

T. 227

Poseidon

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

**BIFURCACIONES EN  
SISTEMAS DINÁMICOS  
LINEALES A TROZOS**

VICTORIANO CARMONA CENTENO  
TESIS DOCTORAL

# BIFURCACIONES EN SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES A TROZOS

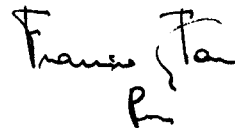
---

Memoria presentada por VICTORIANO CARMONA CENTENO para optar al  
grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº de los Directores:



Fdo. EMILIO FREIRE MACÍAS  
Catedrático de Universidad  
Dpto. de Matemática Aplicada II  
Universidad de Sevilla



Fdo. FRANCISCO TORRES PERAL  
Catedrático de Escuela Universitaria  
Dpto. de Matemática Aplicada II  
Universidad de Sevilla

Sevilla, de de 2002

## Agradecimientos

El autor de esa memoria se siente en deuda con un gran número de personas que han contribuido de forma directa o indirecta a que el presente trabajo llegue a buen puerto. Espero que la memoria no me juegue una mala pasada y el nombre de cada una de estas personas aparezca más abajo.

A los directores de esta tesis, Emilio Freire y Francisco Torres, por el tema sugerido –que ha resultado ser apasionante, entretenido (y difícil)– y que han contribuido de forma decisiva a la conclusión del trabajo.

A Enrique Ponce, Francisco Rodrigo y Javier Ros porque siempre me ofrecieron sus conocimientos científicos de forma desinteresada. Algunos aspectos relevantes de esta memoria son el resultado de largas charlas mantenidas con ellos, de forma individual o en grupo.

A Jorge López, Francisco Naranjo y Nieves Jiménez con los que compartí despacho durante la mayor parte de la realización de la tesis. Gracias por aguantarme, tolerarme y escucharme en los momentos más duros.

A mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, y en especial a los pertenecientes al Grupo de Sistemas Dinámicos.

A mis padres y hermanos que han vivido más de cerca los momentos iniciales del trabajo. Siempre me dijeron que lo conseguiría. Nunca perdieron la esperanza.

A mi mujer, Lola, por su amor, confianza, comprensión, ayuda y demostraciones de ánimo. Siempre presta atención cuando le cuento el problema matemático que “no me deja dormir” y ella suele ofrecerme ideas que me permiten atacarlo por otras vías y resolverlo. En la recta final han sido decisivas sus palabras y silencios.

Si la memoria me falla, gracias a todos aquellos que ahora mismo no tengo en mente.

*A Lola*  
*A mis padres y hermanos*  
*A mi abuela María y mi tía Antonia*  
*A la memoria de mi abuelo Antonio*



# Índice General

Introducción	I
<b>1 Formas canónicas</b>	<b>1</b>
1.1 Definición y primeras propiedades . . . . .	2
1.2 Primeras reducciones: Formas canónicas de Van der Pol y Duffing	6
1.3 Sistemas Observables . . . . .	13
1.3.1 Observabilidad y controlabilidad. Primeras Propiedades	14
1.3.2 Forma canónica de Lienard . . . . .	18
1.3.3 Formas canónicas de Van der Pol y Duffing para sistemas observables . . . . .	24
1.3.4 Reducción de sistemas lineales a trozos observables y no controlables . . . . .	26
1.3.5 Reducción cuando las matrices comparten un autovalor real . . . . .	30
1.3.6 Reducción cuando las matrices comparten un autovalor complejo . . . . .	32
1.4 Formas canónicas para sistemas bi y tridimensionales . . . . .	34
<b>2 Aplicación y Semiaplicaciones de Poincaré</b>	<b>45</b>
2.1 Introducción. Resultados preliminares . . . . .	45
2.2 Aplicaciones de Transición y su Diferencial . . . . .	48
2.2.1 Derivada de la aplicación de transición para sistemas planos . . . . .	55

2.3	Diferencial de la Aplicación y Semiaplicaciones de Poincaré . . .	56
2.3.1	Estudio para el caso de Sistemas Lineales a Trozos Bizonales . . . . .	68
<b>3</b>	<b>El método de Melnikov para sistemas a trozos</b>	<b>73</b>
3.1	Introducción y teoría clásica . . . . .	73
3.2	La teoría de Melnikov para sistemas definidos a trozos . . . . .	77
3.2.1	Perturbación de una banda continua de órbitas periódicas	78
3.2.2	Perturbación de órbitas homoclinas y heteroclinas . . . . .	93
3.3	Ciclos límite y separatrices en sistemas bizonales . . . . .	101
3.3.1	Ciclos límite para el caso foco-foco . . . . .	103
3.3.2	Perturbación de un sistema foco-foco homogéneo . . . . .	110
3.3.3	Ciclos límite y homoclinas para el caso silla-foco . . . . .	114
3.4	Ciclos límite y homoclinas en sistemas trizonales . . . . .	120
3.4.1	Ciclos límite para el caso foco-foco . . . . .	122
3.4.2	Ciclos límite y homoclinas para el caso silla-foco . . . . .	127
<b>4</b>	<b>Sistemas Lineales a Trozos Bizontales Homogéneos</b>	<b>139</b>
4.1	Primeras Propiedades. Conjuntos Invariantes . . . . .	140
4.2	Sistemas Lineales Homogéneos . . . . .	142
4.2.1	Sistemas Lineales Homogéneos Tridimensionales . . . . .	147
4.3	Sistemas Lineales a Trozos Bizontales Homogéneos . . . . .	149
4.4	Sistemas $2CPL_3$ Homogéneos Observables. Conos Invariantes . . . . .	151
4.5	Semiaplicaciones de Poincaré en Sistemas Lineales Homogéneos	156
4.6	Semiaplicaciones de Poincaré en Sistemas $2CPLH_3$ Observables . . . . .	161
4.7	Existencia de Conos Invariantes en Sistemas $2CPLH_3$ Observables	168
4.8	Posición Relativa entre Conos Invariantes y Planos Focales . . . . .	174
4.9	Unicidad y Estabilidad de Conos Invariantes en Sistemas $2CPLH_3$	183
4.10	Bifurcaciones en un sistema plano bizonal de tipo foco-foco . . . . .	202

<b>5</b>	<b>Sistemas <math>2CPL_3</math> No Observables o No Controlables</b>	<b>207</b>
5.1	Sistemas No Observables. Cilindros Invariantes. Órbitas periódicas . . . . .	208
5.2	Sistemas Observables No Controlables. Un autovalor real común	212
5.3	Sistemas No Controlables. Un autovalor complejo común . . . .	213
5.3.1	Propiedades generales de la ecuación reducida . . . . .	216
5.3.2	Aplicación de Poincaré asociada a la ecuación reducida . . . . .	222
5.3.3	Existencia y Estabilidad de Soluciones Periódicas en la Ecuación Reducida . . . . .	230
5.3.4	Reversibilidad en la Ecuación Reducida . . . . .	233
5.3.5	Bifurcación Silla-Nodo de Órbitas Periódicas en la Ecuación Reducida . . . . .	238
5.3.6	Conjunto de Bifurcaciones en el Sistema Tridimensional . . . . .	249
5.4	Una simulación numérica . . . . .	253
	<b>Conclusiones</b>	<b>261</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>265</b>

# Introducción

La moderna teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos tiene su origen en los trabajos de H. Poincaré al final del siglo XIX motivados, como es bien conocido, por el estudio de problemas de mecánica celeste.

Es menos conocido que las primeras aplicaciones de las ideas de Poincaré se producen en el campo de la investigación básica en ingeniería, concretamente en la teoría de circuitos eléctricos y de control. Citemos a este respecto el descubrimiento por Van der Pol en los años 20 de la existencia de oscilaciones periódicas automantenido (concepto definido por Poincaré como ciclo límite) en circuitos electrónicos con triodos, los resultados teóricos de Cartan y Liénard que prueban dicha existencia y caracterizan su estabilidad y los trabajos pioneros de Andronov y Pontriaguin y su escuela que extienden las ideas y métodos de Poincaré y comienzan a introducirlos en el estudio de oscilaciones de sistemas eléctricos, mecánicos y de control.

En el libro seminal de Andronov, Vitt y Khaikin “Teoría de Oscilaciones” publicado en 1937 podemos encontrar abundantes ejemplos de tales aplicaciones. En particular, hay que hacer notar el uso de funciones lineales a trozos (continuas y discontinuas) en el modelado de las no linealidades presentes: características estáticas de los dispositivos electrónicos, mecánicos y de control.

Hay pues una tradición en el ámbito de la ingeniería, que ha continuado hasta nuestros días, de considerar las funciones lineales a trozos como las aproximaciones más adecuadas a ciertos comportamientos no lineales: saturación, zona muerta, limitador de pendiente, etc. Por consiguiente, nos encontramos con sistemas dinámicos lineales a trozos, cuyo estudio es de gran interés.

En los sistemas lineales a trozos tenemos regiones del espacio de estado donde la dinámica es puramente lineal y por tanto integrables explícitamente. La dificultad surge cuando nos planteamos unir dichos flujos lineales a lo largo de las fronteras comunes a las correspondientes regiones de comportamiento lineal. En este punto, debemos señalar que la no diferenciabilidad de las funciones lineales a trozos impide usar, en principio, los resultados y técnicas de la dinámica diferenciable y el análisis de la dinámica lineal a trozos está lejos de ser trivial.

Con referencia a los dispositivos electrónicos, el conjunto de los sistemas lineales a trozos que presentan un especial interés lo conforman aquellos que poseen dos o tres variables de estado y dos o tres zonas de linealidad separadas por variedades lineales paralelas.

Como ejemplos de tales sistemas podemos destacar el oscilador de Goodwin (ver [38]) como sistema bizonal plano, el puente de Wien como sistema plano con tres zonas, el circuito de Chua como sistema trizonal tridimensional y el circuito de Colpitts como sistema tridimensional con dos zonas.

Como un primer paso para el análisis de tales sistemas se procede a simplificar las ecuaciones de éstos para reducirlo a alguna forma canónica (es decir, a la representación más sencilla en algún sentido). A este respecto cabe destacar, entre otros, los trabajos de Khalert, Chua y sus colaboradores (véanse por ejemplo [32], [33] y [53]) en la obtención de dichas formas canónicas utilizando en ocasiones herramientas e ideas básicas de la teoría de control.

En relación con lo anterior, Carmona, Freire, Ponce y Torres analizan en [12] distintas formas canónicas para sistemas con dos zonas y sistemas simétricos con tres zonas, aplicando ideas propias de la teoría de control y consiguiendo formas canónicas en las que la no linealidad del sistema se manifiesta en una sola de sus ecuaciones.

El análisis del comportamiento dinámico de los sistemas se realiza con frecuencia definiendo una adecuada aplicación de Poincaré. Para los sistemas lineales a trozos, esta definición implica comúnmente la composición de diferentes aplicaciones de transición o semiaplicaciones de Poincaré (ver [5]). Khalert

pone de manifiesto en diferentes trabajos (ver [34] y [35]) algunas propiedades analíticas de estas semiaplicaciones y evidencia el complejo comportamiento de éstas.

En particular, las semiaplicaciones de Poincaré asociadas a sistemas planos bizonales y trizonales con simetría han sido analizadas por Freire, Ponce, Rodrigo y Torres (ver [22] y [23]), llegando a encontrar parametrizaciones de tales semiaplicaciones, lo que les permite describir las bifurcaciones que presentan estos sistemas y dar resultados sobre la existencia y estabilidad de ciclos límite, homoclinas y heteroclinas.

Los trabajos anteriormente citados, entre otros, muestran que los sistemas lineales a trozos presentan una dinámica de gran riqueza, incluyendo la existencia de comportamiento caótico como se pone de manifiesto en la gran cantidad de publicaciones sobre el circuito de Chua como ejemplo de sistema trizonal y el oscilador de Colpitts como ejemplo de sistema bizonal. La variedad de comportamiento exhibido para los sistemas lineales a trozos nos lleva a pensar que estos sistemas son capaces de reproducir los fenómenos dinámicos que cabe esperar de un sistema dinámico general.

En este trabajo nos hemos centrado principalmente en sistemas bizonales y hemos realizado cierta incursión en los sistemas planos trizonales con simetría. Concretamente, una gran parte de la memoria se dedica al análisis de la dinámica de un sistema tridimensional continuo lineal a trozos bizonal cuyas matrices poseen un par de autovalores complejos conjugados.

Esta tesis se encuentra dividida en cinco capítulos. El primero de ellos estudia las formas canónicas de los sistemas  $n$ -dimensionales con dos zonas cuya frontera está definida por un hiperplano, es decir, se centra en la búsqueda de sistemas equivalentes al dado (mediante cambios exclusivamente lineales) con un menor número de parámetros y que resulten más fáciles de analizar. Mediante traslaciones y rotaciones podemos conseguir que el hiperplano de separación pase por el origen y sea ortogonal a una de las variables de estado.

Las primeras formas canónicas presentadas dependen de la diferencia de las trazas de las dos matrices del sistema. Cuando ambas matrices poseen trazas distintas conseguimos que la no linealidad del sistema aparezca única y exclusivamente en la ecuación que describe la dinámica de la variable ortogonal al hiperplano de separación, llegando a la forma canónica que hemos denominado de Van der Pol generalizada. Si las trazas son iguales, la forma canónica que se obtiene se denomina de Duffing generalizada y está caracterizada por tener la no linealidad sólo en una de las ecuaciones que describe la dinámica de una variable no ortogonal al hiperplano de separación.

Para la obtención de otras forma canónicas hemos recurrido a nociones básicas de teoría de control. Si el sistema homogéneo asociado a un sistema bizonal es no observable, entonces el sistema puede ser parcialmente descompuesto, con lo que el problema inicial resulta ser de menor dimensión. Por el contrario, si el sistema es observable, entonces éste puede ser transformado en en la forma canónica de Lienard generalizada.

Si un sistema observable es no controlable, entonces las matrices que definen al sistema deben compartir algún autovalor. En este caso, los autovalores compartidos serán usados para seguir con el proceso de simplificación del sistema.

En la última sección del Capítulo 1 se particularizan las formas canónicas obtenidas en las anteriores secciones a los sistemas con dos zonas y dos o tres dimensiones.

El segundo capítulo lo hemos dedicado al análisis de las semiaplicaciones de Poincaré. En él definimos rigurosamente, para sistemas continuos y diferenciables a trozos, las semiaplicaciones de Poincaré y la aplicación de Poincaré como composición de éstas. Analizamos las derivadas de estas aplicaciones prestando especial atención en el caso bidimensional. También observamos que algunas propiedades de la aplicación de Poincaré para sistemas diferenciables pueden extrapolarse a los sistemas continuos y diferenciables a trozos. En particular, la derivada de la aplicación de Poincaré para sistemas planos conti-

nuos y diferenciables a trozos adquiere la forma ya conocida para los sistemas diferenciables en todo el plano.

En el tercer capítulo nos centramos en los sistemas planos bizonales y trizonales con simetría. El eje principal del capítulo es el estudio de la existencia de soluciones periódicas en tales sistemas, la aparición o desaparición de éstas y sus estabilidades. Una parte del capítulo está dedicada al estudio de las conexiones homoclinales y heteroclinales y la posible aparición (o desaparición) de órbitas periódicas a partir de éstas.

Para el análisis de las órbitas periódicas y los lazos separatrices generalizamos la teoría de Melnikov a los sistemas planos continuos y diferenciables a trozos. Esta generalización se aplicará a sistemas bizonales y trizonales simétricos obtenidos como perturbación de sistemas que poseen una banda continua de órbitas periódicas y, eventualmente, lazos separatrices y están caracterizados por el hecho de que sus matrices poseen trazas nulas.

La aplicación de la teoría de Melnikov a los sistemas anteriores nos permitirá obtener resultados de existencia y estabilidad de soluciones periódicas y de lazos homoclinos, así como la determinación de sus bifurcaciones. No obstante, los resultados obtenidos son locales, en el sentido de que son válidos si las trazas de las matrices que definen al sistema son suficientemente pequeñas. Por otra parte, estos resultados han sido probados (no de forma local) por otros autores analizando de forma exhaustiva las semiaplicaciones de Poincaré. Este análisis, en alguno de los casos, no permite determinar la hiperbolicidad de los ciclos límite encontrados, lo que sí se consigue aplicando la teoría de Melnikov.

Los sistemas bizonales homogéneos se estudian en el Capítulo 4. La homogeneidad del sistema nos permite deducir que éste no posee órbitas periódicas aisladas y que las semiaplicaciones y aplicación de Poincaré transforman semirrectas contenidas en el hiperplano de separación que pasan por el origen en semirrectas contenidas en el hiperplano de separación que pasan por el origen.



Si una de estas semirrectas es invariante para la aplicación de Poincaré, entonces el sistema homogéneo posee, con la acción del flujo sobre dicha semirrecta, un cono invariante bizonal.

El estudio de tales superficies invariantes es el objetivo central del cuarto capítulo. A partir del análisis que se lleva a cabo sobre la existencia y estabilidad de conos invariantes, es posible determinar algunos resultados de estabilidad asintótica del origen para los sistemas bizonales homogéneos.

La propiedad de homogeneidad permite trasladar la búsqueda de conos invariantes a la búsqueda de órbitas periódicas en cierto sistema continuo cúbico a trozos definido en la esfera unidad de  $\mathbb{R}^n$ . La estabilidad de los puntos de equilibrio de dicho sistema cúbico a trozos nos conducirá, aplicando el Teorema de Poincaré-Bendixon sobre superficies cerradas bidimensionales, a un primer resultado de existencia de conos invariantes en el caso tridimensional y podremos determinar la estabilidad del origen cuando el sistema carece de conos invariantes.

Para obtener nuevos resultados de existencia de conos invariantes para un sistema tridimensional observable transformamos éste a su forma generalizada de Lienard. Con esta forma canónica es posible determinar paramétricamente el comportamiento de las semiaplicaciones de Poincaré y ofrecer diferentes resultados de existencia, unicidad y estabilidad de conos invariantes.

Las bifurcaciones que puede presentar el sistema en cuanto a la existencia de conos invariantes pueden ser variadas (bifurcaciones silla-nodo, transcriticals y Hopf-centro). Hemos realizado un estudio completo de tales bifurcaciones cuando las matrices del sistema poseen un par de autovalores complejos conjugados y comparten el autovalor real.

Por último, el análisis sobre los conos invariantes para cierto sistema tridimensional permite analizar la existencia, unicidad, estabilidad e hiperbolicidad de las soluciones periódicas en un sistema bizonal plano no homogéneo y detectar la bifurcación de Hopf en el infinito que puede presentar el sistema plano.

El quinto capítulo de la memoria analiza los sistemas bizonales tridimensionales no observables o no controlables. Para los sistemas no observables se comprueba que la dinámica de éstos se rige por la de sistemas lineales a trozos unidimensionales o bidimensionales. Cuando el estudio se reduce a un sistema bidimensional y éste posee un ciclo límite, entonces el sistema tridimensional tiene un cilindro invariante y sobre él aparece una órbita periódica.

Cuando el sistema es observable y no controlable sabemos, del análisis efectuado en el Capítulo 1, que las matrices que rigen al sistema deben compartir algún autovalor. Si comparten un único autovalor real, el análisis del sistema se reduce al estudio de ciertos sistemas bizonales planos. Si, por el contrario, las matrices comparten un par de autovalores complejos conjugados con parte real nula, entonces la dinámica del sistema tridimensional puede analizarse a través de una ecuación unidimensional no autónoma  $2\pi$ -periódica, a la que dedicaremos la mayor parte del Capítulo 5. Determinamos que todas sus soluciones periódicas deben tener periodo  $2\pi$ , lo que nos permite definir una aplicación de Poincaré asociada, cuyo análisis exhaustivo nos conducirá al completo estudio de la dinámica en la ecuación unidimensional.

El anterior análisis trasladado al sistema tridimensional no controlable nos da una información completa de su dinámica y bifurcaciones: en el sistema puede aparecer un continuo de órbitas periódicas que, dependiendo del valor de los parámetros, permanecerá acotado o no.

En la última sección del Capítulo 5 recogemos mediante, algunas simulaciones numéricas, el comportamiento dinámico de un sistema próximo a uno no controlable cuyas matrices comparten un par de autovalores complejos conjugados con parte real nula. A la luz de las simulaciones realizadas podemos evidenciar la complejidad dinámica que pueden presentarse en los sistemas lineales a trozos tridimensionales y bizonales.

# Capítulo 1

## Formas canónicas

Este capítulo se dedica a la obtención de formas canónicas para los sistemas lineales a trozos en dos zonas, es decir, se presentan procedimientos para determinar sistemas equivalentes al inicial (obtenidos por cambios exclusivamente lineales) con menor número de parámetros y que por consiguiente resultan más simples y al mismo tiempo recogen todo su comportamiento dinámico.

Las formas canónicas se obtienen analizando distintas propiedades de las matrices que rigen a estos sistemas. En particular, se considerarán los sistemas lineales a trozos en dos zonas escritos en forma de control y se utilizarán los conceptos de observabilidad y controlabilidad de la teoría clásica de control para obtener determinadas formas canónicas.

Finalmente, pondremos de manifiesto cómo las formas canónicas encontradas recogen aspectos dinámicos significativos, como la existencia de variedades invariantes y de comportamiento oscilatorio, características que se estudiarán con más detalle en capítulos posteriores.

Los principales resultados de este capítulo, con algunas aplicaciones a sistemas electrónicos, aparecerán publicados en [12]: V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, and F. Torres, *On Simplifying and Classifying Piecewise Linear Systems*, IEEE Trans. Circuits Syst.

## 1.1 Definición y primeras propiedades

En esta primera sección definiremos los tipos de sistemas que consideraremos en el resto de la memoria y dejaremos sentadas las bases de la notación que se empleará en todo el trabajo.

Nuestro objetivo es estudiar los sistemas dinámicos continuos lineales a trozos bizonales, donde la superficie de separación es un hiperplano del espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . En todo lo que sigue,  $\dot{x}$  denotará la derivada de  $x$  respecto de la variable independiente,  $\mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$  es el conjunto de las matrices de orden  $p \times q$  con elementos en el cuerpo de los números reales  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  designa al conjunto de las matrices cuadradas de orden  $p$  con elementos en  $\mathbb{R}$ . Mediante  $I_p$  denotaremos la matriz identidad de orden  $p$ , por  $\theta$  (u  $\mathbf{O}$ ) la matriz nula de orden conveniente, la traza de la matriz  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  se denotará por  $\text{tr}(M)$ , el rango de  $M$  por  $\text{rg}(M)$ ,  $\det(M)$  será su determinante,  $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_p)$  el polinomio característico de  $M$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$  y  $\|\cdot\|$  la norma euclídea asociada al producto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$ .

En determinados casos representaremos las filas y columnas de una matriz como vectores. Así, si  $s_1, s_2, \dots, s_r$  son  $r$  vectores de  $\mathbb{R}^k$ , escribiendo  $(s_1 | s_2 | \dots | s_r)$  estamos denotando la matriz de orden  $k \times r$  formada por los vectores  $s_i$  escritos por columnas. Por otro lado, la traspuesta de la matriz

anterior será  $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix}$ .

Además, nos interesará denotar a las matrices cuadradas reales  $M$  de orden  $p$  siguiendo la estructura por bloques

$$M = \left( \begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right), \quad (1.1)$$

donde  $1 \leq r < p$ ,  $M_{11} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ ,  $M_{12} \in \mathcal{M}_{r \times (p-r)}(\mathbb{R})$ ,  $M_{21} \in \mathcal{M}_{(p-r) \times r}(\mathbb{R})$  y  $M_{22}$  es una matriz cuadrada de orden  $p - r$ .

La base canónica de  $\mathbb{R}^p$  se denotará  $\{e_1^p, e_2^p, \dots, e_p^p\}$  y, si el espacio de trabajo está claramente determinado se suprimirán los superíndices.

Con estas notaciones estamos en condiciones de definir la clase de sistemas a estudiar.

**Definición 1.1** *Decimos que la ecuación diferencial autónoma*

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.2)$$

con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  define un sistema dinámico continuo lineal a trozos bizonal en  $\mathbb{R}^n$  si existen  $a_1, a_2, v \in \mathbb{R}^n$ , con  $v \neq 0$ ,  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\delta \in \mathbb{R}$  tales que

1.  $F(x) = \begin{cases} A_1x + a_1 & \text{si } \langle x, v \rangle + \delta \leq 0, \\ A_2x + a_2 & \text{si } \langle x, v \rangle + \delta > 0. \end{cases}$
2.  $A_1x + a_1 = A_2x + a_2$  cuando  $\langle x, v \rangle + \delta = 0$ .

En lo sucesivo el conjunto de los sistemas dinámicos que satisfacen la Definición 1.1 se denotará por  $2CPL_n$ .

Veremos que, mediante una traslación y una simetría, el hiperplano de separación  $\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle + \delta = 0\}$  se puede transformar en el hiperplano de ecuación  $x_1 = 0$ . Más aún, la continuidad del campo vectorial implica  $a_1 = a_2$  y la coincidencia de las  $n - 1$  últimas columnas de las matrices que definen al sistema:

**Proposición 1.2** *Cualquier sistema dinámico lineal a trozos bizonal continuo puede escribirse en la forma*

$$\dot{x} = F(x) = \begin{cases} A^-x + a & \text{si } x_1 \leq 0, \\ A^+x + a & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

donde  $a \in \mathbb{R}^n$  y las matrices  $A^+, A^- \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  satisfacen la relación

$$(A^-)_{ij} = (A^+)_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall j = 2, \dots, n.$$

**Demostración.** Consideremos la matriz de Householder  $H$  que verifica la condición  $Hv = (\|v\|, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ . El cambio de variable  $y = H(x + \delta v / \|v\|^2)$  nos permite escribir (1.2) en la forma

$$\dot{y} = \begin{cases} HA_1Hy + H(a_1 - A_1\delta v / \|v\|^2) & \text{si } y_1 \leq 0, \\ HA_2Hy + H(a_2 - A_2\delta v / \|v\|^2) & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

De la continuidad del campo vectorial se deducen, por un lado la coincidencia de las  $n - 1$  últimas columnas de las matrices  $HA_1H$  y  $HA_2H$  y, por otro lado, la igualdad

$$H(a_1 - A_1\delta v / \|v\|^2) = H(a_2 - A_2\delta v / \|v\|^2).$$

Tomando  $A^- = HA_1H$ ,  $A^+ = HA_2H$  y  $a = H(a_1 - A\delta v / \|v\|^2)$ , concluimos la demostración renombrando la variable  $y$  por  $x$ . ■

Notemos que la igualdad de las  $n - 1$  últimas columnas de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  puede escribirse como

$$A^+ - A^- = (A^+ - A^-)e_1e_1^t.$$

En las ecuaciones diferenciales definidas a trozos pueden no verificarse las propiedades de existencia y unicidad de soluciones del problema de valores iniciales asociado (ver [36]). La siguiente proposición nos revela que para los sistemas dinámicos de la clase  $2CPL_n$  la existencia y unicidad de soluciones está garantizada.

**Proposición 1.3** *El problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

con  $F$  dada en la Definición 1.1 y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  posee una única solución, que además está definida en toda la recta real.

**Demostración.** Para probar esta proposición es suficiente demostrar que la función  $F$  es globalmente lipschitziana en  $\mathbb{R}^n$  (véase [19]).

Debido a la Proposición 1.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el campo vectorial  $F$  es de la forma indicada en (1.3).

Consideremos la norma matricial subordinada a la norma euclídea de  $\mathbb{R}^n$ . Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tendremos las siguientes posibilidades:

(a) Si  $x_1 \geq 0$  e  $y_1 \geq 0$ , entonces

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^+x - A^+y\| \leq \|A^+\| \cdot \|x - y\|.$$

(b) Si  $x_1 \leq 0$  e  $y_1 \leq 0$ , entonces

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^-x - A^-y\| \leq \|A^-\| \cdot \|x - y\|.$$

(c) Si  $x_1 > 0$  e  $y_1 < 0$ , tomemos

$$z = \frac{y_1}{y_1 - x_1}(x - y) + y,$$

entonces  $z_1 = 0$  y de la continuidad del campo  $F$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &= \|F(x) - F(z) + F(z) - F(y)\| \leq \\ &\leq \|F(x) - F(z)\| + \|F(z) - F(y)\| = \\ &= \|A^+x - A^+z\| + \|A^-z - A^-y\| \leq \\ &\leq \|A^+\| \cdot \|x - z\| + \|A^-\| \cdot \|z - y\| \leq \\ &\leq (\|A^+\| + \|A^-\|) \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $K = \|A^+\| + \|A^-\|$ . Es decir,  $F$  es globalmente lipschitziana en  $\mathbb{R}^n$ , luego el problema de valores iniciales (1.4) posee una única solución definida en toda la recta real. ■

La expresión (1.3) puede ser considerada como una primera forma canónica para los sistemas  $2\text{CPL}_n$ . En las siguientes secciones estudiaremos las características de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  y obtendremos formas canónicas más simples del sistema (1.3).

## 1.2 Primeras reducciones: Formas canónicas de Van der Pol y Duffing

Para las reducciones que pretendemos presentar en esta sección nos resultará útil el símbolo  $\nabla$  para denotar los superíndices  $+$  o  $-$ . Usando esta notación, mediante  $A^\nabla$  podemos representar a las matrices  $A^+$  y  $A^-$  y considerando las matrices estructuradas por bloques, el sistema (1.3) se podrá expresar como

$$\dot{x} = A^\nabla x + a = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & A_{12} \\ \hline A_{21}^\nabla & A_{22} \end{array} \right) x + a = \begin{cases} A^-x + a & \text{si } x_1 \leq 0, \\ A^+x + a & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $a_{11}^\nabla \in \mathbb{R}$ ,  $A_{21}^\nabla \in \mathcal{M}_{(n-1) \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $A_{12} \in \mathcal{M}_{1 \times (n-1)}(\mathbb{R})$  y  $A_{22}$  es una matriz cuadrada de orden  $n - 1$ .

Notemos que si  $A_{12} = \theta$ , entonces la primera ecuación de (1.5) está “desacoplada”; en ella sólo interviene la primera variable. Sustituyendo la solución de la primera ecuación en las restantes  $n - 1$  ecuaciones se obtiene un problema lineal a trozos de dimensión menor. Seguidamente consideramos la reducción del sistema (1.5) cuando  $A_{12} \neq \theta$ .

**Proposición 1.4** *Si el sistema (1.5) verifica  $A_{12} \neq \theta$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (1.5) en*

$$\dot{y} = B^\nabla y + b = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & -e_i^t \\ \hline B_{21}^\nabla & B_{22} \end{array} \right) y + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .



**Demostración.** El cambio de variable

$$y = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \theta \\ \hline \theta & P \end{array} \right) x - \left( \begin{array}{c} 0 \\ d \end{array} \right) \quad (1.7)$$

donde  $d \in \mathcal{M}_{(n-1) \times 1}(\mathbb{R})$  y  $P \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  es regular, deja invariante al hiperplano de ecuación  $x_1 = 0$  y transforma (1.5) en

$$\dot{y} = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & A_{12}P^{-1} \\ \hline PA_{21}^\nabla & PA_{22}P^{-1} \end{array} \right) y + \left( \begin{array}{c} \frac{A_{12}P^{-1}d + a_1}{PA_{22}P^{-1}d + P \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} \end{array} \right). \quad (1.8)$$

Tomando una matriz  $P$  regular cuya  $i$ -ésima fila sea  $p_i = -A_{12}$  tenemos  $A_{12}P^{-1} = -e_i^t$ , y eligiendo la  $i$ -ésima componente de  $d$  como  $d_i = -a_1$ , se deduce que  $A_{12}P^{-1}d + a_1 = 0$ . ■

Nótese que el cambio (1.7) no modifica el primer coeficiente  $a_{11}^\nabla$  de las matrices  $A^\nabla$  de (1.5) y que la primera ecuación de (1.6) es homogénea.

La siguiente proposición traslada el carácter “no lineal” del sistema (1.5) a su primera ecuación. Nos será de gran ayuda en lo sucesivo tener en cuenta que  $\text{tr}(A^+) - \text{tr}(A^-) = a_{11}^+ - a_{11}^-$ .

**Proposición 1.5** *Si el sistema (1.5) verifica que  $\text{tr}(A^-) \neq \text{tr}(A^+)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.5) en*

$$\dot{y} = B^\nabla y + b = \left( \begin{array}{c|c} b_{11}^\nabla & A_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) y + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

**Demostración:** El cambio de variable

$$y = Px = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \theta \\ \hline P_{21} & I_{n-1} \end{array} \right) x \quad (1.10)$$

donde  $P_{21} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times 1}(\mathbb{R})$ , deja invariante al hiperplano  $x_1 = 0$  y transforma el sistema (1.5) en

$$\dot{y} = B^\nabla y + Pa, \quad (1.11)$$

$$\text{donde } B^\nabla = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla - A_{12}P_{21} & A_{12} \\ \hline a_{11}^\nabla P_{21} + A_{21}^\nabla - P_{21}A_{12}P_{21} - A_{22}P_{21} & P_{21}A_{12} + A_{22} \end{array} \right).$$

Las matrices  $B^\nabla$  tendrán iguales las  $n - 1$  últimas componentes de la primera columna cuando

$$a_{11}^+ P_{21} + A_{21}^+ = a_{11}^- P_{21} + A_{21}^-. \quad (1.12)$$

Como  $a_{11}^+ - a_{11}^- = \text{tr}(A^+) - \text{tr}(A^-) \neq 0$ , podemos elegir

$$P_{21} = -\frac{1}{a_{11}^+ - a_{11}^-} (A_{21}^+ - A_{21}^-),$$

que satisface la condición (1.12). Con esta elección el sistema (1.5) se escribe en la forma (1.9) poniendo  $b = Pa$ . ■

Notemos que el cambio (1.10) deja invariante al bloque  $A_{12}$  de las matrices que definen al sistema (1.5) y no modifica el término independiente de la primera ecuación de tal sistema.

Considerando una tras otra las proposiciones 1.4 y 1.5 se obtienen nuevas reducciones en el sistema (1.5).

**Teorema 1.6** *Si (1.5) verifica  $A_{12} \neq \theta$  y  $\text{tr}(A^+) \neq \text{tr}(A^-)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (1.5) a la forma generalizada de Van der Pol*

$$\dot{z} = C^\nabla z + c = \left( \begin{array}{c|c} c_{11}^\nabla & -e_i^t \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right) z + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$  y  $C_{21}$  es o bien nulo o bien múltiplo de algún vector canónico de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Demostración.** Aplicando sucesivamente las Proposiciones 1.4 y 1.5 podemos transformar el sistema (1.5) en

$$\dot{y} = B^\nabla y + b = \left( \begin{array}{c|c} b_{11}^\nabla & -e_i^t \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) y + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

El cambio de variable adicional

$$z = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \theta \\ \hline \theta & P \end{array} \right) y - \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

donde  $d \in \mathcal{M}_{(n-1) \times 1}(\mathbb{R})$  y  $P \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  es regular, transforma (1.14) en

$$\dot{z} = \left( \begin{array}{c|c} b_{11}^\nabla & -e_i^t P^{-1} \\ \hline PB_{21} & PB_{22} P^{-1} \end{array} \right) z + \begin{pmatrix} \frac{-e_i^t P^{-1} d}{PB_{22} P^{-1} d + P \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Tomando una matriz regular  $P$  cuya  $i$ -ésima fila sea  $p_i = e_i^t$  tenemos  $e_i^t P^{-1} = e_i^t$  y eligiendo  $d$  ortogonal a  $e_i$  se obtiene  $e_i^t P^{-1} d = 0$ .

Si  $B_{21} = 0$ , obtenemos  $PB_{21} = 0$  para cualquier matriz  $P$ .

Si  $\langle e_i, B_{21} \rangle = \rho \neq 0$ , elijamos los vectores  $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{n-1}$  formando una base del subespacio ortogonal al vector  $B_{21}$ , entonces tomando  $P$  como la matriz cuyas filas son  $p_1, \dots, p_{i-1}, e_i^t, p_{i+1}, \dots, p_{n-1}$  se deduce la igualdad  $PB_{21} = \rho e_i$ .

Si  $\langle e_i, B_{21} \rangle = 0$ , con  $B_{21} \neq 0$ , prolonguemos el conjunto  $\{e_i\}$  a una base del subespacio ortogonal al vector  $B_{21}$ . Añadiendo a esta base el vector de  $\mathbb{R}^{n-1}$   $w = \|B_{21}\|^{-2} B_{21}$  conseguimos ampliar este conjunto a una base del espacio  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Con estos  $n-1$  vectores formamos una matriz  $P$  cuya fila  $i$ -ésima es  $e_i^t$  y cuya  $k$ -ésima fila ( $k \neq i$ ) es  $w$ . Entonces,  $PB_{21} = e_k$ , donde  $e_k$  es el  $k$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . ■

**Nota 1.7** Obsérvese que las elecciones realizadas sobre la matriz  $P$  y el vector  $d$  en el cambio (1.15) hacen que la primera ecuación del sistema (1.13) sea homogénea y que en ella sólo intervengan dos variables, una de las cuales es la primera. Además, la primera variable interviene únicamente en la primera ecuación y, a lo sumo, en otra más.

**Nota 1.8** La denominación de forma generalizada de Van der Pol para la forma canónica (1.13) tiene su origen en los sistemas planos. Si el sistema (1.13) es bidimensional tenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) - x_2, \\ \dot{x}_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_2, \end{cases} \quad (1.17)$$

donde

$$f(x_1) = \begin{cases} c_{11}^- x_1 & \text{si } x_1 \leq 0, \\ c_{11}^+ x_1 & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Cuando  $c_{22} = c_2 = 0$  y  $c_{21} = 1$ , el sistema (1.17) se reduce a la ecuación escalar

$$\ddot{x}_2 - f(\dot{x}_2) + c_{21}x_2 = 0,$$

que constituye un caso particular de la ecuación de Van der Pol con un término “disipativo” lineal a trozos.

Debemos destacar que la forma canónica de Van der Pol para los sistemas continuos bidimensionales lineales a trozos con dos zonas ( $2\text{CPL}_2$ ) ha sido ampliamente estudiada en [22], donde se recoge el conjunto de bifurcaciones de los sistemas  $2\text{CPL}_2$  que pueden poseer un ciclo límite (ver también [47]).

Cuando las trazas de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  coinciden podemos obtener formas canónicas similares a las recogidas en las proposiciones anteriores.

**Proposición 1.9** Si (1.5) verifica  $\text{tr}(A^+) = \text{tr}(A^-)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.5) en

$$\dot{u} = \begin{cases} D^-u + d & \text{si } u_1 \leq 0, \\ D^+u + d & \text{si } u_1 > 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

con  $(D^-)_{ij} = (D^+)_{ij} \quad \forall (i, j) \neq (2, 1)$ .

**Demostración.** Si  $A^+ = A^-$ , entonces el resultado es inmediato. Si  $A^+ \neq A^-$  y  $\text{tr}(A^+) = \text{tr}(A^-)$ , entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $(A^+)_{21} \neq (A^-)_{21}$ , pues en caso contrario, existiría un valor  $i \in \{3, \dots, n\}$  de forma que  $(A^+)_{i1} \neq (A^-)_{i1}$  e intercambiando las variables  $x_i$  y  $x_2$  entre sí conseguiríamos que las matrices que definen al sistema a ambos lados del hiperplano de separación se diferencien al menos en el primer coeficiente de la segunda fila.

Utilizando la notación por bloques podemos escribir (1.5) en la forma

$$\dot{x} = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & A_{13} \\ a_{21}^\nabla & a_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31}^\nabla & A_{32} & A_{33} \end{array} \right) x + a, \quad (1.19)$$

donde  $a_{11}, a_{12}, a_{21}^\nabla, a_{22} \in \mathbb{R}$ ,  $A_{31}^\nabla, A_{32} \in \mathcal{M}_{(n-2) \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $A_{33} \in \mathcal{M}_{(n-2)}(\mathbb{R})$  y  $A_{13}, A_{23} \in \mathcal{M}_{1 \times (n-2)}(\mathbb{R})$ .

Realicemos en (1.5) el cambio de variable

$$u = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \theta \\ \gamma & \mu & \theta \\ \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{array} \right) x + \left( \begin{array}{c} 0 \\ d_1 \\ d \end{array} \right), \quad (1.20)$$

donde  $\gamma, d_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $P_{31}, P_{32} \in \mathcal{M}_{(n-2) \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $d \in \mathbb{R}^{n-2}$  y  $P_{33}$  es una matriz regular de orden  $n - 2$ .

Con estas notaciones, eligiendo

$$P_{32} = -\frac{1}{a_{21}^+ - a_{21}^-} P_{33} (A_{31}^+ - A_{31}^-) \quad (1.21)$$

y tras unos cálculos directos obtenemos el resultado. ■

Nótese que si el sistema (1.19) verifica  $(a_{12}, A_{13}) = (0, \theta)$ , entonces el problema lineal a trozos, como se indicó anteriormente, es de menor dimensión. Si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  poseen trazas iguales y  $(a_{12}, A_{13})$  es no nulo, siguiendo razonamientos análogos a los realizados en las pruebas de la Proposición 1.5 y el Teorema 1.6, puede obtenerse el siguiente resultado.

**Teorema 1.10** *Si el sistema (1.5) verifica  $A_{12} \neq \theta$  y  $\text{tr}(A^-) = \text{tr}(A^+)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.5) a la forma generalizada de Duffing*

$$\dot{u} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & b_{12} & B_{13} \\ b_{21}^\nabla & b_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array} \right) u + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Además, si  $A_{12} = (a_{12}, A_{13})$ , con  $A_{13} \neq \theta \in \mathbb{R}^{n-2}$ , entonces el cambio puede elegirse de forma que  $B_{13} = -e_i^t$ , siendo  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^{n-2}$ .

Notemos que el Teorema 1.10 nos indica las condiciones en las que podemos trasladar el carácter “no lineal” del sistema (1.5) única y exclusivamente a su segunda ecuación, al mismo tiempo que anulamos algunos de sus coeficientes.

Cambios de variables adicionales permitirán anular otros elementos de las matrices que rigen a (1.22). No obstante, la casuística es elevada y evitaremos los detalles, pues no haremos uso de tales simplificaciones.

**Nota 1.11** La denominación de forma generalizada de Duffing para la forma canónica (1.22) tiene su origen en los sistemas bidimensionales. Si el sistema (1.22) es plano podemos escribir

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = g(x_1) + b_{22}x_2 + b_2, \end{cases} \quad (1.23)$$

donde

$$g(x_1) = \begin{cases} b_{21}^- x_1 & \text{si } x_1 \leq 0, \\ b_{21}^+ x_1 & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Cuando  $b_{12} = 1$ , el sistema (1.23) se reduce a la ecuación de Duffing

$$\ddot{x}_1 - b_{22}\dot{x}_1 - (g(x_1) + b_2) = 0,$$

con un término recuperador lineal a trozos.

### 1.3 Sistemas Observables

En esta sección consideraremos los sistemas homogéneos de la clase  $2CPL_n$  escritos en forma de sistemas de control. Estudiaremos la reducción de los sistemas  $2CPL_n$  a la luz de los conceptos de observabilidad y controlabilidad, es decir, usaremos algunas propiedades características de los sistemas controlables u observables con objeto de simplificar las ecuaciones de los sistemas  $2CPL_n$ . Las definiciones y algunos de los resultados que se presentan y hacen referencia a los sistemas de control en forma general pueden encontrarse en los textos [8] y [13] y en el trabajo de Chai Wah Wu y Leon O. Chua [53].

Si en (1.5) hacemos  $a = 0$ , obtenemos su sistema homogéneo asociado

$$\dot{x} = \begin{cases} A^- x & \text{si } x_1 \leq 0, \\ A^+ x & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

que puede escribirse en la forma

$$\dot{x} = A^- x + b\eta(\langle x, e_1 \rangle), \quad (1.25)$$

donde  $b = (A^+ - A^-) e_1$  y  $\eta(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ u & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$

Nótese que (1.5) puede escribirse, usando (1.25), en la forma

$$\dot{x} = A^- x + b\eta(\langle x, e_1 \rangle) + a. \quad (1.26)$$

A partir de estas observaciones se puede considerar (1.24) como un sistema lineal de control que de forma general se escribe como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu, \\ u = \varphi(y) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1.27)$$

siendo  $A, B, C$  matrices constantes de órdenes convenientes,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y donde denominaremos a  $u \in \mathbb{R}^n$  ley de control o simplemente control, mientras que  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es la función de salida.

### 1.3.1 Observabilidad y controlabilidad. Primeras Propiedades

A continuación establecemos los conceptos de observabilidad y controlabilidad de los sistemas de control para particularizarlos después al estudio de los sistemas 2CPL<sub>n</sub> (ver [8] y [13]).

**Definición 1.12** Decimos que el sistema (1.27) es controlable en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , con  $t_1 > t_0$ , si para todo  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una ley de control  $u(t)$  y una solución  $x(t)$  de (1.27) con  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t_1) = x_1$ .

**Definición 1.13** Diremos que el sistema (1.27) es observable en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , con  $t_1 > t_0$ , si para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existe una función  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^p$  y una solución  $x(t)$  de (1.27) de manera que

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \gamma(s), y(s) \rangle ds.$$

En otras palabras, un sistema es controlable en un intervalo temporal si dados dos estados arbitrarios  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una ley de control que permite transferir el sistema desde  $x_0$  a  $x_1$  en dicho intervalo temporal. De la



misma manera, el sistema se dirá observable en un intervalo temporal si el conocimiento de una determinada combinación de la variable de salida nos determina las variables de estado  $x_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Ahora, recordamos criterios algebraicos clásicos que caracterizan la controlabilidad y observabilidad de los sistemas de control con matrices constantes (ver [8]).

**Proposición 1.14** *El sistema (1.27) es controlable si y sólo si la matriz*

$$C = \left( B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B \right), \quad (1.28)$$

*que se denomina matriz de controlabilidad, verifica  $\text{rg}(C) = n$ .*

**Proposición 1.15** *El sistema (1.27) es observable si y sólo si la matriz*

$$O = \left( \begin{array}{c} C^t \\ \hline C^t A \\ \hline C^t A^2 \\ \hline \vdots \\ \hline C^t A^{n-1} \end{array} \right), \quad (1.29)$$

*que se denomina matriz de observabilidad, verifica  $\text{rg}(O) = n$ .*

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se obtiene la siguiente propiedad de dualidad (ver [8]).

**Proposición 1.16** *El sistema (1.27) es controlable (respectivamente, observable) si y sólo si el sistema dual*

$$\begin{cases} \dot{x} = A^t x(t) + C^t u, \\ u = \varphi(y) \\ y(t) = B^t x(t), \end{cases}$$

*es observable (respectivamente, controlable).*

En la siguiente proposición se establece que los cambios de variables lineales no modifican las condiciones de observabilidad y controlabilidad del sistema (1.27) (véase [8]).

**Proposición 1.17** *Si el sistema (1.27) se transforma mediante un cambio lineal de variable en el sistema*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u, \\ u = \varphi(w) \\ w(t) = \tilde{C}z(t), \end{cases} \quad (1.30)$$

entonces, los rangos de las matrices de observabilidad (respectivamente, controlabilidad) de los sistemas (1.27) y (1.30) son los mismos.

Cuando  $C$  es el primer vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  podemos enunciar el siguiente resultado, que usaremos más adelante, y que también caracteriza la observabilidad del sistema.

**Proposición 1.18** *Consideremos el sistema (1.27) con  $C = e_1^t$  y escribamos  $A = \left( \begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$ , con  $a_{11} \in \mathbb{R}$  y  $A_{12}, A_{21}, A_{22}$  matrices de órdenes convenientes, entonces (1.27) es observable si y sólo si*

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A_{12} \\ \hline A_{12}A_{22} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{12}A_{22}^{n-2} \end{pmatrix} = n - 1.$$

**Demostración.** Como  $C = e_1^t$ , la matriz de observabilidad podemos escribirla en la forma

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \hline e_1^t \\ \hline e_1^t A \\ \hline e_1^t A^2 \\ \hline \vdots \\ \hline e_1^t A^{n-1} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \theta \\ \hline \mathcal{O}_{21} & \mathcal{O}_{22} \end{array} \right),$$

luego la matriz  $\mathcal{O}$  posee rango completo si y sólo si  $\text{rg}(\mathcal{O}_{22}) = n - 1$ .

Por otra parte, observamos que

$$\mathcal{O}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{e_1^t A}{e_1^t A^2} \\ \vdots \\ \frac{e_1^t A^{n-1}}{e_1^t A^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Seguidamente, mediante el principio de inducción, probaremos que las filas de la matriz  $\mathcal{O}_{22}$  son de la forma

$$e_1^t A^k \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ik} A_{12} A_{22}^i \quad \forall k \geq 1, \quad (1.32)$$

donde  $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$  para  $i = 0, 1, \dots, k-1$  y  $\alpha_{k-1,k} = 1$  para  $k \geq 1$ .

- Si  $k = 1$ , se tiene que

$$e_1^t \left( \begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = (1 \mid \theta) \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = A_{12},$$

es decir,  $e_1^t A \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha_{01} A_{12}$ , con  $\alpha_{01} = 1$ .

- Supuesto el resultado cierto para  $k$  y denotando la primera componente del vector  $e_1^t A^k$  por  $c_{1k}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} e_1^t A^{k+1} \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix} &= e_1^t A^k A \begin{pmatrix} \theta \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \left( c_{1k} \mid \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ik} A_{12} A_{22}^i \right) \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \\ &= c_{1k} A_{12} + \left( \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ik} A_{12} A_{22}^i \right) A_{22} = \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_{i,k+1} A_{12} A_{22}^i, \end{aligned}$$

siendo  $\alpha_{0,k+1} = c_{1k}$  y  $\alpha_{i,k+1} = \alpha_{i-1,k}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , en particular,  $\alpha_{k,k+1} = \alpha_{k-1,k} = 1$ , luego se satisface (1.32).

A partir de (1.31) y (1.32) obtenemos que

$$\mathcal{O}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{02} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & \alpha_{1,n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{12}}{A_{12}A_{22}} \\ \frac{A_{12}A_{22}}{A_{12}A_{22}^2} \\ \vdots \\ \frac{A_{12}A_{22}^{n-2}}{A_{12}A_{22}^{n-2}} \end{pmatrix},$$

de donde,  $\text{rg}(\mathcal{O}_{22}) = n - 1$  si y sólo si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{A_{12}}{A_{12}A_{22}} \\ \frac{A_{12}A_{22}}{A_{12}A_{22}^2} \\ \vdots \\ \frac{A_{12}A_{22}^{n-2}}{A_{12}A_{22}^{n-2}} \end{pmatrix} = n - 1,$$

con lo que termina la demostración. ■

### 1.3.2 Forma canónica de Lienard

De forma natural, puede extenderse los conceptos de observabilidad y controlabilidad al sistema lineal a trozos no homogéneo (1.5) estableciendo que tal sistema es observable (resp. controlable) si su sistema homogéneo asociado (1.24) es observable (resp. controlable).

A continuación establecemos una forma canónica para el sistema (1.5) bajo el supuesto de observabilidad.

**Teorema 1.19** *El sistema (1.5) es observable si y sólo si existe un cambio lineal de variables que lo transforma en la forma generalizada de Lienard*

$$\dot{y} = M^\nabla y + \mathbf{a} = \begin{cases} M^- y + \mathbf{a} & \text{si } y_1 \leq 0, \\ M^+ y + \mathbf{a} & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

donde

$$M^\nabla = \begin{pmatrix} \delta_1^\nabla & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2^\nabla & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^\nabla & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \delta_n^\nabla & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

$\mathbf{a} = (0, 0, \dots, 0, -a_n)^t \in \mathbb{R}^n$  y el polinomio característico de  $A^\nabla$  es

$$p_{A^\nabla}(\lambda) = (-1)^{n-1} \left( -\lambda^n + \delta_1^\nabla \lambda^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}^\nabla \lambda + \delta_n^\nabla \right).$$

**Demostración.** Si el sistema (1.24) es observable, existe un único vector  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{O}z = e_n$ , siendo  $e_n$  el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{O}$  la matriz de observabilidad del sistema (1.24).

Tomemos  $P = \left( (A^-)^{n-1} z \mid (A^-)^{n-2} z \mid \cdots \mid A^- z \mid z \right)$ . Es fácil probar que  $P^t e_1 = e_1$  y que las columnas de  $P$  son linealmente independientes, por lo que  $P$  es regular.

Si denotamos por

$$p_{A^-}(\lambda) = (-1)^{n-1} \left( -\lambda^n + \delta_1^- \lambda^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}^- \lambda + \delta_n^- \right)$$

el polinomio característico de la matriz  $A^-$ , utilizando el Teorema de Cayley-

Hamilton se tiene que

$$\begin{aligned}
 A^-P &= \left( (A^-)^n z \mid (A^-)^{n-1} z \mid \cdots \mid (A^-)^2 z \mid A^-z \right) = \\
 &= \left( \delta_1^- (A^-)^{n-1} z + \cdots + \delta_{n-1}^- (A^-) z + \delta_n^- z \mid (A^-)^{n-1} z \mid \cdots \mid A^-z \right) = \\
 &= \left( (A^-)^{n-1} z \mid (A^-)^{n-2} z \mid \cdots \mid A^-z \mid z \right) \begin{pmatrix} \delta_1^- & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2^- & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^- & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \delta_n^- & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= PM^-.
 \end{aligned}$$

De esta forma, escribiendo el sistema (1.5) en la forma (1.26) y realizando el cambio de variable  $X = P^{-1}x$  obtenemos

$$\dot{X} = M^-X + \tilde{b}\eta(\langle X, e_1 \rangle) + \tilde{a}$$

donde  $M^- = P^{-1}A^-P$ ,  $\tilde{b} = P^{-1}b$  y  $\tilde{a} = P^{-1}a$ .

Finalmente, mediante la transformación

$$y = X - \left( \begin{array}{c|c} 0 & \theta \\ \hline \theta & I_{n-1} \end{array} \right) \tilde{a}$$

llegamos a

$$\dot{y} = M^-y + \tilde{b}\eta(\langle y, e_1 \rangle) + \mathbf{a}, \quad \text{con } \mathbf{a} = (0, 0, \dots, 0, -a_n)^t,$$

expresión que coincide con (1.33).

Recíprocamente, si existe un cambio lineal de variables que transforma (1.5) en la forma de Lienard (1.33), entonces existe una matriz regular  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

de forma que  $Q^{-1}A^{-}Q = M^{-}$  y  $e_1^t Q = e_1^t$ , así el rango de la matriz de observabilidad del sistema (1.24) viene dado por

$$\text{rg}(\mathcal{O}) = \text{rg}(\mathcal{O}Q) = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{e_1^t Q}{e_1^t A^{-} Q} \\ \vdots \\ \frac{e_1^t (A^{-})^{n-1} Q}{e_1^t (M^{-})^{n-1}} \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{e_1^t}{e_1^t M^{-}} \\ \vdots \\ \frac{e_1^t (M^{-})^{n-1}}{e_1^t (M^{-})^{n-1}} \end{pmatrix} = n,$$

ya que

$$e_1^t (A^{-})^k Q = e_1^t Q (M^{-})^k = e_1^t (M^{-})^k \quad \text{para todo } k \geq 1$$

y la última matriz es triangular inferior con unos en la diagonal. ■

**Nota 1.20** El parámetro  $a_n$  es un parámetro homotético del sistema (1.33) en el sentido de que el cambio de variables  $z = y/|a_n|$ , para  $a_n \neq 0$ , transforma el sistema (1.33) en

$$\dot{z} = M^{\nabla} z - \text{sgn}(a_n) e_n,$$

donde  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^n$  y  $\text{sgn}$  es la función signo.

**Nota 1.21** Si un sistema  $2\text{CPL}_n$  es observable y no tiene puntos de equilibrio, entonces no posee órbitas periódicas. En efecto, si el sistema (1.5) no tiene puntos de equilibrio y es observable, entonces el sistema de Lienard (1.33) equivalente a (1.5) no tiene puntos de equilibrios, por lo que debe verificarse  $a_n \cdot \delta_n^+ \leq 0$ ,  $a_n \cdot \delta_n^- \geq 0$  y  $a_n \neq 0$ .

Por tanto,

$$a_n \cdot \dot{y}_n = a_n (\delta^{\nabla} y_1 - a_n) = a_n \cdot \delta^{\nabla} \cdot y_1 - a_n^2 = \begin{cases} a_n \cdot \delta^- \cdot y_1 - a_n^2 < 0, & \text{si } y_1 \leq 0, \\ a_n \cdot \delta^+ \cdot y_1 - a_n^2 < 0, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases}$$

y la variable  $y_n$  es estrictamente monótona. Así, los sistemas (1.33) y (1.5) no pueden tener soluciones periódicas.

**Nota 1.22** La denominación de forma generalizada de Lienard para la forma canónica (1.33) tiene su origen en los sistemas planos. Si el sistema (1.33) es plano podemos escribir

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(y_1) - y_2, \\ \dot{y}_2 = -g(y_1) - a, \end{cases} \quad (1.35)$$

donde

$$f(y_1) = \begin{cases} \delta_1^+ y_1 & \text{si } y_1 \geq 0, \\ \delta_1^- y_1 & \text{si } y_1 < 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(y_1) = \begin{cases} -\delta_2^+ y_1 & \text{si } y_1 \geq 0, \\ -\delta_2^- y_1 & \text{si } y_1 < 0, \end{cases}$$

luego (1.35) está escrito en la forma clásicamente denominada de Lienard.

Si el sistema (1.24) es no observable, la matriz de observabilidad no posee rango completo. En este caso, veremos que es posible transformar (1.5) en otro sistema con las primeras variables evolucionando independientemente de las restantes.

**Proposición 1.23** *Si la matriz de observabilidad del sistema (1.24) verifica  $\text{rg}(\mathcal{O}) = p$ , con  $1 \leq p < n$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (1.5) en la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}^\nabla x_1 + a_1, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}^\nabla x_1 + A_{22} x_2 + a_2, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde  $x_1, a_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $x_2, a_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$  y  $A_{11}^+, A_{11}^-, A_{21}^+, A_{21}^-$  y  $A_{22}$  son matrices de órdenes convenientes.

**Demostración.** Si  $1 \leq \text{rg}(\mathcal{O}) = p < n$ , podemos asegurar la existencia de un conjunto de vectores  $\mathcal{S} = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  linealmente independiente, siendo  $k_1 = e_1$  y  $k_i$ ,  $i = 2, \dots, p$ , una fila (diferente de la primera) de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$ , es decir,  $k_i = e_1^t (A^-)^j$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .



Formemos la matriz

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e_1^t}{k_2} \\ \frac{k_2}{k_p} \\ \vdots \\ \frac{k_p}{y_{p+1}} \\ \frac{y_{p+1}}{\vdots} \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde hemos elegido  $y_l$ ,  $p+1 \leq l \leq n$ , de manera que  $P$  sea regular.

Obsérvese que  $k_i A^-$  ( $1 \leq i \leq p$ ) es o bien una fila de la matriz de observabilidad o bien  $k_i A^- = e_1^t (A^-)^n$  que, aplicando el Teorema de Cayley–Hamilton, puede escribirse como combinación lineal de las filas de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$ .

Puesto que  $\mathcal{S} = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  es base del subespacio generado por las filas de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$ , se tiene que el vector  $k_i A^-$  ( $1 \leq i \leq p$ ) es combinación lineal de los vectores del conjunto  $\mathcal{S}$ .

Además, como las filas de  $P^{-1}$  forman una base de  $\mathbb{R}^n$  se sigue que los vectores  $y_l A^-$ , para  $p+1 \leq l \leq n$ , pueden expresarse como combinación lineal de las filas de  $P^{-1}$ , luego podemos escribir

$$P^{-1} A^- = \left( \begin{array}{c|c} A_{11}^- & \theta \\ \hline A_{21}^- & A_{22}^- \end{array} \right) P^{-1},$$

siendo  $A_{11}^- \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

En consecuencia, el cambio lineal de variable  $x \rightarrow Px$  en (1.5) nos conduce de manera inmediata al sistema (1.36) ■

### 1.3.3 Formas canónicas de Van der Pol y Duffing para sistemas observables

En este apartado particularizamos las formas canónicas de Van der Pol y Duffing al sistema (1.5) cuando es observable. En este supuesto, podemos explicitar los coeficientes superdiagonales de las matrices que aparecen en estas dos formas canónicas, aunque los restantes elementos también pueden ser explicitados si partimos del sistema (1.33) (véase [12]).

Supongamos en primer lugar que  $\text{tr}(A^+) \neq \text{tr}(A^-)$ . Si el sistema (1.5) verifica  $A_{12} = \theta$ , entonces una aplicación directa de la Proposición 1.18 nos permite deducir la no observabilidad del sistema (1.5) y en consecuencia podemos extraer un subsistema de menor dimensión que evoluciona independientemente, como ya sabíamos.

Si  $A_{12} \neq \theta$ , un cambio lineal de variables (Teorema 1.6) permite escribir el sistema (1.5) en la forma de Van der Pol

$$\dot{x} = \left( \begin{array}{cc|c} c_{11}^\nabla & -1 & \theta \\ c_{21} & c_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

donde  $c_{11}^\nabla, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$  y los demás elementos de la descomposición por bloques son números reales o matrices de órdenes convenientes.

Estudiemos mediante el criterio recogido en la Proposición 1.18 la observabilidad del sistema homogéneo asociado a (1.37). Como

$$\left( -1 \mid \theta \right) \left( \begin{array}{c|c} c_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{array} \right) = \left( -c_{22} \mid -C_{23} \right),$$

el conjunto de vectores

$$\left\{ \left( -1 \mid \theta \right), \left( -c_{22} \mid -C_{23} \right) \right\}$$

es linealmente dependiente si el vector  $C_{23}$  de  $\mathbb{R}^{n-2}$  es nulo. En este caso, el sistema homogéneo asociado a (1.37) es no observable y podemos extraer un subsistema bidimensional que evoluciona independientemente.

Si  $C_{23} \neq 0$ , siguiendo un razonamiento análogo al afectado en la demostración de la Proposición 1.4, el cambio de variables

$$y = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & \theta \\ \hline \theta & -C_{23} \\ & \theta \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

transforma el sistema (1.37) en la forma

$$\dot{y} = \left( \begin{array}{cccc|c} d_{11}^\nabla & -1 & 0 & & \theta \\ d_{21} & d_{22} & -1 & & \theta \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & D_{34} & \\ \hline D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & \end{array} \right) y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Aplicando de nuevo la Proposición 1.18, observamos que si  $D_{34}$  es el vector nulo de  $\mathbb{R}^{n-3}$ , entonces el sistema homogéneo asociado a (1.38) es no observable y podemos extraer un sistema tridimensional que evoluciona de manera independiente. Por otro lado, si  $D_{34} \neq 0$  podemos simplificar de manera similar el sistema inicial y en consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 1.24 [Forma canónica de Van der Pol]** *Si el sistema (1.5) es observable y  $\text{tr}(A^+) \neq \text{tr}(A^-)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & -1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Podemos enunciar un resultado análogo a la Proposición 1.24 cuando las trazas de las matrices que rigen al sistema (1.5) coinciden.

**Proposición 1.25 [Forma canónica de Duffing]** *Si el sistema (1.5) es observable y  $\text{tr}(A^+) = \text{tr}(A^-)$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^\nabla & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & -1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Nótese la similitud existente entre las formas (1.39) y (1.40) y la forma canónica de Lienard (1.33) cuando el sistema (1.5) es observable.

### 1.3.4 Reducción de sistemas lineales a trozos observables y no controlables

Nuestra estrategia en la obtención de las formas canónicas considerando la observabilidad del sistema homogéneo asociado al sistema lineal a trozos escrito en forma de control ha consistido hasta ahora en descomponer el sistema si no es observable, y en caso de observabilidad simplificar las matrices que rigen al sistema.

En este apartado, consideraremos la reducción de sistemas observables y no controlables a la vista de la relación existente entre los autovalores de las matrices que rigen a este tipo de sistemas.

Considerando la controlabilidad, disponemos de un resultado clásico, análogo a la Proposición 1.23, que enunciamos sin prueba (ver [8]).

**Proposición 1.26** *Si la matriz de controlabilidad del sistema (1.24) verifica  $\text{rg}(\mathcal{C}) = p$ , con  $1 \leq p < n$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (1.5) en la forma*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + b_1\eta(\langle y, c \rangle) + a_1, \\ \dot{y}_2 &= \quad \quad \quad + A_{22}y_2 \quad \quad \quad + a_2, \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde  $y_1, b_1, a_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $y_2, a_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $A_{ij}$  son matrices de órdenes convenientes.

Observamos que en este caso cambiamos el hiperplano de separación  $x_1 = 0$  por el hiperplano de ecuación  $\langle y, c \rangle = 0$ .

De (1.41) se deduce cierta relación entre los autovalores de  $A^+$  y  $A^-$ .

**Corolario 1.27** *Si el sistema (1.24) es no controlable, entonces las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten al menos un autovalor.*

**Demostración.** Si la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$  asociada al sistema (1.24) posee rango nulo, entonces  $b = 0$ , luego las matrices  $A^+$  y  $A^-$  coinciden y por tanto poseen el mismo conjunto de autovalores.

Si  $\text{rg}(\mathcal{C}) = p$ , con  $1 \leq p < n$ , de la Proposición 1.26, se deduce la existencia de un cambio lineal de variables que transforma (1.24) en el sistema (1.41) con  $a_1 = a_2 = 0$

El sistema homogéneo asociado a (1.41) puede escribirse en la forma

$$\dot{y} = \begin{cases} B_1 y & \text{si } \langle y, c \rangle \leq 0, \\ B_2 y & \text{si } \langle y, c \rangle > 0, \end{cases}$$

con  $B_1 = \left( \begin{array}{c|c} B_{11}^1 & B_{12}^1 \\ \hline \theta & B_{22} \end{array} \right)$ ,  $B_2 = \left( \begin{array}{c|c} B_{11}^2 & B_{12}^2 \\ \hline \theta & B_{22} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y siendo  $B_{22}$  una matriz real de orden  $n - p$ . De aquí, los  $n - p$  autovalores, posiblemente complejos, de la matriz  $B_{22}$  son autovalores comunes de las matrices  $B_1$  y  $B_2$

y de la semejanza entre las matrices  $B_1$  con  $A^-$  y  $B_2$  con  $A^+$ , se sigue que las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten al menos esos  $n - p$  autovalores. ■

El recíproco del Corolario 1.27 es cierto si se impone una condición adicional al sistema (1.24).

**Proposición 1.28** *Si el sistema (1.24) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten un autovalor, entonces el sistema (1.24) es no controlable.*

**Demostración.** Si el sistema (1.24) es observable, del Teorema 1.19, deducimos que tal sistema puede escribirse en la forma de Lienard

$$\dot{x} = M^\nabla x \quad (1.42)$$

donde  $M^\nabla$  viene dada por (1.34).

Como  $A^+$  y  $A^-$  comparten un autovalor  $\lambda \in \mathbb{C}$ , las matrices  $M^+$  y  $M^-$  también tienen a  $\lambda$  como autovalor común. Puede probarse con facilidad que  $w = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda, 1)^t$  es un autovector de las matrices  $(M^+)^t$  y  $(M^-)^t$  asociado al autovalor común  $\lambda$ .

Elijiendo entonces la matriz regular

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-1} & \theta \\ \hline w^t & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} I_{n-1} & & & & \theta \\ \hline \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad (1.43)$$

se deduce que

$$PM^\nabla P^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} M_1^\nabla & e_{n-1}^{n-1} \\ \hline \theta & \lambda \end{array} \right) = \hat{M}^\nabla,$$

donde  $e_{n-1}^{n-1}$  es el último vector de la base canónica de  $\mathbb{C}^{n-1}$  y

$$M_1^\nabla = \left( \begin{array}{cccc|c} \delta_1^\nabla & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2^\nabla & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-2}^\nabla & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \delta_{n-1}^\nabla - \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} & -\lambda^{n-3} & \dots & -\lambda \end{array} \right) \quad (1.44)$$

es una matriz compleja de orden  $n - 1$ .

