ_3–extensiones consistentes con $\mathbf{exp}$. Ahora bien, queda pendiente el siguiente problema:

(Σ3EH) $\mathbf{B}\Sigma_1$ no posee Σ_3–extensiones.

Nótese que si **(Σ3EH)** es cierto, entonces el problema **(NE)** tiene respuesta negativa. Más aún, se tiene que:

Aserto III.2.3.1. **(NE)** $\Longrightarrow$ $\mathbf{B}\Sigma_1$ *posee* $\cup_1$*–extensiones.*

Prueba del aserto:
Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1$. Por el teorema **I.4.3**, existe $\varphi \in \Pi_1$ cerrada tal que $\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \varphi$. Entonces:

$$\mathbf{I}\Delta_0 + \neg\varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Delta_0 + \neg\mathbf{exp} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}\Sigma_1.$$

Puesto que $\mathbf{I}\Delta_0$ es Π_1–axiomatizable, de lo anterior, se sigue el aserto. □

NOTA III.2.4. **(Extensiones de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$).**
Los resultados conocidos sobre extensiones de la teoría $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ distan de ser óptimos. En este caso, no podemos emplear la técnica de la prueba del lema **III.2.1**, pues no sabemos, en general, si una estructura de elementos Σ_{n+1}–definibles es o no modelo de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$.
Sin embargo, como fue puesto de manifiesto en los trabajos [9] y [16], los resultados obtenidos por K. McAloon en [19], permiten el estudio de propiedades de axiomatización de la teoría $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$. En [19], el autor obtiene, dados una extensión, $\mathbf{T}$, de $\mathbf{PA}$ y $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ tal que su parte estándar es definible por una fórmula Δ_{n+1} (véase **I.7.8**). Por tanto, $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{I\Delta}_{n+1}$.
Como consecuencia, se obtienen las siguientes propiedades (el siguiente aserto corresponde, esencialmente, con la proposición 4.4 de [9] y el corolario III.31 de [16]; si bien la prueba que aquí presentamos modifica ligeramente la que aparece en dichos trabajos y permite debilitar las hipótesis).

Aserto III.2.4.1.

(i) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ *no posee* Π_{n+2}*–extensiones consistentes con* $\mathbf{PA}$.

(ii) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ *no posee* Σ_{n+3}*–extensiones verdaderas.*

(iii) $(n > 0)$ $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ *no posee* Σ_{n+2}*–extensiones.*

Prueba del aserto:
(**(i)**): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Π_{n+2}–axiomatizable consistente con $\mathbf{PA}$. Sean $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ un nuevos símbolos de constante y $\mathbf{T}'$ la siguiente teoría:

$$\mathbf{T} + \mathbf{PA} + \{m < \mathbf{c} : m \in \omega\} + \{(\mathbf{d})_i \neq 0 : i \in \mathbf{T}\} + \{(\mathbf{d})_i = 0 : i \notin \mathbf{T}\}.$$

Puesto que $\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{PA}$ es una teoría consistente, por un argumento de compacidad, es claro que $\mathbf{T}'$ es consistente. Sean $\mathfrak{A}'$ un modelo de $\mathbf{T}'$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_{|\mathcal{L}}$. Entonces, $\mathfrak{A}$ es no estándar y $\mathbf{T} \in SSy(\mathfrak{A})$. Por tanto, de **I.7.8**, se sigue que existe $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{B} \not\models \mathbf{I\Delta}_{n+1}$. En consecuencia, $\mathbf{T} \not\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}$.

(**(ii)**): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_{n+3}–axiomatizable y verdadera. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}$. Puesto que $\mathbf{T}$ es verdadera, de **III.1.3.2**, se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}$. Por tanto, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}$. Lo cual está en contradicción con (**i**).

(**(iii)**): Puesto que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ es una extensión de $\mathbf{I\Sigma}_n$, entonces el resultado se sigue del teorema **III.2.2**. □

2.B Sin parámetros

NOTA III.2.5. **(Extensiones de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}$, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$, $\mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^{-}$, $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$).**
Las teorías consideradas poseen Π_{n+2}–extensiones. Basta tener en cuenta que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{UI\Delta}_{n+1}.$$

Luego, para comprobar si el resultado es óptimo, nos preguntamos si poseen Σ_{n+2}–extensiones. Para $n > 0$, puesto que

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{UI\Delta}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n},$$

de **III.2.1**, se sigue que:

Aserto III.2.5.1. ($n > 0$) *Ninguna de las siguientes teorías poseen Σ_{n+2}–extensiones:*

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}, \quad \mathbf{B^s\Sigma}_{n+1}^{-}, \quad \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}, \quad \mathbf{UI\Delta}_{n+1}.$$

En el caso $n = 0$, para las teorías $\mathbf{B\Sigma}_1^-$, $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$, $\mathbf{UI\Delta}_1$, probar que no poseen Σ_2–extensiones implica una respuesta negativa al problema **(NE)**. Sin embargo, para los dos primeras teorías, es sencillo demostrar que no poseen Σ_2–extensiones verdaderas.

Aserto III.2.5.2.
(i) $\mathbf{B\Sigma}_1^-$ *(y, por tanto, $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$) no posee Π_1–extensiones.*
(ii) $\mathbf{B\Sigma}_1^-$ *(y, por tanto, $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$) no posee Σ_2–extensiones verdaderas.*

Prueba del aserto:
((i)): Puesto que toda Π_1–extensión de $\mathbf{P}^-$ es una teoría verdadera (**III.1.3.3**), basta probar que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \not\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_1^-$.
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathcal{N})$ (un tal modelo existe por **III.1.3.4**). De **II.2.8**, se sigue que existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_1}(\mathfrak{A})$ no estándar. Entonces:

(-) $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ $[\![\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \prec_1 \mathfrak{A}]\!]$,
(-) $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma}_1^-$ $[\![$**II.3.8–(b)**$]\!]$.

((ii)): Se sigue de **(i)** y **III.1.3.2**. □

No sabemos, en general, si una estructura de elementos Σ_1–definibles es o no modelo de $\mathbf{UI\Delta}_1$. Por tanto, no podemos emplear la técnica de la prueba del aserto anterior para demostrar que $\mathbf{UI\Delta}_1$ no posee Σ_2–extensiones verdaderas, o bien que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \not\Longrightarrow \mathbf{UI\Delta}_1$. Queda pendiente pues el siguiente problema:

(UIH) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \not\Longrightarrow \mathbf{UI\Delta}_1$.

Del aserto **III.2.5.2**, se sigue que $\mathbf{I\Sigma}_1^-$ no posee Σ_2–extensiones verdaderas. Sin embargo, para esta teoría, obtendremos un resultado óptimo: $\mathbf{I\Sigma}_1^-$ no posee Σ_2–extensiones.
Para la prueba de este hecho, necesitamos emplear una técnica distinta de las utilizadas hasta el momento: el análisis de las funciones recursivas en un fragmento (esto es, las funciones recursivas para las cuales dicho fragmento prueba que son funciones totales). Más concretamente, la idea para demostrar que una teoría, $\mathbf{T}$, no posee Γ–extensiones es comprobar que existen funciones recursivas en $\mathbf{T}$ que crecen más rápidamente que cualquier función recursiva en una teoría Γ–axiomatizable.
La siguiente proposición relaciona la complejidad axiomática de un fragmento con el crecimiento de sus funciones recursivas (véase la sección **I–8** para notaciones). Dicha proposición extiende el resultado 2.5.1 de [8] que, a su vez, generaliza una propiedad similar de la teoría $\mathbf{I\Pi}_1^-$, obtenida por T. Bigorajska en [4], mediante una construcción con ultraproductos. La demostración que presentaremos en este trabajo sigue, esencialmente, la prueba habitual del teorema de Parikh.
Como consecuencia inmediata, si $\mathbf{T}$ es una teoría Σ_2–axiomatizable, entonces toda función recursiva en $\mathbf{T}$ está acotada (asintóticamente) por un polinomio. Por tanto, si $\mathbf{T}$ además es verdadera, entonces tiene la misma clase de funciones recursivas que $\mathbf{I\Delta}_0$.

PROPOSICIÓN III.2.6. *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente con* $\mathbf{I\Sigma}_n$ *y* $\varphi(x,y) \in \Sigma_{n+1}$ *tales que:*

$$\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y).$$

(a) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Π_{n+1}*–axiomatizable, entonces existe* $m \in \omega$ *tal que:*

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n \vdash \forall x\, \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, \varphi(x,y).$$

(b) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Σ_{n+2}*–axiomatizable, entonces existe* $m \in \omega$ *tal que:*

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n \vdash \exists z\, \forall x\, (z < x \rightarrow \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, \varphi(x,y)).$$

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario, esto es:

(1) para todo $m \in \omega$, $\quad \mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n \nvdash \forall x\, \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, \varphi(x,y)$.

Sea $\mathbf{c}$ un nuevo símbolo de constante y $\mathbf{T}'$ la siguiente teoría:

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{c} + \{\forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(\mathbf{c})\, \neg\varphi(\mathbf{c},y) : m \in \omega\}.$$

Aserto III.2.6.1. $\mathbf{T}'$ *es una teoría consistente.*

Prueba del aserto:
Sean $\mathbf{T}''$ una parte finita de $\mathbf{T}'$ y m_0 el mayor número natural m tal que $\mathbb{K}_{n,m}$ ocurre en $\mathbf{T}''$ en un axioma del tipo:

$$\forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(\mathbf{c})\, \neg\varphi(\mathbf{c},y).$$

Por (1), se tiene que:

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n \nvdash \forall x\, \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(x)\, \varphi(x,y).$$

Por tanto, existen $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma}_n$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(a)\, \neg\varphi(a,y)$. Ahora bien, por las propiedades de las funciones $\mathbb{K}_{n,m}$ (ver **I.8.4–(b)**), se tiene que:

$$\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathbb{K}_{n,m+1}(x) = y \rightarrow \exists z \leq y\, (\mathbb{K}_{n,m}(x) = z).$$

Luego, para todo $m \leq m_0$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(a)\, \neg\varphi(a,y)$. Sea $\mathfrak{A}'$ la expansión de $\mathfrak{A}$ al lenguaje de $\mathbf{T}'$ dada por $\mathfrak{A}'(\mathbf{c}) = a$. Entonces, $\mathfrak{A}' \models \mathbf{T}''$. □

Por el aserto anterior, existe $\mathfrak{A}'$ un modelo de $\mathbf{T}'$. Sean $a = \mathfrak{A}'(\mathbf{c})$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_{|\mathcal{L}}$. Sean $\mathbf{d}$ y, por cada $e \in \mathfrak{A}$, $\mathbf{c}_e$ nuevos símbolos de constante. Sea $\mathbf{T}_1$ la siguiente teoría:

$$\mathbf{DE}(\mathfrak{A}) + \mathbf{d} + \{\mathbf{c}_e < \mathbf{d} \,:\, e \in \mathfrak{A}\}.$$

Por un argumento de compacidad, $\mathbf{T}_1$ es consistente. Por tanto, existe $\mathfrak{B}' \models \mathbf{T}_1$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'_{|\mathcal{L}}$. Entonces, $a \in \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ propia. Sea:

$$\mathfrak{C} = \{b \in \mathfrak{B} : \text{existe } m \in \omega \text{ tal que } \mathfrak{B} \models b < \mathbb{K}_{n,m}(a)\}.$$

Por definición, $\mathfrak{C}$ es un segmento inicial de $\mathfrak{B}$ cerrado bajo la función $\mathbb{K}_n(x) = y$. Luego, de **I.8.2**, se sigue que $\mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{B}$. Entonces:

Aserto III.2.6.2. $\mathfrak{C} \models \mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$.

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathbf{T}$ es Π_{n+1}–axiomatizable, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \mathbf{T} \\ \mathfrak{C} \prec_n \mathfrak{B} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{C} \models \mathbf{T}.$$

Del teorema de extensiones finales (**I.5.1**), se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \mathbf{I\Sigma}_n \\ \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{B} \text{ propia} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{C} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}.$$

Luego, $\mathfrak{C} \models \mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. □

Del aserto anterior y $\mathbf{T} + \mathbf{B\Sigma}_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$, se sigue que $\mathfrak{C} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$.
En particular, existe $c \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{C} \models \varphi(a,c)$. Puesto que $\mathfrak{C} \prec_n \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models \varphi(a,c)$. Además, puesto que $c \in \mathfrak{C}$, existe $m_1 \in \omega$ tal que $\mathfrak{B} \models c \leq \mathbb{K}_{n,m_1}(a)$. Luego (recordemos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m_1}(a)\, \varphi(a,y).$$

Por tanto:

$$\mathfrak{A}' \models \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m_1}(\mathbf{c})\, \varphi(\mathbf{c},y).$$

Lo cual está en contradicción con $\mathfrak{A}' \models \mathbf{T}'$.

((**b**)): Supongamos, por reducción al absurdo, que:

(2) para todo $m \in \omega$, $\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_n \nvdash \exists z\, \forall x\, (z < x \to \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, \varphi(x,y))$.

Puesto que $\mathbf{T}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, existe $\theta(u) \in \Pi^-_{n+1}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \exists u\, \theta(u)$ y:

(3) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \exists u\, \theta(u) \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$.

Sean $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ nuevos símbolos de constante y $\mathbf{T}'$ la siguiente teoría:

$$\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_n + \theta(\mathbf{d}) + \mathbf{d} < \mathbf{c} + \{\forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(\mathbf{c})\, \neg\varphi(\mathbf{c}, y) : m \in \omega\}.$$

Aserto III.2.6.3. *La teoría $\mathbf{T}'$ es consistente.*

Prueba del aserto:
Sean $\mathbf{T}''$ una parte finita de $\mathbf{T}'$ y m_0 el mayor número natural m tal que $\mathbb{K}_{n,m}$ ocurre en $\mathbf{T}''$ en un axioma del tipo:

$$\forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(\mathbf{c})\, \neg\varphi(\mathbf{c}, y).$$

Por (2), se tiene que:

$$\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_n \nvdash \exists z\, \forall x\, (z < x \to \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(x)\, \varphi(x,y)).$$

En consecuencia, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_n$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \forall z\, \exists x\, (z < x \wedge \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(x)\, \neg\varphi(x,y)).$$

De $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ y $\mathbf{T} \vdash \exists u\, \theta(u)$, se sigue que existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(d)$. Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, (d < x \wedge \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(x)\, \neg\varphi(x,y)).$$

Sea $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models d < a \wedge \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m_0}(a)\, \neg\varphi(a,y)$. Por las propiedades de las funciones $\mathbb{K}_{n,m}$ (ver **I.8.4**), se tiene que:

$$\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathbb{K}_{n,m+1}(x) = y \to \exists z \leq y\, (\mathbb{K}_{n,m}(x) = z).$$

Luego, para todo $m \leq m_0$, $\mathfrak{A} \models \forall y \leq \mathbb{K}_{n,m}(a)\, \neg\varphi(a,y)$. Sea $\mathfrak{A}'$ la expansión de $\mathfrak{A}$ al lenguaje de $\mathbf{T}''$ dada por $\mathfrak{A}'(\mathbf{d}) = d$ y $\mathfrak{A}'(\mathbf{c}) = a$. Entonces, $\mathfrak{A}' \models \mathbf{T}''$. □

Por el aserto anterior, existe $\mathfrak{A}' \models \mathbf{T}'$. Sean a, d las interpretaciones de los símbolos de constante $\mathbf{c}, \mathbf{d}$, respectivamente, y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_{|\mathcal{L}}$. Como en la parte **(a)**, existe $\mathfrak{B}$ tal que $a, d \in \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ propia. Sea:

$$\mathfrak{C} = \{b \in \mathfrak{B} : \text{existe } m \in \omega \text{ tal que } \mathfrak{B} \models b < \mathbb{K}_{n,m}(a)\}.$$

Por definición, $\mathfrak{C}$ es un segmento inicial de $\mathfrak{B}$ cerrado bajo la función $\mathbb{K}_n(x) = y$. Luego, de **I.8.2**, se sigue que $\mathfrak{C} \prec^e_n \mathfrak{B}$. Además, se tiene que.

Aserto III.2.6.4. $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \exists u\, \theta(u)$.

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathfrak{C} \prec^e_n \mathfrak{B}$ propia, del teorema de extensiones finales (**I.5.1**), se sigue que $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. Puesto que $\mathfrak{B} \models d < a$ y $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash x \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)$ (veáse **I.8.1–(b)**), entonces $d \in \mathfrak{C}$. Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B} \models \theta(d) \\ \mathfrak{C} \prec_n \mathfrak{B}\end{array}\right\} \implies \mathfrak{C} \models \theta(d).$$

Por tanto, $\mathfrak{C} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \exists u\, \theta(u)$. □

De (3) y el aserto anterior, se sigue que $\mathfrak{C} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$.
Razonando como en la prueba de **(a)**, se obtiene la contradicción deseada. ■

PROPOSICIÓN III.2.7.

(a) $\mathbf{I\Delta_0 + exp}$ *no posee* Σ_2*–extensiones.*

(b) $\mathbf{I\Sigma_1^-}$ *no posee* Σ_2*–extensiones.*

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_2–axiomatizable. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0 + exp}$. Entonces, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists u\, \mathrm{exp}(x, x, u)$. Luego, de **III.2.6**, se sigue que existe $\mathbf{t}(x)$ término del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \exists z\, \forall x\, (z < x \rightarrow \exists u \leq \mathbf{t}(x)\, \mathrm{exp}(x, x, u))$.

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ no estándar. Por (1), existen $a \in \mathfrak{A}$ no estándar y $m \in \omega$ tales que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x\, (a \leq x \rightarrow \exists u \leq x^m\, \mathrm{exp}(x, x, u)).$$

Por tanto, en $\mathfrak{A}$, se tiene que $a^a < a^m$. Contradicción, pues $\mathbf{I\Delta_0}$ prueba que:

$$y < y' \wedge \mathrm{exp}(x, y, u) \wedge \mathrm{exp}(x, y', u') \rightarrow u < u'.$$

(**(b)**): Puesto que $\mathbf{I\Sigma_1^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0 + exp}$, el resultado se sigue de **(a)**. ■

NOTA III.2.8. **(Extensiones de $\mathbf{I\Pi_{n+1}^-}$, $\mathbf{L\Delta_{n+1}^-}$, $\mathbf{I\Delta_{n+1}^-}$).**
Las teorías consideradas poseen Π_{n+1}–extensiones. Basta tener en cuenta que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}^-}.$$

Luego, para comprobar si el resultado es óptimo, nos preguntamos si poseen Σ_{n+1}–extensiones. Puesto que

$$\mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n^-},$$

por **III.2.5.1**, para $n > 1$, o bien por **III.2.7**, para $n = 1$; se tiene:

Aserto III.2.8.1. $(n > 0)$ *Ninguna de las siguientes teorías posee* Σ_{n+1}*–extensiones:*

$$\mathbf{I\Pi_{n+1}^-},\quad \mathbf{L\Delta_{n+1}^-},\quad \mathbf{I\Delta_{n+1}^-}.$$

Para el caso $n = 0$, es inmediato que ninguna de las teorías anteriores posee Σ_1–extensiones verdaderas (recordemos que $\mathbf{P^-} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathcal{N})$). Además, se tiene que:

Aserto III.2.8.2.
(i) $\mathbf{L\Delta_1^-}$ *no posee* Σ_1*–extensiones consistentes con* **exp**.
(ii) $\mathbf{I\Pi_1^-}$ *no posee* Σ_1*–extensiones.*

Prueba del aserto:
((i)): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_1–axiomatizable tal que $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ es consistente. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_1^-}$. Por **III.1.3.4**, existe $\mathfrak{A}$ modelo de $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. Entonces:

(–) $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ es no estándar [[**II.2.8**]],
(–) $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{L\Delta_1^-}$ (puesto que $\mathbf{T}$ es Σ_1–axiomatizable, de $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$, se sigue que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T}$).

Lo cual está en contradicción con **II.3.8–(a)**.

((ii)): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Σ_1–axiomatizable. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi_1^-}$. Por **III.1.3.4**, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. Entonces:

(–) $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ es no estándar [[**II.2.8**]],
(–) $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Pi_1^-}$ (puesto que $\mathbf{T}$ es Σ_1–axiomatizable, de $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{I}_1(\mathfrak{A})$, se sigue que $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T}$).

Lo cual está en contradicción con **II.3.13–(b)**. □

Nota III.2.9. (Σ_1**–extensiones**).
No sabemos si en **III.2.8.2–(i)** es posible eliminar la función exponencial. Ahora bien, observemos que, si **(NE)** es cierto, entonces, de la prueba de **III.2.3.1**, se sigue que existe $\theta \in \Sigma_1$ cerrada tal que $\mathbf{I\Delta_0} + \theta \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_1^-}$.
En consecuencia, si $\mathbf{I\Delta_0}$ posee Σ_1–extensiones (consistentes con la fórmula θ anterior), y **(NE)** es cierto, entonces $\mathbf{I\Delta_1^-}$ y $\mathbf{L\Delta_1^-}$ también poseen Σ_1–extensiones. Destacamos pues el siguiente problema:

(Σ1EH) $\mathbf{I\Delta_0}$ *no posee* Σ_1*–extensiones.*

3 Complejidad descriptiva: teorías de tipo $k \to m$

Definición III.3.1. Sean $\mathbf{T}$ una teoría consistente y $k, m \in \omega$. Diremos que $\mathbf{T}$ es de tipo $k \to m$ si:

(a) $\mathbf{T}$ posee Π_k–extensiones, y
(b) para toda Π_k–extensión de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}') = \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$.

NOTA III.3.2. Sean $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ teorías consistentes y $k, k', m, m' \in \omega$.

(–) Si $m' < m$, entonces:

$$\mathbf{T} \text{ es de tipo } k \to m \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T} \text{ es de tipo } k \to m'.$$

(–) Si $k' < k$ y $\mathbf{T}$ posee una $\Pi_{k'}$–extensión, entonces:

$$\mathbf{T} \text{ es de tipo } k \to m \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T} \text{ es de tipo } k' \to m.$$

(–) Si $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{T}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{T} \text{ es de tipo } k \to m \\ \mathbf{T}' \text{ posee una } \Pi_k\text{–extensión} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}' \text{ es de tipo } k \to m.$$

Para $m = 0$, la condición **(b)** de la definición **III.3.1** no añade ninguna información y el concepto resulta equivalente a poseer una Π_k–extensión. En efecto, puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_0}(\mathcal{N}) = \mathbf{Th}_{\Pi_0}(\mathbf{P}^-)$, entonces:

Aserto III.3.2.1. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{P}^-$. *Son equivalentes:*

(i) $\mathbf{T}$ *es de tipo* $k \to 0$.

(ii) $\mathbf{T}$ *posee una* Π_k*–extensión.*

Sin embargo, para $m \geq 1$, del hecho de que una teoría sea de tipo $k \to m$, se deducen propiedades de axiomatización de la teoría.

Aserto III.3.2.2. *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente y* $k, m \geq 1$.

(i) *Si* $\mathbf{T}$ *es de tipo* $m \to m$, *entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ *es (salvo equivalencia) la única teoría* Π_m*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{T}$.

(ii) *Si* $\mathbf{T}$ *es de tipo* $k \to m$, *entonces:*

(ii.1) $\mathbf{T}$ *no posee* Π_k*–extensiones que sean* Σ_m*–definibles.*

(ii.2) $\mathbf{T}$ *no es finitamente axiomatizable.*

Prueba del aserto:

((**i**)): Sea $\mathbf{T}'$ una teoría Π_m–axiomatizable que extiende a $\mathbf{T}$. Puesto que $\mathbf{T}$ es de tipo $m \to m$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}') = \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$. Ahora bien, $\mathbf{T}'$ es Π_m–axiomatizable, luego $\mathbf{T}' \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$.

((**ii**)): ((**ii.1**)): Sea $\mathbf{T}'$ una teoría Π_k–axiomatizable que extiende a $\mathbf{T}$. Puesto que $\mathbf{T}$ es de tipo $k \to m$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N}) = \mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$. Supongamos que $\mathbf{T}'$ es Σ_m–definible. Entonces, $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$ es Σ_m–definible. En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ también lo es. Contradicción.

((**ii.2**)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T}$ es finitamente axiomatizable. Sea $\mathbf{T}'$ una Π_k–extensión de $\mathbf{T}$. Entonces, existe $\mathbf{T}''$ una parte finita de $\mathbf{T}'$ tal que $\mathbf{T}'' \Longrightarrow \mathbf{T}$.

Ahora bien, puesto que $\mathbf{T}''$ es un conjunto finito de axiomas, $\mathbf{T}''$ es recursivo. Luego, $\mathbf{T}''$ es una Π_k–extensión de $\mathbf{T}$ que es Σ_1–definible. Lo que contradice **(ii.1)**. □

Nótese que, para la prueba del apartado **(ii)** de la proposición anterior, no es esencial que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T})$ coincida con $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$. En efecto, para obtener las propiedades **(ii.1)** y **(ii.2)** es suficiente que el conjunto $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T})$ sea *difícil* de describir. Más concretamente, que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ sea recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T})$. Este hecho sugiere la siguiente definición, que debilita la condición de ser de tipo $k \to m$, pero permite demostrar las propiedades de la parte **(ii)** de **III.3.2.2**.

DEFINICIÓN III.3.3. Sean $\mathbf{T}$ una teoría consistente y $k, m \geq 1$. Diremos que $\mathbf{T}$ es de tipo $k \to^w m$ si:

(a) $\mathbf{T}$ posee una Π_k–extensión, y

(b) para toda Π_k–extensión de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$.

NOTA III.3.4. La definición anterior resulta equivalente si, en lugar de **(b)**, consideramos la siguiente condición:

(b)* para toda Π_k–extensión de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable en $\mathbf{Th}_{\Pi_m}(\mathbf{T}')$.

En efecto, la equivalencia entre las dos definiciones propuestas se sigue de la siguiente propiedad.

Aserto III.3.4.1. *Sean $A \subseteq \omega$ y $n \geq 1$. Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \text{ recursivamente enumerable en } A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \text{ recursivo en } A.$$

Prueba del aserto:

Dados $B, C \subseteq \omega$, escribiremos (como es usual) $B \in \Sigma_1^0(C)$, $B \in \Delta_1^0(A)$, $B \leq_{\mathbf{m}} C$ para indicar, respectivamente, que B es recursivamente enumerable en C, B es recursivo en A, y B es m–reducible a C. Sea $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})^c$ el complementario, en ω, de $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})$. Entonces, para toda $\varphi \in \Pi_n$ cerrada, se tiene que:

$$\begin{aligned} \ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})^c &\iff \ulcorner\varphi\urcorner \notin \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \\ &\iff \mathcal{N} \not\models \varphi \\ &\iff \mathcal{N} \models \neg\varphi \\ &\iff \ulcorner\neg\varphi\urcorner \in \mathbf{Th}_{\Sigma_n}(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

En consecuencia,

(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})^c$ y $\mathbf{Th}_{\Sigma_n}(\mathcal{N})$ son conjuntos Turing–equivalentes.

Probaremos el aserto por inducción sobre $n \geq 1$ (véase **I–7** para resultados preliminares).

<u>$n = 1$</u>: Supongamos que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A)$. Por el teorema de la negación, basta probar que $\mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A)$. Ahora bien, $\mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable (de hecho, es un conjunto Turing–equivalente al problema de parada). En particular, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A)$.

<u>$n \to n+1$</u>: Supongamos que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A)$. Por el teorema de la negación, basta probar que $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A)$. Ahora bien, puesto que $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N})$ es Σ_{n+1}–definible y $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})$ es Π_n^0–completo, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}))$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \leq_{\mathbf{m}} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \\ \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A).$$

Luego, por hipótesis de inducción, $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \in \Delta_1^0(A)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(\mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N})) \\ \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \in \Delta_1^0(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathcal{N}) \in \Sigma_1^0(A).$$

Lo que prueba el aserto. □

3.A Complejidad descriptiva de Π_{n+2}–extensiones de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$, $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$

En [9], los autores estudian propiedades de axiomatización de los fragmentos de inducción y minimización para fórmulas Δ_{n+1}^-, y obtienen los siguientes resultados.

TEOREMA III.3.5.

(a) $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$ *es de tipo* $n+2 \to n+1$.

(b) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^- + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $n+2 \to n+1$.

DEMOSTRACIÓN:
Como veremos, el teorema se sigue del siguiente aserto.

Aserto III.3.5.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente tal que:*

(i) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$.

(ii) *Si* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, *entonces* $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{exp}$.

Entonces, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

Prueba del aserto:
Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Entonces, por **III.1.3.4–(i)**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n^-$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^-$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ y, de **II.2.8**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Además, por **(ii)**, se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{exp}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp} \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-} + \mathbf{exp} \qquad [\![(\mathrm{i})]\!].\end{aligned}$$

Lo anterior está en contradicción con **II.3.7–(a)**. □

((**a**)): Sea **T** una Π_{n+2}–extensión de $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$. Entonces:

(–) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$,

(–) Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{exp}$.
En efecto, sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T} \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-} \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Pi}_{n+1} \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{exp}\end{aligned}$$

Luego, por el aserto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

((**b**)): Sea **T** una Π_{n+2}–extensión de $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-} + \mathbf{exp}$. Es evidente que:

(–) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$.

(–) Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{exp}$.

Luego, por el aserto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. ■

NOTA III.3.6. El resultado anterior es óptimo para la teoría $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$, en efecto:

(–) $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$ no es de tipo $n+2 \to n+2$,
(pues $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$).

(–) $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$ no es de tipo $n+3 \to n+1$,
(pues $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$ posee Π_{n+3}–extensiones finitamente axiomatizables: $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$).

Por el mismo argumento, el resultado anterior es óptimo para $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$, cuando $n > 0$ (nótese que, en este caso, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-} \vdash \mathbf{exp}$). Ahora bien, queda pendiente averiguar si, en el caso $n = 0$, se puede eliminar la exponencial. Es decir:

¿Es $\mathbf{L\Delta}_1^{-}$ de tipo $2 \to 1$?

Una respuesta afirmativa a la pregunta anterior implica que (**NE**) es falso. En efecto, en **III.2.3.1**, hemos probado que si $\mathbf{I\Delta}_0 + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_1$, entonces $\mathbf{B\Sigma}_1$ (y, por tanto, $\mathbf{L\Delta}_1^{-}$) posee $\cup_1$–extensiones que son Σ_1–definibles.
Sin embargo, abordamos una versión más débil del problema:

¿Es $\mathbf{L\Delta}_1^{-}$ de tipo $1 \to 1$?

