UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, COMPUTACIÓN, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES COMPLEJAS DERIVADAS DE OTRAS ÁLGEBRAS

Memoria presentada por Manuel Ordóñez Sánchez para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Fdo. Manuel Ordóñez Sánchez

Vº Bº del Director

Vº Bº del Codirector

Núñez

Fdo. Francisco Javier Echarte Reula
Catedrático de Geometría
del Departamento de Álgebra,
Computación, Geometría y
Topología de la Universidad
de Sevilla

Fdo. Juan Núñez Valdés
Profesor titular de Universidad
del Departamento de Álgebra,
Computación, Geometría y
Topología de la Universidad
de Sevilla

Sevilla, Junio de 1997

A Mariola.......

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a aquellas personas que han hecho posible la realización de este trabajo.

En primer lugar expresar mi profundo agradecimiento a el profesor F. Ja vier Echarte por su constante apoyo tanto a nivel de conocimientos como a nivel personal. Es claro para mí que este trabajo jamás hubiera salido adelante sin esa inestimable ayuda.

Quiero continuar expresando mi gratitud a el profesor Juán Núñez Valdés, el cual ha compartido conmigo muchos momentos en la realización de esta tesis.

Una mención especial al profesor Y. Khakimdjanov por sus continuos consejos para la realización de este trabajo.

Por último mencionar a mi amigo Juan Luís Martín por su continuo apoyo en la realización de esta tesis.

ÍNDICE

INTRODUCCION

El problema de la clasificación de las álgebras de Lie se reduce actualmente a la clasificación de la álgebras de Lie resolubles complejas, debido por una parte a la conocida descomposición de Levi de un álgebra de Lie cualquiera en suma directa de su radical, que es resoluble, y de una subálgebra (denominada subálgebra de Levi) que es semisimple, y por otra, al hecho de que toda álgebra semisimple es suma directa de álgebras simples, siendo bien conocidas la clasificación de estas últimas desde finales del siglo XIX.

No obstante, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie resolubles complejas permanece abierto en la actualidad, ya que sólo se conoce la clasificación de las álgebras de Lie resolubles de dimensiones menores o iguales que 5.

Por ello, actualmente, los intentos de clasificación de las álgebras de Lie resolubles pasan por obtener primero la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes, dado el importante papel que desempeñan los ideales maximales nilpotentes en el estudio de las álgebras de Lie resolubles.

Los primeros resultados de interés relacionados con la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes datan de hace aproximadamente un siglo y fueron publicados en 1.891 por Ümlauf [], que hace un intento de clasificación (que posteriormente se probaría que era incompleta) de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones menores o iguales que 6.

La primera clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 6 fue realizada en 1.958 por Morozov [], basándose en la máxima dimensión de un ideal abeliano maximal. Previamente, Dixmier [] y [] también había presentado una clasificación hasta dimensión 5 y Vranceanu [], de manera independiente a Morozov y basándose en otros procedimientos, obtuvo la clasificación de las álgebras de Lie milpotentes de dimensión 6, si bien tanto su clasificación como la de Morozov son completas para el caso complejo pero no para el real.

Vergne [] dió por primera vez una clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales o complejas de dimensión 6, completando así los trabajos de Morozov y Breanceanu. Vergne probó además que a diferencia del caso de dimensiones menores o iguales que 6, para dimensiones mayores o iguales que 7 aparecen ya clases de isomorfía de un tipo particular de álgebras de Lie nilpotentes, como son las filiformes, lo cual dificulta más la obtención de las clasificaciones a patir de dimensión 7.

Safiullina publica en 1.964 [] una clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, basándose en el método desarrollado por Morozov, si bien Magnin [] demuestra en 1.986 que esta clasificación no es del todo completa.

Romdhani en 1.985 [] también presenta una clasificación de estas álgebras a partir de las dimensiones de la sucesiones derivadas, central descendente y central ascendente.

Skjelbred y Sund en 1.977 [] desarrollaron un método que permitía obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotntes de dimensión *n+1* supuesta conocida la clasificación de las de dimensión *n*. No obstante este método presenta excesivas dificultades de realización y no ha vuelta a ser utilizado hasta la fecha.

Goze y Ancochea, en 1.989 [] llegaron aclasifican las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, mediante el uso de una nuevo invariante obtenido por ellos, que denominaron "sucesión característica" que corresponde a las dimensiones maximales de los bloques de Jordan de una matriz nilpotente, lo que les permitió también obtener la clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas (subconjunto de las álgebras de Lie nilpotentes) de dimensión 8[].

Por todo ello, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión >7 continúa abierto y los intentos actuales pasan por conseguir primero una clasificación de las álgebras de Lie filiformes.

Así, por aplicación de las técnicas de Goze y Ancoechea, Gómez Martín y Echarte en 1.991 [] obtuvieron la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 9. Posteriormente, mediante la introducción de un nuevo invariante para estas álgebras, Boza, Echarte y Núñez [] clasificaron en 1.993 las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 10 y ecientemente están apareciendo algunos trabajos sobre la clasificación de estas álgebras en dimensiones superiores.

Por otra parte, Echarte, Gómez y Núñez [] estudiaron el subconjunto de álgebras de Lie filiformes derivadas de otras. Recuérdese la definición de álgebras de Lie derivada: sea L un álgebra de Lie. Se denomina álgebra derivada de L, y se denota por $[L,L]$, al conjunto de elementos $[X,Y]$: $X,Y \in L$.

Es además conocido que un álgebra de Lie es resoluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente, aunque este resultado no asegura que un álgebra de Lie nilpotente sea necesariamente derivada de otra; antes al contario, la mayor parte de las álgebras de Lie nilpotentes no son derivadas de otras.

Los citados autores porbaron una condición necesaria para que un álgebra de Lie filiforme fuese derivada de un álgebra de Lie resoluble y también probaron que un álgebra de Lie filiforme es o bien derivada de un álgebra de Lie resoluble de dimensión una unidad más que la de la filiforme o bien no es derivada de ningún álgebra de Lie (véase Cap.0).

En este trabajo se prentende clasificar las álgebras de Lie foloformes complejas que sean derivadas de otras a partir de la utilización del invariantej, obtenido por Echarte, Núñez y Ramírez en 1.995 [], que da lugar a los denominados productos principales (véase Cap.0). La utilización de este invariante permitió a estos autores realizar la clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas a partir de la terna *(i, j, n)*, donde n es la dimensión del álgebra y "i" es otro invariante para estas álgebras, obtenido anteriormente por Echarte, Gómez y Núñez en [].

Este trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el primero de ellos, que denominamos capítulo 0, se dan las definiciones y propiedades más importantes de las álgebras de Lie (omitiendo todas las demostraciones), que van a ser usadas en los restantes capítulos.

Los dos siguientes Capítulos, núcleos centrales del trabajo, se dedican al estudio de la clasificación de las álgebras de Lie filoformes derivadas de otras, distinguiendo entre los casos en los que los primeros coeficientes sean nulos (Capítulo 1) o no (Capítulo 2), respectivamente.

Se finaliza el trabajo con la exposición de una bibliografía, en la que se referencian los textos y artículos en los que nos hemos basado para la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 0

1. Álgebras de Lie.

Un álgebra de Lie L es un espacio vectorial sobre el que se encuentra definida una segunda operación interna [,] distributiva, llamada producto corchete, que satisface las siguientes propiedades:

$$[X,X] = 0,\ X \in L. \tag{1}$$

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [Z,X],Y] = 0,\ X,Y,Z \in L \tag{2}$$

La igualdad (2) se denomina identidad de Jacobi. De ahora en adelante, dicha identidad de Jacobi la representaremos por:

$J(X,Y,Z)=0$.

Un álgebra de Lie se denomina real, compleja,..., según sea el cuerpo base del espacio vectorial. Se denomina dimensión de L a la que tiene como espacio vectorial. En lo que sigue supondremos que todas las álgebras de Lie que aparecen serán complejas.

De (1) se deduce que $[X,Y] = -[Y,X]$.

Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de L, basta conocer los productos $[e_h, e_k]$, para conocer el resto de los productos entre los elementos del álgebra, ya que si:

$X = \Sigma \lambda_h e_h$; $Y = \Sigma \mu_k e_k$ tenemos que $[X,Y] = \Sigma \lambda_h \mu_k [e_h,e_k]$.

Los productos corchetes de dos elementos cualesquiera de la base serán $[e_h,e_k]=\Sigma C_{hk}^m e_m$. Los coeficientes C_{hk}^m se denominan <u>constantes de estructura.</u>

De (1) y (2) se deduce que:

$$C_{hk}^m = -C_{kh}^m$$

$$\Sigma(C_{hk}^r C_{rm}^s + C_{km}^r C_{rh}^s + C_{mh}^r C_{rk}^s) = 0$$

Nótese por tanto que la operación producto corchete no es asociativa, aunque sí distributiva y anticonmutativa.

De ahora en adelante, definiremos un álgebra por una de sus bases y los productos de cada par de elementos de dicha base, obviando los productos nulos.

2 Relaciones entre álgebras de Lie.

Dadas dos álgebras de Lie L, L', sobre el mismo cuerpo, diremos que:

$\Phi : L \rightarrow L'$ es un <u>homomorfismo</u>, si Φ es lineal, y se verifica que:

$\Phi:[X,Y] \rightarrow [\Phi(X),\Phi(Y)]$.

Si Φ es biyectiva se denomina <u>isomorfismo</u>.

Se denomina <u>subálgebra</u> de una álgebra de Lie L, a todo subespacio vectorial J, tal que si $X,Y \in J \Rightarrow [X,Y] \in J$.

Se dice que "I" es un <u>ideal</u> si es subálgebra de L, tal que si $X \in I$, $Y \in L \Rightarrow [X,Y] \in I$.

Se denomina <u>centro</u> de L al conjunto de elementos $X \in L$, tales que $[X,Y] = 0$ para todo $Y \in L$.

El centro de L es un ideal de L.

Llamaremos <u>centralizador</u> de una subálgebra M de L, al conjunto de elemntos de L que conmutan con todos los elementos de M, es decir:

$C_L M = \{ X \in L \,/\, [X,Y] = 0,\ Y \in M\}$.

Llamaremos álgebra derivada de L, y lo denotamos $[L,L]$, al conjunto de los elementos $[X,Y]$: $X,Y \in L$.

Un ideal J se dice <u>conmutativo</u> si $[X,Y] = 0$, $X \in J$, $Y \in L$.

Un álgebra se dice <u>conmutativa</u> si $[L,L] = 0$.

3. Clases de álgebras de Lie

Un álgebra de Lie se dice simple si no es conmutativa y no contiene ideales no triviales (estos son 0 y L). Para las álgebras simples $L = [L,L]$.

Un álgebra de Lie se dice semisimple si no contiene ideales conmutativos no triviales. Toda álgebra simple es semisimple, pero el recíproco no es cierto. Toda álgebra semisimple es suma directa de álgebras simples. También las álgebras semisimples coinciden con su álgebra derivada.

Dada un álgebra de Lie L, establecemos a partir de ella la siguiente sucesión:

$L_2 = [L,L]$; $L_3 = [L_2,L_2]$; ...; $L_i = [L_{i-1},L_{i-1}]$;...

Decimos que un álgebra es resoluble si existe un $n<\infty$ tal que $L_n = \{0\}$.

Establecemos otra sucesión:

$L^2 = [L,L]$; $L^3 = [L^2, L]$;...; $L^i = [L^{i-1},L]$;...

Decimos que un álgebra es nilpotente si existe un $n<\infty$ tal que $L^n = \{0\}$. Toda álgebra nilpotente es resoluble, pero el recíproco no es cierto.

Los L_i son ideales de L.

La intersección, suma y producto de ideales resolubles de un álgebra de Lie, son también ideales resolubles. De aquí se deduce que la suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie, es otro ideal resoluble (el mayor ideal resoluble contenido en el álgebra) que se denomina radical de L y lo denotamos *radL*. Análogamente, se denomina nihil-radical de L y lo denotamos *nihil-radL* al mayor ideal nilpotente contenido en el álgebra. Trivialmente, si el álgebra es resoluble coincide con su radical, si es nilpotente coincide con su nihil-radical y si el álgebra es semisimple, entonces su radical es nulo.