Por consiguiente, si el sistema (1.42) se escribe en la forma de control

$$\dot{x} = M^- x + b\eta(\langle x, e_1 \rangle), \quad (1.45)$$

con  $b = (M^+ - M^-) e_1$ , la matriz  $P$  y el vector  $b$  satisfacen la relación

$$Pb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = d.$$

Si mediante  $\mathcal{C}$  denotamos la matriz de controlabilidad del sistema (1.45), entonces el rango de la matriz de controlabilidad del sistema (1.24) coincide con el rango de la matriz  $\mathcal{C}$ . Pero,

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{C}) &= \text{rg}(PC) = \\ &= \text{rg} \left( Pb \mid PM^-b \mid \cdots \mid P(M^-)^{n-1}b \right) = \\ &= \text{rg} \left( Pb \mid \hat{M}^-Pb \mid \cdots \mid (\hat{M}^-)^{n-1}Pb \right) = \\ &= \text{rg} \left( d \mid \hat{M}^-d \mid \cdots \mid (\hat{M}^-)^{n-1}d \right) \leq n - 1, \end{aligned}$$

ya que la  $n$ -ésima fila de la última matriz obtenida es nula. Luego la matriz de controlabilidad del sistema (1.24) no posee rango completo, de donde tal sistema es no controlable. ■

El siguiente resultado recoge la información dada en el Corolario 1.27 y en la Proposición 1.28.

**Teorema 1.29** *Supongamos que el sistema (1.24) es observable. Entonces, el sistema (1.24) es no controlable si y sólo si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten algún autovalor.*

Si un sistema es no controlable, entonces la Proposición 1.26 nos indica la posibilidad de aislar el comportamiento dinámico de algunas variables modificando el hiperplano de separación  $x_1 = 0$  en otro de la forma  $\langle x, c \rangle = 0$  para un cierto vector  $c$ . Si además el sistema es observable, sabemos que las matrices que rigen al sistema comparten un autovalor (Teorema 1.29). Aprovecharemos esta circunstancia para reducir el sistema a una forma más simple sin modificar el hiperplano de separación. Distinguiremos si el autovalor común es real o complejo.

### 1.3.5 Reducción cuando las matrices comparten un autovalor real

Supongamos que el sistema (1.24) es observable, entonces (Teorema 1.19) podemos transformar el sistema (1.5) en la forma de Lienard (1.33).

Siguiendo la demostración de la Proposición 1.28, si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten un autovalor real  $\lambda$ , entonces el cambio lineal de variables  $y = Px$ , con  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dada por (1.43), transforma (1.33) en

$$\dot{y} = \hat{M}^\nabla y + P\mathbf{a} = \left( \begin{array}{c|c} M_1^\nabla & e_{n-1}^{n-1} \\ \hline \theta & \lambda \end{array} \right) y + \mathbf{a}, \quad (1.46)$$

donde  $M_1^\nabla \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  está dada en (1.44).

Seguidamente estudiaremos el rango de la matriz de observabilidad del sistema homogéneo  $(n-1)$ -dimensional  $\dot{z} = M_1^\nabla z$ .

Si denotamos la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$  por  $\{e_1^{n-1}, e_2^{n-1}, \dots, e_{n-1}^{n-1}\}$ , puede probarse con facilidad que

$$\begin{aligned} e_1^t (\hat{M}^-)^k &= \left( (e_1^{n-1})^t \mid 0 \right) \left( \begin{array}{c|c} (M_1^-)^k & e_{n-k}^{n-1} \\ \hline \theta & \lambda^k \end{array} \right) = \\ &= \left( (e_1^{n-1})^t (M_1^-)^k \mid \langle e_1^{n-1}, e_{n-k}^{n-1} \rangle \right) \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Como el sistema de partida (1.24) es observable, el sistema homogéneo asociado a (1.46) también lo es (Proposición 1.17) y usando las relaciones (1.47)



obtenemos,

$$n = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{e_1^t}{e_1^t \hat{M}^-} \\ \vdots \\ \frac{e_1^t (\hat{M}^-)^{n-1}}{e_1^t (\hat{M}^-)^{n-1}} \end{pmatrix} = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} (e_1^{n-1})^t & 0 \\ (e_1^{n-1})^t M_1^- & 0 \\ \vdots & \vdots \\ (e_1^{n-1})^t (M_1^-)^{n-2} & 0 \\ \hline (e_1^{n-1})^t (M_1^-)^{n-1} & 1 \end{array} \right),$$

de donde la matriz de observabilidad del sistema  $\dot{z} = M_1^\nabla z$  posee rango  $n - 1$ , luego tal sistema es observable.

Por tanto, el Teorema 1.19 garantiza la existencia de una matriz regular  $P_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  que reduce el sistema  $\dot{z} = M_1^\nabla z$  a su forma de Lienard; es decir, existe una matriz  $P_1$  verificando

$$P_1 M_1^\nabla P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1^\nabla & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_2^\nabla & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \xi_{n-1}^\nabla & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{M}_1^\nabla \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

y  $e_1^{n-1} = (P_1^{-1})^t e_1^{n-1}$ .

Si ahora elegimos  $Q = \left( \frac{P_1}{\theta} \middle| \frac{\theta}{1} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , se tiene que

$$Q \hat{M}^\nabla Q^{-1} = \left( \frac{\tilde{M}_1^\nabla}{\theta} \middle| \frac{e_{n-1}^{n-1}}{\lambda} \right) \quad \text{y} \quad Q \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Así, el cambio de variables  $u = Qy$  transforma el sistema (1.46) en

$$\dot{u} = \left( \frac{\tilde{M}_1^\nabla}{\theta} \middle| \frac{e_{n-1}^{n-1}}{\lambda} \right) u + \mathbf{a}, \quad (1.48)$$

donde el subsistema homogéneo

$$\dot{z} = \tilde{M}_1^\nabla z \quad (1.49)$$

está escrito en forma Lienard.

Enunciamos en el siguiente resultado la conclusión obtenida con el razonamiento anterior.

**Teorema 1.30** *Si el sistema (1.5) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  poseen un autovalor común  $\lambda$  real, entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{M}_1^\nabla z + u_n e_{n-1}^{n-1}, \\ \dot{u}_n = \lambda u_n - a_n, \end{cases} \quad (1.50)$$

donde  $u_n \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-1}$  y el sistema  $(n-1)$ -dimensional  $\dot{z} = \tilde{M}_1^\nabla z$  está escrito en forma de Lienard.

Observemos que bajo las hipótesis del Teorema 1.30 hemos conseguido aislar la dinámica de  $u_n$  respecto de las restantes  $n-1$  variables.

Si  $\lambda = a_n = 0$ , entonces los hiperplanos de la forma  $u_n = K$ , con  $K$  constante, son superficies invariantes del sistema (1.50) y la restricción de tal sistema a cada uno de estos hiperplanos proporciona un sistema continuo lineal a trozos de dimensión  $n-1$ . Si  $\lambda = 0$  y  $a_n \neq 0$ , entonces el sistema (1.50) carece de órbitas periódicas, ya que  $u_n$  no puede tener comportamiento oscilatorio. Cuando  $\lambda \neq 0$ , el sistema (1.50) sólo puede tener órbitas periódicas cuando  $u_n = a_n/\lambda$ ; en este caso, la búsqueda de órbitas periódicas en el sistema (1.50) puede realizarse sobre el sistema  $(n-1)$ -dimensional escrito en forma de Lienard

$$\dot{z} = \tilde{M}_1^\nabla z + \frac{a_n}{\lambda} e_{n-1}^{n-1}. \quad (1.51)$$

### 1.3.6 Reducción cuando las matrices comparten un autovalor complejo

En condiciones de observabilidad podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el sistema (1.5) está escrito en la forma de Lienard (1.33).

Si las matrices reales  $A^+$  y  $A^-$  comparten el autovalor complejo  $\lambda = \alpha + i\beta$ , entonces  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  también es un autovalor común de ambas matrices y por

consiguiente  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$  son autovalores comunes de las matrices  $M^+$  y  $M^-$ . Además, no es restrictivo considerar  $\beta > 0$ .

Descomponiendo el autovector complejo  $w = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda, 1)^t$  de  $(M^+)^t$  y  $(M^-)^t$  asociado a  $\lambda$  en parte real e imaginaria  $w = p_2 + ip_1$ , con  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$(M^\nabla)^t \left( p_1 \mid p_2 \right) = \left( p_1 \mid p_2 \right) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si realizamos en (1.33) el cambio lineal de variables  $y = Px$ , con

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-2} & \theta \\ \hline p_1 & \\ p_2 & \end{array} \right),$$

dicho sistema adopta la forma

$$\dot{y} = \left( \begin{array}{c|cc} N_1^\nabla & e_{n-2}^{n-2} & \theta \\ \hline \theta & \alpha & -\beta \\ \theta & \beta & \alpha \end{array} \right) y + \mathbf{a}, \quad (1.52)$$

donde  $e_{n-2}^{n-2}$  es el último de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-2}$  y  $N_1^\nabla \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ .

Utilizando un razonamiento análogo al realizado para el caso real, se deduce que el subsistema  $(n-2)$ -dimensional  $\dot{z} = N_1^\nabla z$  es observable, por lo que existe una matriz regular  $P_2 \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$  de manera que

$$P_2 N_1^\nabla P_2^{-1} = \left( \begin{array}{cccc|c} \eta_1^\nabla & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2^\nabla & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{m-3} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \eta_{n-2}^\nabla & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) = \tilde{N}_1^\nabla.$$

De esta forma, el cambio de variable

$$u = \left( \begin{array}{c|cc} P_2 & & \theta \\ \hline \theta & 1 & 0 \\ & -\alpha & -\beta \end{array} \right) y$$

reduce el sistema (1.52) a la forma

$$\dot{u} = \left( \begin{array}{c|cc} \tilde{N}_1^\nabla & e_{n-2}^{n-2} & \theta \\ \hline \theta & 2\alpha & 1 \\ & -(\alpha^2 + \beta^2) & 0 \end{array} \right) u + \mathbf{a},$$

donde el sistema

$$\dot{z} = \tilde{N}_1^\nabla z \quad (1.53)$$

está escrito en forma de Lienard.

La anterior discusión nos permite enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 1.31** *Si el sistema (1.5) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten el par de autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{N}_1^\nabla z + u_{n-1} e_{n-2}^{n-2}, \\ \begin{pmatrix} \dot{u}_{n-1} \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ -(\alpha^2 + \beta^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_n \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (1.54)$$

donde  $(u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-2}$  y el subsistema  $(n-2)$ -dimensional  $\dot{z} = \tilde{N}_1^\nabla z$  está escrito en forma de Lienard.

Por último, indicamos que si el sistema (1.5) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  comparten más de un autovalor (real o complejo), entonces podemos aplicar los Teoremas 1.30 y 1.31 a los subsistemas (1.49) y (1.53) para poder reducir aún más las ecuaciones del sistema inicial.

## 1.4 Formas canónicas para sistemas bidimensionales y tridimensionales

En esta sección aplicaremos las formas canónicas estudiadas en las secciones anteriores a los sistemas continuos bi y tridimensionales lineales a trozos con

dos zonas. En particular, pondremos de manifiesto la sencillez de las formas canónicas en el supuesto de que el sistema tridimensional homogéno (1.24) sea observable y no controlable.

Si el sistema (1.5) es bidimensional, lo escribimos en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}^{\nabla}x + a_{12}y + a_1, \\ \dot{y} = a_{21}^{\nabla}x + a_{22}y + a_2, \end{cases} \quad (1.55)$$

y denotamos

$$t^{\nabla} = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11}^{\nabla} & a_{12} \\ a_{21}^{\nabla} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d^{\nabla} = \det \begin{pmatrix} a_{11}^{\nabla} & a_{12} \\ a_{21}^{\nabla} & a_{22} \end{pmatrix},$$

entonces el Teorema 1.19 nos permite escribir la forma canónica generalizada de Lienard para los sistemas planos lineales a trozos con dos zonas.

**Proposición 1.32** *Si el sistema (1.55) verifica  $a_{12} \neq 0$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.55) en la forma de Lienard*

$$\begin{cases} \dot{x} = t^{\nabla}x - y, \\ \dot{y} = d^{\nabla}x - a, \end{cases} \quad (1.56)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Según la Proposición 1.18, el sistema homogéno asociado a (1.55) es observable si y sólo si  $a_{12} \neq 0$ , luego en esta situación existe cambio lineal de variables (Teorema 1.19) que transforma el sistema (1.55) en

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta_1^{\nabla}x + y, \\ \dot{y} = \delta_2^{\nabla}x + a. \end{cases}$$

Como los polinomios característicos de las matrices que rigen al sistema no se modifican, tenemos que  $\delta_1^{\nabla} = t^{\nabla}$ ,  $\delta_2^{\nabla} = -d^{\nabla}$  y realizando el cambio adicional  $y \rightarrow -y$  obtenemos (1.56). ■

**Nota 1.33** Es fácil comprobar que el sistema (1.56) es invariante bajo las siguientes transformaciones:

$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow x$
$y \rightarrow -y$	$y \rightarrow -y$	$y \rightarrow -y$
$t \rightarrow t$	$t \rightarrow -t$	$t \rightarrow -t$
$t^+ \rightarrow t^-$	$t^+ \rightarrow -t^-$	$t^+ \rightarrow -t^+$
$t^- \rightarrow t^+$	$t^- \rightarrow -t^+$	$t^+ \rightarrow -t^+$
$d^+ \rightarrow d^-$	$d^+ \rightarrow -d^+$	$d^+ \rightarrow d^+$
$d^- \rightarrow d^+$	$d^- \rightarrow -d^+$	$d^- \rightarrow d^-$
$a \rightarrow -a$	$a \rightarrow a$	$a \rightarrow a$

Estas transformaciones permiten restringir el espacio de parámetros en el estudio del comportamiento del sistema (1.56). En concreto, la transformación  $\Pi_1$  nos indica que sólo es necesario estudiar el sistema en cuestión para los valores de  $a$  mayores o iguales que cero.

Si la trazas de las matrices que definen a un sistema del tipo  $2CPL_2$  son distintas, el Teorema 1.6 nos conduce a la forma generalizada de Van der Pol para los sistemas bidimensionales (ver [22] y [47]).

**Proposición 1.34** *Si el sistema (1.55) verifica  $a_{12} \neq 0$  y  $a_{11}^+ \neq a_{11}^-$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.55) en la forma de Van der Pol*

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^\nabla x - y, \\ \dot{y} = b_{21}x + b_{22}y + b_2. \end{cases} \quad (1.57)$$

Cuando las trazas de las matrices que definen a (1.55) coinciden, el Teorema 1.10 nos conduce de manera inmediata a la forma generalizada de Duffing para los sistemas bidimensionales.

**Proposición 1.35** *Si el sistema (1.55) verifica  $a_{12} \neq 0$  y  $t^+ = t^- = T$ , entonces existe un cambio lineal variables que transforma (1.55) en la forma de Duffing*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = d^\nabla x + Ty + f_2. \end{cases} \quad (1.58)$$

Vistas las formas canónicas de los sistemas  $2CPL_2$  pasamos a describir las formas canónicas de los sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas. Escribiremos los sistemas  $2CPL_3$  en la forma general

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & A_{12} \\ \hline A_{21}^\nabla & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

con  $a_{11}^\nabla \in \mathbb{R}$ ,  $A_{12} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$ ,  $A_{21}^\nabla \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ ,  $A_{22} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $(a_1, a_2, a_3)^t$  un vector de  $\mathbb{R}^3$ .

En el siguiente resultado obtenemos la forma canónica generalizada de Lienard del sistema tridimensional (1.59), cuando su sistema homogéneo asociado es observable.

**Proposición 1.36** *Si en el sistema (1.59), el conjunto de vectores bidimensionales  $\{A_{12}, A_{12}A_{22}\}$  es linealmente independiente, entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.59) en la forma generalizada de Lienard*

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = m^\nabla x - z, \\ \dot{z} = d^\nabla x - a, \end{cases} \quad (1.60)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  y el polinomio característico de  $A^\nabla = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & A_{12} \\ \hline A_{21}^\nabla & A_{22} \end{array} \right)$  viene dado por

$$p_{A^\nabla}(\lambda) = -\lambda^3 + t^\nabla \lambda^2 - m^\nabla \lambda + d^\nabla. \quad (1.61)$$

**Demostración.** De acuerdo con la Proposición 1.18, el sistema tridimensional homogéneo asociado a (1.59)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\nabla} & A_{12} \\ A_{21}^{\nabla} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

es observable si y sólo si el conjunto  $\{A_{12}, A_{12}A_{22}\}$  es linealmente independiente. En este caso, el Teorema 1.19 nos indica que (1.59) se transforma, mediante un adecuado cambio lineal de variables, en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta_1^{\nabla} x + y, \\ \dot{y} = \delta_2^{\nabla} x + z, \\ \dot{z} = \delta_3^{\nabla} x - a. \end{cases} \quad (1.63)$$

Teniendo en cuenta que los polinomios característicos de las matrices que rigen al sistema no se modifican, la realización del cambio  $y \rightarrow -y$  en el sistema (1.63) nos permite escribirlo en la forma (1.60). ■

**Nota 1.37** Es inmediato comprobar que el sistema (1.60) es invariante bajo los cambios:

$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow x$
$y \rightarrow y$	$y \rightarrow -y$	$y \rightarrow -y$
$z \rightarrow -z$	$z \rightarrow -z$	$z \rightarrow -z$
$t \rightarrow t$	$t \rightarrow t$	$t \rightarrow t$
$t^+ \rightarrow -t^-$	$t^+ \rightarrow -t^+$	$t^+ \rightarrow t^-$
$t^- \rightarrow -t^+$	$t^- \rightarrow -t^-$	$t^- \rightarrow t^+$
$m^+ \rightarrow m^-$	$m^+ \rightarrow m^+$	$m^+ \rightarrow m^-$
$m^- \rightarrow m^+$	$m^- \rightarrow m^-$	$m^- \rightarrow m^+$
$d^+ \rightarrow d^-$	$d^+ \rightarrow -d^+$	$d^+ \rightarrow d^+$
$d^- \rightarrow -d^+$	$d^- \rightarrow -d^-$	$d^- \rightarrow d^+$
$a \rightarrow -a$	$a \rightarrow -a$	$a \rightarrow -a$



Compárense estas transformaciones con las transformaciones invariantes para un sistema bidimensional lineal a trozos en forma de Lienard (véase la Nota 1.33).

Cuando  $A_{12} \neq 0$  y las trazas de las matrices que definen al sistema (1.59) son distintas, el Teorema 1.6 nos proporciona la forma canónica generalizada de Van der Pol para los sistemas tridimensionales.

**Proposición 1.38** *Si el sistema (1.59) verifica  $A_{12} \neq 0$  y  $a_{11}^+ \neq a_{11}^-$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.59) en la forma de Van der Pol generalizada*

$$\begin{cases} \dot{x} = c_{11}^{\nabla} x - y, \\ \dot{y} = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + d_2, \\ \dot{z} = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + d_3, \end{cases} \quad (1.64)$$

donde el vector  $(c_{21}, c_{31})$  es nulo o múltiplo de un vector canónico de  $\mathbb{R}^2$ .

La forma generalizada de Duffing para el sistema (1.59) se obtiene cuando  $A_{12} \neq 0$  y coinciden las trazas de las matrices que definen al sistema.

**Proposición 1.39** *Si el sistema (1.59) verifica  $A_{12} \neq 0$  y  $a_{11}^+ = a_{11}^-$ , entonces existe un cambio lineal de variables que transforma (1.59) en la forma de Duffing generalizada*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = d_{21}^{\nabla} x + d_{22}y + d_{23}z + f_2, \\ \dot{z} = d_{31}x + d_{32}y + d_{33}z + f_3. \end{cases} \quad (1.65)$$

Si el sistema homogéneo (1.62) es no observable, entonces de la Proposición 1.18 deducimos la dependencia lineal de los vectores  $A_{12}$  y  $A_{12}A_{22}$  y dos casos posibles surgen:

(a) Si  $A_{12} = \theta$ , entonces el sistema tiene de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}^{\nabla}x + a_1, \\ \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_{22} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + A_{12}^{\nabla}x + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (1.66)$$

la dinámica de la variable  $x$  no depende de las otras dos y el problema lineal a trozos es de menor dimensión.

(b) Si  $A_{12} \neq \theta$ , entonces existe un cambio lineal de variables (Teorema 1.6) que transforma (1.59) en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^{\nabla}x - y, \\ \dot{y} = b_{21}^{\nabla}x + b_{22}y + b_{23}z + b_2, \\ \dot{z} = b_{31}^{\nabla}x + b_{32}y + b_{33}z + b_3, \end{cases} \quad (1.67)$$

cuyo sistema homogéneo continua siendo no observable (Proposición 1.17), luego haciendo uso de la Proposición 1.18 se deduce que  $b_{23} = 0$ . Este razonamiento y su conclusión final se enuncian en la siguiente proposición.

**Proposición 1.40** *Si el sistema (1.59) es no observable y  $A_{12} \neq \theta$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^{\nabla}x - y, \\ \dot{y} = b_{21}^{\nabla}x + b_{22}y + b_2, \\ \dot{z} = b_{31}^{\nabla}x + b_{32}y + b_{33}z + b_3. \end{cases} \quad (1.68)$$

Nótese que en las dos primeras ecuaciones del sistema (1.68) no interviene la variable  $z$ , por lo que el problema lineal a trozos es bidimensional, es decir, las soluciones del sistema plano lineal a trozos

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^{\nabla}x - y, \\ \dot{y} = b_{21}^{\nabla}x + b_{22}y + b_2, \end{cases} \quad (1.69)$$

permiten conocer la variable  $z$  a partir de la solución de la ecuación lineal unidimensional no autónoma

$$\dot{z} = b_{31}^{\nabla} x + b_{32} y + b_{33} z + b_3.$$

A continuación estudiamos la reducción del sistema (1.59) cuando su sistema homogéneo asociado es observable y no controlable. El Teorema 1.29 nos indica que en este caso las matrices reales de orden tres

$$A^+ = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^+ & A_{12} \\ \hline A_{21}^+ & A_{22} \end{array} \right), \quad A^- = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^- & A_{12} \\ \hline A_{21}^- & A_{22} \end{array} \right) \quad (1.70)$$

deben compartir algún autovalor.

Estas matrices pueden compartir autovalores reales o complejos. Los siguientes resultados recogen por separado ambas posibilidades y no son más que una aplicación directa de los Teoremas 1.30 y 1.31.

**Proposición 1.41** *Si el sistema (1.59) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  definidas en (1.70) comparten un autovalor real  $\lambda$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma en*

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^{\nabla} - \lambda)x - y, \\ \dot{y} = (m^{\nabla} + \lambda^2 - \lambda t^{\nabla})x - z, \\ \dot{z} = \lambda z - a. \end{cases} \quad (1.71)$$

**Proposición 1.42** *Si el sistema (1.59) es observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  dadas en (1.70) comparten el par de autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ , entonces existe un cambio lineal de variables que lo transforma el sistema en*

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^{\nabla} - 2\alpha)x - y, \\ \dot{y} = 2\alpha y - z, \\ \dot{z} = (\alpha^2 + \beta^2)y - a. \end{cases} \quad (1.72)$$

Ciertas similitudes y diferencias pueden observarse entre los sistemas (1.66) y (1.71). En primer lugar, vemos que ambos sistemas contienen una variable que evoluciona independientemente de las otras. Sin embargo, para el sistema (1.66) su primera ecuación es lineal a trozos, mientras que la tercera ecuación de (1.71) es lineal. Además, introduciendo la solución de la primera ecuación de (1.66) en sus dos últimas ecuaciones obtenemos un sistema lineal y la introducción de solución de  $\dot{z} = \lambda z - a$  en las dos primeras ecuaciones de (1.71) nos conduce a un sistema lineal a trozos.

Un comentario análogo puede realizarse sobre los sistemas (1.68) y (1.72). Ambos sistemas contienen a un sistema plano que evoluciona de forma independiente. Para el primero, el sistema bidimensional es lineal a trozos y en el segundo, sus dos últimas ecuaciones, conforman un sistema lineal. Además, la solución del sistema lineal a trozos bidimensional (1.69) introducida en la tercera ecuación de (1.68) nos lleva a una ecuación unidimensional lineal. Por otro lado, la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{y} = 2\alpha y - z, \\ \dot{z} = (\alpha^2 + \beta^2)y - a. \end{cases}$$

llevada a la primera ecuación de (1.72) nos conduce a una ecuación unidimensional lineal a trozos.

En el caso tridimensional es posible obtener explícitamente los cambios lineales de variable que reducen el sistema escrito en forma generalizada de Lienard (1.60) a las formas (1.71) y (1.72), cuando las matrices del sistema comparten autovalores. Si las matrices que rigen a (1.60) comparten el autovalor real  $\lambda$ , es inmediato probar que el cambio de variables

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \lambda x + y, \quad z \rightarrow \lambda y + z$$

reduce el sistema (1.60) a la forma indicada en (1.71)

Análogamente, si las matrices del sistema (1.60) comparten el par de autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ , el cambio lineal de variable

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow 2\alpha x + y, \quad z \rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)x + z$$

transforma el sistema (1.60) a la forma (1.72).

**Nota 1.43** Observemos que si en el sistema (1.71)  $\lambda \neq 0$ , entonces el plano de ecuación  $z = a/\lambda$  es una variedad invariante para dicho sistema. Más aún, si (1.71) posee órbitas periódicas, entonces o bien  $\lambda \neq 0$  o bien  $\lambda = a = 0$ , en cuyo caso las órbitas periódicas del sistema (1.71) se obtienen a partir de las soluciones periódicas del sistema bidimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^\nabla - \lambda)x - y \\ \dot{y} = (m^\nabla + \lambda^2 - \lambda t^\nabla)x - b \end{cases} \quad (1.73)$$

con  $b \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, en el sistema (1.72) las variables  $y$  y  $z$  evolucionan independientemente. Si (1.72) posee una órbita periódica, entonces  $\alpha = 0$  y en este caso es inmediato comprobar que el sistema (1.72) posee un continuo de cilindros invariantes de ecuaciones

$$\left(y - \frac{a}{\beta^2}\right)^2 + \frac{z^2}{\beta^2} = r^2, \quad \text{para } r \geq 0.$$

Las formas canónicas relacionadas en este capítulo se utilizarán en los posteriores para analizar la dinámica de los sistemas  $2\text{CPL}_n$ .

La forma canónica de Lienard bidimensional constituirá la base de las aplicaciones que desarrollarán en el tercer capítulo para la detección y estabilidad de órbitas periódicas y homoclinas en sistemas  $2\text{CPL}_2$ .

La forma canónica de Lienard para sistemas tridimensionales constituirá el punto de partida del estudio, que se realizará en el Capítulo 4, sobre ciertas variedades invariantes en los sistemas  $2\text{CPL}_3$  homogéneos.

Por último, dedicamos la totalidad del Capítulo 5 al análisis de la dinámica de los sistemas  $2\text{CPL}_3$  que no poseen las propiedades de controlabilidad u observabilidad. El apoyo fundamental de este estudio lo encontramos en las formas canónicas (1.68), (1.71) y (1.72).

## Capítulo 2

# Aplicación y Semiaplicaciones de Poincaré para sistemas continuos y continuamente diferenciables a trozos

### 2.1 Introducción. Resultados preliminares

Uno de los principales problemas que aborda el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos es el análisis de la existencia de soluciones periódicas de un sistema y la determinación de su estabilidad, así como, las posibles bifurcaciones que pueden experimentar.

Para los sistemas dinámicos, donde el campo vectorial que lo define es continuamente diferenciable, la *aplicación de Poincaré* juega un papel fundamental en el estudio de las propiedades de las soluciones periódicas. De hecho, los puntos fijos de la aplicación de Poincaré establecen la existencia de soluciones periódicas y los autovalores de la matriz jacobiana de esta aplicación nos dan información sobre la estabilidad de las órbitas periódicas y sus posibles bifurcaciones.

Con la idea de introducir la aplicación de Poincaré para los sistemas continuos lineales a trozos con dos zonas, recordaremos a continuación algunas cuestiones referentes a ecuaciones variacionales a lo largo de una curva integral de un campo vectorial  $n$ -dimensional continuamente diferenciable. Las ideas principales de lo expuesto en esta sección pueden encontrarse en los textos [19] y [44].

Consideremos un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable, es decir,  $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , y denotemos por  $\phi_t(X) = \phi(t, X)$  el flujo de la ecuación diferencial

$$\dot{X} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Si  $\gamma(t)$  es una solución de (2.1), llamaremos ecuación variacional de (2.1) a lo largo de  $\gamma(t)$  al sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{X} = DF(\gamma(t))X, \quad (2.2)$$

donde  $DF(\gamma(t))$  es la matriz jacobiana de  $F$  evaluada en  $\gamma(t)$ .

Por otra parte, es sabido que una matriz fundamental de (2.2) es una matriz  $\Phi(t)$  regular de orden  $n$  que satisface

$$\dot{\Phi}(t) = DF(\gamma(t))\Phi(t). \quad (2.3)$$

Nótese que la bien conocida fórmula de Liouville

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(\tau)) \exp \left( \int_{\tau}^t \operatorname{div} F(\gamma(s)) ds \right),$$

donde

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_i} = \operatorname{tr}(DF)$$

denota la divergencia del campo vectorial  $F$ , nos garantiza que la matriz  $\Phi(t)$  es regular para todo  $t$  si y sólo si es regular en algún punto  $\tau$ .

Además, recuérdese que si  $\Psi(t)$  es otra matriz fundamental de (2.2), entonces se verifica la relación

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Psi(0). \quad (2.4)$$

Finalmente, con ayuda de la matriz fundamental  $\Phi(t)$ , la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X} = DF(\gamma(t))X \\ X(0) = X_0, \quad X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

viene dada por

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)X_0. \quad (2.5)$$

Consideremos la matriz  $H(t, X) = D_X\phi_t(X)$ , donde  $D_X$  indica la diferencial respecto de la variable  $X$ . Puesto que  $\phi_t(X)$  es solución de la ecuación (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(t, X) &= \frac{\partial(D_X\phi_t(X))}{\partial t} = D_X\left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t(X))\right) = \\ &= D_X(F(\phi_t(X))) = DF(\phi_t(X))D_X\phi_t(X), \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, X) = DF(\phi_t(X))H(t, X),$$

es decir,  $H(t, X)$  es una matriz fundamental de la ecuación variacional (2.2), que además verifica la condición  $H(0, X) = D_X\phi_0(X) = I_n$ .

La órbita  $\gamma(t)$  de (2.1) que satisface la condición inicial  $\gamma(0) = X_0$  puede expresarse como  $\gamma(t) = \phi_t(X_0)$ . Ahora bien, puesto que se verifica la relación  $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ , si derivamos de nuevo obtenemos

$$\ddot{\gamma}(t) = DF(\gamma(t))\dot{\gamma}(t),$$

resultando que  $\dot{\gamma}(t)$  es la solución de la ecuación variacional (2.2) que satisface la condición inicial  $\dot{\gamma}(0) = F(\gamma(0)) = F(X_0)$ . Por consiguiente, haciendo uso de (2.5), se obtiene que

$$\dot{\gamma}(t) = H(t, X_0)H^{-1}(0, X_0)F(X_0) = H(t, X_0)F(X_0),$$

es decir,

$$F(\phi_t(X_0)) = D_X\phi_t(X_0)F(X_0). \quad (2.6)$$



## 2.2 Aplicaciones de Transición y su Diferencial

Es bien conocido que si  $\gamma(t)$  es una órbita periódica de un sistema de clase  $C^1$  que cruza transversalmente en  $X_0$  a cierta variedad, entonces aplicando el Teorema de la Función Implícita, resulta que para puntos  $X$  en la citada variedad y próximos a  $X_0$  la solución del sistema que pasa por  $X$  para  $t = 0$  corta a la variedad en un punto  $P(X)$  cercano a  $X_0$ . La aplicación  $X \rightarrow P(X)$  se denomina aplicación de Poincaré.

En este apartado extendaremos esta idea y consideraremos que la órbita que pasa por el punto  $p_0$  de la variedad  $\Sigma$  cruza transversalmente a otra variedad  $\hat{\Sigma}$  en un punto  $\hat{p}_0$ . En este caso, para puntos  $X$  de  $\Sigma$  próximos a  $p_0$ , la solución que comienza en  $X$  cortará a  $\hat{\Sigma}$  en un punto  $\xi(X)$  cercano a  $\hat{p}_0$ . Esta aplicación  $\xi$  se denomina aplicación de transición entre las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$ . En lo que sigue estudiaremos la citada aplicación, centrando nuestra atención en algunas propiedades de su diferencial.

Sean  $E$  y  $\hat{E}$  dos abiertos de  $\mathbb{R}^{n-1}$  y sean

$$\sigma : E \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} : \hat{E} \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^n$$

dos difeomorfismos de forma que

$$\Sigma = \{\sigma(s) \in \mathbb{R}^n : s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in E\}$$

y

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}(\hat{s}) \in \mathbb{R}^n : \hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_{n-1}) \in \hat{E}\}.$$

son dos variedades de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  de dimensiones  $n-1$  y donde se satisfacen las relaciones

$$\text{rg}(D_s \sigma(s)) = \text{rg}(D_{\hat{s}} \hat{\sigma}(\hat{s})) = n - 1 \quad \text{para todo } s \in E, \hat{s} \in \hat{E}.$$

Sea  $p_0 = \sigma(s_0)$  un punto de la variedad  $\Sigma$  y supongamos que la órbita  $\gamma(t) = \phi_t(p_0)$  cruza transversalmente en el punto  $\hat{p}_0 = \hat{\sigma}(\hat{s}_0)$  a la variedad  $\hat{\Sigma}$  (véase la Figura 2.1).

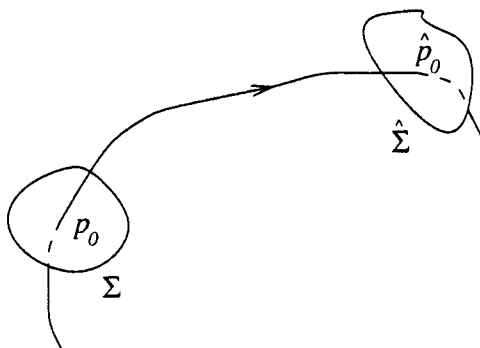


Figura 2.1: El flujo cruzando transversalmente las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$ .

Así, podemos asegurar que existe un valor  $T_0 \neq 0$  de forma que

$$\phi_{T_0}(p_0) = \hat{p}_0 = \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \in \hat{\Sigma}. \quad (2.7)$$

Si denotamos los vectores que generan los hiperplanos tangentes a las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$  mediante

$$Z_i = \frac{\partial \sigma}{\partial s_i} \quad \text{y} \quad \hat{Z}_i = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{s}_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

respectivamente, deducimos que la órbita  $\gamma(t)$  será transversal a la variedad  $\hat{\Sigma}$  en  $\hat{p}_0 = \hat{\sigma}(\hat{s}_0)$  cuando el conjunto

$$\left\{ \hat{Z}_1(\hat{s}_0), \hat{Z}_2(\hat{s}_0), \dots, \hat{Z}_{n-1}(\hat{s}_0), F(\hat{p}_0) \right\}$$

forme una base de  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto, es regular la matriz real de orden  $n$

$$\begin{aligned} \hat{B}_0 &= \left( F(\hat{p}_0) \mid -D_{\hat{s}} \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \right) = \\ &= \left( F(\hat{p}_0) \mid -\hat{Z}_1(\hat{s}_0) \mid -\hat{Z}_2(\hat{s}_0) \mid \cdots \mid -\hat{Z}_{n-1}(\hat{s}_0) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Del mismo modo, si  $\gamma(t)$  es transversal a  $\Sigma$  en  $p_0 = \sigma(s_0)$ , tenemos que también es regular la matriz

$$\begin{aligned} B_0 &= \left( F(p_0) \mid -D_s \sigma(s_0) \right) = \\ &= \left( F(p_0) \mid -Z_1(s_0) \mid -Z_2(s_0) \mid \cdots \mid -Z_{n-1}(s_0) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

La condición de transversalidad del flujo sobre  $\hat{\Sigma}$  en el punto  $\hat{p}_0$ , junto con la igualdad (2.7) y una aplicación directa del Teorema de la Función Implícita nos permitirá definir la aplicación de transición.

**Proposición 2.1** *Si  $\phi$  denota el flujo del sistema (2.1) y  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$ , con  $p_0 = \sigma(s_0) \in \Sigma$ , es una órbita que cruza transversalmente a  $\hat{\Sigma}$  en el punto  $\hat{p}_0 = \phi(T_0, p_0) = \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \in \hat{\Sigma}$ , entonces existen un entorno  $U(p_0)$  del punto  $p_0$  y dos funciones diferenciables*

$$\tilde{\rho} : U(p_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \tilde{S} : U(p_0) \longrightarrow \hat{E}$$

de forma que  $\tilde{\rho}(p_0) = T_0$ ,  $\tilde{S}(p_0) = \hat{s}_0$  y

$$\phi(\tilde{\rho}(X), X) = \hat{\sigma}(\tilde{S}(X)) \quad \text{para todo } X \in U(p_0). \quad (2.10)$$

**Demostración.** Consideremos la función

$$G(X, t, \hat{s}) = \phi(t, X) - \hat{\sigma}(\hat{s}).$$

Entonces,  $G$  es diferenciable, ya que el campo vectorial  $F$  lo es (ver [19]), y satisface

$$G(p_0, T_0, \hat{s}_0) = \phi(T_0, p_0) - \hat{\sigma}(\hat{s}_0) = \hat{p}_0 - \hat{p}_0 = 0.$$

Por otra parte, se cumple que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(p_0, T_0, \hat{s}_0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(T_0, p_0) = F(\phi(T_0, p_0)) = F(\hat{p}_0) \neq 0$$

y

$$D_{\hat{s}}G(p_0, T_0, \hat{s}_0) = -D_{\hat{s}}\hat{\sigma}(\hat{s}_0),$$

resultando que la matriz  $D_{(t, \hat{s})}G(p_0, T_0, \hat{s}_0) = \hat{B}_0$  (ver (2.8)) es regular.

Por consiguiente, del Teorema de la Función Implícita, se deduce la existencia de un entorno  $U(p_0)$  del punto  $p_0$  y dos funciones diferenciables

$$\tilde{\rho} : U(p_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \tilde{S} : U(p_0) \longrightarrow \hat{E},$$

tales que  $\bar{\rho}(p_0) = T_0$ ,  $\tilde{S}(p_0) = \hat{s}_0$  y

$$G(X, \bar{\rho}(X), \tilde{S}(X)) = 0 \quad \text{para todo } X \in U(p_0).$$

Luego,

$$\phi(\bar{\rho}(X), X) = \hat{\sigma}(\tilde{S}(X)) \quad \text{para todo } X \in U(p_0).$$

■

De la relación (2.10) se sigue que el flujo de la ecuación (2.1) transforma los puntos de un entorno del punto  $p_0$  en puntos pertenecientes a la variedad  $\hat{\Sigma}$ , lo que permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} : U(p_0) &\longrightarrow \hat{\Sigma} \\ X &\longmapsto \tilde{\xi}(X) = \phi(\bar{\rho}(X), X), \end{aligned}$$

que puede expresarse como

$$\tilde{\xi} = \hat{\sigma} \circ \tilde{S}. \quad (2.11)$$

A partir de las funciones  $\tilde{\xi}$  y  $\bar{\rho}$  se definirá una aplicación  $\xi$  entre las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$  y una función real  $\rho$  definida en puntos de  $\Sigma$  próximos a  $p_0$ .

**Definición 2.2** *En las condiciones de la Proposición 2.1, definimos la aplicación de transición  $\xi$  del sistema (2.1) entre las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$  como la restricción de  $\tilde{\xi}$  a la intersección  $\Sigma \cap U(p_0)$ , es decir,*

$$\xi : \Sigma \cap U(p_0) \longrightarrow \hat{\Sigma}, \quad \text{donde } \xi(X) = \tilde{\xi}(X).$$

*Denominaremos aplicación tiempo de vuelo  $\rho$  del sistema (2.1) entre las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$  a la restricción de  $\bar{\rho}$  a  $\Sigma \cap U(p_0)$ , es decir,*

$$\rho : \Sigma \cap U(p_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{donde } \rho(X) = \bar{\rho}(X).$$

Nuestra intención se centra en la obtención de determinadas propiedades de la diferencial de la aplicación de transición  $\xi$ . Para ello, utilizaremos las coordenadas locales  $s$  de  $\Sigma$  para representar el dominio de la aplicación  $\xi$  y las coordenadas locales  $\hat{s}$  de  $\hat{\Sigma}$  para representar el rango de la aplicación de transición.

Con las funciones introducidas anteriormente, podemos establecer el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U(p_0) \cap \Sigma & \xrightarrow{\tilde{\xi}} & \hat{\Sigma} \\ \uparrow \sigma & & \uparrow \hat{\sigma} \\ U(s_0) \subset E & \xrightarrow{h} & U(\hat{s}_0) \subset \hat{E} \end{array}$$

donde la aplicación  $h$  está definida en un entorno  $U(s_0)$  del punto  $s_0$  por  $h = \hat{\sigma}^{-1} \circ \tilde{\xi} \circ \sigma$  y su rango es un entorno  $U(\hat{s}_0)$  del punto  $\hat{s}_0$ .

Notemos que del Teorema de la Función Implícita deducimos que las funciones  $\tilde{\xi}, \xi, \tilde{\rho}, \rho$  y  $h$  son de clase  $C^1$  en sus respectivos dominios de definición.

Por otro lado, utilizando (2.11) podemos escribir  $h = \tilde{S} \circ \sigma$  y así,

$$D_s h = D_X \tilde{S} \cdot D_s \sigma. \quad (2.12)$$

De forma análoga, podemos definir la aplicación  $\tau = \tilde{\rho} \circ \sigma$ , de clase  $C^1(U(s_0))$ , y obtenemos

$$\nabla \tau = \nabla \tilde{\rho} \cdot D_s \sigma, \quad (2.13)$$

donde  $\nabla$  es el operador gradiente.

Utilizando las coordenadas locales  $s$  y  $\hat{s}$  para el dominio y el recorrido de la aplicación  $h$  podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 2.3** *En las condiciones de la Proposición 2.1, si denotamos por  $Q$  a la matriz*

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \nabla \tau(s_0) \\ \hline \theta & D_s h(s_0) \end{array} \right) \quad (2.14)$$

entonces, se satisface la relación

$$\hat{B}_0 Q = D_X \phi(T_0, p_0) B_0, \quad (2.15)$$

donde  $\hat{B}_0$  y  $B_0$  están definidas en (2.8) y (2.9), respectivamente.

**Demostración.** Diferenciando (2.10) con respecto a  $X$  y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tilde{\rho}(X), X) = F(\phi(\tilde{\rho}(X), X))$ , resulta

$$F(\phi(\tilde{\rho}(X), X)) \cdot \nabla \tilde{\rho}(X) + D_X \phi(\tilde{\rho}(X), X) = D_{\tilde{s}} \hat{\sigma}(\tilde{S}(X)) \cdot D_X \tilde{S}(X).$$

Evaluando la igualdad anterior en  $X = p_0$ , se obtiene

$$F(\hat{p}_0) \cdot \nabla \tilde{\rho}(p_0) + D_X \phi(T_0, p_0) = D_{\tilde{s}} \hat{\sigma}(\tilde{S}(p_0)) \cdot D_X \tilde{S}(p_0), \quad (2.16)$$

donde se ha hecho uso de las identidades  $\tilde{\rho}(p_0) = T_0$  y  $\phi(T_0, p_0) = \hat{p}_0$ .

Multiplicando a la derecha ambos miembros de la igualdad (2.16) por la matriz jacobiana  $D_s \sigma(s_0)$  obtenemos

$$\begin{aligned} F(\hat{p}_0) \cdot \nabla \tilde{\rho}(p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) + D_X \phi(T_0, p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) &= \\ &= D_{\tilde{s}} \hat{\sigma}(\tilde{S}(p_0)) \cdot D_X \tilde{S}(p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) \end{aligned}$$

y utilizando las relaciones (2.12) y (2.13) se establece que

$$F(\hat{p}_0) \cdot \nabla \tau(s_0) + D_X \phi(T_0, p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) = D_{\hat{s}} \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \cdot D_s h(s_0).$$

Si ahora tomamos  $Q = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \nabla \tau(s_0) \\ \theta & D_s h(s_0) \end{array} \right)$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{B}_0 Q &= \left( F(\hat{p}_0) \mid -D_{\hat{s}} \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & \nabla \tau(s_0) \\ \theta & D_s h(s_0) \end{array} \right) = \\ &= \left( F(\hat{p}_0) \mid F(\hat{p}_0) \cdot \nabla \tau(s_0) - D_{\hat{s}} \hat{\sigma}(\hat{s}_0) \cdot D_s h(s_0) \right) = \\ &= \left( F(\hat{p}_0) \mid -D_X \phi(T_0, p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, de la igualdad (2.6) deducimos

$$F(\hat{p}_0) = D_X \phi(T_0, p_0) F(p_0),$$

y finalmente obtenemos la relación buscada,

$$\begin{aligned} \hat{B}_0 Q &= \left( D_X \phi(T_0, p_0) F(p_0) \mid -D_X \phi(T_0, p_0) \cdot D_s \sigma(s_0) \right) = \\ &= D_X \phi(T_0, p_0) \left( F(\hat{p}_0) \mid -D_s \sigma(s_0) \right) = D_X \phi(T_0, p_0) B_0. \end{aligned}$$

■

Teniendo en cuenta la transversalidad del flujo sobre la variedad  $\hat{\Sigma}$  en el punto  $\hat{p}_0$  sabemos que la matriz  $\hat{B}_0$  es regular y, en consecuencia, la identidad (2.15) puede ser escrita en la forma

$$Q = \hat{B}_0^{-1} D_X \phi(T_0, p_0) B_0. \quad (2.17)$$

Cuando el campo vectorial  $F$  que define la ecuación diferencial (2.1) es lineal, la relación (2.15) admite una forma más explícita.

**Corolario 2.4** *En las condiciones de la Proposición 2.1, si el campo vectorial  $F$  es de la forma  $F(X) = AX + b$ , con  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces se verifica la relación*

$$\hat{B}_0 Q = \exp(AT_0) B_0 \quad (2.18)$$

**Demostración.** En este caso, el flujo de (2.1) viene dado por

$$\phi(t, X) = \exp(At)X + \exp(At) \int_0^t \exp(-As)b \, ds,$$

luego  $D_X \phi(T_0, p_0) = \exp(AT_0)$  y (2.18) sigue directamente. ■

Obsérvese que la relación (2.15) involucra la diferencial de la aplicación  $h$ , pero no proporciona de manera explícita dicha diferencial. En la siguiente sección obtendremos a partir de (2.15) la derivada de  $h$  cuando el sistema (2.1) es plano.

### 2.2.1 Derivada de la aplicación de transición para sistemas planos

Si el campo vectorial  $F$  que define a la ecuación diferencial (2.1) es plano, entonces las variedades  $\Sigma$  y  $\hat{\Sigma}$  se convierten en curvas planas, las aplicaciones  $\sigma$  y  $\hat{\sigma}$  están definidas en ciertos entornos de  $\mathbb{R}$  y la diferencial  $D_s h$  es de hecho una derivada unidimensional  $h'(s)$ . Así, tomando los vectores planos  $Z = \sigma'(s)$  y  $\hat{Z} = \hat{\sigma}'(\hat{s})$ , la Proposición 2.3 nos permite obtener la derivada de  $h$ , expresión que coincide con la obtenida por C. Chicone y M. Jacobs en [14] y C. Chicone en [15] utilizando la matriz fundamental de Diliberto de la ecuación variacional bidimensional  $\dot{X} = DF(\phi(t, p_0))X$ .

**Proposición 2.5** *En las condiciones de la Proposición 2.1, si el campo vectorial  $F$  es plano, entonces la derivada de la aplicación de transición  $h$  viene dada por*

$$h'(s_0) = \frac{\det \left( F(p_0) \mid Z(s_0) \right)}{\det \left( F(\hat{p}_0) \mid \hat{Z}(\hat{s}_0) \right)} \exp \left( \int_0^{T_0} \operatorname{div} F(\phi(t, p_0)) dt \right). \quad (2.19)$$

**Demostración.** Si  $F$  es un campo vectorial plano, entonces las matrices  $\hat{B}_0$  y  $B_0$  definidas por (2.8) y (2.9) respectivamente, adoptan la forma

$$B_0 = \left( F(p_0) \mid -Z(s_0) \right), \quad \hat{B}_0 = \left( F(\hat{p}_0) \mid -\hat{Z}(\hat{s}_0) \right),$$

la matriz  $Q$  dada en (2.14) se escribe como

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \tau'(s_0) \\ \hline 0 & h'(s_0) \end{array} \right)$$

y de la relación (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \left( F(\hat{p}_0) \mid -\hat{Z}(\hat{s}_0) \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & \tau'(s_0) \\ \hline 0 & h'(s_0) \end{array} \right) &= \\ &= D_X \phi(T_0, p_0) \left( F(p_0) \mid -Z(s_0) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$



Evaluando los determinantes de ambos miembros de (2.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \det \left( F(\hat{p}_0) \mid -\hat{Z}(\hat{s}_0) \right) h'(s_0) &= \\ &= \det(D_X \phi(T_0, p_0)) \det \left( F(p_0) \mid -Z(s_0) \right). \end{aligned}$$

Puesto que  $H(t, p_0) = D_X \phi(t, p_0)$  es una matriz fundamental del sistema variacional  $\dot{X} = DF(\phi(t, p_0))X$ , con  $H(0, p_0) = I_2$ , se tiene a partir de la fórmula de Liouville que

$$\det(D_X \phi(T_0, p_0)) = \exp \left( \int_0^{T_0} \operatorname{div} F(\phi(t, p_0)) dt \right),$$

y teniendo en cuenta que  $\det(\hat{B}_0) \neq 0$ , llegamos a (2.19). ■

Cuando (2.1) es plano y lineal, es decir, es de la forma  $F(X) = AX + b$ , con  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^2$ , entonces la divergencia del campo  $F$  coincide con la traza de la matriz  $A$  y la Proposición 2.5 nos permite enunciar de forma directa el siguiente resultado.

**Corolario 2.6** *En las condiciones de la Proposición 2.5, si el campo vectorial es  $F(X) = AX + b$ , con  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^2$ , entonces*

$$h'(s_0) = \frac{\det \left( F(p_0) \mid Z(s_0) \right)}{\det \left( F(\hat{p}_0) \mid \hat{Z}(\hat{s}_0) \right)} \exp(\operatorname{tr}(A)T_0). \quad (2.21)$$

## 2.3 Diferencial de la Aplicación y Semiaplicaciones de Poincaré para sistemas continuamente diferenciables a trozos

El objetivo fundamental de esta memoria es el estudio de los sistemas continuos y lineales a trozos con dos zonas ( $2\text{CPL}_n$ ). Para estos sistemas, la aplicación

de Poincaré, cuando está definida, se obtiene como composición de las denominadas semiaplicaciones de Poincaré que se definirán más adelante (ver [22], [34], [35] y [47]).

Por otra parte, los sistemas  $2CPL_n$  constituyen un subconjunto de los sistemas continuos y de clase  $C^1$  a trozos, motivo por el que estudiaremos estos últimos previamente.

Consideremos un sistema continuo y continuamente diferenciable a trozos con dos zonas, donde la superficie de separación es el hiperplano  $X_1 = 0$ ,

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} F^+(X) & \text{si } X_1 \geq 0, \\ F^-(X) & \text{si } X_1 < 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde  $F^+ \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ ,  $F^- \in C^1((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1})$  y verifican la relación de continuidad

$$F^+(X) = F^-(X) \quad \forall X = (0, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.23)$$

Necesitamos introducir algunas notaciones de las que haremos uso más adelante; llamaremos:

$$\Pi = \{X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 = 0\},$$

$$\Pi^+ = \{X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 > 0\} \quad \text{y}$$

$$\Pi^- = \{X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 < 0\}.$$

Para los sistemas definidos a trozos, la unicidad de soluciones del problema de valores iniciales no está garantizada (ver [36]). No obstante, las hipótesis realizadas hasta ahora sobre el sistema (2.22) sí garantizan la existencia y unicidad de soluciones del problema de valores iniciales asociado. La existencia se deduce de la continuidad de  $F$  y la unicidad, como veremos a continuación, de su carácter localmente lipschitziano.

**Proposición 2.7** *Para el campo vectorial  $F$  definido en (2.22), el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X^0, \end{cases}$$

*posee una única solución para cada  $X^0 \in \mathbb{R}^n$ .*

**Demostración.** Puesto que  $F^+$  y  $F^-$  son de clase  $C^1$  en sus respectivos dominios, sólo debemos probar el carácter localmente lipschitziano de  $F$  en los entornos de aquellos puntos que se encuentran sobre el hiperplano  $\Pi$  (ver [31]).

Sea  $X^0 \in \Pi$  y denotemos por  $B_r(X^0)$  la bola cerrada de centro  $X^0$  y radio  $r > 0$ , es decir,

$$B_r(X^0) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X^0\| \leq r\}.$$

La continuidad de las diferenciales de los campos  $F^+$  y  $F^-$  nos garantiza la existencia de las cantidades

$$M^+ = \max \{\|DF^+(X)\| : X \in B_r(X^0)\}$$

y

$$M^- = \max \{\|DF^-(X)\| : X \in B_r(X^0)\},$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma matricial subordinada a la norma euclídea de  $\mathbb{R}^n$ .

Se verifican las siguientes desigualdades:

- Para  $X, Y \in B_r(X^0) \cap (\Pi^+ \cup \Pi)$ , se tiene

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq M^+ \|X - Y\|.$$

- Análogamente, para  $X, Y \in B_r(X^0) \cap (\Pi^- \cup \Pi)$  obtenemos

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq M^- \|X - Y\|.$$

- Si  $X, Y \in B_r(X^0)$ , con  $X \in \Pi^+$  e  $Y \in \Pi^-$ , tomemos  $Z$  el punto de intersección de la línea que une los puntos  $X$  e  $Y$  con el hiperplano de separación  $\Pi$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \|F(X) - F(Y)\| &= \|F(X) - F(Z) + F(Z) - F(Y)\| \leq \\
 &\leq \|F(X) - F(Z)\| + \|F(Z) - F(Y)\| \\
 &\leq M^+ \|X - Z\| + M^- \|Z - Y\| \\
 &\leq (M^+ + M^-) \|X - Y\|.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq (M^+ + M^-) \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in B_r(X^0),$$

con lo que finaliza la demostración. ■

El flujo  $\phi$  de (2.22) está definido para toda condición inicial  $X \in \mathbb{R}^n$  y no es restrictivo suponer que también se encuentra definido para todo  $t$  real, al igual que los flujos  $\phi^+$  y  $\phi^-$  de los sistemas  $\dot{X} = F^+(X)$  y  $\dot{X} = F^-(X)$ , respectivamente. En caso contrario, rescalaríamos convenientemente la variable temporal  $t$  de acuerdo con la fórmula (ver [44])

$$\tau = \int_0^t (1 + \|F(X(s))\|) ds.$$

Siguiendo las notaciones anteriores, trabajaremos bajo la siguiente hipótesis (véase la Figura 2.2).

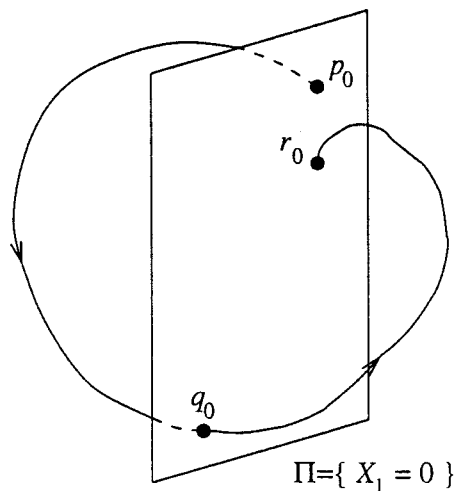


Figura 2.2: Una órbita cruzando el hiperplano  $\Pi$  en varios puntos.

#### Hipótesis A:

Sobre el hiperplano de separación  $\Pi \equiv \{X_1 = 0\}$ , existen tres puntos  $p_0 = (0, x_0)$ ,  $q_0 = (0, y_0)$  y  $r_0 = (0, z_0)$ , con  $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , y dos valores reales positivos  $T_0^+$ ,  $T_0^-$  verificando las siguientes condiciones:

1.  $\phi(t, p_0) = \phi^-(t, p_0) \in \Pi^- \quad \forall t \in (0, T_0^-)$ .
2.  $\phi(T_0^-, p_0) = \phi^-(T_0^-, p_0) = q_0 \in \Pi$ .
3.  $\phi(t, q_0) = \phi^+(t, q_0) \in \Pi^+ \quad \forall t \in (0, T_0^+)$ .
4.  $\phi(T_0^+, q_0) = \phi^+(T_0^+, q_0) = r_0 \in \Pi$ .
5. La órbita  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  corta transversalmente a  $\Pi$  en los puntos  $q_0$  y  $r_0$ .

Nótese que los apartados 2 y 4 de la Hipótesis A y la propiedad de grupo para el flujo  $\phi(t, X)$  nos indican que  $\phi(T_0, p_0) = r_0$ , siendo  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ .

El siguiente resultado es una aplicación directa de la Proposición 2.1.

**Proposición 2.8** *Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A, entonces existen un entorno  $U(p_0)$  del punto  $p_0$ , un entorno  $U(q_0)$  del punto  $q_0$  y dos funciones diferenciables*

$$\tilde{\rho}^- : U(p_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}^+ : U(q_0) \longrightarrow \mathbb{R},$$

con  $\tilde{\rho}^-(p_0) = T_0^-$ ,  $\tilde{\rho}^+(q_0) = T_0^+$ , de manera que

$$\phi^-(\tilde{\rho}^-(X), p_0) \in \Pi \quad \text{para todo} \quad X \in U(p_0)$$

y

$$\phi^+(\tilde{\rho}^+(X), q_0) \in \Pi \quad \text{para todo} \quad X \in U(q_0).$$

Este resultado nos permite definir las siguientes aplicaciones,

$$\tilde{\xi}^- : U(p_0) \longrightarrow \Pi, \quad \text{con} \quad \tilde{\xi}^-(X) = \phi^-(\tilde{\rho}^-(X), X)$$

y

$$\tilde{\xi}^+ : U(q_0) \longrightarrow \Pi, \quad \text{con} \quad \tilde{\xi}^+(X) = \phi^+(\tilde{\rho}^+(X), X),$$

por lo que, de forma análoga a la Definición 2.2, podemos fijar con precisión los conceptos de semiaplicación y aplicación de Poincaré para el sistema continuamente diferenciable a trozos (2.22).

**Definición 2.9** *Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A, denominaremos semiaplicación de Poincaré izquierda  $P^-$  del sistema (2.22) a la restricción de  $\tilde{\xi}^-$  a la intersección  $\Pi \cap U(p_0)$ .*

*La restricción de  $\tilde{\rho}^-$  sobre  $\Pi \cap U(p_0)$  se denomina semiaplicación de vuelo izquierda (semitiempo de vuelo izquierdo) del sistema (2.22) y la denotaremos mediante  $\tau^-$ .*

**Definición 2.10** *Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A, denominaremos semiaplicación de Poincaré derecha  $P^+$  del sistema (2.22) a la restricción de  $\tilde{\xi}^+$  a la intersección  $\Pi \cap U(q_0)$ .*

La restricción de  $\bar{\rho}^+$  sobre  $\Pi \cap U(q_0)$  se denomina *semiaplicación de vuelo derecha* (*semitiempo de vuelo derecho*) del sistema (2.22) y la denotaremos mediante  $\tau^+$ .

**Definición 2.11** Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A, denominaremos *aplicación de Poincaré*  $P$  del sistema (2.22) a la composición de las dos *semiaplicaciones de Poincaré*  $P^-$  y  $P^+$ ; es decir,

$$P = P^+ \circ P^-. \quad (2.24)$$

Llamaremos *aplicación tiempo de vuelo*  $\tau$  del sistema (2.22), o simplemente *tiempo de vuelo*, a la restricción de la aplicación

$$\bar{\rho}(X) = \bar{\rho}^-(X) + \bar{\rho}^+ \left( \tilde{\xi}^-(X) \right) = \bar{\rho}^-(X) + \bar{\rho}^+ \left( \phi^-(\bar{\rho}^-(X), X) \right) \quad (2.25)$$

sobre la intersección  $\Pi \cap U(p_0)$ .

Debemos tener en cuenta que las semiaplicaciones de Poincaré y de vuelo son continuamente diferenciables en sus respectivos dominios de definición, así como las aplicaciones de vuelo y Poincaré.

Es bien sabido que para un sistema  $n$ -dimensional continuamente diferenciable que posea una órbita periódica  $\gamma(t) = \phi(t, X)$  de periodo  $T$ , se verifica que  $\lambda = 1$  es un autovalor de la matriz de monodromía  $D_X \phi(T, X)$  y que los autovalores de la diferencial de la aplicación de Poincaré en el punto fijo  $X$ , denominados *multiplicadores característicos* de la órbita periódica  $\gamma(t)$ , son los restantes  $n - 1$  autovalores de la matriz jacobiana  $D_X \phi(T, X)$ . Seguidamente, vamos a generalizar estas relaciones para los sistemas continuos y continuamente diferenciables a trozos con dos zonas.

Cuando el campo vectorial  $F$  es continuo y continuamente diferenciable a trozos, la matriz  $D_X \phi(t, X)$  no está definida en principio para todos los valores  $t, X$ . El siguiente resultado prueba que si se verifica la Hipótesis A, entonces la matriz  $D_X \phi(T_0, p_0)$  está bien definida, siendo  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ , y nos

indica que si  $\phi(T_0, p_0) = p_0$ , entonces  $D_X\phi(T_0, p_0)$  posee un autovalor unidad. Por extensión, también llamaremos multiplicadores característicos de la órbita periódica  $\phi(t, p_0)$  a los restantes autovalores de la matriz  $D_X\phi(T_0, p_0)$ .

**Teorema 2.12** *Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A y  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ , entonces existe la matriz jacobiana  $D_X\phi(T_0, p_0)$  y verifica*

$$D_X\phi(T_0, p_0) = D_X\phi^+(T_0^+, q_0) \cdot D_X\phi^-(T_0^-, p_0). \quad (2.26)$$

Además, si  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica del sistema (2.22) de periodo  $T_0$ , entonces

$$D_X\phi(T_0, p_0)F(p_0) = F(p_0). \quad (2.27)$$

**Demostración.** Para cada valor  $X$  en un cierto entorno de  $p_0$  y  $0 \leq t \leq \bar{\rho}(X)$ , el flujo del sistema (2.22) puede escribirse en la forma

$$\phi(t, X) = \begin{cases} \phi^-(t, X) & \text{si } 0 \leq t \leq \bar{\rho}^-(X), \\ \phi^+(t - \bar{\rho}^-(X), \phi^-(\bar{\rho}^-(X), X)) & \text{si } \bar{\rho}^-(X) < t \leq \bar{\rho}(X), \end{cases}$$

siendo  $\bar{\rho}$  la función definida en (2.25).

Así, para  $t > \bar{\rho}^-(X)$  se sigue que

$$\begin{aligned} D_X\phi(t, X) &= \dot{\phi}^+(t - \bar{\rho}^-(X), \phi^-(\bar{\rho}^-(X), X)) \cdot (-\nabla\bar{\rho}^-(X)) + \\ &+ D_X\phi^+(t - \bar{\rho}^-(X), \phi^-(\bar{\rho}^-(X), X)) \cdot \\ &\cdot \left[ \dot{\phi}^-(\bar{\rho}^-(X), X) \nabla\bar{\rho}^-(X) + D_X\phi^-(\bar{\rho}^-(X), X) \right]. \end{aligned}$$

Haciendo uso de las igualdades

$$T_0 = T_0^- + T_0^+, \quad \phi^-(T_0^-, p_0) = q_0, \quad \phi^+(T_0^+, q_0) = r_0 \quad \text{y} \quad \bar{\rho}^-(p_0) = T_0^-,$$

utilizando que  $\phi^+$  y  $\phi^-$  son los flujos de los sistemas continuamente diferenciables  $\dot{X} = F^+(X)$  y  $\dot{X} = F^-(X)$  respectivamente y, recordando la continuidad



del campo  $F$  (ver (2.23)), la anterior igualdad para  $t = T_0$  y  $X = p_0$  nos queda en la forma

$$\begin{aligned} D_X \phi(T_0, p_0) &= F(r_0) (-\nabla \tilde{\rho}^-(p_0)) + \\ &+ D_X \phi^+(T_0^+, q_0) [F(q_0) \nabla \tilde{\rho}^-(p_0) + D_X \phi^-(T_0^-, p_0)]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta que (2.6) aplicada a  $\dot{X} = F^+(X)$  permite escribir la identidad

$$D_X \phi^+(T_0^+, q_0) F(q_0) = F(r_0), \quad (2.29)$$

deducimos finalmente (2.26) a partir de (2.28).

Para el sistema  $\dot{X} = F^-(X)$ , la igualdad (2.6) puede escribirse en la forma  $D_X \phi^-(T_0^-, p_0) F(p_0) = F(q_0)$ . Aplicando esta última relación junto con (2.29) y (2.26) tenemos

$$\begin{aligned} D_X \phi(T_0, p_0) F(p_0) &= D_X \phi^+(T_0^+, q_0) \cdot D_X \phi^-(T_0^-, p_0) F(p_0) = \\ &= D_X \phi^+(T_0^+, q_0) F(q_0) = F(r_0). \end{aligned}$$

Si  $r_0 = p_0$ , obtenemos (2.27), con lo que concluye la demostración. ■

Nótese que la relación (2.27) nos indica que  $F(p_0)$  es un autovector de la matriz  $D_X \phi(T_0, p_0)$  asociado al autovalor  $\lambda = 1$ , cuando  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica del sistema (2.22) de periodo  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ .

**Definición 2.13** Si el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A y la solución  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica de (2.22) de periodo  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ , entonces  $T_0^-$  se denomina semiperiodo izquierdo de  $\gamma$ , mientras que  $T_0^+$  es el semiperiodo derecho de  $\gamma$ .

Para establecer un resultado análogo a la Proposición 2.3 referido a la aplicación de Poincaré necesitamos determinar unas coordenadas locales en el hiperplano  $\Pi$ , dominio de definición de la aplicación  $P$ .

El hiperplano  $\Pi$  está generado por los vectores

$$Z_i = \left( \frac{0}{e_i^{n-1}} \right) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

donde  $e_i^{n-1}$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Además, denotando los puntos  $X$  del hiperplano  $\Pi$  en la forma  $X = (0, x)$ , con  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ , y teniendo en cuenta las definiciones 2.9 y 2.10 podemos escribir

$$(0, P^-(x)) = \tilde{\xi}^-(0, x), \quad \tau^-(x) = \tilde{\rho}^-(0, x) \quad \text{para } (0, x) \in U(p_0)$$

y análogamente

$$(0, P^+(y)) = \tilde{\xi}^+(0, y), \quad \tau^+(y) = \tilde{\rho}^+(0, y) \quad \text{para } (0, y) \in U(q_0).$$

Por tanto, la Proposición 2.3 y el Teorema 2.12 nos conducen al siguiente resultado.