A continuación, a partir de **III.3.5–(b)**, obtendremos una respuesta parcial a la pregunta: $\mathbf{L\Delta}_1^{-}$ es de tipo $1 \to^{w} 1$. Primero, destacamos la siguiente propiedad del sistema estándar.

Aserto III.3.6.1. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) + \mathbf{exp}$ *no estándar. Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A}).$$

Prueba del aserto:
Sea $a \in \mathfrak{A}$ un elemento no estándar de $\mathfrak{A}$.

($\star$) *Sea* $\varphi(y) \in \Delta_0^-$. *Entonces:*

$$\mathcal{N} \models \forall y\, \varphi(y) \iff \mathfrak{A} \models \forall y < a\, \varphi(y).$$

Prueba de ($\star$):
($\Longrightarrow$): Supongamos que $\mathcal{N} \models \forall y\, \varphi(y)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall y\, \varphi(y)$. En particular, $\mathfrak{A} \models \forall y < a\, \varphi(y)$.

($\Longleftarrow$): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \forall y < a\, \varphi(y)$. Puesto que a es no estándar, para todo $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \varphi(n)$. De $\mathcal{N} \prec_0 \mathfrak{A}$, se sigue que, para todo $n \in \omega$, $\mathcal{N} \models \varphi(n)$. Luego, $\mathcal{N} \models \forall y\, \varphi(y)$.
Lo que completa la prueba de ($\star$).

Consideramos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\mathbf{P}(x; a) = \{x < a\} \cup \{(x)_n \neq 0 \leftrightarrow \forall y < a\, \varphi(y) : \varphi(y) \in \Delta_0,\, n = \ulcorner \forall y\, \varphi(y) \urcorner\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathbf{P}(x; a)$ es un Δ_0–tipo recursivo corto sobre $\mathfrak{A}$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}$ no estándar, $\mathfrak{A}$ es corto Δ_0–recursivamente saturado (**I.7.7**). Por tanto, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}(b; a)$. Entonces, de ($\star$), se sigue que el conjunto codificado por b en $\mathfrak{A}$ es $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. □

Empleando el teorema **I.5.4** se obtiene que, en el aserto anterior, podemos eliminar la hipótesis $\mathfrak{A} \models \mathbf{exp}$. Es decir:

Aserto III.3.6.2. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ *no estándar. Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A}).$$

Prueba del aserto:
Sea $a \in \mathfrak{A}$ no estándar. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, a) \prec_1 \mathfrak{A}$. Entonces:

(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Delta_0$ no estándar y numerable,
(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$.

Por **I.5.4**, existe $\mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$ no estándar tal que $\mathfrak{C} \models \mathbf{PA}$. Entonces, $\mathfrak{C} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) + \mathbf{exp}$ no estándar. Luego, de **III.3.6.1**, se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{C})$. Ahora bien:

$$\mathfrak{C} \prec_0 \mathfrak{B} \prec_0 \mathfrak{A} \Longrightarrow SSy(\mathfrak{C}) \subseteq SSy(\mathfrak{B}) \subseteq SSy(\mathfrak{A}).$$

En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A})$. □

TEOREMA III.3.7.
(a) *Sea* $\mathbf{T}$ *una* Π_1*–extensión de* $\mathbf{L\Delta_1^-}$. *Entonces:*
(a.1) $\mathbf{T}$ *es verdadera.*
(a.2) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ *es recursivo en* $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$.
(a.3) Para todo $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ no estándar, se tiene que:
(a.3.i) $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A})$.
(a.3.ii) *Si* $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$, *entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}))$.
(b) $\mathbf{L\Delta_1^-}$ *es de tipo* $1 \rightarrow^w 1$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): ((a.1)): Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{P}^-$, (a.1) se sigue de **III.1.3.3**.

((a.2)): Por (a.1), $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ es consistente. Luego, $\mathbf{T} + \mathbf{exp}$ es una Π_2–extensión de $\mathbf{L\Delta_1^-} + \mathbf{exp}$. Por **III.3.5–(b)**, $\mathbf{L\Delta_1^-} + \mathbf{exp}$ es de tipo $2 \rightarrow 1$. Por tanto:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T} + \mathbf{exp}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp}) = \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}).$$

En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable en $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp}$. Ahora bien, los conjuntos $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp}$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$ son Turing–equivalentes, luego $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable en $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$. Por tanto, de **III.3.4.1**, se sigue (a.2).

((a.3)): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ no estándar.
((a.3.i)): Sea $a \in \mathfrak{A}$ no estándar. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}, a) \prec_1 \mathfrak{A}$. Entonces:

(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta_0}$ no estándar y numerable,
(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$.

Por **I.5.4**, existe $\mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$ no estándar tal que $\mathfrak{C} \models \mathbf{PA}$. Luego:

(–) $\mathfrak{C} \models \mathbf{T} + \mathbf{exp}$.

Puesto que $\mathbf{L\Delta_1^-} + \mathbf{exp}$ es de tipo $2 \rightarrow 1$, entonces $\mathbf{T} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. En consecuencia, $\mathfrak{C} \models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) + \mathbf{exp}$ no estándar. Luego, de **III.3.6.1**, se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{C})$. Ahora bien:

$$\mathfrak{C} \prec_0 \mathfrak{B} \prec_0 \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad SSy(\mathfrak{C}) \subseteq SSy(\mathfrak{B}) \subseteq SSy(\mathfrak{A}).$$

Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A})$.

((a.3.ii)): Supongamos que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. Entonces, $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ es no estándar. Además, puesto que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \prec_1 \mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T}$. Luego, de (a.3.i), se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}))$.

((b)): Se sigue de (a.2). ■

NOTA III.3.8. De **III.3.7–(a.3)**, se sigue que una condición suficiente para probar que la teoría $\mathbf{L\Delta_1^-}$ es de tipo $1 \to 1$ es:

(OTH) *Sea* $\mathbf{T}$ *una* Π_1*–extensión de* $\mathbf{L\Delta_1^-}$ *tal que* $\mathbf{T} \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. *Entonces, existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *tal que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ *es no estándar y* $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \notin SSy(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}))$.

3.B Complejidad descriptiva de Π_{n+2}–extensiones de $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$, $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$

NOTA III.3.9. Puesto que los fragmentos $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$, $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$

(–) poseen Π_{n+2}–extensiones ($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es una extensión de ambos),
(–) son extensiones de $\mathbf{L\Delta_{n+1}^-}$,

entonces, de **III.3.5** ($\mathbf{L\Delta_{n+1}^-} + \mathbf{exp}$ de tipo $n+2 \to n+1$), se sigue que:

(–) $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$ es de tipo $n+2 \to n+1$.
(–) $(n > 0)$ $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ es de tipo $n+2 \to n+1$.
(–) $\mathbf{B\Sigma_1^-} + \mathbf{exp}$ es de tipo $2 \to 1$.

Ahora bien, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ no es una extensión de $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ (y, por tanto, tampoco de $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$). Luego, nos preguntamos si podemos mejorar los resultados anteriores, es decir:

¿Es $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$ una teoría de tipo $n+2 \to n+2$?

¿Es $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ una teoría de tipo $n+2 \to n+2$?

En lo que sigue, responderemos afirmativamente a la primera cuestión y obtendremos una solución parcial para la segunda: $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ (+ $\mathbf{exp}$, si $n = 0$) es una teoría de tipo $n+2 \to^w n+2$.
La herramienta básica es el uso de estructuras de elementos Σ_{n+1}–definibles a partir de elementos Π_{n+1}–definibles, o Π_{n+1}–minimales.

PROPOSICIÓN III.3.10. *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable y* $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ *cerrada tales que* $\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} + \varphi$ *es consistente.*

(a) *Supongamos que* $\mathbf{T} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$. *Entonces:*

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

(b) *Supongamos que* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$. *Entonces:*

$$\mathbf{T} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

(c) *Son equivalentes:*

(c.1) $\mathbf{T} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$.
(c.2) $\mathbf{T} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): ($\mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$): Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Por **II.2.8**, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$, se sigue que existe $a \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar.
Sea $\theta(x) \in \Pi_{n+1}^{-}$ tal que φ es la fórmula $\exists x\, \theta(x)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \theta(x)$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n+1}^{-}$, existe $b \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que $\mathfrak{A} \models b = (\mu x)\,(\theta(x))$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},a,b) \prec_{n+1} \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},a,b) \models \mathbf{T}+\theta(b)\\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},a,b) \models \mathbf{T}+\exists x\,\theta(x)\\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},a,b) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}.\end{aligned}$$

Puesto que $a \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ y $b \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$, lo anterior está en contradicción con **II.3.8–(c)**.

($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi$): Puesto que $\mathbf{T}+\varphi$ es V_{n+2}–axiomatizable, basta ver que $\mathbf{T}+\varphi$ es una teoría verdadera. Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi$. Por lo anterior, se tiene que $\mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Luego, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Por tanto, $\mathcal{N} \prec_{n+2} \mathfrak{A}$ y, en consecuencia, $\mathcal{N} \models \mathbf{T}+\varphi$.

((b)): Se sigue de **(a)**, tomando como φ una fórmula válida, por ejemplo, $\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

((c)): ((**c.1**)$\Longrightarrow$(**c.2**)) Por **(c.1)**, se tiene que $\mathbf{T}+\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}+\varphi \Longleftrightarrow \mathbf{T}+\varphi$. Luego, el resultado se sigue de **(a)**.

((**c.2**)$\Longrightarrow$(**c.1**)): Inmediato. ∎

TEOREMA III.3.11.
(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.
(b) $(n>0)$ $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$ *es de tipo* $n+1 \to n+1$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): El resultado se sigue de **III.3.10–(c)**, sin más que considerar como φ cualquier fórmula válida, por ejemplo, $\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

((b)): Sean $\mathbf{T}$ una Π_{n+1}–extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$ y $m=n-1$. Entonces:

$$\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n}^{-} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{m+1}^{-}.$$

Por tanto, $\mathbf{T}$ es una Π_{m+2}–extensión de $\mathbf{I}\Sigma_{m+1}^{-}$. Luego, de **(a)**, se sigue que:

$$\mathbf{T} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{m+2}}(\mathcal{N}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Lo que prueba **(b)**. ∎

NOTA III.3.12. El resultado anterior es óptimo para $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$, en efecto:

(–) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$ no es de tipo $n+3 \to n+2$,
(pues $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$ posee Π_{n+3}–extensiones finitamente axiomatizables: $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$).

Sin embargo, para el fragmento $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ queda pendiente el siguiente problema:

$$¿\text{Es } \mathbf{I\Delta}^-_{n+1} \text{ de tipo } n+2 \to n+1?$$

El problema anterior está relacionado con las tres versiones de la conjetura de Paris–Friedman. En efecto, se tiene que:

Aserto III.3.12.1. ($n > 0$) *Si* $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ *no es de tipo* $n+2 \to n+1$, *entonces las tres versiones de la conjetura de Paris–Friedman son falsas, para* $n > 0$.

Prueba del aserto:
Para el caso de la versión sin parámetros, es trivial (pues sabemos que, para $n \geq 1$, la teoría $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$ es de tipo $n+2 \to n+1$). Veamos los dos casos restantes.
Supongamos que existe una Π_{n+2}–extensión consistente de la teoría $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$, $\mathbf{T}$, tal que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Entonces, por **III.1.3.4–(i)**, se tiene que $\mathbf{T} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Luego, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Por **II.2.8**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Por tanto, de **II.3.8–(a)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. Puesto que $\mathbf{T}$ es una teoría Π_{n+2}–axiomatizable y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{T}$. Por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$. Ahora bien, por **II.3.4**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Luego, de **II.3.2–(b)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}$.
Hemos obtenido que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}$, pero $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{I\Delta}_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}$ y $\mathbf{UI\Delta}_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{UL\Delta}_{n+1}$. □

En el caso $n = 0$, sabemos que $\mathbf{L\Delta}^-_1 + \mathbf{exp}$ es de tipo $2 \to 1$. Luego, razonando como antes, se obtiene que:

Aserto III.3.12.2. *Si la teoría* $\mathbf{I\Delta}^-_1 + \mathbf{exp}$ *no es de tipo* $2 \to 1$, *entonces las tres versiones de la conjetura de Paris–Friedman son falsas, para* $n = 0$.

TEOREMA III.3.13.

(a) *Sea* $\mathbf{T}$ *una* Π_{n+2}*–extensión de* $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$ *(consistente con* $\mathbf{exp}$*, si* $n = 0$*). Entonces:*

- **(a.1)** $\mathbf{T}$ *es verdadera.*
- **(a.2)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ *es recursivo en* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
- **(a.3)** *Para todo* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *recursivamente saturado, se tiene que:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A}).$$

(b) *Se tiene que:*

- **(b.1)** ($n > 0$) $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$ *es de tipo* $n+2 \to^w n+2$.
- **(b.2)** $\mathbf{B\Sigma}^-_1 + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $2 \to^w 2$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): ((**a.1**)): Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}$, entonces $\mathbf{T}+\mathbf{exp}$ es una Π_{n+2}–extensión de $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}+\mathbf{exp}$. Por **III.3.5**, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}^{-}+\mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \to n+1$. Por tanto:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}+\mathbf{exp}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Sea $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}+\mathbf{exp}$. Entonces, $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Por tanto, $\mathcal{N} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$ y, en consecuencia, $\mathcal{N} \models \mathbf{T}$.

((**a.2**)): Por (**a.1**), $\mathbf{T}+\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}$ es consistente. Luego, de **III.3.10**–(**b**), se sigue que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}+\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})+\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})+\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}$. Ahora bien, puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}$ es recursivamente axiomatizable, los conjuntos $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})+\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-}$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ son Turing–equivalentes. Luego, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es recursivamente enumerable en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, de **III.3.4.1**, se sigue (**a.2**).

((**a.3**)): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ recursivamente saturado. Consideremos el conjunto de fórmulas:

$$\mathbf{P}(x) = \{(x)_{\ulcorner\varphi\urcorner} \neq 0 \leftrightarrow \varphi \;:\; \varphi \in \Pi_{n+2} \cap \mathbf{Sent}\}.$$

Entonces, $\mathbf{P}(x)$ es un tipo recursivo sobre $\mathfrak{A}$. Puesto que $\mathfrak{A}$ es recursivamente saturado, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}(a)$. Por tanto, para toda $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models (a)_{\ulcorner\varphi\urcorner} \neq 0 \leftrightarrow \varphi.$$

En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A}) \in SSy(\mathfrak{A})$. Ahora bien, por (**a.2**), para la teoría $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A})$, se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A})$. Puesto que $SSy(\mathfrak{A})$ es un conjunto de Scott (véase **I.7.5**), entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A}) \in SSy(\mathfrak{A}) \\ \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \text{ recursivo en } \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \in SSy(\mathfrak{A}).$$

Lo que prueba (**a.3**).

((**b**)): Se sigue de (**a.2**). ■

NOTA III.3.14. **(Sobre la existencia de elementos Π_{n+1}–definibles)**.
Queda pendiente pues el siguiente problema:

(**BTH**) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.

Dicho problema está relacionado con el problema (**Π-DH**) sobre la existencia la elementos no estándar Π_{n+1}–definibles, en modelos de $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ (véase **II.2.9**). Se tiene el siguiente aserto.

Aserto III.3.14.1. *Si* (Π-**DH**) *es cierto, entonces:*

$$\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp} \text{ es de tipo } n+2 \to n+2.$$

Prueba del aserto:
Sea $\mathbf{T}$ una Π_{n+2}–extensión consistente de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp}$. Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ es una extensión Σ_{n+3}–conservativa de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$, basta probar que $\mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. En efecto, para toda $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi & \Longrightarrow & \text{existe } \theta \in \mathbf{Ax}(\mathbf{T}) \text{ tal que } \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \theta \vdash \varphi \\ & \Longrightarrow & \text{existe } \theta \in \mathbf{Ax}(\mathbf{T}) \text{ tal que } \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \theta \to \varphi \\ & \Longrightarrow & \text{existe } \theta \in \mathbf{Ax}(\mathbf{T}) \text{ tal que } \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} \vdash \theta \to \varphi \\ & \Longrightarrow & \mathbf{T} \vdash \varphi. \end{array}$$

Supongamos que existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{T} + \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Entonces, razonando como en la prueba de **III.3.10–(a)**, se llega a contradicción. Nótese que para desarrollar dicha prueba, solamente necesitamos la hipótesis $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$ para asegurar la existencia de algún elemento no estándar Π_{n+1}–definible en $\mathfrak{A}$. Sin embargo, puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, ahora obtenemos esa conclusión por (Π-**DH**). □

El problema (Π-**DH**) es también relevante para el estudio de las teorías $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, es decir, la versión sin parámetros del fragmento $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (véase **IV.3.26**). Consideremos la siguiente variante de (Π-**DH**).

(Π-**MH**) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *y* $\varphi(x) \in \Pi^-_{n+1}$ *tales que* $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$ *y* $\mathcal{N} \not\models \exists x\, \varphi(x)$. *Entonces, existe* $a \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *no estándar tal que* $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$.

Entonces, como en la prueba de **III.3.10–(a)**, teniendo en cuenta las observaciones en la prueba del aserto anterior, se obtiene que:

Aserto III.3.14.2. *Supongamos que* (Π-**MH**) *es cierto. Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable y* $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ *cerrada tales que* $\mathbf{T}+\varphi$ *es consistente y* $\mathbf{T}+\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$. *Entonces:*

$$\mathbf{T} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Por el aserto anterior, las propiedades (Π-**DH**) y (Π-**MH**) permitirían refinar varios resultados sobre la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, que obtendremos en el capítulo **IV** (véanse **IV.3.25** y **IV.4.11**).

4 Extensiones mediante fórmulas de complejidad acotada

En el capítulo **IV** estudiaremos relaciones entre fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (fragmentos relativizados). La propiedad esencial para separar dichos fragmentos es la siguiente. Bajo ciertas condiciones sobre la teoría $\mathbf{T}$, existe φ fórmula cerrada, cuya complejidad no depende de $\mathbf{T}$, tal que el correspondiente fragmento relativizado, junto con la fórmula φ, es una extensión de algún fragmento clásico (véanse **IV.3.5**, **IV.3.11**). Por ejemplo, existe $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ tal que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Por tanto, si probamos que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \varphi \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, entonces, obtenemos que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$ no es una extensión de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$.

Esta técnica para separar fragmentos relativizados motiva el estudio de la siguiente cuestión:

(–) Sean $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ tales que $\mathbf{T}_1 \not\Longrightarrow \mathbf{T}_2$ y $\Gamma \subseteq \mathbf{Sent}$.
Obtener condiciones sobre la complejidad de las fórmulas de Γ que permitan asegurar que $\mathbf{T}_1 + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{T}_2$.

En lo que sigue, estudiamos dicho problema para fragmentos clásicos y fragmentos sin parámetros.

<u>Propiedades de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$:</u>

PROPOSICIÓN III.4.1. *Sea* $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+3}$ *un conjunto de fórmulas cerradas.*

(a) *Si* $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma$ *es consistente, entonces:*

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

(b) *Si* $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} + \Gamma$ *es consistente, entonces:*

$$\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

(c) *Si* $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp} + \Gamma$ *es consistente, entonces:*

$$\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Puesto que $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+3}$, existe $\{\theta_i(x) : i \in \omega\}$ sucesión de fórmulas Π^-_{n+2} tales que $\Gamma = \{\exists x\, \theta_i(x) : i \in \omega\}$. Sean $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ nuevos símbolos de constante y $\mathbf{T}$ la siguiente teoría:

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma + \{m < \mathbf{c} : m \in \omega\} + \{\theta_i((\mathbf{d})_i) : i \in \omega\}.$$

Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma$ es consistente, por un argumento de compacidad, se obtiene que $\mathbf{T}$ es consistente. Sean $\mathfrak{A}'$ un modelo de $\mathbf{T}$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_{|\mathcal{L}}$. Sean $a, b \in \mathfrak{A}$ las interpretaciones de las constantes $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$, respectivamente (nótese que a es un elemento no estándar).

Aserto III.4.1.1. $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \Gamma$.

Prueba del aserto:

Sea $\exists x\, \theta_i(x) \in \Gamma$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \theta_i((b)_i)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \theta_i((b)_i) \\ \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \\ \theta(x) \in \Pi^-_{n+2} \\ (b)_i \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \theta_i((b)_i)$$

Luego, de $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \prec_{n+1} \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b)$, se sigue que $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \theta_i((b)_i)$. En consecuencia, $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \exists x\, \theta_i(x)$. □

Entonces:

(–) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma$,

(–) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, b) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ [[**II.3.13–(a)**]].

Lo que prueba **(a)**.

(**(b)**, **(c)**): Los resultados se siguen de **III.2.2**, pues $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} + \Gamma$ y $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \Gamma$ son teorías Σ_{n+3}–axiomatizables. ■

Nota III.4.2. El resultado anterior es óptimo para inducción. En efecto, puesto que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ es una teoría Π_{n+3}–axiomatizable y finitamente axiomatizable, existe $\varphi \in \Pi_{n+3}$ cerrada tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \varphi &\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}, \\ \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} + \varphi &\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}. \end{aligned}$$

Para colección, el resultado es también óptimo para $n > 0$ (pues, en este caso, sabemos que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ es finitamente axiomatizable y, por tanto, es axiomatizable por una fórmula Π_{n+3}). Sin embargo, queda pendiente saber si en **III.4.1–(c)**, para $n = 0$, es posible eliminar la función exponencial. Nótese que si fuese posible, entonces el problema **(NE)** tendría respuesta negativa.

Propiedades de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$:

Para obtener modelos de teorías Σ_{n+2}–axiomatizables que no sean modelos de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$, usaremos el lema **III.4.3**. La idea para la prueba de **III.4.3** aparece, esencialmente, en la demostración de la proposición 1.13 de [15].

LEMA III.4.3. *Sean* $\Gamma = \{\exists x\, \theta_i(x) \,:\, \theta_i(x) \in \Pi^-_{n+1},\ i \in \omega\} \subseteq \Sigma_{n+2}$ *y* $\mathfrak{A} \models \Gamma + \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$ *tales que:*

(i) $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$,

(ii) $\Gamma \in SSy(\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}))$,

(iii) $\{a_i \in \mathfrak{A} : a_i = (\mu x)\,(\theta_i(x)),\ i \in \omega\}$ *no es cofinal en* $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$.

Entonces, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ *tal que, para todo* $\mathfrak{B}$*:*

$$\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A},\, p \in \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \Gamma.$$

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$, entonces $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \prec_{n+2} \mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ y, de **II.2.8** y **(i)**, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Por **(iii)**, existe $a \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ tal que, para todo $i \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a\, \theta_i(x)$. Por tanto, para todo $i \in \omega$:

$$\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \exists x \leq a\, \theta_i(x).$$

Por **(ii)**, $\Gamma \in SSy(\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}))$, entonces:

(1) existe $b \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ que codifica el conjunto $\{\ulcorner\theta_i(x)\urcorner : i \in \omega\} \subseteq \omega$.

Luego, para todo $k \in \omega$:

$$\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \forall v \leq k\, \exists x \leq a\, ((b)_v \neq 0 \rightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(v, x)).$$

Sea $\tilde{a} \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ de longitud no estándar tal que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \forall v < \lg(\tilde{a})\, ((\tilde{a})_v = a)$. Entonces, para todo $k \in \omega$:

$$\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \exists u \leq \tilde{a}\, \forall v \leq k\, ((b)_v \neq 0 \rightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(v, (u)_v)).$$

Puesto que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ es no estándar, por el principio de overspill para fórmulas $\Sigma_0(\Sigma_{n+1})$ (**I.2.5**), existe $c \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ no estándar tal que:

$$\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \exists u \leq \tilde{a}\, \forall v \leq c\, ((b)_v \neq 0 \rightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(v, (u)_v)).$$

Sea $d \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ tal que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \forall v \leq c\, ((b)_v \neq 0 \rightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(v, (d)_v))$. Por la prueba de **II.2.6**, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ tal que $d = (p)_{0,0}$.

Aserto III.4.3.1. *Para todo* $\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}$*, se cumple que:*

$$p \in \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \Gamma.$$

Prueba del aserto:
Sea $\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}$ tal que $p \in \mathfrak{B}$. Para todo $k \in \omega$, se tiene que $(d)_k \in \mathfrak{B}$. Sean $i \in \omega$ y $k = \ulcorner\theta_i(x)\urcorner$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models (b)_k \neq 0 \rightarrow \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(k, (d)_k) \\ \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models (b)_k \neq 0 \quad [\![(1)]\!] \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(k, (d)_k).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Sat}_{\Pi_{n+1}}(k,(d)_k) &\implies \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \theta_i((d)_k) && [\![k = \ulcorner\theta_i(x)\urcorner]\!]\\
&\implies \mathfrak{A} \models \theta_i((d)_k) && [\![\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \prec_{n+2} \mathfrak{A}]\!]\\
&\implies \mathfrak{B} \models \theta_i((d)_k) && [\![\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}]\!]\\
&\implies \mathfrak{B} \models \exists x\, \theta_i(x).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathfrak{B} \models \Gamma$. □

Del aserto, se sigue el lema. ■

COROLARIO III.4.4. *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$ *tal que* $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Existe* $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ *no estándar tal que, para todo* $X \subseteq \mathfrak{A}$*:*

$$\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, X \cup \{p\}) \models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-.$$

DEMOSTRACIÓN:
Sea $\{\varphi_i(x) : i \in \omega\}$ una enumeración recursiva de las fórmulas Σ_{n+1}^- del lenguaje $\mathcal{L}$. Para cada $i \in \omega$, sea $\theta_i(x) \in \Pi_{n+1}^-$ la fórmula:

$$\forall u\, \neg\varphi_i(u) \vee (\varphi_i(x) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi_i(y)),$$

esto es, $\theta_i(x) \equiv \exists u\, \varphi_i(u) \to x = (\mu y)\,(\varphi_i(y))$.
Puesto que las teorías $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ y $\mathbf{L\Sigma}_{n+1}^-$ son equivalentes, entonces:

$$\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \iff \mathbf{P}^- + \{\exists x\, \theta_i(x) : i \in \omega\}.$$

Aserto III.4.4.1. *Para cada* $i \in \omega$, *existe* $a_i \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *tal que:*

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a_i\, \theta_i(x).$$

Prueba del aserto:
Sea $i \in \omega$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \theta_i(x)$.

<u>Caso A</u>: $\mathfrak{A} \models \forall u\, \neg\varphi_i(u)$. Entonces, basta observar que $\mathfrak{A} \models \theta_i(0)$.

<u>Caso B</u>: $\mathfrak{A} \not\models \forall u\, \neg\varphi_i(u)$. Entonces, existe $b_i \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models b_i = (\mu x)\,(\varphi_i(x))$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi_i(x)$. Ahora bien, $\varphi_i(x) \in \Sigma_{n+1}^-$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$; luego, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \exists x\, \varphi_i(x)$. Sea $a_i \in \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \varphi_i(a_i)$. Entonces, $b_i \leq a_i$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a_i\, \theta_i(x)$. □

Por **II.2.8**, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$, se sigue que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Luego, por **II.2.11**, existe $a \in \mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) - \mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Entonces, del aserto anterior, se sigue que, para todo $i \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a\, \theta_i(x)$. Puesto que $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \prec_{n+2} \mathfrak{A}$, entonces, para todo $i \in \omega$, $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}) \models \exists x \leq a\, \theta_i(x)$. Por tanto:

(-) $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.
(-) $\{c_i \in \mathfrak{A} : c_i = (\mu x)\,(\theta_i(x)),\ i \in \omega\}$ no es cofinal en $\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A})$.
(-) $\Gamma = \{\exists x\, \theta_i(x) : i \in \omega\} \in SSy(\mathfrak{K}_{n+2}(\mathfrak{A}))$ $[\![\Gamma$ es recursivo$]\!]$.

Luego, el resultado se sigue de **III.4.3**. ■

PROPOSICIÓN III.4.5. *Sean* $\Gamma \subseteq \Pi_{n+2} \cap \mathbf{Sent}$ *y* $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ *cerrada tales que la teoría* $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi$ *es consistente.*

(a) *Supongamos que* $\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$. *Entonces:*

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

(b) *Supongamos que* Γ *es recursivo. Entonces:*

$$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \not\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}.$$

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): ($\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$): Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.
Sea $\theta(x) \in \Pi_{n+1}^{-}$ tal que φ es la fórmula $\exists x\, \theta(x)$. De $\mathfrak{A} \models \exists x\, \theta(x)$ y $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n+1}^{-}$, se sigue que existe $a \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ tal que $\mathfrak{A} \models a = (\mu x)\,(\theta(x))$. Por **III.4.4**, puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$, existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, p) \models \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$.
Entonces:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, p) \prec_{n+1} \mathfrak{A} &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, p) \models \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma + \theta(a) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, p) \models \mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma + \exists x\, \theta(x) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, a, p) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}. \end{aligned}$$

Lo anterior está en contradicción con **II.3.8–(c)**.

($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi$): Como en la prueba de **III.3.10–(a)**.

((**b**)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$. Entonces, de (**a**), se sigue que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Contradicción, pues $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma + \varphi$ es recursivamente axiomatizable. ∎

NOTA III.4.6. La hipótesis Γ recursivo, en el resultado **III.4.5–(b)**, es necesaria. En efecto, $\Gamma = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es un conjunto de fórmulas Π_{n+2} cerradas tales que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma$ es consistente y $\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$.
Además, por **III.4.5–(a)**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\Gamma)$, para cualquier conjunto $\Gamma \subseteq \Pi_{n+2}$ que verifique la propiedad anterior.

Propiedades de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}$:

El análisis del crecimiento de las funciones recursivas en una teoría, según la complejidad sintáctica de sus axiomas (véase **III.2.6**), nos permite establecer el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN III.4.7. *Sea* $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2} \cap \mathbf{Sent}$

(a) *Si* $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma$ *es consistente, entonces:*

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^{-}.$$

(b) *Si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ *es consistente, entonces:*

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Supongamos que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma$ es consistente. Sea $D_n(x,y) \in \Pi_n$ la fórmula definida, en **I–8**, a partir de iteración y diagonalización. Entonces, $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} \vdash \forall x\, \exists y\, D_n(x,y)$. Por tanto, del siguiente aserto, se sigue **(a)**.