Sin embargo, no toda álgebra es de uno de los tipos mencionados anteriormente. El Teorema de descomposición de Levi afirma que toda álgebra de Lie se puede descomponer en suma (no directa) de su radical y un álgebra semisimple. Ello implica que conocidas las álgebras resolubles y las semisimples se podrían conocer todas las demás. No obstante, aunque la clasificación de las álgebras semisimples es ya conocida desde hace más de un siglo, no sucede igual con la de las resolubles, ni siquiera la de su subconjunto de las nilpotentes.

4. Algebras de Lie Filiformes

Del Teorema de Engel se deduce que en toda álgebra de Lie nilpotente, existe un elemento $e_1 \notin L^2$, y una base $\{e_1, e_2,\dots,e_n\}$, tal que

$[e_1,e_2] = 0;$

$[e_1,e_h] = \varepsilon_{h-1}e_{h-1}\,(\varepsilon_{h-1} = 0,1).$

Un álgebra de Lie se dice filiforme si es nilpotente y tal que todos los $\varepsilon_{h-1} = 1$, siendo $\dim L^i = n-i$.

La definición anterior es equivalente a la siguiente: un álgebra de Lie L se dice filiforme de dimensión n si es nilpotente y verifica que

$$\dim L^2 = n-2,\ \dim L^3 = n-3, \ldots, \dim L^n = 0.$$

Por tanto, si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es la base definida anteriormente, se tiene que

$L^2 \equiv \{e_2,\ldots,e_{n-1}\}$

$L^3 \equiv \{e_2,\ldots,e_{n-2}\}$

.

.

.

$L^{n-1} \equiv \{e_2\}$

$L^n \equiv \{0\}$

Para un $h > 2$, se deduce que:

$$[e_h,e_n] = C_{h,n}^{h-1}\, e_{h-1} + \ldots + C_{hn}^{2}\, e_2 \qquad \textbf{(0.3)}$$

pudiendo algunos coeficientes o incluso todos ser nulos. De la igualdad anterior tenemos que $[e_3,e_n] = \alpha\ e_2$. Si $\alpha \neq 0$, el cambio: $e'_n = e_n + \alpha\ e_1$ nos permite conseguir que $[e_3,e'_n] = 0$, lo que no cambia los demás elementos de la base ya que
$e'_{n-1} = [e_1,e'_n] = [e_1,e_n + \alpha\ e_1] = e_{n-1},\ldots$

En adelante, supondremos que las álgebras son filiformes complejas, y que todas las bases que utilizamos verifican estas propiedades, es decir, la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es tal que:

$$[e_1,e_2] = 0,\ \ [e_1,e_h] = e_{h-1}\ \ (h = 3,\ldots,n),\ [e_3,e_h] = 0\ (h{:}2,\ldots,n).$$

Una base que verifique dichas propiedades se denomina base adaptada, siendo e_2 el centro del álgebra.

Si en un álgebra de Lie filiforme respecto de una base adaptada $\{e_1,\ldots,e_n\}$ los únicos productos no nulos son los $[e_1,e_h] = e_{h-1}$ ($h=3,..,n\}$, dicha álgebra se denomina <u>modelo</u>, y hay una en cada dimensión.

Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme *L*, a partir de $J(e_1,e_{k-1},e_k) = 0$ se deduce que

$$[e_1,[e_{k-1},e_k]] = [e_{k-2},e_k]\ \ k>3 \tag{0.4}$$

y en general, de $J(e_1,e_h,e_k) = 0$ se deduce que

$$[e_{h-1},e_k] + [e_h,e_{k-1}] = [e_1,[e_h,e_k]] \tag{0.5}$$

También se prueba que los coeficientes C_{hn}^{h-1} son todos iguales, es decir, que

$$C_{4,n}^{3} = C_{5,n}^{4} = \ldots = C_{n-1,n}^{n-2}$$

A estos coeficientes se les denomina primeros coeficientes y se prueba que si $C_{h,n}^{h-1} \neq 0$, entonces n es par y se prueba además que todos ellos pueden hacerse iguales a la unidad mediante el cambio de base adaptada

$$e'_1 = e_1; \quad e'_n = e_n / C_{h,n}^{h-1}$$

y que en los demás casos, estos primeros coeficientes son todos nulos.

5 El invariante j.

Definimos el subíndice j como:

$$j = \inf \{k \,/\, [e_k, e_{k+1}] \neq 0\}.$$

Es decir, j es el mayor subíndice tal que el álgebra de base $\{e_2, \ldots, e_j\}$ es conmutativa.

Si existe j, al producto $[e_j, e_{j+1}]$ se le denomina producto principal. Se prueba que j es un invariante de álgebras de Lie filiformes y que el producto principal siempre existe en toda álgebra de Lie filiforme excepto en la modelo de cada dimensión.

También se prueba que la relación entre la j y la n viene dada por las desigualdades $j < n < 2j-1$, verificándose la igualdad $n = 2j-2$ únicamente en el caso de que los primeros coeficientes sean distintos de cero.

En este caso se verifica también que

$$[e_4, e_{n-1}] = e_2,\ [e_5, e_{n-2}] = -e_2, \ldots, [e_h, e_{n+3-h}] = (-1)^h e_2 \qquad (0.6)$$

y por tanto, $[e_j, e_{j+1}] = (-1)^j e_2$.

Una propiedad importante que verifica el subíndice j es la siguiente: un álgebra de Lie filiforme de dimensión n queda totalmente determinada si se conocen los productos $[e_k,e_{k+1}]$ para ($k=j,\dots,n$).

6 Algebras de Lie Derivadas.

Recordamos la definición dada anteriormente de álgebra de Lie derivada: sea L un álgebra de Lie. Se denomina álgebra derivada de L, y se denota por $[L,L]$, al conjunto de elementos $[X,Y]$, $X,Y \in L$. Recuérdese que el álgebra derivada es un ideal de L.

Es conocido que un álgebra de Lie es resoluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente, aunque este resultado no asegura que un álgebra de Lie nilpotente sea necesariamente derivada de otra; antes al contrario, la mayor parte de las álgebras de Lie nilpotentes no son derivadas de otras.

Es fácil ver que el álgebra de Lie filiforme modelo de dimensión n con base adaptada $\{e_1,\dots,e_n\}$ (recuérdese que hay una para cada dimensión) es siempre derivada de un álgebra resoluble M, una de cuyas bases es la $\{e_1,\dots,e_n,U\}$, siendo $[e_h,U] = \lambda_h e_h$ con $\lambda_h = \lambda_2 -(h-2)\lambda_1$ para $h > 2$ y λ_1 y λ_2 constantes complejas arbitrarias no nulas y distintas entre sí.

Para ver cuándo un álgebra de Lie es derivada de otra en el resto de los casos, supongamos que el álgebra de Lie filiforme *L* es derivada del álgebra de Lie resoluble *M*, siendo $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base adaptada de *L* y $\{e_1,\ldots,e_n,U\}$ una de *M*. Como $[M,M]$ ha de ser igual a *L*, se tendrá que verificar que

$$[e_h,U_k] = \Sigma\, a_{hk}^{s}\, e_s \quad \text{y} \quad [U_h,U_k] = \Sigma\, b_{hk}^{m}\, e_m$$

Por tanto, e_1 y e_n deberán estar acontenidos en algunos de los productos corchetes $[e_1,U_k]$, $[e_n, U_k]$ o $[U_h,U_k]$, dado que e_1 y e_n no pertenecen a L^2.

En [] se prueba que una condición necesaria para que *L* sea derivada de *M* es que $a_{1,h}^{1} \neq 0$ para algún $\underline{h}$ y que el álgebra de Lie filiforme *L* es o bien derivada de un álgebra de Lie resoluble de dimensión una unidad más que la de *L* o bien no es derivada de ningún álgebra de Lie.

CAPITULO I

ALGEBRAS DE LIE FILIFORMES DERIVADAS CON PRIMEROS COEFICIENTES NULOS

En el capítulo anterior hemos probado que si un álgebra de Lie filiforme compleja M es derivada de otra álgebra resoluble L, es derivada también de un álgebra resoluble de dimensión una unidad mayor que M. Supondremos en todo el trabajo que las álgebras son complejas. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme M, derivada de un álgebra resoluble L de dimensión n+1. [L,L] = M, y una de cuyas bases es $\{e_1, ..., e_n\}$. La condición necesaria y suficiente para que M sea derivada de L es que $a_{1,1}\neq 0$, siendo

$[e_h,U] = \sum a_{h,k}e_k$ (k=2, ..., h).

Los coeficientes $a_{h,k}$ son extrínsecos a M. A continuación vamos a estudiar las condiciones intrínsecas y extrínsecas a M para que sea derivada de L.

1. Condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie filiforme compleja sea derivada de otras álgebras.

En este capítulo vamos a estudiar las álgebras de Lie filiformes tales que los "primeros coeficientes" ($C_{h,n}^{h-1} = 0$) sean nulos, es decir:

$$[e_h, e_n] = C_{h,n}^{h-2}e_{h-2} + ...+ C_{h,n}^{2}e_2 \ (\forall h= 4, ..., n-1),$$

reservando para el capítulo siguiente el caso $C_{h,n}^{h-1}\neq 0$.

La subálgebra M_J $\{e_2, ..., e_j\}$ es conmutativa, por tanto se puede encontrar en este caso un $U \in L$ tal que:

$$[e_h, U] = a_{h,h}e_h \ (2 \leq h \leq j) \qquad (1.1)$$

Por otra parte, de $J(e_1, e_k, U) = 0$, se verifica que:

$$a_{k-1,k-1} - a_{k,k} = a_{1,1} \ (k:3, ..., n) \qquad (1.2)$$

¿Cúales son las condiciones para que la subálgebra $M_{j+1} \subset M$; de base $\{e_2, ..., e_j, e_{j+1}\}$, sea derivada de la subálgebra L_{j+1} de base $\{e_2, ..., e_j, e_{j+1}, U\}$?

Si $[e_j, e_{j+1}] = \beta_q e_q + ...+ \beta_2 e_2$ ($\beta_q \neq 0$; $q<j-1$)

de $J(e_j, e_{j+1}, U) = 0$ se tiene que:

$$a_{q,q} = a_{j,j} + a_{j+1,j+1} \qquad (1.3)$$

$$\beta_{q-1}a_{1,1} = 0$$

$$2\beta_{q-2}a_{1,1} = 0$$

$$(q-2)\beta_2 a_{1,1} = 0$$

Si el álgebra M es derivada de L, entonces $a_{1,1} \neq 0$ y por tanto $\beta_{q-1}=...=\beta_2=0$, luego

$$[e_j, e_{j+1}] = \beta_q e_q$$

haciendo el cambio de base adaptada $e_1'=e_1$; $e_h'=e_h/\beta_q$ (h=2, ..., n) obtenemos:

$$[e_j, e_{j+1}] = e_q \qquad (1.4)$$

LEMA 1-

Si un álgebra de Lie filiforme es derivada de otras álgebras cada uno de los productos:

$$[e_{j+h}, e_{j+h+1}] = \lambda_h e_{q+2h} \qquad (1.5)$$

Demostración:

A partir de (1.1) podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} [e_2, U] \\ [e_3, U] \\ . \\ [e_n, U] \\ [e_1, U] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 & 0 \\ & & . & & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ . \\ e_3 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

La matriz es triangular, y los términos de la diagonal principal son distintos entre sí por (1.2), por tanto mediante un cambio adecuado de base adaptada $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, dicha matriz se transformará en la matriz semejante que será diagonal debido a que todos los $a_{i,i}$ son diferentes entre sí, y cuya diagonal será: $\{a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{1,1}\}$, y por tanto

$$[e'_h, U] = a_{h,h} e'_h \quad (\forall h) \qquad (1.6)$$

De la igualdad de Jacobi $J(e'_{j+h}, e'_{j+h+1}, U) = 0$ se deduce:

$[[e'_{j+h}, e'_{j+h+1}] , U] = (a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1}) [e'_{j+h}, e'_{j+h+1}]$.