**Proposición 2.14** *Supongamos que el sistema (2.22) satisface la Hipótesis A y denotemos  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ ,*

$$\begin{aligned} C_0 &= \left( F(p_0) \left| \begin{array}{c} \theta \\ -I_{n-1} \end{array} \right. \right), & R^- &= \left( \frac{1}{\theta} \left| \begin{array}{c} \nabla \tau^-(x_0) \\ D_x P^-(x_0) \end{array} \right. \right), \\ C_1 &= \left( F(q_0) \left| \begin{array}{c} \theta \\ -I_{n-1} \end{array} \right. \right), & R^+ &= \left( \frac{1}{\theta} \left| \begin{array}{c} \nabla \tau^+(y_0) \\ D_y P^+(y_0) \end{array} \right. \right), \\ C_2 &= \left( F(r_0) \left| \begin{array}{c} \theta \\ -I_{n-1} \end{array} \right. \right) & \text{y } R &= \left( \frac{1}{\theta} \left| \begin{array}{c} \nabla \tau(x_0) \\ D_x P(x_0) \end{array} \right. \right). \end{aligned}$$

Entonces, se satisfacen las siguientes igualdades

$$C_1 R^- = D_X \phi^-(T_0^-, p_0) C_0, \quad C_2 R^+ = D_X \phi^+(T_0^+, q_0) C_1, \quad (2.30)$$

y

$$C_2 R = D_X \phi(T_0, p_0) C_0. \quad (2.31)$$

Además, si  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica de periodo  $T_0$  del sistema (2.22), entonces

$$R = C_0^{-1} D_X \phi(T_0, p_0) C_0. \quad (2.32)$$

**Demostración.** Las identidades recogidas en (2.30) son una consecuencia inmediata de la Proposición 2.3 para este caso particular.

De la propia definición de la aplicación de Poincaré  $P$  a partir de las semiaplicaciones de Poincaré,  $P = P^+ \circ P^-$ , se tiene que

$$D_x P(x_0) = D_y P^+(y_0) \cdot D_x P^-(x_0)$$

y puesto que el tiempo de vuelo  $\tau$  viene dado por (véase (2.25))

$$\tau(x) = \tau^-(x) + \tau^+(P^-(x)),$$

se sigue que

$$\nabla \tau(x_0) = \nabla \tau^-(x_0) + \nabla \tau^+(P^-(x_0)) \cdot D_x P^-(x_0).$$

De aquí,

$$R^+ R^- = \left( \frac{1}{\theta} \left| \frac{\nabla \tau^-(x_0) + \nabla \tau^+(P^-(y_0)) \cdot D_x P^-(x_0)}{D_y P^+(y_0) \cdot D_x P^-(x_0)} \right. \right) = R.$$

Ahora, aplicando sucesivamente las relaciones (2.30) y haciendo uso de la igualdad (2.26) obtenemos

$$\begin{aligned} C_2 R &= C_2 R^+ R^- = D_X \phi^+(T_0^+, q_0) C_1 R^- = \\ &= D_X \phi^+(T_0^+, q_0) D_X \phi^-(T_0^-, p_0) C_0 = D_X \phi(T_0, p_0) C_0, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (2.31).

Si  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica de periodo  $T_0$ , entonces  $p_0 = r_0$ . La condición de transversalidad nos indica que la matriz  $C_2 = C_0$  es regular y de (2.31) se obtiene de forma inmediata (2.32). ■

Cuando el sistema (2.22) es plano, las Proposiciones 2.5 y 2.14 nos llevan directamente al siguiente resultado.

**Proposición 2.15** Si (2.22) es plano y satisface la Hipótesis A, entonces las derivadas de la aplicación y semiaplicaciones de Poincaré son

$$\frac{dP^-}{dx}(x_0) = \frac{F_1(0, x_0)}{F_1(0, P^-(x_0))} \exp \left( \int_0^{T_0^-} \operatorname{div} F(\phi(t, (0, x_0))) dt \right), \quad (2.33)$$

$$\frac{dP^+}{dx}(y_0) = \frac{F_1(0, y_0)}{F_1(0, P^+(y_0))} \exp \left( \int_0^{T_0^+} \operatorname{div} F(\phi(t, (0, y_0))) dt \right) \quad (2.34)$$

y

$$\frac{dP}{dx}(x_0) = \frac{F_1(0, x_0)}{F_1(0, P(x_0))} \exp \left( \int_0^{T_0} \operatorname{div} F(\phi(t, (0, x_0))) dt \right), \quad (2.35)$$

donde  $F = (F_1, F_2)^t$ ,  $T_0 = T_0^- + T_0^+$  y por divergencia de  $F$  entendemos

$$\operatorname{div} F(X_1, X_2) = \begin{cases} \operatorname{div} F^+(X_1, X_2) & \text{si } X_1 > 0, \\ \operatorname{div} F^-(X_1, X_2) & \text{si } X_1 < 0. \end{cases}$$

Además, si la solución  $\gamma(t) = \phi(t, (0, x_0))$  es una órbita periódica del sistema (2.22) de periodo  $T_0$ , entonces

$$\frac{dP}{dx}(x_0) = \exp \left( \int_0^{T_0} \operatorname{div} F(\phi(t, (0, x_0))) dt \right). \quad (2.36)$$

**Demostración.** Puesto que el vector  $Z = (0, 1)^t$  genera la línea de separación  $X_1 = 0$ , las igualdades (2.33) y (2.34) se obtienen como caso particular de la identidad (2.19).

Aplicando la regla de la cadena a  $P = P^+ \circ P^-$  obtenemos,

$$\frac{dP}{dx}(x_0) = \frac{F_1(0, x_0)}{F_1(0, P(x_0))} \exp(K(x_0)),$$

donde

$$K(x_0) = \int_0^{T_0^-} \operatorname{div} F(\phi_t(0, x_0)) dt + \int_0^{T_0^+} \operatorname{div} F(\phi_t(0, P^-(x_0))) dt.$$

Realizando en la segunda integral el cambio de variable  $s = t + T_0^-$  y teniendo en cuenta la propiedad de grupo del flujo  $\phi$ ,

$$\phi_t(0, P^-(x_0)) = \phi_{s-T_0^-}(0, P^-(x_0)) = \phi_s\left(\phi_{-T_0^-}(0, P^-(x_0))\right) = \phi_s(0, x_0),$$

se obtiene

$$\int_0^{T_0^+} \operatorname{div} F(\phi_t(0, P^-(x_0))) dt = \int_{T_0^-}^{T_0^- + T_0^+} \operatorname{div} F(\phi_s(0, x_0)) ds.$$

Sustituyendo esta igualdad en  $K(x_0)$  obtenemos directamente (2.35).

Si  $\gamma(t) = \phi_t(0, x_0)$  es una órbita periódica de periodo  $T_0$ , entonces  $P(x_0) = x_0$ , por lo que la igualdad (2.36) sigue inmediatamente de (2.35). ■

La expresión (2.35) obviamente también es válida para sistemas planos continuamente diferenciables que poseen una órbita periódica transversal al eje  $X_1 = 0$ , ya que podemos considerar que estos sistemas forman parte del conjunto de sistemas dinámicos continuos y de clase  $C^1$  a trozos bizonales. Más aún, obsérvese que (2.35) es la expresión ya conocida de la derivada de la aplicación de Poincaré en un punto fijo de la misma para sistemas planos continuamente diferenciables, obtenida en la Sección 28 de Andronov, Leontovich, Gordon y Maier [4]. El caso particular  $P(x_0) = x_0$  es el utilizado con mas frecuencia en la práctica (véanse entre otros [15], [29] y [44]).

Notemos que se ha generalizado la expresión clásica para sistemas bidimensionales continuos y de clase  $C^1$  a trozos en dos zonas.

### 2.3.1 Estudio para el caso de Sistemas Lineales a Trozos Bizonales

En este apartado presentaremos los resultados precedentes, que hacen referencia a la aplicación y semiaplicaciones de Poincaré, para los sistemas continuos lineales a trozos con dos zonas.

Denotemos por  $\phi(t, X)$  el flujo del sistema continuo

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} A^+X + a & \text{si } X_1 \geq 0, \\ A^-X + a & \text{si } X_1 < 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

donde  $A^+, A^- \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $a \in \mathbb{R}^n$ . Los flujos de los sistemas  $\dot{X} = A^+X + a$  y  $\dot{X} = A^-X + a$  se denotarán, respectivamente, por  $\phi^+(t, X)$  y  $\phi^-(t, X)$  y se satisfacen, como ya sabemos, las relaciones

$$D_X\phi^+(t, X) = \exp(A^+t) \quad \text{y} \quad D_X\phi^-(t, X) = \exp(A^-t).$$

Seguidamente particularizamos el Teorema 2.12 para el sistema (2.37).

**Proposición 2.16** *Si el sistema (2.37) satisface la Hipótesis A y denotamos  $T_0 = T_0^- + T_0^+$ , entonces existe la matriz  $D_X\phi(T_0, p_0)$  y verifica*

$$D_X\phi(T_0, p_0) = \exp(A^+T_0^+) \exp(A^-T_0^-)$$

*Además, si  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica del sistema (2.37) de periodo  $T_0$ , entonces*

$$\exp(A^+T_0^+) \exp(A^-T_0^-) F(p_0) = F(p_0).$$

La Proposición 2.14 aplicada al sistema (2.37) se enuncia como sigue.

**Proposición 2.17** *Si el sistema (2.37) satisface la Hipótesis A, denotamos  $T_0 = T_0^- + T_0^+$  y  $C_0, C_1, C_2, R^-, R^+$  y  $R$  son las matrices definidas en la Proposición 2.14, entonces se satisfacen las siguientes igualdades*

$$C_1R^- = \exp(A^-T_0^-)C_0, \quad C_2R^+ = \exp(A^+T_0^+)C_1$$

y

$$C_2R = \exp(A^+T_0^+) \exp(A^-T_0^-)C_0.$$

Además, si  $\gamma(t) = \phi(t, p_0)$  es una órbita periódica del sistema (2.37) de periodo  $T_0$ , entonces

$$R = C_0^{-1} \exp(A^+ T_0^+) \exp(A^- T_0^-) C_0.$$

Sabemos que el sistema (2.37) satisface

$$\operatorname{div} F(X) = \begin{cases} \operatorname{tr}(A^+) & \text{si } X_1 > 0, \\ \operatorname{tr}(A^-) & \text{si } X_1 < 0, \end{cases}$$

luego cuando el sistema (2.37) es plano, la Proposición 2.15 se redacta en la siguiente forma.

**Proposición 2.18** *Si el sistema (2.37) es plano, satisface la Hipótesis A y denotamos  $F = (F_1, F_2)^t$ , entonces las derivadas de la aplicación y semiaplicaciones de Poincaré vienen dadas por*

$$\frac{dP^-}{dx}(x_0) = \frac{F_1(0, x_0)}{F_1(0, P^-(x_0))} \exp(\operatorname{tr}(A^-) T_0^-), \quad (2.38)$$

$$\frac{dP^+}{dx}(y_0) = \frac{F_1(0, y_0)}{F_1(0, P^+(y_0))} \exp(\operatorname{tr}(A^+) T_0^+), \quad (2.39)$$

y

$$\frac{dP}{dx}(x_0) = \frac{F_1(0, x_0)}{F_1(0, P(x_0))} \exp(\operatorname{tr}(A^+) T_0^+ + \operatorname{tr}(A^-) T_0^-). \quad (2.40)$$

Además, si la solución  $\gamma(t) = \phi(t, (0, x_0))$  es una órbita periódica del sistema (2.37) de semiperiodos  $T_0^-$  y  $T_0^+$ , entonces

$$\frac{dP}{dx}(x_0) = \exp(\operatorname{tr}(A^+) T_0^+ + \operatorname{tr}(A^-) T_0^-). \quad (2.41)$$

Debemos hacer notar que las expresiones (2.38), (2.39) y (2.40) han sido obtenidas por E. Freire et ali. en [22] y F. Rodrigo en [47] para distintos tipos de sistemas lineales a trozos, a partir de expresiones explícitas y paramétricas de las semiaplicaciones de Poincaré de dichos sistemas.

Por último, no es difícil comprobar que las expresiones encontradas en este capítulo, que hacen referencia a la aplicación y semiaplicaciones de Poincaré, tienen una extensión natural a los sistemas continuos y de clase  $C^1$  a trozos definidos en múltiples zonas. En este caso, la aplicación de Poincaré se obtiene como composición sucesiva de diferentes aplicaciones de transición (ver [35] y [47]).

Las ideas expuestas en este capítulo serán utilizadas fundamentalmente en el siguiente, aunque el resultado principal de la Sección 2.2.1 (Proposición 2.5) resultará esencial en parte del desarrollo del Capítulo 5.



## Capítulo 3

# El método de Melnikov para sistemas continuos planos diferenciables a trozos

En este capítulo se generaliza el método de Melnikov a sistemas continuos planos y continuamente diferenciables a trozos. El resultado principal nos permitirá estudiar la existencia de ciclos límites en sistemas que pueden representarse como la perturbación de un sistema que posee un continuo de órbitas periódicas. Esta idea se aplicará a sistemas continuos lineales a trozos bizonales y trizonales con simetría. Con cierta modificación en la teoría conseguiremos establecer la existencia de curvas de homoclinas en sistemas lineales a trozos.

### 3.1 Introducción y teoría clásica

Con frecuencia el modelo de ciertos sistemas físicos responde a una familia de ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros. Si un elemento de la familia (obtenido al fijar un valor en los parámetros) posee alguna propiedad dinámica relevante (punto de equilibrio, órbita periódica o separatriz), entonces tiene perfecto sentido realizar la siguiente pregunta: ¿Cuáles de estas

características dinámicas persisten si se modifica el valor de los parámetros?

La teoría de continuación proporciona una colección de herramientas que permiten dar una respuesta positiva a esta cuestión en distintas ocasiones.

Cuando el sistema fijado posee una banda continua de órbitas periódicas la teoría anterior permite conocer las órbitas periódicas del continuo que persisten si se modifican levemente los parámetros. El conocimiento de estas órbitas periódicas persistentes pueden relacionarse con los ceros de una determinada función real de variable real.

Para describir esta teoría, consideremos un campo vectorial  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  y supongamos que el sistema plano

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

posee un continuo de órbitas periódicas transversales a una sección, que podemos suponer sin pérdida de generalidad que es la sección  $\Sigma = \{(0, y) : y \in I\}$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto.

Queremos conocer qué órbitas periódicas del sistema (3.1) persisten si perturbamos tal sistema en la forma

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, \varepsilon, \mu) \quad (3.2)_\mu$$

donde  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^k$  y la función  $g$  es de clase  $C^1$ .

Si la solución del sistema (3.2) $_\mu$  que para  $t = 0$  pasa por  $(0, z)$ , con  $z \in I$ , se denota por

$$X(t, z, \varepsilon, \mu) = (x(t, z, \varepsilon, \mu), y(t, z, \varepsilon, \mu)),$$

entonces, la continuidad y derivabilidad respecto a condiciones iniciales y parámetros, permite asegurar que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, la órbita de dicha solución vuelve a intersectar a  $\Sigma$  después de un tiempo  $T(z, \varepsilon, \mu)$  en un punto  $x(T(z, \varepsilon, \mu), z, \varepsilon, \mu)$ , lo que nos permite definir la aplicación de Poincaré

$$P(z, \varepsilon, \mu) = x(T(z, \varepsilon, \mu), z, \varepsilon, \mu)$$

y la función desplazamiento

$$d(z, \varepsilon, \mu) = P(z, \varepsilon, \mu) - z.$$

Si  $z$  es un cero de la función desplazamiento  $d$ , entonces la solución

$$(x(t, z, \varepsilon, \mu), y(t, z, \varepsilon, \mu))$$

proporciona una órbita periódica del sistema  $(3.2)_\mu$  de periodo  $T(z, \varepsilon, \mu)$ .

Con estos preliminares, la idea consiste en establecer la existencia de una función  $z = h(\varepsilon, \mu)$  de forma que  $d(h(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = 0$ . Nótese que  $d(z, 0, \mu) \equiv 0$  para todo  $z \in I$ , luego  $\frac{\partial d}{\partial z} \equiv 0$ , lo que impide de momento determinar la función  $z = h(\varepsilon, \mu)$  que anula a la función desplazamiento. Sin embargo, este hecho permite escribir  $d$  en la forma

$$d(z, \varepsilon, \mu) = \varepsilon D(z, \varepsilon, \mu),$$

por lo que si existe una función  $h$  de forma que  $D(h(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = 0$ , entonces  $d(h(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = 0$ .

Por tanto, hemos reducido el problema de encontrar órbitas periódicas en el sistema perturbado  $(3.2)_\mu$  al problema de encontrar las soluciones implícitas de la ecuación  $D(z, \varepsilon, \mu) = 0$ .

Si existe  $z \in I$  de forma que

$$D(z, 0, \mu) = \frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(z, 0, \mu) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial D}{\partial z}(z, 0, \mu) = \frac{\partial^2 d}{\partial z \partial \varepsilon}(z, 0, \mu) \neq 0,$$

entonces el Teorema de la Función Implícita asegura la existencia de una función definida implícitamente  $z = h(\varepsilon, \mu)$ .

Denominaremos función de desplazamiento reducida a

$$D(z, 0, \mu) = \frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(z, 0, \mu).$$

El método de Melnikov establece que la función de desplazamiento reducida es proporcional a una función, denominada integral de Melnikov, que está definida exclusivamente a partir de los campos vectoriales  $f$  y  $g$ .

Ahora, con ciertas aplicaciones del Teorema de la Función Implícita y el Teorema de Preparación de Weierstrass (ver [17]) podemos confirmar la relación existente entre el número, la posición y las multiplicidades de los ciclos

límites de  $(3.2)_\mu$ , cuando  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, con el número, la posición y las multiplicidades de los ceros de la función de Melnikov de  $(3.2)_\mu$ .

Diferentes formas de la deducción de la proporcionalidad pueden verse, entre otros, en [4], [7], [14] y [15]. Todas ellas se basan en la misma idea consistente en aproximar, haciendo uso de ecuaciones variacionales, las soluciones de  $(3.2)_\mu$  por medio de las órbitas periódicas de (3.1).

Si el sistema no perturbado (3.1) posee una homoclina o una heteroclina, una leve modificación en la teoría permite construir una función desplazamiento y la correspondiente función de desplazamiento reducida que también resulta ser proporcional a cierta función de Melnikov. Los ceros de esta función de Melnikov nos permitirán continuar la conexión homoclina o heteroclina.

Las ideas anteriores se generalizarán a sistemas planos continuos y continuamente diferenciables a trozos y particularmente se aplicarán a sistemas continuos lineales a trozos. Para tal cometido, definiremos como se hizo en el Capítulo 2 la aplicación de Poincaré de tales sistemas como composición de las denominadas semiaplicaciones de Poincaré (ver [34], [35] y [47]). Éstas, también permitirán definir la *función desplazamiento* de la misma forma que se realiza para los sistemas continuamente diferenciables (ver [7]).

Mostraremos que la función de Melnikov para los sistemas definidos a trozos coincide con la obtenida en la teoría clásica. Además, si las funciones involucradas en la definición del campo vectorial del sistema definido a trozos poseen divergencia nula, entonces la función de Melnikov adopta, vía el Teorema de Green, una forma más compacta.

Las notaciones y los resultados correspondientes a las funciones definidas a trozos se darán a conocer seguidamente. En secciones posteriores estudiaremos la existencia de lazos homoclinos y heteroclinos y más adelante se expondrán ejemplos específicos.

## 3.2 La teoría de Melnikov para sistemas definidos a trozos

En esta sección trabajaremos con sistemas continuos definidos a trozos en dos zonas y supondremos que la recta de separación es el eje  $x = 0$ .

Consideremos como sistema no perturbado el sistema continuo

$$\dot{X} = f(X) = \begin{cases} f^+(X) & \text{si } x \geq 0, \\ f^-(X) & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $f^+, f^-$  son funciones de  $C^r(\mathbb{R}^2)$ , con  $r \geq 1$ .

Debemos tener presente que la condición de continuidad implica la igualdad  $f^+(0, y) = f^-(0, y)$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ .

Añadiendo una perturbación al sistema (3.3) obtenemos el sistema

$$\dot{X} = \mathcal{H}(X, \varepsilon, \mu) = f(X) + \varepsilon g(X, \varepsilon, \mu), \quad (3.4)_\mu$$

que denominaremos sistema perturbado, donde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^k$  y  $g$  es la función

$$g(X, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} g^+(X, \varepsilon, \mu) & \text{si } x \geq 0, \\ g^-(X, \varepsilon, \mu) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

siendo  $g^+, g^- \in C^r(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)$ ,  $r \geq 1$ , y  $\mathcal{H}$  continua en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ .

Como hemos visto en el Capítulo 2 los sistemas (3.3) y (3.4) <sub>$\mu$</sub>  satisfacen condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de soluciones de los problemas de valores iniciales asociados (ver Proposición 2.7).

Introducimos la notación  $\gamma_z(t)$  para denotar la órbita del sistema (3.3) que para  $t = 0$  posee como condición inicial el punto  $(0, z)$  de la recta de separación  $x = 0$ ; es decir, si el flujo del sistema no perturbado (3.3) se denota por  $\phi(t, X)$ , entonces  $\gamma_z(t) = \phi(t, (0, z))$ .

### 3.2.1 Perturbación de una banda continua de órbitas periódicas

En este apartado supondremos que el sistema no perturbado (3.3) satisface la siguiente hipótesis.

Hipótesis A:

El sistema no perturbado (3.3) posee un continuo de órbitas periódicas que cruzan en dos puntos y de forma transversal al eje de ordenadas en un conjunto abierto.

Podemos admitir, sin pérdida de generalidad, que las órbitas periódicas cruzan el eje OY en sentido antihorario; en caso contrario, bastaría cambiar el signo de la variable independiente.

La Hipótesis A implica que toda órbita periódica del sistema (3.3) cruza transversalmente a la recta de separación en dos puntos  $(0, y_0)$ ,  $(0, \hat{y}_0)$ , con  $y_0 > \hat{y}_0$ , donde  $y_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $\hat{y}_0 \in \hat{I} \subset \mathbb{R}$  (veáse la Figura 3.1), y como consecuencia, la familia de órbitas periódicas de (3.3) puede parametrizarse en la forma

$$\Gamma_{y_0} : X = \gamma_{y_0}(t), \quad y_0 \in I.$$

La función  $f$  se escribe, usando sus componentes, como  $f = (f_1, f_2)$  y la condición de transversalidad se puede expresar de la forma

$$f_1(0, y_0) \cdot f_1(0, \hat{y}_0) \neq 0 \quad \text{para todo } y_0 \in I, \hat{y}_0 \in \hat{I}.$$

Para cada  $y_0 \in I$ , denotaremos por  $T_{y_0}$  el periodo la órbita periódica  $\Gamma_{y_0}$ , y la solución del sistema (3.4) $_{\mu}$  que para  $t = 0$  pasa por  $(0, z)$  se denotará por

$$X(t, z, \varepsilon, \mu) = (x(t, z, \varepsilon, \mu), y(t, z, \varepsilon, \mu)). \quad (3.5)$$

A continuación definimos, al igual que se realizó en la Definición 2.13, los conceptos de semiperiodos para las órbitas periódicas del sistema (3.3).

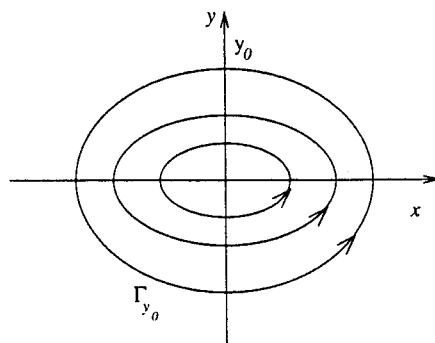


Figura 3.1: Continuo de órbitas periódicas del sistema (3.3)

**Definición 3.1** Si (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiperiodo izquierdo de  $\Gamma_{y_0}$  al menor valor positivo  $T_{y_0}^-$  que satisface  $x(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) = 0$ .

**Definición 3.2** Si (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiperiodo derecho de  $\Gamma_{y_0}$  al menor valor positivo  $T_{y_0}^+$  que satisface  $x(T_{y_0}^+, \hat{y}_0, 0, \mu) = 0$ , donde  $\hat{y}_0 = y(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu)$  y  $T_{y_0}^-$  es el semiperiodo izquierdo de  $\Gamma_{y_0}$ .

A partir de la diferenciabilidad de  $f^- + \varepsilon g^-$  y  $f^+ + \varepsilon g^+$  y de las propiedades de continuidad y diferenciabilidad respecto de parámetros y condiciones iniciales se puede establecer el siguiente resultado, cuya demostración no es muy diferente de la realizada para la Proposición 2.1 (ver [19] y [44]).

**Proposición 3.3** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, entonces la primera componente de la solución (3.5) del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  verifica las siguientes propiedades:

1. Si  $y_0 \in I$  y  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, entonces existe un único valor  $t_0^- = t_0^-(y_0, \varepsilon, \mu) > 0$  de forma que
  - (a)  $x(t, y_0, \varepsilon, \mu) < 0$  para todo  $t \in (0, t_0^-)$ .
  - (b)  $x(t_0^-, y_0, \varepsilon, \mu) = 0$ .

2. Si  $\hat{y}_0 \in \hat{I}$  y  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, entonces existe un único valor  $t_0^+ = t_0^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) > 0$  tal que

$$(a) \quad x(t, \hat{y}_0, \varepsilon, \mu) > 0 \quad \text{para todo} \quad t \in (0, t_0^+).$$

$$(b) \quad x(t_0^+, \hat{y}_0, \varepsilon, \mu) = 0.$$

El valor  $t_0^-$  es el semitiempo de vuelo izquierdo del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  y, análogamente,  $t_0^+$  es el semitiempo de vuelo derecho de  $(3.4)_\mu$  (véanse las definiciones 2.9 y 2.10). Una interpretación geométrica de los escalares  $t_0^-$  y  $t_0^+$  puede contemplarse en la Figura 3.2.

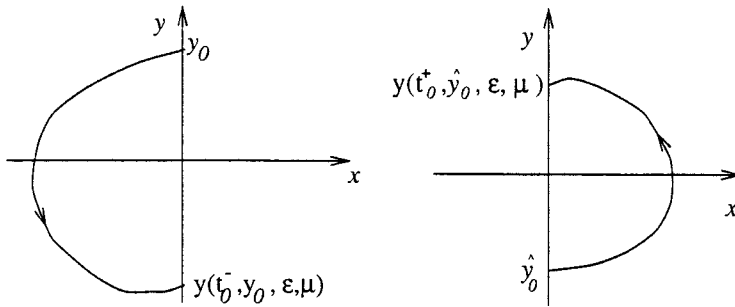


Figura 3.2: Visión geométrica de los semitiempos de vuelo.

Evidentemente, se verifican las relaciones

$$T_{y_0}^- = t_0^-(y_0, 0, \mu), \quad T_{y_0}^+ = t_0^+(\hat{y}_0, 0, \mu) \quad (3.6)$$

y por consiguiente el periodo  $T_{y_0}$  de la órbita periódica  $\Gamma_{y_0}$  es

$$T_{y_0} = t_0^-(y_0, 0, \mu) + t_0^+(\hat{y}_0, 0, \mu), \quad \text{con} \quad \hat{y}_0 = y(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu). \quad (3.7)$$

La Proposición 3.3 permite determinar, como a continuación realizamos, las semiaplicaciones de Poincaré del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  (véanse las definiciones 2.9 y 2.10).



**Definición 3.4** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiaplicación de Poincaré izquierda  $P^-$  del sistema  $(3.4)_\mu$  a la aplicación definida en un entorno de  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  mediante

$$P^-(y_0, \varepsilon, \mu) = y(t_0^-(y_0, \varepsilon, \mu), y_0, \varepsilon, \mu). \quad (3.8)$$

**Definición 3.5** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiaplicación de Poincaré derecha  $P^+$  del sistema  $(3.4)_\mu$  a la aplicación definida en un entorno de  $\hat{I} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  mediante

$$P^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) = y(t_0^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu), \hat{y}_0, \varepsilon, \mu). \quad (3.9)$$

**Definición 3.6** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos aplicación de Poincaré  $P$  del sistema  $(3.4)_\mu$  a la aplicación definida en un entorno de  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  mediante

$$P(y_0, \varepsilon, \mu) = P^+(P^-(y_0, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu). \quad (3.10)$$

**Nota 3.7** Las semiaplicaciones de Poincaré  $P^+$  y  $P^-$  son continuas y el orden de diferenciabilidad de las mismas coincide, al menos, con el orden de diferenciabilidad de los campos  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$ , respectivamente. Por consiguiente, la aplicación de Poincaré  $P$  es continua en todo su dominio y el orden de diferenciabilidad de ésta es igual o superior al menor de los órdenes de diferenciabilidad de los campos vectoriales  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$ .

A continuación definimos la función desplazamiento.

**Definición 3.8** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, se denomina función desplazamiento del sistema perturbado (3.4) $_{\mu}$  a la función definida en un entorno abierto de  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  mediante

$$d(y_0, \varepsilon, \mu) = P(y_0, \varepsilon, \mu) - y_0. \quad (3.11)$$

**Nota 3.9** Obsérvese que, para  $\varepsilon$  y  $\mu$  fijos, la función escalar  $d(\cdot, \varepsilon, \mu)$  se anula si y sólo si el sistema perturbado (3.4) $_{\mu}$  posee una órbita periódica. Además, el sistema (3.4) $_{\mu}$  posee tantas órbitas periódicas como soluciones diferentes tenga la ecuación escalar  $d(\cdot, \varepsilon, \mu) = 0$ . Por otra parte, la función desplazamiento es continua en todo su dominio y su diferenciabilidad depende, al igual que ocurría con la aplicación de Poincaré  $P$ , de la diferenciabilidad de los campos vectoriales  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$  (ver Nota 3.7). Interpretaciones geométricas de las semiaplicaciones de Poincaré, de la aplicación de Poincaré y de la función desplazamiento pueden verse en la Figura 3.3.

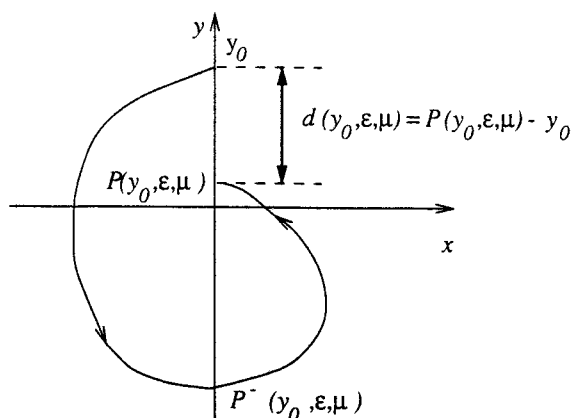


Figura 3.3: Aplicación de Poincaré y función desplazamiento.

Puesto que  $f$  no es diferenciable cuando  $x = 0$ , entendemos, tal y como se hizo en el Capítulo 2 (ver Proposición 2.15), que su divergencia viene dada por

$$\operatorname{div} f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{div} f^+(x, y) & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{div} f^-(x, y) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Si se verifica la Hipótesis A entonces, como muestra el siguiente resultado, el exponente característico de la banda de órbitas periódicas de (3.3) es nulo.

**Proposición 3.10** *Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, entonces*

$$\int_0^{T_{y_0}} \operatorname{div} f(\gamma_{y_0}(t)) dt = 0 \quad \text{para todo } y_0 \in I. \quad (3.12)$$

**Demostración.** La Hipótesis A nos indica que  $P(y_0, 0, \mu) = y_0$  para todo  $y_0 \in I$ , luego

$$\frac{\partial P}{\partial y_0}(y_0, 0, \mu) = 1 \quad \text{para todo } y_0 \in I.$$

De la expresión (2.36) que nos proporciona el valor de la derivada de la aplicación de Poincaré en un punto fijo obtenemos que

$$\exp\left(\int_0^{T_{y_0}} \operatorname{div} f(\gamma_{y_0}(t)) dt\right) = 1 \quad \text{para todo } y_0 \in I,$$

con lo que concluye la demostración. ■

Para obtener la derivada con respecto a  $\varepsilon$ , para  $\varepsilon = 0$ , de la función desplazamiento introducimos las semiaplicaciones de Poincaré normalizadas que definimos a continuación.

**Definición 3.11** *Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiaplicación de Poincaré izquierda normalizada  $N^-$  a la aplicación*

$$N^-(y_0, \varepsilon, \mu) = f_1(0, \hat{y}_0)P^-(y_0, \varepsilon, \mu), \quad (3.13)$$

definida en un entorno de  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ , siendo  $\hat{y}_0 = P^-(y_0, 0, \mu)$ .

**Definición 3.12** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos semiaplicación de Poincaré derecha normalizada  $N^+$  a la aplicación

$$N^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) = f_1(0, y_0)P^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu), \quad (3.14)$$

definida en un entorno de  $\hat{I} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ , siendo  $y_0 = P^+(\hat{y}_0, 0, \mu)$ .

Si el ortogonal a un campo vectorial  $F = (F_1, F_2)$  lo denotamos mediante  $F^\perp = (-F_2, F_1)$ , las semiaplicaciones de Poincaré normalizadas pueden escribirse en forma de producto escalar

$$N^-(y_0, \varepsilon, \mu) = \langle (f^-)^\perp(0, \hat{y}_0), D^-(y_0, \varepsilon, \mu) \rangle \quad (3.15)$$

y

$$N^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) = \langle (f^+)^\perp(0, y_0), D^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) \rangle, \quad (3.16)$$

donde  $D^-$  y  $D^+$  son las funciones

$$D^-(y_0, \varepsilon, \mu) = (0, P^-(y_0, \varepsilon, \mu)), \quad D^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu) = (0, P^+(\hat{y}_0, \varepsilon, \mu)),$$

es decir,  $D^+$  y  $D^-$  son de hecho las aplicaciones  $\tilde{\xi}^+$  y  $\tilde{\xi}^-$  definidas en el Capítulo 2 como consecuencia de la Proposición 2.8.

El siguiente lema nos permitirán obtener las derivadas con respecto a  $\varepsilon$  de las semiaplicaciones normalizadas evaluadas en  $\varepsilon = 0$ .

**Lema 3.13** Sea  $F$  un campo vectorial bidimensional continuamente diferenciable,  $\gamma(t)$  una solución de  $\dot{X} = F(X)$ ,  $\rho$  una función vectorial bidimensional continua de variable real y  $X(t)$  una solución de la ecuación

$$\dot{X}(t) = DF(\gamma(t))X(t) + \rho(t), \quad X \in \mathbb{R}^2. \quad (3.17)$$

Entonces,  $\xi(t) = \langle F^\perp(\gamma(t)), X(t) \rangle$  es solución de la ecuación diferencial unidimensional

$$\dot{\xi}(t) = \operatorname{div} F(\gamma(t))\xi + \langle F^\perp(\gamma(t)), \rho(t) \rangle. \quad (3.18)$$

**Demostración.** Derivando  $\xi(t) = \langle F^\perp(\gamma(t)), X(t) \rangle$  se obtiene

$$\dot{\xi}(t) = \langle DF^\perp(\gamma(t))F(\gamma(t)), X(t) \rangle + \langle F^\perp(\gamma(t)), DF(\gamma(t))X(t) + \rho(t) \rangle,$$

ya que  $\gamma(t)$  es solución de  $\dot{X} = F(X)$  y  $X(t)$  es solución de (3.17).

Suprimiendo la dependencia de  $t$  y  $\gamma(t)$  para facilitar la lectura, obtenemos

$$\dot{\xi} = \langle DF^\perp F + (DF)^t F^\perp, X \rangle + \langle F^\perp, \rho \rangle, \quad (3.19)$$

donde, el superíndice  $t$  denota la matriz traspuesta.

Un simple cálculo muestra que

$$DF^\perp F + (DF)^t F^\perp = (\operatorname{div} F) F^\perp,$$

y ahora (3.18) sigue fácilmente de (3.19). ■

Si  $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ , utilizaremos la notación  $X \wedge Y$  para denotar el producto escalar  $\langle X^\perp, Y \rangle$ , es decir,

$$X \wedge Y = \langle X^\perp, Y \rangle = X_1 Y_2 - X_2 Y_1.$$

**Teorema 3.14** *Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, entonces:*

1. *La derivada de la semiaplicación de Poincaré izquierda normalizada respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  es*

$$\frac{\partial N^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \beta^-(T_{y_0}^-) \int_0^{T_{y_0}^-} \frac{f^-(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu)}{\beta^-(t)} dt, \quad (3.20)$$

siendo

$$\beta^-(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f^-(\gamma_{y_0}(\tau)) d\tau \right). \quad (3.21)$$

2. *La derivada de la semiaplicación de Poincaré derecha normalizada respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  es*

$$\frac{\partial N^+}{\partial \varepsilon}(\hat{y}_0, 0, \mu) = \beta^+(T_{\hat{y}_0}^+) \int_0^{T_{\hat{y}_0}^+} \frac{f^+(\gamma_{\hat{y}_0}(t)) \wedge g^+(\gamma_{\hat{y}_0}(t), 0, \mu)}{\beta^+(t)} dt, \quad (3.22)$$

siendo  $y_0 = P^+(\hat{y}_0, 0, \mu)$  y

$$\beta^+(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f^+(\gamma_{\hat{y}_0}(\tau)) d\tau\right). \quad (3.23)$$

**Demostración.** En primer lugar obtendremos, a partir de (3.15), la derivada parcial de  $N^-$  respecto de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{\partial N^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \langle (f^-)^\perp(0, \hat{y}_0), \frac{\partial D^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) \rangle. \quad (3.24)$$

Comenzamos derivando respecto de  $\varepsilon$  las igualdades

$$x(t_0^-(y_0, \varepsilon, \mu), y_0, \varepsilon, \mu) = 0, \quad y(t_0^-(y_0, \varepsilon, \mu), y_0, \varepsilon, \mu) = P^-(y_0, \varepsilon, \mu).$$

Evaluando estas derivadas en  $\varepsilon = 0$  y usando (3.6) obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial t}(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) \cdot \frac{\partial t_0^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) = 0 \quad (3.25)$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t}(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) \cdot \frac{\partial t_0^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) = \frac{\partial P^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu). \quad (3.26)$$

Introduciendo la función vectorial

$$W(t) = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(t, y_0, 0, \mu) = \left( \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, y_0, 0, \mu), \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t, y_0, 0, \mu) \right)$$

y teniendo en cuenta las igualdades

$$x(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) = 0, \quad y(T_{y_0}^-, y_0, 0, \mu) = \hat{y}_0$$

se tiene, a partir de (3.25) y (3.26), la ecuación vectorial

$$\frac{\partial t_0^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) f^-(0, \hat{y}_0) + W(T_{y_0}^-) = (0, \frac{\partial P^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu)) = \frac{\partial D^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu). \quad (3.27)$$

Así, (3.24) puede expresarse como

$$\frac{\partial N^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \langle (f^-)^\perp(0, \hat{y}_0), W(T_{y_0}^-) \rangle. \quad (3.28)$$

Por otra parte, a partir de (3.5) se obtiene

$$x(0, y_0, \varepsilon, \mu) = 0 \quad \text{e} \quad y(0, y_0, \varepsilon, \mu) = y_0$$

para todo  $(y_0, \varepsilon, \mu)$  de un cierto entorno de  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  y por tanto,

$$W(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0, y_0, \varepsilon, \mu), \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(0, y_0, \varepsilon, \mu) \right) = (0, 0).$$

Si ahora derivamos  $\dot{X} = f^-(X) + \varepsilon g^-(X, \varepsilon, \mu)$  con respecto a  $\varepsilon$ , intercambiamos los órdenes de derivación y evaluamos la expresión obtenida en  $\varepsilon = 0$ , obtenemos que  $W(t)$  es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = Df^-(\gamma_{y_0}(t))W(t) + g^-(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu), \\ W(0) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Tomando  $\xi(t) = \langle (f^-)^\perp(\gamma_{y_0}(t)), W(t) \rangle$  y haciendo uso del Lema 3.13, resulta que  $\xi$  es solución del problema unidimensional de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \text{div} f^-(\gamma_{y_0}(t))\xi + \langle (f^-)^\perp(\gamma_{y_0}(t)), g^-(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu) \rangle, \\ \xi(0) = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

La solución de la ecuación lineal (3.30) se puede expresar como

$$\xi(t) = \beta^-(t) \int_0^t \frac{f^-(\gamma_{y_0}(\tau)) \wedge g^-(\gamma_{y_0}(\tau), 0, \mu)}{\beta^-(\tau)} d\tau,$$

donde  $\beta^-(t)$  viene dada en (3.21).

Ahora, de la expresión (3.28) se obtiene

$$\frac{\partial N^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \langle (f^-)^\perp(0, \hat{y}_0), W(T_{y_0}^-) \rangle = \xi(T_{y_0}^-)$$

y la conclusión (3.20) sigue inmediatamente.

Un razonamiento totalmente análogo permite probar (3.22). ■

El resultado anterior junto con una aplicación directa de la regla de la cadena nos va a permitir obtener la derivada respecto de  $\varepsilon$  de la función desplazamiento en el punto  $\varepsilon = 0$ .

**Teorema 3.15** *Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, entonces la derivada respecto de  $\varepsilon$  de la función desplazamiento definida en (3.11) evaluada en  $\varepsilon = 0$  viene dada por*

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \frac{1}{f(0, y_0)} \int_0^{T_{y_0}} \frac{f(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu)}{\beta(t)} dt, \quad (3.31)$$

donde

$$\beta(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f(\gamma_{y_0}(\tau)) d\tau \right).$$

**Demostración.** La función desplazamiento viene dada por

$$d(y_0, \varepsilon, \mu) = P(y_0, \varepsilon, \mu) - y_0 = P^+(P^-(y_0, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - y_0.$$

Si denotamos  $\hat{y}_0 = P^-(y_0, 0, \mu)$  y derivamos con respecto a  $\varepsilon$  se obtiene

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \frac{\partial P^+}{\partial \hat{y}_0}(\hat{y}_0, 0, \mu) \cdot \frac{\partial P^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) + \frac{\partial P^+}{\partial \varepsilon}(\hat{y}_0, 0, \mu).$$

Haciendo uso de la Proposición 2.15 se deduce

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \frac{f_1(0, \hat{y}_0) \cdot \beta^+(T_{y_0}^+)}{f_1(0, P^+(\hat{y}_0, 0, \mu))} \cdot \frac{\partial P^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) + \frac{\partial P^+}{\partial \varepsilon}(\hat{y}_0, 0, \mu)$$

y teniendo en cuenta las definiciones de  $N^-$  y  $N^+$  (ver (3.13) y (3.14)) y que  $P^+(\hat{y}_0, 0, \mu) = y_0$  se concluye que

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) = \frac{1}{f_1(0, y_0)} \left( \beta^+(T_{y_0}^+) \cdot \frac{\partial N^-}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) + \frac{\partial N^+}{\partial \varepsilon}(\hat{y}_0, 0, \mu) \right) \quad (3.32)$$



Por otra parte, si mediante  $\phi_t(X)$  denotamos el flujo del sistema (3.3), usando el cambio de variable  $s = t + T_{y_0}^-$  y las propiedades de grupo para el flujo obtenemos

$$\gamma_{\hat{y}_0}(t) = \phi_t(0, \hat{y}_0) = \phi_{s-T_{y_0}^-}(0, \hat{y}_0) = \phi_s(\phi_{-T_{y_0}^-}(0, \hat{y}_0)) = \phi_s(0, y_0) = \gamma_{y_0}(s), \quad (3.33)$$

luego, se satisface la igualdad

$$\int_0^{\varrho - T_{y_0}^-} \operatorname{div} f^+(\gamma_{\hat{y}_0}(t)) dt = \int_{T_{y_0}^-}^{\varrho} \operatorname{div} f^+(\gamma_{y_0}(s)) ds,$$

por lo que, véase (3.23),

$$\beta^+(\varrho - T_{y_0}^-) = \exp \left( \int_{T_{y_0}^-}^{\varrho} \operatorname{div} f^+(\gamma_{y_0}(s)) ds \right).$$

Así, para  $t > T_{y_0}^-$  se sigue que

$$\beta(t) = \beta^-(T_{y_0}^-) \cdot \exp \left( \int_{T_{y_0}^-}^t \operatorname{div} f^+(\gamma_{y_0}(s)) ds \right) = \beta^-(T_{y_0}^-) \cdot \beta^+(t - T_{y_0}^-),$$

expresión que particularizada para  $t = T_{y_0} = T_{y_0}^- + T_{y_0}^+$  nos conduce, junto a la Proposición 3.10, a

$$\beta^-(T_{y_0}^-) \cdot \beta^+(T_{y_0}^+) = \beta(T_{y_0}) = 1. \quad (3.34)$$

Ahora, a partir de (3.32) y (3.34), utilizando el Teorema 3.14, el cambio de variable  $s = t + T_{y_0}^-$  y la relación (3.33) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, 0, \mu) &= \frac{1}{f_1(0, y_0)} \int_0^{T_{y_0}^-} \frac{f^-(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu)}{\beta^-(t)} dt + \\ &\quad + \frac{1}{f_1(0, y_0)} \int_{T_{y_0}^-}^{T_{y_0}^+} \frac{f^+(\gamma_{y_0}(s)) \wedge g^+(\gamma_{y_0}(s), 0, \mu)}{\beta(s)} ds, \end{aligned}$$

lo que nos lleva directamente a (3.31). ■

El Teorema 3.15 nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 3.16** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A, llamaremos función de Melnikov del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  a lo largo de una órbita periódica  $\gamma_{y_0}(t)$  del sistema no perturbado (3.3) a la función

$$M(y_0, \mu) = \int_0^{T_{y_0}} \frac{f(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu)}{\beta(t)} dt, \quad (3.35)$$

donde

$$\beta(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f(\gamma_{y_0}(\tau)) d\tau \right).$$

Esta definición permite escribir (3.31) en la forma

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(y_0, \varepsilon, \mu) = \frac{1}{f_1(0, y_0)} M(y_0, \mu). \quad (3.36)$$

Cuando se anulan la divergencia de las funciones que definen al sistema no perturbado (3.3), la expresión de la función de Melnikov adopta una forma más compacta.

**Corolario 3.17** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A y además se verifica que  $\operatorname{div} f(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \neq 0$ , entonces

$$M(y_0, \mu) = \frac{1}{f_1(0, y_0)} \iint_{\operatorname{int}(\Gamma_{y_0})} \operatorname{div} g(x, y, 0, \mu) dx dy, \quad (3.37)$$

donde por divergencia de  $g$  entendemos

$$\operatorname{div} g(x, y, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} \frac{\partial g_1^+}{\partial x}(x, y, \varepsilon, \mu) + \frac{\partial g_2^+}{\partial y}(x, y, \varepsilon, \mu) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\partial g_1^-}{\partial x}(x, y, \varepsilon, \mu) + \frac{\partial g_2^-}{\partial y}(x, y, \varepsilon, \mu) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**Demostración:** Si la divergencia de  $f$  es nula, resulta  $\beta \equiv 1$ . En este caso, la expresión (3.31) adquiere la forma

$$M(y_0, \mu) = \int_0^{T_{y_0}} (f_1(\gamma_{y_0}(t))g_2(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu) - f_2(\gamma_{y_0}(t))g_1(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu)) dt.$$

Utilizando que  $\gamma_{y_0}(t)$  es solución de (3.3) y haciendo uso del Teorema de Green se deduce directamente (3.37). ■

Notemos que la relación (3.36) nos indica que la fórmula clásica de la teoría de Melnikov para sistemas continuamente diferenciables es también válida para sistemas continuos y continuamente diferenciables a trozos bizonales. Por tanto, los resultados clásicos (existencia y multiplicidad de ciclos límite) que se obtienen como aplicación de dicha teoría (véase [4], [7], [14], [15] y [45]) también son válidos para los sistemas objeto de estudio.

Ahora, establecemos la relación existente entre los ceros de la función de Melnikov del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  y sus ciclos límite hiperbólicos. Omitimos la prueba del siguiente resultado, pues éste aparece, para sistemas continuamente diferenciables, repetido en multiple ocasiones a lo largo de la literatura (véase por ejemplo [7]) y la demostración para los sistemas continuos y de clase  $C^1$  a trozos es completamente análoga.

**Teorema 3.18** *Supongamos que el sistema no perturbado (3.3) satisface la Hipótesis A y las funciones  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$  son dos veces continuamente diferenciables en sus respectivos dominios de definición.*

*Si existen  $\tilde{y}_0 \in I$ ,  $\mu_0 \in \mathbb{R}^k$  tales que*

$$M(\tilde{y}_0, \mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y_0}(\tilde{y}_0, \mu_0) \neq 0,$$

*entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema  $(3.4)_{\mu_0}$  posee un único ciclo límite hiperbólico en un entorno de  $\Gamma_{\tilde{y}_0}$ . Además:*

1. *El ciclo límite es asintóticamente estable si*

$$\frac{\varepsilon}{f_1(0, \tilde{y}_0)} \cdot \frac{\partial M}{\partial y_0}(\tilde{y}_0, \mu_0) < 0.$$

2. *El ciclo límite es inestable si*

$$\frac{\varepsilon}{f_1(0, \tilde{y}_0)} \cdot \frac{\partial M}{\partial y_0}(\tilde{y}_0, \mu_0) > 0.$$

Más aún, si  $M(\tilde{y}_0, \mu_0) \neq 0$ , entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema  $(3.4)_{\mu_0}$  no posee ciclos límite en un entorno de  $\Gamma_{\tilde{y}_0}$ .

Seguidamente definimos el concepto de ciclo límite bizonal múltiple para el sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  (ver [44]).

**Definición 3.19** Supongamos que el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A y los campos  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$  son de clase  $C^m$ , para  $m \geq 1$ . Si denotamos por  $\phi(t, X, \varepsilon, \mu)$  el flujo del sistema  $(3.4)_\mu$ , un ciclo límite  $\Upsilon_{y_0} \equiv \phi(t, (0, y_0), \varepsilon, \mu)$  del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  que cruce transversalmente la recta  $x = 0$  se dice de multiplicidad  $m$  si  $y_0$  es un cero de multiplicidad  $m$  de la función desplazamiento  $d(\cdot, \varepsilon, \mu)$ .

El siguiente resultado permite establecer la existencia de ciclos límite múltiple en sistemas planos, continuos y analíticos a trozos bizonales. La prueba de este resultado sigue una demostración idéntica al Teorema 1.3 de T.R. Blows y L.M. Perko [7], aunque éste hace referencia a sistemas analíticos en todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 3.20** Supongamos que el sistema (3.3) satisface la Hipótesis A y los campos  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$  son analíticos. Si existen  $\tilde{y}_0 \in I$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^k$  tales que

$$M(\tilde{y}_0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial y_0}(\tilde{y}_0, \mu_0) = \dots = \frac{\partial^{m-1} M}{\partial y_0^{m-1}}(\tilde{y}_0, \mu_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^m M}{\partial y_0^m}(\tilde{y}_0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial \mu_j}(\tilde{y}_0, \mu_0) \neq 0$$

para algún  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , entonces existe una función  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  analítica de forma que el sistema  $(3.4)_{\mu(\varepsilon)}$  posee un único ciclo límite de multiplicidad  $m$  en un entorno de  $\Gamma_{\tilde{y}_0}$ .

**Nota 3.21** Puede probarse, siguiendo razonamientos análogos a los realizados en la demostración del Teorema 3.15, que la relación de proporcionalidad dada en (3.36) entre la derivada de la función desplazamiento respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  y la función de Melnikov  $M(y_0, \mu)$  sigue siendo válida para sistemas

continuos y continuamente diferenciables a trozos definidos en múltiples zonas, siempre que las órbitas periódicas del continuo crucen transversalmente a las líneas de separación de estas zonas.

### 3.2.2 **Perturbación de órbitas homoclinas y heteroclinas**

Para sistemas continuamente diferenciables que verifiquen hipótesis adecuadas es posible extender la teoría de Melnikov para establecer la existencia de lazos homoclinos y heteroclinos.

Para el estudio de los lazos homoclinos, el método de Melnikov descansa en las propiedades que satisface una cierta función distancia definida entre las variedades estables e inestables de un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla del sistema perturbado.

En concreto, se determina la relación existente entre esa función distancia y la función de Melnikov, y a partir de aquí, se establece la existencia de órbitas homoclinas en el sistema perturbado cuando la perturbación es suficientemente pequeña (ver [7] y [45]).

Seguidamente generalizamos esta teoría a los sistemas continuos y continuamente diferenciables a trozos. Para ello, comenzamos suponiendo que el sistema no perturbado (3.3) satisface la siguiente hipótesis.

#### Hipótesis B:

El sistema no perturbado (3.3) posee una órbita homoclina asociada a un punto de silla hiperbólico que cruza transversalmente el eje de ordenadas en dos puntos.

En el supuesto de la Hipótesis B introducimos algunas notaciones. Denotaremos la órbita homoclina de (3.3) por

$$\Gamma : X = \gamma(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

el punto de silla hiperbólico se denotará mediante  $\bar{p}_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  y los puntos de intersección de  $\Gamma$  con la línea de separación  $x = 0$  se denotarán mediante  $q_0 = (0, u_0)$  y  $r_0 = (0, v_0)$ , con  $u_0 < v_0$ .

Nótese que no es restrictivo suponer que la homoclina  $\Gamma$  se recorre en sentido antihorario y que el punto de silla hiperbólico  $\bar{p}_0$  se encuentra en el semiplano izquierdo  $x < 0$  (véase la Figura 3.4). En otros casos, bastaría cambiar el signo de la variable independiente  $t$  o de la variable  $x$ . Además, denotaremos por  $T_0 > 0$  el semitiempo de vuelo derecho de la órbita homoclina, es decir, si  $\phi(t, X)$  es el flujo del sistema (3.3), entonces  $\phi(T_0, q_0) = r_0$ . Téngase en cuenta que la condición de transversalidad nos indica que  $f_1(0, u_0) \cdot f_1(0, v_0) \neq 0$ .

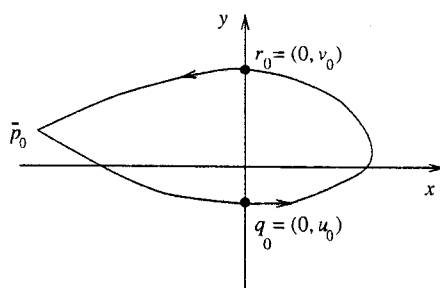


Figura 3.4: Una órbita homoclina para el sistema (3.3).

El siguiente resultado es una aplicación directa de los Teoremas de la Función Implícita, de las Variedades Estables e Inestables y la persistencia de puntos de equilibrios hiperbólicos (ver [27] y [42]). La demostración sigue las mismas pautas que la prueba del Lema 1 de L.M. Perko [45]. Recuerdese que  $X(t, z, \varepsilon, \mu)$  denota la solución del sistema perturbado (3.4) $_{\mu}$  con condición inicial  $(0, z)$ .

**Proposición 3.22** *Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis B, entonces existen tres funciones continuamente diferenciables  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$ ,  $u(\varepsilon, \mu)$  y  $v(\varepsilon, \mu)$ , definidas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, de forma que:*

1. *Se verifican las igualdades  $\bar{p}(0, \mu) = \bar{p}_0$ ,  $u(0, \mu) = u_0$  y  $v(0, \mu) = v_0$ .*

2. El punto  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$  es un punto de silla hiperbólico del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$ .
3. Los puntos  $(0, v(\varepsilon, \mu))$  y  $(0, u(\varepsilon, \mu))$  son, respectivamente, los puntos de corte de las variedades estables e inestables de  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$  con la recta de separación  $x = 0$ . Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, v(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = \lim_{t \rightarrow -\infty} X(t, u(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = \bar{p}(\varepsilon, \mu).$$

La transversalidad de la órbita homoclina  $\Gamma$  permite definir en un entorno de  $\{u_0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$  la semiaplicación de Poincaré derecha  $P^+$  del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  (ver Definición 3.5). La semiaplicación  $P^+$  y las conclusiones de la Proposición 3.22 nos llevan a la siguiente definición.

**Definición 3.23** Si el sistema (3.3) satisface la Hipótesis B, llamaremos función distancia entre las variedades estables e inestables del equilibrio  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$  del sistema  $(3.4)_\mu$  a la función, definida en un entorno de  $\{0\} \times \mathbb{R}^k$ , por

$$d(\varepsilon, \mu) = P^+(u(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - v(\varepsilon, \mu). \quad (3.38)$$

En la Figura 3.5 puede verse el significado geométrico de la función distancia definida en (3.38) y los valores  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$ ,  $u(\varepsilon, \mu)$  y  $v(\varepsilon, \mu)$ . Destacamos que para los sistemas continuamente diferenciables la función distancia se define comúnmente en una línea ortogonal a la homoclina  $\Gamma$ .

Notemos que si la función distancia se anula, entonces el correspondiente sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  posee una órbita homoclina.

El siguiente resultado proporciona la derivada respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  de la ordenada de los puntos de corte de las variedades estables e inestables de  $\bar{p}(\varepsilon, \mu)$  con la línea de separación  $x = 0$  (es decir, de los valores  $u(\varepsilon, \mu)$  y  $v(\varepsilon, \mu)$ ). Recuérdese que  $\gamma_z(t)$  denota la órbita del sistema no perturbado (3.3) que posee como condición inicial el punto  $(0, z)$ .

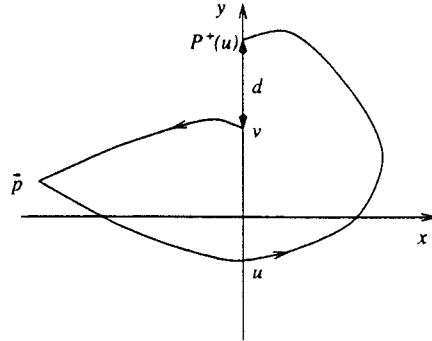


Figura 3.5: Función distancia para el sistema  $(3.4)_\mu$ .

**Proposición 3.24** *Supongamos que el sistema no perturbado (3.3) verifica la Hipótesis B. Si los campos vectoriales  $f^+ + \varepsilon g^+$  y  $f^- + \varepsilon g^-$  son de clase  $C^2$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. La derivada de  $v(\varepsilon, \mu)$  respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  viene dada por

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{-1}{f_1^-(0, v_0)} \int_0^{+\infty} \frac{f^-(\gamma_{v_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{v_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{v_0}^-(t)} dt, \quad (3.39)$$

siendo

$$\beta_{v_0}^-(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f^-(\gamma_{v_0}(\tau)) d\tau\right). \quad (3.40)$$

2. La derivada de  $u(\varepsilon, \mu)$  respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{1}{f_1^-(0, u_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{f^-(\gamma_{u_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{u_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{u_0}^-(t)} dt, \quad (3.41)$$

siendo

$$\beta_{u_0}^-(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f^-(\gamma_{u_0}(\tau)) d\tau\right). \quad (3.42)$$

**Demostración.** Haciendo uso del Teorema de la Variedad Estable (ver [2] y [44]), la solución del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  que para  $t = 0$  pasa por  $(0, v(\varepsilon, \mu))$  puede expresarse para  $t \geq 0$  en la forma

$$X(t, v(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = X(t, v_0, 0, \mu) + \varepsilon X_1(t, v_0, 0, \mu) + O(\varepsilon^2), \quad (3.43)$$



donde  $X_1(t, v_0, 0, \mu)$  es solución de la siguiente ecuación variacional

$$\dot{X}_1(t, v_0, 0, \mu) = Df^-(\gamma_{v_0}(t))X_1(t, v_0, 0, \mu) + g^-(\gamma_{v_0}(t), 0, \mu).$$

Si definimos la función

$$\xi(t) = \left\langle X_1(t, v_0, 0, \mu), (f^-)^\perp(\gamma_{v_0}(t)) \right\rangle, \quad (3.44)$$

donde  $(f^-)^\perp = (-f_2^-, f_1^-)$ , entonces utilizando el Lema 3.13 se sigue que  $\xi(t)$  satisface la ecuación diferencial unidimensional

$$\dot{\xi}(t) = \operatorname{div} f^-(\gamma_{v_0}(t)) \cdot \xi(t) + \left\langle (f^-)^\perp(\gamma_{v_0}(t)), g^-(\gamma_{v_0}(t), 0, \mu) \right\rangle, \quad (3.45)$$

cuya solución para  $t \geq 0$  viene dada por

$$\frac{\xi(t)}{\beta_{v_0}^-(t)} - \frac{\xi(0)}{\beta_{v_0}^-(0)} = \int_0^t \frac{f^-(\gamma_{v_0}(s)) \wedge g^-(\gamma_{v_0}(s), 0, \mu)}{\beta_{v_0}^-(s)} ds, \quad (3.46)$$

donde  $\beta_{v_0}^-(t)$  está definida en (3.40).

Por otra parte,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\langle X_1(t, v_0, 0, \mu), (f^-)^\perp(\gamma_{v_0}(t)) \right\rangle = 0,$$

ya que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{v_0}(t) = \bar{p}_0$ ,  $f^-(\bar{p}_0) = 0$  ( $\bar{p}_0$  un punto de equilibrio de (3.3) situado en el semiplano  $x < 0$ ) y la función  $X_1(t, v_0, 0, \mu)$  permanece acotada gracias al Teorema de la Variedad Estable (véase [27]).

Así, a partir de la igualdad (3.46) encontramos la relación

$$\xi(0) = - \int_0^{+\infty} \frac{f^-(\gamma_{v_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{v_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{v_0}^-(t)} dt. \quad (3.47)$$

De igualdad (3.43) y teniendo en cuenta que  $X(0, v(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = (0, v(\varepsilon, \mu))$  se obtiene

$$X_1(0, v_0, 0, \mu) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (X(0, v(0, \mu), 0, \mu)) = \left( 0, \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) \right),$$

luego de (3.44) deducimos que

$$\xi(0) = \left\langle \left( 0, \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) \right), (-f_2^-(0, v_0), f_1^-(0, v_0)) \right\rangle = f_1^-(0, v_0) \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu)$$

y la relación (3.39) sigue directamente de (3.47).

Un razonamiento análogo establece la igualdad (3.41). ■

El Teorema 3.14 y la Proposición 3.24 permiten obtener la derivada respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  de la función distancia  $d$  definida en (3.38).

**Teorema 3.25** *Supongamos que el sistema no perturbado (3.3) satisface la Hipótesis B. Si los campos vectoriales  $f^+ + \varepsilon g^+$ ,  $f^- + \varepsilon g^-$  son de clase  $C^2$ , entonces la derivada respecto de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  de la función distancia  $d$  definida en (3.38) viene dada por*

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{\beta_{u_0}^+(T_0)}{f_1^-(0, v_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\gamma_{u_0}(t)) \wedge g(\gamma_{u_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{u_0}(t)} dt, \quad (3.48)$$

siendo

$$\beta_{u_0}^+(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f^+(\gamma_{u_0}(\tau)) d\tau \right) \quad (3.49)$$

$$\beta_{u_0}(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f(\gamma_{u_0}(\tau)) d\tau \right) \quad (3.50)$$

**Demostración.** A partir la definición de la función distancia (véase (3.38)) y utilizando la regla de la cadena se obtiene que

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{\partial P^+}{\partial u}(u_0, 0, \mu) \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \mu) + \frac{\partial P^+}{\partial \varepsilon}(u_0, 0, \mu) - \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) \quad (3.51)$$

Haciendo uso de las Proposiciones 2.15 y 3.24 y del Teorema 3.14 obtenemos

$$\frac{\partial P^+}{\partial u}(u_0, 0, \mu) \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{\beta_{u_0}^+(T_0)}{f_1^-(0, v_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{f^-(\gamma_{u_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{u_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{u_0}^-(t)} dt,$$

$$\frac{\partial P^+}{\partial \varepsilon}(u_0, 0, \mu) = \frac{\beta_{u_0}^+(T_0)}{f_1^-(0, v_0)} \int_0^{T_0} \frac{f^+(\gamma_{u_0}(t)) \wedge g^+(\gamma_{u_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{u_0}^+(t)} dt,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{-1}{f_1^-(0, v_0)} \int_0^{+\infty} \frac{f^-(\gamma_{v_0}(t)) \wedge g^-(\gamma_{v_0}(t), 0, \mu)}{\beta_{v_0}^-(t)} dt.$$

Realizando el cambio de variable  $s = t + T_0$  y utilizando propiedades de grupo para el flujo del sistema no perturbado (3.3) encontramos

$$\beta_{v_0}^-(s - T_0) = \exp \left( \int_{T_0}^s \operatorname{div} f^-(\gamma_{u_0}(\tau)) d\tau \right),$$

$$\beta_{u_0}^+(T_0) \cdot \beta_{v_0}^-(s - T_0) = \beta_{u_0}(s)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{\beta_{u_0}^+(T_0)}{f_1(0, v_0)} \int_{T_0}^{+\infty} \frac{f^-(\gamma_{u_0}(s)) \wedge g^-(\gamma_{u_0}(s), 0, \mu)}{\beta_{u_0}(s)} ds,$$

lo que nos conduce, a partir de (3.51), a la relación (3.48). ■

El siguiente resultado es una aplicación directa del Teorema de Green y el Teorema 3.25.

**Corolario 3.26** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.25, si  $\operatorname{div} f(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \neq 0$ , entonces*

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(0, \mu) = \frac{1}{f_1(0, v_0)} \iint_{\operatorname{int}(\Gamma \cup \{\bar{p}_0\})} \operatorname{div} g(x, y, 0, \mu) dx dy. \quad (3.52)$$

El Teorema 3.25 puede generalizarse de forma directa al caso en el que la órbita homoclina  $\gamma(t)$  cruza transversalmente el eje de separación  $x = 0$  en un número finito de puntos.

Un desarrollo similar puede realizarse para el caso en el que sistema no perturbado (3.3) posea una conexión heteroclina que cruce transversalmente la recta de separación  $x = 0$  en un número finito de puntos.

Estas consideraciones previas nos inducen la siguiente definición.

**Definición 3.27** *Si el sistema no perturbado (3.3) posee una órbita homoclina o heteroclina*

$$\Gamma : X = \gamma(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

que cruza transversalmente la línea de separación  $x = 0$  en un número finito de puntos, llamaremos función de Melnikov del sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  a lo largo de la conexión  $\gamma(t)$  de (3.3) a la función definida en  $\mathbb{R}^k$  por

$$M_h(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\gamma(t)) \wedge g(\gamma(t), 0, \mu)}{\beta_h(t)} dt, \quad (3.53)$$

donde

$$\beta_h(t) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} f(\gamma(\tau)) d\tau \right). \quad (3.54)$$

Si una órbita homoclina o heteroclina no interseca a la recta de separación  $x = 0$  es de aplicación la teoría clásica de Melnikov y en este caso encontramos que la función de Melnikov es la definida en (3.53).

Debido al Teorema 3.25, podemos generalizar a los sistemas diferenciables a trozos los resultados de la teoría de Melnikov relativos a la existencia de homoclinas y heteroclinas para sistemas diferenciables. El siguiente resultado sigue una demostración análoga a la teoría clásica (véase [7] y [45]).

**Teorema 3.28** *Supongamos que el sistema no perturbado (3.3) posee una órbita homoclina (resp. heteroclina)*

$$\Gamma : X = \gamma(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

que no corta a la línea de separación  $x = 0$  o la cruza transversalmente en un número finito de puntos y  $f^+ + \varepsilon g^+$ ,  $f^- + \varepsilon g^-$  son campos de clase  $C^2$ .