Aserto III.4.7.1. $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma \nvdash \forall x\, \exists y\, D_n(x,y)$.

Prueba del aserto:
Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma \vdash \forall x\, \exists y\, D_n(x,y)$. De **III.2.6**, se sigue que existe $m \in \omega$ tal que:

(1) $\mathbf{I\Sigma}_n + \Gamma \vdash \exists z\, \forall x\, (x > z \rightarrow \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, D_n(x,y))$.

Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma$ no estándar. Por (1), existe $a \in \mathfrak{A}$ no estándar tal que:

(2) $\mathfrak{A} \models \forall x \geq a\, \exists y \leq \mathbb{K}_{n,m}(x)\, D_n(x,y)$.

Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, D_n(x,y)$, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models D_n(a,b)$. Entonces, por (2), se tiene que $\mathfrak{A} \models D_n(a,b) \wedge b \leq \mathbb{K}_{n,m}(a) < \mathbb{K}_{n,m+1}(a)$. Contradicción, pues es un teorema en $\mathbf{I\Sigma}_n$ que (véase **I.8.4**):

$$IT_{\mathbb{K}_n}(z_1, x, y_1) \wedge IT_{\mathbb{K}_n}(z_2, x, y_2) \wedge z_1 < z_2 \rightarrow y_1 < y_2.$$

Lo que prueba el aserto. □

(**(b)**): Supongamos que $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ es consistente. Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es una extensión Π_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_n$, $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable y $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2}$, entonces $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ es consistente. Luego, de **(a)**, se sigue que:

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}.$$

Por tanto, $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$. ∎

NOTA III.4.8. La complejidad sintáctica de las fórmulas del conjunto Γ, en **III.4.7**, es óptima. En efecto, $\Gamma = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es un conjunto de fórmulas Π_{n+2} cerradas tales que:

(1) $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \Gamma$ es una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$,
(2) $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ es una extensión consistente de $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$.

Además, el siguiente aserto prueba que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\Gamma)$, para cualquier $\Gamma \subseteq \Pi_{n+2}$ que verifique la propiedad (2) anterior.

Aserto III.4.8.1. *Sea* $\Gamma \subseteq \Pi_{n+2} \cap \mathbf{Sent}$ *tal que* $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ *es consistente. Son equivalentes:*

(i) $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$.
(ii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

Prueba del aserto:
((i)$\Longrightarrow$(ii)): Por **III.1.3.4**, es suficiente probar que $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Entonces, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$ (luego, por (i), $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$) tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. De **III.4.4**, se sigue que existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar tal que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. Por tanto:

(-) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \Gamma$.

Luego, por (i), se tiene que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$. Lo cual está en contradicción con **II.3.7–(b)**.

((ii)$\Longrightarrow$ (i)): Inmediato. □

Propiedades de $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$:

Proposición III.4.9. *Sea* $\Gamma \subseteq \Pi_{n+2} \cap \mathbf{Sent}$ *tal que* $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma$ *es consistente.*

(a) *Son equivalentes:*
  (a.1) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$.
  (a.2) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \Gamma) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

(b) *Supongamos que* $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+1}$. *Entonces:*

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}.$$

(c) *Supongamos que* Γ *es recursivo. Entonces:*

$$\mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \Gamma \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}.$$

Demostración:
((a)): ((a.1)$\Longrightarrow$(a.2)): Por **III.1.3.4**, basta probar que $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. Existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \Gamma$ tal que $\mathfrak{A}$ no es modelo de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Por **II.2.8**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Además, podemos suponer que $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ no es cofinal en $\mathfrak{A}$ (si lo fuese, consideraríamos una extensión elemental de $\mathfrak{A}$ en la que exista un elemento mayor que todos los de $\mathfrak{A}$). Entonces:

(-) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ [[**I.6.1**]],
(-) $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \Gamma$ [[**II.3.10–(b.2)**]].

Luego, por (a.1), se tiene que $\mathfrak{I}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. Lo cual está en contradicción con el teorema **II.3.13–(b)**.

((**a.2**)$\Longrightarrow$(**a.1**)): Inmediato.

((**b**)): Supongamos que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$. Entonces, por (**a**), se tiene que:

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Lo anterior está en contradicción con **III.1.3.4–(ii)**.

((**c**)): Supongamos que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$. Entonces, de (**a**), se sigue que:

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma$ es recursivamente axiomatizable, lo anterior está en contradicción con **III.1.3.4–(ii)**. ■

NOTA III.4.10. La complejidad sintáctica de las fórmulas del conjunto Γ, en **III.4.9–(b)**, es óptima. En efecto, $\Gamma = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es un conjunto de fórmulas Π_{n+1} cerradas tales que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma$ es consistente y $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}$ (el argumento anterior también muestra que la hipótesis Γ recursivo es necesaria en **III.4.9–(c)**).
Además, por **III.4.9–(a)**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es recursivo en $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\Gamma)$, para cualquier conjunto $\Gamma \subseteq \Pi_{n+1}$ que verifique la propiedad anterior.

Capítulo IV

Fragmentos Relativizados

1 Introducción

En el presente capítulo, estudiamos Fragmentos Relativizados de la Aritmética. Es decir, las teorías obtenidas al restringir los esquemas de inducción, colección y minimización a fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, donde $\mathbf{T}$ es una teoría consistente.

El estudio de estos fragmentos fue iniciado en [10] y [16]. La técnica empleada en dichos trabajos se basa en caracterizar las fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ como fórmulas acotadas de una extensión adecuada del lenguaje $\mathcal{L}$. La idea central para ello es obtener una caracterización funcional de Δ_{n+1}–propiedades. Sin embargo, en este trabajo, emplearemos una nueva metodología para el análisis de estas teorías: el estudio de *extensiones* de fragmentos.

El objetivo fundamental del capítulo es establecer, para los esquemas relativizados, las propidades habituales en el estudio de Fragmentos de la Aritmética:

(a) Relaciones entre Fragmentos Relativizados.

(b) Relaciones entre Fragmentos Clásicos y Relativizados.

(c) Resultados de Conservación.

(d) Resultados de Axiomatización.

Estudiamos también las propiedades anteriores para las versiones sin parámetros de los fragmentos relativizados, que hasta el momento, no han sido consideradas.

El resultado principal para desarrollar el trabajo anterior es que, bajo ciertas hipótesis sobre $\mathbf{T}$, es posible relacionar la clase los modelos de un fragmento relativizado de $\mathbf{T}$ con la unión de la clase de los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y la clase de los modelos de un fragmento clásico adecuado (véanse **IV.3.4**, **IV.3.8**).

2 $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$–propiedades

En esta sección introducimos las versiones sin parámetros de los fragmentos relativizados y establecemos las relaciones básicas entre ellos. Con este propósito, consideramos también las versiones para fragmentos sin parámetros de las Δ_{n+1}–propiedades definidas en [10] y [16] (véase **I–4.B**).

Definición IV.2.1. Sea $\mathbf{T}$ una teoría

$$\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} = \{\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^{-} : \text{ existe } \psi(x) \in \Pi_{n+1}^{-} \text{ tal que } \mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)\}.$$

$$\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-} = \{\psi(x) \in \Pi_{n+1}^{-} : \text{ existe } \varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^{-} \text{ tal que } \mathbf{T} \vdash \psi(x) \leftrightarrow \varphi(x)\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} &= \mathbf{P}^{-} + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}\}. \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} &= \mathbf{P}^{-} + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} : \varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}\}. \\
\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-} &= \mathbf{P}^{-} + \{\mathbf{I}_{\psi,x} : \psi(x) \in \Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-}\}. \\
\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-} &= \mathbf{P}^{-} + \{\mathbf{L}_{\psi,x} : \psi(x) \in \Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-}\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{B}^{*}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$ es $\mathbf{I}\Delta_0$ junto con

$$\forall x\, \exists y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y),$$

donde $\varphi(x,y) \in \Pi_n^{-}$ y $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.

Diremos que:

(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–inducción si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene $\Delta_{n+1}^{*,-}$–inducción si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–minimización si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^{-})$–minimización si $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene $\Delta_{n+1}^{*,-}$–minimización si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–colección si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^{*}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}^{-}–cerrada si $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$ es cerrada, en $\mathbf{T}$, bajo cuantificación acotada.
(–) $\mathbf{T}$ es Δ_{n+1}^{-}–PF si $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-}$.
(–) $\mathbf{T}$ es $\Delta_{n+1}^{*,-}$–PF si $\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{*}(\mathbf{T})^{-} \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.

Nota IV.2.2. Se verifican las siguientes relaciones entre las Δ_{n+1}^{-}–propiedades introducidas.

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}) & \Longrightarrow & \mathbf{T} \text{ tiene } \Delta_{n+1}^{-}\text{–inducción} & \Longrightarrow & (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n^{-}) \\
(\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}) & \Longrightarrow & \mathbf{T} \text{ tiene } \Delta_{n+1}^{-}\text{–minimización} & \Longrightarrow & (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n^{-}) \\
(\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}) & \Longrightarrow & \mathbf{T} \text{ tiene } \Delta_{n+1}^{-}\text{–colección} & \Longrightarrow & (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n)
\end{array}$$

(–) Si $\mathbf{T}$ tiene una Δ_{n+1}–propiedad, entonces tiene la correspondiente Δ_{n+1}^{-}–propiedad.

(–) Para $n \geq 1$, no es cierto el recíproco para inducción y minimización:

$\mathbf{I}\Delta_{n+1}^{-}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–inducción, pero, puesto que no extiende a $\mathbf{I}\Sigma_n$, no tiene Δ_{n+1}–inducción.

$\mathbf{L}\Delta_{n+1}^{-}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–minimización, pero, puesto que no extiende a $\mathbf{I}\Sigma_n$, no tiene Δ_{n+1}–minimización.

(–) Como veremos en **IV.2.4**, para colección ambas propiedades son equivalentes.

Aserto IV.2.2.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente.*

(i) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Π_{n+2}–*axiomatizable.*

(ii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$ *es* Π_{n+2}–*axiomatizable.*

(iii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^{*}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Π_{n+2}–*axiomatizable.*

(iv) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^{*}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$ *es* Π_{n+2}–*axiomatizable.*

Prueba del aserto:

(**(i)**, **(ii)**): Para cada $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ y $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$, sea $\mathbf{I}_{\varphi,\psi}$ la fórmula:

$$\psi(0) \wedge \forall x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x+1)] \rightarrow \forall x\,\psi(x).$$

Sea $\mathbf{I}_{\bullet}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^{-} + \{\mathbf{I}_{\varphi,\psi} : \ \varphi(x) \in \Sigma_{n+1},\ \psi(x) \in \Pi_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)\}$.

Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{I}_{\varphi} \leftrightarrow \mathbf{I}_{\varphi,\psi}$, entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}_{\bullet}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}).$$

Puesto que $\mathbf{I}_{\varphi,\psi} \in \Pi_{n+2}$, la teoría $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}_{\bullet}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ está Π_{n+2}–axiomatizada. Lo que prueba el resultado.

(**(iii)**, **(iv)**): Probaremos **(iv)**. La prueba de **(iii)** es similar. Consideramos los siguientes casos:

Caso A: $n = 0$. Sea $\mathbf{B}_{\varphi,\psi}^{-}$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\,\forall y\,\psi(x,y) \rightarrow \forall z\,\exists u\,\forall x \leq z\,\exists y \leq u\,\varphi(x,y).$$

Consideramos la teoría:

$$\mathbf{B}_0^{*}\Delta_1(\mathbf{T})^{-} = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}_{\varphi,\psi}^{-} : \ \varphi(x,y) \in \Pi_0^{-},\ \psi(x,y) \in \Sigma_0^{-}, \mathbf{T} \vdash \exists y\,\varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\,\psi(x,y)\}.$$

Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}_{\varphi}^{-} \leftrightarrow \mathbf{B}_{\varphi,\psi}^{-}$, se tiene que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^{*}\Delta_1(\mathbf{T})^{-} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}_0^{*}\Delta_1(\mathbf{T})^{-}.$$

Puesto que $\mathbf{B}_{\varphi,\psi}^{-} \in \Pi_2$, la teoría $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}_0^{*}\Delta_1(\mathbf{T})^{-}$ está Π_2–axiomatizada. Lo que prueba el resultado.

Caso B: $n > 0$. Para cada $\varphi(x,y) \in \Pi_n^{-}$, sea $\varphi'(z,u) \in \Pi_n^{-}$ tal que:

$$\mathbf{B}\Sigma_n \vdash \forall x \leq z\,\exists y \leq u\,\varphi(x,y) \leftrightarrow \varphi'(z,u).$$

Sea $\mathbf{B}^-_{\varphi,\psi}$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, \psi(x,y) \rightarrow \forall z\, \exists u\, \varphi'(x,y).$$

Consideramos la teoría:

$$\mathbf{B}^*_n\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}^-_{\varphi,\psi} : \varphi(x,y) \in \Pi^-_n,\ \psi(x,y) \in \Sigma^-_n, \mathbf{T} \vdash \exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \psi(x,y)\}.$$

Por **IV.5.5.5**, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$. Puesto que $n > 0$, entonces $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n$. Además, $\mathbf{B}\Sigma_n + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \mathbf{B}^-_\varphi \leftrightarrow \mathbf{B}^-_{\varphi,\psi}$. Por tanto:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}\Sigma_n + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*_n\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

La teoría que aparece en la parte derecha de la equivalencia está Π_{n+2}–axiomatizada. Lo que prueba el resultado. □

En [10] y [16], los autores prueban que una teoría, $\mathbf{T}$, tiene una Δ_{n+1}–propiedad si, y sólo si, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ la tiene (véase **I.4.5–(b)**). A continuación, veremos que este resultado es también cierto para las propiedades de Δ^-_{n+1}–inducción y Δ^-_{n+1}–colección. Sin embargo, no sabemos si el resultado se verifica para Δ^-_{n+1}–minimización (por este motivo, se ha considerado en la definición **IV.2.1** la propiedad de $(\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})$–minimización).

Aserto IV.2.2.2.

(i) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- **(i.1)** $\mathbf{T}$ tiene Δ^-_{n+1}–inducción.
- **(i.2)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(ii) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- **(ii.1)** $\mathbf{T}$ tiene Δ^-_{n+1}–colección.
- **(ii.2)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Prueba del aserto:

((**i**)): ((**i.1**)$\Longrightarrow$(**i.2**)): Basta observar que:

$$\begin{array}{rll}
(\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-) & \Longrightarrow & (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-) \\
& \Longrightarrow & (\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-) \quad [\![\mathbf{IV.2.2.1}]\!] \\
& \Longrightarrow & (\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-).
\end{array}$$

((**i.2**)$\Longrightarrow$(**i.1**)): Inmediato.

((**ii**)): Similar a la prueba de (**i**). □

A continuación, establecemos algunas relaciones básicas entre los fragmentos relativizados sin parámetros.

Aserto IV.2.2.3. *Se verifican las siguientes relaciones.*

(i) *Inducción y minimización:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) & & \\
 & & & & \Downarrow & & \\
\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow^1 & \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longrightarrow & \mathbf{I\Sigma}^-_n \\
\Uparrow & & & & & & \\
\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- & {}^1\Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longrightarrow & \mathbf{I\Sigma}^-_n \\
 & & & & \Uparrow & & \\
 & & & & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) & &
\end{array}
$$

Donde: $\Longrightarrow^1$ *y* ${}^1\Longleftarrow$ *si* $\mathbf{T}$ *es* Δ^-_{n+1}*-cerrada.*

(ii) *Colección:*

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longrightarrow_2 & \mathbf{B\Sigma}^-_n \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\mathbf{B\Sigma}_{n+1} & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) & &
\end{array}
$$

Donde: $\Longrightarrow^2$ *si* $n > 0$.

Prueba del aserto:
Puesto que $\Sigma^-_n \subseteq \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, entonces $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_n$. Para cualquier fórmula $\varphi(x,y) \in \Pi^-_{n-1}$, $\exists y\, \varphi(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Luego, $\mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B\Pi}^-_{n-1} \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_n$. Para probar que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_n$, basta observar que $\Pi^-_n \subseteq \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y que las teorías $\mathbf{I\Sigma}^-_n$ y $\mathbf{L\Pi}^-_n$ son equivalentes.

Como en las pruebas habituales de $\mathbf{L\Pi}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ y $\mathbf{L\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}$, se obtiene que $\mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Si $\mathbf{T}$ es Δ^-_{n+1}-cerrada, como en la prueba habitual de $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L\Pi}_{n+1}$, se obtiene que $\mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Para la prueba de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow^1 \mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$, usaremos resultados que probaremos más adelante en este capítulo. Sean $\mathbf{T}$ una teoría Δ^-_{n+1}-cerrada y $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Consideramos los siguientes casos.

Caso 1: $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
Entonces, por **IV.2.3–(a)**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Puesto que $\mathbf{T}$ es Δ^-_{n+1}-cerrada, entonces $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Luego, de **IV.2.3–(c)**, se sigue que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Caso 2: $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
Entonces, por **IV.3.8**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{L\Pi}^-_{n+1}$). En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \mathbf{L\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$. □

LEMA IV.2.3.
(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
(c) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
(d) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
(e) Sea $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. Entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}).$$

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\psi(x) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$ tales que:

(-) $\mathfrak{A} \models \psi(0)$, y $\mathfrak{A} \models \psi(x) \to \psi(x+1)$.

Sea $\varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, entonces:

(-) $\mathfrak{A} \models \varphi(0)$, y $\mathfrak{A} \models \varphi(x) \to \varphi(x+1)$.

Por tanto, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, se sigue que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \psi(x)$.

(**(b)**, **(c)** y **(d)**): La prueba es similar.

(**(e)**): Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, $\varphi(x,y,v) \in \Pi_n$ y $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que:

(-) $\exists y\, \varphi(x,y,v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$,
(-) $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y\, \varphi(x,y,b)$.

Sea $\theta(x,y,v) \in \Sigma_n$ tal que $\mathbf{T} \vdash \exists y\, \varphi(x,y,v) \leftrightarrow \forall y\, \theta(x,y,v)$. Consideramos:

$$\delta(w,y) \equiv \varphi((w)_0, y, (w)_1) \vee \neg\theta((w)_0, y, (w)_1).$$

Se tiene que:

Aserto IV.2.3.1.
(i) $\mathbf{T} \vdash \forall w\, \exists y\, \delta(w,y)$.
(ii) $\exists y\, \delta(w,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
Prueba del aserto:
(**(i)**): Sean $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$ y $c \in \mathfrak{B}$. Entonces:

$$\mathfrak{B} \models \exists y\, \varphi((c)_0, y, (c)_1) \leftrightarrow \forall y\, \theta((c)_0, y, (c)_1).$$

Consideramos los siguientes casos.
<u>Caso A</u>: $\mathfrak{B} \models \exists y\, \varphi((c)_0, y, (c)_1)$.
Sea $d \in \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi((c)_0, d, (c)_1)$. Entonces, $\mathfrak{B} \models \delta(c,d)$.
<u>Caso B</u>: $\mathfrak{B} \not\models \exists y\, \varphi((c)_0, y, (c)_1)$.
Entonces, $\mathfrak{B} \not\models \forall y\, \theta((c)_0, y, (c)_1)$. Por tanto, existe $d \in \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \neg\theta((c)_0, d, (c)_1)$.
Luego, $\mathfrak{B} \models \delta(c,d)$

Lo que completa la prueba de **(i)**.

(**(ii)**): Puesto que $\delta(w,y) \in \Pi_n$, el resultado se sigue de **(i)**. □

Por la parte **(i)** del aserto y $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall w\, \exists y\, \delta(w,y)$. Sea $\langle a,b\rangle = c \in \mathfrak{A}$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \forall w \leq c\, \exists y\, \delta(w,y)$. De la parte **(ii)** del aserto y de $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, se sigue que existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \forall w \leq c\, \exists y \leq d\, \delta(w,y).$$

Puesto que $x \leq a \rightarrow \langle x,b\rangle \leq \langle a,b\rangle = c$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq d\, (\varphi(x,y,b) \vee \neg\theta(x,y,b)).$$

Puesto que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \forall y\, \theta(x,y,b)$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq d\, \varphi(x,y,b)$. ■

PROPOSICIÓN IV.2.4.

(a) *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- **(a.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción.*
- **(a.2)** $\mathbf{T}$ *tiene* $\Delta^{*,-}_{n+1}$*–inducción.*

(b) *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- **(b.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–minimización.*
- **(b.2)** $\mathbf{T}$ *tiene* $\Delta^{*,-}_{n+1}$*–minimización.*

(c) *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- **(c.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–colección.*
- **(c.2)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección.*

DEMOSTRACIÓN:
El resultado se sigue de **IV.2.3**. ■

Por último, establecemos relaciones entre las Δ^-_{n+1}–propiedades introducidas.

PROPOSICIÓN IV.2.5.

(a) *Si* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–minimización, entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción.*

(b) *Si* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción y es* Δ^-_{n+1}*–cerrada,* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–minimización.*

(c) *Si* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–colección, entonces:*

- **(c.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* $(\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})$*–minimización (y; por tanto,* Δ^-_{n+1}*–inducción).*
- **(c.2)** $\mathbf{T}$ *es* Δ^-_{n+1}*–cerrada.*

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad [\![\mathbf{IV.2.4\text{–}(b)}]\!] \\ &\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad [\![\mathbf{IV.2.2.3}]\!]. \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{T}$ tiene Δ^-_{n+1}–inducción.

((**b**)): Supongamos que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad [\![\mathbf{IV.2.4\text{–}(a)}]\!] \\ &\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad [\![\mathbf{IV.2.2.3}]\!]. \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{T}$ tiene Δ^-_{n+1}–minimización.

((**c**)): De **IV.2.4**, se sigue que $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección. Luego, por **I.4.5**, la teoría $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–minimización y es Δ_{n+1}–cerrada. Por tanto, también se verifican las correspondientes Δ^-_{n+1}–propiedades para $\mathbf{T}$. ■

Nota IV.2.6. En esta nota, estudiamos las relaciones entre $\mathbf{I}\Sigma^-_n$ y los fragmentos relativizados sin parámetros.

Aserto IV.2.6.1. $\mathbf{I}\Sigma^-_n \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma^-_n)^-$.

Prueba del aserto:
Por **IV.2.2.3**, se tiene que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma^-_n)^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_n$.
Veamos que $\mathbf{I}\Sigma^-_n \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^-$. Por **I.4.5**, $\mathbf{I}\Sigma_n$ tiene Δ_{n+1}–minimización. Por tanto, $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)$. Luego:

(–) $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^-$,
(–) $\mathbf{I}\Sigma_n$ es una extensión Σ_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I}\Sigma^-_n$,
(–) $\mathbf{L}\Delta^-_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^-$ es Σ_{n+2}–axiomatizable.

En consecuencia, $\mathbf{I}\Sigma^-_n \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^-$. □

Aserto IV.2.6.2.
(i) $\mathbf{I}\Sigma^-_n$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–minimización.*
(ii) $\mathbf{I}\Sigma^-_n$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción.*
(iii) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma^-_n)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_n$.

Prueba del aserto:
La parte (**i**) se sigue de **IV.2.6.1**. La parte (**ii**) se sigue de (**i**) y **IV.2.5**. La parte (**iii**) se sigue de (**ii**). □

3 Extensiones de Fragmentos Relativizados

En esta sección, establecemos el resultado principal para el análisis de los Fragmentos Relativizados. Bajo ciertas hipótesis, caracterizamos los modelos de un fragmento relativizado como la unión de dos clases de modelos: los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y los modelos de un fragmento clásico adecuado.

En primer lugar, introducimos un concepto sintáctico que expresa la unión de dos clases de modelos.

3.A Unión de teorías

DEFINICIÓN IV.3.1. Sean $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ teorías. Definimos

$$\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2 = \{\varphi_1 \vee \varphi_2 : \varphi_1 \in \mathbf{T}_1 \text{ y } \varphi_2 \in \mathbf{T}_2\}.$$

LEMA IV.3.2. *Son equivalentes:*

(a) $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$.

(b) $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1$, *o* $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_2$.

Es decir, $Mod(\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2) = Mod(\mathbf{T}_1) \bigcup Mod(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
((a) $\Longrightarrow$ (b)): Supongamos que $\mathfrak{B} \not\models \mathbf{T}_1$. Entonces, existe $\varphi_1 \in \mathbf{T}$ tal que $\mathfrak{B} \not\models \varphi_1$. Sea $\varphi_2 \in \mathbf{T}_2$. Puesto que $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$ y $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$, entonces $\mathfrak{B} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$. Por tanto, de $\mathfrak{B} \not\models \varphi_1$, se sigue que $\mathfrak{B} \models \varphi_2$. Luego, $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_2$.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): Supongamos que $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_2$. Sean $\varphi_1 \in \mathbf{T}_1$ y $\varphi_2 \in \mathbf{T}_2$. Entonces, $\mathfrak{B} \models \varphi_2$. Luego, $\mathfrak{B} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$. Por tanto, $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$. ■

LEMA IV.3.3.

(a) $\mathbf{T}_1 \Longrightarrow \mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$.

(b) *Son equivalentes.*

  (b.1) $\mathbf{T}_1 \Longrightarrow \mathbf{T}$, *y* $\mathbf{T}_2 \Longrightarrow \mathbf{T}$.

  (b.2) $\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2 \Longrightarrow \mathbf{T}$.

(c) $\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2 \vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{T}_1 \vdash \varphi$ *y* $\mathbf{T}_2 \vdash \varphi$. *Es decir,* $\mathbf{Th}(\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2) = \mathbf{Th}(\mathbf{T}_1) \bigcap \mathbf{Th}(\mathbf{T}_2)$.

(d) $\mathcal{R}(\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2) = \mathcal{R}(\mathbf{T}_1) \cap \mathcal{R}(\mathbf{T}_2)$ [[*donde* $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ *denota la clase de las funciones recursivas en* $\mathbf{T}$]].

(e) *Si* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son finitamente axiomatizables, entonces* $\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2$ *es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
Las partes **(a)**–**(d)** se siguen de **IV.3.2**. Veamos la parte **(e)**. Supongamos que $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son finitamente axiomatizables. Entonces, existen φ_1 y φ_2 fórmulas cerradas tales que $\mathbf{T}_1 \iff \varphi_1$ y $\mathbf{T}_2 \iff \varphi_2$. Por tanto, $\mathbf{T}_1 \vee \mathbf{T}_2 \iff \varphi_1 \vee \varphi_2$. Luego, se tiene **(e)**. ■

3.B Modelos de $\neg\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$

Por **I.4.5**, si $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección, entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}),$$
$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}).$$

Por lo tanto, la clase de los modelos de un fragmento para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ se puede dividir, con respecto a $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, en dos clases naturales: aquellos que son modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, y aquellos que no lo son.
En lo que sigue, empleamos esta división para obtener relaciones entre $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$, o $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, y fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

TEOREMA IV.3.4.
(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$. Sean $\varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1}$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que:

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi(0,a)$, y $\mathfrak{A} \models \varphi(x,a) \to \varphi(x+1,a)$.

Veamos que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x,a)$. Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, existe $\theta(w) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que:

(-) $\mathbf{T} \vdash \forall w\, \theta(w)$,

(-) $\mathfrak{A} \models \exists w\, \neg\theta(w)$. Por tanto, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\theta(b)$.

Sea $\delta(x,v,w) \in \Sigma_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x,v) \vee \theta(w).$$

Por (1), se tiene que:

(-) $\mathfrak{A} \models \delta(0,a,b)$, y $\mathfrak{A} \models \delta(x,a,b) \to \delta(x+1,a,b)$.

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \delta(x,v,w)$, entonces $\delta(x,v,w) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, se sigue que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \delta(x,a,b)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \neg\theta(b)$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x,a)$.

(**(b)**): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_n$. Sean $\varphi(x,y,v) \in \Pi_n$ y $a, c \in \mathfrak{A}$ tales que:

(1) $\mathfrak{A} \models \forall x \leq c\, \exists y\, \varphi(x, y, a)$.

Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, existe $\theta(w, y') \in \Pi_n$ tal que:

(–) $\mathbf{T} \vdash \forall w\, \exists y'\, \theta(w, y')$,

(–) $\mathfrak{A} \not\models \forall w\, \exists y'\, \theta(w, y')$. Luego, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\exists y'\, \theta(b, y')$.

Sea $\delta(x, y, v, w) \in \Pi_n$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x, (y)_0, v) \vee \theta(w, (y)_1).$$

Por (1), se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq c\, \exists z\, \delta(x, z, a, b)$. Puesto que $\mathbf{T} \vdash \exists y\, \delta(x, y, v, w)$, entonces $\exists y\, \delta(x, y, v, w) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Por tanto, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, se sigue que:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq c\, \exists z \leq u\, \delta(x, z, a, b).$$

Sea $d \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq c\, \exists z \leq d\, \delta(x, z, a, b)$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \neg\exists y'\, \theta(b, y')$ y $(y)_0 \leq y$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x \leq c\, \exists y \leq d\, \varphi(x, y, a)$. ■

COROLARIO IV.3.5. *Sea $\varphi \in \Pi_{n+2}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$. Entonces:*

(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$.

(b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

DEMOSTRACIÓN:
El resultado se sigue de **IV.3.4**. ■

Para teorías con Δ_{n+1}–inducción (respectivamente, con Δ_{n+1}–colección), el teorema **IV.3.4** permite caracterizar la clase de los modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (respectivamente, de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$) como la unión de los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y los modelos de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ (respectivamente, de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$).

COROLARIO IV.3.6.

(a) *Son equivalentes:*

- (a.1) $\mathbf{T}$ *tiene Δ_{n+1}–inducción.*
- (a.2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(b) *Son equivalentes:*

- (b.1) $\mathbf{T}$ *tiene Δ_{n+1}–colección.*
- (b.2) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:
De cada Δ_{n+1}–propiedad, se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego, (a) y (b) se siguen de **IV.3.4**. ■

NOTA IV.3.7. **(La teoría $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$).**
Para minimización, se obtienen resultados similares a los dados para el esquema de inducción.