Si $[e'_{j+h}, e'_{j+h+1}] = \lambda_r e'_r + \dots + \lambda_2 e'_2$ $(\lambda_r \neq 0)$ se obtiene:

$\lambda_r a_{r,r} = (a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1})\lambda_r$

$\lambda_{r-1} a_{r-1,r-1} = (a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1})\lambda_{r-1}$

$$\lambda_2 a_{2,2} = (a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1})\lambda_2$$

y por tanto,

$$\mathbf{a_{r,r} = a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1}} \qquad (1.7)$$

también se deduce que

$$\boldsymbol{\lambda_{r-1} \cdot a_{r-1,r-1} = (a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1})\lambda_{r-1}} \qquad (1.8)$$

pero como $a_{r-1,r-1} - a_{r,r} = a_{1,1} \neq 0$ por (II), entonces $\lambda_{r-1} = 0$ y análogamente,

$\lambda_{r-2} = \lambda_{r-3} = ... = \lambda_2 = 0$, luego:

$$\boldsymbol{[e'_{j+h}, e'_{j+h+1}] = \lambda_r e'_r} \qquad (1.9)$$

Para calcular r tengamos en cuenta (1.3) y (1.7) lo que nos permite escribir:

$$a_{q,q} = a_{j,j} + a_{j+1,j+1}$$

$$a_{r,r} = a_{j+h,j+h} + a_{j+h+1,j+h+1}$$

restando miembro a miembro:

$$(r-q)a_{1,1} = 2ha_{1,1}$$

y como $a_{1,1} \neq 0$ para álgebras derivadas, tenemos que

$$r = q + 2h$$

y en consecuencia:

$$\boldsymbol{[e'_j, e'_{j+1}] = e'_q;\ [e'_{j+1}, e'_{j+2}] = \lambda_1\, e'_{q+2};\ ......;\ [e'_{j+h}, e'_{j+h+1}] = \lambda_h\, e'_{q+2h}}$$

Por tanto para que un álgebra de Lie filiforme compleja sea derivada de otra álgebra, es necesario que exista una base adaptada $\{e_1, ..., e_n\}$ respecto a la cual se verifique:

$$\boldsymbol{[e_j, e_{j+1}] = e_q;\ [e_{j+1}, e_{j+2}] = \lambda_1 e_{q+2};\ ....;\ [e_{j+h}, e_{j+h+1}] = \lambda_h e_{q+2h}}$$

Lema 2-

$$[e_k, e_h] = \mu e_{h+k-2j-1+q} \quad \text{con } \underline{h}, \underline{k} > 1$$

Demostración:

$$[e_{j+h}, e_{j+h+1}] = \lambda_h\, e_{q+2h};$$

Sumando los subíndices del corchete y restando el subíndice del miembro de la derecha tenemos que j+h+j+h+1-q-2h = 2j - q +1 que es constante. Haciendo lo mismo con la expresión $[e_k, e_h] = \mu e_m$, obtenemos que h+k-m = 2j-q +1; de donde m= h+k-2j-1-q.

Lema 3-

Los coeficientes de los productos anteriores son 1, λ_1, λ_2, ..., λ_h. Mediante un cambio de base adaptada podemos lograr que uno cualquiera de dichos coeficientes, diferentes de cero, sea igual a la unidad.

Demostración:

Haciendo el cambio de base adaptada:

$$e'_1 = e_1;\; e'_k = e_k/\lambda_h \; (h=2, ..., n)$$

tenemos:

$$[e_{j+h}', e_{j+h+1}'] = [e_{j+h}/\lambda_h, e_{j+h+1}/\lambda_h] = (1/\lambda_h^2)\, \lambda_h\, e_{q+2h} = e_{q+2h}'$$

luego siempre podemos conseguir que uno de estos coeficientes sea 1.

LEMA 4-

La dimensión máxima posible, para un álgebra de Lie filiforme, que sea derivada es:

$$\mathbf{n=2j-q-1}$$

Demostración:

Si $[e_{j+h}, e_{j+h+1}]=\lambda_h e_{q+2h}$, lo máximo posible que puede valer q+2h es j+h-2, ya que los "primeros coeficientes", en este caso el correspondiente a j+h-1 es cero. Si q+2h = j+h-2 se tiene que h = j-q-2 pero como n = j+h+1 = j+j-q-2+1 obtenemos que

$$\mathbf{n = 2j-q-1} \qquad \mathbf{(1.10)}$$

dimensión máxima de un álgebra de Lie filiforme que sea derivada, conocidos <u>j</u> y <u>q</u>.

Por el contrario, la dimensión mínima la obtenemos si j=n. En este caso la base adaptada es $\{e_1, ..., e_n\}$, y los productos no nulos son los $[e_1, e_h] = e_{h-1}$ (h:3, ..., j). Es decir, se trata de las álgebras <u>modelo</u>

2. Estudio de las álgebras de Lie filiformes y que sea derivadas de otras, atendiendo a los valores de j y q.

a) Si j = n tenemos las álgebras modelo. Estas álgebras son siempre derivadas de otras. Concretamente, el álgebra M de base adaptada $\{e_1, ..., e_j\}$ es derivada del álgebra

$L\{e_1, ..., e_j, U\}$ tal que

$$[e_h, U] = \lambda_h e_h \text{ (h=1, ..., j)}$$

verificando:

$$\lambda_h = \lambda_2 -(h-2)\lambda_1 \ (h>2)$$

λ_1, $\lambda_2 \in C$ y son arbitrarios, cumpliéndose que $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_j$.

b) Si n=j+1

En este caso, $[e_j, e_{j+1}]=e_q$ ($q \leq j-2$).

De $J(e_1, e_j, e_{j+1}) = 0$ se deduce que:

$[e_{j-1}, e_{j+1}]=e_{q-1}$;

de $J(e_1, e_{j-1}, e_{j+1}) = 0$ se deduce que: $[e_{j-2}, e_{j+1}]=e_{q-2}$, ... y procediendo por inducción, se llega a $[e_{j-q+2}, e_{j+1}]=e_2$;

Luego para este caso, un álgebra derivada filiforme, de dimensión n=j+1, y respecto a una base adaptada $\{e_1, ..., e_n\}$, se puede enunciar así:

$[e_1, e_2] = 0$; $[e_1, e_h] = e_{h-1}$ (h=3, ..., n); $[e_3, e_n] = 0$;

$[e_j, e_{j+1}] = e_q$; $[e_{j-1}, e_{j+1}] = e_{q-1}$; $[e_{j-q+2}, e_{j+1}]=e_2$.

c) n=j+2

Para n= j+2 se tiene que $[e_j, e_{j+1}] = e_q$; $[e_{j+1}, e_{j+2}] = \lambda e_{q+2}$, los demás productos se obtendrán a partir de la igualdad (0.5) del capítulo anterior.

De $J(e_j, e_{j+1}, e_{j+2}) = 0$ se obtiene:

$$[e_q, e_{j+2}] + \lambda[e_{q+2}, e_j] - \lambda[e_{q+1}, e_{j+1}] = 0$$

como $q \leq j-2$ tenemos que $[e_{q+2}, e_j] = 0$. Así la igualdad anterior queda reducida a:

$$\mathbf{[e_q, e_{j+2}] - \lambda[e_{q+1}, e_{j+1}] = 0} \qquad \mathbf{(1.11)}$$

Si $[e_q, e_{j+2}] = 0$; $q<j-q-1$ de donde $2q<j+1$ y entonces también

$[e_{q+1}, e_{j+1}] = 0$.

Pero si $q \geq j-q+1$ entonces $2q \geq j+1$, entonces se verifica:

$$[e_q, e_{j+2}] = (\lambda-j+q+1)e_{2q+1-j}$$

$$[e_{q+1}, e_{j+1}] = e_{2q-j+1}$$

valores que llevados a la igualdad (1.10) nos da:

$(\lambda - j + q + 1) - \lambda = 0$; de donde $j = q+1$, ya que $q+1 < j$, por ser $[e_j, e_{j+1}] = e_q$. Por tanto $q \leq j-2$. Luego tiene que verificarse que a partir de $n \geq j+2$

$$\mathbf{2q < j+1} \qquad \textbf{(1.12)}$$

d) n=j+3

$[e_{j-q}, e_{j+3}] = (1-(q+1)\lambda_1+((q^2-q)/2)\ \lambda_2)e_2$ .... $[e_{j+2}, e_{j+3}] = e_{q+4}$

$[e_{j-q+1}, e_{j+2}] = (\lambda_1-(q-1)\lambda_2)e_2$ .... $[e_{j+1}, e_{j+2}] = \lambda_1 e_{q+2}$

$[e_{j-q+2}, e_{j+1}] = \lambda_2 e_2$ .... $[e_j, e_{j+1}] = \lambda_q e_2$

De $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3}) = 0$ tenemos que:

$$\lambda_1[e_{q+2}, e_{j+3}] + [e_{q+4}, e_{j+1}] + [e_{q+3}, e_{j+2}] = 0 \qquad \textbf{(1.13)}$$

Si $q+2 < j-q$ todas las identidades de Jacobi son idénticamente nulas. Por tanto el álgebra es válida para todo valor de λ_1, λ_2.

Es decir: para $n=j+3$, $2q<j-2$, las álgebras de Lie filiformes tales que, $[e_{j+h}, e_{j+h+1}] = \lambda_h e_{q+2h}$, son derivadas para todo valor de $\underline{\lambda_1}$ y $\underline{\lambda_2}$

Si $q+2 = j-q$ ($2q = j-2$). La igualdad (1.13) se escribe así:

$$(q+1)\ (\lambda_1)^2\ e_2 = ((q^2-q)/2)\ \lambda_1\lambda_2 + q\lambda_2)\ e_2$$

todas las demás igualdades de Jacobi son idénticamente nulas. Para que un álgebra filiforme que cumpla (1.10) sea derivada de otras álgebras es condición necesaria y suficiente que λ_1 y λ_2 satisfagan a la anterior ecuación, siendo

$n=j+3$ y $2q=j-2$.

Supongamos ahora que:

$n=j+3;\ 2q=j-1$

de la identidad de Jacobi $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3})=0$ obtenemos;

$$q(\lambda_1)^2=((q-1)(q-2)/2)\,\lambda_1\lambda_2+(q-1)\lambda_2$$

la igualdad de Jacobi $J(e_j, e_{j+2}, e_{j+3})=0$ nos da la misma ecuación, y las restantes igualdades de Jacobi son idénticamente nulas. También aquí $\underline{\lambda_1}$ y $\underline{\lambda_2}$ dependen de un parámetro libre.

Si $n=j+3;\ 2q=j$,

de $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3})=0$

$$(q-1)(\lambda_1)^2=((q-2)(q-3)/2)\,\lambda_1\lambda_2+q\lambda_2-2\lambda_2=0$$

de $J(e_j, e_{j+2}, e_{j+3})=0$ obtenemos lo mismo.

De $J(e_{j-1}, e_{j+2}, e_{j+3})=0$

$$(\lambda_1-\lambda_2)(1-(q+1)\lambda_1+((q^2-q)/2)\lambda_2)-(1-2\lambda_1)(\lambda_1-(q-1)\lambda_2)=0$$

de $J(e_j, e_{j+1}, e_{j+3})=0$ obtenemos una combinación lineal de las anteriores. El sistema tiene una solución única. Es decir: si $j=2q$; $n=j+3$, hay una sola álgebra para cada valor de $\underline{q}$.

Ejemplo 1-

(j=8; q=4; n=11)

De $J(e_9, e_{10}, e_{11}) = 0$ obtenemos: $3(\lambda_1)^2 = \lambda_2(\lambda_1+2)$.

De $J(e_8, e_9, e_{11}) = 0$ obtenemos: $2\lambda_1 = 3\lambda_2$.

De $J(e_8, e_{10}, e_{11}) = 0$ obtenemos: $-3(\lambda_1)^2 + 5\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2 - (6\lambda_2)^2 = 0$.

El sistema formado por las dos primeras ecuaciones se satisface para los siguientes valores de λ_1 y λ_2.

$\lambda_1 = 4/7$; $\lambda_2 = 8/21$

Estos valores también verifican la tercera ecuación. Hay, pues, un álgebra filiforme derivada tal que:

n=11; j=8; q=4; (j=2q) que es derivada de otras álgebras.

No es posible mayor dimensión ya que $[e_{10}, e_{11}] = e_8$.

Ejemplo 2-

(j=10; q=5; n=13)

De $J(e_{11}, e_{12}, e_{13}) = 0$ otenemos que: $4(\lambda_1)^2 = 3\lambda_2(\lambda_1+1)$.