Si existe un valor  $\mu_0 \in \mathbb{R}^k$  de forma que

$$M_h(\mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M_h}{\partial \mu_j}(\mu_0) \neq 0,$$

para algún  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , entonces existe una función  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  de clase  $C^1$  definida para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de forma que el sistema  $(3.4)_{\mu(\varepsilon)}$  posee una órbita homoclina (resp. heteroclina) en un entorno de  $\Gamma$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño.

Además, si  $M_h(\mu_0) \neq 0$ , entonces para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y para todo  $\mu$  suficientemente cercano a  $\mu_0$ , el sistema perturbado  $(3.4)_\mu$  no posee homoclinas (resp. heteroclinas) en un entorno de  $\Gamma$ .

Los resultados obtenidos en esta sección se aplicarán a sistemas continuos lineales a trozos definidos en zonas dos y en tres zonas con simetría.

### 3.3 Ciclos límite y separatrices en sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección aplicaremos la teoría de Melnikov a un sistema continuo lineal a trozos bizonal observable de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}^\nabla x + a_{12}y + a_1, \\ \dot{y} = a_{21}^\nabla x + a_{22}y + a_2. \end{cases} \quad (3.55)$$

En el Capítulo 1, se estableció que el sistema homogéneo asociado al sistema (3.55) es observable si y sólo si  $a_{12} \neq 0$ . En consecuencia, de la Proposición 1.32, se deduce la existencia de un cambio de variable que transforma el sistema (3.55) a la forma de Lienard generalizada

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = d^\nabla x - a, \end{cases} \quad (3.56)$$

donde

$$a \in \mathbb{R}, \quad t^\nabla = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla & a_{12} \\ a_{21}^\nabla & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d^\nabla = \det \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla & a_{12} \\ a_{21}^\nabla & a_{22} \end{pmatrix}.$$

El estudio completo del conjunto de bifurcaciones de un sistema continuo lineal a trozos bizonal, que posee un ciclo límite, puede encontrarse en los trabajos de E. Freire et ali. [22] y F. Rodrigo [47]. En las siguientes páginas

comprobaremos que la teoría de Melnikov desarrollada en la Sección 3.2 permite obtener, desde un punto de vista local en el espacio de parámetros, algunos de los resultados de bifurcaciones recogidos en [22] y [47].

Para el desarrollo que sigue debemos tener presente, tal como se prueba en la Proposición 1.7 de [22], que si el sistema (3.56) posee un ciclo límite, entonces  $t^+ \cdot t^- < 0$ .

Por otra parte, recuérdese, a partir de las transformaciones invariantes para el sistema (3.56) descritas en la Nota 1.33, que sólo es necesario estudiar el sistema en cuestión para los valores de  $a$  mayores o iguales que cero.

Pretendemos estudiar el sistema (3.56) cuando los valores de las trazas  $t^+$  y  $t^-$  son suficientemente pequeños. Para ello, realizamos los cambios  $t^+ = \varepsilon t_1^+$  y  $t^- = \varepsilon t_1^-$ , siendo  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Ahora, podemos considerar como sistema no perturbado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = d^+x - a \end{cases} \quad \text{si } x \geq 0, \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = d^-x - a \end{cases} \quad \text{si } x < 0. \quad (3.57)$$

y como sistema perturbado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon t_1^+ x \\ \dot{y} = d^+x - a \end{cases} \quad \text{si } x \geq 0, \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon t_1^- x \\ \dot{y} = d^-x - a \end{cases} \quad \text{si } x < 0. \quad (3.58)$$

Así, siguiendo las notaciones de la Sección 3.2, tomamos

$$f^+(x, y) = (-y, d^+x - a), \quad f^-(x, y) = (-y, d^-x - a),$$

$$g^+(x, y, \varepsilon, \mu) = (t_1^+x, 0), \quad g^-(x, y, \varepsilon, \mu) = (t_1^-x, 0),$$

donde  $\mu = (t_1^+, t_1^-)$ .

Consideremos el sistema (3.58) con  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño y siendo  $t_1^+ \cdot t_1^- \neq 0$ . Si  $d^+ > 0$  (respectivamente,  $d^+ < 0$ ), entonces las órbitas del

sistema (3.58) en la zona  $x > 0$  corresponden a órbitas de un foco lineal (respectivamente, un punto de silla lineal).

Consideraciones análogas puede realizarse sobre el comportamiento dinámico del sistema (3.58) en la zona  $x < 0$ , dependiendo del signo de  $d^-$  y para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño.

Como consecuencia de estas propiedades diremos que el sistema (3.58), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño y  $t_1^+ \cdot t_1^- \neq 0$ , es de tipo *foco-foco* si  $d^+ > 0$  y  $d^- > 0$  y de tipo *silla-foco* si  $d^+ > 0$  y  $d^- < 0$ .

### 3.3.1 Ciclos límite para el caso foco-foco

Consideremos el sistema (3.57) con  $d^+ > 0, d^- > 0$  y  $a > 0$ . En esta situación el sistema (3.57) posee un único punto de equilibrio  $\bar{X} = (a/d^+, 0)$ .

El sistema (3.57) es reversible, es decir, invariante mediante la transformación  $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$ . Esta invariancia y el hecho de que el punto de equilibrio  $\bar{X}$  sea un centro para el sistema lineal de la parte derecha, permite asegurar que el sistema (3.57) posee un continuo no acotado de órbitas periódicas que rodean a dicho punto de equilibrio  $\bar{X}$ .

En este continuo existen órbitas periódicas que evolucionan siempre en la zona  $x \geq 0$  y órbitas periódicas que lo hacen en las dos zonas. Estas últimas forman un continuo no acotado de órbitas periódicas que cruzan transversalmente, y en sentido antihorario, el eje  $x = 0$ .

De hecho, integrando el sistema, se observa que cada órbita periódica bizonal está formada por dos trozos de elipses que se unen con continuidad y diferenciabilidad en la línea  $x = 0$ . Esta familia de órbitas periódicas bizonales puede parametrizarse en la forma

$$\Gamma_{y_0} \equiv \begin{cases} (d^-x - a)^2 + d^-y^2 = a^2 + d^-y_0^2 & \text{si } x < 0, \\ (d^+x - a)^2 + d^+y^2 = a^2 + d^+y_0^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.59)$$

con  $y_0 \in (0, +\infty)$  y siendo  $(0, y_0)$  el punto de corte de  $\Gamma_{y_0}$  con el eje OY (ver Figura 3.6).

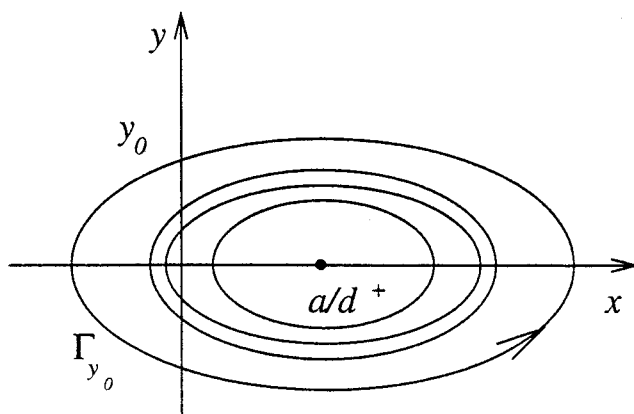


Figura 3.6: Plano de fase del sistema (3.57) con  $d^+ > 0$  y  $d^- > 0$ .

Nótese que el campo vectorial que define al sistema perturbado (3.58) es analítico a trozos. Esto implica la analiticidad de las semiaplicaciones de Poincaré en situaciones de transversalidad y, en consecuencia, la analiticidad de la aplicación de Poincaré, la función desplazamiento y la función de Melnikov asociada.

Observemos que en el sistema no perturbado (3.57) las funciones  $f^+$  y  $f^-$  poseen divergencia nula. De este modo, según el Corolario 3.17, la función de Melnikov del sistema perturbado (3.58) a lo largo de una órbita periódica  $\gamma_{y_0}(t)$  de (3.57) está dada por

$$M_1(y_0, \mu) = \iint_{\text{int}(\Gamma_{y_0})} \text{div } g(\gamma_{y_0}(t), 0, \mu) dx dy, \quad (3.60)$$

siendo  $\mu = (t_1^+, t_1^-)$ .

Puesto que la divergencia de la función  $g$  para el sistema perturbado (3.58) posee la forma simple

$$\text{div } g(x, y, \varepsilon, \mu) = \text{div } g(x, y, \varepsilon, t_1^+, t_1^-) = \begin{cases} t_1^- & \text{si } x < 0, \\ t_1^+ & \text{si } x > 0, \end{cases}$$



la función de Melnikov  $M_1$  adopta en este caso la forma particular

$$M_1(y_0, \mu) = t_1^+ S^+(y_0) + t_1^- S^-(y_0), \quad (3.61)$$

siendo

$$S^+(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}))$$

y

$$S^-(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\})).$$

Ahora es sencillo establecer la existencia de ciclos límite del sistema no perturbado (3.58) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. El siguiente resultado no es más que la restricción local de la Proposición 15 de [22] (para valores pequeños de las trazas  $t^+$  y  $t^-$  en el sistema (3.56)), aunque en este caso es posible probar la hiperbolicidad del ciclo límite encontrado, resultado que no se establece en [22] (véase también [47]).

**Proposición 3.29** *El sistema perturbado (3.58) con los valores de los parámetros  $t_1^+ \cdot t_1^- < 0$ ,  $d^+ > 0$ ,  $d^- > 0$ ,  $a \neq 0$  y  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño posee ciclo límite si y sólo si*

$$\text{sgn}(a \cdot t_1^+) = -\text{sgn}\left(\frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}}\right). \quad (3.62)$$

*Además, cuando existe ciclo límite, éste es único, hiperbólico y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , siendo  $\hat{y}_0$  el único valor estrictamente positivo que satisface la ecuación*

$$M_1(\hat{y}_0, t_1^+, t_1^-) = 0.$$

**Demostración:** Atendiendo al conjunto de transformaciones invariantes del sistema (3.56) (ver Nota 1.33), la prueba de este resultado se realizará sólo para el caso  $a > 0$ ,  $t_1^+ > 0$  y  $t_1^- < 0$ . Para esta situación, utilizando la

expresión (3.59) de las curvas  $\Gamma_{y_0}$ , el área de cada una de las porciones de elipses que define a  $\Gamma_{y_0}$  tienen la forma

$$S^+(y_0) = \frac{\pi(a^2 + d^+y_0^2)}{d^+\sqrt{d^+}} + \frac{2ay_0}{d^+} - \frac{2}{\sqrt{d^+}} \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{a^2}{d^+} + y_0^2 - y^2} dy, \quad (3.63)$$

$$S^-(y_0) = -\frac{2ay_0}{d^-} + \frac{2}{\sqrt{d^-}} \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{a^2}{d^-} + y_0^2 - y^2} dy. \quad (3.64)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.61) y derivando con respecto a  $y_0$  puede probarse que

$$\frac{\partial M_1}{\partial y_0}(y_0, t_1^+, t_1^-) = 2y_0 F_1(y_0),$$

donde

$$F_1(y_0) = \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}} \arcsen \sqrt{\frac{d^- y_0^2}{a^2 + d^- y_0^2}} + \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \pi - \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \arcsen \sqrt{\frac{d^+ y_0^2}{a^2 + d^+ y_0^2}}.$$

Derivando la función  $F_1$  se obtiene que

$$\frac{dF_1}{dy_0} = a \left( \frac{t_1^-}{a^2 + d^- y_0^2} - \frac{t_1^+}{a^2 + d^+ y_0^2} \right) < 0$$

cuando  $d^+ > 0, d^- > 0, a > 0, t_1^+ > 0$  y  $t_1^- < 0$  y resulta que la función  $F_1$  es monótona decreciente para todo valor  $y_0 > 0$ .

Así, al ser

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} M_1(y_0, t_1^+, t_1^-) = \frac{t_1^+ a^2}{d^+ \sqrt{d^+}} \pi > 0,$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} F_1(y_0) = \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \pi > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} F_1(y_0) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}} \right)$$

se deduce que:

- Si  $\frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}} \geq 0$ , entonces  $F_1(y_0) > 0$  para todo  $y_0 \in (0, +\infty)$  y, por tanto,  $M_1(\cdot, t_1^+, t_1^-)$  es una función estrictamente creciente que nunca corta al eje de abscisa (ver Figura 3.7 (a)).

- Si  $\frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}} < 0$ , entonces  $F_1$  posee una única raíz real positiva  $y_0^*$ , coincidente con el único punto crítico (máximo en este caso) de la función de Melnikov  $M_1(\cdot, t_1^+, t_1^-)$ .

A partir del Teorema del Valor Medio y para  $y_0 > 0$  tenemos que

$$M_1(y_0 + 1, t_1^+, t_1^-) - M_1(y_0, t_1^+, t_1^-) = \frac{\partial M_1}{\partial y_0}(\tilde{y}_0, t_1^+, t_1^-) = 2\tilde{y}_0 F_1(\tilde{y}_0),$$

con  $\tilde{y}_0 \in (y_0, y_0 + 1)$ .

De esta forma,

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} (M_1(y_0 + 1, t_1^+, t_1^-) - M_1(y_0, t_1^+, t_1^-)) = -\infty,$$

luego, puesto que  $M_1(\cdot, t_1^+, t_1^-)$  es monótona decreciente en el intervalo  $(y_0^*, +\infty)$ , ésta no puede estar acotada inferiormente, por lo que se tiene

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} M_1(y_0, t_1^+, t_1^-) = -\infty.$$

Por consiguiente, la función  $M_1(\cdot, t_1^+, t_1^-)$  posee una única raíz positiva  $\hat{y}_0$  (ver Figura 3.7 (b)), que además satisface la condición

$$\frac{\partial M_1}{\partial y_0}(\hat{y}_0, t_1^+, t_1^-) < 0.$$

La demostración concluye aplicando directamente el Teorema 3.18. ■

**Nota 3.30** Conviene realizar algunas observaciones sobre las consecuencias obtenidas en la Proposición 3.29.

1. En primer lugar, observemos que la superficie de ecuación

$$\frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}} = 0$$

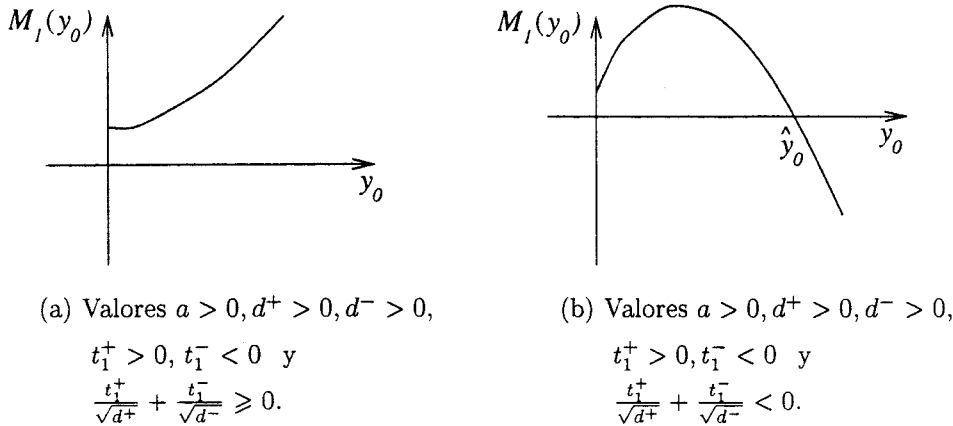


Figura 3.7: Función de Melnikov  $M_1$  para el sistema foco-foco (3.58).

en el espacio de parámetros nos delimita la aparición o desaparición, según el caso, del único ciclo límite existente.

Además, la única raíz positiva  $\hat{y}_0$  de la función de Melnikov  $M_1$  tiende a infinito cuando  $\frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_1^-}{\sqrt{d^-}}$  se aproxima a cero. Esto coincide claramente con el estudio que se realizará en el siguiente capítulo sobre la bifurcación en el infinito que presenta el sistema considerado.

- Por otro lado, la característica homotética del parámetro  $a$  sobre el sistema (3.56) (ver Nota 1.20) se traslada a la raíz positiva de la función de Melnikov  $M_1$ . En efecto, es inmediato verificar que se satisface la relación

$$M_1(y_0, t_1^+, t_1^-, d^+, d^-, a) = a^2 M_1\left(\frac{y_0}{a}, t_1^+, t_1^-, d^+, d^-, 1\right), \quad \text{para } a > 0.$$

- La amplitud del ciclo límite puede conseguirse en una primera aproximación (para  $t_1^+$  pequeño) a partir de la raíz  $\hat{y}_0$  de  $M_1$ . Para  $t_1^+ = 0$  y  $t_1^- < 0$  el sistema perturbado (3.58) posee un continuo acotado de órbitas periódicas que rodean al punto de equilibrio  $\bar{X} = (a/d^+, 0)$ . La última de estas órbitas periódicas toca tangencialmente al eje de ordenada en

el punto  $(0, 0)$  y variando  $t_1^+$  hacia valores positivos que verifiquen la relación (3.62), nace a partir de ella un ciclo límite como consecuencia de una bifurcación de Hopf-Centro (ver [25] para más detalles).

Obsérvese que  $M_1(0, 0, t_1^-) = 0$  y puesto que

$$\frac{\partial M_1}{\partial t_1^+}(0, 0, t_1^-) = S^+(0) = \frac{\pi a^2}{d^+ \sqrt{d^+}} \neq 0,$$

se sigue, aplicando el Teorema de la Función Implícita, que  $t_1^+$  puede desarrollarse en función de  $\hat{y}_0$  (única raíz de la función de Melnikov  $M_1$ ) en un entorno del origen.

De la igualdad  $M_1(\hat{y}_0, t_1^+, t_1^-) = 0$  se deduce (ver (3.61)) que

$$t_1^+ = -t_1^- \frac{S^-(\hat{y}_0)}{S^+(\hat{y}_0)}. \quad (3.65)$$

Ahora bien, desarrollando  $S^+$  y  $S^-$  (ver (3.63)–(3.64)) en un entorno del origen obtenemos

$$S^+(\hat{y}_0) = \frac{\pi a^2}{d^+ \sqrt{d^+}} + O(\hat{y}_0), \quad S^-(\hat{y}_0) = \frac{1}{6a} \hat{y}_0^3 + O(\hat{y}_0^4)$$

y a partir de (3.65) encontramos

$$t_1^+ = -t_1^- \frac{d^+ \sqrt{d^+}}{6\pi a^3} \hat{y}_0^3 + O(\hat{y}_0^4),$$

de donde,

$$\hat{y}_0 = -a \left( \frac{6\pi}{t_1^- d^+ \sqrt{d^+}} \right)^{1/3} \cdot (t_1^+)^{1/3} + \dots$$

Así, tomando en el sistema perturbado (3.58) como parámetro variable  $t_1^+$  podemos concluir que la amplitud del ciclo límite proveniente de la bifurcación de Hopf-Centro crece, en primera aproximación, de la misma forma que  $(t_1^+)^{1/3}$ . Este resultado coincide con el estudio descrito en [25] sobre la bifurcación Hopf-Centro para un sistema lineal a trozos trizonal y simétrico (véase la Sección 3.4 de este capítulo).

### 3.3.2 Perturbación de un sistema foco–foco homogéneo

Aplicaremos desde otro punto de vista la teoría de Melnikov a un sistema de tipo foco–foco. Si el sistema (3.56) es de tipo foco–foco, entonces las matrices reales de orden dos que rigen al sistema poseen autovalores de la forma  $\alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\alpha^- \pm i\beta^-$ , con  $\beta^+, \beta^- > 0$ .

Así,  $t^\nabla = 2\alpha^\nabla$  y  $d^\nabla = (\alpha^\nabla)^2 + (\beta^\nabla)^2$ , por lo que el sistema (3.56) puede escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\alpha^\nabla x - y, \\ \dot{y} = \left( (\alpha^\nabla)^2 + (\beta^\nabla)^2 \right) x - a. \end{cases} \quad (3.66)$$

Ahora nos interesaremos en la dinámica del sistema para  $\alpha^+/\beta^+ + \alpha^-/\beta^-$  y  $a$  no nulos y suficientemente pequeños.

Para ello, realizamos las transformaciones

$$\frac{\alpha^+}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-} = \varepsilon\omega \quad \text{y} \quad a = \varepsilon A, \quad \text{siendo} \quad |\varepsilon| \ll 1.$$

Con las anteriores transformaciones y siguiendo notaciones ya empleadas, el sistema (3.66) se escribe en la forma

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, \varepsilon, \mu) \quad (3.67)$$

donde  $X = (x, y)$ ,  $\mu = (\omega, A)$ ,

$$f^-(x, y) = \left( -2\frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} x - y, \left( \frac{\beta^-}{\beta^+} \right)^2 [(\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2] x \right),$$

$$f^+(x, y) = \left( 2\alpha^+ x - y, \left( (\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2 \right) x \right),$$

$$g^-(x, y, \varepsilon, \omega, A) = \left( 2\beta^- \omega x, (\beta^-)^2 \varepsilon \omega x - 2(\beta^-)^2 \omega \frac{\alpha^+}{\beta^+} x - A \right)$$

y

$$g^+(x, y) = (0, -A).$$

De esta forma, para  $\varepsilon = 0$  tenemos el sistema no perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} x & -y \\ \dot{y} = \left[ \left( \frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} \right)^2 + (\beta^-)^2 \right] x & \end{cases} \quad \text{si } x < 0, \quad (3.68)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\alpha^+ x & -y \\ \dot{y} = \left( (\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2 \right) x & \end{cases} \quad \text{si } x \geq 0.$$

Como se observa claramente, el sistema (3.68) es homogéneo y posee como único punto de equilibrio el origen. Además, tras algunos cálculos sencillos, puede comprobarse con facilidad que el origen se encuentra rodeado de un continuo no acotado de órbitas periódicas isócronas con periodos  $T = \pi(1/\beta^+ + 1/\beta^-)$  (ver [22] y [47]). El retrato de fase del sistema (3.68) puede observarse en la Figura 3.8.

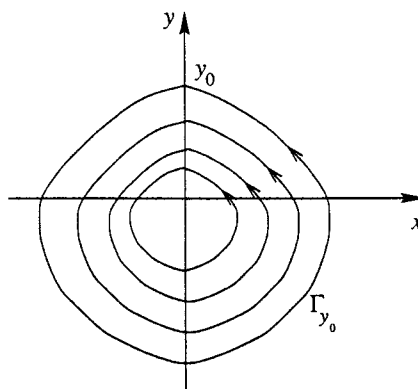


Figura 3.8: Plano de fase del sistema homogéneo (3.68).

Las órbitas periódicas del sistema no perturbado pueden obtenerse explícitamente. En concreto (véase [22] y [47]), la solución periódica, con periodo  $T = \pi(1/\beta^+ + 1/\beta^-)$ ,  $\Gamma_{y_0} \equiv \gamma_{y_0}(t) = (x_{y_0}(t), y_{y_0}(t))$  del problema de valores

iniciales asociado al sistema (3.68) con condición inicial  $\gamma_{y_0}(0) = (0, y_0)$ , siendo  $y_0 > 0$ , viene dada por

$$\begin{cases} x_{y_0}(t) = -\frac{y_0}{\beta^-} \exp\left(-\frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} t\right) \operatorname{sen} \beta^- t, \\ y_{y_0}(t) = y_0 \exp\left(-\frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} t\right) \cdot \left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} \operatorname{sen} \beta^- t + \cos \beta^- t\right), \end{cases} \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\beta^-}$$

y para  $\pi/\beta^- < t < \pi/\beta^- + \pi/\beta^+$

$$\begin{cases} x_{y_0}(t) = \frac{y_0}{\beta^+} \exp\left(-\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi - \frac{\alpha^+}{\beta^-} \pi + \alpha^+ t\right) \operatorname{sen}\left(\beta^+ \left(t - \frac{\pi}{\beta^-}\right)\right), \\ y_{y_0}(t) = y_0 \exp\left(-\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi - \frac{\alpha^+}{\beta^-} \pi + \alpha^+ t\right) \cdot \left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} \operatorname{sen} \beta^+ s - \cos \beta^+ s\right), \end{cases}$$

donde  $s = t - \pi/\beta^-$ .

Con estos cálculos, podemos enunciar un resultado de existencia de ciclos límite para el sistema perturbado (3.67). Este resultado es de nuevo una restricción local de la Proposición 15 de [22] (ver Proposición 3.29 de esta sección).

**Proposición 3.31** *Consideremos el sistema (3.67) con  $\alpha^+, \alpha^- \in \mathbb{R}$ ,  $\beta^+ > 0$ ,  $\beta^- > 0$  y  $\omega \cdot A \neq 0$ .*

*Si  $\operatorname{sgn}(A\alpha^+) = -\operatorname{sgn}(\omega)$ , entonces el sistema (3.67), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, posee un ciclo límite. Además, dicho ciclo límite es único, hiperbólico y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , donde*

$$\hat{y}_0 = \frac{-2A \left(1 + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi}\right) \alpha^+ (\beta^- + \beta^+)}{\pi \beta^- \omega ((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2)}. \quad (3.69)$$

**Demostración.** Para este caso particular la divergencia del campo vectorial  $f$  que define al sistema no perturbado (3.68) es no nula y viene dada por

$$\operatorname{div} f(x, y) = \begin{cases} 2\alpha^+ & \text{si } x < 0, \\ -2\frac{\beta^- \alpha^+}{\beta^+} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



Así, la función de Melnikov del sistema (3.67) a la largo de una órbita periódica  $\Gamma_{y_0}$  del sistema (3.68) se encuentra definida, para  $y_0 > 0$ , por

$$M_2(y_0, \omega, A) = I_1(y_0, \omega, A) + I_2(y_0, \omega, A),$$

donde

$$I_1(y_0, \omega, A) = \int_0^{\frac{\pi}{\beta^-}} f(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g(\gamma_{y_0}(t), 0, \omega, A) \exp\left(2\beta^- \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right) dt$$

e

$$I_2(y_0, \omega, A) = \int_{\frac{\pi}{\beta^-}}^{\frac{\pi}{\beta^-} + \frac{\pi}{\beta^+}} f(\gamma_{y_0}(t)) \wedge g(\gamma_{y_0}(t), 0, \omega, A) e^{2\pi\left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} + \frac{\alpha^+}{\beta^-}\right) - 2\alpha^+ t} dt.$$

Después de tediosos, pero directos cálculos, se obtiene que

$$I_1(y_0, \omega, A) = -y_0 \frac{2A \left(1 + e^{\pi \frac{\alpha^+}{\beta^+}}\right) \alpha^+ \beta^+ + \pi y_0 \beta^- \omega \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right)}{\beta^- \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right)}$$

e

$$I_2(y_0, \omega, A) = -y_0 \frac{2A \left(1 + e^{\pi \frac{\alpha^+}{\beta^+}}\right) \alpha^+}{(\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2},$$

por lo que la función de Melnikov es

$$M_2(y_0, \omega, A) = -y_0 \frac{2A \left(1 + e^{\pi \frac{\alpha^+}{\beta^+}}\right) \alpha^+ (\beta^- + \beta^+) + \pi y_0 \beta^- \omega \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right)}{\beta^- \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right)}.$$

Por consiguiente, la función  $M_2$  se anula para  $y_0 > 0$  si y sólo si

$$2A \left(1 + e^{\pi \frac{\alpha^+}{\beta^+}}\right) \alpha^+ (\beta^- + \beta^+) + \pi y_0 \beta^- \omega \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right) = 0. \quad (3.70)$$

Si  $\omega \cdot A \neq 0$ , entonces la ecuación (3.70) posee soluciones estrictamente positivas si y sólo si  $\text{sgn}(A\alpha^+) = -\text{sgn}(\omega)$ . En este caso, la solución de (3.70) es única y viene dada por

$$\hat{y}_0 = \frac{-2A \left(1 + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi}\right) \alpha^+ (\beta^- + \beta^+)}{\pi \beta^- \omega \left((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2\right)}.$$

La demostración concluye aplicando directamente el Teorema 3.18. ■

**Nota 3.32** Téngase en cuenta que la única solución de (3.70)  $\hat{y}_0$  es proporcional al parámetro  $A$ , lo que es natural, debido al carácter homotético del sistema (3.56) respecto al parámetro  $a$  (ver de nuevo la Nota 1.20).

Se observa que

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \text{sgn}(A\alpha^+) = -\text{sgn}(\omega)}} \hat{y}_0 = +\infty,$$

lo que nos indica que  $\omega = 0$  es un valor de bifurcación en el infinito para el sistema (3.67). Esto concuerda, como hemos comentado anteriormente, con el análisis que recogemos en la última sección del siguiente capítulo.

### 3.3.3 Ciclos límite y homoclinas para el caso silla–foco

Aplicaremos la teoría de Melnikov a la obtención de ciclos límite y homoclinas del sistema (3.58), para  $\varepsilon$  pequeño, cuando el sistema no perturbado (3.57) es de tipo silla-foco, es decir, suponemos  $d^+ > 0$ ,  $d^- < 0$  y, sin restricción,  $a > 0$ .

En estas condiciones, el sistema (3.57) posee un continuo de órbitas periódicas que cruzan transversalmente el eje  $x = 0$  y que está acotado por un lazo homocliño que conecta el punto de equilibrio  $p_0^- = (a/d^-, 0)$  mediante sus variedades estables e inestables. El retrato de fase para este sistema puede contemplarse en la Figura 3.9.

Las órbitas periódicas del sistema (3.57) para el continuo en cuestión están formadas por trozos de elipses en la parte derecha ( $x > 0$ ) y trozos de hipérbolas en la parte izquierda ( $x < 0$ ) que se unen con continuidad y diferenciabilidad en la línea de separación  $x = 0$ . Estas órbitas periódicas pueden parametrizarse en la forma

$$\Gamma_{y_0} \equiv \begin{cases} (d^+x - a)^2 + d^+y^2 = a^2 + d^+y_0^2 & \text{si } x \geq 0, \\ (d^-x - a)^2 + d^-y^2 = a^2 + d^-y_0^2 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (3.71)$$

para  $y_0 \in (0, a/\sqrt{-d^-})$ .

La órbita homocliña  $\Gamma$  del sistema silla–foco (3.57) para  $a > 0$  es la solución de dicho sistema cuya condición inicial es  $(x(0), y(0)) = (0, a/\sqrt{-d^-})$ ; esto es,

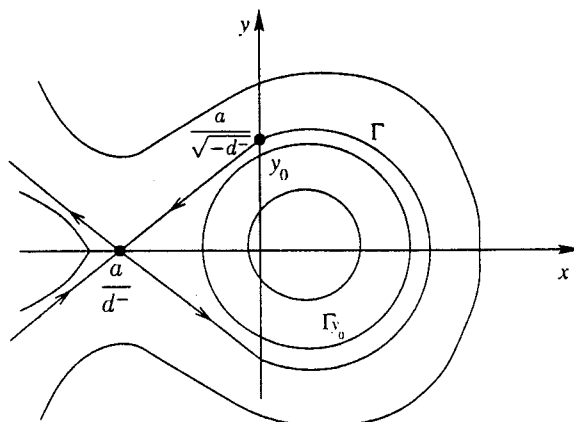


Figura 3.9: Plano de fase del sistema (3.57) con  $d^+ > 0$ ,  $d^- < 0$  y  $a > 0$ .

$\Gamma$  posee la forma

$$\Gamma \equiv \begin{cases} (d^+x - a)^2 + d^+y^2 = a^2 \left(1 - \frac{d^+}{d^-}\right) & \text{si } x \geq 0, \\ (d^-x - a)^2 + d^-y^2 = 0 & \text{si } x < 0, \quad \frac{a}{d^-} < y < 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

Recordando que el campo vectorial que define al sistema (3.57) posee divergencia nula y tomando  $\mu = (t_1^+, t_1^-)$ , la función de Melnikov del sistema (3.58) a lo largo de una órbita  $\Gamma_{y_0}$  del sistema (3.57) viene dada para  $y_0 \in (0, a/\sqrt{-d^-})$  por

$$M_3(y_0, \mu) = t_1^+ S_3^+(y_0) + t_1^- S_3^-(y_0), \quad (3.73)$$

siendo

$$S_3^+(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\})$$

y

$$S_3^-(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}).$$

Del mismo modo, la función de Melnikov del sistema (3.58) a lo largo de la órbita homoclina  $\Gamma$  del sistema (3.57) viene dada

$$M_3^h(t_1^+, t_1^-) = t_1^+ R_3^+ + t_1^- R_3^-, \quad (3.74)$$

siendo

$$R_3^+ = \text{area}(\text{int}(\Gamma) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\})$$

y

$$R_3^- = \text{area}(\text{int}(\Gamma \cup \{p_0^-\}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}).$$

Con estos datos, podemos enunciar el siguiente resultado para  $a > 0$ , pero a la vista de las simetrías en el sistema de Lienard (3.56) (ver Nota 1.33) un resultado análogo puede enunciarse para valores de  $a$  estrictamente negativos. Las conclusiones que se exponen en la siguiente proposición son la restricción local de resultados ya probados en [22] y [47] para un sistema bizonal de tipo silla-foco.

**Proposición 3.33** *Consideremos el sistema perturbado (3.58) con los valores  $a > 0$ ,  $t_1^+ \cdot t_1^- < 0$ ,  $d^+ > 0$  y  $d^- < 0$  y definamos*

$$L = \frac{-t_1^-}{d^- \sqrt{-d^-}} + \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \left[ \left( \frac{1}{d^+} - \frac{1}{d^-} \right) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d^+}{d^+ - d^-}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-d^+ d^-}} \right].$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si  $L \neq 0$  y  $\varepsilon \neq 0$  es suficientemente pequeño, entonces el sistema (3.58) posee ciclos límite si y sólo si  $\text{sgn}(t_1^-) = \text{sgn}(L)$ . Además, en este caso, el ciclo límite es único, hiperbólico y se encuentra en un entorno de la órbita periódica  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , siendo  $\hat{y}_0$  la única solución en el intervalo  $(0, a/\sqrt{-d^-})$  de la ecuación

$$M_3(\hat{y}_0, t_1^+, t_1^-) = 0.$$

2. Si  $L = 0$ , entonces existen dos funciones  $t_1^+(\varepsilon), t_1^-(\varepsilon)$ , definidas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, de forma que el sistema (3.58) con  $t_1^+ = t_1^+(\varepsilon)$  y  $t_1^- = t_1^-(\varepsilon)$  posee una órbita homoclina en un entorno de la órbita homoclina  $\Gamma$  del sistema no perturbado (3.57).

**Demostración.** Según la expresión (3.71), las áreas de las porciones de elipse e hipérbola que definen a  $\Gamma_{y_0}$ , para  $y_0 \in (0, a/\sqrt{-d^-})$ , pueden expresarse en la forma

$$S_3^+(y_0) = \frac{\pi(a^2 + d^+y_0^2)}{d^+\sqrt{d^+}} + \frac{2ay_0}{d^+} - \frac{2}{\sqrt{d^+}} \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{a^2}{d^+} + y_0^2 - y^2} dy, \quad (3.75)$$

$$S_3^-(y_0) = \frac{-2a}{d^-} - \frac{2}{\sqrt{-d^-}} \int_0^{y_0} \sqrt{-\frac{a^2}{d^-} - y_0^2 + y^2} dy. \quad (3.76)$$

Análogamente, las áreas que definen a la función de Melnikov  $M_3^h$  del sistema perturbado (3.58) asociada a la homoclina  $\Gamma$  vienen dadas por

$$R_3^+ = S_3^+ \left( \frac{a}{d^-\sqrt{-d^-}} \right) \quad \text{y} \quad R_3^- = -\frac{a^2}{d^-\sqrt{-d^-}}.$$

Es fácil ver que para  $\mu = (t_1^+, t_1^-)$  fijo, la función de Melnikov  $M_3$  para las órbitas periódicas  $\Gamma_{y_0}$  converge a la función de Melnikov  $M_3^h$  asociada a la órbita homoclina  $\Gamma$  en el sentido de que

$$\lim_{\substack{y_0 \rightarrow a/\sqrt{-d^-} \\ 0 < y_0 < a/\sqrt{-d^-}}} M_3(y_0, \mu) = M_3^h(\mu). \quad (3.77)$$

Además, se satisface la relación  $M_3^h(\mu) = a^2L$ , donde

$$L = \frac{-t_1^-}{d^-\sqrt{-d^-}} + \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \left[ \left( \frac{1}{d^+} - \frac{1}{d^-} \right) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d^+}{d^+ - d^-}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-d^+d^-}} \right].$$

Sustituyendo las expresiones (3.75) y (3.76) en (3.73) y derivando respecto de  $y_0$  encontramos que

$$\frac{\partial M_3}{\partial y_0}(y_0, t_1^+, t_1^-) = 2y_0 F_3(y_0),$$

siendo

$$F_3(y_0) = \frac{t_1^-}{\sqrt{-d^-}} \text{ArgSh} \sqrt{\frac{-d^-y_0^2}{a^2 + d^-y_0^2}} + \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \pi - \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \arcsen \sqrt{\frac{d^+y_0^2}{a^2 + d^+y_0^2}}.$$

Derivando la función  $F_3$  obtenemos

$$\frac{dF_3}{dy_0} = a \left( t_1^- \frac{-d^-}{a^2 + d^- y_0^2} - t_1^+ \frac{d^+}{a^2 + d^+ y_0^2} \right).$$

De esta forma, tomando  $d^+ > 0$ ,  $d^- < 0$ ,  $a > 0$ ,  $t_1^+ > 0$  y  $t_1^- < 0$  resulta que la función  $F_3$  decrece monótonamente en el intervalo  $(0, a/\sqrt{-d^-})$  y como

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} F_3(y_0) = \frac{t_1^+}{\sqrt{d^+}} \pi > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{y_0 \rightarrow a/\sqrt{-d^-} \\ 0 < y_0 < a/\sqrt{-d^-}}} F_3(y_0) = -\infty,$$

deducimos que la función  $F_3$  posee una única raíz  $y_0^*$  en el intervalo  $(0, a/\sqrt{-d^-})$ .

De aquí,  $M_3(\cdot, \mu)$  es monótona creciente en  $(0, y_0^*)$  y monótona decreciente en  $(y_0^*, a/\sqrt{-d^-})$ .

Por consiguiente, puesto que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} M_3(y_0, t_1^+, t_1^-) = \frac{t_1^+ a^2}{d^+ \sqrt{d^+}} \pi > 0,$$

se tiene que:

- Si  $L \geq 0$ , entonces la función  $M_3(\cdot, \mu)$  nunca se anula en el intervalo  $(0, a/\sqrt{-d^-})$  (ver Figura 3.10 (a)).
- Si  $L < 0$ , la ecuación  $M_3(\cdot, \mu) = 0$  posee una única solución  $\hat{y}_0$  en el intervalo  $(0, a/\sqrt{-d^-})$  (ver Figura 3.10 (b)) que satisface

$$\frac{\partial M_3}{\partial y_0}(\hat{y}_0, t_1^+, t_1^-) < 0.$$

Así, la demostración del primer apartado para  $t_1^+ > 0$  y  $t_1^- < 0$  es consecuencia directa del Teorema 3.18 y la prueba de este apartado para  $t_1^+ < 0$  y  $t_1^- > 0$  es completamente análoga.

Para finalizar la demostración, el segundo apartado es una aplicación inmediata del Teorema 3.28. ■

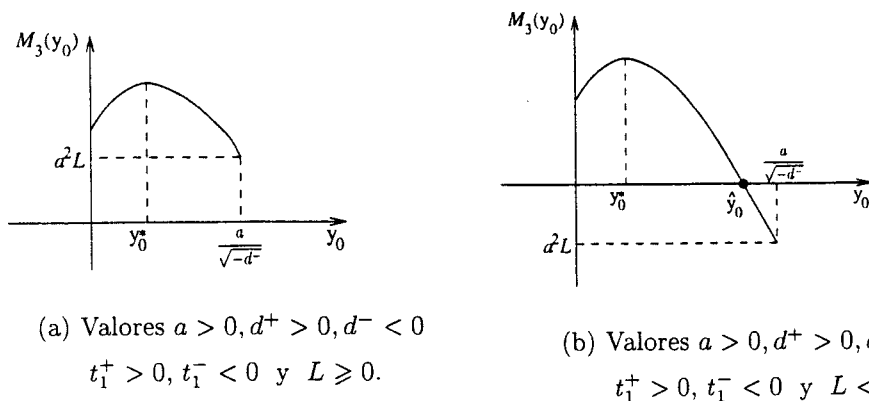


Figura 3.10: Función de Melnikov  $M_3$  para el sistema silla-foco (3.58).

**Nota 3.34** En [22] y [47] se ofrece una condición necesaria y suficiente para que un sistema silla-foco escrito en forma de Van der Pol posea un lazo homoclinico. Dicha condición puede trasladarse al sistema de Lienard (3.56) para el caso silla-foco si tomamos

$$t^- = \alpha^- + \beta^-, \quad d^- = \alpha^- \cdot \beta^-, \quad t^+ = 2\alpha^+, \quad d^+ = (\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2,$$

con  $\alpha^- < 0, \beta^- > 0, \beta^+ > 0$  y  $a > 0$ .

De esta forma, el sistema de Lienard (3.56) es de tipo silla-foco y posee una órbita homoclinica si y sólo si (ver [22] y [47])

$$2\gamma^+ \left( \pi - \operatorname{arccotg} \frac{1 - B_\alpha B_\beta}{B_\alpha + B_\beta} \right) + \log \frac{1 + B_\alpha^2}{1 + B_\beta^2} = 0, \quad (3.78)$$

donde

$$B_\alpha = \frac{\beta^+ \left( (\gamma^+)^2 + 1 \right)}{\alpha^-} - \gamma^+, \quad B_\beta = -\frac{\beta^+ \left( (\gamma^+)^2 + 1 \right)}{\beta^-} - \gamma^+ \quad \text{y} \quad \gamma^+ = \frac{\alpha^+}{\beta^+}.$$

La condición (3.78) puede expresarse en función de los parámetros iniciales del sistema (3.56), a saber,  $t^+, t^-, d^+, d^-$  y  $a$ . Manteniendo fijos los valores  $d^+ > 0, d^- < 0$  y  $a > 0$ , la expresión (3.78) define una curva en el plano de parámetros  $t^+ - t^-$ .

De forma similar, la ecuación

$$\frac{-t^-}{d^- \sqrt{-d^-}} + \frac{t^+}{\sqrt{d^+}} \left[ \left( \frac{1}{d^+} - \frac{1}{d^-} \right) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d^+}{d^+ - d^-}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-d^+ d^-}} \right] = 0$$

para  $d^+ > 0, d^- < 0$  y  $a > 0$  fijos, define una recta en el plano de parámetros  $t^+ - t^-$ . Representado esta recta y la curva anterior en un mismo plano se observa como la teoría de Melnikov predice la existencia de la curva de homoclinas e indica la pendiente de la misma en el origen (ver Figura 3.11).

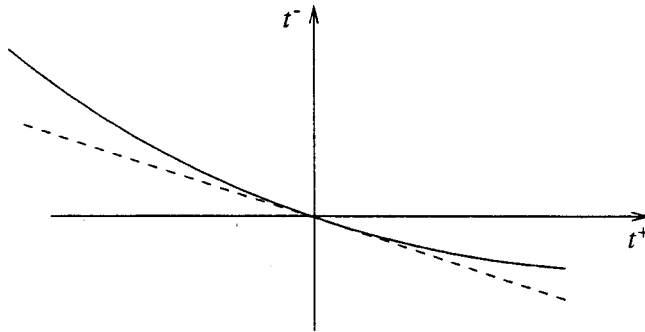


Figura 3.11: Curva de homoclinas y aproximación (- -) para el sistema (3.56).

### 3.4 Ciclos límite y separatrices en sistemas lineales a trozos trizionales

En esta sección aplicaremos la teoría de Melnikov a un sistema continuo lineal a trozos definido en tres zonas simétrico que se escribe en la forma de Lienard generalizada

$$\begin{cases} \dot{x} = t_e x - y - (t_i - t_e)\varphi(x) \\ \dot{y} = d_e x + (d_i - d_e)\varphi(x) \end{cases} \quad (3.79)$$



donde  $t_i, t_e, d_i, d_e \in \mathbb{R}$  y  $\varphi$  es la función de saturación

$$\varphi(x) = \text{sat}(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x) & \text{si } |x| > 1, \\ x & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Debemos comentar que el sistema (3.79) ha sido ampliamente estudiado por diferentes autores y que el conjunto de bifurcaciones del mismo está en la actualidad perfectamente establecido (ver [25], [47] y [51]).

En lo que sigue veremos que la teoría de Melnikov desarrollada con anterioridad corrobora, desde un punto de vista local en el espacio de parámetros, las conclusiones obtenidas en los trabajos anteriores, lo que permite presentar de nuevo la teoría de Melnikov como una herramienta eficaz en el análisis de las bifurcaciones en sistemas definidos a trozos.

El sistema (3.79) evoluciona en la zona interior ( $|x| < 1$ ) según las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = t_i x - y \\ \dot{y} = d_i x \end{cases} \quad (3.80)$$

y en las zonas exteriores siguiendo las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = t_e x - y - (t_i - t_e) \\ \dot{y} = d_e x - (d_i - d_e) \end{cases} \quad \text{si } x \leq -1 \quad (3.81)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = t_e x - y + (t_i - t_e) \\ \dot{y} = d_e x + (d_i - d_e) \end{cases} \quad \text{si } x \geq 1 \quad (3.82)$$

Nótese que para que el sistema (3.79) posea un ciclo límite debe cumplirse la condición  $t_i \cdot t_e < 0$  (véase, por ejemplo, [47]).

El sistema (3.79) es lineal en cada una de las zonas de definición. Al igual que para el sistema bizonal (3.56) y a la vista de la igualdad de las matrices que rigen al sistema (3.79) en las zonas exteriores, diremos que el sistema (3.79)

es de tipo silla-foco si las órbitas del sistema en la parte interior se comportan como las de un punto de silla lineal y las exteriores como las de un foco lineal. Si tanto las órbitas interiores como las exteriores se comportan como las de un foco lineal diremos que el sistema es de tipo foco-foco.

Nuestra intención se centra en el análisis del sistema (3.79) cuando  $t_i$  y  $t_e$  son no nulos y suficientemente pequeños.

Para ello, realizamos las transformaciones

$$t_i = \varepsilon T_i, \quad t_e = \varepsilon T_e, \quad \text{con } |\varepsilon| \ll 1.$$

Con éstas, conseguimos como sistema no perturbado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = d_e x + (d_i - d_e)\varphi(x) \end{cases} \quad (3.83)$$

y como sistema perturbado el de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(T_i - T_e)\varphi(x) \\ \dot{y} = d_e x + (d_i - d_e)\varphi(x) \end{cases} \quad (3.84)$$

Obsérvese que para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño el sistema (3.84) es de tipo foco-foco si  $d_i > 0$  y  $d_e > 0$ , y es de tipo silla-foco si  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$ .

### 3.4.1 Ciclos límite para el caso foco-foco

El sistema no perturbado (3.83) con  $d_i > 0$  y  $d_e > 0$  presenta en el origen su único punto de equilibrio. Éste se encuentra rodeado por un continuo no acotado de órbitas periódicas formadas por elipses completas o trozos de ellas que se unen con continuidad y diferenciabilidad en las líneas de separación  $x = 1$  y  $x = -1$  (ver Figura 3.12).

Puesto que el sistema (3.84) en la zona interna es lineal, dicho sistema no puede presentar ciclos límite contenidos estrictamente en dicha zona. Por

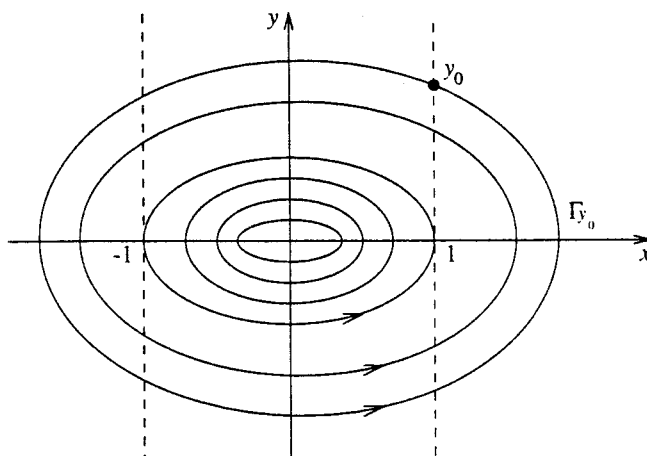


Figura 3.12: Plano de fases del sistema no perturbado (3.83).

este motivo, para estudiar la existencia de ciclos límite en el sistema foco-foco (3.84), con  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, de todas las órbitas periódicas del sistema no perturbado (3.83) que rodean al origen nos centraremos en aquellas órbitas periódicas que visitan las tres zonas.

Estas órbitas periódicas trizionales forman un continuo no acotado que cruzan transversalmente las líneas de separación  $x = 1$  y  $x = -1$  y puede parametrizarse en la forma  $\Gamma_{y_0}$ , para  $y_0 > 0$ , donde  $(1, y_0)$  es el punto de corte de  $\Gamma_{y_0}$  con la semirrecta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y > 0\}$  (ver Figura 3.12).

Como la divergencia del campo vectorial que define al sistema no perturbado (3.83) es nula, atendiendo a la simetría de tal sistema y considerando que

$$\operatorname{div} g(x, y) = \begin{cases} T_e & \text{si } |x| > 1, \\ T_i & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

resulta que la función de Melnikov del sistema perturbado (3.84) asociada a  $\Gamma_{y_0}$  puede escribirse en la forma

$$M_4(y_0, T_i, T_e) = 4T_i S_i(y_0) + 4T_e S_e(y_0), \quad (3.85)$$

donde

$$S_i(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y > 0\})$$

y

$$S_e(y_0) = \text{area}(\text{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 0\}).$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 3.18 (véase la Nota 3.21).

**Proposición 3.35** *Si  $d_i > 0, d_e > 0$  y  $T_i \cdot T_e < 0$ , entonces el sistema perturbado (3.84) para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño posee un único ciclo límite. Además, dicho ciclo límite es hiperbólico y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , siendo  $\hat{y}_0$  la única raíz positiva de la ecuación  $M_4(\cdot, T_i, T_e) = 0$ .*

**Demostración.** Un cálculo simple muestra que el área de las porciones de elipses que definen a la función  $M_4$  pueden obtenerse, para  $y_0 > 0$ , en la forma

$$S_i(y_0) = \int_0^1 \sqrt{d_i + y_0^2 - d_i x^2} dx,$$

$$S_e(y_0) = \int_0^{y_0} \left( \sqrt{\frac{d_i^2}{d_e^2} + \frac{y_0^2}{d_e} - \frac{y^2}{d_e} - \frac{d_i}{d_e}} \right) dy.$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.85) y derivando respecto de  $y_0$  obtenemos, poniendo  $\mu = (T_i, T_e)$ , que

$$\frac{\partial M_4}{\partial y_0}(y_0, \mu) = 4y_0 F_4(y_0),$$

donde

$$F_4(y_0) = \frac{T_i}{\sqrt{d_i}} \arcsen \sqrt{\frac{d_i}{d_i + y_0^2}} + \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \arcsen \sqrt{\frac{d_e y_0^2}{d_i^2 + d_e y_0^2}}.$$

Puesto que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} F_4(y_0) = \frac{\pi T_i}{2\sqrt{d_i}} \quad \text{y} \quad \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} F_4(y_0) = \frac{\pi T_e}{2\sqrt{d_e}},$$

resulta que si  $T_i \cdot T_e < 0$ , entonces  $F_4$  posee al menos una raíz  $y_0^* > 0$ .

Derivando la función  $F_4$  obtenemos

$$\frac{dF_4}{dy_0}(y_0) = -T_i \frac{1}{d_i + y_0^2} + T_e \frac{d_i}{d_i^2 + d_e y_0^2},$$

de donde,  $F_4$  es monótona decreciente en  $(0, +\infty)$  si  $T_i > 0$  y  $T_e < 0$ , y monótona creciente si  $T_i < 0$  y  $T_e > 0$ . Esto demuestra que la raíz positiva  $y_0^*$  de  $F_4$  es única.

De esta forma:

- Si  $T_i > 0$  y  $T_e < 0$  se tiene que

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} M_4(y_0) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} M_4(y_0) = 4T_i \sqrt{d_i} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx > 0,$$

por lo que la ecuación  $M_4(\cdot, T_i, T_e) = 0$  posee una única raíz positiva  $\hat{y}_0$  (ver Figura 3.13 (a)), que además satisface la propiedad

$$\frac{\partial M_4}{\partial y_0}(\hat{y}_0, T_i, T_e) < 0.$$

- Si  $T_i < 0$  y  $T_e > 0$ , entonces

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} M_4(y_0) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} M_4(y_0) = 4T_i \sqrt{d_i} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx < 0,$$

por lo que la ecuación  $M_4(\cdot, T_i, T_e) = 0$  posee una única raíz positiva  $\hat{y}_0$  (ver Figura 3.13 (b)), que además satisface la propiedad

$$\frac{\partial M_4}{\partial y_0}(\hat{y}_0, T_i, T_e) > 0.$$

La demostración finaliza con una aplicación directa del Teorema 3.18. ■

**Nota 3.36** Visto el análisis realizado sobre la función de Melnikov  $M_4$  en la prueba de la Proposición 3.35 puede deducirse que las rectas  $T_i = 0$  y  $T_e = 0$  (en el espacio de parámetros  $T_i$ - $T_e$ ) marcan, para valores de  $\varepsilon \neq 0$

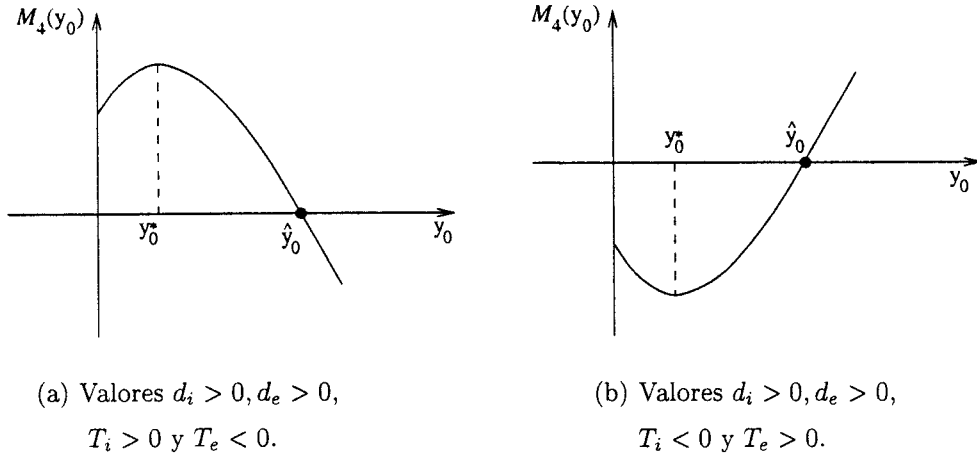


Figura 3.13: Función de Melnikov  $M_4$  para el sistema foco–foco (3.84).

suficientemente pequeños, la aparición o desaparición del único posible ciclo límite existente en el sistema perturbado (3.84) con  $d_i > 0$  y  $d_e > 0$ .

Por un lado, la recta  $T_e = 0$  puede ser entendida como una curva de bifurcación de Hopf en el infinito, en el sentido de que la única solución positiva  $\hat{y}_0$  de  $M_4(\cdot, T_i, T_e) = 0$ , cuando existe, tiende a infinito cuando  $T_e$  se aproxima a cero. Este estudio concuerda con el análisis realizado en [39] sobre la bifurcación de Hopf en el infinito para el sistema foco–foco (3.79).

Por otra parte, la recta  $T_i = 0$  delimita una curva de bifurcación de Hopf–Centro, en el sentido de que la única solución positiva  $\hat{y}_0$  de  $M_4(\cdot, T_i, T_e) = 0$ , cuando existe, converge a cero cuando  $T_i$  tiende a cero. Obsérvese que  $\hat{y}_0$  representa, en primera aproximación, la ordenada de la órbita periódica en  $x = 1$ , por lo que si  $\hat{y}_0$  tiende a cero, entonces la órbita periódica tiende a la última órbita periódica unizonal (ver Figura 3.12).

Además, puede probarse, siguiendo razonamientos análogos a los realizados en el apartado 3 de la Nota 3.30, que la amplitud del ciclo límite proveniente de la bifurcación de Hopf–Centro para valores  $T_i \neq 0$  pequeños ( $T_i \cdot T_e < 0$ ), crece en primera aproximación de la misma forma que  $T_i^{1/3}$ . Este análisis coincide con el realizado en [25] sobre la bifurcación de Hopf–Centro del sistema

trizonal (3.79).

### 3.4.2 Ciclos límite y homoclinas para el caso silla–foco

El sistema no perturbado (3.83) con  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$  posee tres puntos de equilibrios, uno de ellos es el origen, otro se encuentra en el semiplano  $x < -1$  y el último en el semiplano  $x > 1$ .

En este caso, de acuerdo con las simetrías que presenta el sistema no perturbado (3.83), éste posee tres continuos de órbitas periódicas bien diferenciados y un par de lazos homoclinos.

Dos de estos continuos de órbitas periódicas son simétricos uno respecto del otro y rodean, cada uno de ellos, a los puntos de equilibrio de las zonas exteriores. Las órbitas periódicas de estos continuos están formadas por elipses o trozos de elipses e hipérbolas, son unizonales o bizonales y están acotadas por lazos homoclinos que conectan las variedades estables e inestables del origen (véase la Figura 3.14).

El tercer continuo de órbitas periódicas no está acotado, las órbitas periódicas que lo forman rodean a los dos lazos homoclinos, son trizonales, cruzan transversalmente a las líneas de separación  $x = -1$  y  $x = 1$ , y están formadas por trozos de elipses e hipérbolas (véase la Figura 3.14).

Nótese que el sistema (3.83) con  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$  restringido al interior de cada uno de los lazos homoclinos se reduce a un sistema bizonal. En esta situación, la teoría de Melnikov aplicada a los dos continuos acotados de órbitas periódicas y a los dos lazos homoclinos proporciona los resultados ya descritos en la Proposición 3.33.

De todas formas, habida cuenta de la simetría del sistema, sólo es necesario trabajar con uno sólo de estos continuos y definir de manera conjunta una única función de Melnikov asociada al sistema perturbado silla–foco (3.84) para las órbitas periódicas de uno de los continuos acotados.

Tomando como referencia el continuo de órbitas periódicas contenido estrictamente en el semiplano  $x > 0$ , las órbitas periódicas bizonales de tal continuo

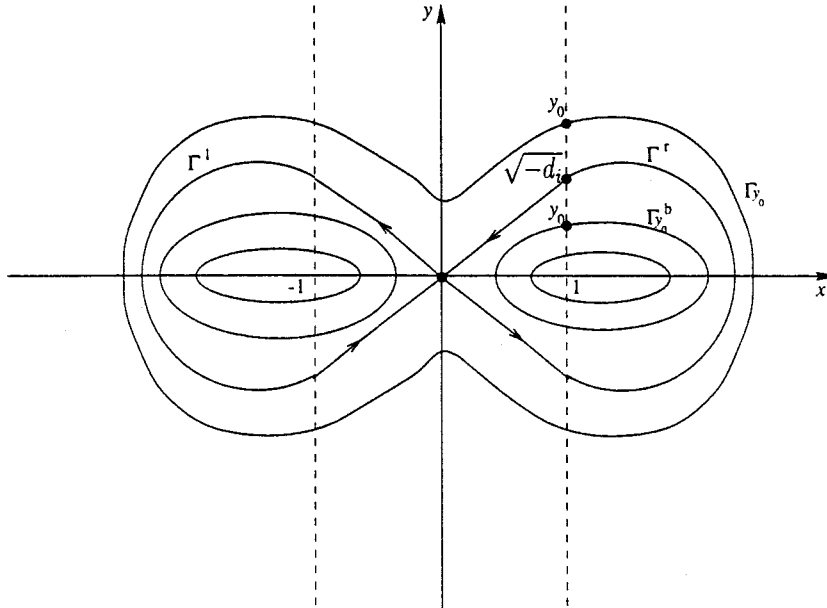


Figura 3.14: Plano de fases del sistema no perturbado silla–foco (3.83).

se parametrizarán en la forma  $\Gamma_{y_0}^b$ , para  $y_0 \in (0, \sqrt{-d_i})$ , donde  $(1, y_0)$  es el punto de intersección de  $\Gamma_{y_0}^b$  con la semirrecta  $x = 1, y > 0$  (ver Figura 3.14). La función de Melnikov para este continuo se denotará mediante  $M_5(y_0, T_i, T_e)$ , para  $0 < y_0 < \sqrt{-d_i}$ .

El continuo no acotado de órbitas periódicas que rodea a los tres puntos de equilibrio del sistema no perturbado (3.83) puede parametrizarse en la forma  $\Gamma_{y_0}$ , para  $y_0 > \sqrt{-d_i}$ , donde  $(1, y_0)$  es el punto de intersección de  $\Gamma_{y_0}$  con la semirrecta  $x = 1, y > 0$  (ver Figura 3.14).

Por último, denotaremos mediante  $\Gamma^l$  y  $\Gamma^r$  a las homoclinas izquierda y derecha, respectivamente, del sistema no perturbado (3.83) (ver Figura 3.14) y la función de Melnikov del sistema perturbado (3.84) a lo largo de  $\Gamma^r$  se denotará mediante  $M^r(T_i, T_e)$ .

Puesto que el campo vectorial que define al sistema no perturbado (3.83) posee divergencia nula, atendiendo a la simetría de tal sistema y considerando



que

$$\operatorname{div} g(x, y) = \begin{cases} T_e & \text{si } |x| > 1, \\ T_i & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

resulta que la función de Melnikov del sistema perturbado (3.84) asociada a  $\Gamma_{y_0}$  puede escribirse en la forma

$$M_6(y_0, T_i, T_e) = 4T_i R_i(y_0) + 4T_e R_e(y_0), \quad (3.86)$$

para  $y_0 > \sqrt{-d_i}$ , con

$$R_i(y_0) = \operatorname{area}(\operatorname{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y > 0\})$$

y

$$R_e(y_0) = \operatorname{area}(\operatorname{int}(\Gamma_{y_0}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 0\}).$$

Ahora podemos establecer el resultado que nos proporciona la existencia y bifurcación de ciclos límite en el sistema perturbado silla-foco (3.84) para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño.

**Proposición 3.37** *Consideremos el sistema perturbado (3.84) con los valores  $d_i < 0, d_e > 0$  y  $T_i \cdot T_e < 0$  y definamos*

$$K = T_i \sqrt{-d_i} + \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \left[ \frac{d_i}{d_e} (d_i - d_e) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d_e}{d_e - d_i}} \right) - d_i \sqrt{-\frac{d_i}{d_e}} \right].$$

*Se verifican las siguientes propiedades:*

1. Si  $\operatorname{sgn}(T_i) = \operatorname{sgn}(K)$ , entonces para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño se satisface:

(a) *El sistema perturbado (3.84) posee dos ciclos límite bizonales (uno simétrico del otro) que están contenidos, respectivamente, en los semiplanos  $x < 0$  y  $x > 0$ . Además, dichos ciclos límite son hipérbolicos y el que está contenido en el semiplano  $x > 0$  se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0^b}$ , siendo  $\hat{y}_0^b$  la única solución en el intervalo  $(0, \sqrt{-d_i})$  de la ecuación  $M_5(\cdot, T_i, T_e) = 0$ .*

- (b) El sistema perturbado (3.84) no posee lazos separatrices.
- (c) El sistema perturbado (3.84) posee un único ciclo límite trizonal. Además, dicho ciclo límite es hiperbólico y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , donde  $\hat{y}_0 > \sqrt{-d_i}$  es la única raíz de  $M_6(\cdot, T_i, T_e) = 0$ .

2. Si  $K = 0$ , entonces:

- (a) El sistema perturbado (3.84), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, no posee ciclos límite bizonales.
- (b) Existen dos funciones  $T_i(\varepsilon)$  y  $T_e(\varepsilon)$ , definidas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tales que el sistema perturbado (3.84) con  $T_i = T_i(\varepsilon)$  y  $T_e = T_e(\varepsilon)$  posee una separatriz formada por la unión de dos lazos homoclinos que se encuentra en un entorno de la separatriz  $\Gamma^l \cup \Gamma^r$ .
- (c) El sistema perturbado (3.84), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, posee un único ciclo límite trizonal. Además, dicho ciclo límite es hiperbólico y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{\hat{y}_0}$ , donde  $\hat{y}_0 > \sqrt{-d_i}$  es la única raíz de  $M_6(\cdot, T_i, T_e) = 0$ .

3. La función de Melnikov  $M_6(\cdot, T_i, T_e)$  posee un único punto crítico  $y_0^*$  perteneciente al intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$ .

4. Si  $K \neq 0$  y  $\text{sgn}(T_i) \neq \text{sgn}(K)$ , entonces:

- (a) El sistema perturbado (3.84) para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, no posee ciclos límite bizonales ni lazos separatrices.
- (b) Si  $\text{sgn}(T_i) = \text{sgn}(M_6(y_0^*, T_i, T_e))$ , entonces el sistema (3.84), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, posee exactamente dos ciclos límite trizonales. Ambos ciclos límite son hiperbólicos, uno asintóticamente estable y el otro inestable. Además, se encuentran, respectivamente, en los entornos de  $\Gamma_{\hat{y}_0^1}$  y  $\Gamma_{\hat{y}_0^2}$ , donde  $\hat{y}_0^1, \hat{y}_0^2$  son las únicas soluciones en el intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$  de la ecuación  $M_6(\cdot, T_i, T_e) = 0$ .

- (c) Si  $M_6(y_0^*, T_i, T_e) = 0$ , entonces existen dos funciones  $T_i(\varepsilon)$  y  $T_e(\varepsilon)$ , definidas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tales que el sistema perturbado (3.84) con  $T_i = T_i(\varepsilon)$  y  $T_e = T_e(\varepsilon)$  posee un único ciclo límite trizonal. Además, dicho ciclo límite posee multiplicidad dos y se encuentra en un entorno de  $\Gamma_{y_0^*}$ .
- (d) Si  $M_6(y_0^*, T_i, T_e) \neq 0$  y  $\text{sgn}(T_i) \neq \text{sgn}(M_6(y_0^*, T_i, T_e))$ , entonces el sistema perturbado (3.84), para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, no posee ciclos límite trizonales.

**Demostración.** Comenzamos la prueba de este resultado suponiendo que para el sistema perturbado silla-foco (3.84) ( $d_i < 0, d_e > 0$ ) se tiene  $T_i > 0, T_e < 0$ .

Es posible definir una función de Melnikov asociada al sistema (3.84) extendida a las órbitas  $\Gamma_{y_0}^b$  ( $0 < y_0 < \sqrt{-d_i}$ ),  $\Gamma^r$  y  $\Gamma_{y_0}$  ( $y_0 > \sqrt{-d_i}$ ).

Tomando  $\mu = (T_i, T_e)$ , dicha función definida para  $y_0 > 0$  posee la forma

$$\tilde{M}(y_0, \mu) = \begin{cases} M_5(y_0, \mu) & \text{si } 0 < y_0 < \sqrt{-d_i}, \\ M^r(\mu) & \text{si } y_0 = \sqrt{-d_i}, \\ M_6(y_0, \mu) & \text{si } y_0 > \sqrt{-d_i}. \end{cases} \quad (3.87)$$

Es fácil probar que la función de Melnikov extendida  $\tilde{M}(\cdot, \mu)$  es continua en  $(0, +\infty)$ , analítica en  $(0, \sqrt{-d_i})$  y en  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$  y además satisface la propiedad

$$\lim_{y_0 \rightarrow \sqrt{-d_i}} \tilde{M}(y_0, \mu) = M^r(\mu) = 2K,$$

donde

$$K = T_i \sqrt{-d_i} + \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \left[ \frac{d_i}{d_e} (d_i - d_e) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d_e}{d_e - d_i}} \right) - d_i \sqrt{-\frac{d_i}{d_e}} \right].$$

El sistema no perturbado (3.83) restringido al interior del lazo homoclino derecho es lineal a trozos bizonal. Mediante una adecuada traslación (ver

Proposición 1.3) podemos conseguir que dicho sistema restringido posee como línea de separación el eje  $x = 0$ .