Aserto IV.3.7.1. $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Prueba del aserto:
Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Sigma_{n+1}$. Sean $\varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1}$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x,a)$. Veamos que:

$$\mathfrak{A} \models \exists y\, (y = (\mu x)(\varphi(x,a))).$$

Sea $\theta(w) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que $\mathbf{T} \vdash \forall w\, \theta(w)$ y $\mathfrak{A} \models \exists w\, \neg\theta(w)$. Entonces, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\theta(b)$. Sea $\delta(x,v,w) \in \Sigma_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x,v) \vee \theta(w).$$

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \delta(x,v,w)$, entonces $\delta(x,v,w) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Por tanto, de $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{A} \models \exists x\, \delta(x,a,b)$, se sigue que $\mathfrak{A} \models \exists y\, (y = (\mu x)(\delta(x,a,b)))$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \neg\theta(b)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists y\, (y = (\mu x)(\varphi(x,a)))$. □

Como consecuencia inmediata del aserto anterior, obtenemos, para teorías con Δ_{n+1}–minimización, la equivalencia entre los fragmentos de inducción y minimización relativizados.

Aserto IV.3.7.2.

(i) *Sea* $\varphi \in \Pi_{n+2}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi$. *Entonces:*

(–) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$.

(–) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi$.

(ii) *Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización.*

(–) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(iii) *Si* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización, entonces* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Estudiamos ahora las versiones sin parámetros de los fragmentos relativizados. Para los esquemas de inducción y colección sin parámetros, obtenemos resultados análogos a los establecidos en el teorema **IV.3.4** para las teorías $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Sin embargo, para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ sólo hemos podido establecer un resultado más débil.

TEOREMA IV.3.8. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.
(a) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(c) $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$. Sea $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que:

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi(0)$,
(2) $\mathfrak{A} \models \varphi(x) \to \varphi(x+1)$.

Veamos que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)$. Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, existe $\theta(y) \in \Sigma_{n+1}^-$ tal que:

(-) $\mathbf{T} \vdash \forall y\, \theta(y)$,
(-) $\mathfrak{A} \models \neg\forall y\, \theta(y)$. Luego, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\theta(a)$.

Sea $\delta(u) \in \Sigma_{n+1}^-$ la fórmula:

$$\varphi((u)_0) \vee \theta(((u)_0 + (u)_1)_0).$$

Aserto IV.3.8.1. *Se verifica que:*
(i) $\mathbf{T} \vdash \forall u\, \delta(u)$.
(ii) $\delta(u) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Prueba del aserto:
((i)): Sean $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$ y $b \in \mathfrak{B}$. Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$, entonces, en $\mathfrak{B}$, son válidas las propiedades usuales de la función J de Cantor. En particular, existen $c, d \in \mathfrak{B}$ tales que $b = \langle c, d\rangle$. Puesto que $\mathbf{T} \vdash \forall y\, \theta(y)$, $\mathfrak{B} \models \theta((c+d)_0)$. Por tanto, $\mathfrak{B} \models \delta(b)$.
((ii)): Se sigue de (i). □

Aserto IV.3.8.2.
(i) $\mathfrak{A} \models \delta(0)$.
(ii) $\mathfrak{A} \models \delta(u) \to \delta(u+1)$.
(iii) $\mathfrak{A} \models \forall u\, \delta(u)$.
(iv) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)$.

Prueba del aserto:
Es trivial que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0$. Luego, en modelos de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$, son válidas las propiedades usuales de la función J de Cantor.

((i)): Puesto que $0 = \langle 0, 0\rangle$, entonces $(0)_0 = 0$. Luego, **(i)** se sigue de (1).

((ii)): Sea $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \delta(b)$. Sean $c, d \in \mathfrak{A}$ tales que $b = \langle c, d\rangle$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \varphi(c) \vee \theta((c+d)_0)$. Para probar que $\mathfrak{A} \models \delta(b+1)$, consideramos los siguientes casos:

Caso A: $0 < d$. Entonces, $b+1 = \langle c+1, d-1\rangle$. Luego, por (2), se tiene que $\mathfrak{A} \models \delta(b+1)$.

Caso B: $d = 0$. Entonces, $b+1 = \langle 0, c+1\rangle$. Puesto que $(b+1)_0 = 0$, por (1), se tiene que $\mathfrak{A} \models \delta(b+1)$.

((**iii**)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, el resultado se sigue de (**i**), (**ii**) y **IV.3.8.1-(ii)**.

((**iv**)): Sea $c \in \mathfrak{A}$. Sea $d \in \mathfrak{A}$ tal que $(c+d)_0 = a$ y $b = \langle c, d\rangle$. Por (**iii**), $\mathfrak{A} \models \varphi(c) \vee \theta(a)$. Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \theta(a)$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$. □

La parte (**a**) se sigue de (**iv**) en el aserto anterior.

((**b**)): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$. Sea $\varphi(x,y) \in \Pi_n^-$ tal que:

(1) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)$.

Veamos que $\mathfrak{A} \models \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$. Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, existe $\theta(x_1,y) \in \Pi_n^-$ tal que:

(2) $\mathbf{T} \vdash \forall x_1\, \exists y\, \theta(x_1,y)$,

(3) $\mathfrak{A} \not\models \forall x_1\, \exists y\, \theta(x_1,y)$. Luego, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\exists y\, \theta(a,y)$.

Sea $\delta(w,y) \in \Pi_n^-$ la siguiente fórmula:

$$\delta(w,y) \equiv \varphi((w)_0, y) \vee \theta((w)_1, y).$$

Aserto IV.3.8.3. *Se verifica que:*

(**i**) $\mathfrak{A} \models \forall w\, \exists y\, \delta(w,y)$.

(**ii**) $\mathbf{T} \vdash \forall w\, \exists y\, \delta(w,y)$.

(**iii**) $\exists y\, \delta(w,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Prueba del aserto:

Las partes (**i**) y (**ii**) se siguen, respectivamente, de (1) y (2). De (**ii**), se obtiene la parte (**iii**). □

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, del aserto, se sigue que:

(4) $\mathfrak{A} \models \forall z\, \exists u\, \forall w \leq z\, \exists y \leq u\, \delta(w,y)$.

Sea $b \in \mathfrak{A}$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq b\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y)$. Sea $c = \langle b, a\rangle$. Entonces, por (4), existe $d \in \mathfrak{A}$ tal que:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall w \leq c\, \exists y \leq d\, (\theta((w)_1, y) \vee \varphi((w)_0, y)).$$

Sea $e \leq b$. Entonces, $\langle e, a\rangle \leq \langle b, a\rangle = c$. Por tanto:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq d\, (\theta(a,y) \vee \varphi(e,y)).$$

Luego, por (2), se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq d\, \varphi(e, y).$$

Lo que prueba **(b)**.

((c)): Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$. Probaremos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Sigma^-_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$). Sea $\varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1}$ tal que:

(1) $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$.

Veamos que $\mathfrak{A} \models \exists y\, [y = (\mu x)(\varphi(x))]$. Puesto que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$, existe $\theta \in \cup_{n+1}$ cerrada tal que:

(–) $\mathbf{T} \vdash \theta$,

(–) $\mathfrak{A} \models \neg\theta$.

Consideraremos los siguientes casos:

Caso A: $\theta \in \Pi_{n+1}$. Sea $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x) \wedge \neg\theta.$$

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \neg\delta(x)$, $\delta(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$(1) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \exists x\, \delta(x) \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, [y = (\mu x)(\delta(x))]$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, [y = (\mu x)(\varphi(x))].$$

Caso B: $\theta \in \Sigma_{n+1}$. Sea $\delta(x) \in \Sigma^-_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x) \vee \theta.$$

Puesto que $\mathbf{T} \vdash \delta(x)$, $\delta(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$(1) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \exists x\, \delta(x) \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, [y = (\mu x)(\delta(x))]$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, [y = (\mu x)(\varphi(x))].$$

Lo que completa la prueba de **(c)**. ■

Para teorías con Δ^-_{n+1}–inducción (respectivamente, con Δ^-_{n+1}–colección), el teorema **IV.3.8** anterior permite caracterizar la clase de los modelos de $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ (respectivamente, de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$) como la unión de los modelos de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y los modelos de $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$ (respectivamente, de $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$).

COROLARIO IV.3.9.

(a) *Son equivalentes:*

(a.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción.*

(a.2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(b) *Son equivalentes:*

(b.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–colección.*

(b.2) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

NOTA IV.3.10. Existen teorías con Δ_{n+1}^{-}–minimización tales que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

Sea $\mathbf{T} = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n^-.$$

Más aún, para $n \geq 1$, puesto que, por **III.3.11**, $\mathbf{I}\Sigma_n^-$ es de tipo $n+1 \to n+1$, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es la única teoría Π_{n+1}–axiomatizable que cumple esta propiedad.

COROLARIO IV.3.11.

(a) *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Sea* $\varphi \in \Pi_{n+2}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi$. *Entonces:*

(a.1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.

(a.2) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$.

(b) *Sea* $\varphi \in \mathsf{U}_{n+1}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi$. *Entonces:*

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-.$$

DEMOSTRACIÓN:

La parte **(a)** se sigue de **IV.3.8–(a,b)**. La parte **(b)** se sigue de **IV.3.8–(c)**. ■

COROLARIO IV.3.12.

(a) *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Sea* $\varphi \in \Pi_{n+2}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi$. *Entonces:*

(a.1) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi$.

(a.2) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi$.

(b) *Sea* $\varphi \in \mathsf{U}_{n+1}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \varphi$. *Entonces:*

$$\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \vdash \varphi \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi.$$

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): ((**a.1**)): Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nvdash \varphi$. Entonces, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi$ es una teoría consistente y, por **IV.3.11–(a.1)**, extiende a $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$. Luego, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \vdash \varphi$. Contradicción.

((**a.2**)): Supongamos $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nvdash \varphi$. Entonces, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi$ es consistente y, por **IV.3.11–(a.2)**, extiende a $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$. Luego, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \vdash \varphi$. Contradicción.

((**b**)): La prueba es similar, usando **IV.3.11–(b)**. ■

3.C Fragmentos $\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$

En la prueba de los teoremas **IV.3.4** y **IV.3.8**, usamos que $\mathfrak{A}$ es modelo de un fragmento para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$ para obtener que, en $\mathfrak{A}$, es válido el axioma asociado a cierta fórmula $\delta(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$. Pero, en dichas pruebas, excepto para $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$, demostramos que $\delta(x) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$ a partir de $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \delta(x)$. Ésta es una forma muy particular de obtener una fórmula $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$. Para clarificar estos hechos, introducimos los siguientes fragmentos para fórmulas $\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$.

Definición IV.3.13. Sea $\mathbf{T}$ una teoría consistente.

(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x}(v) :\ \varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \varphi(x,v)\}$.
(b) $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x}(v) :\ \varphi(x,v) \in \Sigma_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \varphi(x,v)\}$.
(c) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}^*_{\varphi,x,y}(v) :\ \varphi(x,y,v) \in \Pi_n,\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y,v)\}$.
(d) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_{\varphi,x} :\ \varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \varphi(x)\}$.
(e) $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- = \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_{\varphi,x} :\ \varphi(x) \in \Sigma^-_{n+1},\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \varphi(x)\}$.
(f) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- = \mathbf{I}\Delta_0 + \{\mathbf{B}^*_{\varphi,x,y} :\ \varphi(x,y) \in \Pi^-_n,\ \mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y)\}$.

Lema IV.3.14. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Entonces:*
(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(c) $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(d) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(e) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(f) $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(g) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Demostración:
En cada caso, la prueba es similar a la dada para los resultados **IV.2.3–(e)**, **IV.3.4**, **IV.3.7**, **IV.3.8**. ■

Proposición IV.3.15. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Entonces:*
(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \iff \mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \iff \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(c) $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Demostración:
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es una extensión de $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$ y $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$, el resultado se sigue de **IV.3.14**. ■

PROPOSICIÓN IV.3.16. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.
(a) *Son equivalentes:*

(a.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*
(a.2) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(b) *Son equivalentes:*

(b.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización.*
(b.2) $\mathbf{L}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(c) *Son equivalentes:*

(c.1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ^-_{n+1}*–inducción.*
(c.2) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
Por **IV.3.15**, el resultado se sigue, en cada caso, empleando el resultado **IV.3.6**, **IV.3.7.2** o **IV.3.9**. ■

Consideramos ahora los fragmentos introducidos, para el esquema de colección.

PROPOSICIÓN IV.3.17. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$*. Entonces:*
(a) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Es inmediato que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$. Veamos el recíproco.
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T})$. Consideramos los siguientes casos.

Caso A: $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Luego, por **IV.3.14–(a)**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

Caso B: $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, por **IV.3.14–(d)**, se tiene que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$. Luego, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

((b)): La prueba es similar, usando **IV.3.14–(g)**. ■

3.D Extensiones Π_{n+2}–axiomatizables

A continuación, estudiamos extensiones de fragmentos relativizados. Para los esquemas de inducción y colección, en condiciones suficientemente generales, obtendremos que, si $\mathbf{T}$ tiene la $\Delta^{(-)}_{n+1}$ propiedad correspondiente, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es la menor teoría Π_{n+2}–axiomatizable que extiende al fragmento relativizado de $\mathbf{T}$.

PROPOSICIÓN IV.3.18. *Sea* $\mathbf{T}'$ *una teoría* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*

(a) *Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(b) *(Para* $n = 0$, *suponemos que* $\mathbf{T}'$ *es consistente con* **exp***). Si* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T}' \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \varphi$,
(2) $\mathbf{T}' \nvdash \varphi$.

De (1) y **IV.3.5–(a)**, se sigue que:

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

Luego, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}.$$

Puesto que la teoría $\mathbf{T}' + \neg\varphi$ es Σ_{n+3}–axiomatizable y, por (2), consistente; lo anterior está en contradicción con **III.2.2**.

((b)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ tal que:

(3) $\mathbf{T} \vdash \varphi$,
(4) $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \nvdash \varphi$.

De (3) y **IV.3.5–(b)**, se sigue que:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}.$$

Luego, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}.$$

Puesto que la teoría $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \neg\varphi$ es Σ_{n+3}–axiomatizable y, por (4), consistente; lo anterior está en contradicción con **III.2.2**. ■

COROLARIO IV.3.19.

(a) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–inducción. Entonces,* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es la menor teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(b) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección (para* $n = 0$, *suponemos que* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$*). Entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es la menor teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable que extiende a* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, *y, para* $n = 0$, *prueba* **exp**.

A continuación, estudiamos extensiones de fragmentos relativizados sin parámetros. En primer lugar, consideramos Π_{n+2}–extensiones de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.3.20. *Sean* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$ *y* $\mathbf{T}'$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable tal que:*

$$\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(b) *Existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y* $\mathbf{T}' + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ cerrada tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$,
(2) $\mathbf{T}' \nvdash \neg\varphi$.

Por (1) y **IV.3.11–(a.1)**, se tiene que:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-.$$

Luego, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-.$$

Por (2), $\mathbf{T}' + \varphi$ es consistente. Luego, de **III.3.10–(c)**, se sigue que:

$$\mathbf{T}' + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Puesto que $\varphi \in \Sigma_{n+2}$, entonces $\mathcal{N} \models \varphi$. En consecuencia, se tiene **(b)**. ■

NOTA IV.3.21. En contraste con el resultado **IV.3.18**, en **IV.3.20**, ambas posibilidades pueden suceder. Sean $\mathbf{T} \equiv \mathbf{PA} + \neg\mathbf{Con}(\mathbf{PA})$ y $\mathbf{T}' \equiv \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Entonces:

(–) $\mathbf{T}'$ es Π_{n+2} axiomatizable,
(–) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$,
(–) $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ $[\![\mathbf{T}' \nvdash \neg\mathbf{Con}(\mathbf{PA})]\!]$.

Por tanto, en **IV.3.20**, puede darse **(b)** y no **(a)**.

Consideramos ahora Π_{n+2}–extensiones de la teoría $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.3.22. *Sea* $\mathbf{T}'$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable tal que:*

$$\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(b) *Existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \varphi) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\varphi \in \cup_{n+1}$ cerrada tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$,
(2) $\mathbf{T}' \nvdash \neg\varphi$.

Puesto que $\neg\cup_{n+1} = \cup_{n+1}$, $\neg\varphi \in \cup_{n+1}$. Luego, de (1) y **IV.3.11–(b)**, se tiene que:

$$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-.$$

Entonces, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-.$$

Puesto que, por **III.3.5**, $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ es de tipo $n+2 \to n+1$ y, por (2), $\mathbf{T}' + \varphi$ es consistente, entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \varphi) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}),$$

y $\mathcal{N} \models \varphi$. Lo que prueba **(b)**. ■

NOTA IV.3.23. Como veremos en el siguiente ejemplo, ambas condiciones **(a)** y **(b)** son necesarias en **IV.3.22**. Sean $\mathbf{T} \equiv \mathbf{PA} + \neg\mathbf{Con(PA)}$ y $\mathbf{T}' \equiv \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Entonces:

(–) $\mathbf{T}'$ es Π_{n+2}–axiomatizable,
(–) $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$,
(–) $\mathbf{T}' \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$ $[\![\mathbf{T}' \nvdash \neg\mathbf{Con(PA)}]\!]$.

Consideramos ahora extensiones de $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.3.24. *Sean* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$ *y* $\mathbf{T}'$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable tales que* $\mathbf{T}' + \mathbf{exp}$ *es consistente y* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. *Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(b) *Existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y,*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \varphi) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\theta \in \vee_{n+1}$ tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \theta$,
(2) $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \nvdash \theta$. Luego, $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \neg\theta$ es consistente.

Por (1) y **IV.3.11–(a.2)**, se tiene que:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\theta \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-.$$

Luego, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \neg\theta \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp}.$$

Puesto que, por **III.3.9**, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \rightarrow n+1$, entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \neg\theta) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}),$$

y $\mathcal{N} \models \neg\theta$. Sean $\varphi_1 \in \Pi_{n+1}$ cerrada y $\varphi_2(x) \in \Pi_n^-$ tales que $\neg\theta \equiv \varphi_1 \wedge \exists x\, \varphi_2(x)$. Puesto que $\mathcal{N} \models \neg\theta$, existe $k \in \omega$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi_2(k)$. Sea $\varphi \in \Pi_{n+1}$ la fórmula: $\varphi_1 \wedge \varphi_2(k)$. Entonces, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}' + \mathbf{exp} + \varphi) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$, y $\mathcal{N} \models \varphi$. Lo que prueba **(b)**. ■

TEOREMA IV.3.25. *Sean* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$ *y* $\mathbf{T}'$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable tales que* $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ *es consistente y* $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. *Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- **(a)** $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
- **(b)** *Existe* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y,*
$$\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces, existe $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ fórmula cerrada tal que:

(1) $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$,
(2) $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \nvdash \neg\varphi$. Luego, $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi$ es consistente.

Por (1) y **IV.3.11–(a.2)**, se tiene que:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-.$$

Luego, por hipótesis:

$$\mathbf{T}' + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-.$$

Entonces, de **III.3.10–(a)**, se sigue que $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Por tanto, se tiene la condición **(b)**. ■

NOTA IV.3.26. **(Sobre la existencia de elementos Π_{n+1}–definibles).**
En el estudio de Π_{n+2}–extensiones de la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, hemos obtenidos dos resultados: **IV.3.24** y **IV.3.25**. Las conclusiones sobre la extensión $\mathbf{T}'$ en **IV.3.25** son más fuertes que las obtenidas en **IV.3.24**. Sin embargo, en **IV.3.25**, es necesario añadir a $\mathbf{T}'$ el esquema $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$. Este hecho, hace que no podamos obtener, para $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, resultados tan generales como para $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Por ejemplo, compárese **IV.4.10** con **IV.4.11**.

Nos planteamos entonces si **IV.3.25** es cierto cuando, en las condiciones **(a)** y **(b)**, consideramos $\mathbf{T}'$ en lugar de $\mathbf{T}' + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.
Como se hizo notar en **III.3.14**, este problema está relacionado con la existencia de elementos no estándar Π_{n+1}–definibles, o Π_{n+1}–minimales, en modelos de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.
Si observamos la prueba de **IV.3.25**, una manera natural de eliminar el uso del esquema $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ es omitirlo en **III.3.10–(a)**. En **III.3.14.2**, vimos que una condición suficiente para ello es que se verifique la hipótesis **(Π-MH)**.

LEMA IV.3.27. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría.*

(a) *Sea* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

- **(a.1)** $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Luego, para* $\mathbf{T}' = \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *no se tiene* **IV.3.20–(b)**.
- **(a.2)** $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Luego, para* $\mathbf{T}' = \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *no se tiene* **IV.3.25–(b)**.

(b) *Sea* $\varphi \in \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

- **(b.1)** $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Luego, para* $\mathbf{T}' = \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *no se tiene* **IV.3.22–(b)**.
- **(b.2)** $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{exp} + \varphi \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Luego, para* $\mathbf{T}' = \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, *no se tiene* **IV.3.24–(b)**.

DEMOSTRACIÓN:
En cada caso, supongamos que la conclusión es falsa. Entonces:

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} + \varphi \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

$$\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- + \varphi \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \varphi \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

$$\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp} + \varphi \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{exp} + \varphi \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}).$$

En cada caso, la primera teoría es verdadera y recursivamente axiomatizable y extiende a $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Lo cual está en contradicción con **III.1.3.4**. ■

3.E Fragmentos Relativizados de tipo $k \to m$

A continuación, establecemos propiedades sobre la complejidad descriptiva de extensiones de fragmentos relativizados.

PROPOSICIÓN IV.3.28.

(a) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *posee* Π_{n+1}*–extensiones.*

(b) $(n \geq 1)$ $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es de tipo* $n+1 \to n+1$.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Se sigue de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

((b)): Sea $\mathbf{T}$ una extensión de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ consistente y Π_{n+1}–axiomatizable. Entonces, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_n$. Puesto que $n \geq 1$, de **III.3.11**, se sigue que $\mathbf{I}\Sigma^-_n$ es de tipo $n+1 \to n+1$. Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. ■

PROPOSICIÓN IV.3.29.

(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.

(b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.

(c) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.

(d) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $n+2 \to n+1$.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Se sigue de **IV.3.18**.

((b)): Sea $\mathbf{T}'$ una teoría consistente y Π_{n+2}–axiomatizable tal que $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ y $\mathbf{T}' \vdash \mathbf{exp}$. Entonces, por **IV.3.18**, $\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Lo que prueba el resultado.

((c)): Por **IV.5.7**, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$. Luego, el resultado se sigue de **III.3.11**.

((d)): Por **IV.5.7**, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$. Luego, el resultado se sigue de **III.3.9**. ■

4 Propiedades de Axiomatización

4.A Con parámetros

En primer lugar, consideramos propiedades de axiomatización para el fragmento $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

TEOREMA IV.4.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría.*

(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable.*

(b) $(n \geq 1)$: $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *no es* Σ_{n+2}*–axiomatizable.*

(c) *Son equivalentes (para obtener* **(c.4)**, *bajo la hipótesis de que* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción):*

- **(c.1)** $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
- **(c.2)** $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Π_{n+2} *axiomatizable.*
- **(c.3)** $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ *es* Σ_{n+3} *axiomatizable.*
- **(c.4)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Trivial.

((b)): Puesto que $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$, el resultado se sigue de **III.2.2–(a)**.

((c)): ((c.4) $\Longrightarrow$ (c.2) $\Longrightarrow$ (c.3)): Trivial.

((c.3) $\Longrightarrow$ (c.1)): Supongamos que $\mathbf{T'} = \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)}$ es Σ_{n+3}–axiomatizable. Entonces, por **IV.3.18**, $\mathbf{T'} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto , $\mathbf{I\Sigma_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

((c.1) $\Longrightarrow$ (c.2)): Primero observemos que:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} & \Longrightarrow & \mathbf{I\Sigma_{n+1}} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.4}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![(\mathbf{c.1}) \text{ y } \mathbf{IV.3.3}]\!]. \end{array}$$

Luego, $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)}$. En consecuencia, el resultado se sigue de **IV.2.2.1**.

((c.1) $\Longrightarrow$ (c.4)): Se sigue de:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Sigma_{n+1}} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.6}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![(\mathbf{c.1}) \text{ y } \mathbf{IV.3.3}]\!]. \end{array}$$

Lo que completa la prueba del resultado. ■

Estudiamos ahora propiedades de axiomatización para $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$.

TEOREMA IV.4.2. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría.*

(a) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable.*
(b) $(n \geq 1)$: $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ *no es* Σ_{n+2}*–axiomatizable.*
(c) *Si* $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ *es* Σ_{n+3}*–axiomatizable, entonces* $\mathbf{I\Sigma_n} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(d) *Son equivalentes (para obtener* **(d.1)**, $n \geq 1$*):*
 (d.1) $\mathbf{B\Sigma_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
 (d.2) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*
 (d.3) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$.

Luego, si $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$ *y* $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable, entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección y* $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Inmediato.

((b)): Puesto que $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$, el resultado se sigue de **III.2.2–(a)**.

((c)): Supongamos que $\mathbf{T'} = \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ es Σ_{n+3}–axiomatizable. Entonces, por **IV.3.18**, se tiene que $\mathbf{B\Sigma_{n+1}} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{T'} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Puesto que $\mathbf{B\Sigma_{n+1}} + \mathbf{exp}$ es una extensión Π_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma_n} + \mathbf{exp}$, entonces $\mathbf{I\Sigma_n} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

((d)): ((**d.3**) $\Longrightarrow$ (**d.2**)): Trivial, $\mathbf{I\Sigma}_n$ es Π_{n+2}–axiomatizable.

((**d.2**) $\Longrightarrow$ (**d.3**)): Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$ y la teoría $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ es Π_{n+2}–axiomatizable, del teorema de conservación de Paris–Friedman (**I.2.6**), se sigue que $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.

((**d.1**) $\Longrightarrow$ (**d.3**)): Por **I.4.5**, $\mathbf{I\Sigma}_n$ tiene Δ_{n+1}–colección y, en consecuencia, se tiene que $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$. Por tanto, el resultado se sigue de lo siguiente (la segunda implicación por (**d.1**)):

$$\mathbf{I\Sigma}_n \Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n.$$

((**d.2**) $\Longrightarrow$ (**d.1**)): Por (**d.2**) y (**c**), $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Puesto que $n \geq 1$, entonces $\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathbf{exp}$. Lo que prueba el resultado. ■

TEOREMA IV.4.3. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*
(a) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable.*
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
((**a**) $\Longrightarrow$ (**b**)): Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, por (**a**), existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y:

$$\varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}).$$

Entonces, de **IV.3.18**, se sigue que $\varphi \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Luego, $\varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es finitamente axiomatizable.

((**b**) $\Longrightarrow$ (**a**)): Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ es finitamente axiomatizable, el resultado se sigue de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y de **IV.3.3**–(**e**). ■

TEOREMA IV.4.4. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección. Son equivalentes (bajo las hipótesis consideradas en la prueba):*
(a) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable.*
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
((**a**) $\Longrightarrow$ (**b**)): [[Hipótesis: para $n = 0$, suponemos que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$]].
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, por (**a**), existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ fórmula cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi \wedge \mathbf{exp}$, y:

$$\varphi \wedge \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}).$$

Entonces, por **IV.3.18**, $\varphi \wedge \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Luego, $\varphi \wedge \mathbf{exp} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es finitamente axiomatizable.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): [[Hipótesis: $n > 0$]].
Puesto que, para $n > 0$, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es finitamente aximatizable, el resultado se sigue de $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y de **IV.3.3–(e)**. ■

Por último, obtenemos el siguiente resultado sobre la complejidad descriptiva de fragmentos relativizados.

PROPOSICIÓN IV.4.5. $(0 < k \leq n+2)$ *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N})$.

(a) *Si* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \models\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *no es* Σ_k*–definible.*

(b) *Si* $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \models\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *no es* Σ_k*–definible.*

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \models\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, existe $\varphi \in \Pi_{n+3}$ cerrada tal que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \nvdash \varphi$. Luego, por **IV.3.4–(a)**, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \\ & \Longrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N}). \end{array}$$

Entonces, de **III.1.3.4**, se sigue que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi$ no es Σ_k–definible. En consecuencia, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ tampoco lo es.

((b)): Puesto que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \models\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, existe $\varphi \in \Pi_{n+3}$ fórmula cerrada tal que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \vdash \varphi$ y $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \nvdash \varphi$. Luego, por **IV.3.4–(b)**, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \\ & \Longrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N}). \end{array}$$

Entonces, de **III.1.3.4**, se sigue que $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi$ no es Σ_k–definible. En consecuencia, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ tampoco lo es. ■

4.B Sin parámetros

En primer lugar, estudiamos propiedades de axiomatización para el fragmento $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.4.6. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.

(a) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* $\vee_{n+2}$*–axiomatizable.*

(b) $(n \geq 1,\ \mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n)$ $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_{n+2}*–axiomatizable.*

(c) *Son equivalentes (para obtener* **(c.3)**, *bajo la hipótesis de que* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^-*–inducción):*

  (c.1) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

  (c.2) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*

  (c.3) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(d) *Si* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable, entonces:*

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): Trivial.

((**b**)): Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$, por **IV.5.5.1**, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$. Luego, el resultado se sigue de **III.2.2** (para $n \geq 1$, $\mathbf{I\Sigma}_n$ no posee Σ_{n+2}–extensiones).

((**c**)): ((**c.3**) $\Longrightarrow$ (**c.2**)): Trivial.

((**c.2**) $\Longrightarrow$ (**c.1**)): Supongamos que $\mathbf{T}' = \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Por **IV.3.27**, no se verifica la condición **IV.3.20**–(**b**). Luego, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

((**c.1**) $\Longrightarrow$ (**c.2**)): Primero observemos que:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longrightarrow & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.8}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![(\mathbf{c.1}) \text{ y } \mathbf{IV.3.3}]\!]. \end{array}$$

Luego, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Por tanto, el resultado se sigue de **IV.2.2.1**.

((**c.1**) $\Longrightarrow$ (**c.3**)): Observemos que:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.9}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![(\mathbf{c.1}) \text{ y } \mathbf{IV.3.3}]\!]. \end{array}$$

Lo que prueba el resultado.

((**d**)): Supongamos que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es $\cup_{n+2}$–axiomatizable. Existen $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ tales que:

(1) $\mathbf{T}_1$ es Π_{n+2}–axiomatizable,
(2) $\mathbf{T}_2$ es Σ_{n+2}–axiomatizable,
(3) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$.

Puesto que $\mathcal{N} \models \mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_2$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}_2$. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathbf{T}_1$ es Π_{n+2}–axiomatizable, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \Longrightarrow \mathbf{T}_1$. Por tanto:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es Σ_{n+2}–definible y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es un conjunto Π^0_{n+2}–completo, para cada $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$, se tiene que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) + \varphi \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Luego, en **IV.3.20** no se tiene la condición (**b**). Por tanto:

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

Lo que prueba (**d**). ■

A continuación, estudiamos propiedades sobre la complejidad axiomática de $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.4.7.