De $J(e_{10}, e_{12}, e_{13}) = 0$ obtenemos lo mismo.

De $J(e_9, e_{12}, e_{13}) = 0$ obtenemos: $4(\lambda_1)^2 = 8\lambda_2\lambda_1 - 10(\lambda_2)^2 + 3\lambda_2$.

De $J(e_{10}, e_{11}, e_{13}) = 0$ obtenemos $\lambda_1 = 2\lambda_2$.

Las soluciones son:

$\lambda_1 = 3/5$; $\lambda_2 = 3/10$.

Una sóla álgebra filiforme derivada.

e) n=j+4

$[e_{j-q-1}, e_{j+4}] = (\lambda_3-(q+3)\lambda_2+((q+1)(q+2)/2)\,\lambda_1-q(q-1)(q+1)/3)e_2$ .... $[e_{j+3}, e_{j+4}] = \lambda_3 e_{q+6}$

$[e_{j-q}, e_{j+3}] = (\lambda_2-(q+1)\lambda_1+((q^2-q)/2))e_2$ .... $[e_{j+2}, e_{j+3}] = \lambda_2 e_{q+4}$

$[e_{j-q+1}, e_{j+2}] = (\lambda_1-(q-1))e_2$ .... $[e_{j+1}, e_{j+2}] = \lambda_1 e_{q+2}$

$[e_{j-q+2}, e_{j+1}] = e_2$ .... $[e_j, e_{j+1}] = e_q$

De $J(e_{j+2}, e_{j+3}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

$$\lambda_2[e_{q+4}, e_{j+4}] + \lambda_3[e_{q+6}, e_{j+2}] - \lambda_3[e_{q+5}, e_{j+3}] = 0$$

Si $q+4 \leq j-q-1$ todas las igualdades de Jacobi son idénticamente nulas.

y, en general, tenemos:

si $n=j+2$; $2q<j+1$ todas las igualdades de Jacobi son idénticamente nulas

si $n=j+3$; $2q<j-2$ " " "

si $n=j+4$; $2q<j-5$ " " "

•

•

si $n=j+h$; $2q<j+7-3h$ " " "

Por tanto todas las álgebras filiformes para $n=j+h$; $2q<j+7-3h$ son derivadas si cumplen (1.5), para todo valor de las $\underline{\lambda_i}$.

Si $j=2q$ hemos probado que habrá una sola álgebra para $n=j+3$. Vamos a probar que no hay ninguna para $n\geq j+4$ demostrando el siguiente:

Teorema 1-

Para $n\geq j+4$; $j=2q$ no hay álgebras filiformes derivadas.

Demostración:

Prescindimos de los casos ($j=4;q=2$ que se reduce a $[e_4, e_5] = e_2$; $n=j+1$),

($j=6;q=3$ cuya $\underline{n}$ máxima es $j+2$), y de ($j=8;q=4$ ya estudiada).

A partir de $q\geq5$; $j=2q$, no hay álgebras filiformes derivadas para $n\geq j+4$.

$[e_j, e_{j+1}] = e_q$ la podemos escribir como $[e_{2q}, e_{2q+1}] = e_q$, y análogamente

$[e_{j+1}, e_{j+2}] = \lambda_1 e_{q+2}$ se puede escribir como $[e_{2q+1}, e_{2q+2}] = \lambda_1 e_{q+2}$

$[e_{j+2}, e_{j+3}] = \lambda_2 e_{q+4}$ " " $[e_{2q+2}, e_{2q+3}] = \lambda_2 e_{q+4}$

$[e_{j+3}, e_{j+4}] = \lambda_3 e_{q+6}$ " " $[e_{2q+3}, e_{2q+4}] = \lambda_3 e_{q+6}$

De $J(e_{2q},e_{2q+1},e_{2q+2}) = 0$ tenemos que $q=2\lambda_1+1$

De $J(e_{2q},e_{2q+2},e_{2q+3}) = 0$ tenemos que $\lambda_2 = ((q-1)(-3q+5))/4\cdot(2-q)$

De $J(e_{2q},e_{2q+1},e_{2q+4}) = 0$ tenemos que

$$-\lambda_2\cdot q + (((q+1)q)/2)\lambda_3 = (q^3-3q^2+2q)/6.$$

Sustituyendo λ_2 y λ_1 nos da la ecuación:

$q^3+5q^2-5q-15=0$ que no tiene raíces enteras mayores o iguales que 5.

Luego no existen álgebras filiformes derivadas a partir de $q\geq 5$; $j=2q$; $n\geq j+4$.

Ejemplo 3-

Para ilustrar este ejemplo tomemos el caso límite en el cual tenemos:

$[e_{2q}, e_{2q+1}] = \lambda_3 e_q$; $[e_{2q+1}, e_{2q+2}] = \lambda_2 e_{q+2}$; $[e_{2q+2}, e_{2q+3}] = \lambda_1 e_{q+4}$; $[e_{2q+3}, e_{2q+4}] = e_{q+6}$

y $2q+4 = q+6+3$, es decir, $q = 5$ y $j = 10$.

De $J(e_{11}, e_{13}, e_{14}) = 0$ obtenemos la ecuación

$$3(\lambda_1)^2 = \lambda_2(\lambda_1 + 2)$$

De $J(e_{10}, e_{11}, e_{13}) = 0$ obtenemos que

$$5\lambda_3(2\lambda_3 - \lambda_2) = 0$$

De $J(e_{10}, e_{11}, e_{14}) = 0$ obtenemos que

$$-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$

De $J(e_{10}, e_{12}, e_{13}) = 0$ obtenemos que

$$4(\lambda_2)^2 = 3\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2) = 0$$

La única solución que satisface a estas cuatro ecuaciones es $\lambda_k=0$ ($k=1,2,3$). Pero para esta solución $j=13$ y $q=11$.

Para concluir el estudio del caso $n=j+4$ veamos como son las álgebras para

$2q = j - k$ con $k \geq 1$.

Teorema 2-

Para $2q=j-1$ y $n \geq j+4$ no hay álgebras filiformes derivadas.

Este estudio lo haremos con $q \geq 5$. El caso $q=4$ se verá como un caso particular.

De $J(e_j, e_{j+3}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(a) $(-(q-1)^2(\lambda_2)^2 - ((q-1)q/2)(\lambda_1)^2 + ((q^2-3q+6)/2)\lambda_1\lambda_2 + (q-2)\lambda_1\lambda_3 +$

$+ ((q-3)(q-2)(7-q)/6)\lambda_2 + ((q-3)(q-2)(q-1)/6)\lambda_1 - ((q-3)(q-2)/2)\lambda_3 = 0)$

De $J(e_j, e_{j+1}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos

(b) $\lambda_2 = ((q+2)/2)\lambda_1 - q(q-1)/6$

De $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3}) = 0$ obtenemos

(c) $-q(\lambda_1)^2 + ((q-2)(q-1)/2)\lambda_1 + \lambda_2(q-1) = 0$

De $J(e_j, e_{j+2}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(d) $q\lambda_1\lambda_2 - (q(q+1)/2)(\lambda_1)^2 + ((q-2)(q-1)/6)\lambda_1 + 2(q-2)\lambda_2 = \lambda_3(q-2)$

De (b) y (c) vemos que λ_1 tiene dos valores ($\lambda_{1,1}$ y $\lambda_{1,2}$) donde

$\lambda_{1,1} = 2(q-1)/3$ y $\lambda_{1,2} = (q-1)/3$.

Sustituyendo en (b) y (d) obtenemos los valores de λ_2 y λ_3 que son

$$\lambda_{2,1} = (q-1)(q+4)/6;\ \lambda_{2,2} = (q-1)/3;\ \lambda_{3,1} = (q-1)(q+4)/9;$$

$$\lambda_{3,2} = -((q-1)(q-4)(q-3))/(q(q-2))$$

Sustituyendo estos dos tríos de valores en (a) salen dos polinomios en q que son respectivamente:

$$P_1(q) \equiv 3q^4 + 32q^3 - 169q^2 + 94q + 160 = 0$$

$$P_2(q) \equiv -11q^4 + 201q^3 - 931q^2 + 1543q - 802 = 0$$

Las raíces de ambos polinomios no son enteras con lo cual llegamos a la misma contradicción del caso anterior; así podemos concluir de la misma manera que en j=2q.

Para el caso q=4 se puede ver que tampoco puede exitir.

Ejemplo 4-

Al igual que antes vamos a tomar el caso límite, en el cual tenemos

$[e_{2q+1}, e_{2q+2}] = \lambda_3 e_q$; $[e_{2q+2}, e_{2q+3}] = \lambda_2 e_{q+2}$; $[e_{2q+3}, e_{2q+4}] = \lambda_1 e_{q+4}$; $[e_{2q+4}, e_{2q+5}] = e_{q+6}$

y $2q+5 = q+6+3$; es decir q=4 y j=9.

De $J(e_{11}, e_{12}, e_{13}) = 0$ obtenemos

$$3(\lambda_1)^2 = \lambda_2(\lambda_1+2)$$

De $J(e_{10}, e_{11}, e_{12}) = 0$ obtenemos que

$$4(\lambda_2)^2 = 3\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)$$

De $J(e_9, e_{10}, e_{13}) = 0$ obtenemos que

$$3\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_3$$

De estas tres ecuaciones llegamos a la siguiente ecuación

$$2(\lambda_1)^2 + 2\lambda_1 - 1 = 0$$

la cual nos da las siguientes soluciones para los parámetros

$\lambda_1 = (\sqrt{3} - 1)/2$; $\lambda_2 = (9-5\sqrt{3})/2$; $\lambda_3 = 7-4\sqrt{3}$

$\lambda_1 = -(\sqrt{3} + 1)/2$; $\lambda_2 = (9+5\sqrt{3})/2$; $\lambda_3 = 7+4\sqrt{3}$

Haciendo ahora $J(e_9, e_{11}, e_{13}) = 0$ obtenemos

$$-4\lambda_1\lambda_2 + 10(\lambda_2)^2 - 4\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0$$

la cual no es verificada por ninguno de los valores anteriores de los parámetros. Así pues la única solución se obtiene para $\lambda_k = 0$ k=1,2,3. Sin embargo para esta solución j=12 y q=9.

Teorema 3-

Para el caso 2q=j-2 y n=j+4 los parámetros λ_1, λ_2 y λ_3 quedan determinados por tres ecuaciones.

Demostración:

De $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+3}) = 0$ obtenemos

(a) $-(q+1)(\lambda_1)^2 + ((q-1)q)/2)\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$

De $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(b) $(q(q+1)/2)(\lambda_1)^2 - (q(q-1)(q-2)/6)\lambda_1 - (q+1)\lambda_1\lambda_2 + (q-1)\lambda_3 -(q-2)\lambda_2 = 0$

De $J(e_{j+2}, e_{j+3}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(c) $-q(\lambda_2)^2 + ((q-2)(q-1)/2)\lambda_1\lambda_2 - ((q-4)(q-3)(q-2)/6)\lambda_2 + (q-1)\lambda_1\lambda_3 - ((q-4)(q-1)/2)\lambda_3 = 0$

El resto de identidades de Jacobi o son nulas o son combinación lineal de éstas. Estas tres ecuaciones determinan los valores que tienen los tres parámetros.

Ejemplo 5-

Para ilustrar este resultado tomamos también el caso límite en el cual

$[e_{2q+2}, e_{2q+3}] = \lambda_3 e_q$; $[e_{2q+3}, e_{2q+4}] = \lambda_2 e_{q+2}$; $[e_{2q+4}, e_{2q+5}] = \lambda_1 e_{q+4}$; $[e_{2q+5}, e_{2q+6}] = e_{q+6}$

y $2q+6 = q+6+3$, es decir, $q=3$ y $j=8$.

De $J(e_{10}, e_{11}, e_{12}) = 0$ obtenemos que

$$3(\lambda_1)^2 = \lambda_2(\lambda_1+2)$$

De $J(e_9, e_{10}, e_{12}) = 0$ obtenemos que

$$-4\lambda_1\lambda_2 + 6(\lambda_2)^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0$$

De $J(e_9, e_{10}, e_{11})$ = obtenemos que

$$4(\lambda_2)^2 = 3\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)$$

El resto de ecuaciones o son nulas o son combinación de éstas. De el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores obtenemos una solución, no nula, única.