De esta forma, los subapartados (a) y (b) de los apartado 1 y 2 y el subapartado (a) del último apartado se deducen de forma directa a partir de la Proposición 3.33.

Las órbitas periódicas trizonales  $\Gamma_{y_0}$ , para  $y_0 > \sqrt{-d_i}$ , están formadas por trozos de elipses en las zonas exteriores y trozos de hipérbolas en la zona interna. El área de las porciones de elipses e hipérbolas que intervienen en la expresión de la función de Melnikov  $M_6$  (ver (3.86)) vienen dadas por

$$R_i(y_0) = \int_{-1}^0 \sqrt{d_i - d_i(x+1)^2 + y_0^2} dx, \quad (3.88)$$

$$R_e(y_0) = \frac{d_i^2 + d_e y_0^2}{2d_e \sqrt{d_e}} - \int_0^{y_0} \left[ \sqrt{\frac{y_0^2}{d_e} - \frac{d_i}{d_e} - \frac{y^2}{d_e} + \frac{d_i}{d_e}} \right] dy. \quad (3.89)$$

Sustituyendo las expresiones (3.88) y (3.89) en (3.86) y derivando respecto a  $y_0$  encontramos que

$$\frac{\partial M_6}{\partial y_0}(y_0, \mu) = 4y_0 F_6(y_0),$$

donde

$$F_6(y_0) = \frac{T_i}{\sqrt{-d_i}} \text{ArgSh} \sqrt{\frac{-d_i}{y_0^2 + d_i}} + \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \pi - \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \arcsen \sqrt{\frac{d_e y_0^2}{d_i^2 + d_e y_0^2}}.$$

Ahora es fácil ver que  $\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} M_6(y_0, \mu) = -\infty$ .

Puesto que

$$\lim_{\substack{y_0 \rightarrow \sqrt{-d_i} \\ y_0 > \sqrt{-d_i}}} F_6(y_0) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} F_6(y_0) = \frac{\pi T_e}{2\sqrt{d_e}} < 0,$$

se deduce la existencia de un valor  $y_0^* > \sqrt{-d_i}$  tal que  $F_6(y_0^*) = 0$ .

Pero, la función

$$\frac{dF_6}{dy_0}(y_0) = \frac{-T_i}{y_0^2 + d_i} + \frac{T_e d_i}{d_i^2 + d_e y_0^2}$$

se anula a lo sumo una vez en el intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$ , de donde la raíz  $y_0^* > \sqrt{-d_i}$  de  $F_6$  es única. Esto prueba el tercer apartado.

Si  $K \geq 0$ , entonces  $\tilde{M}(\sqrt{-d_i}, \mu) \geq 0$  y por tanto  $M_6(\cdot, \mu)$  posee una única raíz  $\hat{y}_0 > \sqrt{-d_i}$  (ver Figura 3.15), que además verifica  $\frac{\partial M_6}{\partial y_0}(\hat{y}_0, \mu) < 0$ . De esta forma, las conclusiones de los subapartados (c) de los dos primeros apartados y del subapartado (b) del segundo apartado son consecuencia inmediata de la teoría de Melnikov desarrollada en la Sección 3.2. Si  $K < 0$ , entonces:

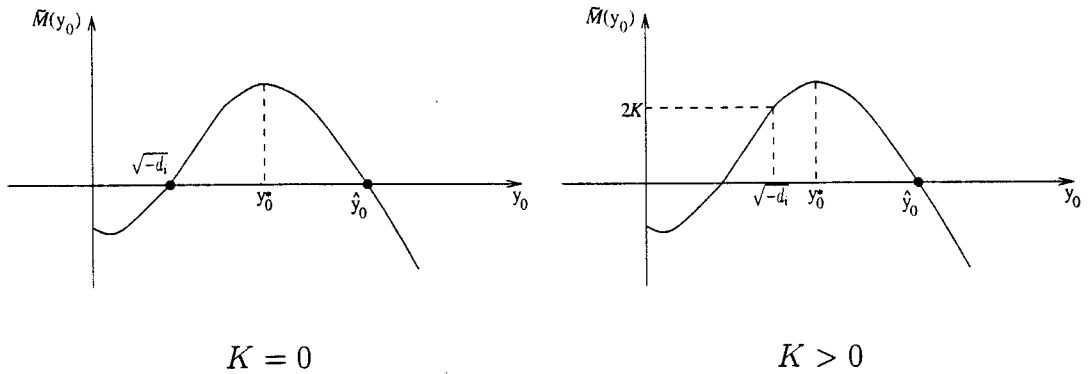


Figura 3.15: Función  $\tilde{M}$  para  $T_i > 0, T_e < 0$  y  $K \geq 0$ .

- Cuando  $M_6(y_0^*, \mu) > 0$ , la función de Melnikov  $M_6(\cdot, \mu)$  posee exactamente dos raíces  $\hat{y}_0^1 < \hat{y}_0^2$  en el intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$  (ver Figura 3.16) que satisfacen

$$\frac{\partial M_6}{\partial y_0}(\hat{y}_0^2, \mu) < 0 < \frac{\partial M_6}{\partial y_0}(\hat{y}_0^1, \mu).$$

- Cuando  $M_6(y_0^*, \mu) = 0$ , la función  $M_6(\cdot, \mu)$  sólo se anula en  $y_0^*$  (ver Figura 3.17) y se verifica

$$\frac{\partial M_6}{\partial y_0}(y_0^*, \mu) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 M_6}{\partial y_0^2}(y_0^*, \mu) \neq 0.$$

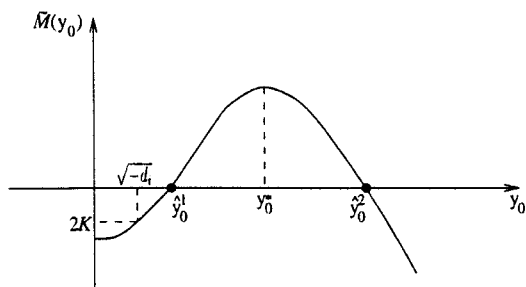


Figura 3.16: Función  $\tilde{M}$  para  $T_i > 0, T_e < 0, K < 0$  y  $M_6(y_0^*, \mu) > 0$ .

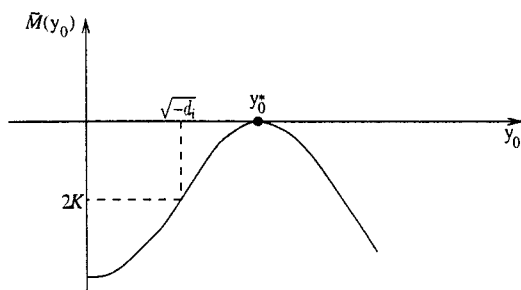


Figura 3.17: Función  $\tilde{M}$  para  $T_i > 0, T_e < 0, K < 0$  y  $M_6(y_0^*, \mu) = 0$ .

- Cuando  $M_6(y_0^*, \mu) < 0$ , la función de Melnikov  $M_6(\cdot, \mu)$  no posee ninguna raíz en el intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$  (ver Figura 3.18)

A partir de aquí, las conclusiones de los subapartados (b)–(d) de 4 son consecuencia directa de los teoremas 3.18 y 3.20 (véase la Nota 3.21).

Esto finaliza la demostración para  $T_i > 0$  y  $T_e < 0$ . De forma análoga se realizaría para  $T_i < 0$  y  $T_e > 0$ . ■

**Nota 3.38** El apartado 4 de la Proposición 3.37 nos advierte de la posibilidad de encontrarnos, dependiendo del punto crítico  $y_0^*$  de  $M_6(\cdot, T_i, T_e)$ , una bifurcación de silla–nodo de órbitas periódicas en el sistema trizonal silla-foco (3.84).

Ahora probaremos que para  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$  fijos, es posible elegir valores  $T_i$  y  $T_e$  de signos contrarios de forma que el único punto crítico  $y_0^*$  de  $M_6(\cdot, T_i, T_e)$

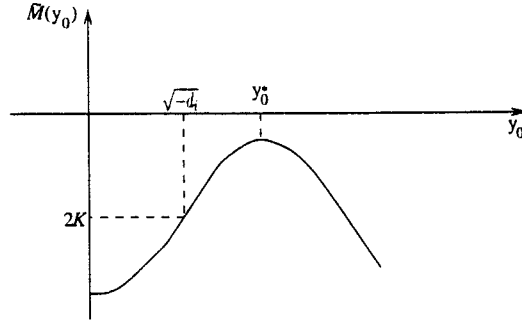


Figura 3.18: Función  $\tilde{M}$  para  $T_i > 0, T_e < 0, K < 0$  y  $M_6(y_0^*, \mu) < 0$ .

satisfaga la condición  $M_6(y_0^*, T_i, T_e) = 0$ .

Fijados  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$  y según (3.86), el punto  $y_0^*$  satisface las condiciones

$$M_6(y_0^*, T_i, T_e) = \frac{\partial M_6}{\partial y_0}(y_0^*, T_i, T_e) = 0$$

si y sólo si

$$\left. \begin{aligned} T_i R_i(y_0^*) + T_e R_e(y_0^*) &= 0 \\ T_i \frac{dR_i}{dy_0}(y_0^*) + T_e \frac{dR_e}{dy_0}(y_0^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

De esta manera, para  $d_i < 0$  y  $d_e > 0$  fijos, existen valores  $(T_i, T_e)$  (con  $T_i \cdot T_e < 0$ ) verificando (3.90) si y sólo si  $y_0^* > \sqrt{-d_i}$  satisface

$$\det \begin{pmatrix} R_i(y_0^*) & R_e(y_0^*) \\ \frac{dR_i}{dy_0}(y_0^*) & \frac{dR_e}{dy_0}(y_0^*) \end{pmatrix} = 0.$$

Pero, es fácil ver que el valor  $y_0^* > \sqrt{-d_i}$  verifica la relación anterior si y sólo si

$$\frac{d}{dy_0} \left( \frac{R_i}{R_e} \right) (y_0^*) = 0,$$

esto es,  $y_0^*$  es un valor crítico para la función  $R(y_0) = R_i(y_0)/R_e(y_0)$ , definida en el intervalo  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$ .

A continuación probaremos que la función  $R$  posee un punto crítico, pero antes debemos observar que si tal punto existe, entonces el sistema (3.90) posee infinitas soluciones  $(T_i, T_e)$  todas perteneciente a la misma recta de ecuación  $T_e = -R(y_0^*)T_i$ , con pendiente negativa (recuérdese que debemos encontrar  $T_i$  y  $T_e$  con  $T_i \cdot T_e < 0$ ).

Obsérvese además que la función  $R$  posee a lo sumo un punto crítico, pues en caso contrario sería posible encontrar valores  $T_i$  y  $T_e$  de signos contrarios de forma que la función de Melnikov  $M_6(\cdot, T_i, T_e)$  tuviera más de un punto crítico y esto, según el apartado 3 de la Proposición 3.37, no puede suceder.

Un cálculo directo muestra que

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} R(y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{y_0 \rightarrow \sqrt{-d_i} \\ y_0 > \sqrt{-d_i}}} \frac{dR}{dy_0}(y_0) = +\infty.$$

Por tanto, resulta que  $R$  tiene un único punto crítico en  $(\sqrt{-d_i}, +\infty)$ . Es decir, el sistema perturbado (3.84) posee efectivamente una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

Para  $d_i > 0$  y  $d_e < 0$  fijos, la recta  $T_e = -R(y_0^*)T_i$  marca, en primera aproximación, la curva de silla-nodo de órbitas periódicas del sistema perturbado silla-foco (3.84).

Del mismo modo, la recta

$$T_i \sqrt{-d_i} + \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \left[ \frac{d_i}{d_e} (d_i - d_e) \left( \pi - \arcsen \sqrt{\frac{d_e}{d_e - d_i}} \right) - d_i \sqrt{-\frac{d_i}{d_e}} \right] = 0,$$

esto es, la recta

$$T_e = mT_i, \quad \text{con} \quad m = - \lim_{\substack{y_0 \rightarrow \sqrt{-d_i} \\ y_0 > \sqrt{-d_i}}} R(y_0),$$

aproxima la curva de homoclinas del sistema considerado.

Además, repitiendo análisis desarrollados con anterioridad puede establecerse, para  $d_i > 0$  y  $d_e < 0$  fijos, que la recta  $T_e = 0$  marca tanto la bifurcación de Hopf-Centro del sistema (3.84) como la bifurcación de Hopf en el infinito.



Este estudio permite representar en la Figura 3.19 el conjunto de bifurcaciones del sistema (3.79) para  $d_i > 0$ ,  $d_e < 0$  fijos y  $t_i$ ,  $t_e$  suficientemente pequeños.

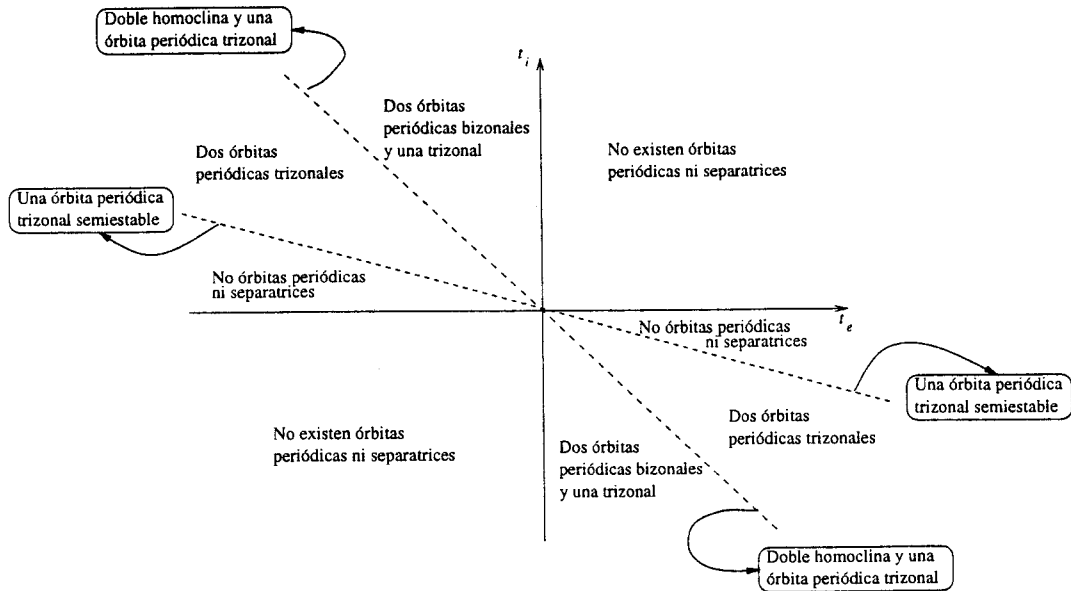


Figura 3.19: Bifurcaciones para el sistema trizonal simétrico silla-foco (3.79).

El análisis efectuado en las secciones 3.3.3 y 3.4.2 para los sistemas lineales a trozos bizonales y trizonales simétricos muestra la existencia de una bifurcación que tiene un gran parecido con la bifurcación de Takens–Bogdanov que experimentan los sistemas diferenciables cuadráticos y cúbicos.

En efecto, en el caso de un sistema bizonal nos encontramos con una bifurcación de Hopf–Centro y una bifurcación de homoclinas que nos recuerdan a las que aparecen en los sistemas cuadráticos (ver [37]), mientras que para los sistemas trizonales con simetría tenemos una bifurcación Hopf–Centro de los equilibrios exteriores, una bifurcación de homoclinas y una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que se asemejan a las que aparecen en los sistemas cúbicos (ver [27]).

Una notable diferencia la constituye la expresión  $R = R_i/R_e$ , que en el caso de sistemas diferenciables involucra funciones elípticas (ver [27], [37] y [48]) y en el caso de sistemas lineales a trozos está definida a partir de funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas. No obstante, en ambos casos la función  $R$  presenta un comportamiento cualitativo muy semejante (ver [48]).

## Capítulo 4

# Sistemas Lineales a Trozos Bizonales Homogéneos

En este capítulo nos centramos en el estudio de los sistemas continuos lineales a trozos y homogéneos definidos en dos zonas. Es decir, sistemas continuos que se escriben en la forma

$$\dot{X} = F(X) = A^\nabla X = \begin{cases} A^+ X & \text{si } X_1 \geq 0, \\ A^- X & \text{si } X_1 < 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

En primer lugar, daremos a conocer algunas propiedades de los conjuntos invariantes para los sistemas  $2\text{CPL}_n$  (sistemas continuos lineales a trozos bizonales  $n$ -dimensionales) homogéneos. El conjunto formado por todos los sistemas de este tipo se denotará por  $2\text{CPLH}_n$ .

Seguidamente estudiaremos los sistemas lineales homogéneos cuyas propiedades, relativamente fáciles de establecer, nos permitirán conocer algunas características de los sistemas  $2\text{CPL}_n$  homogéneos.

En particular, nos concentraremos en los sistemas  $2\text{CPLH}_3$  y observables, prestando especial atención a los conjuntos invariantes y órbitas periódicas de los sistemas del tipo anterior cuando sus matrices poseen un par de autovalores complejos conjugados.

En la última sección de este capítulo aplicaremos los resultados de los anteriores apartados al estudio del conjunto de bifurcaciones de un sistema bidimensional lineal a trozos bizonal de tipo foco–foco no homogéneo.

## 4.1 Primeras Propiedades. Conjuntos Invariantes

La homogeneidad del sistema lineal a trozos (4.1) nos permitirá deducir algunas propiedades de su comportamiento dinámico. En concreto, veremos que el sistema homogéneo (4.1) no posee órbitas periódicas aisladas.

Como punto de partida, notemos que  $\bar{X} = 0$  es siempre un punto de equilibrio del sistema (4.1) y además, si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  son regulares, entonces el origen es el único punto de equilibrio de tal sistema.

De aquí en adelante, siempre que nos refiramos a la aplicación y semiaplicaciones de Poincaré de los sistemas continuos lineales a trozos bizontales, y a menos que se explicita lo contrario, consideramos que dichas aplicaciones tienen como sección de Poincaré asociada el hiperplano de separación  $X_1 = 0$ .

La homogeneidad del campo vectorial  $F$  que define al sistema (4.1), es decir, la relación

$$F(\lambda X) = \lambda F(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \geq 0,$$

nos conduce al siguiente resultado, cuya prueba es directa.

**Proposición 4.1** *El sistema lineal a trozos homogéneo (4.1) satisface las siguientes propiedades:*

1. Si  $X(t)$  es solución del sistema (4.1) y  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\lambda X(t)$  es también solución del sistema (4.1).

2. Si el sistema (4.1) posee una órbita periódica  $\gamma(t)$ , entonces posee un continuo de órbitas periódicas  $\lambda\gamma(t)$ , con  $\lambda > 0$ .
3. Las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.1), cuando están definidas, transforman semirrectas contenidas en el hiperplano de separación  $X_1 = 0$  que pasan por el origen, en semirrectas contenidas en el hiperplano de separación  $X_1 = 0$  que pasan por el origen. Más aún, todos los puntos de una misma semirrecta poseen el mismo semitiempo de vuelo.
4. La aplicación de Poincaré del sistema (4.1), cuando está definida, transforma semirrectas contenidas en el hiperplano de separación  $X_1 = 0$  que pasan por el origen, en semirrectas contenidas en el hiperplano de separación  $X_1 = 0$  que pasan por el origen. Más aún, todos los puntos de una misma semirrecta poseen el mismo tiempo de vuelo.

El apartado 4 de la Proposición 4.1 nos lleva a considerar la existencia de ciertos conjuntos invariantes. Si la aplicación de Poincaré del sistema (4.1) posee una semirrecta invariante que pasa por el origen, entonces el sistema (4.1) posee un cono invariante cuyo vértice es el origen (punto de equilibrio del sistema) y está generado por la transformación, mediante el flujo del sistema (4.1), de dicha semirrecta invariante.

Puesto que dicho cono invariante posee puntos en los subespacios  $X_1 \geq 0$  y  $X_1 \leq 0$ , diremos que el cono invariante es bizonal. Veremos en páginas posteriores que el sistema (4.1) puede poseer conos invariantes que se encuentran en uno sólo de los anteriores semiespacios. Para estos conos invariantes utilizaremos el calificativo de unizontales.

Destacamos, como se pondrá de manifiesto más adelante, que la existencia de conos invariantes, para una gran variedad de sistemas homogéneos, está íntimamente relacionada con la estabilidad asintótica del origen. Remitimos a los trabajos [10] y [11] para un estudio de esta cuestión en el caso de sistemas diferenciables.

## 4.2 Sistemas Lineales Homogéneos

A continuación estudiamos algunas propiedades del sistema homogéneo

$$\dot{X} = AX, \quad (4.2)$$

donde  $A$  una matriz cuadrada real de orden  $n$  y  $X$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$ .

En próximas secciones extenderemos los resultados de este apartado al sistema lineal a trozos (4.1) para analizar la existencia de conos invariantes en sistemas 2CPLH<sub>3</sub>.

La homogeneidad del sistema (4.2) nos induce al estudio de un sistema en la esfera unidad  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Los detalles de las transformaciones que realizaremos pueden seguirse en [10] y [11] para sistemas homogéneos diferenciables.

La transformación  $u = X/\|X\|$ , para  $X \neq 0$ , sobre (4.2) permite escribir

$$\dot{u} = \frac{\dot{X}}{\|X\|} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|X\|} \right) X = A \frac{X}{\|X\|} - \frac{\langle \dot{X}, X \rangle}{\|X\|^3} X = Au - \langle Au, u \rangle u,$$

lo que nos lleva a considerar sobre la esfera unidad  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  el sistema

$$\dot{u} = Au - \langle Au, u \rangle u, \quad u \in S^{n-1}. \quad (4.3)$$

**Definición 4.2** *El sistema (4.3) se denomina sistema esférico asociado al sistema lineal homogéneo (4.2).*

El cambio  $u = X/\|X\|$ , para  $X$  no nulo, transforma el sistema lineal homogéneo (4.2) en el sistema esférico (4.3). Este cambio provoca la pérdida del conocimiento de la evolución de una de las variables del sistema homogéneo (4.2). No obstante, podemos recuperar dicha información considerando  $r = \|X\|$  y notando, tras un cálculo inmediato, que

$$\dot{r} = \langle Au, u \rangle r,$$

siendo  $u \in S^{n-1}$  solución del sistema esférico (4.3).

Este razonamiento nos conduce al siguiente resultado.

**Proposición 4.3** *El sistema lineal homogéneo  $n$ -dimensional (4.2) se transforma mediante un cambio de variables en el sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = Au - \langle Au, u \rangle u, & u \in S^{n-1}, \\ \dot{r} = \langle Au, u \rangle r, & r \geq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Seguidamente caracterizamos los equilibrios del sistema esférico (4.3). Más adelante se determinarán sus estabilidades.

**Proposición 4.4** *Los puntos de equilibrio del sistema esférico (4.3) son los autovectores unitarios de la matriz  $A$  asociados a autovalores reales.*

**Demostración.** Si  $\bar{u} \in S^{n-1}$  es un punto de equilibrio de (4.3), entonces

$$A\bar{u} - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u} = 0,$$

por lo que  $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$  con  $\lambda = \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \in \mathbb{R}$ .

Recíprocamente, si  $\bar{u} \in S^{n-1}$  es un autovector de  $A$  asociado a un autovalor real  $\lambda$ , entonces

$$\langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle = \langle \lambda\bar{u}, \bar{u} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = \lambda \|\bar{u}\|^2 = \lambda, \quad (4.5)$$

de donde  $\bar{u}$  es un punto de equilibrio del sistema (4.3) porque

$$A\bar{u} - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u} = \lambda\bar{u} - \lambda\bar{u} = 0.$$

■

Por conveniencia, para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema esférico (4.3) extendemos este sistema a todo  $\mathbb{R}^n$ , esto es, consideramos el sistema  $n$ -dimensional

$$\dot{X} = F(X) = AX - \langle AX, X \rangle X, \quad X \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6)$$

La siguiente propiedad es una consecuencia directa e intrínseca a la propia definición del sistema (4.6).

**Proposición 4.5** *La esfera unidad  $S^{n-1}$  es una variedad invariante para el flujo del sistema  $n$ -dimensional (4.6).*

El siguiente lema nos proporciona la matriz jacobiana del campo vectorial que define la ecuación diferencial (4.6).

**Lema 4.6** *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  real y  $F$  el campo vectorial definido en (4.6). La matriz jacobiana de  $F$  viene dada por*

$$DF(X) = A - XX^t(A + A^t) - \langle AX, X \rangle I_n. \quad (4.7)$$

**Demostración.** Si  $G(X) = \langle AX, X \rangle$ , entonces  $F(X) = AX - G(X)X$ , luego

$$DF(X) = A - X\nabla G(X) - G(X)I_n.$$

Pero,  $\nabla G(X) = X^t(A + A^t)$ , por lo que finalmente llegamos a (4.7). ■

Si  $\bar{u}$  es un punto de equilibrio del sistema esférico (4.3) definido en  $S^{n-1}$ , entonces claramente  $\bar{u}$  es un punto de equilibrio del sistema (4.6) definido en  $\mathbb{R}^n$ , cuya linealización en dicho punto nos lleva, de acuerdo con el Lema 4.6, al sistema lineal

$$\dot{X} = (A - \bar{u}\bar{u}^t(A + A^t) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle I_n) X, \quad X \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Tal como indica la Proposición 4.5, la esfera unidad  $S^{n-1}$  es una variedad invariante del sistema (4.6), por lo que el hiperplano tangente a  $S^{n-1}$  en  $\bar{u}$  es una superficie invariante para el sistema linealizado (4.8).

Si  $W_{\bar{u}}$  representa el hiperplano tangente a  $S^{n-1}$  en  $\bar{u}$ , es decir,

$$W_{\bar{u}} = \{X \in \mathbb{R}^n : \langle X, \bar{u} \rangle = 0\}$$

y definimos la matriz  $M_{\bar{u}}$  como

$$M_{\bar{u}} = A - \bar{u}\bar{u}^t(A + A^t) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle I_n, \quad (4.9)$$

entonces resulta que  $W_{\bar{u}}$  es una variedad invariante para la aplicación lineal definida por  $M_{\bar{u}}$ .

El siguiente resultado proporciona los autovalores de la matriz  $M_{\bar{u}}$ .



**Proposición 4.7** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , y  $\bar{u} \in S^{n-1}$  un autovector de  $A$  asociado al autovalor real  $\lambda_1$ . Entonces, los autovalores de la matriz  $M_{\bar{u}}$  definida en (4.9) son

$$\mu_1 = -2\lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1, \quad \dots, \quad \mu_n = \lambda_n - \lambda_1.$$

**Demostración.** Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de  $A$ , con  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , y  $\bar{u} \in S^{n-1}$  es un autovector de  $A$  asociado al autovalor real  $\lambda_1$ , entonces existe una matriz de Householder  $H$  de forma que  $H\bar{u} = e_1$ , siendo  $e_1$  el primer vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Por consiguiente, se satisface la relación

$$HAH = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_{11} \\ \hline \mathbf{0} & B_{22} \end{array} \right) = B,$$

donde  $B_{11}, B_{22}$  son matrices de órdenes convenientes,  $\mathbf{0}$  es la matriz nula y los autovalores de la matriz  $B_{22}$  son  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

De esta forma,

$$\begin{aligned} M_{\bar{u}} &= A - \bar{u}\bar{u}^t(A + A^t) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle I_n = \\ &= HBH - He_1e_1^tH(HBH + HB^tH) - \lambda_1HH = \\ &= H(B - e_1e_1^t(B + B^t) - \lambda_1I_n)H, \end{aligned}$$

luego las matrices  $M_{\bar{u}}$  y  $N = B - e_1e_1^t(B + B^t) - \lambda_1I_n$  son semejantes, por lo que poseen los mismos autovalores.

Un cálculo simple muestra que

$$N = \left( \begin{array}{c|c} -2\lambda_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_{22} - \lambda_1I_{n-1} \end{array} \right),$$

lo que permite concluir que  $\mu_1 = -2\lambda_1$  y  $\mu_i = \lambda_i - \lambda_1$ , para  $2 \leq i \leq n$ , son los autovalores de  $M_{\bar{u}}$ . ■

Puesto que  $\bar{u}$  es ortogonal a  $W_{\bar{u}}$  y  $\dim(W_{\bar{u}}) = n - 1$ , se deduce que los autovalores de la aplicación lineal  $X \rightarrow M_{\bar{u}}X$  restringida a  $W_{\bar{u}}$  son todos los de  $M_{\bar{u}}$

salvo el primero. Enunciamos esta conclusión en el siguiente resultado. Debemos señalar que en el Teorema 1 de Haderer [28] se obtienen los autovalores de esta restricción utilizando directamente matrices de deflación.

**Corolario 4.8** *En las condiciones de la Proposición 4.7, los autovalores de la aplicación lineal  $X \rightarrow M_{\bar{u}}X$  restringida a  $W_{\bar{u}} = \{X \in \mathbb{R}^n : \langle X, \bar{u} \rangle = 0\}$  son  $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ ,  $\mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda_n - \lambda_1$ .*

Ahora podemos estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema esférico (4.3) definido en  $S^{n-1}$ .

**Corolario 4.9** *En las condiciones de la Proposición 4.7, el punto de equilibrio  $\bar{u}$  del sistema (4.3) es asintóticamente estable si la parte real de  $\lambda_i - \lambda_1$  es negativa para todo  $i = 2, 3, \dots, n$  e inestable si existe algún  $j \in \{2, 3, \dots, n\}$  de forma que la parte real de  $\lambda_j - \lambda_1$  es positiva.*

Enunciamos a continuación un resultado que recoge el efecto sobre (4.3) de los cambios lineales realizados al sistema (4.2).

**Proposición 4.10** *Si  $B, C$  son matrices reales de orden  $n$  semejantes, entonces existe un cambio de variables que transforma el sistema*

$$\dot{v} = Bv - \langle Bv, v \rangle v, \quad v \in S^{n-1} \quad (4.10)$$

en el sistema

$$\dot{u} = Cu - \langle Cu, u \rangle u, \quad u \in S^{n-1}. \quad (4.11)$$

**Demostración.** Si las matrices  $B$  y  $C$  son semejantes, debe existir una matriz  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  regular de forma que  $P^{-1}CP = B$ .

Consideremos la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} S^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ v &\longmapsto u = \frac{Pv}{\|Pv\|} \end{aligned}$$

cuya inversa viene dada por  $v = \|P^{-1}u\|^{-1} P^{-1}u$ .

Derivando respecto de  $t$  la igualdad  $\|Pv\|u = Pv$  obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\|Pv\|) u + \|Pv\|\dot{u} = P\dot{v}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\langle P\dot{v}, Pv \rangle}{\|Pv\|} u + \|Pv\|\dot{u} = P\dot{v}.$$

Supongamos ahora que  $v$  es solución del sistema (4.10), entonces

$$\frac{\langle P(Bv - \langle Bv, v \rangle v), Pv \rangle}{\|Pv\|} u + \|Pv\|\dot{u} = P(Bv - \langle Bv, v \rangle v). \quad (4.12)$$

Si tomamos  $u = Pv/\|Pv\|$ , puesto que  $PB = CP$ , la relación (4.12) se convierte en

$$\langle Cu - \langle Bv, v \rangle u, Pv \rangle u + \|Pv\|\dot{u} = CPv - \langle Bv, v \rangle Pv.$$

Dividiendo ambos términos de esta última igualdad por  $\|Pv\|$  se obtiene

$$\langle Cu, u \rangle u - \langle Bv, v \rangle \langle u, u \rangle u + \dot{u} = Cu - \langle Bv, v \rangle u$$

y haciendo uso de que  $u$  es unitario se sigue que  $u$  es solución del sistema (4.11), con lo que finalizamos la prueba de este resultado. ■

### 4.2.1 Sistemas Lineales Homogéneos Tridimensionales

Como una introducción al estudio de los sistemas lineales a trozos bizonales homogéneos tridimensionales, cuyas matrices poseen un par de autovalores complejos conjugados, analizamos algunas propiedades del sistema lineal tridimensional (4.2) y su sistema esférico asociado (4.3), para el caso en que la matriz real de orden tres  $A$  posee autovalores  $\lambda, \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ .

En esta situación, la forma canónica de Jordan real de la matriz  $A$  es

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

el sistema lineal tridimensional (4.2) es equivalente al sistema lineal

$$\dot{Y} = JY \quad (4.13)$$

y la solución del sistema (4.13) con condición inicial  $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^3$  viene dada, como es bien sabido, por

$$Y(t) = \exp(Jt)Y_0 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t & 0 \\ -e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} Y_0. \quad (4.14)$$

Para el caso que contemplamos ( $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  con autovalores  $\alpha \pm i\beta, \lambda$ , siendo  $\beta \neq 0$ ), algunas propiedades de las soluciones periódicas del sistema esférico en  $S^2$  asociado a  $\dot{X} = AX$  pueden relacionarse con las partes reales de los autovalores de la matriz  $A$ . En concreto, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.11** *Si  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  posee autovalores  $\lambda, \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ , entonces toda solución del sistema esférico asociado al sistema lineal  $\dot{X} = AX$  es periódica si y sólo si  $\alpha = \lambda$ .*

**Demostración.** Consideremos el sistema esférico asociado a (4.13)

$$\dot{v} = Jv - \langle Jv, v \rangle v, \quad v \in S^2, \quad (4.15)$$

que tras una sencilla manipulación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - (\lambda - \alpha) v_3^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

El sistema (4.16) posee como únicos puntos de equilibrio los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$  y, de acuerdo con la Proposición 4.10, es equivalente al sistema esférico asociado al sistema lineal  $\dot{X} = AX$ .

Atendiendo a la última ecuación de (4.16), es decir, a la ecuación unidimensional

$$\dot{v}_3 = (\lambda - \alpha) v_3 (1 - v_3^2),$$

es inmediato comprobar que todas las soluciones del sistema esférico (4.15) son periódicas si y sólo si  $\alpha = \lambda$ . Por consiguiente, todas las soluciones del sistema esférico asociado al sistema lineal  $\dot{X} = AX$  son periódicas si y sólo si  $\alpha = \lambda$ . ■

### 4.3 Sistemas Lineales a Trozos Bizonales Homogéneos

En esta sección aplicaremos los resultados recogidos en la sección precedente al estudio del sistema lineal a trozos homogéneo (4.1).

Observemos en primer lugar que el cambio  $u = X/\|X\|$ , para  $X \neq 0$ , aplicado a (4.1) nos introduce el siguiente sistema sobre la esfera unidad  $S^{n-1}$

$$\dot{u} = A^\nabla u - \langle A^\nabla u, u \rangle u, \quad u \in S^{n-1}, \quad (4.17)$$

$$\text{donde } A^\nabla u = \begin{cases} A^+ u & \text{si } u_1 \geq 0, \\ A^- u & \text{si } u_1 < 0, \end{cases} \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

**Definición 4.12** *El sistema (4.17) se denomina sistema esférico asociado al sistema lineal a trozos (4.1).*

**Nota 4.13** La proyección sobre  $S^{n-1}$  de una solución no nula  $X(t)$  del sistema lineal a trozos homogéneo (4.1) es una órbita  $u(t)$  del sistema esférico asociado (4.17). Por otra parte, toda órbita del sistema (4.17) se corresponde con un conjunto de órbitas del sistema homogéneo (4.1).

Más aún, los conos invariantes del sistema (4.1) se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema esférico (4.17).

Para el sistema lineal a trozos (4.1) la adaptación de la Proposición 4.3 es inmediata.

**Proposición 4.14** *El sistema lineal a trozos homogéneo  $n$ -dimensional (4.1) se transforma mediante un cambio de variables en el sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = A^\nabla u - \langle A^\nabla u, u \rangle u, & u \in S^{n-1}, \\ \dot{r} = \langle A^\nabla u, u \rangle r, & r \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

En cuanto a los puntos de equilibrio del sistema esférico a trozos (4.17), la adaptación de la Proposición 4.4 a dicho sistema es directa.

**Proposición 4.15** *El vector  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \in S^{n-1}$  es un punto de equilibrio del sistema (4.17) si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

1. *El punto  $\bar{u}$  es un autovector de  $A^+$  asociado a un autovalor real y  $\bar{u}_1 \geq 0$ .*
2. *El punto  $\bar{u}$  es un autovector de  $A^-$  asociado a un autovalor real y  $\bar{u}_1 \leq 0$ .*

Cuando los puntos de equilibrio del sistema esférico asociado al sistema lineal a trozos (4.1) no están localizados en el plano de separación  $u_1 = 0$ , podemos determinar su estabilidad aplicando directamente las ideas expuestas en la Sección 4.2 acerca de la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas esféricos asociados a sistemas lineales.

Si el sistema (4.17) posee un punto de equilibrio en el hiperplano de separación  $u_1 = 0$ , los resultados de la Sección 4.2 no permiten determinar la estabilidad de ese punto de equilibrio. La siguiente proposición nos indica que tal situación no ocurre si el sistema lineal a trozos (4.1) es observable.

**Proposición 4.16** *Si el sistema (4.1) es observable, entonces el sistema esférico (4.17) no posee puntos de equilibrio en el hiperplano de separación  $u_1 = 0$ .*

**Demostración.** Sea  $\bar{u} = (0, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n) \in S^{n-1}$  un punto de equilibrio del sistema esférico (4.17) sobre el hiperplano de ecuación  $u_1 = 0$ . Entonces,

según la Proposición 4.15 y la continuidad del campo vectorial que define al sistema (4.1), se deduce la existencia de dos escalares  $\lambda^+, \lambda^- \in \mathbb{R}$  verificando

$$A^+ \bar{u} = \lambda^+ \bar{u} \quad \text{y} \quad A^- \bar{u} = \lambda^- \bar{u}.$$

De esta manera, si  $e_1$  denota el primer vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , se sigue que  $e_1^t (A^-)^n \bar{u} = 0$  para todo  $n \geq 0$ , por lo que la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  de (4.1) (véase la Proposición 1.15) verifica  $\mathcal{O} \bar{u} = 0$ , con  $\bar{u} \neq 0$ .

De aquí, se sigue que la matriz  $\mathcal{O}$  no posee rango completo y el sistema lineal a trozos homogéneo (4.1) es no observable. ■

**Nota 4.17** Debemos tener en cuenta que el sistema (4.1) es observable si y sólo si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  no poseen autovectores (reales o complejos) ortogonales al vector  $e_1$  (consultar [13] para más detalles).

## 4.4 Sistemas 2CPL<sub>3</sub> Homogéneos Observables. Conos Invariantes

Consideraremos en este apartado el estudio de los sistemas continuos lineales a trozos homogéneos tridimensionales y observables. En el Capítulo 5 analizaremos los sistemas 2CPL<sub>3</sub> no observables.

Supondremos que las matrices que rigen al sistema tridimensional y observable (4.1) poseen un par de autovalores complejos conjugados y un autovalor real. En estas condiciones, el siguiente resultado nos caracteriza la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema esférico (4.17).

**Teorema 4.18** *Si el sistema (4.1) es tridimensional, observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$ , entonces el sistema (4.17) posee exactamente dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^+ = (\bar{u}_1^+, \bar{u}_2^+, \bar{u}_3^+)$  y  $\bar{u}^- = (\bar{u}_1^-, \bar{u}_2^-, \bar{u}_3^-)$ , con  $\bar{u}_1^+ > 0$  y  $\bar{u}_1^- < 0$ . Además, se verifica:*

1. Si  $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$  (resp.  $\alpha^- - \lambda^- < 0$ ), entonces el punto de equilibrio  $\bar{u}^+$  (resp.  $\bar{u}^-$ ) es asintóticamente estable.
2. Si  $\alpha^+ - \lambda^+ > 0$  (resp.  $\alpha^- - \lambda^- > 0$ ), entonces el punto de equilibrio  $\bar{u}^+$  (resp.  $\bar{u}^-$ ) es inestable.
3. Si  $\alpha^+ - \lambda^+ = 0$  (resp.  $\alpha^- - \lambda^- = 0$ ), entonces el punto de equilibrio  $\bar{u}^+$  (resp.  $\bar{u}^-$ ) está rodeado por un continuo de órbitas periódicas.

**Demostración.** El sistema lineal  $\dot{X} = A^+X$  posee una variedad invariante unidimensional que interseca a la esfera  $S^2$  en dos puntos. De acuerdo con la Proposición 4.16 tales puntos no se encuentran en el plano  $u_1 = 0$ .

Por tanto, el sistema esférico asociado a  $\dot{X} = A^+X$  posee dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^+ = (\bar{u}_1^+, \bar{u}_2^+, \bar{u}_3^+)$  y  $\bar{v}^+ = (\bar{v}_1^+, \bar{v}_2^+, \bar{v}_3^+)$ , con  $\bar{u}_1^+ > 0$  y  $\bar{v}_1^+ < 0$ .

Análogamente, el sistema esférico asociado a  $\dot{X} = A^-X$  posee dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^- = (\bar{u}_1^-, \bar{u}_2^-, \bar{u}_3^-)$  y  $\bar{v}^- = (\bar{v}_1^-, \bar{v}_2^-, \bar{v}_3^-)$ , con  $\bar{u}_1^- < 0$  y  $\bar{v}_1^- > 0$ .

Por consiguiente,  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  son los dos únicos puntos de equilibrio del sistema esférico a trozos (4.17) y del Corolario 4.9 sigue de forma inmediata los dos primeros apartados.

El tercer apartado es una aplicación directa de la Proposición 4.11. ■

**Nota 4.19** Nótese que el sistema esférico (4.17), bajo las hipótesis del Teorema 4.18, posee órbitas periódicas unizontales, que además son no aisladas, si y sólo si  $\alpha^+ = \lambda^+$  o  $\alpha^- = \lambda^-$  (ver Proposición 4.11).

Haciendo uso del Teorema de Poincaré–Bendixson, probado por J. A. Schwartz [50] para variedades bidimensionales cerradas (ver también [30] o [46]), puede enunciarse un primer resultado de existencia de conos invariantes bizontales para los sistemas 2CPLH<sub>3</sub>.

Aclaremos que en las referencias señaladas anteriormente se exige para la prueba del Teorema de Poincaré–Bendixson la clase  $C^1$  del campo vectorial



definido en la esfera unidad  $S^2$ . No obstante, la tesis del Teorema sigue satisfaciéndose si el campo vectorial es continuo y lipschitziano (véase Zhang Zhi-fen et al. [54]).

**Teorema 4.20** *Si el sistema (4.1) es tridimensional, observable y las matrices  $A^+$  y  $A^-$  poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$  y  $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) > 0$ , entonces el sistema (4.1) posee al menos un cono invariante bizonal.*

**Demostración.** Utilizando el Teorema de Poincaré–Bendixson sobre la esfera  $S^2$  los posibles conjuntos límite del sistema continuo (4.17) son los puntos de equilibrio, las órbitas periódicas o los grafos (ciclos formado por la unión de equilibrios y separatrices) en  $S^2$ .

Del Teorema 4.18 se deduce que el sistema esférico asociado al sistema tridimensional lineal a trozos (4.1) posee dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  y del Corolario 4.8 y la Proposición 4.16 sigue que la linealización del sistema (4.17) en los puntos  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  posee los autovalores complejos  $\alpha^+ - \lambda^+ \pm i\beta^+, \alpha^- - \lambda^- \pm i\beta^-$ , respectivamente.

Si  $\alpha^+ - \lambda^+ > 0$  y  $\alpha^- - \lambda^- > 0$ , entonces los puntos de equilibrio son focos inestables y por consiguiente, el sistema (4.17) no posee grafos. En consecuencia, el sistema (4.17) debe tener al menos una órbita periódica, es decir, el sistema (4.1) posee al menos un cono invariante.

Además, según la Nota 4.19, la órbita periódica existente y su correspondiente cono invariante son bizonales, con lo que finaliza la prueba de este caso.

Cambiando el signo de la variable independiente tendríamos la demostración para  $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$  y  $\alpha^- - \lambda^- < 0$ . ■

Utilizando de nuevo el Teorema de Poincaré–Bendixson sobre  $S^2$  podemos dar una condición de estabilidad asintótica del punto de equilibrio  $\bar{X} = 0$  del sistema (4.1) en el caso tridimensional. El siguiente teorema puede considerarse una generalización del resultado de S. Busenberg y P. Van Den Driessche [11] sobre la estabilidad asintótica del origen en sistemas homogéneos de clase  $C^2$ .

**Teorema 4.21** *Si el sistema (4.1) es tridimensional, observable, las matrices  $A^+$  y  $A^-$  poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$ , y carece de conos invariantes, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (4.1) si y sólo si  $\lambda^+ < 0$  y  $\lambda^- < 0$ .*

**Demostración.** Según la Proposición 4.14, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (4.1) si y sólo si la solución nula de la ecuación unidimensional

$$\dot{r} = \langle A^\nabla u, u \rangle r, \quad r \geq 0 \quad (4.19)$$

es asintóticamente estable para toda solución  $u$  del sistema esférico (4.17).

Puesto que la solución general de la ecuación (4.19) es

$$r(t) = \exp \left( \int_0^t \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right) r_0, \quad (4.20)$$

resulta que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (4.1) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = -\infty \quad (4.21)$$

para toda solución  $u$  del sistema esférico (4.17).

Por otra parte, de acuerdo con la Proposición 4.15, el sistema (4.17) posee dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^+, \bar{u}^-$ , que son autovectores unitarios de  $A^+$  y  $A^-$  asociados a los autovalores reales  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$ , respectivamente.

Además, debido a la observabilidad, de la Proposición 4.16 se sigue que los puntos  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  no están en el plano de separación del sistema  $X_1 = 0$ , luego el tipo topológico de los puntos de equilibrio  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  está determinado por los autovalores de la linealización del sistema esférico (4.17) en dichos puntos, es decir, por los autovalores complejos  $\alpha^+ - \lambda^+ \pm i\beta^+$  y  $\alpha^- - \lambda^- \pm i\beta^-$ , respectivamente. En consecuencia, el sistema esférico asociado (4.17) no posee grafos.

De esta manera, cuando el sistema (4.1) carece de conos invariantes, el Teorema de Poincaré-Bendixson nos garantiza que toda solución no constante de (4.17) converge bien a  $\bar{u}^+$  o bien a  $\bar{u}^-$  cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ .

Así, si toda la solución no constante  $u$  de (4.17) tiende a  $\bar{u}^+$ , entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle = \lambda^+$$

y si tendiera a  $\bar{u}^-$  tendríamos

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle = \lambda^-.$$

Ahora, si  $\lambda^+ < 0$  y  $\lambda^- < 0$ , entonces toda solución  $u$  del sistema (4.17) satisface

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle < 0$$

y por consiguiente, se verifica la igualdad (4.21) y el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (4.1).

Recíprocamente, si el origen del sistema (4.1) es asintóticamente estable, entonces, según (4.21), tenemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle A^+ \bar{u}^+, \bar{u}^+ \rangle d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda^+ t = -\infty,$$

por lo que  $\lambda^+ < 0$ . Un razonamiento análogo permite probar que  $\lambda^- < 0$ . ■

Nótese que el carácter homogéneo del sistema (4.1) nos indica que la estabilidad asintótica del origen es global.

Por otra parte, el Teorema 4.21 exige la carencia de conos invariantes en el sistema (4.1) y, a esta altura del desarrollo, no contamos con ningún resultado sobre la no existencia de conos invariantes en el sistema (4.1).

Por consiguiente, resultará importante, y a eso nos dedicaremos en las próximas páginas, analizar las situaciones en las que el sistema posee conos invariantes o bien carece de ellos.

Por otro lado, la existencia de conos invariantes en sistemas 2CPLH<sub>3</sub> complica el estudio de la estabilidad del origen en tales sistemas, pues será necesario estudiar con detalle la dinámica restringida a los posibles conos invariantes.

A modo de resumen recordemos los principales resultados descritos en este Capítulo hasta este punto. En primer lugar, contamos con un resultado de existencia de conos invariantes para sistemas lineales a trozos bizontales tridimensionales homogéneos (ver Teorema 4.20) y en segundo lugar, hemos enunciado un resultado sobre la estabilidad del origen para tales tipos de sistemas (véase el Teorema 4.21).

## 4.5 Semiaplicaciones de Poincaré en Sistemas Lineales Homogéneos Tridimensionales

En lo que sigue nos restringiremos al estudio de la existencia, unicidad y estabilidad de conos invariantes bizontales para el sistema tridimensional (4.1) en el supuesto de observabilidad y cuando las matrices del sistema posean un par de autovalores complejos conjugados. Nótese, que ya contamos con un resultado de existencia de conos invariantes bizontales para tal sistema: el Teorema 4.20.

Para ello, daremos a conocer unas ecuaciones paramétricas que nos informarán del comportamiento de las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.1) actuando sobre las semirrectas que pasan por el origen y están contenidas en el plano de separación  $X_1 = 0$ .

En un primer paso nos dedicamos a conocer la dinámica de las semiaplicaciones de Poincaré de un sistema lineal tridimensional escrito en forma canónica de Jordan.

Puesto que estamos interesados en el estudio de las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.1) cuando las matrices que lo rigen poseen un par de autovalores complejos conjugados y tal sistema es observable, vamos a trabajar con el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

siendo  $\beta > 0$ , y tomaremos como sección de Poincaré el plano de ecuación  $z = qy$ , con  $q \neq 0$ , que como más adelante veremos es una elección adecuada.

Debe tenerse en cuenta que los conceptos de semiaplicación de Poincaré y semitiempo de vuelo definidos en el Capítulo 2 se adaptan de forma natural al sistema (4.22) tomando como sección de Poincaré el plano de ecuación  $z = qy$ .

El plano  $z = 0$  es invariante para el sistema (4.22) y está asociado al par de autovalores complejos conjugados. Esto nos introduce la siguiente definición.

**Definición 4.22** *Sea  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  con autovalores  $\lambda, \alpha \pm i\beta$ , siendo  $\beta \neq 0$ . Denominamos plano focal de la matriz  $A$  o del sistema  $\dot{X} = AX$  al plano invariante para el sistema lineal  $\dot{X} = AX$  asociado al par de autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ .*

En el futuro, resultará útil hacer uso de la notación  $\gamma = (\alpha - \lambda)/\beta$ , considerar la función, introducida por Andronov et al. en [5],

$$\varphi_\gamma(\tau) = 1 - \exp(\gamma\tau) (\cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau)$$

y utilizar de ella las siguientes propiedades, que se deducen de forma inmediata:

- (a)  $\varphi_{-\gamma}(-\tau) = \varphi_\gamma(\tau) \quad \forall \tau, \gamma \in \mathbb{R}$ .
- (b) Para todo  $\gamma \geq 0$  existe un único valor  $\hat{\tau} = \hat{\tau}_\gamma \in (\pi, 2\pi]$  tal que  $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$ . Además (véase la Figura 4.1), para  $\gamma \geq 0$  se satisface

$$\varphi_\gamma(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in (0, \hat{\tau}) \quad \text{y} \quad \varphi_\gamma(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in (\hat{\tau}, 2\pi).$$

Comenzamos con un breve resultado que nos proporciona la recta del plano  $z = qy$  donde el flujo del sistema (4.22) es tangente a dicho plano. Dicha recta se denominará línea de tangencia

**Lema 4.23** *El flujo del sistema (4.22) es tangente al plano  $z = qy$  a lo largo de la recta que pasa por el origen y tiene como vector director  $\tilde{w} = (\gamma, 1, q)$ .*

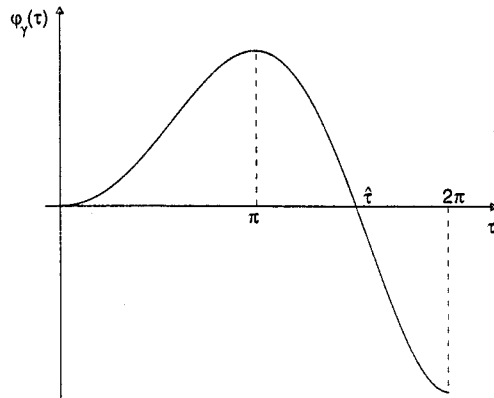


Figura 4.1: La función  $\varphi_\gamma$  para  $\gamma > 0$ .

**Demostración.** Las trayectorias de tangencia sobre el plano  $z = qy$  deben ser ortogonales al vector  $(0, q, -1)$ , que es normal a dicho plano. Cualquier vector del plano  $z = qy$  puede escribirse en la forma  $a(1, 0, 0) + b(0, 1, q) = (a, b, bq)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , luego en la línea de tangencia debe verificarse la igualdad

$$(0 \ q \ -1) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ bq \end{pmatrix} = 0.$$

De aquí,  $a = \gamma b$  y por consiguiente, la dirección de tangencia viene determinada por el vector  $\tilde{w} = \gamma(1, 0, 0) + (0, 1, q) = (\gamma, 1, q)$ . ■

**Nota 4.24** Obsérvese que la base de vectores  $\{e_1 = (1, 0, 0), \tilde{w} = (\gamma, 1, q)\}$  para representar los puntos del plano  $z = qy$  está formada por un vector de la intersección del plano focal  $z = 0$  con la sección  $z = qy$  y un vector en la línea de tangencia del flujo del sistema (4.22) sobre el plano  $z = qy$ .

Representando tanto el punto de salida como el punto de llegada de la semiaplicación de Poincaré por sus coordenadas respecto a la base  $\{e_1, \tilde{w}\}$  establecemos paramétricamente unas relaciones entre dichas coordenadas.

**Proposición 4.25** *Si la semiaplicación de Poincaré del sistema (4.22), tomando como sección de Poincaré el plano de ecuación  $z = qy$ , transforma el punto  $(a + \gamma b, b, bq)$  en el punto  $(a' + \gamma b', b', b'q)$ , entonces se verifican las siguientes relaciones:*

1. Si  $b = 0$ , entonces  $b' = 0$  y  $a' = -a \exp(\gamma\pi/\beta)$ .
2. Si  $b \neq 0$ , entonces  $b' \neq 0$  y

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= -\frac{e^{-\gamma\tau_1} \varphi_\gamma(\tau_1)}{\text{sen } \tau_1}, \\ \frac{a'}{b'} &= \frac{e^{\gamma\tau_1} \varphi_{-\gamma}(\tau_1)}{\text{sen } \tau_1}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde  $\tau_1 \in (0, \hat{\tau})$  y  $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi]$  satisface  $\varphi_{|\gamma|}(\hat{\tau}) = 0$ .

**Demostración.** De acuerdo con la identidad (4.14), si el flujo del sistema (4.22) transforma el punto  $(a + \gamma b, b, bq)$  en el punto  $(a' + \gamma b', b', b'q)$  debe existir un valor  $t_1 > 0$  de forma que

$$\begin{aligned} (a + \gamma b) e^{\alpha t_1} \cos \beta t_1 + b e^{\alpha t_1} \sin \beta t_1 &= a' + \gamma b', \\ -(a + \gamma b) e^{\alpha t_1} \sin \beta t_1 + b e^{\alpha t_1} \cos \beta t_1 &= b', \\ b q e^{\lambda t_1} &= b' q. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ahora, a partir del valor de  $b$  distinguimos los siguientes casos:

1. Si  $b = 0$ , entonces  $b' = 0$  y  $-a \exp(\alpha t_1) \sin \beta t_1 = 0$ . Como  $a \neq 0$ , pues en caso contrario nos encontraríamos en el origen (punto de equilibrio de (4.22)), se deduce que  $\sin \beta t_1 = 0$ .

Al estar interesado en la semiaplicación de Poincaré, el valor  $t_1$  debe ser el menor valor estrictamente positivo que satisfaga la condición anterior, es decir,  $t_1 = \pi/\beta$ . La demostración de este apartado finaliza sustituyendo este valor de  $t_1$  en la primera ecuación de (4.24).

2. Si  $b \neq 0$ , entonces de la tercera ecuación de (4.24) se deduce que  $b' \neq 0$ . Escribiendo  $\tau_1 = \beta t_1$  y dividiendo las dos primeras identidades de (4.24) por  $b' = b \exp(\lambda t_1)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \gamma\right) e^{\gamma\tau_1} \cos \tau_1 + e^{\gamma\tau_1} \sin \tau_1 &= \frac{a'}{b'} + \gamma \\ -\left(\frac{a}{b} + \gamma\right) e^{\gamma\tau_1} \sin \tau_1 + e^{\gamma\tau_1} \cos \tau_1 &= 1 \end{aligned}$$

Cálculos directos sobre las anteriores expresiones nos llevan a (4.23). ■

Notemos que el menor valor  $t_1 > 0$  que satisface (4.24) es el semitiempo de vuelo del punto  $(a + \gamma b, b, bq)$  (véanse las definiciones 2.9 y 2.10).

**Definición 4.26** *El escalar  $\tau_1 = t_1\beta$ , donde  $t_1$  es el semitiempo de vuelo del punto  $(a + \gamma b, b, bq)$ , se denomina semitiempo de vuelo normalizado.*

**Nota 4.27** La Proposición 4.25 nos indica que la semiaplicación de Poincaré del sistema (4.22) sobre la sección  $z = qy$  transforma, como ya sabíamos (ver Proposición 4.1), semirrectas que pasan por el origen y están contenidas en el plano  $z = qy$  en semirrectas contenidas en el plano  $z = qy$  y que pasan por el origen. Además, todos los puntos de una misma semirrecta poseen el mismo semitiempo de vuelo.

Nótese que los cocientes  $a/b$  y  $a'/b'$  representan la pendiente, en la base elegida, de las semirrectas de partida y llegada de la semiaplicación de Poincaré.

Debemos destacar la similitud existente entre las expresiones (4.23), que describen el comportamiento dinámico de las semiaplicaciones de Poincaré para un sistema lineal tridimensional homogéneo, y las expresiones encontradas por E. Freire et al. en [22] (ver también [47]) que parametrizan las semiaplicaciones de Poincaré de un sistema plano lineal no homogéneo de tipo foco. Tal similitud se reforzará aún más en la Sección 4.10.



**Nota 4.28** A través de las propiedades de la función  $\varphi_\gamma$  puede verse que el dominio y el rango de la semiaplicación de Poincaré del sistema (4.22), tomando como sección de Poincaré el plano  $z = qy$ , depende del signo de  $\gamma$ . Además, el semitiempo de vuelo normalizado recorre todo el intervalo  $[0, \hat{\tau}]$ .

Siendo más concreto:

- Si  $\gamma > 0$ , entonces la semiaplicación de Poincaré transforma todo el semiplano  $\{(a + \gamma b, b, bq) : a \geq 0\}$  en el conjunto

$$\left\{ (a + \gamma b, b, bq) : a \leq 0, a \leq \frac{e^{\gamma \hat{\tau}} \varphi_{-\gamma}(\hat{\tau})}{\text{sen } \hat{\tau}} b \right\},$$

siendo  $\hat{\tau}$  la única solución en  $(\pi, 2\pi)$  de la ecuación  $\varphi_\gamma(\tau) = 0$ .

- Si  $\gamma = 0$ , entonces la semiaplicación de Poincaré transforma todo el semiplano  $\{(a, b, bq) : a > 0\}$  en el semiplano  $\{(a, b, bq) : a < 0\}$  y la recta  $\{(0, b, bq) : b \in \mathbb{R}\}$  es invariante.
- Si  $\gamma < 0$ , entonces la semiaplicación de Poincaré está definida en

$$\left\{ (a + \gamma b, b, bq) : a \geq 0, a \geq \frac{e^{-\gamma \hat{\tau}} \varphi_\gamma(\hat{\tau})}{\text{sen } \hat{\tau}} b \right\},$$

siendo  $\hat{\tau}$  la única solución en  $(\pi, 2\pi)$  de la ecuación  $\varphi_{-\gamma}(\tau) = 0$ , y su rango es todo el semiplano  $\{(a + \gamma b, b, bq) : a \leq 0\}$ .

## 4.6 Semiaplicaciones de Poincaré en Sistemas 2CPL<sub>3</sub> Homogéneos Observables

De acuerdo con la Nota 4.17, si el sistema 2CPLH<sub>n</sub> (4.1) es observable, entonces tanto  $A^+$  como  $A^-$  no poseen autovectores (reales o complejos) ortogonales al primer vector de la base canónica.

Esto nos indica que si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  de orden tres poseen un par de autovalores complejos conjugados, los planos focales de  $A^+$  y  $A^-$  no coinciden

con el plano de separación y los autovectores de  $A^+$  y  $A^-$  asociados a sus autovalores reales no pertenecen a dicho plano de separación.

Con estas premisas, mostraremos que somos capaces de elegir un sistema de coordenadas en el plano de separación en el que las semiaplicaciones de Poincaré de un sistema 2CPLH<sub>3</sub> posean relaciones idénticas a las descritas en la Proposición 4.25 para la semiaplicación de Poincaré del sistema escrito en forma canónica de Jordan real (4.22) sobre la sección  $z = qy$ .

Recuérdese que un sistema tridimensional homogéneo es observable si y sólo si puede escribirse en la forma de Lienard generalizada (ver Proposición 1.36)

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = m^\nabla x - z, \\ \dot{z} = d^\nabla x, \end{cases} \quad (4.25)$$

donde el polinomio característico de  $A^\nabla$  es

$$p_{A^\nabla}(\lambda) = -\lambda^3 + t^\nabla \lambda^2 - m^\nabla \lambda + d^\nabla. \quad (4.26)$$

Antes de obtener las expresiones paramétricas de las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.25) establecemos varios resultados preliminares.

**Lema 4.29** *El flujo del sistema (4.25) es tangente al plano  $x = 0$  a lo largo del eje  $OZ$ . Además, el dominio de la semiaplicación de Poincaré derecha  $P^+$  (resp., semiaplicación de Poincaré izquierda  $P^-$ ) del sistema (4.25) es un subconjunto del semiplano  $\{x = 0, y \leq 0\}$  (resp.,  $\{x = 0, y \geq 0\}$ ).*

**Demostración.** El flujo del sistema (4.25) es tangente al plano de separación  $x = 0$  si es ortogonal al vector  $e_1 = (1, 0, 0)$ . Así, debe ocurrir que

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} t^\nabla & -1 & 0 \\ m^\nabla & 0 & -1 \\ d^\nabla & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

de donde,  $y = 0$ . Las conclusiones sobre los dominios de  $P^+$  y  $P^-$  son inmediatas. ■

El siguiente desarrollo nos proporciona una matriz de paso que permite transformar cada una de las matrices que rigen al sistema (4.25), cuando éstas poseen un par de autovalores complejos conjugados, a su forma canónica de Jordan real.

Supongamos que la matriz real de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

posee autovalores  $\lambda, \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ .

Es sabido que los autovectores de  $A^t$  asociados al autovector real  $\lambda$  son ortogonales al plano focal de  $A$ . Es fácil observar que  $v_\lambda = (\lambda^2, -\lambda, 1)$  es autovector de  $A^t$  asociado a  $\lambda$ , por lo que el plano focal de  $A$  viene dado por la ecuación

$$\lambda^2 x - \lambda y + z = 0.$$

Así, el vector  $p_1 = (0, 1, \lambda)$  pertenece a la intersección del plano focal de  $A$  con el plano de separación  $x = 0$ .

Es inmediato comprobar que el vector

$$p_2 = -\frac{1}{\beta}(A - \alpha I_3)p_1 = \frac{1}{\beta}(1, \alpha + \lambda, \alpha\lambda)$$

también pertenece al plano focal de  $A$ , no es proporcional al vector  $p_1$  y satisface las relaciones

$$Ap_1 = \alpha p_1 - \beta p_2,$$

$$Ap_2 = \beta p_1 + \alpha p_2.$$

Por otro lado, un cálculo inmediato permite probar que  $p_3 = (1, 2\alpha, \alpha^2 + \beta^2)$  es un autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda$ .

Por consiguiente, la matriz  $P$  cuyas columnas son  $p_1, p_2$  y  $p_3$  es regular y, como recogemos en el siguiente lema, es una matriz de paso que transforma la matriz  $A$  a su forma canónica de Jordan real.

**Lema 4.30** *Si la matriz real de orden tres*

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*posee autovalores  $\lambda, \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ , entonces la matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\beta} & 1 \\ 1 & \frac{\alpha + \lambda}{\beta} & 2\alpha \\ \lambda & \frac{\lambda\alpha}{\beta} & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

*es regular y verifica*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

En la Proposición 4.25 se establecieron unas relaciones entre las coordenadas de dos puntos homólogos mediante la semiaplicación de Poincaré del sistema (4.22) tomando como sección de Poincaré el plano  $z = qy$ . El siguiente resultado extiende esas relaciones al sistema lineal a trozos tridimensional (4.25).

No obstante, ya que estamos interesados en la obtención de conos invariantes bizonales para el sistema (4.25) y puesto que, según el Lema 4.29, la línea de tangencia del sistema lineal a trozos (4.25) sobre el plano de separación es la recta  $x = 0, y = 0$ , sólo estudiaremos el comportamiento de las semiaplicaciones de Poincaré sobre los puntos del plano  $x = 0$  que no se encuentran sobre dicha recta.

**Proposición 4.31** *Si las matrices  $A^+$  y  $A^-$  que rigen al sistema tridimensional (4.25) poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si la semiaplicación de Poincaré izquierda  $P^-$  del sistema (4.25) transforma el punto  $(0, y_0, z_0)$  en el punto  $(0, y_1, z_1)$ , con  $y_0 \cdot y_1 \neq 0$ , entonces existe un valor  $\tau^- \in (0, \hat{\tau}^-)$ , siendo  $\hat{\tau}^-$  la primera solución positiva de  $\varphi_{|\gamma^-|}(\tau) = 0$ , de forma que*

$$\begin{cases} \frac{z_0}{y_0} = \lambda^- + \beta^- \left( (\gamma^-)^2 + 1 \right) \frac{e^{\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen} \tau^-}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)}, \\ \frac{z_1}{y_1} = \lambda^- - \beta^- \left( (\gamma^-)^2 + 1 \right) \frac{e^{-\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen} \tau^-}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}, \end{cases} \quad (4.29)$$

$$y_1 = - \exp \left( \left( 2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \tau^- \right) \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)} y_0, \quad (4.30)$$

con  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-) / \beta^-$ .

2. *Si la semiaplicación de Poincaré derecha  $P^+$  del sistema (4.25) transforma el punto  $(0, y_1, z_1)$  en el punto  $(0, y_2, z_2)$ , con  $y_1 \cdot y_2 \neq 0$ , entonces existe un valor  $\tau^+ \in (0, \hat{\tau}^+)$ , siendo  $\hat{\tau}^+$  la primera solución positiva de  $\varphi_{|\gamma^+|}(\tau) = 0$ , de forma que*

$$\begin{cases} \frac{z_1}{y_1} = \lambda^+ + \beta^+ \left( (\gamma^+)^2 + 1 \right) \frac{e^{\gamma^+ \tau^+} \operatorname{sen} \tau^+}{\varphi_{\gamma^+}(\tau^+)}, \\ \frac{z_2}{y_2} = \lambda^+ - \beta^+ \left( (\gamma^+)^2 + 1 \right) \frac{e^{-\gamma^+ \tau^+} \operatorname{sen} \tau^+}{\varphi_{-\gamma^+}(\tau^+)}, \end{cases} \quad (4.31)$$

$$y_2 = - \exp \left( \left( 2\gamma^+ + \frac{\lambda^+}{\beta^+} \right) \tau^+ \right) \frac{\varphi_{-\gamma^+}(\tau^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\tau^+)} y_1, \quad (4.32)$$

con  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda^+) / \beta^+$ .