(a) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Σ_{n+2}*–axiomatizable.*

(b) $(n \geq 1)$ *Se verifica que:*

(b.1) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Π_{n+1}*–axiomatizable.*

(b.2) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_{n+1}*–axiomatizable.*

(c) *Si* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable, entonces* $\mathrm{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$.

[Nótese que, puesto que $\mathrm{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$*, por* **IV.3.8–(c)***, la conclusión,* $\mathrm{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$*, es equivalente a* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$*]*.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Trivial.

((b)): ((b.1)): Por reducción al absurdo, supongamos que la teoría $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Π_{n+1}–axiomatizable. Puesto que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma^-_n$ y, por **III.3.11**, $\mathrm{I}\Sigma^-_n$ es una teoría de tipo $n+1 \to n+1$, entonces $\mathrm{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Contradicción.

((b.2)): Puesto que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma^-_n$, el resultado se sigue, de **III.2.5.1**, para $n \geq 2$; o bien, de **III.2.7** , para $n = 1$ ($\mathrm{I}\Sigma^-_n$ no posee Σ_{n+1}–extensiones).

((c)): Supongamos que $\mathbf{T}' = \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Por **IV.3.27**, en **IV.3.22** no se verifica la condición **(b)**. Luego, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathrm{I}\Pi^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$. ■

Consideramos ahora el fragmento $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

TEOREMA IV.4.8. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.

(a) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* $\vee_{n+2}$*–axiomatizable.*

(b) $(n \geq 1)$: $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_{n+2}*–axiomatizable.*

(c) *Si* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable, entonces* $\mathrm{I}\Sigma_n + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.

(d) *Si* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable, entonces* $\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(e) *Si* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable, entonces:*

$$\mathrm{I}\Sigma_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Trivial.

((b)): Por **IV.5.5.5**, se tiene que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$. Luego, el resultado se sigue de **III.2.2** (para $n \geq 1$, $\mathrm{I}\Sigma_n$ no posee Σ_{n+2}–extensiones).

((c)): Supongamos que $\mathbf{T}' = \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Por **IV.3.27**, en **IV.3.24** no se verifica la condición **(b)**. Luego, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.

((**d**)): Supongamos que $\mathbf{T}' = \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Por **IV.3.27**, en **IV.3.25** no se verifica la condición (**b**). Luego, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

((**e**)): Supongamos que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es $\cup_{n+2}$–axiomatizable. Existen $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ tales que:

(1) $\mathbf{T}_1$ is Π_{n+2} axiomatizable,
(2) $\mathbf{T}_2$ is Σ_{n+2} axiomatizable,
(3) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$.

Puesto que $\mathcal{N} \models \mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_2$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{T}_2$. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathbf{T}_1$ es Π_{n+2}–axiomatizable, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \Longrightarrow \mathbf{T}_1$. Por tanto:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$ es Σ_{n+2}–definible y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es un conjunto Π^0_{n+2}–completo, para cada $\varphi \in \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathcal{N})$, se tiene que:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) + \varphi \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Luego, por **IV.3.25** (recuérdese que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$), se tiene que:

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

Lo que prueba (**e**). ■

NOTA IV.4.9. Como en la prueba de **IV.4.2–(d)**, a partir del teorema de conservación de Paris–Friedman (**I.2.6**), se obtiene que:

Aserto IV.4.9.1. *Son equivalentes:*
(i) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*
(ii) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$.

Sin embargo, ahora no hemos podido obtener la equivalencia de las propiedades anteriores con la condición $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$ (nótese que, por **IV.4.8**, dicha condición es necesaria para que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ sea Π_{n+2}–axiomatizable.)

A continuación, estudiamos cuándo los fragmentos relativizados sin parámetros son, o no, teorías finitamente axiomatizables.

TEOREMA IV.4.10. *Sea* $\mathbf{T}$ *un teoría con* Δ_{n+1}^-*–inducción. Si* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es finitamente axiomatizable, entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que la teoría $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es finitamente axiomatizable. Entonces, puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, existe $\theta \in \Pi_{n+2}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \theta$ y $\theta \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Luego, de **IV.3.20** (nótese que $\mathbf{T}' = \{\theta\}$ no verifica la condición **IV.3.20–(b)**), se sigue que $\theta \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por tanto, $\theta \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y, en consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ es finitamente axiomatizable. ■

TEOREMA IV.4.11. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}^-*–colección y tal que* $\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ *es consistente. Si* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es finitamente axiomatizable, entonces* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ *es finitamente axiomatizable módulo la teoría* $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$*; es decir, existe* $\theta \in \Pi_{n+2}$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \theta$ *y* $\theta + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.

DEMOSTRACIÓN:
Supongamos que la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es finitamente axiomatizable. Entonces, puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, existe $\theta \in \Pi_{n+2}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \theta$ y $\theta \implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Por **IV.3.27** (nótese que $\mathbf{T}' = \{\theta\}$ no verifica la condición **IV.3.25–(b)**), se tiene que $\theta + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Luego, $\theta + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$. Lo que prueba el resultado. ■

TEOREMA IV.4.12. *(*$n \geq 1$*)* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $n \geq 1$, por **IV.3.28–(b)**, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es de tipo $n{+}1 \to n{+}1$. En consecuencia, no es finitamente axiomatizable. ■

Para concluir la sección, establecemos un resultado sobre la complejidad descriptiva de fragmentos relativizados sin parámetros.

PROPOSICIÓN IV.4.13. *Sea* $\mathbf{T} \implies \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N})$.

(a) $(0 < k \leq n+1)$

(a.1) *Si* $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \mid\!\!\implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$*, entonces* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_k*–definible.*

(a.2) *Si* $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \mid\!\!\implies \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$*, entonces* $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_k*–definible.*

(b) $(0 < k \leq n)$

(b.1) *Si* $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \mid\!\!\implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$*, entonces* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *no es* Σ_k*–definible.*

DEMOSTRACIÓN:
((a)): ((a.1)): Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \mid\!\!\implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, existe $\varphi \in \vee_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nvdash \varphi$. Luego, por **IV.3.8**, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi &\implies \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \\ &\implies \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N}). \end{aligned}$$

En consecuencia, de **III.1.3.4**, se sigue que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi$ no es Σ_k–definible. Por tanto, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ tampoco lo es.

((**a.2**)): Similar a la prueba de (**a.1**).

((**b**)): Puesto que $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, existe $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \vdash \varphi$ y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nvdash \varphi$. Luego, por **IV.3.8**, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}) \\ &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_k}(\mathcal{N}). \end{aligned}$$

En consecuencia, de **III.1.3.4**, se sigue que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi$ no es Σ_k–definible. Por tanto, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ tampoco lo es. ■

5 Relaciones entre Fragmentos Relativizados

En la presente sección, aplicando los resultados centrales obtenidos en la sección **3** y el análisis de extensiones de complejidad acotada, desarrollado en el capítulo **III**, estudiamos las relaciones entre los fagmentos relativizados. Estamos interesados en:

(–) Establecer relaciones entre fragmentos clásicos y fragmentos relativizados.
(–) Estudiar las relaciones entre los esquemas de inducción, colección y minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (con o sin parámetros).
(–) Obtener jerarquías de fragmentos relativizados.
(–) Analizar las relaciones entre fragmentos relativizados y reglas de inducción y colección.

En primer lugar, establecemos propiedades de conservación.

5.A Propiedades de Conservación

PROPOSICIÓN IV.5.1.
(**a**) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *es una extensión* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$*–conservativa de* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.
(**b**) *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Entonces:*

(**b.1**) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ *es una extensión* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$*–conservativa de* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.
(**b.2**) $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$ *es una extensión* $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$*–conservativa de* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((**a**)): Sea $\varphi \in \Pi_{n+2}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi$. Entonces, $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \varphi$. Luego, de **IV.3.4**–(**a**), se sigue que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \varphi$.

((**b**)): ((**b.1**)): Sea $\varphi \in \Pi_{n+2}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \varphi$. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ es una extensión Σ_{n+3}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$, entonces $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} \vdash \varphi$. Por tanto, se tiene que $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \vdash \varphi$. Luego, de **IV.3.8–(a)**, se sigue que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi$.

((**b.2**)): La prueba es similar, usando **IV.3.8–(c)**. ■

PROPOSICIÓN IV.5.2.

(a) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–inducción. Entonces* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *es una extensión* Σ_{n+3}*–conservativa de* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(b) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección. Entonces* $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ *es una extensión* Σ_{n+3}*–conservativa de* $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:

Por las Δ_{n+1}–propiedades en las hipótesis, se tiene que:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

$$\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

$$\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}).$$

Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ es una extensión Σ_{n+3}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$ y $\mathbf{B\Sigma}_{n+1}$ es una extensión Σ_{n+3}–conservativa de $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$, se tiene el resultado. ■

5.B Fragmentos Clásicos y Fragmentos Relativizados

Cada fragmento relativizado está asociado a un fragmento clásico que lo extiende. En primer lugar, establecemos condiciones para asegurar que dicha extensión es propia.

PROPOSICIÓN IV.5.3. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.

(a) *Si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ *es consistente, entonces* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.

(b) *Si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ *es consistente, entonces* $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{UI\Delta}_{n+1} &\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \\ &\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_{n+1}. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ es $\forall_{n+2}$–axiomatizable, lo anterior está en contradicción con el teorema **III.2.2**.

((**b**)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1} + \mathbf{exp} &\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp}\\ &\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \mathbf{exp}.\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ es $\forall_{n+2}$–axiomatizable, lo anterior está en contradicción con el teorema **III.2.2**. ∎

A continuación, abordamos las relaciones entre fragmentos clásicos y los esquemas de inducción y colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

PROPOSICIÓN IV.5.4. *Consideramos las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{I}\Sigma \not\geq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})\\ (\mathrm{NS})_n & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})\\ (\mathbf{I}\Sigma' \not\geq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_n \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})\\ (\mathbf{EI}\Sigma' \not\geq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})\end{array}$$

Se verifica que:

$$\begin{array}{ccccc} & \not\Rightarrow_1 & & \not\Rightarrow_2 & \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}\\ \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} & & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & & \\ & \not\Leftarrow_2 & & \not\Leftarrow_3 & \mathbf{B}\Sigma_{n+1}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \not\Rightarrow_1 & & \not\Rightarrow_2 & \\ \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} & & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & & \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}.\\ & \not\Leftarrow_2 & & \not\Leftarrow_4 & \end{array}$$

Donde:
$\not\Rightarrow_1$ *si* $(\mathbf{I}\Sigma \not\geq \Pi)_n$; $\not\Rightarrow_2$ *si* $(\mathrm{NS})_n$; $\not\Rightarrow_3$ *si* $(\mathbf{I}\Sigma' \not\geq \Pi)_n$; y $\not\Rightarrow_4$ *si* $(\mathbf{EI}\Sigma' \not\geq \Pi)_n$.

DEMOSTRACIÓN:
$(\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Rightarrow_2 \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}, \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1})$: Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ (y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$) tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. De **II.2.8**, se sigue que existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Por **IV.2.2.1**, la teoría $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Entonces, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Ahora bien, por **II.3.8**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B}\Sigma^-_{n+1}$ (y, por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$).

$(\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \not\Rightarrow_1 \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}))$: Supongamos lo contrario. Puesto que $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$ es una teoría Σ_{n+3}–axiomatizable, por **IV.3.18**, se tiene que $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Lo cual contradice $(\mathbf{I}\Sigma \not\geq \Pi)_n$.

$(\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow_3 \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}))$: Por hipótesis, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Sigma_n \nvdash \varphi$. En consecuencia, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \nvdash \varphi$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\Sigma_{n+1} + \neg\varphi &\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) + \neg\varphi\\ &\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \qquad [\![\mathbf{IV.3.5\text{–}(a)}]\!].\end{aligned}$$

Lo que contradice **III.4.1**.

($\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \not\Leftrightarrow_2 \mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}, \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma_{n+1}} + \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$ (y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} + \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$) tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}}(\mathcal{N})$. De **II.2.8**, se sigue que existe $p \in \mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ no estándar. Por **IV.2.2.1**, la teoría $\mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} + \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ es Π_{n+2}–axiomatizable. Entonces, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \models \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} + \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$. Ahora bien, por **II.3.8**, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ (y, por tanto, $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}, p) \not\models \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$.)

($\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} \not\Leftrightarrow_1 \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$): Supongamos lo contrario. Puesto que $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$ es una teoría Σ_{n+3}–axiomatizable y prueba **exp**, por **IV.3.18**, se tiene que $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Lo cual contradice $(\mathbf{I\Sigma} \not\geq \Pi)_n$.

($\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-} \not\Leftrightarrow_4 \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$): Supongamos lo contrario. Puesto que $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-}$ es una teoría Σ_{n+3}–axiomatizable, por **IV.3.18**, se tiene que $\mathbf{B\Sigma_{n+1}^-} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma_n} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Lo cual contradice $(\mathbf{EI\Sigma'} \not\geq \Pi)_n$. ■

Nota IV.5.5. En esta nota, estudiamos las relaciones entre $\mathbf{I\Sigma_n}$ y fragmentos relativizados sin parámetros. Puesto que $\mathbf{I\Sigma_n}$ es Π_{n+2}–axiomatizable, de **IV.3.12**, se sigue que:

Aserto IV.5.5.1. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$. *Entonces:*
 (i) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$.
 (ii) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$.

Aserto IV.5.5.2. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE_0} + \mathbf{exp}$. *Entonces:*

$$\mathbf{I\Delta_1(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}.$$

Prueba del aserto:
Es inmediato que $\mathbf{I\Delta_1(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0^-} \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$. Puesto que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{exp}$, $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathbf{exp}$ y $\mathbf{exp} \in \Pi_2$, entonces, por **IV.3.12–(a.1)**, $\mathbf{I\Delta_1(T)^-} \vdash \mathbf{exp}$. □

A continuación, estudiamos si es posible debilitar la hipótesis, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$, en **IV.5.5.1**. Primero, consideramos el esquema de inducción. En este caso, no se puede debilitar la hipótesis esencialmente.

Aserto IV.5.5.3. $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Pi_{n+1}^-)^-} \not\Rightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$.

Prueba del aserto:
La primera implicación se verifica porque $\mathbf{I\Pi_{n+1}^-}$ tiene Δ_{n+1}^-–inducción. La segunda, se sigue de la primera, puesto que, para $n \geq 1$, $\mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \not\Rightarrow \mathbf{I\Sigma_n}$. □

Para teorías con Δ_{n+1}^-–inducción, se tiene que:

Aserto IV.5.5.4. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}^-*-inducción. Son equivalentes:*

(i) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(ii) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

Prueba del aserto:

((i) $\Longrightarrow$ (ii)): Se sigue de **IV.5.5.1**.

((ii) $\Longrightarrow$ (i)): Puesto que $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^--inducción, $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces, por (ii), se tiene que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$. □

Ahora veremos que, para el esquema de colección, es posible eliminar la hipótesis de **IV.5.5.1**.

Aserto IV.5.5.5. $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

Prueba del aserto:

Para $n = 0$, el resultado es trivial. Luego, podemos suponer que $n \geq 1$. Probaremos que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{S}\Pi_{n-1}^-$. Recordemos que $\mathbf{S}\Pi_{n-1}^- \Longleftrightarrow \mathbf{S}\Pi_{n-1} \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, y, por tanto, de lo anterior, se sigue el resultado. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, $\varphi(x,y) \in \Pi_{n-1}^-$ y $a \in \mathfrak{A}$. Veamos que:

$$\mathfrak{A} \models \exists w\, \forall x \leq a\, (\exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \exists y \leq w\, \varphi(x,y)).$$

Sea $\theta(x,y) \in \Pi_n^-$ la fórmula $\varphi(x,y) \vee (y = 0 \wedge \forall z\, \neg\varphi(x,z))$. Se verifica que:

(-) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$.

(-) $\exists y\, \theta(x,y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Basta observar que $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \theta(x,y)$.

Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, $\mathfrak{A} \models \exists w\, \forall x \leq a\, \exists y \leq w\, \theta(x,y)$. Sea $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a\, \exists y \leq b\, \theta(x,y)$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \forall x \leq w\, (\exists y\, \varphi(x,y) \leftrightarrow \exists y \leq b\, \varphi(x,y))$. □

Estudiamos ahora las relaciones entre fragmentos relativizados sin parámetros y fragmentos clásicos.

Proposición IV.5.6. *Consideramos las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{I}\Sigma' \not\geq \cup)_n & \mathbf{I}\Sigma_n \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}) \\
(\mathbf{I}\Sigma' \not\geq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_n \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \\
(\mathrm{NS})_n & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \\
(\mathbf{I}\Sigma \not\geq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})
\end{array}$$

Se verifica que:

$$\begin{array}{lcccc} \mathbf{B\Sigma}_{n+1} & \not\Leftrightarrow_1 & \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \not\Leftrightarrow & \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \\ \mathbf{B\Sigma}_{n+1} & \not\Leftrightarrow_2 & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \not\Leftrightarrow_3 & \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \\ \mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} & \not\Leftrightarrow_4 & \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- & \not\Leftrightarrow & \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \end{array}$$

Donde:

$\not\Leftrightarrow_1$ *si* $(\mathbf{I\Sigma}' \not\geq \cup)_n$; $\not\Leftrightarrow_2$ *si* $(\mathbf{I\Sigma}' \not\geq \Pi)_n$; $\not\Leftrightarrow_3$ *si* $(\mathrm{NS})_n$; $\not\Leftrightarrow_4$ *si* $(\mathbf{I\Sigma} \not\geq \Pi)_n$.

DEMOSTRACIÓN:
$(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Leftrightarrow_1 \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-)$: Por hipótesis, $(\mathbf{I\Sigma}' \not\geq \cup)_n$, existe $\varphi \in \cup_{n+1}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Sigma}_n \nvdash \varphi$; por tanto, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \nvdash \varphi$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} & [\![\mathbf{IV.3.11}]\!]. \end{array}$$

Lo cual está en contradicción con **III.4.9–(c)**.

$(\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1})$: Puesto que $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$, el resultado se sigue de $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$.

$(\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Leftrightarrow_2 \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-)$: Por hipótesis, $(\mathbf{I\Sigma}' \not\geq \Pi)_n$, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Sigma}_n \nvdash \varphi$, por tanto, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \nvdash \varphi$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{B\Sigma}_{n+1} + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} & [\![\mathbf{IV.3.11}]\!]. \end{array}$$

Lo cual está en contradicción con **III.4.7–(a)**.

$(\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow_3 \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1})$: Por **IV.5.4**, se tiene que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Leftrightarrow_3 \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$. Para obtener el resultado, basta observar que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

$(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \not\Leftrightarrow_4 \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-)$: Por hipótesis, $(\mathbf{I\Sigma} \not\geq \Pi)_n$, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1} \nvdash \varphi$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} & [\![\mathbf{IV.3.11}]\!]. \end{array}$$

Lo cual está en contradicción con **III.4.5–(b)**.

$(\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1})$: Puesto que $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$, el resultado se sigue de $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. ■

A continuación, obtenemos que los fragmentos clásicos sin parámetros ($\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$, $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$, $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$) son fragmentos relativizados (sin parámetros) de la teoría $\mathbf{Th}(\mathcal{N})$.

TEOREMA IV.5.7.
(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \iff \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.
(b) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \iff \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \iff \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}))^-$.
(c) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$.

DEMOSTRACIÓN:
Observemos que:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- & \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- & \\
& \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) & [\![\mathbf{IV.3.8\text{-}(a)}]\!] \\
& \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- & [\![\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-]\!]. \\
\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- & \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- & \\
& \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}))^- & \\
& \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) & [\![\mathbf{IV.3.8\text{-}(c)}]\!] \\
& \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- & [\![\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^-]\!]. \\
\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- & \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- & \\
& \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) & [\![\mathbf{IV.3.8\text{-}(b)}]\!] \\
& \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- & [\![\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-]\!].
\end{array}$$

Lo que prueba el resultado. ■

PROPOSICIÓN IV.5.8.
(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ *no es recursivamente axiomatizable.*
(b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ *no es recursivamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
Por **IV.5.3**, $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$ y $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})$. Luego, el resultado se sigue de **IV.4.5**. ■

5.C $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$

Estudiamos ahora cuándo los fragmentos de inducción y colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ sin parámetros son teorías más débiles que los correspondientes esquemas con parámetros.

PROPOSICIÓN IV.5.9. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*
(a) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.
(b) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((a) $\Longrightarrow$ (b)): [En esta parte, no es necesario que $\mathbf{T}$ tenga Δ_{n+1}–inducción]. Por (a)

y **IV.4.1–(c)**, $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)}$ no es Σ_{n+3}–axiomatizable. Puesto que $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-}$ es $\vee_{n+2}$–axiomatizable y $\vee_{n+2} \subseteq \Sigma_{n+3}$, entonces $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} \not\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-}$.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I\Sigma_{n+1}} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} &\Longleftrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} \quad [\![\mathbf{IV.4.1}]\!] \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-} \quad [\![\mathbf{IV.4.6}]\!]. \end{aligned}$$

Lo que contradice (b). ■

Proposición IV.5.10. $(n \geq 1)$ *Son equivalentes:*
(a) $\mathbf{I\Sigma_n + exp} \not\Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$.
(b) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \not\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$.

Demostración:
((a) $\Longrightarrow$ (b)): [En esta parte, no es necesario que $n \geq 1$]. Por (a) y **IV.4.2–(c)**, $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ no es Σ_{n+3}–axiomatizable. Puesto que $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$ es una teoría $\vee_{n+2}$–axiomatizable y $\vee_{n+2} \subseteq \Sigma_{n+3}$, entonces $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \not\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I\Sigma_n + exp} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Puesto que $n \geq 1$, entonces $\mathbf{I\Sigma_n} \vdash \mathbf{exp}$. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma_n} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$. Luego, puesto que $\mathbf{I\Sigma_n}$ tiene Δ_{n+1}–colección (**I.4.5**), se tiene que:

$$\mathbf{I\Sigma_n} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}, \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma_n}.$$

Por tanto, $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$. Lo cual está en contradicción con (b). ■

5.D $\mathbf{I\Delta_{n+1}^-(T)^{(-)}}$ y $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^{(-)}}$

A continuación, establecemos relaciones entre los esquemas de inducción y colección para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$ (con o sin parámetros).

Lema IV.5.11. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección. Entonces:*
(a) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$.
(b) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$.

Demostración:
((a)): Observemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Delta_{n+1}(T)} &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma_{n+1}} \vee \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} \quad [\![\mathbf{IV.3.4–(a)}]\!] \\ &\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_{n+1}} \vee \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)} \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)} \quad [\![\mathbf{IV.3.4\text{-}(b)}]\!]. \end{aligned}$$

((b)): Observemos que:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.9\text{–}(a)}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & [\![\mathbf{IV.3.9\text{–}(b)}]\!]. \end{array}$$

Lo que prueba el resultado. ∎

PROPOSICIÓN IV.5.12. *Sea* **T** *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección. Son equivalentes:*

(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(b) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(c) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(d) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:

((a) $\Longrightarrow$ (b), (c), (d)): Puesto que **T** tiene Δ_{n+1}–colección, de **IV.5.11**, se sigue que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Por (a), del resultado **IV.5.6**, se sigue que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ y $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

((b), (c), (d) $\Longrightarrow$ (a)): Observemos que [en cada caso, la primera implicación por que **T** tiene Δ_{n+1}–colección, la segunda, por hipótesis; y, la tercera, por **IV.5.5.1**]:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n,$$

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n,$$

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n.$$

Lo que prueba (a). ∎

PROPOSICIÓN IV.5.13. *Sea* **T** *una teoría con* Δ_{n+1}*–colección.*

(a) *Son equivalentes:*

(a.1) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(a.2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(b) *Son equivalentes:*

(b.1) $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(b.2) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(c) *Son equivalentes:*

(c.1) $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(c.2) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): ((**a.1**) $\Longrightarrow$ (**a.2**)): Se tiene que:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.5.9}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{T} \text{ tiene } \Delta_{n+1}\text{-colección}]\!]. \end{array}$$

Lo que prueba el resultado.

((**a.2**) $\Longrightarrow$ (**a.1**)): Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces, se tiene que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego, por **IV.5.4**, $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

((b)): ((**b.1**) $\Longrightarrow$ (**b.2**)): Basta observar que:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.5.9} \text{ y } \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})]\!] \\ & \models\!\!\Longrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.5.12} \text{ y } \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n]\!], \end{array}$$

((**b.2**) $\Longrightarrow$ (**b.1**)): ($\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$): Se sigue de (**a**).

($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$): Por hipótesis, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego, el resultado se sigue de **IV.5.12**.

((c)): ((**c.1**) $\Longrightarrow$ (**c.2**)): Se verifica que:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_n & \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n) & \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_n)^- & [\![\mathbf{IV.5.9}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & [\![(\mathbf{c.1})]\!]. \end{array}$$

((**c.2**) $\Longrightarrow$ (**c.1**)): Supongamos que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces, se tiene que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Luego, por **IV.5.6**, $\mathbf{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. ■

5.E $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$

Abordamos ahora el estudio de la teoría $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Nótese que los resultados para minimización sin parámetros no son tan generales como los obtenidos para el resto de fragmentos relativizados. Uno de los motivos para ello es que en el teorema **IV.3.8** sólo se ha probado que:

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}).$$

No sabemos si el resultado anterior es cierto si, en lugar de $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$, se considera una clase de fórmulas más amplia ($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ o $\mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$). En consecuencia, no hemos podido caracterizar la clase de los modelos de $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ como la unión de los modelos de $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-$ y los modelos de una parte adecuada de $\mathbf{T}$.

PROPOSICIÓN IV.5.14. *Si* $\mathbf{T}$ *tiene* $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$*-minimización, entonces:*

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

DEMOSTRACIÓN:

Observemos que, por **IV.2.5–(a)**, $\mathbf{T}$ tiene Δ^-_{n+1}–inducción. Por tanto:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) & [\![\mathbf{IV.3.9}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & [\![\mathbf{T} \text{ tiene } (\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})\text{–min.}]\!]. \end{array}$$

Lo que prueba el resultado. ■

PROPOSICIÓN IV.5.15. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría con* $(\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})$*–minimización. Entonces:*

(a) $(n \geq 1)$ *Si* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, *entonces* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \mathrel{|}\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(b) *Si* $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \mathrel{|}\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

DEMOSTRACIÓN:

Por **IV.5.14**, se tiene que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

((**a**)): Puesto que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$ y, por **IV.5.5.1**, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, entonces la extensión es estricta.

((**b**)): Por hipótesis, existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1} \nvdash \varphi$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} + \neg\varphi & \Longrightarrow & \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \neg\varphi & \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I}\Sigma^-_{n+1} & [\![\mathbf{IV.3.8}]\!]. \end{array}$$

Puesto que $\mathbf{I}\Pi^-_{n+1}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, lo anterior está en contradicción con **III.2.5.2**, para $n > 0$, o bien con **III.2.7**, para $n = 0$. ■

PROPOSICIÓN IV.5.16. *Consideramos las siguientes propiedades.*

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{I}\Sigma' \ngeq \cup)_n & \mathbf{I}\Sigma_n \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}) \\ (\mathbf{I}\Sigma \ngeq \Pi)_n & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \\ (\mathbf{E}\Pi^- \ngeq \Pi)_n & \mathbf{I}\Pi^-_{n+1} + \mathbf{exp} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \end{array}$$

Se verifica que:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad \not\Longrightarrow_1 \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \quad \begin{array}{ll} \not\Longrightarrow_2 & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \\ \not\Longrightarrow_3 & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \end{array}$$

Donde:

$\not\Longrightarrow_1$ *si* $(\mathbf{I}\Sigma' \ngeq \cup)_n$; $\qquad \not\Longrightarrow_2$ *si* $\begin{cases} \textit{siempre} & \textit{para } n > 0 \\ (\mathbf{I}\Sigma \ngeq \Pi)_0 & \textit{para } n = 0 \end{cases}$;

$\not\Longrightarrow_3$ *si* $\begin{cases} \textit{siempre} & \textit{para } n > 0 \\ (\mathbf{E}\Pi^- \ngeq \Pi)_0 & \textit{para } n = 0 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN:
($\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \nLeftrightarrow_1 \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$): Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, el resultado se sigue de **IV.5.6**.

($\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nLeftrightarrow_2 \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$): Consideramos los siguientes casos:

<u>Caso A</u>: $n \geq 1$. El resultado se sigue de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n \not\Longleftarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

<u>Caso B</u>: $n = 0$. Por hipótesis, existe $\varphi \in \Pi_2$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Sigma_1 \not\vdash \varphi$. Entonces, por **IV.3.11**, $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1^-$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})^-$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Pi_1^- + \neg\varphi &\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{T})^- + \varphi \\ &\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})^- + \neg\varphi \\ &\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1^-. \end{aligned}$$

Lo anterior está en contradicción con **III.4.5**.

($\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nLeftrightarrow_3 \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$): Consideramos los siguientes casos:

<u>Caso A</u>: $n \geq 1$. El resultado se sigue de $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n \not\Longleftarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

<u>Caso B</u>: $n = 0$. Por hipótesis, $(\mathbf{E}\Pi^- \not\geq \Pi)_0$, existe $\varphi \in \Pi_2$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ y $\mathbf{I}\Pi_1^- + \mathbf{exp} \not\vdash \varphi$. Entonces, $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T}) + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Pi_1^- + \neg\varphi &\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{T})^- + \varphi \\ &\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T}) + \neg\varphi \\ &\Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_1. \end{aligned}$$

Puesto que la teoría $\mathbf{I}\Pi_1^- + \neg\varphi$ es Σ_3–axiomatizable y consistente con **exp**, lo anterior contradice **III.2.2**. ∎

NOTA IV.5.17. **(Los fragmentos $\mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$).**
Puesto que $\mathbf{I}\Pi_{n+1}^- \nLeftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, entonces para cualquier extensión de $\mathbf{I}\Sigma_n$, $\mathbf{T}'$, se tiene que $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \nLeftrightarrow \mathbf{T}'$. En **IV.5.15** y **IV.5.16**, hemos empleado esta propiedad para demostrar, en el caso $n > 0$, que:

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & \nLeftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- & [\![\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n]\!], \\ \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \nLeftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-, & \\ \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) & \nLeftrightarrow & \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}). & \end{array}$$

Ahora bien, ¿son ciertas las tres propiedades anteriores si consideramos la teoría $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ junto con $\mathbf{I}\Sigma_n$?