$\lambda_1 = 1/10$; $\lambda_2 = 1/70$; $\lambda_3 = 1/420$.

La otra solución sería la nula, es decir, $\lambda_k = 0$ $(k=1,2,3)$

Teorema 4-

Para el caso 2q=j-3 y n=j+4 aparece una familia uniparamétrica de álgebras.

Demostración:

De $J(e_{j+2}, e_{j+3}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(a) $-(q+1)(\lambda_2)^2 + ((q-1)q/2)\lambda_1\lambda_2 + q\lambda_1\lambda_3 - ((q-3)(q-2)(q-1)/6)\lambda_2 - (q(q-3)/2)\lambda_3 = 0$

De $J(e_{j+1}, e_{j+2}, e_{j+4}) = 0$ obtenemos:

(b) $-(q+2)\lambda_1\lambda_2 + ((q+1)(q+2)/2)(\lambda_1)^2 + q\lambda_3 - ((q-1)q(q+1)/6)\lambda_1 - (q-1)\lambda_2 = 0$

El resto de identidades de Jacobi o son nulas o son combinación lineal de éstas. Luego tenemos una familia uniparamétrica de álgebras determinada por las ecuaciones anteriores.

Teorema 5-

Para los casos 2q=j-4 y 2q=j-5 aparece una familia biparamétrica de álgebras respectivamente.

Demostración:

Para $2q=j-4$ la única ecuación independiente que hay es la que viene determinada por la identidad de Jacobi $J(e_{j+2}, e_{j+3}, e_{j+4}) = 0$

$$-(q+2)(\lambda_2)^2 + (q(q+1)/2)\lambda_1\lambda_2 + (q+1)\lambda_1\lambda_3 - ((q-2)q(q-1)/6)\lambda_2 - ((q-2)(q+1)/2)\lambda_3 = 0$$

Para $2q=j-5$ ocurre al igual que en caso anterior. La ecuación es

$$-(q+3)(\lambda_2)^2 + ((q+1)(q+2)/2)\lambda_1\lambda_2 + (q+2)\lambda_1\lambda_3 - ((q-1)q(q+1)/6)\lambda_2 - ((q-1)(q+2)/2)\lambda_3 = 0$$

Cuando $2q<j-5$ todas las identidades de Jacobi son nulas luego no hay restricciones para los parámetros.

3. Estudio de las álgebras de Lie filiformes y que sea derivadas de otras, atendiendo a su dimensión.

a) Caso n=2j-q-1(dimensión de n máxima).

En este caso, $[e_{n-1}, e_n] = e_{n-3}$; entre e_{n-1} y e_{n-3} los subíndices diferirán en dos unidades. Según el lema 1, $[e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda_1 e_{n-5}$; $[e_{n-3}, e_{n-2}] = \lambda_2 e_{n-7}$; .... En virtud del lema 2, podemos elegir como coeficiente 1, el de $[e_{n-1}, e_n]$, por tanto $[e_{n-1}, e_n] = e_{n-3}$.

Si n es par; n-3, n-5, n-7, ..., son impares y se llegará a que q = 3. De (1.10) se obtendrá; n = 2j-3-1 = 2j -4; j = (n+4)/2 = (n/2) +2; y por tanto $[e_j, e_{j+1}] = \lambda_{(n/2)-3} e_3$.

Si n es impar: n-3, n-5, n-7, ..., serán pares y se llegará a q = 2.

De (1.10) se obtendrá:

$$n = 2j-2-1 = 2j-3;\ j = (n+3)/2;\ y$$

$$[e_j, e_{j+1}] = \lambda_{(n/2)-(5/2)} e_2.$$

De $J(e_{n-2}, e_{n-1}, e_n) = 0$ se obtiene:

$$\lambda_1[e_{n-5}, e_n] - [e_{n-4}, e_{n-1}] + [e_{n-3}, e_{n-2}] = 0$$

y por tanto

$$\boldsymbol{\lambda_1 = ([e_{n-4}, e_{n-1}] - [e_{n-3}, e_{n-2}]) / [e_{n-5}, e_n]} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Análogamente de $J(e_{n-3}, e_{n-2}, e_{n-1}) = 0$ se tiene:

$$\lambda_2[e_{n-7}, e_{n-1}] - \lambda_1[e_{n-6}, e_{n-2}] + \lambda_1[e_{n-6}, e_{n-3}] = 0$$

lo que permite escribir:

$$\lambda_2 = \lambda_1([e_{n-6}, e_{n-2}] - [e_{n-5}, e_{n-3}]) / [e_{n-7}, e_{n-1}] \qquad (1.15)$$

y análogamente:

$$\lambda_3 = \lambda_2([e_{n-8}, e_{n-3}] - [e_{n-7}, e_{n-4}]) / [e_{n-9}, e_{n-2}] \qquad (1.16)$$

•

•

•

$$\lambda_k = \lambda_{k-1}([e_{n-2k-2}, e_{n-k}] - [e_{n-2k-1}, e_{n-k-1}]) / [e_{n-2k-3}, e_{n-k+1}] \qquad (1.17)$$

de (1.12) y (1.14) y de la ecuación $J(e_{n-4}, e_{n-1}, e_n) = 0$, nos da los siguientes valores para λ_1, λ_2, λ_3.

$\lambda_1 = 1/10$; $\lambda_2 = 1/70$; $\lambda_3 = 1/420$ que admiten esta forma:

$\lambda_1 = 1/10 = 1/(4\cdot 1+6)$; $\lambda_2 = 1/70 = (2/(4\cdot 2+6))\lambda_1$; $\lambda_3 = 1/420 = (3/(4\cdot 3+6))\lambda_2$, ...

y por inducción se prueba que:

$$\lambda_k = (k/(4\cdot k + 6))\lambda_{k-1} \qquad (1.18)$$

lo que nos resuelve la clasificación de las álgebras de Lie filiformes, derivadas de otras, y con la dimensión máxima posible para una j. (q=2,3)

Existen otras tres soluciones que son:

1) $\lambda_k = 0$ $\forall k$. Aquí j=n-1 y q=n-3.

2) $\lambda_k = 0$ $\forall k$, excepto la última que vale 1.

3) $\lambda_k = 0$ $\forall k$, excepto la penúltima que vale 1 y la última que está en función de un parámetro α.

Veamos ahora el caso $[e_{n-1},e_n] = e_{n-4}$. De esta forma $[e_{n-2},e_{n-1}] = \lambda_1 e_{n-6}$. Vamos a separar el estudio en función de que λ_1 sea cero o no.

Caso 1: λ_1 no nulo.

Sea $\lambda_1=\alpha$. De $J(e_{n-2},e_{n-1},e_n)=0$ obtenemos:

$$\lambda_2 = (4\alpha^2/3(1+\alpha)) \qquad \text{(a)}$$

De $J(e_{n-3},e_{n-2},e_n)=0$ obtenemos:

$$\lambda_3 = (5\lambda_1 - 10\lambda_2)\lambda_2/(3-2\lambda_1-4\lambda_2) \qquad \text{(b)}$$

De $J(e_{n-4},e_{n-3},e_n)=0$ obtenemos:

$$\lambda_4 = (20\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_3 - 21\lambda_2\lambda_3)/(3-5\lambda_1+5\lambda_3) \qquad \text{(c)}$$

De $J(e_{n-3},e_{n-2},e_{n-1})=0$ obtenemos:

$$\lambda_4 = (-5\lambda_2^2+6\lambda_2\lambda_3+4\lambda_1\lambda_3)/(2\lambda_1+\lambda_2) \qquad \text{(d)}$$

Sustituyendo (a) y (b) en (c) e igualando el resultado a (d) se obtiene la siguiente ecuación:

$$-27 + 270\alpha - 606\alpha^2 + 238\alpha^3 + 245\alpha^4 = 0 \qquad \text{(e)}$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$1/7;\ 3/5;\ -3(2+(11)^{1/2})/7;\ -3(2-(11)^{1/2}/7.$$

De $J(e_{n-4},e_{n-5},e_n)=0$ obtenemos:

$$\lambda_5 = (7\lambda_1-35\lambda_2+56\lambda_3-35\lambda_4)\lambda_4/(3-7\lambda_1+2\lambda_2-6\lambda_4) \qquad \text{(f)}$$

De $J(e_{n-4}, e_{n-3}, e_{n-2})=0$ obtenemos:

$$\lambda_5 = (-6\lambda_3^2+10\lambda_3\lambda_4+5\lambda_2\lambda_4)/(4\lambda_3+5\lambda_2) \qquad \text{(g)}$$

Igualando (6) y (7) y sustituyendo las soluciones de la ecuación (5) vemos que sólo la verifica $\lambda_1 = 1/7$.

Esta solución, basándonos en la de $[e_{n-1},e_n] = e_{n-3}$, es la siguiente:

$\lambda_1=1/7$; $\lambda_k= \lambda_k'/\lambda_1'$; donde $\lambda_k'= (k/4k+6)\lambda_{k-1}'$; $\lambda_0=1$ y k:0,...,p.

Caso 2: $\alpha=0$.

Aquí la única solución es (1,0,.....0)

CAPITULO II

ALGEBRAS DE LIE FILIFORMES PARA LAS QUE LOS COEFICIENTES PRINCIPALES SON NO NULOS.

Sea M un álgebra de Lie filiforme definida por una base adaptada $\{e_1,\dots,e_n\}$ y para la que los coeficientes principales, $C_{h,n}^{h-1}$, son no nulos. Por (0.4) sabemos que estos coeficientes son iguales y que mediante un cambio de baseadaptada pueden hacerse iguales a 1.

Este tipo de álgebras exige que su dimensión, n, sea par y que:

$$[e_h, e_{n+3-h}] = (-1)^h e_2 \quad (h=4,\dots,j) \tag{2.1}$$

$$\text{donde } j = (n/2) + 1 \tag{2.2}$$

Si M es derivada de un álgebra de Lie L, una de cuyas bases es $\{e_1,\dots,e_n, U\}$, si llamamos

$$[e_h, U] = \sum a_{hk}\, e_k$$

de $J(e_1, e_h, U) = 0$ se verifica:

$$a_{h-1,h-1} - a_{h,h} = a_{1,1} - a_{1,n} \quad (h=4,\dots,n-1) \tag{2.3}$$

y de $J(e_h, e_n, U) = 0$

$$a_{h-1,h-1} - a_{h,h} = a_{n,n} \quad (h=4,\dots,n-1) \tag{2.4}$$

de donde por comparación:

$$a_{1,1} - a_{1,n} = a_{n,n} \tag{2.5}$$

Para que M sea derivada de L es condición necesaria y suficientes que $a_{h,h}\neq 0$ $(\forall h)$.Como por (2.1) $[e_j, e_{j+1}] = (-1)^j e_2$ y $[e_{j-1}, e_{j+2}] = (-1)^{j-1} e_2$ se deduce que :

$[e_1, [e_j, e_{j+2}]] = 0$ véase (,), y en consecuencia $[e_j, e_{j+2}] = \alpha\, e_2$. Pero si $\alpha \neq 0$, de $J(e_j, e_{j+2}, U) = 0$ se deduce que $a_{2,2} = a_{j,j} + a_{j+2,j+2}$, y de $J(e_j, e_{j+1}, U) = 0$ se deduce que $a_{2,2} = a_{j,j} + a_{j+1,j+1}$. Restando ambas igualdades y teniendo en cuenta (2.3), queda que $a_{n,n} = 0$, lo cual es imposible si M es derivada de L, luego $\alpha = 0$.

De análoga forma se prueba que $[e_{j+1}, e_{j+2}] = 0$, y, en general,

$$[e_h, e_k] = 0 \; (\forall h \neq n \neq k;\; h + k \neq n+3) \qquad (2.6)$$

Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned} [e_{n-1}, e_n] &= e_{n-2} + \alpha_{n-3}e_{n-3} + \ldots + \alpha_4 e_4 + \alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ [e_h, e_n] &= e_{h-1} + \alpha_{n-3}e_{h-2} + \ldots + \alpha_{n-h+3}e_4 + \alpha_{n-h+2}e_3 + \alpha_{n-h+1}e_2 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Lema 1-

Los subíndices de índice impar, son nulos, salvo α_3.