**Demostración.** A la vista de la simetría existente entre las expresiones de los dos apartados es suficiente realizar la prueba de este resultado sólo para el primero de ellos. Por ello, y para facilitar la lectura, suprimimos el superíndice. Es decir, vamos a deducir unas expresiones paramétricas de la semiaplicación de Poincaré del sistema lineal

$$\dot{X} = AX = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} X, \quad (4.33)$$

tomando como sección de Poincaré el plano de ecuación  $x = 0$ .

Si el punto  $(0, y_1, z_1)$  es la imagen del punto  $(0, y_0, z_0)$  mediante una semiaplicación de Poincaré del sistema (4.33), entonces existe un valor  $t_1 > 0$  de forma que

$$\exp(At_1) \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Si  $P$  denota la matriz definida en (4.27) y  $J$  es la forma canónica de Jordan real de la matriz  $A$ , el Lema 4.30 y las propiedades de la exponencial matricial nos indican que la relación (4.34) puede escribirse en la forma

$$\exp(Jt_1)P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

De forma análoga a la descrita en la Nota 4.24, si tomamos el vector  $p_1 = (0, 1, \lambda)$  en la intersección del plano focal de  $A$  con el plano de separación  $x = 0$  y el vector  $w = (0, 0, -\beta(\gamma^2 + 1))$  en la línea de tangencia del sistema (4.33) sobre el plano  $x = 0$ , tenemos que el conjunto de vectores  $\{p_1, w\}$  es base del subespacio de ecuación  $x = 0$  y podemos escribir

$$(0, y_i, z_i) = a_i p_1 + b_i w \quad \text{con} \quad a_i = y_i, \quad b_i = -\frac{z_i - \lambda y_i}{\beta(\gamma^2 + 1)}, \quad i = 0, 1. \quad (4.36)$$

Como los vectores  $p_1$  y  $w$  verifican las relaciones

$$P^{-1}p_1 = e_1 = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad P^{-1}w = \tilde{w} = (\gamma, 1, -1/\beta),$$

la expresión (4.35) se transforma en

$$\exp(Jt_1) (a_0 e_1 + b_0 \tilde{w}) = a_1 e_1 + b_1 \tilde{w}.$$

Esto nos indica que el punto  $(a_0 + \gamma b_0, b_0, -b_0/\beta)$  del plano  $z = -y/\beta$  se transforma mediante la semiaplicación de Poincaré del sistema (4.22) en el punto  $(a_1 + \gamma b_1, b_1, -b_1/\beta)$  del mismo plano. Por consiguiente, de la Proposición 4.25 sigue que

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{a_0} &= -\frac{e^{\gamma\tau_1} \operatorname{sen} \tau_1}{\varphi_\gamma(\tau_1)}, \\ \frac{b_1}{a_1} &= \frac{e^{-\gamma\tau_1} \operatorname{sen} \tau_1}{\varphi_{-\gamma}(\tau_1)}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

siendo  $\tau_1 = \beta t_1 \in (0, \hat{\tau})$  y  $\hat{\tau}$  la primera solución positiva de  $\varphi_{|\gamma|}(\tau) = 0$ .

Sustituyendo los valores  $a_i, b_i, i = 0, 1$  y tras una sencilla manipulación en (4.37) llegamos a (4.29).

Por otra parte, haciendo uso de la última igualdad de (4.24) tenemos que  $b_1 = \exp(\lambda\tau_1/\beta)b_0$  y según (4.36) obtenemos

$$z_1 - \lambda y_1 = e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau_1} (z_0 - \lambda y_0).$$

Finalmente, utilizando las dos expresiones de (4.29) se tiene directamente la igualdad (4.30). ■

Obsérvese que de la Nota 4.28 y de la expresión (4.36) puede establecerse el dominio y rango de las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.25). No obstante, omitimos el desarrollo de tales propiedades ya que éstas no serán significativas en los posteriores desarrollos.

**Nota 4.32** Eligiendo coordenadas polares en el plano de separación  $x = 0$

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \operatorname{sen} \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

según la Proposición 4.31, las semiaplicaciones de Poincaré  $P^+$  y  $P^-$  del sistema lineal a trozos (4.25) poseen la estructura triangular

$$P^- \equiv \begin{cases} \theta_1 = F^-(\theta_0), \\ r_1 = G^-(\theta_0)r_0, \end{cases} \quad P^+ \equiv \begin{cases} \theta_2 = F^+(\theta_1), \\ r_2 = G^+(\theta_1)r_1, \end{cases}$$

donde  $F^-$ ,  $F^+$ ,  $G^-$  y  $G^+$  son funciones analíticas en ciertos intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$ .

Por tanto, la aplicación de Poincaré  $P = P^+ \circ P^-$  del sistema (4.25) tiene también estructura triangular

$$P(\theta_0, r_0) = (F(\theta_0), G(\theta_0)r_0),$$

siendo  $F = F^+ \circ F^-$  y  $G = (G^+ \circ F^-) \cdot G^-$ .

## 4.7 Existencia de Conos Invariantes en Sistemas $2\text{CPL}_3$ Homogéneos Observables

A partir de la Proposición 4.1, las semiaplicaciones de Poincaré del sistema (4.25) transforman semirrectas contenidas en el plano  $x = 0$  que pasan por el origen en semirrectas contenidas en dicho plano que pasan por el origen. Utilizando esta propiedad es posible definir dos aplicaciones biyectivas  $S^+$  y  $S^-$  que transformen la pendiente de la semirrecta de partida en la pendiente de la semirrecta de llegada para cada una de las semiaplicaciones  $P^+$  y  $P^-$ .

Las relaciones (4.29) establecen en forma paramétrica el comportamiento de la aplicación  $S^-$ , mientras que las relaciones (4.31) determinan  $S^+$ .

Nótese que el conocimiento de las aplicaciones  $S^+$  y  $S^-$  en forma paramétrica nos informa del comportamiento de las semiaplicaciones de Poincaré del sistema esférico asociado a (4.25), ya que cada punto de la circunferencia  $S^2 \cap \{x = 0\}$  se corresponde de manera biunívoca con cada una de las semirrectas que pasan por el origen y están contenidas en el plano  $x = 0$ .



La relación entre los conos invariantes bizonales del sistema (4.25) y las aplicaciones  $S^+$  y  $S^-$  es obvia. No obstante, y para futuras referencias, enunciamos dicha relación en el siguiente resultado.

**Proposición 4.33** *En las condiciones de la Proposición 4.31, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El sistema (4.25) posee un cono invariante bizonal.*
2. *El sistema esférico asociado a (4.25) posee una órbita periódica bizonal.*
3. *La aplicación  $S^+ \circ S^-$  posee un punto fijo.*

Las nociones de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad para un conjunto invariante de un sistema dinámico (ver [42]) se trasladan de forma natural a los conos invariantes del sistema (4.25). No obstante, gracias a la Proposición 4.33, los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad para los conos invariantes bizonales del sistema (4.25) pueden ser definidos a partir de estos mismos conceptos sobre las órbitas periódicas del sistema esférico asociado a (4.25) o sobre los puntos fijos de la aplicación  $S^+ \circ S^-$ .

Para establecer algunos casos más de existencia de conos invariantes para el sistema (4.25), así como otros de no existencia, analizaremos las aplicaciones  $S^+$  y  $S^-$ . Para ello, introducimos la aplicación

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(u_0) = u_1$$

definida en forma paramétrica por

$$S \equiv \begin{cases} u_0 &= \lambda + \beta(\gamma^2 + 1) \frac{e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_\gamma(\tau)}, \\ u_1 &= \lambda - \beta(\gamma^2 + 1) \frac{e^{-\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \end{cases} \quad (4.38)$$

donde  $\gamma = (\alpha - \lambda)/\beta$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau})$  y  $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi]$  satisface la condición  $\varphi_{|\gamma|}(\hat{\tau}) = 0$ .

Enunciamos a continuación algunas propiedades de la aplicación  $S$ .

**Lema 4.34** *La aplicación  $S$  definida en (4.38) satisface las siguientes propiedades:*

1.  $S(\lambda) = \lambda$ .

2. Si  $\gamma = 0$ , entonces  $S(u_0) = -u_0 + 2\lambda$ .

3. La aplicación  $S$  es estrictamente decreciente y

$$S'(u_0) = -e^{-4\gamma\tau} \left( \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3. \quad (4.39)$$

4. La recta de ecuación  $u_1 = -u_0 + (2/3)(2\alpha + \lambda)$  es asíntota oblicua de  $S$  para  $u_0 \rightarrow +\infty$ .

5. Si  $\gamma > 0$ , entonces la recta  $u_1 = u_H$  es asíntota de  $S$  para  $u_0 \rightarrow -\infty$ , donde

$$u_H = \lambda - \beta(\gamma^2 + 1) \frac{e^{-\gamma\hat{\tau}} \operatorname{sen} \hat{\tau}}{\varphi_{-\gamma}(\hat{\tau})}.$$

6. Si  $\gamma < 0$ , entonces la recta  $u_0 = u_V$  es asíntota vertical de  $S$ , siendo

$$u_V = \lambda + \beta(\gamma^2 + 1) \frac{e^{\gamma\hat{\tau}} \operatorname{sen} \hat{\tau}}{\varphi_\gamma(\hat{\tau})}.$$

**Demostración.**

1. Tomando  $\tau = \pi$  en (4.38) se tiene directamente que  $S(\lambda) = \lambda$ .

2. Si  $\gamma = 0$ , la aplicación  $S$  adopta la forma

$$S \equiv \begin{cases} u_0 = \lambda + \beta \frac{\operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau}, \\ u_1 = \lambda - \beta \frac{\operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau}, \end{cases} \quad 0 < \tau < 2\pi,$$

luego,  $u_1 = S(u_0) = -u_0 + 2\lambda$ .

3. Un cálculo directo muestra que

$$S'(u_0) = \frac{u'_1(\tau)}{u'_0(\tau)} = -e^{-4\gamma\tau} \left( \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3 < 0.$$

4. Tras aplicar reiteradamente la regla de L'Hôpital se tiene que

$$m = \lim_{u_0 \rightarrow +\infty} \frac{S(u_0)}{u_0} = - \lim_{\tau \rightarrow 0^+} e^{-4\gamma\tau} \left( \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3 = -1.$$

Cálculos tediosos, pero sencillos, muestran que

$$\lim_{u_0 \rightarrow +\infty} [S(u_0) + u_0] = \frac{2}{3}(2\alpha + \lambda)$$

y por consiguiente, la recta  $u_1 = -u_0 + (2/3)(2\alpha + \lambda)$  es una asíntota oblicua de  $S$  para  $u_0 \rightarrow +\infty$ .

Para finalizar, los dos últimos apartados de este lema son consecuencia inmediata del recorrido del parámetro  $\tau$  en las expresiones de  $S$  y las propiedades de la función  $\varphi_\gamma$ . ■

La Figura 4.2 ilustra gráficamente el comportamiento de la aplicación  $S$  para los casos  $\gamma > 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\gamma < 0$ , manteniendo constante el valor  $2\alpha + \lambda$ .

El siguiente resultado muestra nuevos casos de existencia de conos invariantes en el sistema homogéneo y observable (4.25).

**Proposición 4.35** *Supongamos que las matrices  $A^+$  y  $A^-$  que rigen al sistema tridimensional (4.25) poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ . Denotemos  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda^+)/\beta^+$  y  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-)/\beta^-$ . Se verifican las siguientes propiedades:*

1. Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$ , entonces el sistema (4.25) posee al menos un cono invariante bizonal.
2. Si  $\gamma^+ = \gamma^- = 0$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

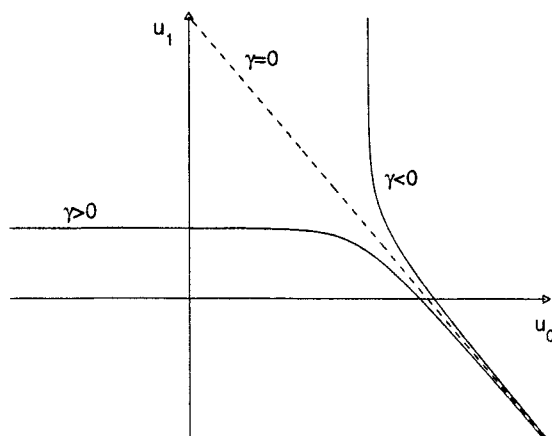


Figura 4.2: Representación gráfica de la aplicación  $S$ .

- (a) Si  $t^+ = t^-$ , entonces todas las soluciones del sistema esférico asociado a (4.25) son periódicas, por lo que el sistema (4.25) posee un continuo de conos invariantes bizontales y unizontales.
- (b) Si  $t^+ \neq t^-$ , entonces el sistema (4.25) no posee conos invariantes bizontales, pero posee dos continuos de conos invariantes unizontales.
3. Si  $\gamma^+ = 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^- < 0$ , entonces (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizontales y al menos un cono invariante bizonal.
4. Si  $\gamma^- = 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^+ > 0$ , entonces (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizontales y al menos un cono invariante bizonal.

### Demostración.

1. El primer apartado es consecuencia directa del Teorema 4.20.

De acuerdo con la Proposición 4.33, el sistema (4.25) posee un cono invariante bizonal si y sólo si la aplicación  $S^+ \circ S^-$  posee un punto fijo. Puesto que los puntos fijos de  $S^+ \circ S^-$  se corresponden con los ceros de la función

desplazamiento  $d(u_0) = (S^+ \circ S^-)(u_0) - u_0$ , analizaremos para cada uno de los casos reseñados la existencia o no de soluciones en la ecuación  $d(u_0) = 0$ .

2. Si  $\gamma^+ = \gamma^- = 0$ , entonces  $t^+ = 3\lambda^+$ ,  $t^- = 3\lambda^-$  y la aplicación  $S^+ \circ S^-$  es, de acuerdo con el segundo apartado del Lema 4.34,

$$(S^+ \circ S^-)(u_0) = u_0 + \frac{2}{3}(t^+ - t^-).$$

Esto permite considerar los siguientes casos:

- (a) Si  $t^+ = t^-$ , entonces la función desplazamiento  $d$  es idénticamente nula, por lo que en este caso el sistema (4.25) posee un continuo de conos invariantes bizonales. Además, puesto que se verifican las igualdades  $\alpha^+ = \lambda^+ = \alpha^- = \lambda^-$ , haciendo uso del tercer apartado del Teorema 4.18 y de la Nota 4.19, se concluye que todas las soluciones del sistema esférico asociado a (4.25) son periódicas.
- (b) Si  $t^+ \neq t^-$ , entonces  $d(u_0) \neq 0$  para todo  $u_0 \in \mathbb{R}$ , por lo que el sistema (4.25) no posee conos invariantes bizonales, aunque sí posee un par de continuos de conos invariantes unizonales (ver Nota 4.19).
3. Si  $\gamma^+ = 0$  y  $\gamma^- > 0$ , entonces del Lema 4.34 se deduce que

$$d(u_0) = (S^+ \circ S^-)(u_0) - u_0 = -S^-(u_0) + 2\lambda^+ - u_0.$$

Por tanto,

$$\lim_{u_0 \rightarrow -\infty} d(u_0) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{u_0 \rightarrow +\infty} d(u_0) = \frac{2}{3}(t^+ - t^-).$$

Si ahora  $t^+ - t^- < 0$ , entonces aplicando el Teorema de Bolzano, deducimos la existencia de un valor  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$  de forma que  $d(\bar{u}_0) = 0$ , con lo que el sistema (4.25) posee al menos un cono invariante bizonal. La existencia de un continuo de conos invariantes unizonales está garantizada como consecuencia de la Nota 4.19.

El caso  $\gamma^+ = 0$ ,  $\gamma^- < 0$  y  $t^+ - t^- > 0$  se prueba de manera análoga.

4. La prueba de este apartado sigue del apartado anterior y las invariancias del sistema (4.25) descritas en la Nota 1.37. ■

Los resultados recogidos en la Proposición 4.35 se precisarán más adelante en el Teorema 4.47. En concreto, se establecerá la unicidad del cono invariante cuando  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$  y se determinará su estabilidad.

El contenido de la Proposición 4.35 puede visualizarse en la Figura 4.7, donde también se reflejan los resultados que recogeremos en el Teorema 4.47.

## 4.8 Posición Relativa entre Conos Invariantes y Planos Focales para Sistemas 2CPLH<sub>3</sub>

Cuando la matriz  $A^+$  del sistema observable (4.25) posee un par de autovalores complejos conjugados y un autovalor real  $\lambda^+$ , el plano focal de la matriz  $A^+$ , que denotaremos mediante  $\Pi_F^+$ , tiene de ecuación  $(\lambda^+)^2 - \lambda^+y + z = 0$ .

Análogamente, el plano focal de la matriz  $A^-$ , que se denotará  $\Pi_F^-$ , es el plano de ecuación  $(\lambda^-)^2 - \lambda^-y + z = 0$ .

Estos planos permitirán restringir las regiones de  $\mathbb{R}^3$  donde pueden encontrarse los conos invariantes bizontales del sistema (4.25).

Una vez localizadas estas regiones del espacio, veremos que la búsqueda de conos invariantes bizontales en (4.25) se reduce al estudio de la existencia de órbitas periódicas en diferentes sistemas planos continuos cuadráticos a trozos.

Ahora definimos los conceptos de semiplanos focales a partir de la noción de plano focal.

**Definición 4.36** Sean  $A^+, A^- \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  que poseen autovalores  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$ ,  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, donde  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$ .

Llamaremos semiplano focal derecho  $\Pi_{HF}^+$  del sistema tridimensional (4.1) al plano focal de la matriz  $A^+$  restringido para  $X_1 \geq 0$ .

Análogamente, el semiplano focal izquierdo  $\Pi_{HF}^-$  del sistema (4.1) es el plano focal de la matriz  $A^-$  restringido para  $X_1 \leq 0$ .

A continuación determinamos la posición relativa de un cono invariante bizonal del sistema (4.1) y los semiplanos focales del mismo.

Diremos que un cono está por encima (resp., por debajo) de un semiplano, si cualquier recta paralela al eje  $OZ$  que interseque al cono en un punto  $(x_1, y_1, z_1)$  y al semiplano en  $(x_1, y_1, z_2)$  verifica  $z_1 > z_2$  (resp.,  $z_1 < z_2$ ).

**Lema 4.37** *Si los autovalores de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$ ,  $\lambda^+ \neq \lambda^-$  y el sistema (4.25) posee un cono invariante bizonal, entonces dicho cono se encuentra bien por encima o bien por debajo de los dos semiplanos focales del sistema.*

**Demostración.** Realizaremos la prueba de esta resultado para  $\lambda^- > \lambda^+$ . Un razonamiento análogo permitiría probar el lema para  $\lambda^- < \lambda^+$ .

Obsérvese que los semiplanos focales  $\Pi_{HF}^+$  y  $\Pi_{HF}^-$  del sistema (4.25) intersecan al plano de separación  $x = 0$  en las rectas

$$r^+ \equiv \{x = 0, z = \lambda^+ y\} \quad \text{y} \quad r^- \equiv \{x = 0, z = \lambda^- y\},$$

respectivamente.

Supongamos que la semirrecta  $r_0 \equiv \{x = 0, z = \lambda_0 y, y \geq 0\}$  genera un cono invariante bizonal  $\mathbf{C}$ . Entonces, de acuerdo con las propiedades de los dominios de  $P^+$  y  $P^-$  establecidas en el Lema 4.29, la imagen de  $r_0$  mediante la semiaplicación  $P^-$  es la semirrecta  $r_1 \equiv \{x = 0, z = \lambda_1 y, y \leq 0\}$  y  $r_1$  se transforma mediante  $P^+$  en la semirrecta  $r_0$ .

En primer lugar, probaremos que si  $\mathbf{C}$  se encuentra por encima del semiplano focal  $\Pi_{HF}^-$ , es decir, si  $\lambda_0 > \lambda^-$ , entonces  $\mathbf{C}$  también está por encima de  $\Pi_{HF}^+$ .

Ahora, si fuera  $\lambda_1 > \lambda^+$ , tendríamos que el cono  $\mathbf{C}$  estaría por debajo del semiplano focal  $\Pi_{HF}^+$  y, por tanto, la semirrecta  $P^+(r_1)$ , imagen mediante  $P^+$  de la semirrecta  $r_1$ , se encontraría por debajo de la recta  $r^+$ , de donde,  $r_0$  no podría generar un cono invariante bizonal (ver Figura 4.3).

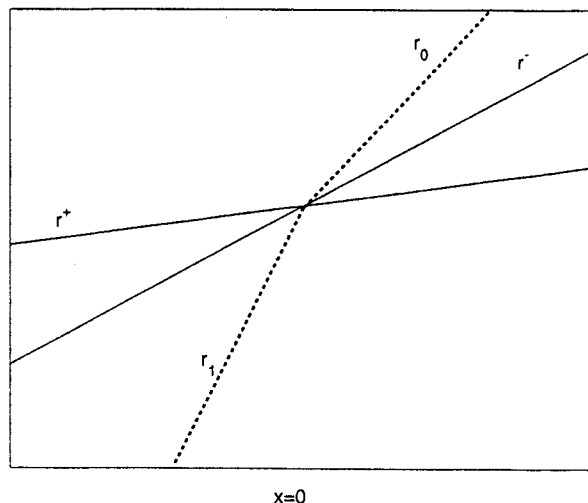


Figura 4.3: Rectas  $r^+$  y  $r^-$  y semirrectas  $r_0$  y  $r_1$  cuando  $\lambda_0 > \lambda^-$  y  $\lambda_1 > \lambda^+$ .

Si tuviéramos  $\lambda_1 = \lambda^+$ , entonces la semirrecta  $r_1$  coincidiría con la semirrecta  $r^+ \cap \{y \leq 0\}$  y  $P^+(r_1)$  sería igual a  $r^+ \cap \{y \geq 0\}$ , por lo que  $r_0$  no generaría un cono invariante bizonal.

Luego, necesariamente  $\lambda_1 < \lambda^+$  y por consiguiente, el cono invariante bizonal  $\mathbf{C}$  se encuentra por encima del semiplano focal  $\Pi_{HF}^+$ .

Un razonamiento similar permite probar que si el cono está por encima de  $\Pi_{HF}^+$ , entonces también está por encima de  $\Pi_{HF}^-$ .

Los casos en los que el cono se sitúa por debajo de alguno de los semiplanos focales se demuestran de manera análoga.

Finalmente, es fácil probar que las semirrectas  $r^+ \cap \{y \leq 0\}$  y  $r^- \cap \{y \geq 0\}$  no pueden generar conos invariantes bizontales, luego los conos invariantes del sistema (4.25) se encuentran simultáneamente por encima o por debajo de los semiplanos focales del sistema. ■

El siguiente resultado establece que los conos invariantes bizontales del sis-



tema (4.25) no poseen puntos comunes con los planos focales si  $\lambda^+ \neq \lambda^-$ .

**Proposición 4.38** *Si los autovalores de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda^+$ ,  $\alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-$ ,  $\alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ \cdot \beta^- \neq 0$  y  $\lambda^+ \neq \lambda^-$ , entonces los conos invariantes del sistema (4.25), si existen, no intersecan a los planos  $(\lambda^+)^2 - \lambda^+y + z = 0$  y  $(\lambda^-)^2 - \lambda^-y + z = 0$ .*

**Demostración.** Realizando sobre el sistema (4.25) el cambio de variable  $Z = (\lambda^+)^2 x - \lambda^+y + z$ , éste adopta la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = (m^\nabla + (\lambda^+)^2)x - \lambda^+y - Z, \\ \dot{Z} = p_{A^\nabla}(\lambda^+)x + \lambda^+Z, \end{cases} \quad (4.40)$$

donde  $p_{A^\nabla}(\lambda) = -\lambda^3 + t^\nabla\lambda - m^\nabla\lambda + d^\nabla$  es el polinomio característico de  $A^\nabla$ .

De esta forma, el semiplano  $Z = 0$ ,  $x \geq 0$  es el semiplano focal derecho del sistema (4.40), por lo que el flujo de dicho sistema no puede intersecar transversalmente al semiplano  $Z = 0$ ,  $x > 0$  y los posibles conos invariantes bizonales que intersecan al plano  $Z = 0$  lo hace en la zona  $x \leq 0$ .

En el semiplano  $Z = 0$ ,  $x < 0$  tenemos que  $\dot{Z} = p_{A^\nabla}(\lambda^+)x \neq 0$  y mantiene un signo constante, ya que consideramos  $\lambda^+ \neq \lambda^-$ . Luego, todas las órbitas del sistema (4.40) intersecan al semiplano  $Z = 0$ ,  $x < 0$  en la misma dirección y por tanto, no pueden originar un cono invariante bizonal.

Por último, la recta  $Z = 0$ ,  $x = 0$  está en el semiplano focal derecho del sistema (4.40), por lo que de acuerdo con el Lema 4.37 no puede generar un cono invariante.

Razonando de forma semejante, los conos invariantes del sistema (4.25) tampoco pueden tener puntos en común con el plano  $(\lambda^-)^2 - \lambda^-y + z = 0$ . ■

Los siguientes resultados relacionan de forma biunívoca los conos invariantes del sistema (4.25) con las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos.

**Proposición 4.39** Si  $\lambda^+$  es un autovalor real de la matriz  $A^+$ , entonces los conos invariantes del sistema (4.25) que se encuentran por encima del plano  $(\lambda^+)^2 - \lambda^+y + z = 0$  se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema continuo plano cuadrático a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = (t^\nabla - \lambda^+)v_1 - v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^+)v_1^2, \\ \dot{v}_2 = (m^\nabla + (\lambda^+)^2)v_1 - 2\lambda^+v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^+)v_1v_2 - 1, \end{cases} \quad (4.41)$$

donde  $p_{A^\nabla}$  es el polinomio característico de  $A^\nabla$ .

**Demostración.** Sabemos que el cambio de variable  $Z = (\lambda^+)^2x - \lambda^+y + z$  transforma (4.25) en el sistema (4.40) y el plano focal  $\Pi_F^+$  en el plano  $Z = 0$ .

El cambio de variables

$$v_1 = x/Z, \quad v_2 = y/Z, \quad \text{con } Z > 0,$$

válido para órbitas del sistema (4.40) que se encuentran por encima el plano focal  $Z = 0$ , transforma las ecuaciones del sistema (4.40) en

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= p_{A^\nabla}(\lambda^+)v_1Z + \lambda^+Z \\ \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda^+)v_1 - v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^+)v_1^2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + (\lambda^+)^2)v_1 - 2\lambda^+v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^+)v_1v_2 - 1, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que  $v_1 = x/Z \geq 0$  si y sólo si  $x \geq 0$ .

De esta forma, queda probado que los conos invariantes del sistema (4.25) que satisfacen la relación  $(\lambda^-)^2x - \lambda^-y + z > 0$  se corresponden con las órbitas periódicas del sistema (4.41). ■

Para los posibles conos invariantes bizontales que se encuentran por debajo del plano focal  $\Pi_F^+$  enunciamos el siguiente resultado.

**Proposición 4.40** Si  $\lambda^+$  es un autovalor real de la matriz  $A^+$ , entonces los conos invariantes del sistema (4.25) que se encuentran por debajo del plano

$(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z = 0$  se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema continuo plano cuadrático a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda^+) v_1 - v_2 + p_{A^\nabla}(\lambda^+) v_1^2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + (\lambda^+)^2) v_1 - 2\lambda^+ v_2 + p_{A^\nabla}(\lambda^+) v_1 v_2 + 1. \end{cases} \quad (4.42)$$

**Demostración.** Si sobre el sistema (4.40) realizamos el cambio de variable  $v_1 = -x/Z$ ,  $v_2 = -y/Z$ , para  $Z < 0$ , entonces siguiendo un razonamiento análogo al realizado en la demostración de la Proposición 4.39, y teniendo en cuenta que  $v_1 \geq 0$  si sólo si  $x \geq 0$ , obtenemos directamente la conclusión de la proposición. ■

Considerando el autovalor real  $\lambda^-$  de la matriz  $A^-$  para sistema (4.25) podemos enunciar resultados semejantes a las proposiciones 4.39 y 4.40.

**Proposición 4.41** Si  $\lambda^-$  es un autovalor real de la matriz  $A^-$ , entonces los conos invariantes del sistema (4.25) que se encuentran por encima del plano  $(\lambda^-)^2 - \lambda^- y + z = 0$  se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema continuo plano cuadrático a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda^-) v_1 - v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^-) v_1^2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + (\lambda^-)^2) v_1 - 2\lambda^- v_2 - p_{A^\nabla}(\lambda^-) v_1 v_2 - 1. \end{cases} \quad (4.43)$$

**Proposición 4.42** Si  $\lambda^-$  es un autovalor real de la matriz  $A^-$ , entonces los conos invariantes del sistema (4.25) que se encuentran por debajo del plano  $(\lambda^-)^2 - \lambda^- y + z = 0$  se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema continuo plano cuadrático a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda^-) v_1 - v_2 + p_{A^\nabla}(\lambda^-) v_1^2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + (\lambda^-)^2) v_1 - 2\lambda^- v_2 + p_{A^\nabla}(\lambda^-) v_1 v_2 + 1. \end{cases} \quad (4.44)$$

**Nota 4.43** Conviene realizar algunas observaciones de interés sobre los sistemas cuadráticos a trozos (4.41)–(4.44).

1. Téngase en cuenta que el sistema esférico asociado a (4.25) es equivalente a los sistemas (4.41)–(4.44) dependiendo de la posición que ocupen las órbitas del sistema esférico en relación con cada uno de los planos focales.
2. Los sistemas (4.41)–(4.44) son lineales a uno de los lados de la recta de separación  $v_1 = 0$ , puesto que  $p_{A^+}(\lambda^+) = p_{A^-}(\lambda^-) = 0$ .
3. Si  $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ , entonces los planos focales de las matrices que rigen al sistema (4.25) son coincidentes. Dicho plano es invariante para el sistema (4.25) y conforma un cono invariante bizonal de dicho sistema.

Además, en este caso, los sistemas (4.41)–(4.44) son continuos lineales a trozos bizonales y los conos invariantes del sistema (4.25) que se encuentran por encima del plano  $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$  se corresponden con las órbitas periódicas del sistema lineal a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda) v_1 - v_2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + \lambda^2) v_1 - 2\lambda v_2 - 1, \end{cases} \quad (4.45)$$

que según la Proposición 1.18 es observable. Por consiguiente, de acuerdo con la Proposición 1.32, es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - 3\lambda) v_1 - v_2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + 3\lambda^2 - 2t^\nabla \lambda) v_1 - 1. \end{cases} \quad (4.46)$$

Análogamente, los conos invariantes que se encuentran por debajo de dicho plano invariante  $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$  se relacionan biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema lineal a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= (t^\nabla - \lambda) v_1 - v_2, \\ \dot{v}_2 &= (m^\nabla + \lambda^2) v_1 - 2\lambda v_2 + 1, \end{cases} \quad (4.47)$$

y este sistema es equivalente al sistema en forma de Lienard generalizada

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = (t^\nabla - 3\lambda)v_1 - v_2, \\ \dot{v}_2 = (m^\nabla + 3\lambda^2 - 2t^\nabla\lambda)v_1 + 1. \end{cases} \quad (4.48)$$

4. Si el sistema (4.25) es lineal, esto es,  $t^+ = t^-$ ,  $m^+ = m^-$ ,  $d^+ = d^-$ , y la matriz que rige al sistema posee autovalores  $\alpha, \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ , entonces los sistemas (4.46) y (4.48) se convierten en

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_2, \\ \dot{v}_2 = \beta^2 v_1 - 1, \end{cases} \quad (4.49)$$

y

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_2, \\ \dot{v}_2 = \beta^2 v_1 + 1. \end{cases} \quad (4.50)$$

De esta forma, el sistema esférico asociado a (4.25) en caso de linealidad es equivalente al sistema (4.49) para las órbitas que se encuentran por encima del plano  $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$  y equivalente a (4.50) para las órbitas situadas debajo de dicho plano.

Puesto que todas las soluciones de los sistemas (4.49) y (4.50) son periódicas, se sigue que todas las soluciones del sistema esférico asociado a (4.25) también son periódicas. Este razonamiento permite demostrar por una vía diferente el tercer apartado del Teorema 4.18.

Analizando los sistemas cuadráticos a trozos (4.41)–(4.44) podemos enunciar un resultado de no existencia de conos invariantes bizonales.

**Proposición 4.44** *Supongamos que los autovalores de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  que rigen al sistema (4.25) son  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0, \beta^- > 0$ . Denotemos  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda^+)/\beta^+$  y  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-)/\beta^-$ . Si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

$$(a) \gamma^- = 0 \text{ y } \gamma^+ (\lambda^+ - \lambda^-) < 0,$$

$$(b) \gamma^+ = 0 \text{ y } \gamma^- (\lambda^- - \lambda^+) < 0,$$

entonces el sistema (4.25) no posee conos invariantes bizonales.

**Demostración.** Si  $\lambda^- \neq \lambda^+$ , entonces, de acuerdo con el Lema 4.37 y la Proposición 4.38, los conos invariantes bizonales del sistema (4.25) se encuentran por encima o por debajo de los dos planos focales  $\Pi_F^+$  y  $\Pi_F^-$ .

En particular se situarán por encima del plano  $(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z = 0$  o por debajo del plano  $(\lambda^-)^2 x - \lambda^- y + z = 0$ .

Luego, atendiendo a las proposiciones 4.39 y 4.42, el sistema (4.25) posee conos invariantes bizonales si y sólo si el sistema (4.41) o el sistema (4.44) poseen órbitas periódicas bizonales.

Si denotamos mediante  $F_1$  al campo vectorial que define a (4.41), entonces

$$\operatorname{div} F_1(v_1, v_2) = \begin{cases} 2(\alpha^+ - \lambda^+) & \text{si } v_1 > 0, \\ (2\alpha^- + \lambda^- - 3\lambda^+) - 3p_{A^-}(\lambda^+)v_1 & \text{si } v_1 < 0, \end{cases}$$

y denotando mediante  $F_2$  al campo vectorial que define a (4.44) tenemos

$$\operatorname{div} F_2(v_1, v_2) = \begin{cases} 2(\alpha^- - \lambda^-) & \text{si } v_1 < 0, \\ (2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^-) + 3p_{A^+}(\lambda^-)v_1 & \text{si } v_1 > 0. \end{cases}$$

Ahora, considerando  $\lambda^- > \lambda^+$ , se tiene que  $p_{A^-}(\lambda^+) > 0$ , ya que  $\lambda^-$  es la única raíz real de  $p_{A^-}$  y, análogamente,  $p_{A^+}(\lambda^-) < 0$ .

Si además,  $\alpha^+ > \lambda^+$  y  $\alpha^- = \lambda^-$ , entonces  $\operatorname{div} F_1(v_1, v_2) > 0$  para todo  $v_1 \neq 0$ ,  $\operatorname{div} F_2(v_1, v_2) = 0$  para todo  $v_1 < 0$  y  $\operatorname{div} F_2(v_1, v_2) < 0$  si  $v_1 > 0$ .

De aquí, haciendo uso del criterio de Bendixson (ver [29]), válido en esta situación, los sistemas (4.41) y (4.44) carecen de órbitas periódicas bizonales, por lo que el sistema homogéneo (4.25) no puede tener conos invariantes bizonales. Esto finaliza la demostración del primer apartado para  $\gamma^- = 0$ ,  $\gamma^+ > 0$  y  $\lambda^- > \lambda^+$ .

Por simetría, la prueba de los restantes casos se reduce a la anterior. ■

## 4.9 Unicidad y Estabilidad de Conos Invariantes en Sistemas 2CPL<sub>3</sub> Homogéneos

Cuando el sistema (4.25) posee un cono invariante bizonal existe un valor  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$  de forma que  $(S^+ \circ S^-)(\bar{u}_0) = \bar{u}_0$ . La estabilidad de dicho cono invariante bizonal viene determinada por la derivada de  $S^+ \circ S^-$  en el punto fijo  $\bar{u}_0$ .

Introduciendo la función auxiliar

$$\vartheta_\gamma(\tau) = e^{-\frac{4}{3}\gamma} \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \quad \vartheta_\gamma(0) = 1,$$

tenemos, de acuerdo con (4.39),

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0}(\bar{u}_0) = \vartheta_{\gamma^+}^3(\bar{\tau}^+) \cdot \vartheta_{\gamma^-}^3(\bar{\tau}^-), \quad (4.51)$$

donde  $\bar{\tau}^+, \bar{\tau}^-$  son los semitiempos de vuelo normalizados derecho e izquierdo, respectivamente, de las semirrectas que generan al cono invariante bizonal.

En lo que sigue probaremos la existencia de un único cono invariante en el sistema (4.25) cuando  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$  y determinaremos su estabilidad.

Además, ampliaremos el número de casos de no existencia de conos invariantes bizontales recogidos en las proposiciones 4.35 y 4.44, daremos a conocer el número máximo de conos invariantes bizontales aislados que puede presentar el sistema (4.25) y enunciaremos nuevos resultados de estabilidad asintótica del origen para el sistema (4.25).

En el siguiente lema se establecen algunas propiedades de la función  $\vartheta_\gamma$ . Para ello, recurriremos a la Proposición 4.44 pues la función  $\vartheta_\gamma$  posee un contacto de orden elevado en el origen que dificulta determinar el signo de su derivada en el intervalo de existencia.

**Lema 4.45** *Consideremos la función*

$$\vartheta_\gamma(\tau) = e^{-\frac{4}{3}\gamma} \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \quad \vartheta_\gamma(0) = 1, \quad (4.52)$$

definida para  $\tau \in [0, \hat{\tau})$ , con  $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi]$  y  $\varphi_{|\gamma|}(\hat{\tau}) = 0$ .

Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para  $\gamma > 0$  se verifica

$$\frac{d\vartheta_\gamma}{d\tau}(\tau) < 0 \quad \text{y} \quad \vartheta_\gamma(\tau) < 1 \quad \forall \tau \in (0, \hat{\tau}). \quad (4.53)$$

2. Para  $\gamma = 0$  se verifica

$$\frac{d\vartheta_\gamma}{d\tau}(\tau) = 0 \quad \text{y} \quad \vartheta_\gamma(\tau) = 1 \quad \forall \tau \in (0, \hat{\tau}). \quad (4.54)$$

3. Para  $\gamma < 0$  se verifica que

$$\frac{d\vartheta_\gamma}{d\tau}(\tau) > 0 \quad \text{y} \quad \vartheta_\gamma(\tau) > 1 \quad \forall \tau \in (0, \hat{\tau}). \quad (4.55)$$

**Demostración.** Para probar este lema construiremos un determinado sistema  $2\text{CPLH}_3$  en la forma canónica de Lienard (4.25) verificando  $\gamma^+ = \gamma$  y de forma que la asíntota oblicua de su aplicación asociada  $S^+$  coincida con  $(S^-)^{-1}$ .

Para empezar, tomemos  $\gamma > 0$  y sean  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  los autovalores de la matriz que caracteriza al sistema para  $x > 0$  verificando la condición

$$\gamma = \gamma^+ = \frac{\alpha^+ - \lambda^+}{\beta^+}.$$

De acuerdo con el Lema 4.34, la asíntota oblicua de  $S^+$  es la recta

$$u_2 = -u_1 + \frac{2}{3}(2\alpha^+ + \lambda^+).$$

Por otra parte, tomando  $\gamma^- = 0$  y haciendo uso de nuevo del Lema 4.34, se sigue que  $(S^-)^{-1}(u_1) = -u_1 + 2\lambda^-$ , e imponiendo que  $(S^-)^{-1}$  sea la asíntota oblicua de  $S^+$  se tiene

$$\lambda^- = \alpha^- = \frac{2\alpha^+ + \lambda^+}{3}.$$



En estas condiciones, se verifica  $\lambda^- > \lambda^+$ , luego  $\gamma^+(\lambda^+ - \lambda^-) < 0$  y de la Proposición 4.44 se deduce que el sistema así construido no posee conos invariantes bizonales.

A partir del Lema 4.34 tenemos que

$$S^+(\lambda^+) - (S^-)^{-1}(\lambda^+) = 2(\lambda^+ - \lambda^-) < 0,$$

y como la aplicación  $S^+ \circ S^-$  no posee puntos fijos (es decir,  $S^+(u_1)$  no corta a su asíntota  $(S^-)^{-1}(u_1)$ ), debemos tener

$$S^+(u_1) < (S^-)^{-1}(u_1) = -u_1 + 2\lambda^- \quad \text{para todo } u_1 \in \mathbb{R}. \quad (4.56)$$

Sustituyendo en (4.56) las representaciones paramétricas de  $u_1$  y  $S^+(u_1)$  dadas en (4.31) y después de una pequeña manipulación obtenemos

$$(\gamma^2 + 1) \left( \frac{e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_\gamma(\tau)} - \frac{e^{-\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right) - \frac{4}{3}\gamma < 0 \quad (4.57)$$

para todo  $\tau$  en el intervalo  $(0, \hat{\tau})$ .

Si introducimos la función

$$\tilde{\vartheta}_\gamma(\tau) = \log(\vartheta_\gamma(\tau)) = \log \left( \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right) - \frac{4}{3}\gamma\tau, \quad \tau \in [0, \hat{\tau}),$$

resulta que

$$\frac{d\tilde{\vartheta}_\gamma}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{\vartheta_\gamma(\tau)} \cdot \frac{d\vartheta_\gamma}{d\tau}(\tau) = (\gamma^2 + 1) \operatorname{sen} \tau \left( \frac{e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(\tau)} - \frac{e^{-\gamma\tau}}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right) - \frac{4}{3}\gamma,$$

para todo  $\tau$  en el intervalo  $(0, \hat{\tau})$ .

Por consiguiente, a partir de (4.57), se concluye que

$$\frac{d\tilde{\vartheta}_\gamma}{d\tau}(\tau) < 0 \quad \text{para todo } \tau \in (0, \hat{\tau}).$$

Una aplicación directa del Teorema del Valor Medio nos permite deducir que  $\vartheta_\gamma(\tau) < \vartheta_\gamma(0) = 1$  para todo  $\tau \in (0, \hat{\tau})$ , con lo que finalizamos la demostración del primer apartado.

El segundo apartado es inmediato y el tercero es consecuencia directa del primero, ya que  $\vartheta_{-\gamma}(\tau) = 1/\vartheta_\gamma(\tau)$  para todo  $\tau$  en el intervalo  $[0, \hat{\tau})$ . ■

**Nota 4.46** A la vista del desarrollo efectuado en la prueba del Lema 4.45 se tiene que la gráfica de  $S^+$  se encuentra por debajo, coincide o está por encima de su asíntota oblicua según que  $\gamma^+ > 0$ ,  $\gamma^+ = 0$  o  $\gamma^+ < 0$ .

Un comentario análogo puede realizarse sobre la aplicación  $S^-$ .

El análisis efectuado en el Lema 4.45 sobre la función  $\vartheta_\gamma$  permite, entre otros, determinar la estabilidad y unicidad del cono invariante bizonal cuando  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$ . Por razones de completitud, en el siguiente Teorema se recogen los resultados ya establecidos en la Proposición 4.35. (véase también la Nota 4.19).

**Teorema 4.47** *Supongamos que los autovalores de las matrices que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ . Denotemos  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda^+) / \beta^+$  y  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-) / \beta^-$ . Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$ , entonces el sistema (4.25) posee un único cono invariante bizonal, asintóticamente estable si  $\gamma^+ + \gamma^- > 0$  e inestable si  $\gamma^+ + \gamma^- < 0$ .*
2. *Si  $\gamma^+ = \gamma^- = 0$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*
  - (a) *Si  $t^+ \neq t^-$ , entonces el sistema (4.25) no posee conos invariantes bizontales, pero posee dos continuos de conos invariantes unizontales.*
  - (b) *Si  $t^+ = t^-$ , entonces todas las soluciones del sistema esférico asociado a (4.25) son periódicas, por lo que el sistema (4.25) posee un continuo de conos invariantes (bizontales y unizontales).*
3. *Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- = 0$  y  $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$  se satisface:*
  - (a) *Si  $\gamma^+ = 0$  y  $(t^+ - t^-) \gamma^- < 0$ , entonces el sistema (4.25) posee un único cono invariante bizonal, asintóticamente estable si  $\gamma^- > 0$  e inestable si  $\gamma^- < 0$ . Además, el sistema (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizontales.*
  - (b) *Si  $\gamma^+ = 0$  y  $(t^+ - t^-) \gamma^- \geq 0$ , entonces (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizontales y ningún cono invariante bizonal.*

(c) Si  $\gamma^- = 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^+ > 0$ , entonces el sistema (4.25) posee un único cono invariante bizonal, asintóticamente estable si  $\gamma^+ > 0$  e inestable si  $\gamma^+ < 0$ . Además, el sistema (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizonales.

(d) Si  $\gamma^- = 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^+ \leq 0$ , entonces (4.25) posee un continuo de conos invariantes unizonales y ningún cono invariantes bizonal.

4. Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$ , entonces el sistema (4.25) posee a lo sumo dos conos invariantes bizonales. Si además  $\gamma^+ \cdot (t^+ - t^-) \leq 0$ , entonces el sistema (4.25) no posee conos invariantes.

**Demostración.**

1. Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$ , entonces, según el primer apartado de la Proposición 4.35 (ver también el Teorema 4.20), el sistema (4.25) posee un cono invariante bizonal, es decir, la aplicación  $S^+ \circ S^-$  posee al menos un punto fijo.

Si  $\gamma^+ + \gamma^- > 0$  (es decir,  $\gamma^+ > 0$  y  $\gamma^- > 0$ ), a partir de (4.51) y del Lema 4.45 se deduce que

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0}(u_0) < 1$$

para todo  $u_0$  en el dominio de definición de  $S^+ \circ S^-$ . Una aplicación directa del Teorema del Valor Medio permite concluir que el cono invariante bizonal es único y asintóticamente estable.

Análogamente, para  $\gamma^+ + \gamma^- < 0$  se tiene que

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0}(u_0) > 1$$

para todo  $u_0$  en el dominio de definición de  $S^+ \circ S^-$ , de donde el cono invariante bizonal es único e inestable.

2. El segundo apartado ha sido probado en la Proposición 4.35.

3. Para  $\gamma^+ \cdot \gamma^- = 0$  y  $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$  distinguimos las siguientes posibilidades:

- (a) Si  $\gamma^+ = 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^- < 0$ , entonces la Proposición 4.35 garantiza la existencia de al menos un cono invariante bizonal y continuo de conos invariantes unizonales.

En este caso, si  $\gamma^- > 0$  (resp.,  $\gamma^- < 0$ ), entonces la derivada de la aplicación  $S^+ \circ S^-$  es menor que uno (resp., mayor que uno), por lo que el cono invariante bizonal es único y asintóticamente estable (resp., inestable).

- (b) Si  $\gamma^+ = 0$ ,  $\gamma^- > 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^- \geq 0$ , entonces la gráfica de  $(S^+)^{-1}$  es una recta paralela a la asíntota oblicua de  $S^-$ , situada por encima o coincidente con esta asíntota.

Puesto que en este caso la gráfica  $S^-$  siempre está por debajo de su asíntota oblicua (ver Nota 4.46), resulta que las curvas  $(S^+)^{-1}$  y  $S^-$  no se cortan, de donde el sistema (4.25) no posee conos invariantes bizonales.

Cuando  $\gamma^+ = 0$ ,  $\gamma^- < 0$  y  $(t^+ - t^-)\gamma^- \geq 0$ , razonando de forma análoga, concluimos que el sistema (4.25) tampoco posee conos invariantes bizonales, aunque de la Proposición 4.35 concluimos la existencia de un continuo de conos invariantes unizonales.

La prueba de los apartados (c) y (d) sigue de los apartados (a) y (b), del cambio de signo en la variable independiente y de las transformaciones descritas en el Capítulo 1 que dejan invariante al sistema (4.25) (ver Nota 1.37).

4. Demostraremos en primer lugar que si  $\gamma^- \cdot \gamma^+ < 0$ , entonces el sistema (4.25) posee a lo sumo dos conos invariantes bizonales.

Para ello, determinaremos el número máximo de raíces en la función desplazamiento  $d(u_0) = (S^+ \circ S^-)(u_0) - u_0$ .

A partir de los lemas 4.34 y 4.45, cuando  $\gamma^- > 0$  y  $\gamma^+ < 0$ , tenemos que

las aplicaciones  $S^+$  y  $S^-$  verifican

$$\frac{dS^-}{du_0}(u_0) < 0, \quad \frac{dS^+}{du_1}(u_1) < 0, \quad \frac{d^2S^-}{du_0^2}(u_0) < 0 \quad y \quad \frac{d^2S^+}{du_1^2}(u_1) > 0$$

en sus respectivos dominios definición y podemos concluir que

$$d''(u_0) = \frac{d^2S^+}{du_1^2}(S^-(u_0)) \left( \frac{dS^-}{du_0}(u_0) \right)^2 + \frac{dS^+}{du_1}(S^-(u_0)) \frac{d^2S^-}{du_0^2}(u_0) > 0$$

para todo  $u_0$  en el dominio de  $S^+ \circ S^-$ .

Para  $\gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ > 0$ , razonando de forma análoga la función desplazamiento satisface  $d''(u_0) < 0$  en su dominio de definición.

Luego, en cualquier caso, la función desplazamiento posee a lo sumo dos raíces. Es decir, el sistema (4.25) tiene como máximo dos conos invariantes bizonales.

Supongamos ahora que  $\gamma^- > 0$  y  $\gamma^+ < 0$ , entonces, de acuerdo con la Nota 4.46, la curva  $S^-$  se encuentra por debajo de su asíntota oblicua  $u_1 = -u_0 + 2t^-/3$  y la curva  $(S^+)^{-1}$  está por encima de su asíntota oblicua  $u_1 = -u_0 + 2t^+/3$ .

Por consiguiente, si  $t^+ \geq t^-$ , entonces  $S^-$  y  $(S^+)^{-1}$  no tienen puntos comunes, por lo que el sistema (4.25) no puede tener conos invariantes bizonales.

Razonando de forma análoga, se tiene que si  $\gamma^- < 0$ ,  $\gamma^+ > 0$  y  $t^+ \leq t^-$ , entonces el sistema (4.25) no puede tener conos invariantes bizonales. ■

Obsérvese que si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$  y  $\gamma^+(t^+ - t^-) > 0$ , tenemos un conocimiento incompleto de la existencia de conos invariantes en el sistema (4.25). De todas formas, las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6 muestran, para la citada situación, la posibilidad de que las curvas  $(u_0, S^-(u_0))$  y  $(u_0, (S^+)^{-1}(u_0))$  posean dos puntos de corte, uno sólo o ninguno. Esto nos indica que el sistema puede tener uno, dos o ningún cono invariante bizonal. Se ha considerado el caso  $\gamma^+ > 0$

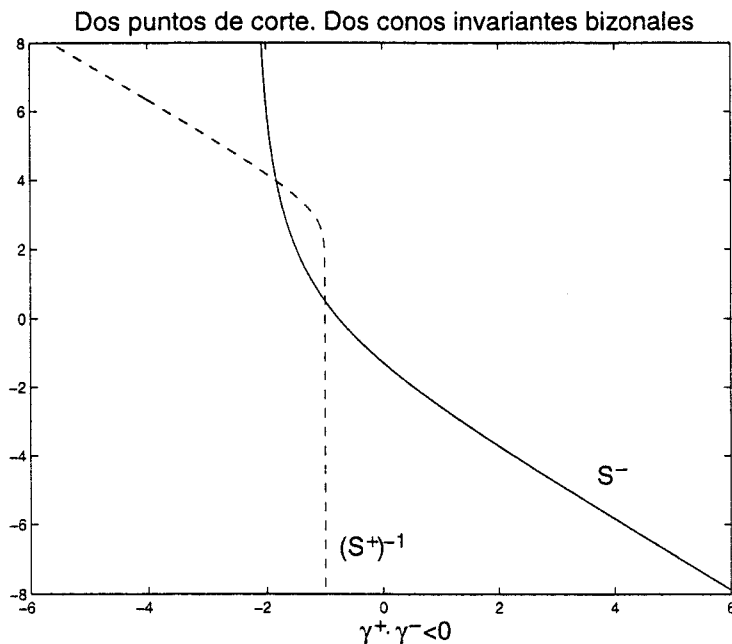


Figura 4.4: Curvas  $S^-$  y  $(S^+)^{-1}$  con dos puntos de corte.

y  $\gamma^- < 0$ . Debido a la simetría, la situación  $\gamma^+ < 0$  y  $\gamma^- > 0$  presenta las mismas posibilidades.

En la Figura 4.7 se recogen las diferentes situaciones descritas en el Teorema 4.47 acerca de la existencia de conos invariantes en el sistema (4.25) cuando  $t^+ - t^- < 0$ . El caso  $t^+ - t^- > 0$  es completamente análogo.

En la Figura 4.8 se representa el conjunto de bifurcaciones de conos invariantes cuando  $t^+ = t^-$ .

Antes de tratar con más detalle la situación  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$ , presentamos dos resultados de estabilidad asintótica del origen para el sistema (4.25). Recuérdese que el Teorema 4.21 estudiaba la estabilidad asintótica del origen cuando el sistema (4.25) no poseía conos invariantes. Ahora podemos ser más explícitos considerando los resultados de no existencia de conos invariantes descritos en

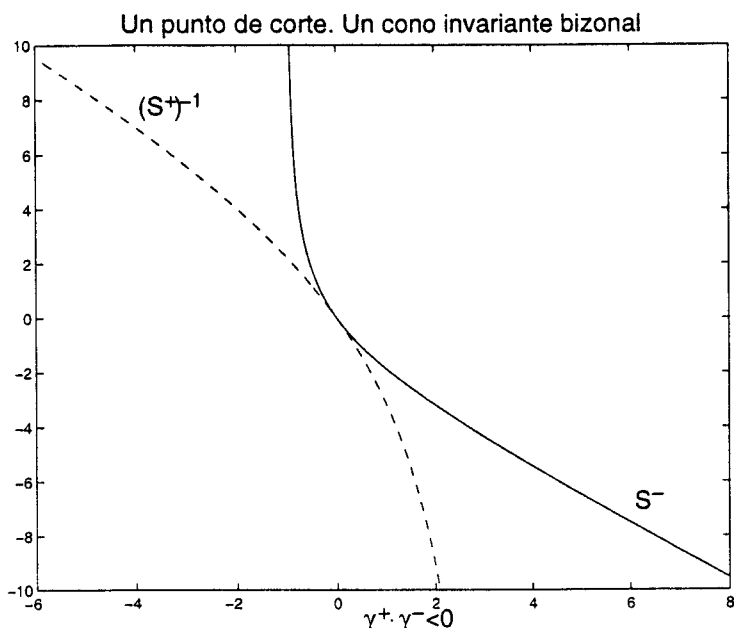


Figura 4.5: Curvas  $S^-$  y  $(S^+)^{-1}$  con un sólo punto de corte.

cuarto apartado del Teorema 4.47.

**Corolario 4.48** *Supongamos que los autovalores de las matrices que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ . Denotemos  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda^+) / \beta^+$  y  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-) / \beta^-$ . Si se satisfacen las relaciones  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ (t^+ - t^-) \leq 0$ , entonces el origen del sistema (4.25) es asintóticamente estable si y sólo si  $\lambda^+ < 0$  y  $\lambda^- < 0$ .*

**Demostración.** Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ (t^+ - t^-) \leq 0$ , entonces, según el último apartado del Teorema 4.47, el sistema tridimensional (4.25) carece de conos invariantes, por lo que haciendo uso del Teorema 4.21, el origen de dicho sistema es asintóticamente estable si y sólo si  $\lambda^+ < 0$  y  $\lambda^- < 0$ . ■

El siguiente teorema proporciona resultados de estabilidad del origen en presencia de conos invariantes.

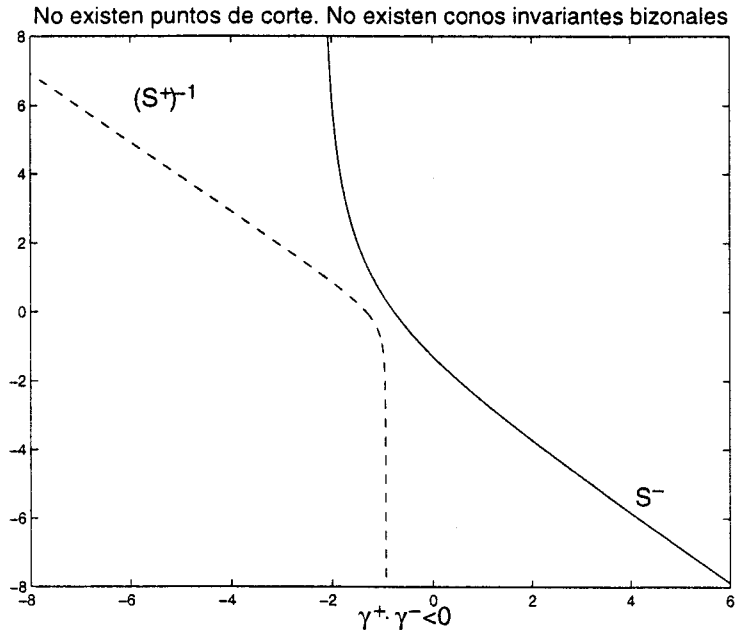


Figura 4.6: Las curvas  $S^-$  y  $(S^+)^{-1}$  no intersecan.

**Teorema 4.49** Si los autovalores de las matrices que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda^+, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda^-, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Si  $\alpha^- < \lambda^- < 0$  y  $\alpha^+ < \lambda^+ < 0$ , entonces el origen del sistema (4.25) es globalmente asintóticamente estable.
2. Si  $\alpha^- > \lambda^- > 0$  y  $\alpha^+ > \lambda^+ > 0$ , entonces las soluciones no nulas  $X(t)$  del sistema (4.25) verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = +\infty. \quad (4.58)$$

**Demostración.** En las condiciones de los dos apartados del Teorema tenemos que  $\gamma^+ \cdot \gamma^- > 0$ , luego, de acuerdo con el Teorema 4.47, el sistema (4.25) posee



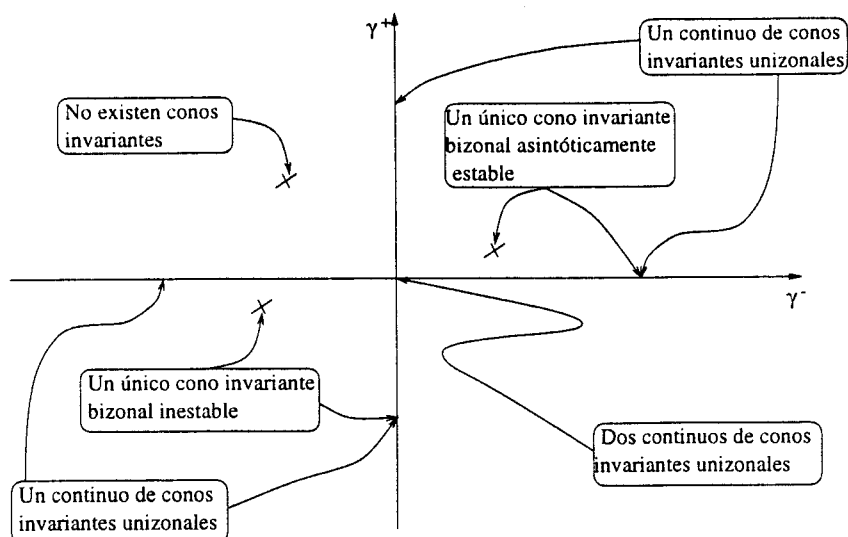


Figura 4.7: Conjunto de bifurcaciones de conos invariantes cuando  $t^+ - t^- < 0$ .

un único cono invariante  $\mathbf{C}$ , es decir, su sistema esférico asociado posee una única solución periódica  $u_p(t)$  y además, del Teorema 4.18 se sigue que este sistema esférico posee exactamente dos puntos de equilibrio  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$ .

Por otra parte, si  $\tau_p^+$  y  $\tau_p^-$  denotan los semitiempos de vuelo normalizados de las semirrectas que generan el cono invariante  $\mathbf{C}$ , entonces, de acuerdo con la Proposición 4.31, la estabilidad del origen para el sistema (4.25) restringido a  $\mathbf{C}$  viene determinada por el cociente

$$\frac{y_2}{y_0} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_0} = \exp \left[ \left( 2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \tau_p^- + \left( 2\gamma^+ + \frac{\lambda^+}{\beta^+} \right) \tau_p^+ \right] \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau_p^-) \varphi_{-\gamma^+}(\tau_p^+)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau_p^-) \varphi_{\gamma^+}(\tau_p^+)}. \quad (4.59)$$

Supongamos ahora que se verifica  $\alpha^- < \lambda^- < 0$  y  $\alpha^+ < \lambda^+ < 0$ , entonces  $\gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ < 0$  y del Lema 4.45 deducimos  $\vartheta_{-\gamma^-}(\tau^-) < 1$  y  $\vartheta_{-\gamma^+}(\tau^+) < 1$  cuando  $\tau^- \in (0, \hat{\tau}^-)$  y  $\tau^+ \in (0, \hat{\tau}^+)$  y la siguiente desigualdad

$$\exp \left( \frac{2\alpha^- + \lambda^-}{3\beta^-} \tau^- \right) \vartheta_{-\gamma^-}(\tau^-) \cdot \exp \left( \frac{2\alpha^+ + \lambda^+}{3\beta^+} \tau^+ \right) \vartheta_{-\gamma^+}(\tau^+) < 1 \quad (4.60)$$

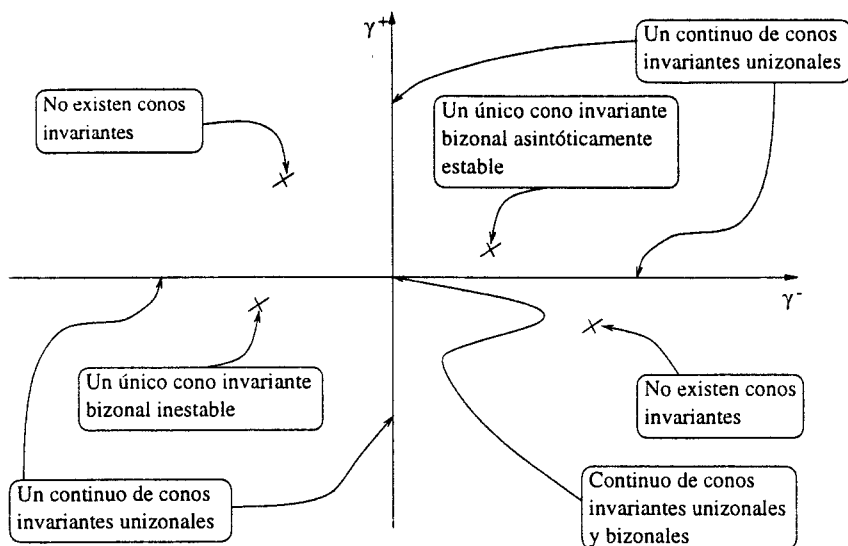


Figura 4.8: Conjunto de bifurcaciones de conos invariantes cuando  $t^+ = t^-$ .

es inmediata para todos los semitiempos de vuelo normalizados  $\tau^+$  y  $\tau^-$ .

Una simple manipulación en la desigualdad (4.60) nos permite deducir que

$$\exp \left[ \left( 2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \tau_p^- \right] \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau_p^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau_p^-)} \cdot \exp \left[ \left( 2\gamma^+ + \frac{\lambda^+}{\beta^+} \right) \tau_p^+ \right] \frac{\varphi_{-\gamma^+}(\tau_p^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\tau_p^+)} < 1,$$

luego, a partir de (4.59), deducimos que el origen del sistema (4.25) restringido al cono invariante  $\mathbf{C}$  es globalmente asintóticamente estable.

Los puntos de equilibrio  $\bar{u}^+$  y  $\bar{u}^-$  son asintóticamente estables y el cono  $\mathbf{C}$  es inestable, ya que  $\gamma^+ < 0$  y  $\gamma^- < 0$ . Luego, toda solución  $u \neq u_p$  del sistema esférico asociado a (4.25) tiende a un punto de equilibrio.

Por consiguiente, siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 4.21, podemos deducir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle A^\nabla u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = -\infty$$

para toda solución  $u$  del sistema esférico asociado a (4.25) que no coincida con la solución periódica  $u_p$ . Esto significa que toda solución  $X(t)$  del siste-

ma (4.25) que no se encuentra sobre el cono invariante  $\mathbf{C}$  también tiende al origen cuando  $t$  tiende  $+\infty$  y el primer apartado del Teorema es cierto.

Para probar el segundo apartado distinguiremos si las soluciones no nulas de (4.25) se encuentran en el cono invariante, en las semirrectas  $\{mu^+ : m > 0\}$  o  $\{mu^- : m > 0\}$  o bien en el complementario de la unión de los anteriores conjuntos invariantes.

Supongamos que se verifica  $\alpha^- > \lambda^- > 0$  y  $\alpha^+ > \lambda^+ > 0$ , entonces  $\gamma^- > 0$  y  $\gamma^+ > 0$  y del Lema 4.45 se tiene que  $\vartheta_{-\gamma^-}(\tau^-) > 1$  y  $\vartheta_{-\gamma^+}(\tau^+) > 1$  para todo  $\tau^- \in (0, \hat{\tau}^-)$  y  $\tau^+ \in (0, \hat{\tau}^+)$ .

Siguiendo un razonamiento análogo al primer apartado, se sigue que las soluciones no nulas del sistema (4.25) que pertenecen al cono  $\mathbf{C}$  verifican (4.58). Es decir, haciendo uso de la Proposición 4.14 (véase (4.20)), se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle A^\nabla u_p(\tau), u_p(\tau) \rangle d\tau = +\infty. \quad (4.61)$$

Las soluciones contenidas en alguna de las semirrectas invariantes se alejan hacia el infinito cuando  $t$  crece, pues  $\lambda^+ > 0$  y  $\lambda^- > 0$ .

Ahora probaremos que todas las soluciones no nulas que no están en las semirrectas invariantes ni en el cono  $\mathbf{C}$  también verifican (4.58). Sea  $X(t)$  una de estas soluciones, tomemos  $u(t) = X(t)/\|X(t)\|$  y sea  $F$  el campo vectorial que define al sistema (4.25).

Nótese que según (4.20), la solución  $X(t)$  satisface (4.58) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle d\tau = +\infty. \quad (4.62)$$

Según el Lema 4.45, tenemos

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0} = \vartheta_{\gamma^+}^3(\bar{\tau}_p^+) \cdot \vartheta_{\gamma^-}^3(\bar{\tau}_p^-) < 1,$$

luego el multiplicador característico de la órbita periódica  $u_p$  es menor que la unidad; por tanto,  $u_p$  es una órbita periódica hiperbólica y orbitalmente

asintóticamente estable, lo que nos permite escribir la desigualdad (ver [19] y [21])

$$\|u(t) - u_p(t - t_0)\| \leq L e^{-Mt} \quad (4.63)$$

para ciertas constantes  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $L > 0$ ,  $M > 0$  y para todo  $t \geq 0$ .