La misma prueba de los resultados anteriores en el caso $n = 0$, permite demostrar el siguiente aserto.

Aserto IV.5.17.1. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.

(i) *Si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces:*
$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

(ii) *Si* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces:*
$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

(iii) *Si* $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} + \mathbf{exp} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces:*
$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}).$$

5.F Fragmentos Relativizados de dos Teorías

A continuación, establecemos resultados que nos permitirán obtener teoremas de jerarquía para fragmentos relativizados.

PROPOSICIÓN IV.5.18. *Sean* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *teorías con* Δ_{n+1}*–inducción. Son equivalentes:*
(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(b) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
((a) $\Longrightarrow$ (b)): Trivial.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): ($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$): Se verifica que:
$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) & \Longrightarrow & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_1) & [\![\mathbf{T}_1 \text{ tiene } \Delta_{n+1}\text{–inducción}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_2) & [\![\text{(b)}]\!]. \end{array}$$

Luego, por **IV.3.18–(a)**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.

($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$): La prueba es similar. ■

PROPOSICIÓN IV.5.19. *Sean* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *teorías con* Δ_{n+1}*–colección tales que ambas prueban* **exp**. *Son equivalentes:*
(a) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.
(b) $\mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
((a) $\Longrightarrow$ (b)): Trivial.

((b) $\Longrightarrow$ (a)): ($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$): Se verifica que:
$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_1) & [\![\mathbf{T}_1 \text{ tiene } \Delta_{n+1}\text{–colección}]\!] \\ & \Longrightarrow & \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{T}_2) & [\![\text{(b)}]\!]. \end{array}$$

Luego, por **IV.3.18–(b)**, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.

($\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$): La prueba es similar. ■

PROPOSICIÓN IV.5.20. *Supongamos que* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *tienen* Δ^-_{n+1}*–inducción y se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son verdaderas.*
(ii) $\mathbf{T}_1$ *es verdadera y* $\mathbf{T}_2$ *es* Σ_{n+2}*–definible.*
(iii) $\mathbf{T}_2$ *es verdadera y* $\mathbf{T}_1$ *es* Σ_{n+2}*–definible.*

Son equivalentes:

(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$.
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^-$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2) \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$, es suficiente aplicar, dos veces, el resultado **IV.3.20** (nótese que cada una de las condiciones **(i)–(iii)** implica que no se verifica la condición **IV.3.20–(b)**). ■

PROPOSICIÓN IV.5.21. *Supongamos que* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *tienen* Δ^-_{n+1}*–colección, ambas prueban* **exp**; *y se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son verdaderas.*
(ii) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}_1)$ *y* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$.
(iii) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son* Σ_{n+1}*–definibles.*

Si $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$, *entonces* $\mathbf{Th}_{\mathcal{V}_{n+1}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\mathcal{V}_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^-$, por **IV.3.24** (nótese que no se verifica la condición **IV.3.24–(b)**), se tiene que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\mathcal{V}_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$. En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\mathcal{V}_{n+1}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\mathcal{V}_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$. La prueba del recíproco es similar. ■

PROPOSICIÓN IV.5.22. *Sean* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *extensiones consistentes de* $\mathbf{I}\Sigma^-_{n+1}$. *Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son verdaderas.*
(ii) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son* Σ_{n+2}*–definibles.*

Son equivalentes:

(a) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$.
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^-$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$, es suficiente aplicar, dos veces, el resultado **IV.3.25**. ■

PROPOSICIÓN IV.5.23. *Supongamos que* $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *tienen* $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$*–minimización y se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbf{T}_1$ *y* $\mathbf{T}_2$ *son verdaderas.*
(ii) $\mathbf{T}_1$ *es verdadera y* $\mathbf{T}_2$ *es* Σ_{n+1}*–definible.*
(iii) $\mathbf{T}_2$ *es verdadera y* $\mathbf{T}_1$ *es* Σ_{n+1}*–definable.*

Si $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$*, entonces* $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$.

DEMOSTRACIÓN:
Puesto que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^-$ y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$, es suficiente aplicar, dos veces, el resultado **IV.3.22**. ■

NOTA IV.5.24. En general, no es cierto que las siguientes condiciones sean equivalentes:

(a) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1)^- \Longleftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$.
(b) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$.

Como contraejemplo, tómese $\mathbf{T}_1 = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. Entonces, se tiene **(a)** y no se tiene **(b)** (por supuesto, siempre **(b)** $\Longrightarrow$ **(a)**).

PROPOSICIÓN IV.5.25. *Sean* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$ *tales que* $\mathbf{T}_1$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*

(a) *Si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) + \mathbf{exp} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$*, entonces:*
$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \not\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2).$$
(b) *Si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_2)$ *y* $\mathbf{T}_1$ *es* Σ_{n+2}*–definible, entonces:*
$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \not\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-.$$
(c) *Si* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$*, y* $\mathbf{T}_1$ *es* Σ_{n+1}*–definible, entonces:*
$$\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \not\Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-.$$

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**): Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)$. Puesto que $\mathbf{T}_1$ tiene Δ_{n+1}–inducción, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)$. Luego, del resultado **IV.3.18**, se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$.

(**(b)**): Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$. Puesto que la teoría $\mathbf{T}_1$ tiene Δ_{n+1}–inducción, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$. En consecuencia, de **IV.3.25** (puesto que $\mathbf{T}_1$ es Σ_{n+2}–definible, no se verifica la condición **IV.3.25–(b)**), se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$.

((c)): Supongamos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$. Puesto que la teoría $\mathbf{T}_1$ tiene Δ_{n+1}-inducción, entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}_2)^-$. En consecuencia, de **IV.3.22** (puesto que $\mathbf{T}_1$ es Σ_{n+1}-definible, no se tiene la condición **IV.3.22–(b)**), se sigue que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}_1) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}_2)$. ■

5.G Reglas de Inducción y Colección

En [8] y [10], se pone de manifiesto la relación existente entre los fragmentos relativizados y las teorías obtenidas a partir de reglas de inferencia (véase **I–9**). Siguiendo las ideas recogidas en esos trabajos, en esta subsección, analizamos dicha relación mediante la metodología usada en la presente memoria.

En primer lugar, caracterizamos Δ_{n+1}-propiedades en términos de reglas de inducción y colección.

LEMA IV.5.26. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_0$. *Entonces:*

(a) $[\mathbf{T}, \Sigma_{n+1}\text{-CR}] \iff \mathbf{T} + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

(b) $[\mathbf{T}, \Delta_{n+1}\text{-IR}] \iff \mathbf{T} + \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Basta observar que:

$$\begin{aligned}[\mathbf{T}, \Sigma_{n+1}\text{-CR}] &\iff \mathbf{T} + \mathbf{B}^*\Sigma_{n+1}(\mathbf{T}) \\ &\iff \mathbf{T} + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \quad [\![\mathbf{IV.3.17}]\!].\end{aligned}$$

((b)): Inmediato. ■

PROPOSICIÓN IV.5.27. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_0$.

(a) *Son equivalentes:*

- **(a.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*-colección.*
- **(a.2)** $\mathbf{T} + \Sigma_{n+1}\text{-CR} \iff \mathbf{T}$.

(b) *Son equivalentes:*

- **(b.1)** $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*-inducción.*
- **(b.2)** $\mathbf{T} + \Delta_{n+1}\text{-IR} \iff \mathbf{T}$.

DEMOSTRACIÓN:

((a)): Basta observar que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T} + \Sigma_{n+1}\text{-CR} \iff \mathbf{T}) \quad &\text{sii} \quad (\mathbf{T} \Longrightarrow [\mathbf{T}, \Sigma_{n+1}\text{-CR}]) \\ &\text{sii} \quad (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})) \qquad [\![\mathbf{IV.5.26–(a)}]\!].\end{aligned}$$

((**b**)): Basta observar que:

$$\begin{array}{llll} (\mathbf{T} + \Delta_{n+1}\text{-IR} \Longleftrightarrow \mathbf{T}) & \text{sii} & (\mathbf{T} \Longrightarrow [\mathbf{T}, \Delta_{n+1}\text{-IR}]) & \\ & \text{sii} & (\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})) & [\![\mathbf{IV.5.26\text{–}(b)}]\!]. \end{array}$$

Lo que prueba el resultado. ■

A continuación, estableceremos condiciones que permiten probar que los fragmentos relativizados son cerrados bajo la regla de inducción, o de colección.

LEMA IV.5.28. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$.

(**a**) *Sea* $\varphi(x, v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi(0, v) \\ \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi(x, v) \to \varphi(x+1, v) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall x\, \varphi(x, v).$$

(**b**) *Sea* $\psi(x, v) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \psi(0, v) \\ \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \psi(x, v) \to \psi(x+1, v) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall x\, \psi(x, v).$$

DEMOSTRACIÓN:

((**a**)): Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Por hipótesis:

(1) $\mathfrak{A} \models \varphi(0, v)$,

(2) $\mathfrak{A} \models \varphi(x, v) \to \varphi(x+1, v)$.

Sea $\theta(y) \in \Sigma^-_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\theta(y) \equiv \varphi((y)_0, ((y)_0 + (y)_1)_1).$$

Aserto IV.5.28.1. $\theta(y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Prueba del aserto:

Puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$, entonces $\mathbf{T}$ prueba las propidades usuales de la función J de Cantor. Sea $\psi(x, v) \in \Pi_{n+1}$ tal que:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi(x, v) \leftrightarrow \psi(x, v).$$

Sea $\theta'(y) \in \Pi^-_{n+1}$ la siguiente fórmula:

$$\psi((y)_0, ((y)_0 + (y)_1))_1).$$

Es fácil comprobar que $\mathbf{T} \vdash \theta(y) \leftrightarrow \theta'(y)$. Por tanto , $\theta(y) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. □

Aserto IV.5.28.2.

(**i**) $\mathfrak{A} \models \theta(0)$.

(**ii**) $\mathfrak{A} \models \theta(y) \to \theta(y+1)$.

(**iii**) $\mathfrak{A} \models \forall y\, \theta(y)$.

(**iv**) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x, v)$.

Prueba del aserto:

((**i**)): Puesto que $0 = \langle 0, 0\rangle$, entonces $(0)_0 = 0$. Luego, (**i**) se sigue de (1).

((**ii**)): Sea $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a)$. Sean $b, c \in \mathfrak{A}$ tales que $a = \langle b, c\rangle$. Entonces:

(3) $\mathfrak{A} \models \varphi(b, (b+c)_1)$.

Para comprobar que $\mathfrak{A} \models \theta(a+1)$, consideramos los siguientes casos:

Caso A: $0 < c$. Entonces, $a + 1 = \langle b+1, c-1\rangle$. Por (2) y (3), se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi(b+1, (b+c)_1)$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \theta(a+1)$.

Caso B: $c = 0$. Entonces, $a+1 = \langle 0, b+1\rangle$. Por (1), $\mathfrak{A} \models \varphi(0, (b+1)_1)$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \theta(a+1)$.

((**iii**)): Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$, entonces, de **IV.5.28.1**, (**i**) y (**ii**), se sigue que $\mathfrak{A} \models \forall y\, \theta(y)$.

((**iv**)): Sean $b, c \in \mathfrak{A}$. Sean $a, d \in \mathfrak{A}$ tales que $(b+d)_1 = c$ y $a = \langle b, d\rangle$. Por (**iii**), $\mathfrak{A} \models \theta(a)$. Luego, $\mathfrak{A} \models \varphi((a)_0, ((a)_0 + (a)_1)_1)$; y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \varphi(b, c)$. □

De la parte (**iv**) del último aserto, se sigue (**a**).

((**b**)): La prueba es similar. ■

TEOREMA IV.5.29. *Supongamos que* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$. *Entonces:*

(**a**) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \Sigma_{n+1}\text{-IR}$.

(**b**) $\mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- + \Pi_{n+1}\text{-IR}$.

(**c**) *Si* $\mathbf{T}$ *es* Δ^-_{n+1}*-cerrada, entonces* $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- + \Pi_{n+1}\text{-IR}$.

DEMOSTRACIÓN:

((**a**) ($\Longleftarrow$): Inmediato.

($\Longrightarrow$): Es suficiente probar que:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow [\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-, \Sigma_{n+1}\text{-IR}].$$

Sea $\varphi(x, v) \in \Sigma_{n+1}$ tal que:

(-) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi(0, v)$,

(-) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \varphi(x, v) \rightarrow \varphi(x+1, v)$.

Entonces, $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}$ prueba estas fórmulas. Por tanto, $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \forall x\, \varphi(x, v)$. Luego, por hipótesis, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \varphi(x, v)$. En consecuencia, $\varphi(x, v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces, de **IV.5.28**, se sigue que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall x\, \varphi(x, v)$.

((**b**)): ($\Longleftarrow$): Inmediato.

($\Longrightarrow$): Es suficiente probar que:

$$\mathbf{I\Delta}^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow [\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-, \Pi_{n+1}\text{-IR}].$$

Sea $\psi(x,v) \in \Pi_{n+1}$ tal que:

(-) $\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \psi(0,v)$,

(-) $\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \psi(x,v) \to \psi(x+1,v)$.

Entonces, $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ prueba estas fórmulas. Por tanto, $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \vdash \forall x\, \psi(x,v)$. Luego, por hipótesis, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \psi(x,v)$. En consecuencia, $\psi(x,v) \in \Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})$. Entonces, de **IV.5.28**, se sigue que $\mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall x\, \psi(x,v)$.

((**c**)): Puesto $\mathbf{T}$ es Δ^-_{n+1}-cerrada, por **IV.2.2.3**, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \iff \mathbf{I}\Delta^*_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Luego, el resultado se sigue de (**b**). ■

LEMA IV.5.30. *Supongamos que* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$. *Sea* $\varphi(x,y,v) \in \Sigma_{n+1}$ *una fórmula tal que* $\exists y\, \varphi(x,y,v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. *Entonces:*

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y,v) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y,v).$$

DEMOSTRACIÓN:
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Entonces, por hipótesis:

(1) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \exists y\, \varphi(x,y,v)$.

Sea $\theta(x,y,y_1,v) \in \Pi_n$ tal que $\varphi(x,y,v) \equiv \exists y_1\, \theta(x,y,y_1,v)$. Sea $\delta(w,y_2) \in \Pi_n^-$ la siguiente fórmula:

$$\theta((w)_0,(y_2)_0,(y_2)_1,(w)_1).$$

Por (1), se tiene que:

(2) $\mathfrak{A} \models \forall w\, \exists y_2\, \delta(w,y_2)$.

Se verifica que:

Aserto IV.5.30.1. $\exists y_2\, \delta(w,y_2) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

Prueba del aserto:
Sea $\psi(x,v) \in \Pi_{n+1}$ tal que $\mathbf{T} \vdash \exists y\, \varphi(x,y,v) \leftrightarrow \psi(x,v)$. Entonces, las siguientes equivalencias son demostrables en $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} \exists y_2\, \delta(w,y_2) &\leftrightarrow \exists y\, \exists y_1\, \theta((w)_0,y,y_1,(w)_1) \\ &\leftrightarrow \exists y\, \varphi((w)_0,y,(w)_1) \\ &\leftrightarrow \psi((w)_0,(w)_1) \end{aligned}$$

Puesto que $\psi((w)_0,(w)_1) \equiv \psi'(w) \in \Pi^-_{n+1}$, esto prueba el aserto. □

Aserto IV.5.30.2. $\mathfrak{A} \models \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y,v)$.

Prueba del aserto:
Sean $a, b \in \mathfrak{A}$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq a\, \exists y \leq u\, \varphi(x,y,b)$.

Sea $c = \langle a, b\rangle$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$, del aserto y (2), se sigue que:

$$\mathfrak{A} \models \forall z\, \exists u\, \forall w \leq z\, \exists y_2 \leq u\, \delta(w, y_2).$$

En consecuencia:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall w \leq c\, \exists y_2 \leq u\, \delta(w, y_2).$$

Luego, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall w \leq c\, \exists y_2\, \theta((w)_0, (y_2)_0, (y_2)_1, (w)_1).$$

Entonces:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall w \leq c\, \exists y, y_1 \leq u\, \theta((w)_0, y, y_1, (w)_1).$$

Luego:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall w \leq c\, \exists y \leq u\, \varphi((w)_0, y, (w)_1).$$

Sea $d \leq a$. Entonces, $\langle d, b\rangle \leq \langle a, b\rangle = c$. Por tanto:

$$\mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x \leq a\, \exists y \leq u\, \varphi(x, y, b),$$

Lo que prueba el aserto. □

Del último aserto, se sigue el lema. ■

TEOREMA IV.5.31. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$. *Entonces:*

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- + \Sigma_{n+1}\text{-CR}.$$

DEMOSTRACIÓN:
($\Longleftarrow$): Inmediato.

($\Longrightarrow$): Es suficiente probar que:

$$\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow [\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-, \Sigma_{n+1}\text{-CR}].$$

Sea $\varphi(x, y, v) \in \Sigma_{n+1}$ tal que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y, v)$. Entonces, $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ prueba dicha fórmula Π_{n+2}; y, por tanto, $\mathbf{I}\Sigma_n$ también la prueba. En consecuencia, puesto que $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$, $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$. Entonces, $\exists y\, \varphi(x, y, v) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Luego, por **IV.5.30**, se tiene que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^- \vdash \forall z\, \exists u\, \forall x \leq z\, \exists y \leq u\, \varphi(x, y, v)$. ■

COROLARIO IV.5.32. **(Beklemishev).** $\mathbf{I}\Delta_0 + \Sigma_{n+1}\text{-CR} \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

DEMOSTRACIÓN:
($\Longrightarrow$): Observemos que:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I}\Delta_0 + \Sigma_{n+1}\text{-CR} & \Longrightarrow & [\mathbf{I}\Delta_0, \Sigma_{n+1}\text{-CR}] & \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Delta_0) & [\![\mathbf{IV.5.26}]\!] \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_n & [\![\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Delta_0) \Longleftrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n]\!]. \end{array}$$

($\Longleftarrow$): Basta observar que:

$$\begin{array}{rll} \mathbf{I\Sigma}_n & \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n) & \\ & \Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n)^- & \\ & \Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n)^- + \Sigma_{n+1}\text{-CR} & [\![\mathbf{IV.5.31}]\!] \\ & \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0 + \Sigma_{n+1}\text{-CR} & [\![\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0]\!]. \end{array}$$

Lo que completa la prueba del resultado. ■

6 Fragmentos Relativizados de Fragmentos Clásicos

En lo que sigue, emplearemos los resultados sobre axiomatización y relaciones entre fragmentos relativizados, obtenidos en las secciones **4** y **5**, para estudiar propiedades de fragmentos relativizados de fragmentos clásicos. Es decir, fragmentos para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$, cuando $\mathbf{T}$ es una de las teorías: $\mathbf{I\Sigma}_k$, $\mathbf{PA}$ o $\mathbf{Th}(\mathcal{N})$.

Nótese que $\mathbf{I\Sigma}_k$ $(k \geq n)$, $\mathbf{PA}$ y $\mathbf{Th}(\mathcal{N})$ son teorías con Δ_{n+1}–colección y, en consecuencia, también tienen el resto de las Δ_{n+1}–propiedades consideradas; así como sus versiones sin parámetros.

A continuación, destacamos propiedades de los fragmentos clásicos que nos permitirán aplicar los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores (véanse los resultados **I.3.4**, **I.8.6** y **I.8.5**):

PROPOSICIÓN IV.6.1.

(a) Jerarquía:
  - **(a.1)** $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Sigma}_1)$.
  - **(a.2)** *Para todo* $m \geq 0$, $\mathbf{I\Sigma}_m \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$.
  - **(a.3)** $\mathbf{PA} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$.

(b) Envolturas:
  Sean $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x) \in \Sigma_{m+1}^-$. *Entonces:*
  $$\mathbf{I\Sigma}_m + \mathbf{I}_{\varphi_1} + \ldots + \mathbf{I}_{\varphi_k} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}).$$

(c) Finitamente axiomatizable:
  - **(c.1)** *Para* $m \geq n$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$ *no es finitamente axiomatizable.*
  - **(c.2)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA})$ *no es finitamente axiomatizable.*
  - **(c.3)** $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ *no es finitamente axiomatizable.*

6.A Relaciones entre Fragmentos Relativizados (de fragmentos clásicos)

A partir de los resultados **IV.5.4** y **IV.5.6**, se obtienen las siguientes propiedades sobre las relaciones con los fragmentos clásicos.

PROPOSICIÓN IV.6.2.

(a) $\begin{cases} (k \geq 2) & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+k}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \\ (k = 1) & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \end{cases}$

(b) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

(c) $\begin{cases} (k \geq 2) & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+k}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \\ (k = 1) & \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-} \end{cases}$

(d) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

DEMOSTRACIÓN:
((**b**), (**d**), y (**a**), (**c**) para $k \geq 2$): Por **IV.6.1–(a)**, se tiene que:

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}), \text{ y } \mathbf{PA} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

De **III.1.3.4**, se sigue que:

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}),$$
$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Por tanto, los resultados se siguen de **IV.5.4**.

((**a**), para $k = 1$): ($\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$): Basta observar que (la equivalencia, se tiene por **IV.4.1–(c)**):

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}).$$

($\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$): El resultado se sigue de **IV.5.4**.

((**c**), para $k = 1$): ($\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$): Basta observar que:

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1}^{-} \mathrel{|\!\!\!\Longrightarrow} \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \Longrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}).$$

($\mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$): Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \not\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$, entonces el resultado se sigue de **IV.5.4**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.3.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

(b) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

(c) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

(d) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \not\Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}^{-}$.

(e) *Para cada* $m > n$, $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$.

(f) $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\mathbf{\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^{-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^{-}$.

DEMOSTRACIÓN:
La proposición se sigue de los resultados **IV.6.1–(a)** y **IV.5.6**. ■

$\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)}$ y $\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^-}$. $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)}$ y $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$

PROPOSICIÓN IV.6.4.
(a) *Para cada* $m > n$, $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})^-}$.
(b) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(PA)} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}(PA)^-}$.
(c) $\mathbf{I\Delta_{n+1}}(\mathcal{N}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta_{n+1}}(\mathcal{N})^-$.
(d) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})} \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{n+1})^-} \iff \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(I\Sigma_{n+1})}$.
(e) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-} \iff \mathbf{I\Sigma_n}$.

DEMOSTRACIÓN:
((a), (b), (c)): Se sigue de **IV.5.9** y **IV.6.1–(a)**.

((d)): Se sigue de **IV.5.9** y **IV.4.6–(c)**.

((e)): Por **I.4.5**, $\mathbf{I\Sigma_n}$ tiene Δ_{n+1}–colección y, por tanto, tiene Δ_{n+1}–inducción. En consecuencia, $\mathbf{I\Sigma_n} \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)}$.
De **IV.5.9**, se sigue que $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \iff \mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-}$. ■

PROPOSICIÓN IV.6.5.
(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})^-}$.
(b) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(PA)} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(PA)^-}$.
(c) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}}(\mathcal{N}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}}(\mathcal{N})^-$.
(d) $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \iff \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-} \iff \mathbf{I\Sigma_n}$.

DEMOSTRACIÓN:
((a), (b), (c)): Se sigue de **IV.5.10** y **IV.6.1–(a)**.

((d)): Por **I.4.5**, $\mathbf{I\Sigma_n}$ tiene Δ_{n+1}–colección. Entonces $\mathbf{I\Sigma_n} \iff \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)}$.
Por **IV.5.10**, se tiene que $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)} \iff \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_n)^-}$. ■

$\mathbf{I\Delta_{n+1}(T)^{(-)}}$ y $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^{(-)}}$

PROPOSICIÓN IV.6.6.
(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})}$.
(b) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})^-} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(I\Sigma_{m+1})^-}$.
(c) $\mathbf{I\Delta_{n+1}(PA)} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(PA)}$ y $\mathbf{I\Delta_{n+1}(PA)^-} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}(PA)^-}$.
(d) $\mathbf{I\Delta_{n+1}}(\mathcal{N}) \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}}(\mathcal{N})$ y $\mathbf{I\Delta_{n+1}}(\mathcal{N})^- \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta_{n+1}}(\mathcal{N})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
El resultado se sigue de **IV.5.12** y **IV.6.1–(a)**. ■

<u>$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$</u>

PROPOSICIÓN IV.6.7.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^-$.

(b) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$.

(c) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
El resultado se sigue de **IV.5.14**, **IV.5.15** y **IV.6.1–(a)**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.8.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})$.

(b) $(n \geq 1)$ *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^-$.

(c) *Para todo* $m \geq 1$, $\mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^-$.

(d) $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_1)^- \not\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_1)^-$.

(e) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA}) \not\Leftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$.

(f) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) \not\Leftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
La proposición se sigue de los resultados **IV.5.16** y **IV.6.1–(a)**. ■

<u>Fragmentos Relativizados de dos teorías</u>

TEOREMA IV.6.9.

(a) *Para cada* $m \geq n$:

  (a.1) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)$.

  (a.2) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)$.

(b) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$.

(c) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N}) \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})$.

DEMOSTRACIÓN:
El teorema se sigue de **IV.5.18**, **IV.5.19** y **IV.6.1–(a)**. ■

TEOREMA IV.6.10. *Para cada* $m \geq n$:

(a) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)^-$.

(b) $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)^-$.

(c) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_{m+1})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m)^-$.

(d) $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$, y $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- \models\!\!\!\Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
El teorema se sigue de **IV.6.1–(a)**, **IV.5.20**, **IV.5.21** y **IV.5.23**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.11.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$.
(b) *Para cada* $m > n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$.
(c) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) \not\Leftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$.
(d) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_m) \not\Leftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$.
(e) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA}) \not\Leftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$.

DEMOSTRACIÓN:
La proposición se sigue de **IV.6.1–(a)** y **IV.5.25**. ■

6.B Axiomatización

En lo que sigue, a partir de los resultados obtenidos en la sección **4**, estudiamos propiedades de axiomatización para fragmentos relativizados de fragmentos clásicos.

Inducción: $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$

PROPOSICIÓN IV.6.12.

(a) *Se verifica que:*

- **(a.1)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})$ *es* Π_{n+2}*–axiomatizable.*
- **(a.2)** *Para cada* $m > n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$ *es una teoría* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*
- **(a.3)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*
- **(a.4)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*

(b) *Se verifica que:*

- **(b.1)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})^-$ es Π_{n+2}–axiomatizable.
- **(b.2)** Para cada $m > n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ es una teoría $\bigvee_{n+2}$–axiomatizable y no es $\bigcup_{n+2}$–axiomatizable.
- **(b.3)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ es $\bigvee_{n+2}$–axiomatizable y no es $\bigcup_{n+2}$–axiomatizable.
- **(b.4)** $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ es $\bigvee_{n+2}$–axiomatizable y no es $\bigcup_{n+2}$–axiomatizable.

DEMOSTRACIÓN:
La parte **(a)** se sigue de **IV.4.1**. La parte **(b)** se sigue de de **IV.4.6**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.13.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$ *y* $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{n+1})^-$ *no son finitamente axiomatizables.*

(b) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ *no son finitamente axiomatizables.*

(c) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})$, $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ *no son finitamente axiomatizables.*

DEMOSTRACIÓN:
Se sigue de los resultados **IV.4.3**, **IV.4.10** y **IV.6.1–(c)**. ■

Colección: $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$

PROPOSICIÓN IV.6.14.

(a) *Se verifica que:*

- **(a.1)** *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$ *es una teoría* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*
- **(a.2)** $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*
- **(a.3)** $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})$ *es* Π_{n+3}*–axiomatizable y no es* Σ_{n+3}*–axiomatizable.*

(b) *Se verifica que:*

- **(b.1)** *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ *es una teoría* $\vee_{n+2}$*–axiomatizable y no es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable.*
- **(b.2)** $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ *es* $\vee_{n+2}$*–axiomatizable y no es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable.*
- **(b.3)** $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ *es* $\vee_{n+2}$*–axiomatizable y no es* $\cup_{n+2}$*–axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
La parte **(a)** se sigue de **IV.4.2**. La parte **(b)** se sigue de **IV.4.8**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.15.

(a) *Para cada* $m \geq n$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})$ *no es finitamente axiomatizable.*

(b) *Para cada* $m > n$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ *no es finitamente axiomatizable.*

(c) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})$ *no son finitamente axiomatizables.*

(d) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$, $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ *no son finitamente axiomatizables.*

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**, **(c)**): Se siguen de **IV.4.4** y **IV.6.1–(c)**.

(**(b)**): Supongamos que $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ es finitamente axiomatizable. Entonces, por **IV.4.11**, existe $\theta \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que:

(1) $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \theta$,

(2) $\theta + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$.

Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{m+1}$ es una extensión Σ_{m+3}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_{m+1}^-$, entonces, por (1), $\mathbf{I\Sigma}_{m+1}^- \vdash \theta$. Sean $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x) \in \Sigma_{m+1}^-$ tales que $\mathbf{I\Sigma}_m + \mathbf{I}_{\varphi_1} + \dots + \mathbf{I}_{\varphi_k} \vdash \theta$. De (2), recordemos que $n < m$, se sigue que:

$$\mathbf{I\Sigma}_m + \mathbf{I}_{\varphi_1} + \dots + \mathbf{I}_{\varphi_k} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}).$$

Lo anterior está en contradicción con **IV.6.1–(b)**.

((**d**)): Supongamos que $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ es finitamente axiomatizable. Entonces, por **IV.4.11**, existe $\theta \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que:

(1) $\mathbf{PA} \vdash \theta$,

(2) $\theta + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) + \mathbf{I\Sigma}_{n+1}^-$.

Por (1), existe $m > n$ tal que $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \theta$. Entonces, de (2), se sigue que:

$$\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+2}).$$

Lo anterior está en contradicción con **IV.6.1–(a.2)**.
Para la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$, obsérvese que, por **IV.3.29**, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^- + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \to n+1$. Por tanto, $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathcal{N})^-$ no es finitamente axiomatizable. ■

Minimización: $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$

PROPOSICIÓN IV.6.16.