Demostración:

De $J(e_h, e_{n-1}, e_n) = 0$ se deduce que

$$(-1)^h \alpha_{n-h+3} = -\alpha_{n-h+3} \qquad (2.8)$$

Si <u>h</u> es par, se deduce que $\alpha_{n-h+3} = 0$, y como <u>n</u> es par siempre, <u>n-h+3</u> es impar.

Luego α_i (<u>i</u> impar) es nulo, salvo α_3, ya que para esto, la igualdad(2. 7) tendrá que ser h=n y en este caso $J(e_h, e_{n-1}, e_n) = 0$ es idénticamente nula. Por tanto podemos escribir:

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + \alpha_{n-4}e_{n-4} + \ldots + \alpha_4 e_4 + \alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2 \qquad (2.9)$$

haciendo el cambio de base adaptada

$e_1' = e_1$; $e_n' = e_n + (\alpha_2/4)e_4$, queda que la nueva $\alpha'_2 = 0$ y por tanto

podemos escribir:

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + \alpha_{n-4}e_{n-4} + \ldots + \alpha_4 e_4 + \alpha_3 e_3 \qquad (2.10)$$

De (2.10)

$$[e_h, e_n] = e_{h-1} + \alpha_{n-4}e_{h-3} + \ldots + \alpha_{n-h+2}e_3 \text{ (si h es par)}$$

$$[e_h, e_n] = e_{h-1} + \alpha_{n-4}e_{h-3} + \ldots + \alpha_{n-h+1}e_2 \text{ (si h es impar)}$$

En el caso de que h=j y teniendo en cuenta que $j = (n/2) + 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} [e_j, e_n] &= e_{j-1} + \alpha_{n-4}e_{j-3} + \ldots + \alpha_j e_3 \text{ (si j es par)} \\ [e_j, e_n] &= e_{j-1} + \alpha_{n-4}e_{h-3} + \ldots + \alpha_{j-1}e_2 \text{ (si j es impar)} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Lema 2-

$$\alpha_{n-4} = \alpha_{n-6} = \ldots = \alpha_j = 0$$

De $J(e_j, e_n, U)=0$ se deduce que $\alpha_{n-4} = \alpha_{n-6} = \ldots = \alpha_j = 0$

y por tanto:

$$[e_j, e_n] = e_{j-1} \text{ (si j es par)}$$

$$[e_j, e_n] = e_{j-1} + \alpha_{j-1}e_2 \text{ (si j es impar)}$$

y

$$\begin{aligned} [e_{n-1}, e_n] &= e_{n-2} + \alpha_{j-2}e_{j-2} + \ldots + \alpha_4 e_4 + \alpha_3 e_3 \text{ (si j es par)} \\ [e_{n-1}, e_n] &= e_{n-2} + \alpha_{j-1}e_{j-1} + \ldots + \alpha_4 e_4 + \alpha_3 e_3 \text{ (si j es impar)} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Teorema 1-

De todos los coeficientes de (2.12) a lo sumo uno es no nulo.

Demostración:

Distinguiremos dos casos según j sea par o impar.

a) j par

Quedan por estudiar los coeficientes α_{j-2}, α_{j-4}, ..., α_4.

De $J(e_1, e_{j+1}, U)=0$ se tiene: $a_{j+1,j} = a_{j+1,j-1} = ... = a_{j+1,4} = 0$.

De $J(e_1, e_{j+2}, U)=0$ se tiene: $a_{j+2,j+1} = a_{j+2,j} = ... = a_{j+2,5} = 0$.

....

De $J(e_1, e_{n-1}, U)=0$ se tiene: $a_{n-1,n-2} = a_{n-1,n-3} = ... = a_{n-1,j} = 0$.

De $J(e_1, e_x, U)=0$, x:3,...,j, obtenemos que $a_{1,n-1}=...=a_{1,j+1}=0$

De $J(e_1, e_n, U)=0$ obtenemos que $a_{n,n-1}=...=a_{n,j+1}=0$

Veamos ahora que ocurre con los coeficientes pares citados en el teorema 1

Teniendo en cuenta que $[e_j, e_n] = e_{j-1}$; $[e_{j+1},e_n] = e_j+\alpha_{j-2}\, e_2$ y

$[e_{j+2}, e_n]= e_{j+1} + \alpha_{j-2}\, e_3$, llegamos comparando los coeficientes de e_3 en la igualdad $J(e_{j+2}, e_n, U) = 0$, a:

$$\mathbf{a_{j+1,3}-a_{j+2,4}+\alpha_{j-2}(a_{3,3}-a_{n,n}-a_{j+2,j+2}) = 0} \qquad (2.13)$$

De $J(e_1, e_{j+2}, U)$ resulta que:

$$\mathbf{a_{j+1,3}-a_{j+2,4} = -a_{1,n}\alpha_{j-2}} \qquad (2.14)$$

Comparando (2.13) y (2.14) tenemos:

$$\mathbf{\alpha_{j-2}(a_{3,3}-a_{n,n}-a_{j+2,j+2}-a_{1,n}) = 0} \qquad (2.15)$$

Teniendo en cuenta (3) y (4) queda:

$$\mathbf{\alpha_{j-2}((j-1)a_{n,n}-a_{1,1}) = 0} \qquad (2.16)$$

En general, de $J(e_{j+k+2}, e_n, U) = 0$, $\underline{k}$ par y positivo, y teniendo en cuenta las identidades originadas de $J(e_1, e_{j+k+2}, U)=0$ obtenemos, comparando los coeficientes de $\underline{e_3}$ que:

$$\mathbf{a_{j+k+1,3}-a_{j+k+2,4}+\alpha_{j-k+2}(a_{3,3}-a_{n,n}-a_{j+k+2,j+k+2}) = 0} \qquad \textbf{(2.17)}$$

y de $J(e_1, e_{j+k+2}, U) = 0$, obtenemos:

$$\mathbf{a_{j+k+1,3}-a_{j+k+2,4} = a_{1,n}\alpha_{j-k-2}} \qquad \textbf{(2.18)}$$

y por comparación de (15) y (16) queda:

$$\mathbf{\alpha_{j-k-2}((j+k-1)a_{n,n}-a_{1,1}) = 0} \qquad \textbf{(2.19)}$$

....

De $J(e_{n-2}, e_n, U)=0$ y de $J(e_1, e_{n-2}, U)=0$ se obtiene que:

$$\mathbf{\alpha_4((2j-7)a_{n,n}-a_{1,1}) = 0} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Por último de $J(e_{n-1}, e_n, U)=0$ y de $J(e_1, e_{n-1}, U)=0$ se obtiene que:

$$\mathbf{\alpha_3((2j-6)a_{n,n}-a_{1,1}) = 0} \qquad \textbf{(2.21)}$$

pero, $(j+k-1)a_{n,n}-a_{1,1}$ sólo se puede anular para un valor de $\underline{k}$ determinado, luego todos los α_{j-k-2} tienen que ser 0, salvo uno de ellos a lo más. Así sólo hay un $\underline{\alpha_h}$ (h par, $h\leq j-2$ o $h=3$), a lo sumo, diferente de cero. En consecuencia, para j par:

$$\mathbf{[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + \alpha_h e_h} \qquad \textbf{(2. 22)}$$

b) j impar

Al igual que en el caso par quedan por determinar los coeficientes:

$\alpha_{j-1}, \alpha_{j-3}, \ldots, \alpha_4, \alpha_3.$

Utilizando las mismas identidades del caso anterior llegamos, en primer lugar a:

$$a_{j+1,j} = a_{j+1,j-1} = \ldots = a_{j+1,5} = 0.$$

$$a_{j+2,j+1} = a_{j+2,j} = \ldots = a_{j+2,6} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.23)$$

$$a_{n-1,n-2} = a_{n-1,n-3} = \ldots = a_{n-1,j+1} = 0.$$

$$a_{1,n-1}=a_{1,n-2}=\ldots.=a_{1,j+2}=0$$

$$a_{n,n-1}=a_{n,n-2}=\ldots.=a_{n,j+2}=0$$

Ahora:

De $J(e_{j+1}, e_n, U)=0$ y de $J(e_1, e_{j+1}, U)$ y fijándonos en los coeficientes de e_3 llegamos a:

$$\alpha_{j-1}((j-2)a_{n,n} - a_{1,1}) = 0 \qquad (2.24)$$

De $J(e_{j+k+1}, e_n, U)=0$ y de $J(e_1, e_{j+k+1}, U)=0$ junto a (2.23), con <u>k</u> par, obtenemos que:

$$\alpha_{j-k-1}((j+k-2)a_{n,n}-a_{1,1})=0 \qquad (2.25)$$

....

Por último de $J(e_{n-2}, e_n, U)=0$, $J(e_1, e_{n-2}, U)=0$ y mediante (2.23) llegamos a:

$$\alpha_4((n-5)a_{n,n}-a_{1,1})=0 \qquad (2.26)$$

Luego de $J(e_{n-1}, e_n, U)=0$, $J(e_1, e_{n-1}, U)=0$ y por (23) llegamos a:

$$\alpha_3((n-4)a_{n,n}-a_{1,1})=0 \qquad (2.27)$$

Así, al igual que en el caso anterior, llegamos a la conclusión de que, a lo sumo, uno sólo de esos coeficientes puede ser no nulo.

De esta forma:

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + \alpha_h e_h \qquad (2.28)$$

con h par o 3 y $h \leq j-1$.

En el caso de que $\alpha_h \neq 0$ haciendo el cambio de base adaptada:

$$e'_1 = \beta e_1;\ e'_n = \beta e_n\ ;\ \ \beta = (\alpha_h)^{1/(n-h+2)}$$

queda finalmente:

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + e_h$$

$$(\text{h par, } 4 \leq h \leq j-1 \text{ ó } h=3)$$

Si $\alpha_h = 0$, entonces

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2}$$

y este álgebra es derivada del álgebra resoluble de base $\{e_1, \ldots, e_n, U\}$, tal que $[e_h, U] = a_{h,h} e_h$ (h:1,...,n); siendo $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Como $a_{1,n} = 0$ entonces $a_{1,1} = a_{n,n}$. Entonces de (2.3) y (2.4) se deduce que:

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= (n-1)a_{n,n} \\ a_{3,3} &= (n-2)a_{n,n} \\ &\vdots \\ a_{n-1,n-1} &= 2a_{n,n} \\ a_{n,n} &= a_{1,1} \end{aligned}$$

Luego para que un álgebra de Lie filiforme del tipo que estamos considerando sea derivada de otras álgebras, es condición necesaria que exista una base adaptada respecto de la cual

$$[e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} + \alpha_h e_h$$

$$(\alpha_h = 0,1);\ \text{si } \alpha_h \neq 0;\ \text{h par, } 4 \leq h < j-1 \text{ ó } h=3)$$

$$\text{ó } [e_{n-1}, e_n] = e_{n-2} \text{ si } \alpha_h = 0$$

A continuación vamos a estudiar las álgebras en las que $\alpha_h = 1$. Es decir estudiaremos la derivabilidad de las álgebras del tipo $[e_{n-1},e_n] = e_{n-2} + e_h$, donde h es par entre j-1 y 4 o h es 3.

Distinguiremos dos tipos:

TIPO 1: J IMPAR

TIPO 2: J PAR

Tipo 1: <u>j impar</u>

Aquí distinguiremos a su vez tres casos:

Caso 1: h=j-1.

Caso 2: h:4,...j-3.

Caso 3: h=3.

Caso 1: h=j-1.