Ahora, probaremos que  $X(t)$  satisface (4.62). Para ello, si denotamos

$$\Delta F(\tau) = F(u(\tau)) - F(u_p(\tau - t_0)) \quad \text{y} \quad \Delta u(\tau) = u(\tau) - u_p(\tau - t_0)$$

obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle d\tau &= \int_0^t \langle \Delta F(\tau), \Delta u(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \langle \Delta F(\tau), u_p(\tau - t_0) \rangle d\tau + \\ &+ \int_0^t \langle F(u_p(\tau - t_0)), \Delta u(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \langle F(u_p(\tau - t_0)), u_p(\tau - t_0) \rangle d\tau, \end{aligned} \quad (4.64)$$

lo que nos permite estudiar la convergencia de la integral de (4.62) a partir de la convergencia de las integrales del segundo miembro de (4.64).

Como  $F$  es globalmente lipschitziana con constante de Lipschitz  $K$  (ver demostración de la Proposición 1.3), a partir de (4.63) podemos deducir

$$|\langle \Delta F(\tau), \Delta u(\tau) \rangle| \leq K \|\Delta u(\tau)\|^2 \leq L e^{-2M\tau} \quad \forall \tau \geq 0,$$

de donde la integral  $\int_0^{+\infty} \langle \Delta F(\tau), \Delta u(\tau) \rangle d\tau$  es convergente.

Con un razonamiento similar y utilizando que  $F(0) = 0$  y  $\|u_p(\tau)\| = 1$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , podemos probar que también son convergentes las integrales

$$\int_0^{+\infty} \langle \Delta F(\tau), u_p(\tau - t_0) \rangle d\tau \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \langle F(u_p(\tau - t_0)), \Delta u(\tau) \rangle d\tau.$$

Por último, realizando el cambio  $\tau = t + t_0$  en la integral de (4.61) tenemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \langle F(u_p(\tau - t_0)), u_p(\tau - t_0) \rangle d\tau = +\infty$$

y de acuerdo con (4.64) concluimos que se satisface la relación (4.62), con lo que completamos la demostración del Teorema. ■

Nos detenemos un instante en este punto de la memoria para relacionar el Corolario 4.48 y el Teorema 4.49 con la conjetura de Kalman y exponer algunos comentarios al respecto.

Recordamos que la conjetura de Kalman (véase [6] y [9]) establece una condición suficiente para la estabilidad del origen en sistemas de control. En concreto, la conjetura de Kalman trasladada a los sistemas 2CPLH<sub>3</sub> establece que el origen de esta clase de sistemas es globalmente asintóticamente estable si la combinación lineal convexa de las matrices que determinan al sistema proporciona siempre matrices con todos sus autovalores de parte real estrictamente negativa, es decir, matrices de tipo Hurwitz (ver [2]). Esta conjetura es falsa si la dimensión del sistema es mayor que tres. Véase [9] para un contraejemplo en  $\mathbb{R}^4$ .

La conjetura de Kalman traducida al sistema (4.25) nos llevaría a conjeturar que el origen de tal sistema es asintóticamente estable si todos los autovalores de las matrices

$$A(\mu) = \mu \begin{pmatrix} t^+ & -1 & 0 \\ m^+ & 0 & -1 \\ d^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} t^- & -1 & 0 \\ m^- & 0 & -1 \\ d^- & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

con  $\mu \in [0, 1]$ , poseen parte real estrictamente negativa.

El resultado del Teorema 4.49 puede considerarse como una condición suficiente de estabilidad asintótica del origen no incluida dentro de la conjetura de Kalman, pues es posible elegir valores verificando las simples relaciones del primer apartado del Teorema 4.49 para los cuales algunas de las matrices  $A(\mu)$  definidas en (4.65) no es de tipo Hurwitz. Por ejemplo, tomando  $\alpha^- = -0.5 < \lambda^- = -0.3$ ,  $\beta^- = 1$ ,  $\alpha^+ = -2.6 < \lambda^+ = -2.1$  y  $\beta^+ = 30$ , el origen del sistema (4.25) es globalmente asintóticamente estable y sin embargo, la matriz  $A(0.94)$  no es de tipo Hurwitz.

Por otro lado, el resultado descrito en el Corolario 4.48 es también inde-

pendiente de la conjetura de Kalman. En este caso, es fácil observar que es posible elegir valores satisfaciendo las hipótesis de este corolario, por ejemplo con  $\alpha^+ > 0$ , y está claro que para estos valores la matriz  $A^+$  no es de tipo Hurwitz. Es decir, el origen del sistema (4.25) es globalmente asintóticamente estable, pero  $A(\mu)$ , con  $\mu \in [0, 1]$ , no tiene todos sus autovalores en semiplano izquierdo  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ .

**Nota 4.50** Obsérvese que para el caso  $\gamma^+ > 0$  y  $\gamma^- < 0$ , de acuerdo con el Lema 4.34, la función desplazamiento  $d(u_0) = S^+(S^-(u_0)) - u_0$  sólo está definida en el intervalo  $(u_V, +\infty)$ , donde

$$u_V = \lambda^- + \beta^- \left( (\gamma^-)^2 + 1 \right) \frac{e^{\gamma^- \hat{\tau}^-} \operatorname{sen} \hat{\tau}^-}{\varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-)}, \quad \text{con } \hat{\tau}^- \in (0, 2\pi), \varphi_{|\gamma^-|}(\hat{\tau}^-) = 0$$

y satisface

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow u_V \\ u_0 > u_V}} d(u_0) = \lim_{u_0 \rightarrow +\infty} d(u_0) = -\infty.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $d''(u_0) < 0$  para todo  $u_0 \in (u_V, +\infty)$ , deducimos que  $d$  posee un único punto crítico  $\tilde{u}_0$  ( $d'(\tilde{u}_0) = 0$ ) y la existencia de dos, uno o ningún cono invariante bizonal depende del valor  $d(\tilde{u}_0)$  (ver Figura 4.9). En concreto:

- Si  $d(\tilde{u}_0) < 0$ , entonces (4.25) no posee conos invariantes.
- Si  $d(\tilde{u}_0) = 0$ , entonces el sistema (4.25) posee un único cono invariante bizonal, que además es no hiperbólico y semiestable.
- Si  $d(\tilde{u}_0) > 0$ , entonces (4.25) posee dos conos invariantes bizonales, uno de ellos es asintóticamente estable y el otro inestable.

De forma análoga, para  $\gamma^+ < 0$  y  $\gamma^- > 0$ , la función  $d$  posee un único punto crítico  $\tilde{u}_0$  y se satisfacen las siguientes propiedades (véase la Figura 4.10):

- Si  $d(\tilde{u}_0) > 0$ , entonces (4.25) no posee conos invariantes

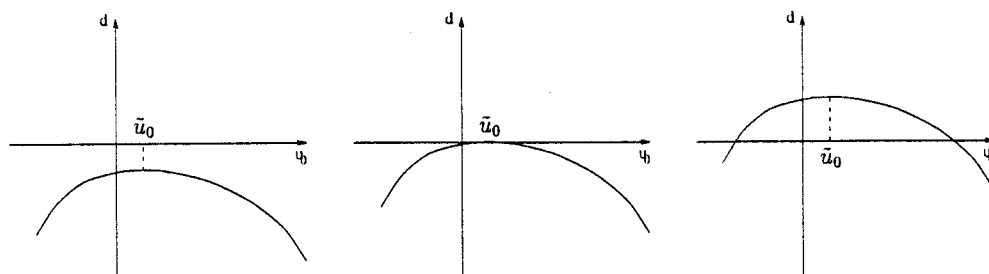


Figura 4.9: Función desplazamiento  $d$  para  $\gamma^+ > 0$  y  $\gamma^- < 0$ .

- Si  $d(\tilde{u}_0) = 0$ , entonces el sistema (4.25) posee un único cono invariante bizonal, que además es no hiperbólico y semiestable.
- Si  $d(\tilde{u}_0) < 0$ , entonces (4.25) posee dos conos invariantes bizonales, uno de ellos es asintóticamente estable y el otro inestable.

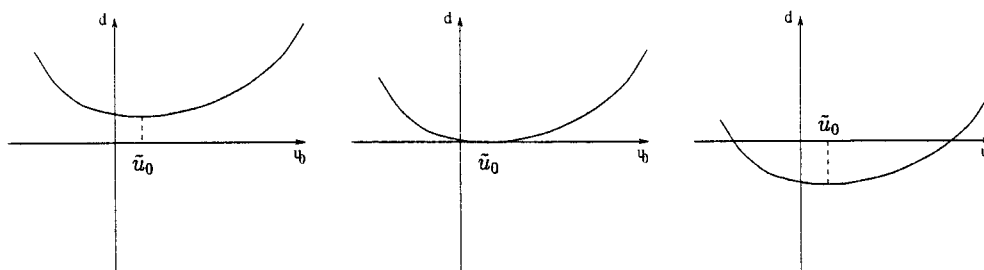


Figura 4.10: Función desplazamiento  $d$  para  $\gamma^+ > 0$  y  $\gamma^- < 0$ .

El análisis realizado con anterioridad nos permite afirmar que el sistema esférico asociado a (4.25), en lo referente a sus órbitas periódicas, puede presentar distintos tipos de bifurcaciones, entre las que se incluye una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

El estudio completo de tales bifurcaciones es complejo, pero puede completarse cuando  $\lambda^- = \lambda^+$ . En este caso, los planos focales de las matrices  $A^+$  y  $A^-$  coinciden y pueden ser interpretados como las partes constituyentes de un

como invariante bizonal del sistema (4.25) (véase la Nota 4.43). El siguiente Teorema precisa, para el caso  $\lambda^- = \lambda^+$ , los resultados del Teorema 4.47 cuando  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$ . Nótese que en esta situación el sistema (4.25) es observable, pero no controlable (ver Teorema 1.29).

**Teorema 4.51** *Supongamos que los autovalores de las matrices que rigen al sistema tridimensional (4.25) son  $\lambda, \alpha^+ \pm i\beta^+$  y  $\lambda, \alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0$  y  $\beta^- > 0$ . Denotemos  $\gamma^+ = (\alpha^+ - \lambda)/\beta^+$  y  $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda)/\beta^-$ . Entonces el plano  $\Pi_F \equiv \lambda^2 x - \lambda y + z = 0$  es un cono invariante bizonal del sistema (4.25).*

Además, si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Si  $\gamma^+ + \gamma^- = 0$ , entonces el único cono invariante bizonal de (4.25) es el plano  $\Pi_F$ . Además, dicho plano invariante es semiestable.
2. Si  $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$ , entonces el sistema (4.25) posee dos conos invariantes bizontales, siendo uno de ellos el plano  $\Pi_F$ . Además:
  - (a) Si  $\gamma^+ + \gamma^- > 0$ , entonces el plano invariante es asintóticamente estable y el otro cono invariante bizonal es inestable.
  - (b) Si  $\gamma^+ + \gamma^- < 0$ , entonces el plano invariante es inestable y el otro cono invariante bizonal es asintóticamente estable.

**Demostración.** Si  $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ , entonces es inmediato comprobar que el plano  $\Pi_F \equiv \lambda^2 x - \lambda y + z = 0$  es un cono invariante bizonal.

El plano invariante  $\Pi_F$  interseca al plano de separación  $x = 0$  en la recta  $\{x = 0, z = \lambda y\}$  y los semitiempos de vuelo normalizados de las semirrectas que generan este plano son  $\tau^+ = \tau^- = \pi$ .

Por tanto, para el punto fijo  $\bar{u}_0 = \lambda$  (pendiente de la semirrecta que genera a  $\Pi_F$ ) de  $S^+ \circ S^-$  se tiene, a partir de (4.51),

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0}(\lambda) = \vartheta_{\gamma^+}^3(\pi) \cdot \vartheta_{\gamma^-}^3(\pi),$$



siendo  $\vartheta_\gamma$  la función auxiliar definida en (4.52).

Un cálculo simple muestra que para todo  $\gamma$  real

$$\vartheta_\gamma(\pi) = e^{-\frac{4}{3}\gamma\pi} \frac{\varphi_\gamma(\pi)}{\varphi_{-\gamma}(\pi)} = e^{-\frac{1}{3}\gamma\pi},$$

luego, la derivada de la aplicación  $S^+ \circ S^-$  en el punto fijo  $\bar{u}_0 = \lambda$  es

$$\frac{d(S^+ \circ S^-)}{du_0}(\lambda) = e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi}.$$

Por tanto, podemos deducir:

- Si  $\gamma^+ + \gamma^- = 0$ , con  $\gamma^+ \cdot \gamma^- \neq 0$ , entonces la función desplazamiento verifica  $d(\lambda) = d'(\lambda) = 0$  y, a partir de la Nota 4.50, se concluye que el plano invariante  $\Pi_F$  es el único cono invariante del sistema (4.25) y además es semiestable.
- Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ + \gamma^- > 0$ , entonces  $d(\lambda) = 0$ ,  $d'(\lambda) < 0$  y el plano invariante  $\Pi_F$  es asintóticamente estable. Además, de acuerdo con la Nota 4.50, debe existir otro cono invariante bizonal que será inestable.
- Si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$  y  $\gamma^+ + \gamma^- < 0$ , entonces  $d(\lambda) = 0$ ,  $d'(\lambda) > 0$  y el plano invariante es inestable. Además, existe otro cono invariante bizonal, que es asintóticamente estable. ■

En la Figura 4.11 puede contemplarse la ampliación de los conjuntos de bifurcaciones recogidos en las figuras 4.7 y 4.8 al caso  $\lambda^+ = \lambda^-$ . Obsérvese que en este caso, si  $\gamma^+ \cdot \gamma^- < 0$ , entonces el signo de la diferencia de las trazas  $t^+ - t^- = 2(\alpha^+ - \alpha^-)$  permanece fijo. Por este motivo realizamos el diagrama de bifurcaciones sin mantener fijo el signo de la diferencia  $t^+ - t^-$ . Nótese que la línea  $\gamma^+ + \gamma^- = 0$  es una recta de bifurcación transcítica de conos invariantes.

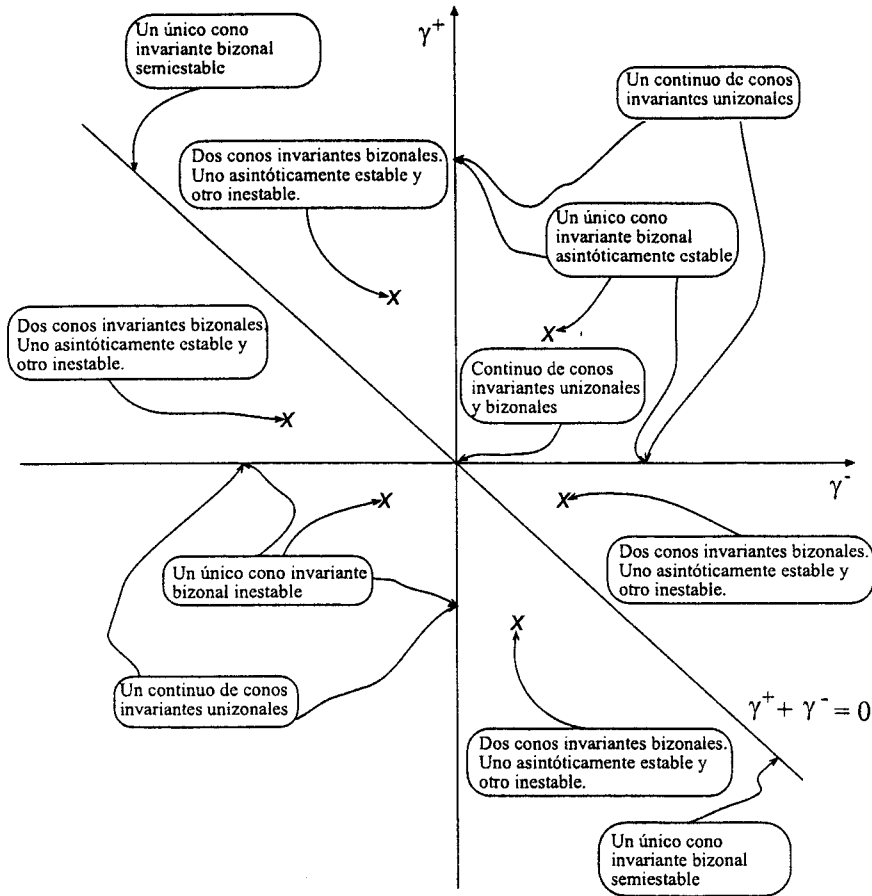


Figura 4.11: Bifurcaciones de conos invariantes para (4.25) si  $\lambda^+ = \lambda^-$ .

### 4.10 Bifurcaciones en un sistema plano bizonal de tipo foco-foco

En esta sección pretendemos dar a conocer, como aplicación de los resultados de las secciones precedentes, el conjunto de bifurcaciones de un sistema plano continuo lineal a trozos con dos zonas no homogéneo cuyo sistema homogéneo asociado es observable y las matrices que definen al sistema poseen un par de autovalores complejos conjugados.

Debemos comentar que el conjunto de bifurcaciones del sistema que estudiaremos está bien establecido en [22] y [47]. Recuérdese, además, que el conjunto de bifurcaciones de este tipo de sistemas fue presentado de forma local en la Proposición 3.29 utilizando la teoría de Melnikov para sistema continuos diferenciables a trozos (véase también la Proposición 3.31).

A continuación obtendremos los mismos resultados que se enuncian en [22] y [47], pero además probaremos la hiperbolicidad de los ciclos límite del sistema y describiremos la bifurcación que en el infinito presenta tal sistema.

Es inmediato observar la correspondencia entre el sistema bidimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = d^\nabla x - a, \end{cases} \quad (4.66)$$

y el sistema tridimensional homogéneo y observable

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = d^\nabla x - z, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Las matrices que rigen al sistema (4.67) tienen a  $\lambda = 0$  como autovalor común, por tanto, el plano focal  $z = 0$  de ambas matrices coincide y tal plano es un cono invariante bizonal del sistema.

Por consiguiente, para  $a > 0$  (resp.,  $a < 0$ ), el sistema (4.66) es equivalente al sistema esférico asociado a (4.67) restringido al hemisferio superior (resp., inferior) de  $S^2$ .

Así, las órbitas periódicas del sistema bidimensional (4.66) para  $a > 0$  (resp.,  $a < 0$ ) se corresponden de forma biunívoca con los conos invariantes del sistema (4.67) que se encuentran en el semiespacio  $z > 0$  (resp.,  $z < 0$ ).

Por otro lado, de acuerdo con el apartado 3 de la Nota 4.43, el sistema esférico asociado a (4.67) es equivalente, para  $z > 0$ , al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = d^\nabla x - 1, \end{cases} \quad (4.68)$$

y para  $z < 0$  es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = d^\nabla x + 1, \end{cases} \quad (4.69)$$

lo que permite observar de nuevo el carácter homotético del parámetro  $a$  para el sistema bidimensional (4.66).

El siguiente resultado recoge las bifurcaciones del sistema (4.66) en el caso foco-foco cuando  $a \neq 0$ . Parte de la situación  $a = 0$  está recogida en la Sección 3.3 y su análisis completo puede verse en [22] y [47].

**Teorema 4.52** *Supongamos que las matrices que rigen al sistema bidimensional (4.66) poseen autovalores  $\alpha^+ \pm i\beta^+$ ,  $\alpha^- \pm i\beta^-$ , respectivamente, con  $\beta^+ > 0, \beta^- > 0$ , y  $a \neq 0$ . Si denotemos  $\omega^+ = \alpha^+/\beta^+$ ,  $\omega^- = \alpha^-/\beta^-$  y  $\omega = \omega^+ + \omega^-$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. Para  $\omega^+ \cdot \omega^- = 0$ , el sistema (4.66) satisface:

(a) Si  $a > 0$ ,  $\omega^- = 0$  y  $\omega^+ \neq 0$  (resp.,  $a < 0$ ,  $\omega^- \neq 0$  y  $\omega^+ = 0$ ), entonces el sistema (4.66) no posee soluciones periódicas.

(b) Si  $a > 0$ ,  $\omega^- \neq 0$  y  $\omega^+ = 0$  (resp.,  $a < 0$ ,  $\omega^- = 0$  y  $\omega^+ \neq 0$ ), entonces el sistema (4.66) posee un continuo acotado y unizional de órbitas periódicas.

(c) Si  $\omega^+ = \omega^- = 0$ , entonces todas las soluciones del sistema (4.66) son periódicas.

2. Si  $\omega^+ \cdot \omega^- > 0$ , entonces el sistema (4.66) no posee órbitas periódicas.

3. Si  $\omega^+ \cdot \omega^- < 0$ , entonces (4.66) posee a lo sumo una órbita periódica. Además, la órbita periódica existe si y sólo si  $\text{sgn}(a \cdot \omega^+) = -\text{sgn}(\omega)$ , en cuyo caso, la órbita periódica es bizonal y se trata de un ciclo límite hiperbólico. Por último, el ciclo límite es asintóticamente estable si  $\omega < 0$  e inestable si  $\omega > 0$ .

**Demostración.** Teniendo en cuenta que  $\lambda = 0$  es un autovalor común de las matrices que rigen al sistema (4.67) deducimos que

$$\gamma^+ = \frac{\alpha^+}{\beta^+} = \omega^+, \quad \gamma^- = \frac{\alpha^-}{\beta^-} = \omega^-, \quad t^+ = 2\alpha^+, \quad t^- = 2\alpha^-$$

y el plano  $z = 0$  es un cono invariante bizonal del sistema tridimensional (4.67).

De esta manera, si  $\omega^+ \cdot \omega^- \geq 0$ , los dos primeros apartados son consecuencia directa del Teorema 4.47.

Si  $\omega^+ \cdot \omega^- < 0$ , entonces, puesto que  $z = 0$  es un cono invariante del sistema (4.67), de acuerdo con el tercer apartado del Teorema 4.47, el sistema bidimensional (4.66) posee a lo sumo una órbita periódica.

Además, de acuerdo con el segundo apartado del Teorema 4.51, el sistema (4.67) posee un cono invariante bizonal no coincidente con el plano  $z = 0$  si y sólo si  $\omega = \omega^+ + \omega^- \neq 0$ .

Ahora, analizamos la posición que ocupa este nuevo cono invariante bizonal en relación con el plano invariante  $z = 0$ .

Si  $\omega^+ > 0$  y  $\omega^- < 0$ , entonces la función desplazamiento

$$d(u_0) = (S^+ \circ S^-)(u_0) - u_0$$

asociada al sistema (4.67) verifica  $d''(u_0) < 0$  para todo  $u_0$  en el dominio de definición de  $S^+ \circ S^-$  y su derivada en el punto fijo  $\bar{u}_0 = 0$  (pendiente de la semirrecta que origina el plano invariante  $z = 0$ ) es  $d'(0) = \exp(-\omega\pi) - 1$ .

De esta forma, si  $\omega > 0$ , entonces  $d(0) = 0$  y  $d'(0) < 0$ , de donde, el sistema (4.67) posee un único cono invariante bizonal hiperbólico no coincidente con el plano  $z = 0$ , que además se encuentra por debajo de dicho plano y, según el Teorema 4.51, es inestable.

Es decir, el sistema plano (4.66) posee un único ciclo límite hiperbólico, que además es inestable, si y sólo si  $a < 0$ .

De forma análoga, si  $\omega < 0$ , entonces el sistema (4.67) posee un único cono invariante bizonal no coincidente con el plano  $z = 0$ , que además se encuentra por encima de dicho plano, es hiperbólico y asintóticamente estable.

Es decir, el sistema (4.66) posee un único ciclo límite hiperbólico, que además es asintóticamente estable, si y sólo si  $a > 0$ .

Un razonamiento semejante, permite considerar el caso  $\omega^+ < 0$  y  $\omega^- > 0$  y finalizar la prueba de este resultado. ■

**Nota 4.53** A la vista de las consideraciones previas, podemos dar una interpretación de la bifurcación en el infinito para el sistema plano (4.66).

Suponiendo que el sistema (4.66) es de tipo foco-foco, el ecuador de la esfera de Poincaré (ver [44]) es una órbita periódica del sistema (4.66) en el infinito, ya que el ecuador de  $S^2$  es una órbita periódica del sistema esférico asociado a (4.67).

Ahora, si  $\omega^+ > 0$ ,  $\omega^- < 0$ ,  $\omega > 0$  y  $a < 0$ , entonces el sistema plano (4.66) posee un ciclo límite hiperbólico único e inestable y el ecuador de la esfera de Poincaré es asintóticamente estable.

Manteniendo constantes los signos de  $\omega^+ > 0$ ,  $\omega^- < 0$  y  $a < 0$  y variando el signo de  $\omega$ , deducimos que la amplitud del ciclo límite tiende a infinito cuando  $\omega$  se aproxima a cero (véanse las notas 3.30 y 3.32).

Cuando  $\omega = 0$ , se produce una colisión entre el ciclo límite del sistema (4.66) y el ecuador de la esfera de Poincaré, donde ambos intercambian sus estabilidades y el ciclo límite desaparece. Es decir, se produce una bifurcación de Hopf en el infinito.

Esta situación vista desde el sistema esférico asociado a (4.67) se observa como una bifurcación transcítica de órbitas periódicas en  $S^2$ , es decir, una bifurcación transcítica de conos invariantes en el sistema tridimensional (4.67) (véase la Figura 4.11).

## Capítulo 5

# Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos Bizonales No Observables o No Controlables

En este capítulo consideramos los sistemas tridimensionales lineales a trozos bizonales que no verifican las propiedades de observabilidad o controlabilidad.

Recuérdese que un sistema del tipo  $2CPL_n$  se dice observable (resp., controlable) si su sistema homogéneo asociado es observable (resp., controlable).

El estudio de los sistemas lineales a trozos tridimensionales no observables se realizará, gracias a la formas canónicas establecidas en el primer capítulo, a partir de sistemas unidimensionales o bidimensionales lineales a trozos.

Por otra parte, los sistemas  $2CPL_3$  observables y no controlables se estudiarán a partir de ecuaciones diferenciales lineales a trozos unidimensionales  $2\pi$ -periódicas o bien a partir de sistemas bidimensionales lineales a trozos bizonales.

## 5.1 Sistemas No Observables. Cilindros Invariantes. Órbitas periódicas

Para empezar recordamos algunas ideas recogidas en el Capítulo 1 de las que haremos uso en el desarrollo posterior.

Los sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos bizonales se escriben en la forma general

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}^\nabla & A_{12} \\ \hline A_{21}^\nabla & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

con  $a_{11}^\nabla \in \mathbb{R}$ ,  $A_{12} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$ ,  $A_{21}^\nabla \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ ,  $A_{22} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $(a_1, a_2, a_3)^t$  un vector de  $\mathbb{R}^3$ .

Si el sistema tridimensional (5.1) es observable, entonces, de acuerdo con la Proposición 1.36, dicho sistema puede escribirse en la forma de Lienard generalizada (1.60).

Si el sistema bizonal (5.1) es no observable, entonces, según la Proposición 1.18, el conjunto de vectores  $\{A_{12}, A_{12}A_{22}\}$  es linealmente dependiente y cabe distinguir dos posibilidades:

1. Si  $A_{12} = 0$ , entonces, la primera ecuación de (5.1) es

$$\dot{x} = a_{11}^\nabla x + a_1. \quad (5.2)$$

La ecuación unidimensional (5.2) no puede tener soluciones periódicas, aunque sí puntos de equilibrio.

Una vez localizados los puntos de equilibrio de la ecuación (5.2), el estudio de la existencia de órbitas periódicas en el sistema (5.1) se reduce al análisis de los sistemas bidimensionales lineales de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_{22} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + A_{21}^\nabla \bar{x} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$



para todos los puntos de equilibrio  $\bar{x}$  de (5.2), donde

$$A_{21}^{\nabla} \bar{x} = \begin{cases} A_{21}^+ \bar{x} & \text{si } \bar{x} \geq 0, \\ A_{21}^- \bar{x} & \text{si } \bar{x} < 0. \end{cases}$$

Esto permite considerar el problema lineal a trozos (5.1) como uno de menor dimensión.

2. Si  $A_{12} \neq 0$ , entonces de la Proposición 1.40 se sigue que el sistema (5.1) se reduce a la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^{\nabla} x - y, \\ \dot{y} = b_{21}^{\nabla} x + b_{22} y + b_2, \\ \dot{z} = b_{31}^{\nabla} x + b_{32} y + b_{33} z + b_3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Nótese que el sistema (5.3) contiene al subsistema continuo bidimensional lineal a trozos bizonal

$$\begin{cases} \dot{x} = b_{11}^{\nabla} x - y, \\ \dot{y} = b_{21}^{\nabla} x + b_{22} y + b_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

que evoluciona de forma independiente y además es observable (ver Proposición 1.32), por lo que puede escribirse en forma de Lienard generalizada.

En cuanto a la existencia de órbitas periódicas para el sistema tridimensional no observable (5.3) podemos asegurar que es condición necesaria la existencia de órbitas periódicas en el sistema bidimensional (5.4).

El siguiente resultado establece la existencia y estabilidad de ciclos límite en el sistema tridimensional (5.3).

**Teorema 5.1** *Consideremos el sistema tridimensional (5.3) con  $b_{33} \neq 0$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. Si el sistema bidimensional (5.4) posee un ciclo límite estable y  $b_{33} < 0$  (resp.,  $b_{33} > 0$ ), entonces el sistema tridimensional (5.3) posee un ciclo límite estable (resp., inestable).
2. Si el sistema bidimensional (5.4) posee un ciclo límite inestable, entonces el sistema tridimensional (5.3) posee un ciclo límite inestable.

**Demostración.** Si el sistema (5.4) posee un ciclo límite  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  con periodo  $T$ , entonces el cilindro ortogonal al plano  $z = 0$  generado por  $\gamma(t)$  es una superficie invariante del sistema tridimensional (5.3) (ver Figura 5.1).

De esta manera, el sistema no observable (5.3) poseerá ciclos límite cuando la ecuación lineal unidimensional no autónoma

$$\dot{z} = b_{31}^{\nabla} x(t) + b_{32} y(t) + b_{33} z + b_3 \quad (5.5)$$

posea soluciones periódicas aisladas.

Es decir, el sistema tridimensional (5.3) sólo puede tener órbitas periódicas sobre el cilindro invariante y el periodo de todas ellas es  $T$ .

Si  $b_{33} \neq 0$ , entonces la ecuación homogénea  $\dot{z} = b_{33} z$  no posee soluciones periódicas, por lo que la ecuación (5.5) posee una única solución  $T$ -periódica (ver [29]) y por consiguiente, el sistema (5.3) posee un ciclo límite, que además está sobre su cilindro invariante.

Para determinar la estabilidad de este ciclo límite, construimos la siguiente aplicación de Poincaré  $P$  asociada a la ecuación diferencial (5.5). Si  $z(t, z_0)$  denota la solución de la ecuación diferencial lineal (5.5) con condición inicial  $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$ , definimos la aplicación de Poincaré  $P$  mediante

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z_0 &\longmapsto P(z_0) = z(T, z_0). \end{aligned}$$

En la Figura 5.1 se visualiza el significado geométrico de la aplicación de Poincaré  $P$  sobre el cilindro invariante del sistema (5.3).

Un cálculo directo nos indica que la aplicación  $P$  viene dada por

$$P(z_0) = e^{b_{33}T} z_0 + e^{b_{33}T} \int_0^T e^{-b_{33}t} (b_{31}^{\nabla} x(t) + b_{32}y(t) + b_3) dt.$$

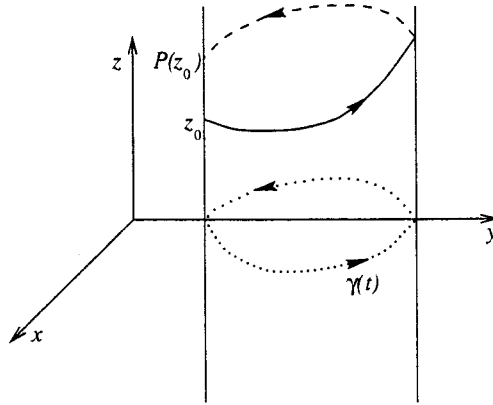


Figura 5.1: Cilindro invariante y aplicación de Poincaré para el sistema (5.3).

Así, es obvio ver que la aplicación de Poincaré  $P$  posee un único punto fijo

$$\bar{z}_0 = \frac{e^{b_{33}T} \int_0^T e^{-b_{33}t} (b_{31}^{\nabla} x(t) + b_{32}y(t) + b_3) dt}{1 - e^{b_{33}T}},$$

correspondiente al único ciclo límite existente sobre el cilindro invariante.

Puesto que  $P'(z_0) = \exp(b_{33}T)$  para todo  $z_0$  real, resulta que la única órbita  $T$ -periódica de la ecuación unidimensional (5.5) es asintóticamente estable si  $b_{33} < 0$  e inestable si  $b_{33} > 0$ .

A partir de aquí, las conclusiones sobre la estabilidad del ciclo límite existente en el sistema tridimensional (5.3) son inmediatas. ■

Nótese que si  $b_{33} = 0$  en (5.3) y el sistema bidimensional (5.4) posee una órbita periódica, entonces el sistema tridimensional (5.3) posee un cilindro

invariante y la aplicación de Poincaré sobre este cilindro invariante es

$$P(z_0) = z_0 + \int_0^T \left( b_{31}^\nabla x(t) + b_{32}y(t) + b_3 \right) dt.$$

Por tanto, el sistema no observable (5.3) posee un continuo de órbitas periódicas sobre su cilindro invariante si y sólo si

$$\int_0^T \left( b_{31}^\nabla x(t) + b_{32}y(t) + b_3 \right) dt = 0.$$

## 5.2 Sistemas Observables No Controlables. Un autovalor real común

Cuando el sistema tridimensional (5.1) es observable y no controlable podemos obtener, a partir de lo expuesto en la sección 1.4 del Capítulo 1, diferentes formas canónicas reducidas para este sistema.

Recuérdese que si el sistema homogéneo asociado a (5.1) es observable, entonces dicho sistema es no controlable si y sólo si las matrices que lo determinan comparten algún autovalor (ver Teorema 1.29). En este caso, la reducción en las ecuaciones del sistema (5.1) depende del número y características (reales o complejos) de los autovalores compartidos.

Comenzamos considerando la existencia de un autovalor real común en las matrices que rigen al sistema (5.1).

Si el sistema tridimensional (5.1) es observable, no controlable y las matrices que lo rigen comparten un autovalor real  $\lambda$ , entonces, de acuerdo con la Proposición 1.41, se sigue que el sistema (5.1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^\nabla - \lambda)x - y, \\ \dot{y} = (m^\nabla + \lambda^2 - \lambda t^\nabla)x - z, \\ \dot{z} = \lambda z - a. \end{cases} \quad (5.6)$$

Para la búsqueda de soluciones periódicas del sistema (5.6) debe tenerse presente las siguientes circunstancias (ver Nota 1.43):

1. Si  $\lambda = a = 0$ , entonces todos los planos de la forma  $z = b$ , con  $b \in \mathbb{R}$ , son superficies invariantes para el sistema (5.6).
2. Si  $\lambda = 0$  y  $a \neq 0$ , entonces de la última ecuación del sistema (5.6) deducimos que éste no posee puntos de equilibrio ni órbitas periódicas.
3. Si  $\lambda \neq 0$ , entonces el plano de ecuación  $z = a/\lambda$  es una superficie invariante del sistema (5.6).

En consecuencia, las soluciones periódicas del sistema (5.6), si existen, se encuentran en un plano de la forma  $z = b$  (donde  $b \in \mathbb{R}$  si  $\lambda = a = 0$  o bien  $b = a/\lambda$ , si  $\lambda \neq 0$ ) y por consiguiente, la determinación de soluciones periódicas en el sistema (5.6) se reduce al estudio de la existencia de soluciones periódicas de los sistemas bidimensionales

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^\nabla - \lambda)x - y, \\ \dot{y} = (m^\nabla + \lambda^2 - \lambda t^\nabla)x - b. \end{cases} \quad (5.7)$$

Estos últimos sistemas ya han sido analizados en este trabajo en varias ocasiones y desde diferentes puntos de vista, por lo que el estudio del sistema (5.6) queda perfectamente establecido a partir de (5.7). Para el estudio de las bifurcaciones en los sistemas continuos lineales a trozos bidimensionales puede consultarse de nuevo [22], [47] y [51].

### 5.3 **Sistemas Observables No Controlables. Un autovalor complejo común**

Cuando el sistema homogéneo asociado al sistema tridimensional (5.1) es observable y su pérdida de controlabilidad proviene del par de autovalores común

$\alpha \pm i\beta$  ( $\beta > 0$ ), para las matrices que lo caracterizan, entonces, de la Proposición 1.42, se tiene que el sistema (5.1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^\nabla - 2\alpha)x - y, \\ \dot{y} = 2\alpha y - z, \\ \dot{z} = (\alpha^2 + \beta^2)y - a. \end{cases} \quad (5.8)$$

Notemos que en el sistema (5.8) las variables  $y, z$  evolucionan de manera independiente (ver Nota 1.43) gobernadas por las ecuaciones del sistema lineal plano

$$\begin{cases} \dot{y} = 2\alpha y - z, \\ \dot{z} = (\alpha^2 + \beta^2)y - a. \end{cases} \quad (5.9)$$

Además, si el sistema (5.8) posee una solución periódica, entonces el sistema plano (5.9) debe tener una solución periódica, y esto sucede si y sólo si  $\alpha = 0$ . En este caso, podemos reducir aún más las ecuaciones del sistema (5.8).

**Proposición 5.2** *Si  $\alpha = 0$ , entonces existe un cambio de variables  $y$  de parámetros, incluyendo a la variable temporal  $s$ , que transforma (5.8) en el siguiente sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = -z, \\ \dot{z} = y - \text{sgn}(a). \end{cases} \quad (5.10)$$

**Demostración.** El carácter homotético del parámetro  $a$  en el sistema (5.8) (véase Nota 1.20) establece que dicho sistema es equivalente, para  $\alpha = 0$ , al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = -z, \\ \dot{z} = \beta^2 y - \text{sgn}(a). \end{cases} \quad (5.11)$$

Ahora es suficiente realizar en (5.11) los cambios

$$x \rightarrow x/\beta^3, \quad y \rightarrow y/\beta^2, \quad z \rightarrow z/\beta, \quad s \rightarrow s/\beta, \quad t^+ \rightarrow \beta t^+, \quad t^- \rightarrow \beta t^-$$

para llegar al sistema equivalente (5.10). ■

Puesto que (5.10) es invariante (ver Nota 1.37) para la transformación

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z, \quad t^+ \rightarrow t^-, \quad t^- \rightarrow t^+, \quad a \rightarrow -a, \quad (5.12)$$

podemos centrar el estudio del sistema (5.10) en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\nabla x - y, \\ \dot{y} = -z, \\ \dot{z} = y - b, \end{cases} \quad (5.13)$$

donde  $b = 0$  o  $b = 1$ .

Para empezar, observemos que la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{y} = -z, \\ \dot{z} = y - b, \end{cases}$$

con condición inicial

$$(y(0), z(0)) = (b + r \cos(\theta_0), r \operatorname{sen}(\theta_0)), \quad \text{siendo } r \geq 0 \quad \text{y} \quad \theta_0 \in [0, 2\pi),$$

viene dada por

$$y(s) = b + r \cos(s - \theta_0), \quad z(s) = -r \operatorname{sen}(s - \theta_0).$$

Luego, son superficies invariantes para el sistema (5.13) los cilindros

$$(y - b)^2 + z^2 = r^2, \quad \text{con } r \geq 0. \quad (5.14)$$

Tomando  $\theta = s - \theta_0$  como nueva variable independiente, obtenemos

$$y(\theta) = b + r \cos \theta, \quad z(\theta) = -r \operatorname{sen} \theta. \quad (5.15)$$

La sustitución de (5.15) en la primera ecuación de (5.13) nos lleva a la siguiente ecuación reducida unidimensional no autónoma

$$\frac{dx}{d\theta} = t^\nabla x - b - r \cos \theta, \quad b \in \{0, 1\}, \quad r \geq 0, \quad (5.16)$$

ecuación que analizaremos y que recoge el comportamiento dinámico del sistema tridimensional (5.13).

### 5.3.1 Propiedades generales de la ecuación reducida

La existencia y unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales asociado a un sistema 2CPL<sub>n</sub> (ver Proposición 1.3) se traslada de forma natural a la ecuación (5.16), por lo que el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{d\theta} = t^\nabla x - b - r \cos \theta, \quad x(\theta_0) = x_0, \quad \text{con } \theta_0, x_0 \in \mathbb{R}$$

posee una única solución  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$ , con  $\varphi(\theta_0, \theta_0, x_0) = x_0$ , definida para todo valor  $\theta$  real.

Puesto que la ecuación (5.16) es lineal a trozos, las soluciones que pertenecen a una sola de las dos zonas pueden obtenerse de forma explícita.

De esta manera, si  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \geq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\varphi(\theta, \theta_0, x_0) = e^{t^+(\theta-\theta_0)} \left( x_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-t^+(s-\theta_0)} (b + r \cos s) ds \right). \quad (5.17)$$

Análogamente, si  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\varphi(\theta, \theta_0, x_0) = e^{t^-(\theta-\theta_0)} \left( x_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-t^-(s-\theta_0)} (b + r \cos s) ds \right). \quad (5.18)$$

La ecuación (5.16) puede tener infinitos, dos, uno o ningún punto de equilibrio tal como recoge la siguiente proposición, cuya prueba es inmediata.

**Proposición 5.3** *Si la ecuación (5.16) posee puntos de equilibrio, entonces  $r = 0$ . Más aún, cuando  $r = 0$ , la ecuación (5.16) sólo posee puntos de equilibrio en los siguientes casos:*



1. Si  $b = 0$  y  $t^+ = 0$  (resp.,  $t^- = 0$ ), entonces la semirrecta  $x \geq 0$  (resp.,  $x \leq 0$ ) es una semirrecta de puntos de equilibrio para la ecuación (5.16).
2. Si  $b = 0$  y  $t^+ \cdot t^- \neq 0$ , entonces el origen es el único punto de equilibrio de (5.16). Además, el origen es asintóticamente estable si  $t^+ < 0$  y  $t^- < 0$ , inestable si  $t^+ > 0$  y  $t^- > 0$  y semiestable si  $t^+ \cdot t^- < 0$ .
3. Si  $b = 1$  y  $t^+ > 0$ , entonces  $\bar{x}^+ = 1/t^+$  es un punto de equilibrio inestable de la ecuación (5.16).
4. Si  $b = 1$  y  $t^- < 0$ , entonces  $\bar{x}^- = 1/t^-$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la ecuación (5.16).

Ahora nos centramos en el estudio de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial no autónoma (5.16), es decir, soluciones no constantes que verifican  $\varphi(\theta + T, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  para todo  $\theta$  real y algún valor  $T \neq 0$ . Como siempre, el periodo de la solución periódica será el ínfimo de los valores positivos de  $T$  que satisfacen la relación anterior.

Aunque las soluciones de la ecuación unidimensional (5.16) no son monótonas en  $\theta$ , la existencia y unicidad de soluciones nos llevan de manera inmediata a la siguiente propiedad de monotonía respecto de las condiciones iniciales (ver demostración en [29]).

**Lema 5.4** Si  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  y  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0)$  son dos soluciones de la ecuación (5.16) con  $x_0 < y_0$ , entonces se verifica  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) < \varphi(\theta, \theta_0, y_0)$  para  $\theta \in \mathbb{R}$ .

La función  $g(\theta, x) = t^\nabla x - b - r \cos \theta$  que define a la ecuación (5.16) satisface la condición  $g(\theta + 2\pi, x) = g(\theta, x)$  para todo  $(\theta, x) \in \mathbb{R}^2$ , lo que nos indica que la ecuación unidimensional (5.16) es  $2\pi$ -periódica. Ello nos permite enunciar el siguiente lema, cuya prueba está en [29].

**Lema 5.5** Si  $x(\theta)$  es una solución de la ecuación (5.16), entonces  $x(\theta + 2\pi)$  también es solución de (5.16). Además, para todo  $\theta_0$  y  $x_0$  reales y para todo

número entero  $k$  se verifica

$$\varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)) \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}.$$

Es conocida la equivalencia entre la existencia de soluciones acotadas y la existencia de soluciones periódicas en una ecuación diferencial  $T$ -periódica y continua. Tal equivalencia se deduce de forma directa del Teorema 4.11 de Hale-Koçak [29] y establece condiciones de existencia de soluciones periódicas en la ecuación (5.16). Enunciamos tales condiciones en la siguiente proposición.

**Proposición 5.6** *Si una solución  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  de la ecuación (5.16) está acotada para  $\theta \geq 0$  (resp.,  $\theta \leq 0$ ), entonces la ecuación (5.16) posee una solución  $2\pi$ -periódica  $\Phi(\theta)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) = \Phi(\theta)$  (resp.,  $\Psi(\theta)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(\theta - 2k\pi, \theta_0, x_0) = \Psi(\theta)$ ), donde  $k$  es un número entero,  $0 \leq \theta < 2\pi$  y la convergencia es monótona y uniforme.*

Los resultados anteriores determinan el periodo de las soluciones periódicas de la ecuación reducida (5.16).

**Proposición 5.7** *Todas las soluciones periódicas de la ecuación diferencial (5.16) tienen periodo  $T = 2\pi$ .*

**Demostración.** Si  $r = 0$ , entonces (5.16) no tiene soluciones periódicas.

Si  $r > 0$  y  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  es una solución periódica de periodo  $T$  de la ecuación (5.16), entonces  $r \cos(\theta + T) = r \cos(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , de donde resulta que  $T = 2n\pi$ , para un número natural  $n$ , y por tanto,

$$\varphi(2kn\pi + \theta, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  y para todo número entero  $k$ .

Además,  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  está acotada, luego de la Proposición 5.6 sigue directamente que  $\varphi$  es periódica de periodo  $2\pi$ . ■

Conocido el periodo de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial (5.16), el Lema 5.5 y la propia definición de la ecuación (5.16) caracterizan sus soluciones periódicas.

**Proposición 5.8** *Las soluciones de la ecuación (5.16) satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Una solución  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  de la ecuación (5.16) es periódica si y sólo si  $\varphi(\theta_0 + 2\pi, \theta_0, x_0) = x_0$ .
2. Una solución  $\varphi(\theta)$  de (5.16) es periódica si y sólo si  $\int_0^{2\pi} t^\nabla \varphi(\theta) d\theta = 2\pi b$ .

**Demostración.**

1. Si  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  es periódica, de acuerdo con la Proposición 5.7 tenemos

$$\varphi(\theta + 2\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0) \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

En particular, tomando  $\theta = \theta_0$  obtenemos que

$$\varphi(\theta_0 + 2\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta_0, \theta_0, x_0) = x_0.$$

Recíprocamente, si  $\varphi(\theta_0 + 2\pi, \theta_0, x_0) = x_0$ , entonces del Lema 5.5 sigue directamente que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  es periódica de periodo  $2\pi$ .

2. Si  $\varphi(\theta)$  es una solución de (5.16), entonces

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = t^\nabla \varphi(\theta) - b - r \cos \theta.$$

Integrando ambos miembros de esta última igualdad obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta = \varphi(2\pi) - \varphi(0) = \int_0^{2\pi} t^\nabla \varphi(\theta) d\theta - 2\pi b.$$

Puesto que del primer apartado se tiene que  $\varphi$  es periódica si y sólo si  $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ , la conclusión del segundo apartado es inmediata. ■

La Proposición 5.8 nos proporciona un resultado de no existencia de soluciones periódicas para la ecuación (5.16).

**Proposición 5.9** *La ecuación (5.16) satisface las siguientes propiedades:*

1. Si  $b = 1$ ,  $t^+ \leq 0$  y  $t^- \geq 0$ , entonces (5.16) no posee soluciones periódicas.
2. Si  $b = 0$  y  $t^+ \cdot t^- < 0$ , entonces (5.16) no posee soluciones periódicas.

**Demostración.** Si  $b = 1$ ,  $t^+ \leq 0$  y  $t^- \geq 0$ , entonces  $t^\nabla \varphi \leq 0$  para toda solución  $\varphi$  de la ecuación (5.16) y en consecuencia,  $\int_0^{2\pi} t^\nabla \varphi d\theta \leq 0$ . Ahora, del segundo apartado de la Proposición 5.8 se concluye que la ecuación (5.16) no puede tener soluciones periódicas. Esto finaliza la prueba del primer apartado.

Si  $b = 0$  y  $t^+ \cdot t^- < 0$ , entonces, por continuidad, para toda solución  $\varphi$  no nula de la ecuación (5.16) tenemos que  $\int_0^{2\pi} t^\nabla \varphi \neq 0$ , lo que impide la existencia de soluciones periódicas para la ecuación (5.16). ■

Analizando el signo de la derivada

$$\left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{x=0} = g(\theta, 0) = -b - r \cos \theta$$

deduciremos el crecimiento de las soluciones de la ecuación (5.16) en los puntos de corte (si existen) de éstas con el segmento

$$S = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, x = 0\}.$$

Este análisis se efectúa en el siguiente lema, cuya prueba es directa. Obsérvese que  $x = 0$  es una solución de la ecuación reducida (5.16) para el caso trivial  $b = r = 0$ . Por este motivo, no recogemos dicha situación en este lema.

**Lema 5.10** *Las soluciones de la ecuación (5.16) verifican las siguientes propiedades:*

- (i) Si  $0 \leq r < 1$  y  $b = 1$ , entonces las soluciones que intersecan a  $S$  son transversales a  $S$  y poseen derivada negativa en los puntos de corte.
- (ii) Si  $r = b = 1$ , entonces las soluciones que intersecan a  $S$  en  $(\theta, 0)$ , con  $\theta \neq \pi$ , son transversales a  $S$  con derivada negativa en los puntos de corte. Además, la solución que interseca a  $S$  en  $(\pi, 0)$  cambia de signo en este punto y posee derivada nula en dicho punto.
- (iii) Si  $r > 1$  y  $b = 1$  o bien  $r > 0$  y  $b = 0$ , entonces podemos definir los valores reales  $\hat{\theta}_1 = \arccos(-b/r)$  y  $\hat{\theta}_2 = 2\pi - \arccos(-b/r)$  y se satisfacen las siguientes propiedades:
- Las soluciones que intersecan a  $S$  en  $(\theta, 0)$ , con  $\theta \in [0, \hat{\theta}_1) \cup (\hat{\theta}_2, 2\pi]$ , son transversales a  $S$  con derivada negativa en los puntos de corte.
  - Las soluciones que intersecan a  $S$  en  $(\theta, 0)$ , con  $\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , son transversales a  $S$  con derivada positiva en los puntos de corte.
  - La solución que interseca a  $S$  en  $(\hat{\theta}_1, 0)$  posee un mínimo local en dicho punto.
  - La solución que interseca a  $S$  en  $(\hat{\theta}_2, 0)$  posee un máximo local en dicho punto.

La situación descrita en el Lema 5.10 se representa en la Figura 5.2.

**Nota 5.11** Como consecuencia del Lema 5.10, una solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  de la ecuación (5.16) presenta uno y sólo uno de los siguientes comportamientos:

1. La solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  no interseca al segmento  $S$ .
2. Todos los puntos de corte de  $\varphi(\theta, 0, p)$  con el segmento  $S$  son transversales, pudiendo existir tres, dos o un solo punto de corte.
3. La solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  tiene un punto de corte no transversal con  $S$  y un punto de corte transversal.

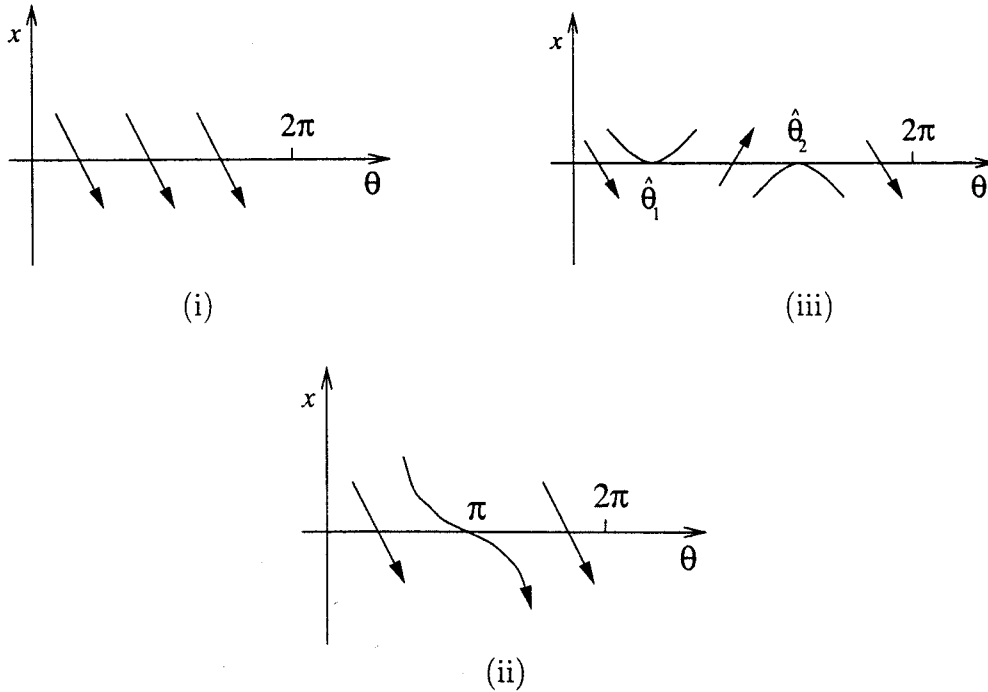


Figura 5.2: Puntos de corte de las soluciones de (5.16) con el segmento  $S$ .

4. La solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  tiene sólo un punto de intersección con el segmento  $S$  y es no transversal.

### 5.3.2 Aplicación de Poincaré asociada a la ecuación reducida

En esta sección definiremos una aplicación de Poincaré para la ecuación unidimensional (5.16) y estableceremos algunas propiedades de la misma.

Las soluciones de la ecuación (5.16) están definidas en todo  $\mathbb{R}$ , por lo que no es restrictivo determinar cada solución por su valor en  $\theta_0 = 0$ . Esta idea y el primer apartado de la Proposición 5.8 nos sugiere como herramienta clave para el estudio de las soluciones periódicas de la ecuación (5.16), la introducción de

la aplicación de Poincaré definida de la manera siguiente (ver Figura 5.3)

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto P(p) = \varphi(2\pi, 0, p). \end{aligned} \tag{5.19}$$

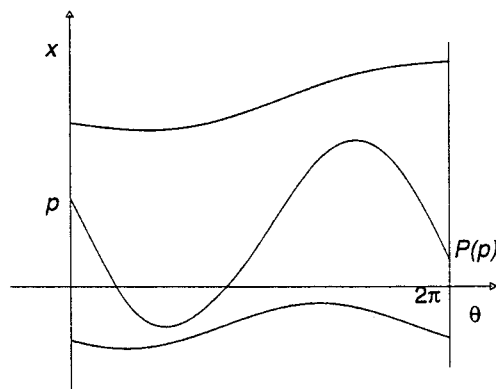


Figura 5.3: Aplicación de Poincaré  $P$  para la ecuación (5.16).

Notemos que los puntos fijos de  $P$  determinan las soluciones periódicas de (5.16), ya que  $\varphi(\theta, 0, p)$  es solución periódica de (5.16) si y sólo si  $P(p) = p$ .

Nuestro objetivo será ahora estudiar la aplicación de Poincaré  $P$  para determinar sus puntos fijos y la estabilidad de los mismos.

Como es habitual, decimos que la solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  es bizonal si cambia de signo en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , en otro caso, diremos que la solución es unizonal.

Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  es bizonal, no es posible dar una expresión explícita de la aplicación de Poincaré  $P$ . Sin embargo, si  $\varphi(\theta, 0, p)$  es unizonal podemos encontrar de forma explícita el valor  $P(p)$ .

Si  $p > 0$ , mientras  $\varphi(\theta, 0, p) \geq 0$  se tiene a partir de (5.17) que

$$\varphi(\theta, 0, p) = e^{t^+\theta} \left[ p - \int_0^\theta e^{-t^+s} (b + r \cos s) ds \right].$$

Por consiguiente, si definimos

$$I^+(\theta) = \int_0^\theta e^{-t^+s} (b + r \cos s) ds, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

tenemos que para  $p \geq \max \{I^+(\theta)\}$ ,  $P(p)$  viene dada por

$$P(p) = e^{2\pi t^+} [p - I^+(2\pi)]. \quad (5.20)$$

Análogamente, definiendo

$$I^-(\theta) = \int_0^\theta e^{-t^-s} (b + r \cos s) ds, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

encontramos que  $P(p)$  se expresa para  $p \leq \min \{I^-(\theta), 0\}$  mediante

$$P(p) = e^{2\pi t^-} [p - I^-(2\pi)]. \quad (5.21)$$

La aplicación de Poincaré  $P$  es continua, porque las soluciones de la ecuación diferencial (5.16) dependen continuamente de las condiciones iniciales (ver [19]). Sin embargo, puesto que  $g(\theta, x)$  no posee derivada parcial continua respecto de  $x$ , en un principio, la derivabilidad de la aplicación de Poincaré  $P$  no está garantizada. No obstante, gracias al Lema 5.4, sabemos que la aplicación de Poincaré  $P$  es monótona creciente.

La siguiente proposición establece la derivabilidad de la aplicación  $P$ .

**Proposición 5.12** *La aplicación de Poincaré  $P$  definida en (5.19) es continuamente derivable y su derivada viene dada por*

$$P'(p) = \exp(t^+\tau^+ + t^-(2\pi - \tau^+)), \quad (5.22)$$

donde  $\tau^+$  es la medida del conjunto  $\{\theta \in [0, 2\pi] : \varphi(\theta, 0, p) \geq 0\}$ .



**Demostración.** Determinaremos la derivabilidad de la aplicación de Poincaré  $P$  estudiando cada uno de los casos señalados en la Nota 5.11.

1. Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  no interseca al segmento  $S$ , entonces  $\varphi(\theta, 0, p)$  mantiene un signo constante en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , por lo que la aplicación de Poincaré  $P$  viene dada por (5.20) o (5.21), es derivable en  $p$  y

$$P'(p) = \begin{cases} \exp(2\pi t^+) & \text{si } \varphi(\theta, 0, p) > 0, \\ \exp(2\pi t^-) & \text{si } \varphi(\theta, 0, p) < 0, \end{cases}$$

expresión que coincide con (5.22) para la situación considerada.

2. Si todos los puntos de corte de  $\varphi(\theta, 0, p)$  con el segmento  $S$  son transversales, introducimos el sistema bidimensional continuo diferenciable a trozos

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1, \\ \dot{x} = t^\nabla x - b - r \cos \theta. \end{cases} \quad (5.23)$$

y las secciones

$$\Sigma_0 = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : \theta = 0\} \quad \text{y} \quad \Sigma_{2\pi} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : \theta = 2\pi\}.$$

Ahora, es posible definir varias aplicaciones de transición para el sistema bidimensional (5.23) (ver Definición 2.2).

Al menos existe una aplicación de transición entre  $\Sigma_0$  y  $S$  y otra entre  $S$  y  $\Sigma_{2\pi}$  y, dependiendo del número de intersecciones de  $\varphi(\theta, 0, p)$  con la sección  $S$ , podemos definir una o varias aplicaciones de transición entre el segmento  $S$  y él mismo.

Supongamos que  $p > 0$  y la solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  transversalmente en el número máximo de puntos posibles, es decir, en tres puntos (ver Nota 5.11)  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ , con  $0 < \theta_1 < \hat{\theta}_1 < \theta_2 < \hat{\theta}_2 < \theta_3 < 2\pi$ , donde  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  están definidos en el Lema 5.10 (ver Figura 5.4).

En esta situación, si  $U(q)$  denota el entorno de un punto  $q$  de  $\mathbb{R}^2$ , podemos definir las aplicaciones de transición

$$\begin{aligned} \xi_0 : \Sigma_0 \cap U(0, p) &\longrightarrow S, & \xi_1 : S \cap U(\theta_1, 0) &\longrightarrow S, \\ \xi_2 : S \cap U(\theta_2, 0) &\longrightarrow S, & \xi_3 : S \cap U(\theta_3, 0) &\longrightarrow \Sigma_{2\pi}, \end{aligned}$$

de forma que la aplicación de Poincaré  $P$  en un entorno de  $p$  puede expresarse mediante

$$P = \xi_3 \circ \xi_2 \circ \xi_1 \circ \xi_0. \quad (5.24)$$

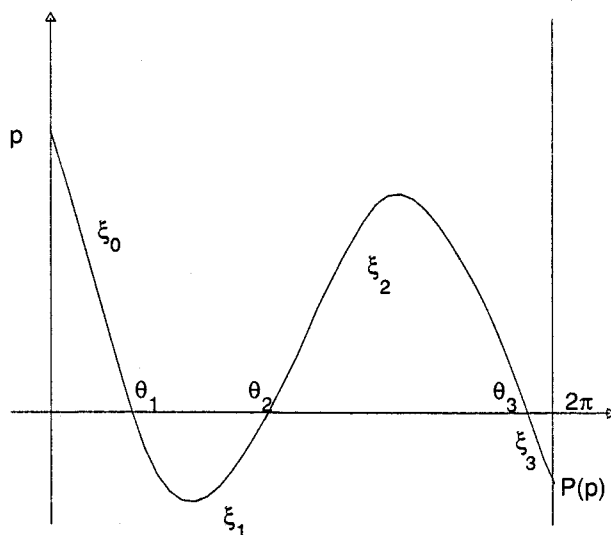


Figura 5.4: La solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  transversalmente.

La Proposición 2.5 nos proporciona la derivada de la aplicación de transición para un sistema plano. De ella se deduce que

$$\xi_0'(p) = \frac{d\theta_1}{dp} = \frac{1}{b + r \cos \theta_1} e^{t+\theta_1}, \quad (5.25)$$

$$\xi'_1(\theta_1) = \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{b + r \cos \theta_1}{b + r \cos \theta_2} e^{t^-(\theta_2 - \theta_1)}, \quad (5.26)$$

$$\xi'_2(\theta_2) = \frac{d\theta_3}{d\theta_2} = \frac{b + r \cos \theta_2}{b + r \cos \theta_3} e^{t^+(\theta_3 - \theta_2)}, \quad (5.27)$$

y

$$\xi'_3(\theta_3) = \frac{dP}{d\theta_3} = (b + r \cos \theta_3) e^{t^-(2\pi - \theta_3)}.$$

Luego, aplicando la regla de la cadena en (5.24) se tiene que

$$P'(p) = \exp \left( t^+ (\theta_1 - \theta_2 + \theta_3) + t^- (\theta_2 - \theta_1 + 2\pi - \theta_3) \right),$$

es decir,  $P'(p)$  coincide con (5.22), siendo  $\tau^+ = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$ .

Naturalmente, si  $\varphi(\theta, 0, p)$  corta a  $S$  transversalmente en distinto número de puntos a los considerados, la demostración sería análoga.

Para  $p < 0$  una prueba similar nos conduce a (5.22).

3. Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  no transversalmente en un punto y transversalmente en otro, entonces, según el Lema 5.10, los posibles puntos de intersección no transversal se dan en  $\theta = \hat{\theta}_1$  o  $\theta = \hat{\theta}_2$ .

Ahora, supongamos que  $p > 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p)$  corta a  $S$  no transversalmente en  $\theta = \hat{\theta}_1$  y transversalmente en  $\theta_2$ , con  $\hat{\theta}_2 < \theta_2 \leq 2\pi$ .

Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $\varphi(\theta, 0, p + \varepsilon)$  sólo corta a  $S$  en un punto  $\tilde{\theta}_2 > \hat{\theta}_2$ , siendo la intersección transversal; y  $\varphi(\theta, 0, p - \varepsilon)$  sólo corta a  $S$  transversalmente y lo hace en los puntos  $\tilde{\theta}_1$ ,  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$ , con  $\tilde{\theta}_1 < \hat{\theta}_1 < \bar{\theta}_1 < \bar{\theta}_2 < \theta_2$ .

Así, todos los cortes de  $\varphi(\theta, 0, p + \varepsilon)$  y  $\varphi(\theta, 0, p - \varepsilon)$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, con  $S$  son transversales y en virtud del segundo apartado se deduce que

$$P'(p + \varepsilon) = \exp \left( t^- \tilde{\theta}_2 + t^- (2\pi - \tilde{\theta}_2) \right)$$

y

$$P'(p - \varepsilon) = \exp \left( t^+ \left( \tilde{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1 \right) + t^- \left( \bar{\theta}_1 - \tilde{\theta}_1 + 2\pi - \bar{\theta}_2 \right) \right).$$

Por continuidad con respecto a las condiciones iniciales en la ecuación (5.16) se tiene para  $\varepsilon \rightarrow 0$  que

$$\tilde{\theta}_1 \rightarrow \hat{\theta}_1, \quad \bar{\theta}_1 \rightarrow \hat{\theta}_1, \quad \bar{\theta}_2 \rightarrow \theta_2, \quad \tilde{\theta}_2 \rightarrow \theta_2,$$

por lo que obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P'(p + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P'(p - \varepsilon) = \exp \left( t^+ \theta_2 + t^- (2\pi - \theta_2) \right)$$

y por tanto,  $P$  es derivable en  $p$  y

$$P'(p) = \exp \left( t^+ \theta_2 + t^- (2\pi - \theta_2) \right).$$

La prueba se realizaría de forma similar en cualquier otro caso.

4. Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  en un solo punto, siendo la intersección no transversal, un razonamiento análogo al realizado en el apartado 3 nos permite finalizar la prueba de este resultado.

Por último, la continuidad de  $P'$  se deduce de forma inmediata a partir de la continuidad de  $\tau^+$ . ■

El siguiente resultado asegura la existencia de la derivada segunda de la aplicación  $P$  y establece su signo para  $t^+ \geq 0$  y  $t^- \leq 0$ .

**Proposición 5.13** *La aplicación  $P$  definida en (5.19) es dos veces derivable. Además, si  $t^+ \geq 0$  y  $t^- \leq 0$ , entonces  $P''(p) \geq 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración.** De la expresión de  $P'$  dada en la Proposición 5.12 tenemos

$$P''(p) = (t^+ - t^-) P'(p) \frac{d\tau^+}{dp}, \quad (5.28)$$

siempre que  $\tau^+(p)$  sea derivable.

Analizamos a continuación la derivabilidad de  $\tau^+$  distinguiendo el número y características de las intersecciones de  $\varphi(\theta, 0, p)$  con el segmento  $S$  indicadas en la Nota 5.11.

Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  no interseca a  $S$ , entonces la aplicación de Poincaré  $P$  viene dada por (5.20) o (5.21), de donde  $P''(p) = 0$ .

Si  $p > 0$  y la solución  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  transversalmente en tres puntos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , con  $0 < \theta_1 < \hat{\theta}_1 < \theta_2 < \hat{\theta}_2 < \theta_3 < 2\pi$ , (donde  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  están definidos en el Lema 5.10), entonces  $\tau^+ = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$  (ver Figura 5.4) y por tanto,  $\tau^+$  es derivable y

$$(\tau^+)'(p) = \frac{d\tau^+}{dp} = \frac{d\theta_1}{dp} - \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dp} + \frac{d\theta_3}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dp}.$$

Así, de acuerdo con (5.25)–(5.27) obtenemos

$$(\tau^+)'(p) = e^{t^+\theta_1} \left[ \frac{1}{b + r \cos \theta_1} - e^{t^-(\theta_2 - \theta_1)} \left( \frac{1}{b + r \cos \theta_2} - \frac{e^{t^+(\theta_3 - \theta_2)}}{b + r \cos \theta_3} \right) \right].$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta_i, 0, p) = -b - r \cos \theta_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3,$$

del Lema 5.10 se deduce que  $(\tau^+)'(p) > 0$ ,

Finalmente, haciendo uso de (5.28) y de la Proposición 5.12 concluimos que  $P''(p) \geq 0$  si  $t^+ \geq 0$  y  $t^- \leq 0$ .