(a) *Para cada $m \geq n$, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ es una teoría Σ_{n+2}–axiomatizable y no es Π_{n+2}–axiomatizable.*

(b) *$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ es Σ_{n+2}–axiomatizable y no es Π_{n+2}–axiomatizable.*

(c) *$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ es Σ_{n+2}–axiomatizable y no es Π_{n+2}–axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
La proposición se sigue de **IV.4.7**. ■

PROPOSICIÓN IV.6.17.

(a) *($n \geq 1$) Para cada $m \geq n$, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$ no es finitamente axiomatizable.*

(b) *$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ no es finitamente axiomatizable.*

(c) *$\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ no es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
((**a**)): Es consecuencia inmediata de **IV.4.12**.

((**b**)): Puesto que **PA** tiene $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$–minimización, entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{PA}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$ es finitamente axiomatizable.

Entonces, existe $\theta \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que:

(1) $\mathbf{PA} \vdash \theta$. Luego, existe $m > n$ tal que $\mathbf{I\Sigma}_m \vdash \theta$.

(2) $\theta \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{PA})^-$.

Por (2), de **IV.3.22**, se sigue $\theta \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{PA})$. Luego:

$$\mathbf{I\Sigma}_m \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{PA}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}).$$

Lo anterior está en contradicción con **IV.6.1–(a.2)**.

((c)): Por **IV.5.7**, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$. Luego, por **III.3.5**, $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathcal{N})^-$ es de tipo $n+2 \to n+1$; y, en consecuencia, no es finitamente axiomatizable. ■

NOTA IV.6.18. **(Fragmentos relativizados de $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$).**
Estudiamos aquí algunas propiedades de esquemas relativizados de la teoría $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$.

Aserto IV.6.18.1.

(i) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría* Σ_{n+2}*–axiomatizable tal que* $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{T}$. *Entonces:*

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T})^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T}).$$

(ii) $\mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_0$.

(iii) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)$.

(iv) $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)$.

Prueba del aserto:
((i)): Primero, observemos que $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T}$ es consistente. Puesto que, por **I.4.5**, $\mathbf{I\Sigma}_n$ tiene Δ_{n+1}–colección, $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección; y, en consecuencia, tiene Δ_{n+1}–inducción. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{T})$, el resultado se sigue de **IV.4.1**.

((ii), (iii)): Ambos son consecuencias de **(i)**.

((iv)): Puesto que $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ tiene Δ_{n+1}^-–inducción y $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$, de **IV.4.6–(c)**, se sigue que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)$.
Puesto que $n > 0$, $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ no extiende a $\mathbf{I\Sigma}_n$; por tanto:

$$\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^-.$$

Lo que prueba **(iv)**. □

Es también interesante estudiar propiedades de la teoría $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^-$.

Aserto IV.6.18.2. *Se tiene que:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^- \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0.$$

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathbf{I\Pi_1^-}$ tiene Δ_1–colección, $\mathbf{I\Delta_1(I\Pi_1^-)^-} \Longleftrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_2}(I\Pi_1^-)} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Pi_1^-)^-}$. La extensión es estricta, pues $\mathbf{B\Sigma_1}$ es una extensión Π_2–conservativa de $\mathbf{I\Delta_0}$ y, por **I.4.3** y **I.4.2–(b.5)**, se tiene que $\mathbf{Th_{\Pi_2}(I\Pi_1^-)} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$. □

En el aserto anterior, queda pendiente la cuestión: ¿$\mathbf{B^*\Delta_1(I\Pi_1^-)^-} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$?
Ahora bien, como veremos en **V.2.5**, responder afirmativamente a la pregunta anterior implica que el problema **(NE)** es falso. Es decir, $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \not\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1}$.

Nota IV.6.19. **(Fragmentos relativizados de $\mathbf{I\Delta_0} + (\neg)\mathbf{exp}$).**
A continuación, aplicando los resultados probados en el presente capítulo, obtenemos relaciones entre fragmentos relativizados de la teoría $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$.

Aserto IV.6.19.1.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{I\Delta_0+exp} & & & & & & \\
\Updownarrow & & & & & & \\
\mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0+exp)} & \Longleftrightarrow & \mathbf{I\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-} & \models\!\!\Longrightarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)} & & \\
\Updownarrow & & \overline{\Downarrow} & & \Downarrow & & \\
\mathbf{L\Delta_1(I\Delta_0+exp)} & \models\!\!\Longrightarrow & \mathbf{L\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-} & \not\Longleftarrow & \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-} & \Longrightarrow & \mathbf{I\Delta_0} \\
 & & \overline{\Downarrow} & & & & \\
 & & \mathbf{I\Delta_0} & & & &
\end{array}
$$

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathbf{B\Sigma_1} + \mathbf{exp}$ es una extensión Π_2–conservativa de $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$, esta última teoría tiene Δ_1–colección; y, por tanto, también tiene el resto de $\Delta_1^{(-)}$–propiedades. Para obtener las relaciones del diagrama, basta aplicar los resultados **IV.4.1–(c)**, **IV.5.9**, **IV.5.12–(c)**, **IV.5.15–(b)** y **IV.5.16**. □

En el diagrama anterior, quedan pendientes tres relaciones:

(–) ¿$\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)}$?

(–) ¿$\mathbf{I\Delta_0} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-}$?

(–) ¿$\mathbf{L\Delta_1(I\Delta_0+exp)^-} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0+exp)}$?

Como veremos en **V.2.5**, responder negativamente a cualquiera de las tres preguntas anteriores, implica que **(NE)** es falso.

En el caso de la teoría $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$, la situación es bien distinta. Los fragmentos para fórmulas $\Delta_1(\mathbf{I\Delta_0}+\neg\mathbf{exp})^{(-)}$ resultan equivalentes a $\mathbf{I\Delta_0}$. Basta tener en cuenta el siguiente resultado de conservación.

Aserto IV.6.19.2. $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$ *es una extensión* Π_2*–conservativa de* $\mathbf{I\Delta_0}$.

Prueba del aserto:
Sea $\varphi \in \Pi_2$ cerrada tal que $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \vdash \varphi$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{I\Delta_0} \nvdash \varphi$. Sean $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi$ no estándar y $\theta(x) \in \Pi_1^-$ tal que la fórmula $\neg\varphi$ es $\exists x\, \theta(x)$. Entonces, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta(a)$. Sean $b \in \mathfrak{A}$ no estándar y $c = \langle a, b\rangle$. Consideramos la siguiente subestructura inicial de $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{B} = \{d \in \mathfrak{A} \;:\; \text{existe } k \in \omega \text{ tal que } d < c^k\}.$$

Entonces:

(–) $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$.
Puesto que $\mathfrak{B} \prec_0^e \mathfrak{A}$ y $\mathbf{I\Delta_0}$ es Π_1–axiomatizable, se tiene que $\mathfrak{B} \models \mathbf{I\Delta_0}$. Supongamos que $\mathfrak{B} \models \mathbf{exp}$. Entonces, $c^c \in \mathfrak{B}$. Por tanto, existe $k \in \omega$ tal que $c^c < c^k$. Contradicción, pues $\mathbf{I\Delta_0} \vdash y < y' \wedge \exp(x,y,u) \wedge \exp(x,y',u') \rightarrow u < u'$.

(–) $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$.
Puesto que $c \in \mathfrak{B}$ y $a \leq c$, entonces $a \in \mathfrak{B}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \theta(a) &\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi. \end{aligned}$$

Lo anterior está en contradicción con $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \vdash \varphi$. □

En consecuencia, se tiene que:

Aserto IV.6.19.3.

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Delta_1}(\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp})^{(-)} &\Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1}(\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp})^{(-)} \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta_1}(\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp})^{(-)} \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta_0}. \end{aligned}$$

Capítulo V

Comentarios y Problemas abiertos

1 Introducción

En el presente capítulo, recopilamos las cuestiones que se han ido planteando a lo largo de este trabajo y que, finalmente, han quedado sin resolver.

Una característica común de una parte de estas cuestiones es que están conectadas con el problema de la extensión final, mediante el problema **(NE)** (véase **I.5.5**). Por ello, en la sección **2**, establecemos primero algunas relaciones entre este último problema y fragmentos relativizados.

Otro bloque importante de problemas pendientes aparece en el análisis del fragmento de minimización para fórmulas $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Muchos de los resultados obtenidos para los esquemas de inducción y colección no se han podido establecer para minimización sin parámetros, al menos con el mismo grado de generalidad. En la sección **3**, agrupamos algunos comentarios al respecto.

Por último, explicitamos una lista de problemas pendientes que han ido apareciendo en el desarrollo de la presente memoria.

2 Sobre el problema de la extensión final

Una parte de los problemas pendientes del presente trabajo están conectados con el problema de la extensión final, mediante el problema **(NE)**. En algunos casos, la relación con este último problema es inmediata. En otros, se obtiene a partir de condiciones equivalentes. A continuación, establecemos cuáles son esas condiciones.

En primer lugar, nótese que, de **IV.3.5** y **IV.3.11**, se sigue que:

PROPOSICIÓN V.2.1.
(a) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp) + \neg exp} \implies \mathbf{B\Sigma_1}$.
(b) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^- + \neg exp} \implies \mathbf{B\Sigma_1^-}$.

TEOREMA V.2.2. *Son equivalentes:*
(a) **(NE)** *es cierto, es decir,* $\mathbf{I\Delta_0 + \neg exp} \implies \mathbf{B\Sigma_1}$.
(b) $\mathbf{I\Delta_0 + \neg exp} \implies \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$.
(c) $\mathbf{I\Delta_0} \iff \mathbf{B\Sigma_1} \vee \mathbf{(I\Delta_0 + exp)}$.
(d) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \iff \mathbf{I\Delta_0}$.
(e) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$ *es* Π_1*–axiomatizable.*
(f) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$ *es* Π_2*–axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
(**(a)**$\implies$**(b)**): Inmediato.

(**(b)**$\implies$**(c)**): Es claro que $\mathbf{B\Sigma_1} \vee \mathbf{(I\Delta_0 + exp)} \implies \mathbf{I\Delta_0}$. Veamos la extensión contraria. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Delta_0}$ y $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{exp}$. Por **(b)**, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp) + \neg exp}$. Luego, de **V.2.1**, se sigue que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

(**(c)**$\implies$**(d)**): La teoría $\mathbf{I\Delta_0 + exp}$ tiene Δ_1–colección. Por tanto:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} & \iff & \mathbf{B\Sigma_1} \vee \mathbf{(I\Delta_0 + exp)} & [\![\mathbf{IV.3.6}]\!] \\ & \iff & \mathbf{I\Delta_0} & [\![\mathbf{(c)}]\!]. \end{array}$$

(**(d)**$\implies$**(e)**$\implies$**(f)**): Inmediato, recordemos que $\mathbf{I\Delta_0}$ es Π_1–axiomatizable.

(**(f)**$\implies$**(d)**): Se sigue de **IV.4.2–(d)**.

(**(d)**$\implies$**(a)**): Supongamos que se tiene **(d)**. Entonces:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{I\Delta_0 + \neg exp} & \implies & \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp) + \neg exp} & \\ & \implies & \mathbf{B\Sigma_1} & [\![\mathbf{V.2.1}]\!]. \end{array}$$

Lo que completa la prueba del resultado. ∎

NOTA V.2.3. Para el análisis del fragmento $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-}$, consideramos la versión sin parámetros del problema **(NE)**. Es decir:

$$\mathbf{(NE)^-} \quad \mathbf{I\Delta_0 + \neg exp} \implies \mathbf{B\Sigma_1^-}.$$

Como en la prueba de **V.2.2**, se obtiene la siguiente cadena de equivalencias.

TEOREMA V.2.4. *Son equivalentes:*

(a) $(\mathbf{NE})^-$ *es cierto, es decir,* $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1^-}$.

(b) $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-}$.

(c) $\mathbf{I\Delta_0} \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma_1^-} \vee (\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp})$.

(d) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-} \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$.

(e) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-}$ *es* Π_1*-axiomatizable.*

(f) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-}$ *es* Π_2*-axiomatizable.*

COROLARIO V.2.5. *Cada una de las siguientes condiciones implica* $\neg(\mathbf{NE})$.

(a) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$.

(b) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-}$.

(c) $\mathbf{L\Delta_1(I\Delta_0 + exp)^-} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$ [[véase **V.4.36**]].

(d) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Pi_1^-)} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$.

DEMOSTRACIÓN:
((a), (b), (c)): En cada caso, si la condición es válida, entonces $\mathbf{I\Delta_0} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 {+} exp)}$. Luego, por **V.2.2**, $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp} \not\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma_1}$.

((d)): Por **I.4.2–(b.5)**, $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_2}(I\Pi_1^-)}$. En consecuencia, $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$ es una extensión de $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Pi_1^-)}$. Supongamos que se tiene **(d)**. Entonces:

$$\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Pi_1^-)} \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0}.$$

Luego, el resultado se sigue de la parte **(a)**. ■

COROLARIO V.2.6. *Supongamos que* **(NE)** *es cierto. Son equivalentes:*

(a) $\mathbf{I\Delta_0}$ *es finitamente axiomatizable.*

(b) $\mathbf{I\Delta_1}$ *es finitamente axiomatizable.*

(c) $\mathbf{B\Sigma_1}$ *es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN:
((a)$\Longrightarrow$(b)): Supongamos que $\mathbf{I\Delta_0}$ es finitamente axiomatizable. Entonces, también lo es $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$. Puesto que suponemos **(NE)** cierto, entonces (recuérdese que $\mathbf{B\Sigma_1} \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_1}$):

$$\mathbf{I\Delta_1} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{I\Delta_1} + \mathbf{exp}) \vee (\mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}).$$

Ahora bien, $\mathbf{I\Delta_1} + \mathbf{exp}$ es finitamente axiomatizable. Luego, de **IV.3.3–(e)**, se sigue **(b)**.

((b)$\Longrightarrow$(c)): Supongamos que $\mathbf{I\Delta_1}$ es finitamente axiomatizable. Entonces, también lo es $\mathbf{I\Delta_1} + \neg\mathbf{exp}$. Puesto que suponemos **(NE)** cierto, se tiene que:

$$\mathbf{B\Sigma_1} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{B\Sigma_1} + \mathbf{exp}) \vee (\mathbf{I\Delta_1} + \neg\mathbf{exp}).$$

Ahora bien, $\mathbf{B\Sigma_1} + \mathbf{exp}$ es finitamente axiomatizable. Luego, de **IV.3.3–(e)**, se sigue **(c)**.

((c)$\Longrightarrow$(a)): Supongamos que $\mathbf{B\Sigma_1}$ es finitamente axiomatizable. Por **V.2.2**, se tiene que:

$$\mathbf{I\Delta_0} \iff \mathbf{B\Sigma_1} \vee (\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}).$$

Puesto que $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ es una teoría finitamente axiomatizable, entonces, de **IV.3.3–(e)**, se sigue **(a)**. ■

Para terminar, estudiamos qué sucede si, en lugar de **exp**, se considera una fórmula φ sintácticamente más simple y tal que $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$.

LEMA V.2.7. *Sea $\varphi \in \forall_1$ cerrada. Entonces:*
 (a) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi) + \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi) \iff \mathbf{B\Sigma_1}$.
 (b) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi)^- + \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi)^- \iff \mathbf{B\Sigma_1^-}$.

DEMOSTRACIÓN:
((a)): Es inmediato que $\mathbf{B\Sigma_1} \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi) + \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi)$.
Sea $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi) + \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi)$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

<u>Caso 1</u>: $\mathfrak{A} \models \varphi$.
Entonces, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi) + \neg\neg\varphi$. Luego, de **IV.3.5**, se sigue que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

<u>Caso 2</u>: $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.
Entonces, $\mathfrak{A} \models \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi) + \neg\varphi$. Luego, de **IV.3.5**, se sigue que $\mathfrak{A} \models \mathbf{B\Sigma_1}$.

((b)): Similar a la prueba de **(a)**. ■

PROPOSICIÓN V.2.8. *Sea $\varphi \in \forall_1$ cerrada. Son equivalentes:*
 (a) $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1}$.
 (b) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi) \iff \mathbf{I\Delta_0}$.
 (c) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi) \iff \mathbf{B\Sigma_1}$.
Además, si $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp} \vdash \varphi$, entonces **(NE)** *implica las condiciones anteriores.*

DEMOSTRACIÓN:
((a)$\Longrightarrow$(b)): Puesto que $\mathbf{I\Delta_0} + \varphi$ tiene Δ_1–colección, entonces:

 (1) $\mathbf{I\Delta_0} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi)$.

Por **(a)**, se tiene que:

 (2) $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi)$.

De (1) y (2), se sigue **(b)**.

((b)$\Longrightarrow$(c)): Se sigue de **V.2.7**.

((c)$\Longrightarrow$(a)): Puesto que $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi$ tiene Δ_1–colección, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi &\Longrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi) \\ &\Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1} \qquad\qquad [\![(\mathbf{c})]\!]. \end{aligned}$$

((**NE**)$\Longrightarrow$(**a**)): Inmediato, pues $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{I\Delta_0} + \neg\mathbf{exp}$. ■

Como en la prueba de **V.2.8**, se obtiene que:

PROPOSICIÓN V.2.9. *Sea* $\varphi \in \vee_1$ *cerrada. Son equivalentes:*

(**a**) $\mathbf{I\Delta_0} + \neg\varphi \Longrightarrow \mathbf{B\Sigma_1^-}$.

(**b**) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \varphi)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta_0}$.

(**c**) $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0} + \neg\varphi)^- \Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma_1^-}$.

Además, si $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp} \vdash \varphi$*, entonces* $(\mathbf{NE})^-$ *implica las condiciones anteriores.*

3 Comentarios sobre $\mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-}$

Los resultados para minimización sin parámetros no son tan generales como los que se han obtenido para el resto de fragmentos relativizados. Uno de los motivos para ello es que en el teorema **IV.3.8** sólo se ha probado que:

$$\mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \vee \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}).$$

No sabemos si el resultado anterior es cierto si, en lugar de $\mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T})$, se considera una clase de fórmulas más amplia. En consecuencia, no se han podido caracterizar los modelos de $\mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-}$ como la unión de dos clases de modelos.
Por lo tanto, el principal problema sin resolver para el fragmento de minimización es:

> (**MP**) Determinar una clase de fórmulas, Γ, tal que:
> $$\mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \vee \mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{T}).$$

En lo que sigue, estudiamos esta cuestión para teorías con Δ_{n+1}^-–minimización. Sea $\mathbf{T}$ una teoría consistente con Δ_{n+1}^-–minimización. Entonces:

$$(\star) \quad \mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \vee \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-} \Longrightarrow \mathbf{I\Pi_{n+1}^-} \vee \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}).$$

La primera implicación se tiene, pues $\mathbf{L\Delta_{n+1}(T)^-}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable y $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^-–minimización. La propiedad $(\star)$ sugiere tomar como Γ en (**MP**) alguna de las clases:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_{n+1} & & & & \Sigma_{n+2} \\ & \cup_{n+1} & & \vee_{n+1} & \\ \Pi_{n+1} & & & & \Pi_{n+2} \end{array}$$

Para analizar de forma sistemática este problema, introducimos los siguientes conceptos.

DEFINICIÓN V.3.1. Sean $\Gamma \subseteq$ **Sent** y **T** una teoría consistente. Diremos que:

(–) **T** tiene (Γ, Δ_{n+1}^-)–minimización si $\mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(–) **T** es $(\Gamma, n+1)$–equivalente (cuando $n+1$ esté claro por el contexto, escribiremos sólo Γ–equivalente) si $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \iff \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_\Gamma(\mathbf{T})$.

Fijado $n \in \omega$, notaremos:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{\mathrm{eq}} & = & \{\mathbf{T} : \mathbf{T} \text{ es } (\Gamma, n+1)\text{–equivalente } \} \\ \Gamma^{\mathrm{eq,s}} & = & \{\mathbf{T} : \mathbf{T} \text{ es verdadera y } (\Gamma, n+1)\text{–equivalente}\} \\ \Gamma^{\min} & = & \{\mathbf{T} : \mathbf{T} \text{ tiene } (\Gamma, \Delta_{n+1}^-)\text{–minimización } \} \\ \Gamma^{\min,s} & = & \{\mathbf{T} : \mathbf{T} \text{ es verdadera y tiene } (\Gamma, \Delta_{n+1}^-)\text{–minimización } \} \end{array}$$

NOTA V.3.2. Si **T** es $(\Gamma, n+1)$–equivalente, entonces tiene (Γ, Δ_{n+1}^-)–minimización. Además:

Aserto V.3.2.1.

(i) *Son equivalentes:*

(–) **T** *tiene* Δ_{n+1}^-*–minimización.*

(–) **T** *tiene* $(\Sigma_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$*–minimización.*

(ii) *Si* **T** *tiene* Δ_{n+1}*–colección, entonces tiene* $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$*–minimización.*

(iii) *Sea* $\Gamma \subseteq \cup_{n+1}$*. Son equivalentes:*

(–) **T** *tiene* (Γ, Δ_{n+1}^-)*–minimización.*

(–) **T** *es* $(\Gamma, n+1)$*–equivalente.*

Prueba del aserto:

(**(i)**): Basta observar que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ es Σ_{n+2}–axiomatizable.

(**(ii)**): Se sigue de **IV.2.5–(c)**.

(**(iii)**): Se sigue de **IV.3.8**. □

El siguiente resultado reúne algunas propiedades sobre los conceptos introducidos.

TEOREMA V.3.3.

(a) (Σ_{n+1}–equivalentes):

(a.1) $(n \geq 1)$ $\Sigma_{n+1}^{\min} = \Sigma_{n+1}^{\mathrm{eq}} = \emptyset$.

(a.2) $(n = 0)$ $\Sigma_1^{\min,s} = \Sigma_1^{\mathrm{eq,s}} = \emptyset$.

(b) (Π_{n+1}–equivalentes):

(b.1) $\Pi_{n+1}^{\min} = \Pi_{n+1}^{\mathrm{eq}}$.

(b.2) $(n \geq 1)$ $\Pi_{n+1}^{\mathrm{eq}} = \{\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})\}$ (*salvo* Π_{n+1}*–equivalencia lógica*).

(b.3) *Sea* **T** *una teoría* Π_1*–axiomatizable con* Δ_1*–colección. Entonces,* $\mathbf{T} \in \Pi_1^{\mathrm{eq}}$*. En particular,* $\mathbf{I\Delta}_0, \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \in \Pi_1^{\mathrm{eq}}$.

(c) (Σ_{n+2}–equivalentes):

(c.1) $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Sigma}_n$, $\mathbf{I\Sigma}_n^- \in \mathsf{V}_{n+1}^{\mathrm{eq}}, \Pi_{n+2}^{\mathrm{eq}}, \Sigma_{n+2}^{\mathrm{eq}}$.

(c.2) *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría verdadera tal que* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}^-$ *y* $\mathbf{T} + \mathbf{exp} \not\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. *Entonces* $\mathbf{T} \notin \Sigma_{n+2}^{\mathrm{eq}}$.

(c.3) $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$, $\mathbf{I\Sigma}_{n+k+1}$, $\mathbf{PA} \notin \Sigma_{n+2}^{\mathrm{eq}}$.

(d) (U_{n+1}–equivalentes):

(d.1) $(n \geq 1)$ *Si* $\mathbf{T}$ *es verdadera y* U_{n+1}*–equivalente, entonces no es* Σ_{n+1}*–definible.*

(d.2) $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Sigma}_{n+k+1}$, $\mathbf{PA} \notin \mathsf{U}_{n+1}^{\mathrm{eq}}$.

DEMOSTRACIÓN:
((**a**)): Por **V.3.2.1–(iii)**, es suficiente probar que $\Sigma_{n+1}^{\mathrm{min}} = \emptyset$ $(n \geq 1)$ y $\Sigma_1^{\mathrm{min,s}} = \emptyset$.
((**a.1**)): Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\mathbf{T}$ con $(\Sigma_{n+1}, \Delta_{n+1}^-)$–minimización. Entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

Ahora bien, por **III.2.5.1** y **III.2.7**, $\mathbf{I\Sigma}_n^-$ $(n \geq 1)$ no posee Σ_{n+1}–extensiones. Contradicción.

((**a.2**)): Sea $\mathbf{T}$ verdadera. Entonces, $\mathbf{P}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathbf{T})$. Luego, puesto que $\mathbf{P}^- \not\Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_0$, $\mathbf{T}$ no tiene (Σ_1, Δ_1^-)–minimización.

((**b**)): ((**b.1**)): Se sigue de **V.3.2.1–(iii)**.

((**b.2**)): Sea $\mathbf{T}$ una teoría Π_{n+1}–equivalente. Entonces:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

Por **III.3.11**, se tiene que $\mathbf{I\Sigma}_n^-$ $(n \geq 1)$ es una teoría de tipo $n+1 \to n+1$. En consecuencia, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

((**b.3**)): Por (**b.1**), basta probar que $\mathbf{T}$ tiene (Π_1, Δ_1^-)–minimización. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{T}) &\Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}) && [\![\mathbf{T} \text{ es } \Pi_1\text{–ax.}]\!] \\ &\Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_1(\mathbf{T})^- && [\![\mathbf{V.3.2.1–(ii)}]\!]. \end{aligned}$$

((**c**)): ((**c.1**)): Por **IV.2.6.1**, se tiene que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n)^- \Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-$. Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_n^-$ es V_{n+1}–axiomatizable, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n^-)^- &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^- \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{I\Sigma}_n^- && [\![\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-]\!] \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\mathsf{V}_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_n^-) \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n^-) \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \vee \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_n^-). \end{aligned}$$

Lo que prueba que $\mathbf{I\Sigma}_n^- \in \mathsf{V}_{n+1}^{\mathrm{eq}}, \Pi_{n+2}^{\mathrm{eq}}, \Sigma_{n+2}^{\mathrm{eq}}$.

Puesto que $\mathbf{I\Sigma}_n$ es una extensión Σ_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_n^-$, de lo anterior, también se sigue que $\mathbf{I\Sigma}_n \in \mathsf{V}^{eq}_{n+1}, \Pi^{eq}_{n+2}, \Sigma^{eq}_{n+2}$.

(**(c.2)**): El resultado se sigue de los siguientes asertos.

Aserto V.3.3.1. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría verdadera con* $(\Pi_{n+2}, \Delta^-_{n+1})$*–minimización tal que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. *Entonces* $\mathbf{T}$ *no es* Σ_{n+2}*–equivalente.*

Prueba del aserto:
Veamos que $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \not\Rightarrow \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. Por $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$, existe $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. Existe $\varphi \in \Pi_{n+2}$ cerrada tal que $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ y $\mathfrak{A} \models \varphi$. Entonces:

(1) $\mathfrak{A} \models \mathbf{I\Sigma}_n^-$. Se sigue de $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ y

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

(2) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Se sigue de $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$.

(3) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$. Se sigue de (2) y $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

(4) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. Puesto que $\neg\varphi \in \Sigma_{n+2}$, se sigue de $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \models \varphi$ y $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$.

(5) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar. Puesto que $\mathbf{T}$ es verdadera, $\mathcal{N} \models \mathbf{T}$; luego el resultado se sigue de (4).

(6) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1}$. Se sigue de (1), (5), **II.3.2–(d)** y **II.3.7–(a)**.

(7) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \vee \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. Se sigue de (4) y (6).

Luego, el aserto se sigue de (3) y (7). □

Aserto V.3.3.2. *Sea* $\mathbf{T}$ *consistente tal que:*

(i) $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$.

(ii) $\mathbf{T} + \mathbf{exp} \not\Rightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$.

Entonces $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Prueba del aserto:
Puesto que $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$ es Σ_{n+2}–axiomatizable, por **(i)**, $\mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp} &\Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{T}) + \mathbf{exp} \\ &\Longrightarrow \mathbf{L\Delta}^-_{n+1} + \mathbf{exp}. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ es una teoría de tipo $n+2 \to n+1$ (**III.3.5**), entonces $\mathbf{T} + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Lo que contradice **(ii)**. □

(**(c.3)**): Se sigue de **(c.2)**

(**(d)**): (**(d.1)**): Sea $\mathbf{T}$ una teoría verdadera U_{n+1}–equivalente. Sean $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ tales que:

(–) $\mathbf{Th}_{\mathsf{U}_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$.

(–) $\mathbf{T}_1$ es Π_{n+1}–axiomatizable.
(–) $\mathbf{T}_2$ es Σ_{n+1}–axiomatizable.

Entonces:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\cup_{n+1}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

Puesto que, por **III.3.11**, $\mathbf{I\Sigma}_n^-$ $(n \geq 1)$ es una teoría de tipo $n+1 \to n+1$, entonces $\mathbf{T}_1 + \mathbf{Th}_{\Pi_n}(\mathcal{N}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Luego, de **III.1.3.4**, se sigue que $\mathbf{T}_1$ no es Σ_{n+1}–definible y, por tanto, $\mathbf{T}$ tampoco lo es.

(**(d.2)**): Se sigue de **(d.1)**. ■

Como se observa en el teorema anterior, sólo se ha podido resolver el problema **(MP)** en casos triviales: $\mathbf{I\Sigma}_n^{(-)}$, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N})$. Ni tan siquiera se ha encontrado una solución para los fragmentos clásicos. En este sentido, un caso de estudio interesante es el esquema $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$.

NOTA V.3.4. **(La teoría $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^-$).**
$\underline{n=0}$:
La teoría $\mathbf{I\Pi}_1^-$ tiene Δ_1–colección y, por tanto, (Π_2, Δ_1^-)–minimización. Luego:

$$\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0.$$

La segunda implicación se tiene por **IV.3.8** (nótese que $\mathbf{Th}_{\cup_1}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathbf{I\Pi}_1^-)$).

$\underline{n>0}$:
En este caso, $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ tiene Δ_{n+1}^-–minimización pero no tiene Δ_{n+1}–colección (recuérdese que $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \not\Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$). Luego, no sabemos si $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ tiene $(\Pi_{n+2}, \Delta_{n+1}^-)$–minimización. Para esta teoría sólo conocemos extensiones triviales.

$$\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

El resultado **IV.3.8** no aporta ninguna información adicional. Recuérdese que se verifica la siguiente propiedad de conservación (**I.4.2–(b.3)**):

(CP) $(n > 0)$ $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ es una extensión $\vee_{n+1}$–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_n^-$.

Aserto V.3.4.1. *Son equivalentes:*
(i) $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ *es* $\vee_{n+1}$*–equivalente.*
(ii) $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-$.
(iii) $\mathbf{I\Sigma}_n \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^-$.