En este caso se tiene que:

$$[e_{n-1},e_n]=e_{n-2}+e_{j-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[e_j,e_n]=e_{j-1}+e_2$$

De $J(e_1,e_j,U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a_{1,j+1} = a_{1,n}}$ **(a)**

De $J(e_1,e_{j+1},U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a_{j+1,4} = a_{1,n}}$ **(b)**

De $J(e_j,e_n,U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a_{n,j+1} = -a_{1,1} - (j-4)a_{n,n}}$ **(c)**

De $J(e_{j+1},e_n,U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a_{j+1,4} = (j-3)a_{n,n}}$ **(d)**

De $J(e_1, e_n, U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a_{n-1,j} - a_{n,j+1} = a_{1,n}}$ **(e)**

De (b) y (d) se deduce que $\mathbf{a_{1,1} = (j-2)a_{n,n}}$ **(f)**

De $J(e_1,e_{j+k},U)=0$, k:2,...,j-3, obtenemos que

$$a_{j+1,4}-a_{j+2,5} = -a_{1,n} \qquad (g)$$
$$a_{j+2,5}-a_{j+3,6} = -a_{1,n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2,j-1}-a_{n,j} = -a_{1,n}$$
$$a_{n-1,j}-a_{n,j+1} = a_{1,j+1}$$

y sumando miembro a miembro:

$$a_{j+1,4} - a_{n-1,j} = -(j-4)a_{1,n} \qquad (h)$$

Sumando luego (e) y (h) tenemos que:

$$a_{j+1,4} - a_{n,j+1} = -(j-5)a_{n,n}$$

pero restando (c) y (d) resulta:

$$a_{j+1,4} - a_{n,j+1} = 3(j-3)\, a_{n,n}$$

y comparando las dos últimas;

$$-(j-5)a_{n,n} = 3(3j-3)a_{n,n}$$

pero, j>3, si ha de ser derivada el álgebra $a_{n,n}$ no puede ser nulo, luego -(j-5) = 3(j-3), lo que exige que j=2, cosa imposible, luego estas álgebras, si h=j-1, no son derivadas.

Caso 2: h:4,...,j-3; h par

En este caso tenemos: $[e_{n-1},e_n]=e_{n-2}+e_h$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[e_{n-h+1},e_n]=e_{n-h}+e_2.$$

Estudiaremos todas las ecuaciones del álgebra para ver su derivabilidad.

De $J(e_1,e_{n-h+1}U)=0$ obtenemos:

$$a_{n-h,j-h+1}-a_{n-h+1,j-h+2} = 0 \qquad (2.29)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-h,3}-a_{n-h+1,4} = 0$$
$$a_{n-h,2}-a_{n-h+1,3} = a_{1,h+2}-a_{1,n}$$

De $J(e_1,e_{n-h+s},U)=0$, s:2,...,h-1, obtenemos:

$$a_{n-h+s-1,j-h+s}-a_{n-h+s,j-h+s+1} = 0 \quad (2.30)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-h+s-1,s+1}-a_{n-h+s,s+2} = -a_{1,n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-h+s-1,2}-a_{n-h+s,3} = (+/-)a_{1,h-s+3}$$

De $J(e_1,e_n,U)=0$ obtenemos:

$$a_{n-1,j}-a_{n,j+1} = a_{1,j+1} \qquad (2.31)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1,h+1}-a_{n,h+2} = a_{1,h+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1,2}-a_{n,3} = 0$$

El segundo tipo de ecuaciones es la forma $J(e_1,e_x,U)=0$, x:j,....,n-h.

De $J(e_1,e_j,U)=0$ resulta $\quad a_{1,j+1} = 0$

De $J(e_1,e_{j+1}U)=0$ resulta $\quad a_{j+1,4} = 0$ y $a_{j+1,3} = a_{1,j}$

De $J(e_1,e_{j+s},U)=0$, s:2,...,j-h-3, resulta

$$a_{j+s-1,s+2}-a_{j+s,s+3} = 0 \qquad (2.32)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{j+s-1,2}-a_{j+s,3} = (+/-)a_{1,j-s+1}$$

De $J(e_1,e_{n-h},U)=0$ resulta

$$a_{n-h-1,j-h}-a_{n-h,j-h+1} = 0 \qquad (2.33)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-h-1,2}-a_{n-h,3} = 0$$

Para completar las ecuaciones donde interviene $\underline{e_1}$ tenemos el grupo formado por $J(e_1,e_x,U)=0$ las cuales nos dan resultados ya conocidos:

$$a_{x,x}-a_{x+1,x+1} = a_{1,n}$$

Vamos a estudiar ahora las ecuaciones donde interviene $\underline{e_n}$ $J(e_x,e_n,U)=0$

Dividiremos estas ecuaciones en tres grupos:

1. x:n-h+1,...,n-1

2. x:j+1,...,n-h

3. x:3,...,j

Grupo 1.

De $J(e_{n-h+1},e_n,U)=0$ obtenemos que:

$$a_{n-h,j-h+1}-a_{n-h+1,j-h+2}=0 \qquad (2.34)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-h,3}-a_{n-h+1,4}=0$$
$$a_{n-h,2}+a_{n,h+2}=-(a_{2,2}-a_{n,n}-a_{n-h+1,n-h+1})$$

De $J(e_{n-h+s},e_n,U)=0$, s:2,...,h-1, obtenemos

$$a_{n-h+s-1,j-h+s}-a_{n-h+s,j-h+s+1}=0 \qquad (2.35)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-h+s-1,s+1}-a_{n-h+s,s+2}=-(a_{s+1,s+1}-a_{n,n}-a_{n-h+s,n-h+s})$$

De $J(e_{n-1},e_n,U)=0$ obtenemos

$$a_{n-2,j-1}-a_{n-1,j}=0 \qquad (2.36)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2,h}-a_{n-1,h+1}=-(a_{h,h}-a_{n,n}-a_{n-1,n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2,3}-a_{n-1,4}=0$$
$$a_{n-2,2}=a_{n-4}$$

Grupo 2.

De $J(e_{j+1},e_n,U)=0$ obtenemos

$$a_{n,j}=0 \text{ y } a_{j+1,4}=0$$

De $J(e_x,e_n,U)=0$, x:j+2,...,n-h, obtenemos que

$$a_{x-1,x-j+2}-a_{x,x-j+3}=0 \qquad (2.37)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{x-1,3}-a_{x,4}=0$$
$$a_{x-1,2}=(+/-)a_{n,n-x+3}$$

Grupo 3.

De $J(e_x,e_n,U)=0$ x:3,...,j obtenemos resultados que relacionan los coeficientes $a_{k,k}$. Resultados ya conocidos anteriormente.

Vistas estas ecuaciones nos damos cuenta de que para que un coeficiente de la forma $a_{s,m}$ esté implicado en la derivabilidad del álgebra, es decir, relacionado con $a_{1,n}$ o $a_{k,k}$ debe verificar que <u>s-m = n-h-2</u>, donde <u>s</u> y <u>m</u> son distintos entre sí y distintos de <u>1</u> y <u>n.</u>

Luego por ahora las únicas relaciones que implican a $a_{1,1}$, $a_{n,n}$ ó a $a_{1,n}$ son:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{n-h,2}-\mathbf{a}_{n-h+1,3} = \mathbf{a}_{1,h+2}-\mathbf{a}_{1,n} \qquad \mathbf{(2.38)}\\
&\mathbf{a}_{n-h+1,3}-\mathbf{a}_{n-h+2,4} = -\mathbf{a}_{1,n}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{a}_{n-2,h}-\mathbf{a}_{n-1,h+1} = -\mathbf{a}_{1,n}\\
&\mathbf{a}_{n-1,h+1}-\mathbf{a}_{n,h+2} = \mathbf{a}_{1,h+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{n-h,2}+\mathbf{a}_{n,h+2} = -(\mathbf{a}_{2,2}-\mathbf{a}_{n,n}-\mathbf{a}_{n-h+1,n-h+1})\\
&\mathbf{a}_{n-h+1,3}-\mathbf{a}_{n-h+2,4} = -(\mathbf{a}_{3,3}-\mathbf{a}_{n,n}-\mathbf{a}_{n-h+2,n-h+2})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{a}_{n-2,h}-\mathbf{a}_{n-1,h+1} = -(\mathbf{a}_{h,h}-\mathbf{a}_{n,n}-\mathbf{a}_{n-1,n-1})
\end{aligned}
$$

Además de las conocidas:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{2,2}-\mathbf{a}_{3,3} = \mathbf{a}_{1,1}\\
&\mathbf{a}_{k,k}-\mathbf{a}_{k+1,k+1} = \mathbf{a}_{n,n}\\
&\mathbf{a}_{1,1}-\mathbf{a}_{1,n} = \mathbf{a}_{n,n}\\
&\mathbf{a}_{n-1,n-1}-\mathbf{a}_{n,n} = \mathbf{a}_{1,1}\\
&\mathbf{a}_{1,1} = (\mathbf{n}-\mathbf{h}-\mathbf{1})\mathbf{a}_{n,n}
\end{aligned}
$$

Por último veamos los productos de la forma $J(e_x,e_y,U)=0$, donde $x:3,\dots,n-2$ e $y:3,\dots,n-1$; siendo $x<y$.

Dividiremos, al igual que antes, estas ecuaciones en tres grupos.

Grupo 1: $x:n-h+1,\dots,n-2$
$y:n-h+2,\dots,n-1$

Grupo 2: $x:j+1,\dots,n-h$
$y:j+2,\dots,n-1$

Grupo 3: $x:3,\dots,j$
$y:4,\dots,n-1$

Grupo 1:

De $J(e_{n-h+s}, e_{n-h+k}, U)=0$, donde s:1,...,h-2; k:s,...,h-1, obtenemos:

$$\begin{array}{l} \mathbf{s+k = h+1} \\ \mathbf{a_{n-1,h+1}+a_{n-h+2,4} = 0} \qquad\qquad \mathbf{(\ 2.39\ )} \\ \mathbf{a_{n-2,h}+a_{n-h+3,5}=0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a_{n-(h/2),(h/2)+2}+a_{n-(h/2)+1,(h/2)+3}=0} \end{array}$$

Aparecen otras muchas ecuaciones pero no dicen nada sobre la derivabilidad del álgebra.

El caso s=1 no se contempla ya que s+k=1+k<h+1 contraria a la primera ecuación de (2.39).

Grupo 2.

$J(e_x,e_y,U)=0$, x:j+1,...,n-h; y:j+2,...,n-1; x<y.

De todas estas identidades resultan relaciones entre coeficientes que no se relacionan con las de (2.38) ni con $a_{1,n}, a_{k,k}$.

Grupo 3.

$J(e_x,e_y,U)=0$, x:3,...,j; y:j+1,...,n-1.

Al igual que en el grupo anterior no sacamos nada nuevo de lo visto hasta ahora. Luego estas ecuaciones no aportan nada a la derivabilidad. Es decir, no se relacionan con (38).

Luego el total de ecuaciones que nos indican la posible derivabilidad del álgebra son:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a_{n-h,2}-a_{n-h+1,3} = a_{1,h+2}-a_{1,n}} \\ \mathbf{a_{n-h+1,3}-a_{n-h+2,4} = -a_{1,n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a_{n-2,h}-a_{n-1,h+1} = -a_{1,n}} \end{array}$$

$$a_{n-1,h+1}-a_{n,h+2} = a_{1,h+2}$$

$$a_{n-h,2}+a_{n,h+2} = -(a_{2,2}-a_{n,n}-a_{n-h+1,n-h+1})$$
$$a_{n-h+1,3}-a_{n-h+2,4} = -(a_{3,3}-a_{n,n}-a_{n-h+2,n-h+2})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2,h}-a_{n-1,h+1} = -(a_{h,h}-a_{n,n}-a_{n-1,n-1})$$

$$a_{n-1,h+1}+a_{n-h+2,4} = 0$$
$$a_{n-2,h}+a_{n-h+3,5} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-(h/2),(h/2)+2}+a_{n-(h/2)+1,(h/2)+3} = 0$$

$$a_{2,2}-a_{3,3} = a_{1,1}$$
$$a_{k,k}-a_{k+1,k+1} = a_{n,n}$$
$$a_{1,1}-a_{1,n} = a_{n,n}$$
$$a_{n-1,n-1}-a_{n,n} = a_{1,1}$$
$$a_{1,1} = (n-h-1)a_{n\,n}$$

Al resolver estas ecuaciones resulta que no encontramos ninguna contradicción con el hecho de que $\mathbf{a_{1,1}=(n-h-1)a_{n\,n}}$. Es decir, no encontramos una relación de coeficientes que indique que $a_{1,1}=0$ o que $a_{n,n}=0$ o que ambos sean nulos a la vez.

Así podemos decir que este tipo de álgebras es derivada y que se conoce la relación entre $a_{k,k}$ y $a_{n,n}$ gracias a que $a_{1,1}=(n-h-1)a_{n,n}$.