Prueba del aserto:
(**(i)$\Longrightarrow$(ii)**): Supongamos que se tiene **(i)**. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-})^{-} &\iff \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \vee \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}) \\ &\iff \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}) \\ &\iff \mathbf{I}\Sigma_{n}^{-} \qquad [\![(\mathrm{CP})]\!]. \end{aligned}$$

((ii)$\Longrightarrow$(iii)): Inmediato.

((iii)$\Longrightarrow$(i)): Supongamos que se tiene (iii). Puesto que $\mathbf{I}\Sigma_n$ es una extensión Σ_{n+2}–conservativa de $\mathbf{I}\Sigma_n^-$, entonces $\mathbf{I}\Sigma_n^- \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^-)^-$. Luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-})^{-} &\iff \mathbf{I}\Sigma_{n}^{-} \\ &\iff \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \vee \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-}) \quad [\![(\mathrm{CP})]\!]. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba del aserto. □

4 Problemas abiertos

A continuación, se enumeran las principales cuestiones que han ido surgiendo durante el desarrollo de este trabajo y han quedado sin resolver. Además, se incluyen algunos problemas motivados por los contenidos de la presente memoria.

4.A Problemas sobre elementos definibles

(•) Existencia de elementos no estándar Π_{n+1}–definibles

En el teorema **II.2.8**, se prueba que, si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$, entonces la condición $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ es una condición suficiente para que existan elementos no estándar Π_{n+1}–definibles en $\mathfrak{A}$. Ahora bien, ¿es posible debilitar la hipótesis sobre el modelo ambiente?

PROBLEMA V.4.1. **(Π-DH)** *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *tal que* $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$. *Entonces:*

$$\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A}) \text{ es no estándar.}$$

Nótese que en el problema anterior es equivalente considerar la estructura $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$. Pues, por **II.2.6**, en modelos de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$, $\mathfrak{K}_{\Pi_{n+1}}(\mathfrak{A})$ es cofinal en $\mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$.

Otra cuestión relevante para el trabajo desarrollado es el siguiente problema.

PROBLEMA V.4.2. **(Π-MH)** *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ *y* $\varphi(x) \in \Pi_{n+1}^-$ *tales que* $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$ *y* $\mathcal{N} \not\models \exists x\, \varphi(x)$. *Entonces, existe* $a \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathfrak{A})$ *no estándar tal que* $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$.

Una respuesta afirmativa para el problema anterior permitiría obtener resultados más generales en el estudio de las teorías $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$ (véase **III.3.14**).

(•) $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ no es modelo de $\mathbf{T}$

En **II.3.5** y **II.3.7**, se obtiene que:

(–) Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n + \mathbf{exp}$, $p \in \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p)$ es no estándar, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$.

(–) Si $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n^- + \mathbf{exp}$ y $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A})$ es no estándar, entonces $\mathfrak{K}_{n+1}(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$.

Para $n > 0$, $\mathbf{I}\Sigma_n^- \vdash \mathbf{exp}$, luego la hipótesis $\mathfrak{A} \models \mathbf{exp}$ es redundante. Ahora bien, ¿podemos eliminar la exponencial en la caso $n = 0$?

PROBLEMA V.4.3.
(K1H) *Sean* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ *y* $p \in \mathfrak{A}$ *tales que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p)$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A},p) \not\models \mathbf{B}\Sigma_1.$$

(K1H)$^-$ *Sea* $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Delta_0$ *tal que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ *es no estándar. Entonces:*

$$\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{B}\Sigma_1^-.$$

Las cuestiones anteriores están relacionadas con el problema **(NE)**. En efecto, en el aserto **II.3.6.1**, se prueba que:

$$\mathbf{(NE)} \implies \neg\,\mathbf{(K1H)},\ \neg\,\mathbf{(K1H)}^-.$$

4.B Problemas sobre extensiones de complejidad acotada

(•) Complejidad sintáctica

En **III–2**, hemos estudiado cuál es el menor nivel, Γ, de la Jerarquía Aritmética tal que un determinado fragmento posee una Γ–extensión. Se obtienen resultados óptimos salvo cuando $n = 0$ (es decir, en el estudio de fragmentos para fórmulas Σ_1 o Π_1), y para la teoría $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$.
Enunciamos a continuación las cuestiones pendientes para completar este estudio.

Γ–extensiones de $\mathbf{B}\Sigma_1$

PROBLEMA V.4.4. **(Σ3EH)** $\mathbf{B}\Sigma_1$ *no posee* Σ_3*–extensiones.*

Si **(Σ3EH)** es cierto, entonces **(NE)** es falso. Más aún, en **III.2.3.1**, se prueba que:

$$\mathbf{(NE)} \implies \mathbf{B}\Sigma_1 \text{ posee } \mathsf{U}_1\text{–extensiones.}$$

Γ–extensiones de $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$

PROBLEMA V.4.5. $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ *no posee* Σ_{n+3}*–extensiones.*

Si $n > 0$, entonces $\mathbf{L\Delta}_{n+1}$ ($\Longleftrightarrow \mathbf{B\Sigma}_{n+1}$) no posee Σ_{n+3}–extensiones. Luego, responder negativamente al problema anterior implica que la Conjetura de Paris–Friedman es falsa, para $n > 0$. En el caso $n = 0$, el problema está relacionado con **(NE)**. En efecto, si **(NE)** es cierto, entonces $\mathbf{B\Sigma}_1$ (y, por tanto, $\mathbf{I\Delta}_1$) posee $\mathcal{U}_1$–extensiones.

Nótese además que, en **III.2.4.1**, se prueba que $\mathbf{I\Delta}_{n+1}$ no posee Σ_{n+3}–extensiones *verdaderas* y que, para $n > 0$, no posee Σ_{n+2}–extensiones.

Γ–extensiones de $\mathbf{B\Sigma}_1^-$, $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$, $\mathbf{UI\Delta}_1$

PROBLEMA V.4.6.
(1) $\mathbf{B\Sigma}_1^-$ *no posee* Σ_2*–extensiones.*
(2) $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$ *no posee* Σ_2*–extensiones.*
(3) $\mathbf{UI\Delta}_1$ *no posee* Σ_2*–extensiones.*

El problema anterior está relacionado con **(NE)**. Como se ha señalado, si **(NE)** es cierto, entonces $\mathbf{B\Sigma}_1$ (y, por lo tanto, $\mathbf{B\Sigma}_1^-$, $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$ y $\mathbf{UI\Delta}_1$) posee $\mathcal{U}_1$–extensiones.
En **III.2.5.2** se prueba que $\mathbf{B\Sigma}_1^-$ y $\mathbf{B^s\Sigma}_1^-$ no poseen Π_1–extensiones y, en consecuencia, no poseen Σ_2–extensiones verdaderas. Sin embargo, para $\mathbf{UI\Delta}_1$ ni siquiera sabemos si posee Π_1–extensiones verdaderas.

PROBLEMA V.4.7. **(UIH)** $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \not\Longleftrightarrow \mathbf{UI\Delta}_1$.

Γ–extensiones de $\mathbf{L\Delta}_1^-$, $\mathbf{I\Delta}_1^-$

PROBLEMA V.4.8. **(Σ1EH)**
(1) $\mathbf{L\Delta}_1^-$ *no posee* Σ_1*–extensiones.*
(2) $\mathbf{I\Delta}_1^-$ *no posee* Σ_1*–extensiones.*
(3) $\mathbf{I\Delta}_0$ *no posee* Σ_1*–extensiones.*

Puesto que $\mathbf{P}^- \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Sigma_1}(\mathcal{N})$, ninguna de las teorías anteriores posee Σ_1–extensiones verdaderas. Además, en **III.2.8.2**, se prueba que $\mathbf{L\Delta}_1^-$ no posee Σ_1–extensiones consistentes con $\mathbf{exp}$.
Por otra parte, en la prueba de **III.2.3.1**, se obtiene que, si **(NE)** es cierto, entonces existe $\theta \in \Sigma_1$ tal que $\mathbf{I\Delta}_0 + \theta \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_1^-$ ($\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_1^-$).

(•) Complejidad descriptiva: teorías de tipo $k \rightarrow m$

Π_{n+2}–extensiones de $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1}$, $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$

En **III.3.5**, **III.3.11** y **III.3.7**, se prueba que:

(–) $\mathbf{L\Delta}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \rightarrow n+1$.
(–) $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1}$ es de tipo $n+1 \rightarrow n+1$.
(–) $\mathbf{L\Delta}^-_1$ es de tipo $1 \rightarrow^w 1$.

Para obtener resultados óptimos quedan pendientes, pues, las siguientes cuestiones.

PROBLEMA V.4.9. $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $n+2 \rightarrow n+1$.

PROBLEMA V.4.10.
(1) $\mathbf{L\Delta}^-_1$ *es de tipo* $2 \rightarrow 1$, *o* $1 \rightarrow 1$, *o bien de tipo* $2 \rightarrow^w 1$.
(2) $\mathbf{I\Delta}^-_1$ *es de tipo* $2 \rightarrow 1$, *o* $1 \rightarrow 1$, *o* $2 \rightarrow^w 1$, *o bien* $1 \rightarrow^w 1$.

El problema **V.4.9** está relacionado con la Conjetura de Paris–Friedman. En **III.3.12**, se prueba que si $\mathbf{I\Delta}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ no es de tipo $n+2 \rightarrow n+1$, entonces las tres versiones de la Conjetura son falsas.
El problema **V.4.10** está conectado con **(NE)**. En efecto, si **(NE)** es cierto, entones $\mathbf{B\Sigma}_1$ (y, en consecuencia, $\mathbf{L\Delta}^-_1$, $\mathbf{I\Delta}^-_1$) posee $\cup_1$–extensiones Σ_1–definibles. Por tanto, $\mathbf{L\Delta}^-_1$ y $\mathbf{I\Delta}^-_1$ no son teorías de tipo $2 \rightarrow 1$ (ni de tipo $2 \rightarrow^w 1$).

Por otra parte, de **III.3.7**, se sigue que una condición suficiente para probar que $\mathbf{L\Delta}^-_1$ es de tipo $1 \rightarrow 1$ es la siguiente.

PROBLEMA V.4.11. **(OTH)** *Sea* $\mathbf{T}$ *una* Π_1*–extensión de* $\mathbf{L\Delta}^-_1$ *tal que* $\mathbf{T} \not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N})$. *Entonces, existe* $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ *tal que* $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ *es no estándar y* $\mathbf{Th}_{\Pi_1}(\mathcal{N}) \notin SSy(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}))$.

Π_{n+2}–extensiones de $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$, $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$

En **III.3.11**, **III.3.5** y **III.3.13**, se prueba que:

(–) $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$ es de tipo $n+2 \rightarrow n+2$.
(–) $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \rightarrow n+1$.
(–) $\mathbf{B\Sigma}^-_{n+1} + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \rightarrow^w n+2$.

El resultado anterior es óptimo para $\mathbf{I\Sigma}^-_{n+1}$. Ahora bien, en el caso del esquema de colección quedan pendientes las siguientes cuestiones.

PROBLEMA V.4.12.

(BTH) $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp}$ *es de tipo* $n+2 \to n+2$.

$\mathbf{(BTH)}_0$ $\mathbf{B}\Sigma_1^-$ *es de tipo* $2 \to 2$, *o* $2 \to 1$, *o* $2 \to^w 2$, *o bien* $2 \to^w 1$.

La cuestión anterior está relacionada con el problema **V.4.1**. En efecto, en **III.3.14.1**, se prueba que si **(Π-DH)** es cierto, entonces $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp}$ es de tipo $n+2 \to n+2$.
La cuestión $\mathbf{(BTH)}_0$ está conectada con el problema **(NE)**. Recuérdese que si **(NE)** es cierto, entonces $\mathbf{B}\Sigma_1^-$ posee U_1–extensiones Σ_1–definibles y, en consecuencia, ni tan siquiera es una teoría es de tipo $2 \to^w 1$.
Puesto que $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^- + \mathbf{exp}$ es una teoría de tipo $n+2 \to^w n+2$, el siguiente problema recoge una condición suficiente para demostrar que **(BTH)** es cierto.

PROBLEMA V.4.13. *Sea* $\Gamma \subseteq \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$ *es recursivo en* Γ. *Entonces:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\Gamma) \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Por otra parte, un resultado central en el estudio de la complejidad descriptiva de extensiones de $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$ es **(III.3.10)**:

($\star$) Sean $\mathbf{T}$ una teoría Π_{n+2}–axiomatizable y $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ cerrada tales que $\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi$ es consistente.

- **(a)** Son equivalentes:
  - (–) $\mathbf{T} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.
  - (–) $\mathbf{T} + \varphi \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.
- **(b)** Supongamos que $\mathbf{T} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^-$. Entonces:

$$\mathbf{T} + \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^- + \varphi \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N}).$$

Ahora bien, ¿es posible considerar en la parte **(a)** un conjunto $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2}$, en lugar de una única fórmula φ?

PROBLEMA V.4.14. *Sean* $\Gamma \subseteq \Sigma_{n+2} \cap \mathbf{Sent}$ *y* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable tales que* $\mathbf{T} + \Gamma$ *es consistente. Son equivalentes:*

- (–) $\mathbf{T} + \Gamma \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$.
- (–) $\mathbf{T} + \Gamma \iff \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

Eliminar el esquema $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}^-$ en la parte **(b)** del resultado ($\star$) anterior permitiría refinar las propiedades obtenidas en este trabajo para las teorías $\mathbf{B}^*\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^-$.

PROBLEMA V.4.15. *Sean* $\mathbf{T}$ *una teoría* Π_{n+2}*–axiomatizable y* $\varphi \in \Sigma_{n+2}$ *cerrada tales que* $\mathbf{T} + \varphi$ *es consistente. Son equivalentes:*

(–) $\mathbf{T} + \varphi \Longrightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+1}^{-}$.

(–) $\mathbf{T} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathcal{N})$.

En el aserto **III.3.14.2**, se establece que (**Π-MH**) (véase el problema **V.4.2**) es una condición suficiente para que **V.4.15** sea cierto.

4.C Problemas sobre Fragmentos Relativizados

(•) $\Delta_{n+1}^{(-)}$–propiedades

El principal problema, una versión relativizada de la Conjetura de Paris–Friedman, es el siguiente.

PROBLEMA V.4.16. $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción* $\Longrightarrow$ $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–colección.*

Destacamos otros problemas sobre Δ_{n+1}^{-}–propiedades, que han ido apareciendo a lo largo del trabajo. Se ha probado que una teoría tiene Δ_{n+1}–colección si, y sólo si, tiene Δ_{n+1}^{-}–colección (**IV.2.4**). Pero, ¿qué sucede para inducción y minimización?

PROBLEMA V.4.17. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$. *Entonces:*

(1) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–inducción* $\Longrightarrow$ $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*

(2) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–minimización* $\Longrightarrow$ $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–minimización.*

En **IV.4.1** y **IV.4.6**, para una teoría $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, se prueba que:

(–) Si $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–inducción, entonces $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(–) Si $\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}^{-}–inducción, entonces $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

Si no suponemos que $\mathbf{T}$ tiene $\Delta_{n+1}^{(-)}$–inducción, entonces sólo obtenemos que $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{(-)}$ es una extensión de $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Ahora bien:

PROBLEMA V.4.18. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{I}\Sigma_n$.

(1) *Si* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}*–inducción.*

(2) *Si* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$, *entonces* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–inducción.*

PROBLEMA V.4.19. *Sea* $\mathbf{T}$ *tal que* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. *Entonces:*

$\mathbf{T}$ tiene Δ_{n+1}–colección.

Para inducción y colección, $\mathbf{T}$ tiene la correspondiente $\Delta_{n+1}^{(-)}$–propiedad si, y sólo si, $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$ la tiene. Lo mismo ocurre para la propiedad de Δ_{n+1}–minimización, pero no sabemos si es cierto para Δ_{n+1}^{-}–minimización.

PROBLEMA V.4.20. *Son equivalentes:*
(–) $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–minimización.*
(–) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T}) \Longrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-}$.

PROBLEMA V.4.21. *Completar el siguiente diagrama:*

$$\Delta_{n+1}^{-}\text{-col.} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \Delta_{n+1}^{-}\text{-ind.} \\ \Delta_{n+1}^{-}\text{-cerrada} \end{array} \right\} \Longrightarrow \Delta_{n+1}^{-}\text{-min.} \Longrightarrow \Delta_{n+1}^{-}\text{-ind.}$$

(•) Unión de teorías

Como notamos en la sección **3** del presente capítulo, el principal problema al respecto es:

PROBLEMA V.4.22. **(MP)** *Determinar una clase de fórmulas,* Γ*, tal que, si* $\mathbf{T}$ *tiene* Δ_{n+1}^{-}*–minimización, entonces:*

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \vee \mathbf{Th}_{\Gamma}(\mathbf{T}).$$

De **V.3.3**, se sigue que, en general, **(MP)** no es cierto si tomamos como Γ la clase $\cup_{n+1}$, o bien la clase Σ_{n+2}. Ahora bien, dos posibles candidatos para Γ en el problema anterior son las clases $\vee_{n+1}$ y Π_{n+2}.

PROBLEMA V.4.23. *Sea* $\mathbf{T} \Longrightarrow \mathbf{IE}_0$*. Entonces:*
(1) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \vee \mathbf{Th}_{\vee_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(2) $\mathbf{L}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})^{-} \Longrightarrow \mathbf{I}\Pi_{n+1}^{-} \vee \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

(•) Extensiones Π_{n+2}–axiomatizables

En **IV.3.18**, se prueba que si $\mathbf{T}'$ es una Σ_3–extensión de $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})$, consistente con **exp**, entonces $\mathbf{T}' + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T})$. ¿Es posible eliminar la exponencial?

PROBLEMA V.4.24. *Sea* $\mathbf{T}'$ *una* Π_2*–extensión de* $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{T})$*. Entonces:*

$$\mathbf{T}' \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{T}).$$

Ahora bien, si **V.4.24** es cierto, entonces **(NE)** tiene respuesta negativa. En efecto, si suponemos **V.4.24** cierto para $\mathbf{T} = \mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$, entonces $\mathbf{I\Delta_0} + \mathbf{exp}$ es la menor teoría Π_2–axiomatizable que extiende a $\mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$. Por tanto, $\mathbf{I\Delta_0} \not\Leftrightarrow \mathbf{B^*\Delta_1(I\Delta_0 + exp)}$. Luego, de **V.2.2**, se sigue que **(NE)** es falso.

Esta relación entre eliminar el uso de la función exponencial en la prueba de una propiedad sobre el esquema de colección relativizado y el problema **(NE)** no es exclusiva del problema anterior. Como hemos visto, se repite en varios resultados sobre fragmentos relativizados obtenidos en la memoria (por ejemplo, **IV.3.24**, **IV.4.2–(c)**, **IV.4.8–(c)**, **IV.5.10**).

Por otra parte, en el estudio de extensiones de $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$, se obtiene el siguiente resultado (**IV.3.25**):

> ($\star$) Sea $\mathbf{T'} \Longrightarrow \mathbf{IE_0}$ y $\mathbf{T'}$ una Π_{n+2}–extensión de $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$ tal que $\mathbf{T'} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$ es consistente. Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:
>
> (a) $\mathbf{T'} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$.
>
> (b) Existe $\varphi \in \mathbf{Th_{\Sigma_{n+2}}}(\mathcal{N})$ tal que $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ y,
> $$\mathbf{T'} + \mathbf{I\Sigma_{n+1}^-} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}}(\mathcal{N}).$$

Ahora bien, ¿es posible eliminar el uso del esquema $\mathbf{I\Sigma_{n+1}^-}$?

PROBLEMA V.4.25. *Sea* $\mathbf{T'}$ *una* Π_{n+2}*–extensión de* $\mathbf{B^*\Delta_{n+1}(T)^-}$. *Entonces, se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(a) $\mathbf{T'} \Longrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}(T)}$.

(b) *Existe* $\varphi \in \mathbf{Th_{\Sigma_{n+2}}}(\mathcal{N})$ *tal que* $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ *y,*
$$\mathbf{T'} + \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{Th_{\Pi_{n+2}}}(\mathcal{N}).$$

Este último problema está relacionado con la existencia de elementos no estándar Π_{n+1}–minimales en modelos de $\mathbf{B\Sigma_{n+1}}$ (véase **V.4.2**). En **IV.3.26**, se pone de manifiesto que:

$$(\Pi\text{-}\mathbf{MH}) \quad \Longrightarrow \quad \text{V.4.15} \quad \Longrightarrow \quad \text{V.4.25}.$$

Además, la cuestión planteada en el problema **V.4.25** se repite en otros resultados de la memoria sobre el esquema de colección relativizado sin parámetros (por ejemplo, **IV.4.8–(d)**, **IV.4.11**).

(•) Propiedades de Axiomatización

Para completar el estudio de la complejidad sintáctica de fragmentos relativizados sin parámetros, quedan pendientes las siguientes cuestiones.

PROBLEMA V.4.26. *Encontrar una teoría* $\mathbf{T}$ *tal que:*
(–) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$,
(–) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$,
(–) $\mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* U_{n+2}*-axiomatizable.*

PROBLEMA V.4.27. *Encontrar una teoría* $\mathbf{T}$ *tal que:*
(–) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} + \mathbf{Th}_{\Pi_{n+1}}(\mathcal{N}) \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$,
(–) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Sigma}_n$,
(–) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* U_{n+2}*-axiomatizable.*

PROBLEMA V.4.28. *Son equivalentes:*
(–) $\mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*-axiomatizable.*
(–) $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{exp} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$.

PROBLEMA V.4.29. *Encontrar una teoría* $\mathbf{T}$ *tal que:*
(–) $\mathbf{I\Pi}^-_{n+1} \Longrightarrow \mathbf{Th}_{\mathsf{U}_{n+1}}(\mathbf{T})$.
(–) $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Sigma}^-_n$,
(–) $\mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-$ *es* Π_{n+2}*-axiomatizable.*

(•) Relaciones entre Fragmentos

En **IV.5.3**, se prueba que la consistencia de la teoría $\mathbf{T} + \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ (respectivamente, de $\mathbf{T} + \mathbf{exp} + \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$) es una condición suficiente para obtener que $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$ (respectivamente, $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$). Pero, ¿son condiciones necesarias?

PROBLEMA V.4.30. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría consistente.*
(1) *Son equivalentes:*
  (–) $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.
  (–) $\mathbf{T} + \mathbf{UI\Delta}_{n+1}$ *es consistente.*
(2) *Son equivalentes:*
  (–) $\mathbf{B\Sigma}_{n+1} \models\!\!\Rightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})$.
  (–) $\mathbf{T} + \mathbf{exp} + \mathbf{B\Sigma}^-_{n+1}$ *es consistente.*

En el estudio de las relaciones entre los esquemas de colección y minimización relativizados sin parámetros se plantean las siguientes cuestiones.

PROBLEMA V.4.31.

(1) Supongamos que $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- + \mathbf{exp} \Rightarrow\!\!\!\not\Leftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{T})$. Entonces:

$$\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^- \Rightarrow\!\!\!\not\Leftrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{T})^-.$$

(2) $(m > n)$ $\mathbf{I\Sigma}_n + \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1}^-)^- \Rightarrow\!\!\!\not\Leftrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_{m+1})^-$.

(3) $\mathbf{L\Delta}_1(\mathbf{I\Sigma}_1)^- \Rightarrow\!\!\!\not\Leftrightarrow \mathbf{B^*\Delta}_1(\mathbf{I\Sigma}_1)^-$.

Un problema interesante es completar las relaciones entre fragmentos relativizados de la teoría $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ (véanse **IV.6.18** y **V.3.4**).

PROBLEMA V.4.32. $\mathbf{Th}_{\Pi_2}(\mathbf{I\Pi}_1^-) \Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^-$.

PROBLEMA V.4.33. $(n \geq 1)$ *Determinar las relaciones entre las teorías:*

$$\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-), \quad \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^-, \quad \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^-, \quad \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

Al respecto, sabemos que:

(-) $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^- \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-$, y

(-) $\mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-) \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-$.

Una forma de responder al problema **V.4.33** es probar el siguiente resultado de conservación (recuérdese que, para $n > 0$, $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ es una extesión $\forall_{n+1}$–conservativa de $\mathbf{I\Sigma}_n^-$):

PROBLEMA V.4.34. $(n \geq 1)$ $\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-$ *es una extensión* Π_{n+2}*–conservativa de* $\mathbf{I\Sigma}_n^-$.

En efecto, si **V.4.34** es cierto, entonces:

$$\mathbf{I\Sigma}_n^- \Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Sigma}_n^-)^- \Longrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longrightarrow \mathbf{I\Sigma}_n^-.$$

Luego, $\mathbf{I\Sigma}_n^- \Longleftrightarrow \mathbf{L\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{I\Delta}_{n+1}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)^- \Longleftrightarrow \mathbf{Th}_{\Pi_{n+2}}(\mathbf{I\Pi}_{n+1}^-)$.

PROBLEMA V.4.35. $\mathbf{B^*\Delta}_1(\mathbf{I\Pi}_1^-)^- \models\!\!\!\Longrightarrow \mathbf{I\Delta}_0$.

Como se hizo notar en **V.2.5**, responder afirmativamente al problema anterior implica que el problema **(NE)** es falso.

Otro caso de estudio interesante es analizar las relaciones entre fragmentos relativizados de la teoría $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathbf{exp}$. En el diagrama obtenido en **IV.6.19**, quedan pendientes las siguientes cuestiones:

PROBLEMA V.4.36.

(1) $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp})^-$.

(2) $\mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp}) \models\!\!\Longrightarrow \mathbf{I}\Delta_0$.

(3) $\mathbf{L}\Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp})^- \not\Longleftrightarrow \mathbf{B}^*\Delta_1(\mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{exp})$.

Ahora bien, por **V.2.5**, si alguna de las tres propiedades anteriores es cierta, entonces **(NE)** es falso.

Referencias

[1] BEKLEMISHEV, L.D. *Induction rules, reflection principles and provably recursive functions.* Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 85(3) (1997), pp. 193–242.

[2] BEKLEMISHEV, L.D. *A proof-theoretic analysis of collection.* Archive for Mathematical Logic, Vol. 37(5–6) (1998), pp. 275–296.

[3] BEKLEMISHEV, L.D. *On the induction schema for decidable predicates.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 68(1) (2003), pp. 17-34.

[4] BIGORAJSKA, T. *On* Σ_1*-definable Functions Provably Total in* $\mathbf{I}\Pi_1^-$. Mathematical Logic Quartely, Vol. 41 (1995), pp. 135–137.

[5] CLOTE, P. *Partition relations in arithmetic.* Proc. 6th Latin American Symp. on Mathematical Logic, Caracas (Lecture Notes Math. 1130), Springer–Verlag (1985), pp. 32–68.

[6] CLOTE, P.; KRAJÍČEK, J. *Open Problems.* Arithmetic, Proof Theory and Computational Complexity. Oxford Logic Guides, 23. Clarendon Press, Oxford (1993), pp. 1–19.

[7] CORDÓN FRANCO, A.; FERNÁNDEZ MARGARIT, A; LARA MARTÍN, F.F. *Parameter free induction and true sentences.* Preprint, Universidad de Sevilla (2001).

[8] CORDÓN FRANCO, A.; FERNÁNDEZ MARGARIT, A; LARA MARTÍN, F.F. *On the quantifier complexity of* $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$*-induction.* Universidad de Sevilla (2003), (enviado a Archive for Mathematical Logic).

[9] FERNÁNDEZ MARGARIT, A; LARA MARTÍN, F.F. *Some Results on* $\mathbf{L}\Delta_{n+1}^-$. Mathematical Logic Quartely, Vol. 47(4) (2001), pp. 503–512.

[10] FERNÁNDEZ MARGARIT, A; LARA MARTÍN, F.F. *Induction, Minimization and Collection for $\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$-formulas.* Universidad de Sevilla (2003), (enviado a Archive for Mathematical Logic).

[11] GAIFMAN, H.; DIMITRACOPOULOS, C. *Fragments of arithmetic and the MRDP theorem.* Logic and Algorithmic monografía núm. 30 de L'enseignement mathematique (1983), pp. 187–206.

[12] HÁJEK, P.; PUDLÁK, P. *Metamathematics of First-Order Arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag (1993).

[13] KAYE, R. *Diophantine and Parameter-free Induction.* Ph. D. Thesis. University of Manchester (1987).

[14] KAYE, R. *Models of Peano Arithmetic.* Oxford Logic Guides 15. Clarendon Press. Oxford (1991).

[15] KAYE, R.; PARIS, J.B.; DIMITRACOPOULOS, C. *On parameter free induction schemas.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53(4) (1988), pp. 1082–1097.

[16] LARA MARTÍN, F.F. *Inducción y Recursión: Las teorías* $\mathbf{I}\Delta_{n+1}(\mathbf{T})$. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla (2000).

[17] LEIVANT, D. *The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 48(1) (1983), pp. 182–184.

[18] LESSĀN, H. *Models of Arithmetic.* Ph. D. Thesis. University of Manchester (1978).

[19] MCALOON, K. *Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic.* Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 239 (1978), pp. 253–277.

[20] MCALOON, K. *Models of arithmetic and complexity theory.* Studies in Complexity Theory. Ed. R. Book (1986), pp. 119–221.

[21] PARIS, J.B.; KIRBY, L.A. *Σ_n-collection schemas in arithmetic.* Logic Colloquium'77. North–Holland (1978), pp. 199–209.

[22] PARSONS, C. *On n-quantifier induction.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 37 (1972), pp. 466–482.

[23] SOARE, R.I. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag (1987).

[24] WILKIE, A.J.; PARIS, J.B. *On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas.* Annals of Pure and Applied Logic. Vol. 25 (1987), pp. 261–302.

[25] WILKIE, A.J. ; PARIS, J.B. *On the existence of end extensions of models of bounded induction.* J. E. Fenstad et al., eds., Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII (Moscow, 1987), Stud. Logic Found. Math. 126, North-Holland, Amsterdam (1989), pp. 143–161.

D. Andrés Cordón Franco

Extensiones de Fragmentos de la Aritmética

Sobresaliente Cum laude

10 de julio 2003

El Vocal,

Fdo.: Enrique Casanovas Ruiz Fornells

El Vocal,

Fdo.: Margarita Otero Domínguez

El Vocal,

Fdo.: Rafael Farré Cirera

El presidente

Fdo.: Juan C. Martínez Alonso

El Secretario,

Fdo.: Fco. Félix Lara Martín

El Doctorado,

Fdo.: Andrés Cordón Franco