Para el caso h=3 las ecuaciones que se obtienen son:

De $J(e_1,e_{n-2},U)=0$ se obtiene: $a_{n-3,2}-a_{n-2,3} = -a_{1,5}-a_{1,n}$ **(a)**

De $J(e_1,e_{n-1},U)=0$ se obtiene: $a_{n-2,3}-a_{n-1,4} = -a_{1,n}$ **(b)**

De $J(e_1,e_n,U)=0$ se obtiene: $\mathbf{a_{n-1,4}-a_{n,5} = a_{1,5}}$ **(c)**

De $J(e_{n-2},e_n,U)=0$ se obtiene: $\mathbf{a_{n-3,2}-a_{n,5} = -(a_{2,2}-a_{n,n}-a_{n-2,n-2}) = -(a_{1,1}+(n-6)a_{n,n})}$ **(d)**
De $J(e_{n-1},e_n,U)=0$ se obtiene: $\mathbf{a_{n-2,3}-a_{n-1,4} = -(a_{3,3}-a_{n,n}-a_{n.1,n-1}) = -(n-5)a_{n,n}}$ **(e)**

restando (b)-(e) queda:

$$\mathbf{a_{1,1} = (n-4)a_{n,n}}$$

De las demás ecuaciones se obtiene de nuevo una confirmación de que

$$\mathbf{a_{1,1} = (n-4)a_{n,n}.}$$

Es decir el álgebra es derivada y $\mathbf{a_{1,1} = (n-4)a_{n,n}}$.

Nota: para este caso particular los cálculos son válidos si n>8.

Vamos a continuación a desarrollar el caso n=8

En esta álgebra j=5 y tenemos que:

$$[e_7,e_8] = e_6 + e_3$$
$$[e_6,e_8] = e_5 + e_2$$

De $J(e_1,e_7,U)=0$ obtenemos que: $\mathbf{a_{6,3}-a_{7,4} = -a_{1,8}}$ **(a)**

De $J(e_1,e_6,U)=0$ obtenemos que: $\mathbf{a_{6,3} = a_{1,8} + a_{1,5}}$ **(b)**

De $J(e_1,e_8,U)=0$ obtenemos que: $\mathbf{a_{7,4} - a_{8,5} = a_{1,5}}$ **(c)**

De $J(e_7,e_8,U)=0$ obtenemos que: $\mathbf{a_{6,3} - a_{7,4} = -3a_{8,8}}$ **(d)**

De $J(e_6,e_8,U)=0$ obtenemos que: $\mathbf{a_{8,5} = a_{1,1} + 2a_{8,8}}$ **(e)**

Comparando (a) y (d) llegamos a que $a_{1,1} = 4a_{8,8}$.

Es fácil comprobar que el resto de ecuaciones corroboran el hecho anterior. Luego el álgebra es derivada y $a_{1,1} = 4a_{8,8}$.

<u>Tipo 2: j par</u>

Para h:4,..., j-2 y efectuando exactamente las mismas operaciones que en el caso par llegamos a las siguientes identidades:

$$\mathbf{a}_{n-h,2}-\mathbf{a}_{n-h+1,3} = \mathbf{a}_{1,h+2}-\mathbf{a}_{1,n}$$
$$\mathbf{a}_{n-h+1,3}-\mathbf{a}_{n-h+2,4} = -\mathbf{a}_{1,n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{a}_{n-2,h}-\mathbf{a}_{n-1,h-1} = -\mathbf{a}_{1,n}$$
$$\mathbf{a}_{n-1,h+1}-\mathbf{a}_{n,h+2} = \mathbf{a}_{1,h+2}$$

$$\mathbf{a}_{n-h,2} + \mathbf{a}_{n,h+2} = -(\mathbf{a}_{2,2}-\mathbf{a}_{n-h+1,n-h+1}-\mathbf{a}_{n,n})$$
$$\mathbf{a}_{n-h+1,3} - \mathbf{a}_{n-h+2,4} = -(\mathbf{a}_{3,3}-\mathbf{a}_{n-h+2,n-h+2}-\mathbf{a}_{n,n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{a}_{n-2,h}-\mathbf{a}_{n-1,h+1} = -(\mathbf{a}_{h,h}-\mathbf{a}_{n-1,n-1}-\mathbf{a}_{n,n})$$

$$\mathbf{a}_{n-1,h+1}+\mathbf{a}_{n-h+2,4}=0$$
$$\mathbf{a}_{n-2,h} + \mathbf{a}_{n-h+3,5}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{a}_{n-(h/2),(h/2)+2}+\mathbf{a}_{n-(h/2)+1,(h/2)+3}=0$$

Una vez resueltas llegamos a la conclusión de que $\mathbf{a}_{1,1}=(\mathbf{n}-\mathbf{h}-1)\mathbf{a}_{n,n}$, que es condición de partida. Luego concluimos que el álgebra es derivada y conocemos $a_{k,k}$ en función de $a_{n,n}$ gracias a esa relación..

Si h=3, análogamente al caso impar llegamos a las mismas ecuaciones con lo cual también se deduce que es derivada.

Nota: para este caso particular los cálculos son válidos para n>6.

Para el caso n=6 tenemos que j=4 y $[e_5,e_6] = e_4+e_3$; $[e_4,e_6] = e_3+e_2$.

De $J(e_1, e_4, U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a}_{1,5} + \mathbf{a}_{1,6} = 0$ **(a)**
De $J(e_1, e_5, U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a}_{5,4} = \mathbf{a}_{1,6}$ **y** $\mathbf{a}_{5,3} = -\mathbf{a}_{1,4}$ **(b)**
De $J(e_1, e_6, U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a}_{5,4} - \mathbf{a}_{6,5} = \mathbf{a}_{1,5}$ **(c)**
$\mathbf{a}_{5,3} - \mathbf{a}_{6,4} = \mathbf{a}_{1,4} + \mathbf{a}_{1,5}$
$\mathbf{a}_{5,2} - \mathbf{a}_{6,3} = \mathbf{a}_{1,4}$
De $J(e_4, e_6, U)=0$ obtenemos que $\mathbf{a}_{6,5} = \mathbf{a}_{2,2} -\mathbf{a}_{4,4} -\mathbf{a}_{6,6} = \mathbf{a}_{1,1}$ **(d)**
De $J(e_5, e_6, U)=$ obtenemos que $\mathbf{a}_{6,4} = \mathbf{a}_{5,4}= \mathbf{a}_{3,3} - \mathbf{a}_{6,6} -\mathbf{a}_{5,5} = \mathbf{a}_{6,6}$ **(e)**

De (b) y (e) obtenemos que $\mathbf{a}_{1,1} = 2\mathbf{a}_{6,6}$.

El resto de ecuaciones corroboran este resultado. Luegos concluímos que esta álgebra también es derivada y que $\mathbf{a}_{1,1} = 2\mathbf{a}_{6,6}$

Bibliografía

[1] **J. M. Ancochea y M. Goze. Sur la classification del algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 302, série 1, 611-613,* **1986.**

[2] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimensión 7.** *y.R.M.A. Strasbourg,* **1986.**

[3] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algébres de Lie filiformes de dimensión 8.** *Arch. Math. vol. 50, pp. 511-525,* **1988.**

[4] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dim 7.** *Arch. Math. vol. 52, pp. 175-185,* **1989.**

[5] **E. Angelopoulos. Algèbres de Lie satisfaiant** $[g,g] = g$, **Der** g **= ad** g. *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 106, série 1, pp. 523-525,* **1988.**

[6] **M. P. Benito y V. R. Varea. The lattice of ideals of a nilpotent Lie algebras.** *Linear and Multilinear Algebra. Vol. 33, 1-13,* **1992.**

[7] **L. Boza, F. J. Echarte y J. Núñez. Classification of complex Filiform Lie Algebras of dimension 10.** *Algebra, Groups and Goemetries.* **Por aparecer.**

[8] **F. Bratzlavsky. Une Algèbre de Lie caractèristiquement nilpotente de dimension 6.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 276, série A, pp. 1035-1037,* **1973.**

[9] **F. Bratzlavsky. Classification des Algèbres de Lie nilpotentes de dimension n, de classe n-1, dont l'ideal derivé es connutatif.** *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. vol. 560, pp. 858-865,* **1974.**

[10] **F. Bratzlavsky. Sur les Algèbres admettant un tore d'automorphismes donnè.** *Journal os Algebra, vol. 30, pp. 305-316,* **1974.**

[11] **R. Carles. Sur les algèbres de Lie caractéristiquement nilpotenetes.** *Prépublication Université de Poitiers,* **1984.**

[12] **A. Cerezo. Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6.** *Publications Université Nice 27,* **1983.**

[13] **J. Dixmier and V. G. Lister. Derivations of nilpotent Lie algebras.** *Proc. Amer. Math. Soc. vol. 8, pp. 155-158,* **1957.**

[14] **J. Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes.** *Bull. Soc. Math. France 85, pp. 325-388,* **1957.**

[15] **J. Dixmier. Sur les representation unitaires des groupes de Lie nilpotente.** *Canadian Journal Math. 10, pp. 321-348,* **1958.**

[16] **J. L. Dyer. A Nilpotent Lie Algebra whit Nilpotent automorphism groups.** *Bull. Amer. Math. Soc. vol 1, pp. 52-56,* **1970.**

[17] **F. J. Echarte. Étude des algébres de Lie résolubles réelles que admettent des ideaux unidimensionnels n'appartenant pas au centre.** *Lecture Notes in Mathematics 1209, pp. 152-156, Springer Verlag,* **1987.**

[18] F. J. Echarte y J. Núñez. Relation among solvable Lie Algebras and their nilpotent derived algebras. *Proc. Sixth Int. Collo, on Dif. Geom. Univ. Santiago Comp. pp 69-73,* **1989.**

[19] F. J. Echarte, J. R. Gómez, J. Núñez. Les algèbres de Lie filiformes complexes dérivées d'autres algèbres de Lie. *Collection Travaux en Cours, Hermann, Paris.* **Por aparecer.**

[20] G. Favre. Une Algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente de dimension 7. *C. R. Acd. Sci. Paris. T. 274, série A, pp. 1338-1339,* **1972.**

[21] G. Favre. Systéme de poids sur une Algèbre de Lie nilpotente. *Manuscripta Math. 9, pp. 53-90,* **1973.**

[22] C. Godfrey. Tables of coadjoints orbits for nilpotent Lie algebras. *University of Massachusetts at Boston,* **Boston, Mass. 021125, U.S.A.**

[23] J. R. Gómez y F. J. Echarte. Classification of complex filiform nilptent Lie algebras of dimension 9. *Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Università Cagliari, vol. 61 Fasc. 1,* **1991.**

[24] M. Goze y Y. B. Hakimjanov. Nilpotents Lie Algebras. *De. Kluwer Academic Publishers.* **1996.**

[25] Y. B. Hakimjanov, J.M. Ancochea Bermúdez et M. Goze. Sur la réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 313. série 1, pp. 59-62,* **1991.**

[26] L. Magnin. Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimensión < 8. *J. Geom. and Phys. vol. 3-1, pp. 119-144,* **1986.**

[27] V. V. Morozov. Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6. *Isv. Vyss. Ucheb. Zav. Math. 190:161-171,* **1958.**

[28] M. Romdhani. Classification of Real and Complex Nilpotent Lie Algebras of dimension 7. *Thése Université Nice,* **1985.**

[29] E. N. Safiullina. Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7. (Original en ruso). *Candidate's Works,* **1964.** *Math. Mech. Phys. pp. 66-69. Izdan Kazan, Univ. Kazan,* **1964.**

[30] T. Skjelbred y T. Sund. On the classification of nilpotent Lie algebras. *Univ. Oslo Math. n. 8,* **1977.**

[31] K.A.Ümlauf. Über die Zusammentsung del endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, inssbesondere del Gruppen vom Range Null. *Leipzig,* **1891.**

[32] M. Vergne. Sur la variété del algèbres de Lie nilpotente. *Thése de 3er cycle,* **Paris, 1966.**

[33] G. Vranceanu. Lecciones de Geometría Diferencial, *4a* **Edic.** *Acad. Rom. Bucarest,* **1975.**

Manuel Ordóñez Sánchez,
"Clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas derivadas de otras álgebras"

APTO CUM LAUDE

15 Septiembre 97