Si  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  transversalmente en un número de puntos distintos a los considerados, la demostración se efectuaría de forma análoga.

Para finalizar la prueba, podemos probar, realizando un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 5.12, que  $\tau^+$  es derivable en los puntos  $p \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\varphi(\theta, 0, p)$  interseca a  $S$  no transversalmente. ■

Los resultados que se obtendrán en las secciones posteriores hacen referencia al número y la estabilidad de las soluciones periódicas de la ecuación reducida (5.16).

A este respecto conviene señalar que los resultados que se expondrán generalizan otros en los que se supone que la función que define a la ecuación diferencial (5.16) es diferenciable o estrictamente convexa. En concreto, N. G. Lloyd en [40] propone resultados para la existencia y unicidad de soluciones periódicas cuando dicha función es suficientemente diferenciable, mientras que J. Mawhin en [43] establece resultados del tipo Ambrosetti–Prodi (ver [3]) cuando la función es estrictamente convexa.

### 5.3.3 Existencia y Estabilidad de Soluciones Periódicas en la Ecuación Reducida

En este apartado analizamos la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en la ecuación unidimensional (5.16)

Comenzamos tratando el caso  $b = 0$  y seguidamente estudiamos la situación  $b = 1$  y las condiciones de existencia de una única solución periódica hiperbólica en la ecuación (5.16).

La invariancia de la ecuación diferencial (5.16) bajo la transformación

$$x \rightarrow -x, \quad \theta \rightarrow -\theta, \quad t^+ \rightarrow -t^-, \quad t^- \rightarrow -t^+ \quad (5.29)$$

nos permite reducir el número de situaciones a considerar.

Empezamos por el análisis de las soluciones periódicas en la ecuación (5.16) cuando  $b = 0$ . En este caso, la ecuación (5.16) recoge el comportamiento dinámico del sistema tridimensional homogéneo y observable (5.13).

Además, es inmediato establecer la relación biunívoca existente entre las soluciones periódicas de la ecuación (5.16) y los conos invariantes del sistema (5.13), por lo que los resultados del Capítulo 4 nos permiten enunciar directamente, y tras notar que  $\gamma^+ = -t^+$  y  $\gamma^- = -t^-$ , el siguiente teorema (ver Teorema 4.47). Recogemos por completitud el caso  $t^+ \cdot t^- < 0$ , cuyo comportamiento ha sido establecido con anterioridad en la Proposición 5.9.

**Teorema 5.14** *Consideremos la ecuación diferencial (5.16) con  $b = 0$  y  $r > 0$ . Se satisface las siguientes propiedades:*

1. Si  $t^+ = t^- = 0$ , entonces todas las soluciones de (5.16) son periódicas.
2. Si  $t^+ = 0$  y  $t^- \neq 0$ , entonces (5.16) posee un continuo de soluciones periódicas positivas y ninguna solución periódica bizonal.
3. Si  $t^- = 0$  y  $t^+ \neq 0$ , entonces (5.16) posee un continuo de soluciones periódicas negativas y ninguna solución periódica bizonal.
4. Si  $t^+ \cdot t^- < 0$ , entonces (5.16) no posee soluciones periódicas.
5. Si  $t^+ \cdot t^- > 0$ , entonces (5.16) posee una única solución periódica. Además, dicha solución periódica es bizonal, asintóticamente estable si  $t^+ < 0$  y  $t^- < 0$  e inestable si  $t^+ > 0$  y  $t^- > 0$ .

Con ayuda de la Proposición 5.3 y el Teorema 5.14 podemos construir el conjunto de bifurcaciones, representado en la Figura 5.5, de la ecuación (5.16) cuando  $b = 0$ .

El siguiente resultado establece las condiciones de existencia de una única solución periódica hiperbólica cuando  $b = 1$ .

**Teorema 5.15** *La ecuación diferencial (5.16) con  $b = 1$ ,  $r > 0$ ,  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$  (resp.,  $t^- \geq 0$  y  $t^+ > 0$ ) posee una única solución periódica que es hiperbólica. Además, dicha solución periódica es asintóticamente estable (resp., inestable).*

**Demostración.** Para probar la existencia de soluciones periódicas estudiaremos los ceros de la función desplazamiento  $d(p) = P(p) - p$ .

Supongamos  $b = 1$ ,  $r > 0$ ,  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$ , entonces, según (5.20), para  $p \geq \max \{I^+(\theta)\}$  la función desplazamiento puede escribirse en la forma

$$d(p) = (e^{2\pi t^+} - 1)p - e^{2\pi t^+} I^+(2\pi),$$

por lo que  $d(p) < 0$ , para  $p$  suficientemente grande.

De forma análoga y utilizando (5.21), puede probarse que si  $p < 0$ , con  $|p|$  suficientemente grande, entonces  $d(p) > 0$ .

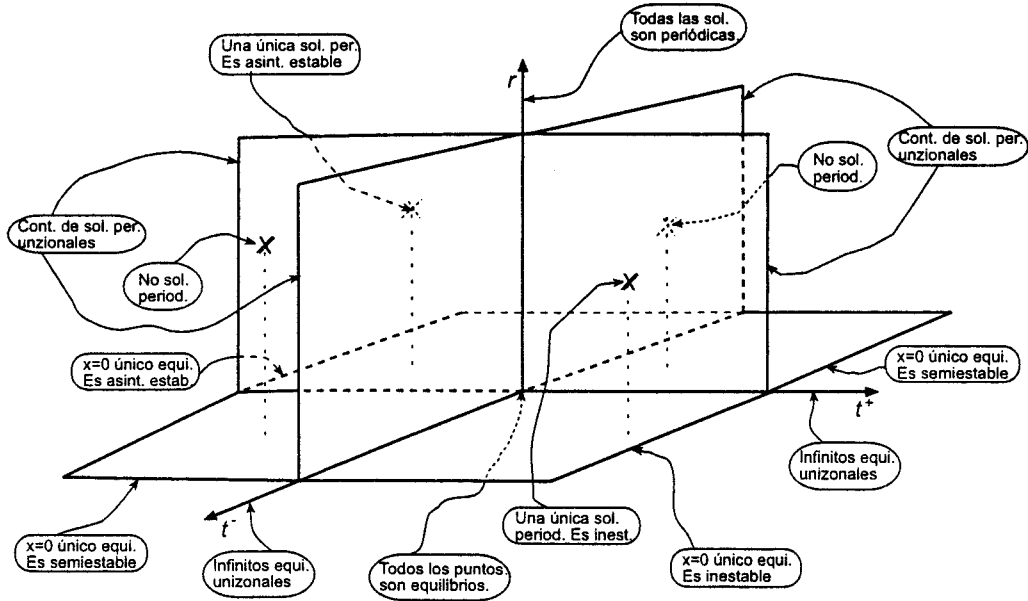


Figura 5.5: Conjunto de bifurcaciones de la ecuación (5.16) para  $b = 0$ .

Por consiguiente, aplicando el Teorema de Bolzano, existe al menos un valor  $p_0 \in \mathbb{R}$  de forma que  $d(p_0) = 0$ , es decir,  $p_0$  es un punto fijo de  $P$  (véase la Figura 5.6).

A continuación estudiamos la estabilidad de los puntos fijos  $\bar{p}$  de  $P$  a partir de la derivada de la aplicación de Poincaré en  $p = \bar{p}$  (véase (5.22))

$$P'(\bar{p}) = e^{\nu(\bar{p})}, \quad \text{donde } \nu(\bar{p}) = t^+ \tau^+ + t^- (2\pi - \tau^+). \quad (5.30)$$

Para  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$ , la función  $\nu(\bar{p})$  se anula si y sólo si  $t^+ = 0$  y  $\tau^+ = 2\pi$ , es decir, cuando  $\varphi(\theta, 0, \bar{p}) \geq 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En este caso,  $P(\bar{p}) = \bar{p} - 2\pi$  y por tanto,  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  no puede ser una solución periódica de la ecuación (5.16).

En consecuencia, para  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$  se tiene que  $\nu(\bar{p}) < 0$  para toda solución periódica  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  de la ecuación diferencial (5.16).

Luego, de acuerdo con (5.30), tenemos  $0 < P'(\bar{p}) < 1$  para toda solución periódica  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  de la ecuación (5.16), lo que nos indica que todos los puntos



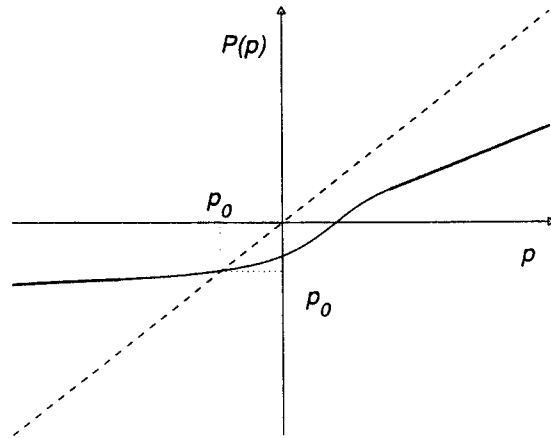


Figura 5.6: Aplicación de Poincaré  $P$  para  $b = 1$ ,  $r > 0$ ,  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$ .

fijos de  $P$  son hiperbólicos y asintóticamente estables.

Puesto que la aplicación de Poincaré  $P$  no puede tener dos puntos fijos consecutivos estables, concluimos que  $\varphi(\theta, 0, p_0)$  es la única solución periódica de la ecuación diferencial (5.16) y además, es asintóticamente estable.

Las propiedades de simetría (5.29) permiten reducir el caso  $t^+ > 0$  y  $t^- \geq 0$  a la anterior situación, donde debe tenerse en cuenta que la inestabilidad de la solución periódica está causada por el cambio de signo de  $\theta$  en (5.29). ■

### 5.3.4 Reversibilidad en la Ecuación Reducida

Presentamos ahora el caso  $t^+ = -t^-$ , en el que la ecuación diferencial (5.16) es reversible. La ecuación (5.16) presenta en este caso ciertas similitudes con una ecuación de Ricatti con coeficiente periódico en el término independiente (véase [29] y [49]).

Antes ofrecemos algunas consecuencias que se deducen de esta situación particular.

En primer lugar, notemos que si  $t^+ = -t^-$  y  $\varphi(\theta, \theta_0, p)$  es solución de la

ecuación (5.16), entonces es fácil ver que  $\varphi(2\pi - \theta, \theta_0, -\varphi(2\pi - \theta_0, \theta_0, p))$  es también solución de (5.16), verificándose la relación

$$\varphi(2\pi - \theta, \theta_0, -\varphi(2\pi - \theta_0, \theta_0, p)) = -\varphi(\theta, \theta_0, p) \quad \forall \theta, \theta_0, p \in \mathbb{R}, \quad (5.31)$$

lo que significa que la ecuación (5.16) es reversible.

Esta igualdad permite establecer algunas propiedades de la aplicación de Poincaré  $P$  asociada a (5.16) cuando  $t^+ = -t^-$ .

**Lema 5.16** *Consideremos la ecuación (5.16) con  $t^+ = -t^- > 0$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *La gráfica de la aplicación de Poincaré  $P$  es simétrica respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, es decir,*

$$P(-P(p)) = -p \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}. \quad (5.32)$$

2. *Existe un único punto de corte  $\hat{p}$  de la gráfica de  $P$  con la bisectriz del segundo cuadrante, es decir,  $\hat{p}$  es el único valor que verifica  $P(\hat{p}) = -\hat{p}$ . Más aún,  $\hat{p}$  es el único punto donde la derivada de  $P$  es igual a la unidad.*
3. *Si  $\bar{p}$  es un punto fijo de  $P$ , entonces  $-\bar{p}$  es también punto fijo de  $P$ .*

### **Demostración.**

1. Tomando  $\theta = \theta_0 = 0$  en (5.31), obtenemos directamente (5.32).
2. Eligiendo  $\theta = p = 0$  y  $\theta_0 = \pi$  en (5.31) obtenemos que

$$\varphi(2\pi, \pi, 0) = -\varphi(0, \pi, 0)$$

y por consiguiente, tomando  $\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0)$ , sigue que  $P(\hat{p}) = -\hat{p}$  y del crecimiento de  $P$  y su simetría tenemos que  $\hat{p}$  es el único punto que satisface la igualdad anterior.

Derivando ambos miembros de (5.32) tenemos  $P'(-P(p))P'(p) = 1$  para todo  $p$  real y, tomando  $p = \hat{p}$ , se obtiene  $P'(\hat{p}) = 1$ . Además, de la Proposición 5.13 se deduce que  $P'$  es creciente en  $p$  y puede establecerse con facilidad que  $\hat{p}$  es el único valor real donde la derivada de  $P$  es igual a la unidad.

3. Si  $\bar{p}$  verifica  $P(\bar{p}) = \bar{p}$ , entonces, a partir de (5.32), es inmediato obtener que  $P(-\bar{p}) = -\bar{p}$ . ■

En el siguiente resultado analizamos la situación  $t^+ = -t^- > 0$  y  $b = 1$  y mostramos que la ecuación diferencial (5.16) presenta una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas para un cierto valor del parámetro  $r$ .

**Teorema 5.17** *Consideremos la ecuación diferencial (5.16) con  $t^+ = t > 0$ ,  $t^- = -t$ ,  $b = 1$  y definamos*

$$\hat{r} = \frac{1+t^2}{t^2} \tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

*Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si  $0 < r < \hat{r}$ , entonces la ecuación diferencial (5.16) posee sólo dos soluciones periódicas que además son hiperbólicas, una asintóticamente estable y la otra inestable.*
2. *Si  $r = \hat{r}$ , entonces la ecuación diferencial (5.16) posee una única solución periódica, que además es no hiperbólica y semiestable.*
3. *Si  $r > \hat{r}$ , entonces la ecuación (5.16) no posee soluciones periódicas.*

**Demostración.** En primer lugar, probaremos que la aplicación de Poincaré  $P$  posee a lo sumo dos puntos fijos.

Si suponemos que  $\bar{p} \neq 0$  es un punto fijo de  $P$ , entonces del Lema 5.16 se deduce que  $-\bar{p}$  es también punto fijo de  $P$ .

La simetría de la aplicación de Poincaré  $P$  (ver (5.32)) nos indica que los puntos fijos verifican  $-|\bar{p}| < \hat{p} < |\bar{p}|$ , siendo  $\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0)$ .

Luego, utilizando que  $P''(p) \geq 0$  y  $\hat{p}$  es el único punto donde la derivada de  $P$  es la unidad, se tiene que  $P'(-|\bar{p}|) < 1 < P'(|\bar{p}|)$ .

Por consiguiente, la solución periódica  $\varphi(\theta, 0, -|\bar{p}|)$  es asintóticamente estable, la solución periódica  $\varphi(\theta, 0, |\bar{p}|)$  es inestable y ambas son hiperbólicas.

Por otro lado, la monotonía de  $P'$  impide la existencia de más puntos fijos para la aplicación de Poincaré  $P$ , luego  $\varphi(\theta, 0, -|\bar{p}|)$  y  $\varphi(\theta, 0, |\bar{p}|)$  son las únicas soluciones periódicas de la ecuación (5.16).

Ahora estudiamos la existencia de puntos fijos en la aplicación de Poincaré  $P$  según el signo de  $\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0)$ . Más adelante relacionaremos el signo de  $\hat{p}$  con el valor del parámetro  $r$ .

Si  $b = 1$  y  $t^+ = -t^- > 0$ , entonces, a partir de la expresión (5.20), se deduce que  $P(p) > p$  si  $p > 0$  es suficientemente grande. De esta forma, utilizando que  $P''(p) \geq 0$  (ver Proposición 5.13), podemos distinguir los siguientes casos:

- (a) Si  $\hat{p} > 0$ , entonces  $P(\hat{p}) = -\hat{p} < 0 < \hat{p}$  y, aplicando el Teorema de Bolzano a la función desplazamiento  $d(p) = P(p) - p$ , se deduce que existe un valor  $\bar{p} > 0$  de forma que  $P(\bar{p}) = \bar{p}$ , por lo que  $P$  posee dos puntos fijos hiperbólicos (ver Figura 5.7).
- (b) Si  $\hat{p} = 0$ , entonces  $\bar{p} = 0$  es el único punto fijo de  $P$ , además  $P'(0) = 1$  y por tanto,  $\varphi(\theta, 0, 0)$  es no hiperbólica y semiestable (ver Figura 5.8).
- (c) Si  $\hat{p} < 0$ , entonces la aplicación  $P$  no posee puntos fijos (ver Figura 5.9).

Ahora, haciendo uso del Lema 5.10, establecemos la relación existente entre el valor del parámetro  $r$  y el signo de  $\hat{p}$ , esto es, entre el valor de  $r$  y la existencia de órbitas periódicas en la ecuación (5.16).

Si  $\hat{p} < 0$ , de acuerdo con el Lema 5.10, se tiene que  $\varphi(\theta, \pi, 0) < 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi)$ . Por consiguiente, haciendo uso de (5.18), sigue que

$$\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0) = e^{-t\pi} \int_0^\pi e^{t(s-\pi)} (1 + r \cos s) ds < 0$$

y tras un cálculo sencillo obtenemos que

$$r > \hat{r} = \frac{1 + t^2}{t^2} \tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right) > 1$$

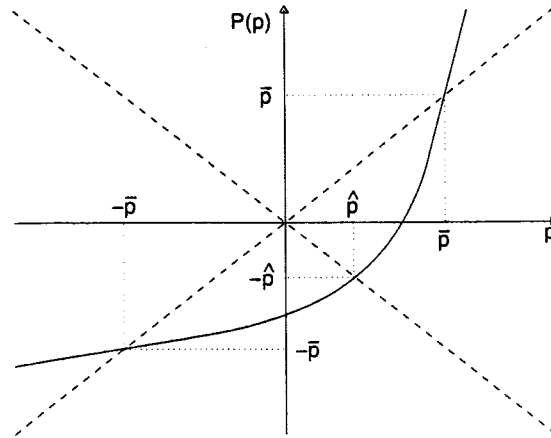


Figura 5.7: Aplicación de Poincaré  $P$  para  $b = 1$ ,  $t^+ = -t^- > 0$  y  $0 < r < \hat{r}$ .

y la ecuación diferencial (5.16) no posee soluciones periódicas.

Análogamente, si  $\hat{p} = 0$ , entonces  $\varphi(\theta, \pi, 0) \leq 0$  para todo  $\theta \in (0, \pi]$ . Así, la relación

$$\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0) = e^{-t\pi} \int_0^\pi e^{t(s-\pi)} (1 + r \cos s) ds = 0$$

nos conduce a la igualdad  $r = \hat{r}$  y la ecuación (5.16) posee una única solución periódica, que además es no hiperbólica y semiestable.

Por último, si  $\hat{p} > 0$ , entonces  $\varphi(\theta, 0, 0) < 0$  para todo  $\theta \in (0, \pi]$ , de donde, utilizando de nuevo (5.18) tenemos

$$\varphi(\pi, 0, 0) = -e^{-t\pi} \int_0^\pi e^{ts} (1 + r \cos s) ds < 0,$$

lo que nos conduce a la relación  $0 < r < \hat{r}$  y la ecuación (5.16) tiene dos soluciones periódicas. ■

**Nota 5.18** Bajo las hipótesis del Teorema 5.17, si  $r > \hat{r}$  (es decir, si  $\hat{p} < 0$ ), entonces la aplicación  $P$  satisface  $P(p) > p$  para todo  $p$  real (ver Figura 5.9).

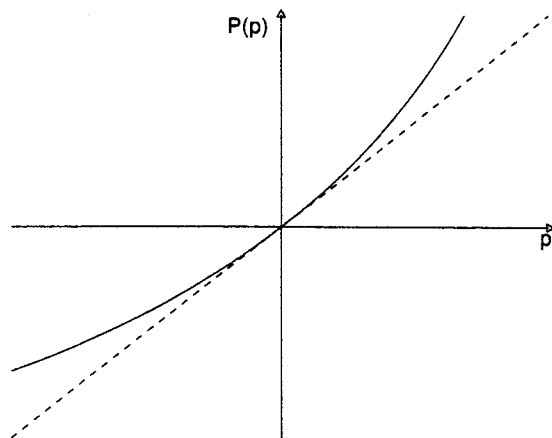


Figura 5.8: Aplicación de Poincaré  $P$  para  $b = 1$ ,  $t^+ = -t^- > 0$  y  $r = \hat{r}$ .

### 5.3.5 Bifurcación Silla-Nodo de Órbitas Periódicas en la Ecuación Reducida

A continuación extendemos el Teorema 5.17 a la situación general  $t^+ > 0$  y  $t^- < 0$ . Esta extensión permitirá deducir la existencia de una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas en la ecuación reducida (5.16) para  $b = 1$ . Más adelante, probaremos su unicidad.

El siguiente resultado, que establece, en cierta medida, la monotonía de las soluciones de la ecuación diferencial (5.16) respecto de los parámetros  $t^+$  y  $t^-$ , resultará de utilidad en lo que sigue.

**Lema 5.19** Sean  $x(\theta)$  e  $y(\theta)$  las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = mx - b - r \cos \theta, \\ x(\theta_1) = p, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dy}{d\theta} = ny - b - r \cos \theta, \\ y(\theta_1) = p, \end{cases}$$

donde,  $m, n, \theta_1$  y  $p$  son números reales.

Si  $m < n$  y existe  $\theta_2 > \theta_1$  de forma que  $y(\theta) < 0$  para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , entonces  $y(\theta) < x(\theta)$  para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

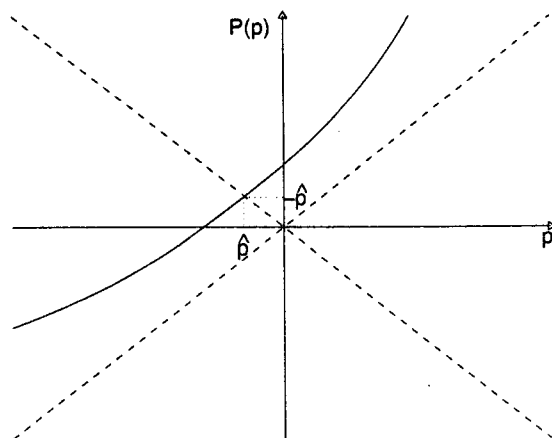


Figura 5.9: Aplicación de Poincaré  $P$  para  $b = 1$ ,  $t^+ = -t^- > 0$  y  $r > \hat{r}$ .

**Demostración.** La función  $z = x - y$  satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = mz + (m - n)y(\theta), \\ z(\theta_1) = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Por tanto, si  $y(\theta) < 0$  para todo  $\theta$  en el intervalo  $(\theta_1, \theta_2)$  y  $m < n$ , resulta, resolviendo el problema el problema de valores iniciales (5.33), que

$$z(\theta) = (m - n) e^{m(\theta - \theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta} e^{m(\theta_1 - s)} y(s) ds > 0 \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

es decir,  $x(\theta) > y(\theta)$  para  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . ■

El significado geométrico del Lema 5.19 se muestra en la Figura 5.10.

Seguidamente, enunciaremos la extensión del Teorema 5.17 a la situación  $b = 1$ ,  $t^+ > 0$  y  $t^- < 0$ .

**Teorema 5.20** Consideremos la ecuación diferencial lineal a trozos (5.16) con  $t^+ > 0$ ,  $t^- < 0$ ,  $|t^-| > t^+$ ,  $b = 1$  y definamos

$$r_c^- = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}}, \quad r^+ = \frac{1 + (t^+)^2}{(t^+)^2} \tanh\left(\frac{\pi t^+}{2}\right),$$

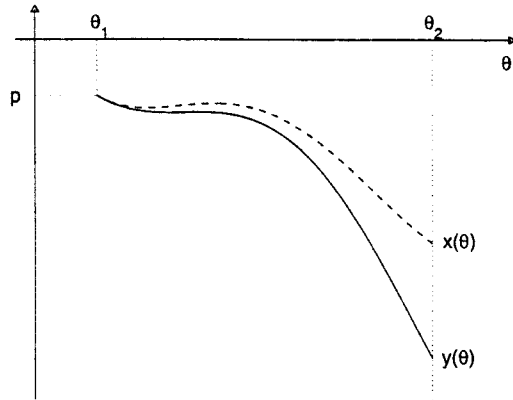


Figura 5.10: Interpretación geométrica del Lema 5.19.

$$p^+ = \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} \quad y \quad p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2}.$$

Entonces, se satisfacen las siguiente propiedades:

1. Si  $0 < r \leq r_c^-$ , entonces la ecuación diferencial (5.16) posee exactamente dos soluciones periódicas  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  y  $\varphi(\theta, 0, p^-)$ . Además, dichas soluciones periódicas son unizonales e hiperbólicas, siendo  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  una solución inestable y  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$  asintóticamente estable.
2. Si  $r > r^+$ , entonces la ecuación (5.16) no posee soluciones periódicas.

**Demostración.** En primer lugar, determinamos las condiciones que aseguran la existencia de soluciones periódicas unizonales en la ecuación (5.16).

Consideremos la ecuación diferencial lineal no autónoma  $2\pi$ -periódica

$$\frac{dx}{d\theta} = t^+x - 1 - r \cos \theta. \quad (5.34)$$

Es fácil comprobar que la ecuación diferencial (5.34), para  $r > 0$  y  $t^+ \neq 0$ , posee una única solución periódica (ver [29]). Además, de acuerdo con (5.20),



puede establecerse con facilidad que dicha solución periódica tiene por condición inicial

$$x(0) = p^+ = \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2}.$$

Denotaremos mediante  $\varphi^+(\theta, 0, p^+)$  a esta solución periódica.

De forma análoga, la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{d\theta} = t^-x - 1 - r \cos \theta, \quad (5.35)$$

posee una única solución periódica, que viene definida por la condición inicial

$$x(0) = p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2}$$

y que será denotada por  $\varphi^-(\theta, 0, p^-)$ .

Naturalmente, la función  $\varphi^+(\theta, 0, p^+)$  (resp.,  $\varphi^-(\theta, 0, p^-)$ ) es solución periódica de la ecuación diferencial lineal a trozos (5.16) si se verifica la desigualdad  $\varphi^+(\theta, 0, p^+) \geq 0$  (resp.  $\varphi^-(\theta, 0, p^-) \leq 0$ ) para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Para establecer los valores del parámetro real  $r > 0$  que verifican la condición anterior, determinamos el valor  $r = r_c^+$  (resp.,  $r = r_c^-$ ) para el que la solución periódica  $\varphi^+(\theta, 0, p^+)$  (resp.,  $\varphi^-(\theta, 0, p^-)$ ) es tangente al segmento  $S = \{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, x = 0\}$ .

De acuerdo con el Lema 5.10, la solución  $\varphi^+(\theta, 0, p^+)$  es tangente a  $S$  cuando  $\theta = \hat{\theta}_1 = \arccos(-1/r_c^+)$ , por lo que de (5.18) se sigue que

$$\varphi^+(\hat{\theta}_1, 0, p^+) = e^{t^+\hat{\theta}_1} \left[ p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+s} (1 + r_c^+ \cos s) ds \right] = 0$$

y, tras algunos cálculos directos, obtenemos

$$r_c^+ = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}}.$$

Análogamente, puede probarse que la condición  $\varphi^-(\hat{\theta}_2, 0, p^-) = 0$  implica

$$r_c^- = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}}.$$

Así, considerando  $0 < t^+ < |t^-|$  se tiene que  $r_c^- < r_c^+$  y por consiguiente,  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$  son soluciones periódicas unizonales de la ecuación (5.16) para  $0 < r \leq r_c^-$ .

Además, de la Proposición 5.12 obtenemos

$$P'(p^+) = \exp(2\pi t^+) > 1 \quad \text{y} \quad P'(p^-) = \exp(2\pi t^-) < 1,$$

por lo que  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  es inestable,  $\varphi(\theta, 0, p^-)$  es asintóticamente estable y ambas son hiperbólicas.

Para finalizar la demostración del primer apartado, téngase en cuenta que la propiedad  $P''(p) \geq 0$  impide la existencia de más soluciones periódicas en la ecuación (5.16).

Para demostrar el segundo apartado, probaremos que  $P(p) > p$  para todos los valores  $p$  candidatos a ser puntos fijos de la aplicación de Poincaré  $P$ .

Consideremos la ecuación diferencial reversible

$$\frac{dx}{d\theta} = t_R^\nabla x - 1 - r \cos \theta, \quad (5.36)$$

donde  $t_R^+ = t^+$  y  $t_R^- = -t^+$  y denotemos mediante  $P_R$  a la aplicación de Poincaré asociada a la ecuación (5.36).

Si  $p > 0$  verifica  $\varphi(\theta, 0, p) \geq 0$  para todo  $\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , entonces  $P(p) = P_R(p)$ . De esta forma, si

$$r > r^+ = \frac{1 + (t^+)^2}{(t^+)^2} \tanh\left(\frac{\pi t^+}{2}\right)$$

tenemos, de acuerdo con Teorema 5.17 y la Nota 5.18,  $P_R(p) > p$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ , de donde, la ecuación diferencial (5.16) no puede tener soluciones periódicas unizonales positivas.

Así, si  $p > 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p)$  es periódica, entonces  $\varphi(\theta, 0, p)$  debe cambiar de signo en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y según la Nota 5.11,  $\varphi(\theta, 0, p)$  debe intersectar al segmento  $S$  transversalmente en dos puntos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , verificando:

- $\varphi(\theta, 0, p) > 0$  para todo  $\theta \in [0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi]$ .

- $\varphi(\theta_1, 0, p) = \varphi(\theta_2, 0, p) = 0$ .
- $\varphi(\theta, 0, p) < 0$  para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

Denotando mediante  $\varphi_R(\theta, 0, p)$  la solución de la ecuación reversible (5.36) que posee la condición inicial  $x(0) = p$ , se tiene que  $\varphi_R(\theta, 0, p) = \varphi(\theta, 0, p)$  para todo  $\theta \in [0, \theta_1]$ .

Además, tomando  $r > r^+$ , se sabe de la Nota 5.18 que  $P_R(p) > p > 0$  y, por tanto, se deduce que existe un valor  $\theta_{2R}$  en el intervalo  $(\theta_1, 2\pi)$  de forma que

- $\varphi_R(\theta_{2R}, 0, p) = 0$ .
- $\varphi_R(\theta, 0, p) < 0$  para  $\theta \in (\theta_1, \theta_{2R})$ .
- $\varphi_R(\theta, 0, p) > 0$  para todo  $\theta \in (\theta_{2R}, 2\pi]$ .

De esta manera, si  $t^+ < |t^-| = -t^-$ , entonces, aplicando el Lema 5.19 a las funciones  $\varphi(\theta, 0, p)$  y  $\varphi_R(\theta, 0, p)$ , se deduce que

$$\varphi(\theta, 0, p) > \varphi_R(\theta, 0, p) \quad \text{si } \theta_1 < \theta < \min\{\theta_2, \theta_{2R}\},$$

lo que implica que  $\theta_{2R} > \theta_2$  (véase la Figura 5.11).

Ahora, de la unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales asociado a (5.16) sigue que  $P(p) > P_R(p) > p$  cuando  $r > r^+$  y la ecuación diferencial (5.16) no posee soluciones periódicas  $\varphi(\theta, 0, p)$  con  $p > 0$ .

Si  $t^+ < |t^-| = -t^-$ ,  $p \leq 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p) \leq 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , entonces de acuerdo con el Lema 5.19, tenemos que

$$0 \geq \varphi(\theta, 0, p) \geq \varphi_R(\theta, 0, p) \quad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi]$$

y si  $r > r^+$ , entonces  $P(p) \geq P_R(p) > p$  y la ecuación (5.16) no puede tener soluciones periódicas unizonales negativas.

Por tanto, si  $p \leq 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p)$  es periódica, entonces  $\varphi(\theta, 0, p)$  debe cambiar de signo en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Ahora distinguimos los casos  $p < 0$  y  $p = 0$ .

Si  $p < 0$  y  $\varphi(\theta, 0, p)$  es periódica, entonces  $\varphi(\theta, 0, p)$  debe intersectar transversalmente al segmento  $S$  en dos puntos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , verificando:

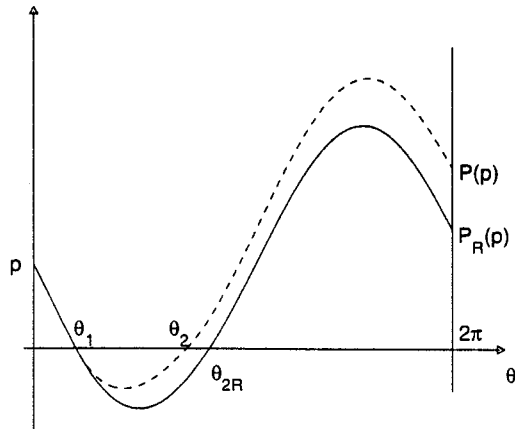


Figura 5.11: Comparación entre las soluciones  $\varphi(\theta, 0, p)$  y  $\varphi_R(\theta, 0, p)$ .

- $\varphi(\theta, 0, p) < 0$  para todo  $\theta \in [0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi]$ .
- $\varphi(\theta_1, 0, p) = \varphi(\theta_2, 0, p) = 0$ .
- $\varphi(\theta, 0, p) > 0$  para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

Por otra parte, la función  $\varphi_R(\theta, 0, p)$  puede intersectar o no al segmento  $S$ .

- Si  $\varphi_R(\theta, 0, p)$  no interseca al segmento  $S$ , entonces  $\varphi_R(\theta, 0, p) < 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  y aplicando el Lema 5.19 deducimos que

$$\varphi(\theta, 0, p) > \varphi_R(\theta, 0, p) \quad \text{para todo } \theta \in (0, 2\pi]$$

y por tanto, si  $r > r^+$ , entonces  $P(p) > P_R(p) > p$ .

- Si  $\varphi_R(\theta, 0, p)$  interseca al segmento  $S$  en un punto  $\theta_{1R}$  con  $\varphi_R(\theta, 0, p) < 0$  para todo  $\theta$  en el intervalo  $[0, \theta_{1R})$ , entonces, aplicando el Lema 5.19, obtenemos que

$$\varphi(\theta, 0, p) > \varphi_R(\theta, 0, p) \quad \text{para todo } \theta \in (0, \min\{\theta_1, \theta_{1R}\})$$

y por consiguiente,  $\theta_1 < \theta_{1R}$ .

De este modo, haciendo uso de nuevo del Lema 5.19 y de la unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales asociado a (5.16), obtenemos que  $P(p) > P_R(p)$ , por lo que, si  $r > r^+$ , tenemos  $P(p) > p$ .

Un razonamiento análogo permite probar que  $P(0) > 0$  y, en resumen, la ecuación diferencial (5.16) no posee soluciones periódicas para  $r > r^+$ . ■

El Teorema 5.20 posee un resultado dual que enunciamos sin prueba.

**Teorema 5.21** *Consideremos la ecuación diferencial lineal a trozos (5.16) con  $t^+ > 0$ ,  $t^- < 0$ ,  $|t^-| < t^+$ ,  $b = 1$  y definamos*

$$r_c^+ = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}}, \quad r^- = \frac{1 + (t^-)^2}{(t^-)^2} \tanh\left(\frac{\pi |t^-|}{2}\right),$$

$$p^+ = \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} \quad y \quad p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2}.$$

*Se satisfacen las siguiente propiedades:*

1. *Si  $0 < r \leq r_c^+$ , entonces la ecuación diferencial (5.16) posee exactamente dos soluciones periódicas  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  y  $\varphi(\theta, 0, p^-)$ . Además, dichas soluciones periódicas son unizonales, siendo  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  inestable y  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$  asintóticamente estable.*
2. *Si  $r > r^-$ , entonces la ecuación diferencial (5.16) no posee soluciones periódicas.*

Como hemos comentado anteriormente, bajo las hipótesis del Teorema 5.17 la ecuación diferencial (5.16) es reversible y presenta una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas para el valor  $r = \hat{r}$ .

Del mismo modo, satisfaciéndose las hipótesis de los Teoremas 5.20 o 5.21 debe existir al menos un valor  $\tilde{r} > 0$ , dependiente de  $t^+$  y  $t^-$ , de forma que la ecuación diferencial (5.16) presente una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas para  $r = \tilde{r}$ . El siguiente resultado establece la unicidad del valor  $\tilde{r}$  y

completa el análisis de la ecuación unidimensional (5.16). Este resultado viene a confirmar que los resultados probados en [40] para funciones suficientemente diferenciables y los demostrados en [43] para funciones estrictamente convexas se extienden a la ecuación reducida (5.16).

**Teorema 5.22** *Consideremos la ecuación unidimensional (5.16) con  $t^+ > 0$ ,  $t^- < 0$  y  $b = 1$ . Existe un único valor  $\tilde{r} = \tilde{r}(t^+, t^-) > 0$  de forma que:*

1. *Si  $0 < r < \tilde{r}$ , entonces la ecuación (5.16) posee exactamente dos soluciones periódicas. Además, dichas soluciones periódicas son hiperbólicas, una de las cuales es asintóticamente estable y la otra inestable.*
2. *Si  $r = \tilde{r}$ , entonces la ecuación (5.16) posee una única solución periódica y dicha solución periódica es semiestable.*
3. *Si  $r > \tilde{r}$ , entonces la ecuación (5.16) no posee soluciones periódicas.*

**Demostración.** La existencia de la bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas está garantizada a partir de los Teoremas 5.20 y 5.21 (y el Teorema 5.17 donde también se prueba la unicidad).

A continuación probamos su unicidad. Si para  $r = \tilde{r}(t^+, t^-)$  la ecuación diferencial reducida (5.16) presenta una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas, entonces la aplicación de Poincaré posee un único punto fijo  $\bar{p}$  y además  $P'(\bar{p}) = 1$ . Es decir, la ecuación (5.16) posee una única solución periódica  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  y es no hiperbólica.

Por otro lado, puesto que la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{d\theta} = tx - 1 - r \cos \theta$$

posee una única solución periódica para  $t \neq 0$  y  $r > 0$  y es hiperbólica, se deduce que la solución periódica  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  de (5.16) debe ser bizonal.

Así, utilizando la Nota 5.11, deben existir dos valores  $\bar{\theta}_1 \in (0, 2\pi)$  y  $\bar{\theta}_2 \in \mathbb{R}$ , con  $\bar{\theta}_2 > \bar{\theta}_1$ , de forma que la función  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  se anule para  $\theta = \bar{\theta}_1$  y  $\theta = \bar{\theta}_2$  y verifique (ver Figura 5.12):

- $\varphi(\theta, 0, \bar{p}) < 0$  para  $\theta \in (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ .
- $\varphi(\theta, 0, \bar{p}) > 0$  para  $\theta \in (\bar{\theta}_2, \bar{\theta}_1 + 2\pi)$ .

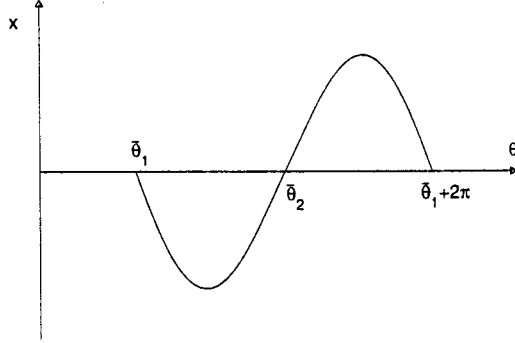


Figura 5.12: Una solución periódica para la ecuación (5.16).

Por consiguiente, haciendo uso de las expresiones (5.17) y (5.18), se deduce

$$\int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} e^{-t^-(s-\bar{\theta}_1)} ds + \tilde{r} \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} e^{-t^-(s-\bar{\theta}_1)} \cos s ds = 0, \quad (5.37)$$

$$\int_{\bar{\theta}_2}^{\bar{\theta}_1+2\pi} e^{-t^+(s-\bar{\theta}_2)} ds + \tilde{r} \int_{\bar{\theta}_2}^{\bar{\theta}_1+2\pi} e^{-t^+(s-\bar{\theta}_2)} \cos s ds = 0 \quad (5.38)$$

y utilizando que  $\varphi(\theta, 0, \bar{p})$  es no hiperbólica, se tiene, de acuerdo con la Proposición 5.12, que

$$t^-(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) + t^+(\bar{\theta}_1 + 2\pi - \bar{\theta}_2) = 0. \quad (5.39)$$

Si introducimos la notación  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1$ , entonces de (5.39) se deduce

$$\Delta\bar{\theta} = \frac{2\pi t^+}{t^+ - t^-} \quad (5.40)$$

y las expresiones (5.37) y (5.38) se convierten, respectivamente, en

$$\frac{1 - e^{-t^-\Delta\bar{\theta}}}{t^-} + \tilde{r} \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1+\Delta\bar{\theta}} e^{-t^-(s-\bar{\theta}_1)} \cos s ds = 0 \quad (5.41)$$

y

$$\frac{1 - e^{t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^+} + \tilde{r} \int_{\bar{\theta}_1 + \Delta \bar{\theta}}^{\bar{\theta}_1 + 2\pi} e^{-t^+(s - \bar{\theta}_1 - \Delta \bar{\theta})} \cos s ds = 0. \quad (5.42)$$

Consideremos ahora las funciones

$$I_1(\theta) = \int_{\theta}^{\theta + \Delta \bar{\theta}} e^{-t^-(s - \theta)} \cos s ds, \quad I_2(\theta) = \int_{\theta + \Delta \bar{\theta}}^{\theta + 2\pi} e^{-t^+(s - \theta - \Delta \bar{\theta})} \cos s ds.$$

Es fácil comprobar que las funciones  $I_1$  e  $I_2$  son  $2\pi$ -periódicas y pueden expresarse en la forma

$$I_1(\theta) = A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta, \quad I_2(\theta) = A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta,$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dependen de  $t^+$  y  $t^-$ .

Ahora, eliminando  $\tilde{r}$  entre (5.41) y (5.42) obtenemos la igualdad

$$\frac{1 - e^{-t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^-} I_2(\bar{\theta}_1) - \frac{1 - e^{t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^+} I_1(\bar{\theta}_1) = 0. \quad (5.43)$$

Por otro lado, la función

$$I(\theta) = \frac{1 - e^{-t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^-} I_1(\theta) - \frac{1 - e^{t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^+} I_2(\theta)$$

es  $2\pi$ -periódica y puede escribirse en la forma  $I(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta$ , siendo  $A$  y  $B$  dependientes de  $t^+$  y  $t^-$ .

Si  $B \neq 0$ , entonces la ecuación  $I(\theta) = 0$  posee exactamente dos soluciones distintas  $\theta_0 > \hat{\theta}_0$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , una de las cuales debe ser  $\bar{\theta}_1$  (véase (5.43)). Además,  $\theta_0 - \hat{\theta}_0 = \pi$ , por lo que  $I_1(\theta_0) = -I_1(\hat{\theta}_0)$ .

Si  $B = 0$ , entonces la única solución de  $I(\theta) = 0$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$  es  $\theta_0 = \pi$ , por lo que  $\bar{\theta}_1 = \pi$  (véase de nuevo (5.43)).

Finalmente, a partir de (5.41), se tiene que

$$\tilde{r} = \left| \frac{e^{-t^- \Delta \bar{\theta}} - 1}{t^- I_1(\theta_0)} \right|$$

es el único valor de  $r > 0$  para el que la ecuación (5.16), con  $b = 1$ ,  $t^+ > 0$  y  $t^- < 0$ , presenta una única órbita periódica no hiperbólica y la conclusión sigue de los Teoremas 5.17, 5.20 y 5.21. ■



**Nota 5.23** Calculando las integrales que aparecen en la definición de las funciones  $I_1$  e  $I_2$  pueden obtenerse explícitamente los valores  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B$  en función de los parámetros  $t^+$  y  $t^-$ . De hecho, puede probarse con facilidad que  $B = 0$  si y sólo si  $t^+ = -t^-$ , es decir, si y sólo si la ecuación (5.16) es reversible (ver Teorema 5.17).

De esta forma, los valores  $\bar{\theta}_1$  y  $\tilde{r}$  pueden expresarse en función de los parámetros  $t^+$  y  $t^-$ . En concreto, después de algunos tediosos cálculos puede comprobarse que el valor de  $\tilde{r}$  viene dado por

$$\tilde{r} = \frac{1 - e^{-t^- \Delta \bar{\theta}}}{t^+ \cdot t^-} \sqrt{\frac{\left((t^+)^2 + 1\right) \left((t^-)^2 + 1\right) \left((t^+ + t^-)^2 + 1\right)}{2e^{-t^- \Delta \bar{\theta}} (\cosh(t^- \Delta \bar{\theta}) - \cos \Delta \bar{\theta})}} \quad (5.44)$$

Obsérvese que  $\tilde{r}$  es invariante bajo la transformación  $t^+ \rightarrow -t^-$ ,  $t^- \rightarrow -t^+$ . Dicha simetría es debida a la invariancia de la ecuación (5.16) mediante la transformación (5.29).

Si  $t^+ = -t^- > 0$ , entonces, de la igualdad (5.40), se tiene que  $\Delta \bar{\theta} = \pi$  y el valor de  $\tilde{r}$  dado en (5.44) para el que la ecuación diferencial (5.16) presenta la bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas coincide, naturalmente, con el valor  $\hat{r}$  establecido en el Teorema 5.17 para el caso reversible.

La Figura 5.13 muestra la superficie  $r = \tilde{r}(t^+, t^-)$  y el conjunto de bifurcaciones para la ecuación (5.16) cuando  $b = 1$ .

### 5.3.6 Conjunto de Bifurcaciones en el Sistema Tridimensional

El estudio realizado con anterioridad sobre la ecuación diferencial unidimensional (5.16) nos permitirá conocer el comportamiento dinámico del sistema tridimensional observable y no controlable (5.13).

Si para cada valor  $r \geq 0$  denotamos mediante  $\varphi_r(\theta, 0, x_0)$  la solución de la ecuación diferencial (5.16) con condición inicial  $x(0) = x_0$ , entonces la solución del sistema (5.13) con condición inicial

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, b + r \cos \theta_0, r \operatorname{sen} \theta_0), \quad \text{siendo } r \geq 0 \text{ y } \theta_0 \in [0, 2\pi),$$



- (b) Si  $t^+ = 0$  y  $t^- \neq 0$  (resp.,  $t^- = 0$  y  $t^+ \neq 0$ ), entonces todos los puntos de la semirrecta  $\{(\mu, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \mu \geq 0\}$  (resp.,  $\{(\mu, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \mu \leq 0\}$ ) son puntos de equilibrio para el sistema tridimensional (5.13). Tal sistema posee un continuo de conos invariantes unizonales y ningún cono invariante bizonal. Además, todas las soluciones contenidas en cada uno de los conos invariantes unizonales son periódicas.
- (c) Si  $t^+ \cdot t^- < 0$ , entonces el origen es el único punto de equilibrio del sistema (5.13). Además, dicho punto de equilibrio es inestable y el sistema tridimensional carece de conos invariantes.
- (d) Si  $t^+ \cdot t^- > 0$ , entonces el origen es el único punto de equilibrio del sistema tridimensional (5.13). Dicho sistema posee un único cono invariante, siendo éste bizonal, y todas las órbitas contenidas en el cono invariante bizonal son periódicas de periodo  $2\pi$ .

El estudio realizado en los cuatro apartados anteriores nos permite configurar el diagrama de bifurcaciones presentado en la Figura 5.14. Nótese que las líneas  $t^+ = 0$  y  $t^- = 0$  son rectas de bifurcaciones del sistema (5.13) en las que las estructuras de puntos de equilibrio y órbitas periódicas se ven modificadas.

2. Si  $b = 1$ , entonces el sistema tridimensional (5.13) es no homogéneo y cabe distinguir las siguientes situaciones:
- (a) Si  $t^+ \leq 0$  y  $t^- \geq 0$ , entonces el sistema (5.13) no posee puntos de equilibrio ni órbitas periódicas.
- (b) Si  $t^- < 0$  y  $t^+ \leq 0$  (resp.,  $t^- \geq 0$  y  $t^+ > 0$ ), entonces el sistema (5.13) posee un único punto de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/t^-, 1, 0)$ , (resp.,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/t^+, 1, 0)$ ) y un continuo no acotado de órbitas periódicas.
- (c) Si  $t^- < 0$  y  $t^+ > 0$ , entonces el sistema (5.13) posee exactamente dos puntos de equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/t^-, 1, 0)$  y  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) =$

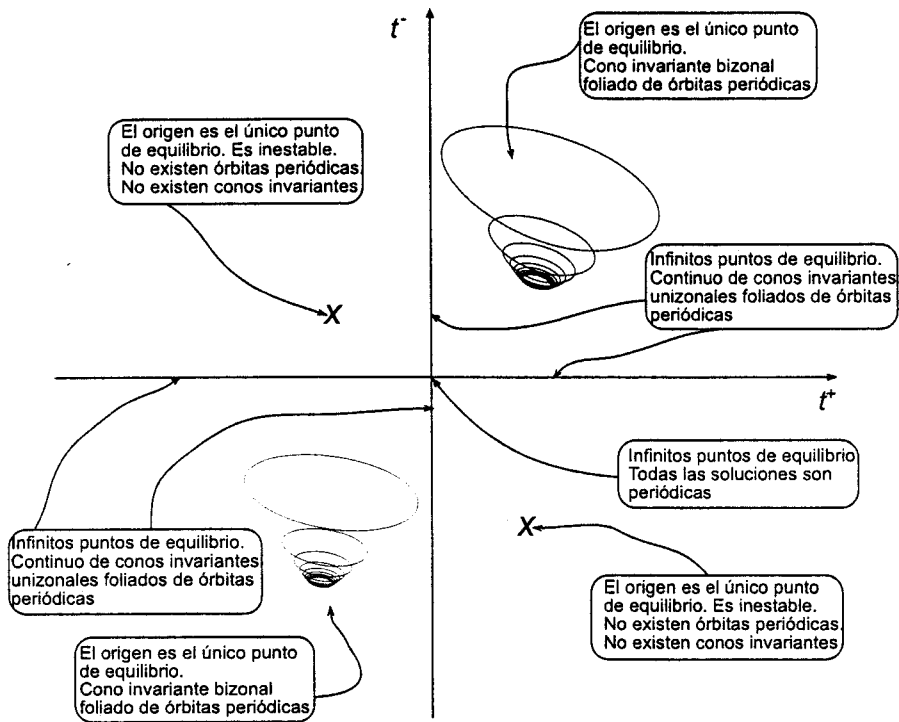


Figura 5.14: Conjunto de bifurcaciones del sistema (5.13) cuando  $b = 0$ .

$(1/t^+, 1, 0)$  y un continuo acotado de órbitas periódicas. Además, como puede comprobarse con facilidad, el sistema posee una conexión heteroclina de ecuación  $\{(x, 1, 0) : 1/t^- < x < 1/t^+\}$  que une los dos puntos de equilibrio del sistema.

A partir de los razonamientos anteriores construimos el diagrama de bifurcaciones recogido en la Figura 5.15. Al igual que sucedía para la situación  $b = 0$ , las líneas  $t^+ = 0$  y  $t^- = 0$  son rectas de bifurcaciones del sistema (5.13) para  $b = 1$ . En éstas, los puntos de equilibrio se desplazan hacia el infinito desapareciendo y la estructura de órbitas periódicas se ve modificada.

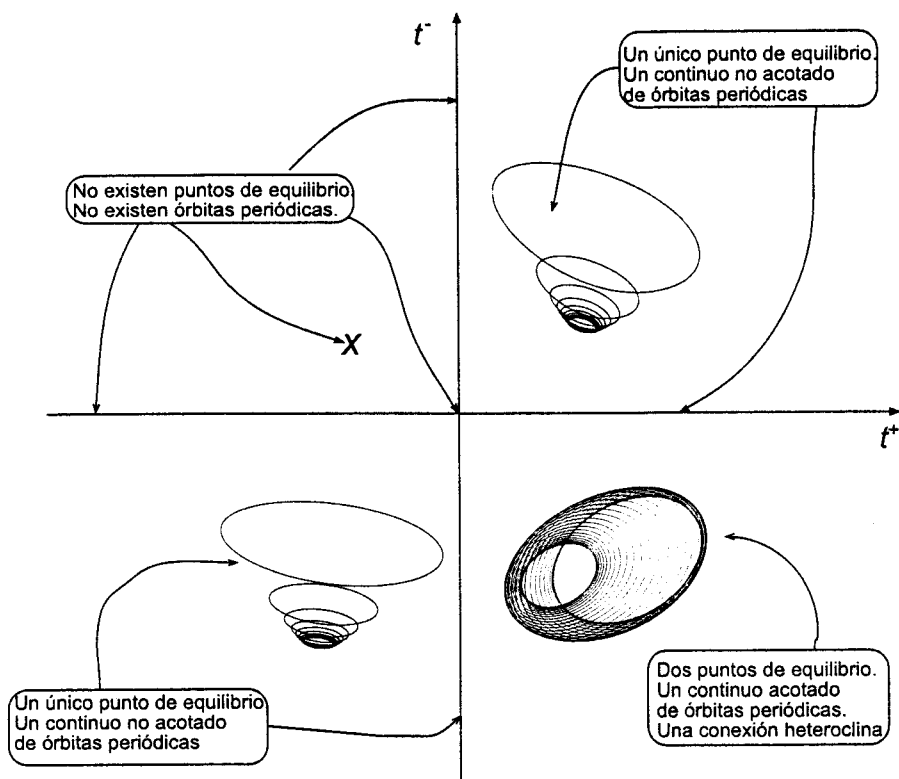


Figura 5.15: Conjunto de bifurcaciones del sistema (5.13) cuando  $b = 1$ .

## 5.4 Una simulación numérica

En este último apartado presentaremos con algunas simulaciones numéricas la riqueza y complejidad dinámica de un sistema lineal a trozos observable no homogéneo y controlable que consideramos como la perturbación de un sistema observable no controlable cuyas matrices poseen el par de autovalores complejos conjugados  $\pm i$ . Es decir, las matrices del sistema poseen autovalores complejos con partes reales próximas a cero y partes imaginarias próximas a la unidad.

De esta forma trabajaremos con la perturbación del sistema (5.13) escrita

en forma de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = (t^\nabla - \varepsilon_2) x - y, \\ \dot{y} = -\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y - z, \\ \dot{z} = \varepsilon_2 x + y - 1, \end{cases} \quad (5.45)$$

donde  $t^+ = -t^- > 0$  y  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ .

La simulación que llevaremos a cabo reflejará el comportamiento de la aplicación de Poincaré del sistema tomando como secciones de Poincaré los planos  $x = 0$  (plano de separación del sistema lineal a trozos (5.45)) e  $y = 1$  (un plano que contiene a los puntos de equilibrio del sistema cuando  $\varepsilon_2 = 0$ ). Nótese que el sistema (5.45) no posee divergencia nula.

Comenzamos suponiendo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , lo que significa que el sistema (5.45) coincide con el sistema (5.13) cuando  $b = 1$ , es no controlable, reversible, esto es, invariante mediante la transformación

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow -z, \quad t \rightarrow -t \quad (5.46)$$

y su comportamiento dinámico ha sido establecido en la Sección 5.3.6.

En la Figura 5.16 puede observarse el comportamiento de la aplicación de Poincaré sobre las secciones  $x = 0$  e  $y = 1$  para  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Sobre la sección  $y = 1$ , observamos los dos puntos de equilibrio  $A$  y  $A'$  del sistema (5.45), que se encuentran conectados por una órbita heteroclina. Observamos también la aparición dos segmentos paralelos ( $AL$  y  $A'L'$ ) de puntos fijos para la aplicación de Poincaré que se corresponden con dos continuos unizonales de órbitas periódicas del sistema (5.45). Estos continuos de órbitas periódicas están contenidos en cada uno de los semiplanos focales del sistema (5.45). Los puntos fijos  $L$  y  $L'$  se corresponden con las órbitas periódicas contenidas en los semiplanos focales que intersecan tangencialmente al plano de separación  $x = 0$ . La curva de puntos fijos  $LOL'$  para la aplicación de Poincaré se corresponde con órbitas periódicas bizonales del sistema (5.45). Todas las órbitas periódicas del sistema (5.45), salvo una, son semi-hiperbólicas (sólo uno de

sus multiplicadores característicos es 1). La órbita periódica, cuyo punto fijo correspondiente se ha señalado con la letra  $O$ , es completamente no hiperbólica (sus dos multiplicadores característicos son iguales a la unidad).

Nótese que sobre la sección  $x = 0$  sólo aparece la curva de puntos fijos correspondientes a órbitas periódicas bizonales. Obsérvese que los cilindros invariantes para este sistema (véase (5.14)) se visualizan como rectas invariantes en la sección  $y = 1$  y como trozos de circunferencias sobre el plano de separación  $x = 0$ .

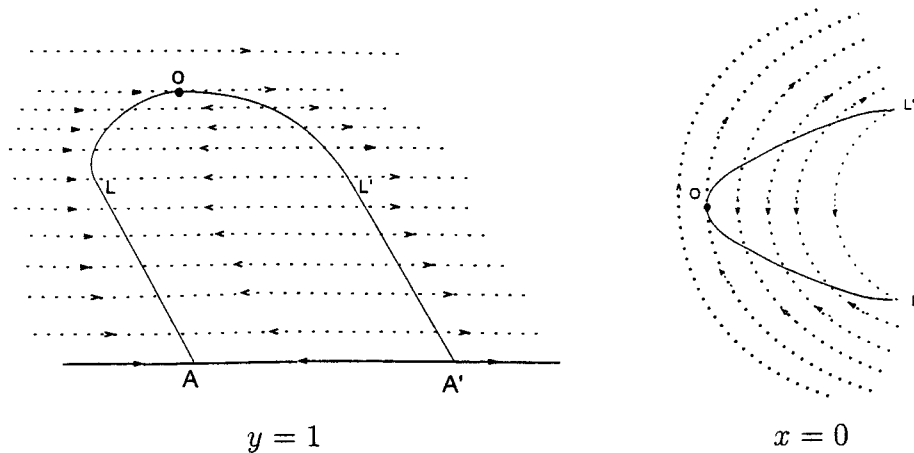


Figura 5.16: Secciones de Poincaré para (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ .

Ahora tomando  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.05$  y  $\varepsilon_2 = 0$ , el sistema (5.45) continua siendo reversible mediante (5.46), pero ahora es controlable (y observable). La simulación realizada para esta situación puede contemplarse en la Figura 5.17; vemos que, tras la perturbación, permanece la órbita periódica completamente no hiperbólica existente en el caso anterior, pero dicha órbita periódica es ahora elíptica. Las zonas marcadas con un rectángulo se han ampliado en la Figura 5.18. Aquí podemos contemplar la aparición de órbitas periódicas (de periodo alto) elípticas e hiperbólicas.

Ahora al aumentar el valor de  $\varepsilon_1$  podemos observar sin necesidad de ampliación las zonas de resonancia de la Figura 5.18. Las secciones de la Figura 5.19

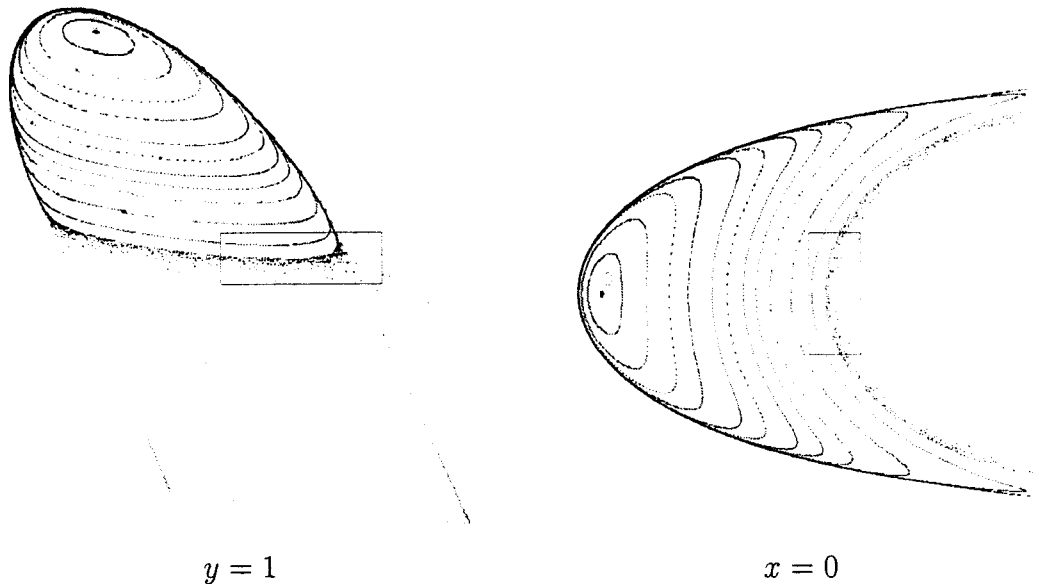


Figura 5.17: Secciones de Poincaré para (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

corresponden a simulaciones del sistema (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.3$  y  $\varepsilon_2 = 0$ .

Ampliando la zona enmarcada de la Figura 5.19 podemos observar en la Figura 5.20 la aparición de una órbita periódica de periodo aproximado  $21 \cdot 2\pi$  rodeada de un continuo de toros y de una órbita periódica de periodo aproximado  $7 \cdot 21 \cdot 2\pi$ . Contemplamos también la proyección en el plano  $xy$  de la órbita periódica de periodo aproximado  $21 \cdot 2\pi$ .

Si modificamos  $\varepsilon_1$ , tomando por ejemplo  $\varepsilon_1 = 0.5$  podemos observar de forma más nítida la aparición órbitas periódicas de periodo aproximado  $7 \cdot 2\pi$  y  $11 \cdot 2\pi$  (véase la Figura 5.21).

En último lugar, elegimos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$  no nulos, con lo que el sistema (5.45) es controlable, pero no es invariante mediante la transformación (5.46). En este caso contemplamos la permanencia de uno de los toros invariantes y la existencia de ciertas órbitas periódicas. En la Figura 5.22 podemos visualizar la simulación del sistema (5.45) para  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = -0.02$ , donde se



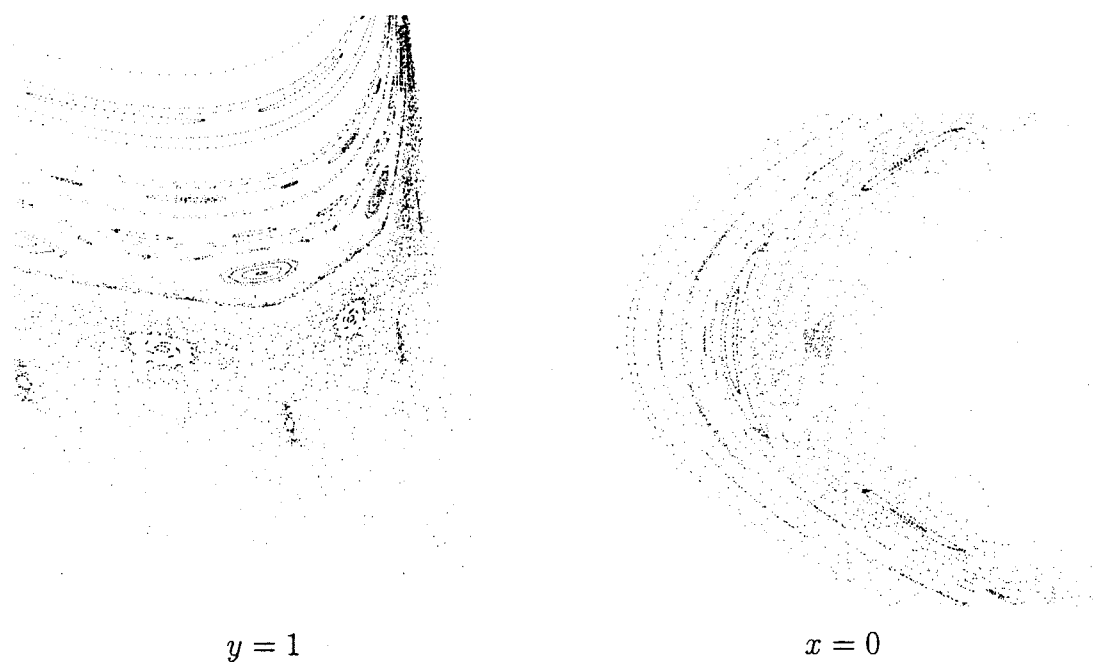


Figura 5.18: Ampliación de la Figura 5.17.

observa un toro invariante que rodea a un órbita periódica de periodo aproximado  $7 \cdot 2\pi$  y otra órbita periódica, de periodo aproximado  $11 \cdot 2\pi$ , exterior al toro invariante. En la Figura 5.23 se encuentran representadas las proyecciones de estas órbitas periódicas sobre el plano  $xy$ .

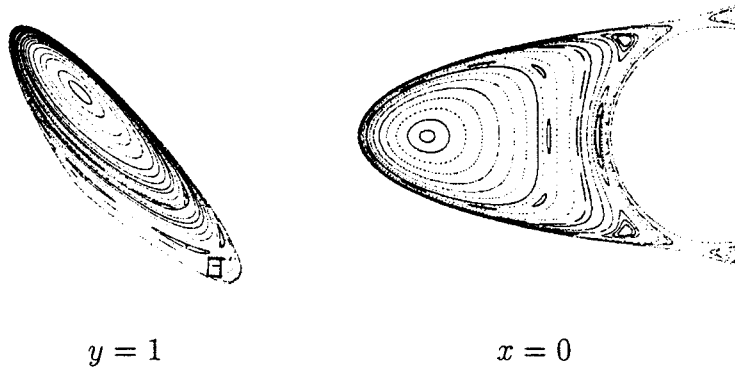


Figura 5.19: Secciones de Poincaré para (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.3$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

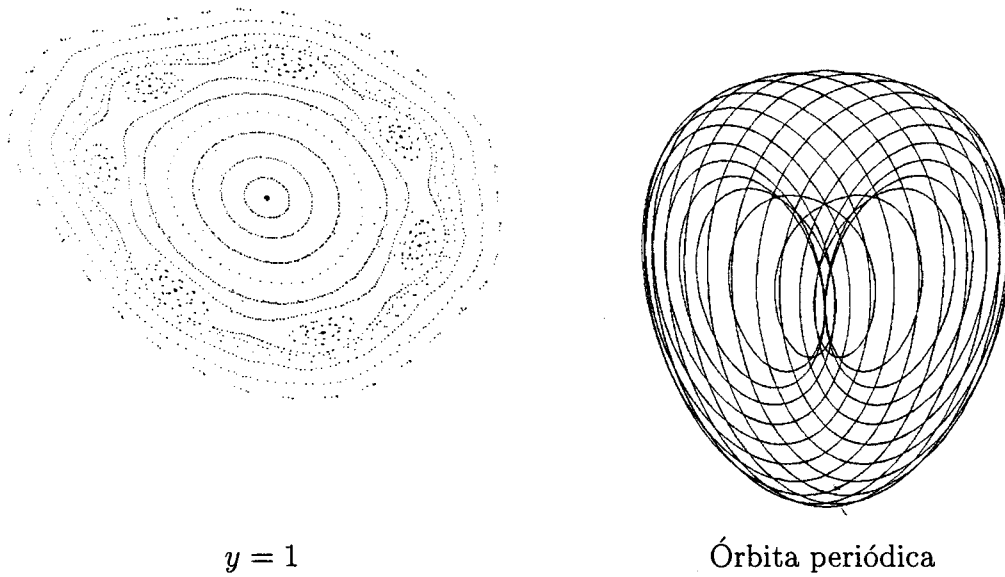


Figura 5.20: Ampliación de la Figura 5.19 y órbita periódica de periodo aprox.  $21 \cdot 2\pi$ .

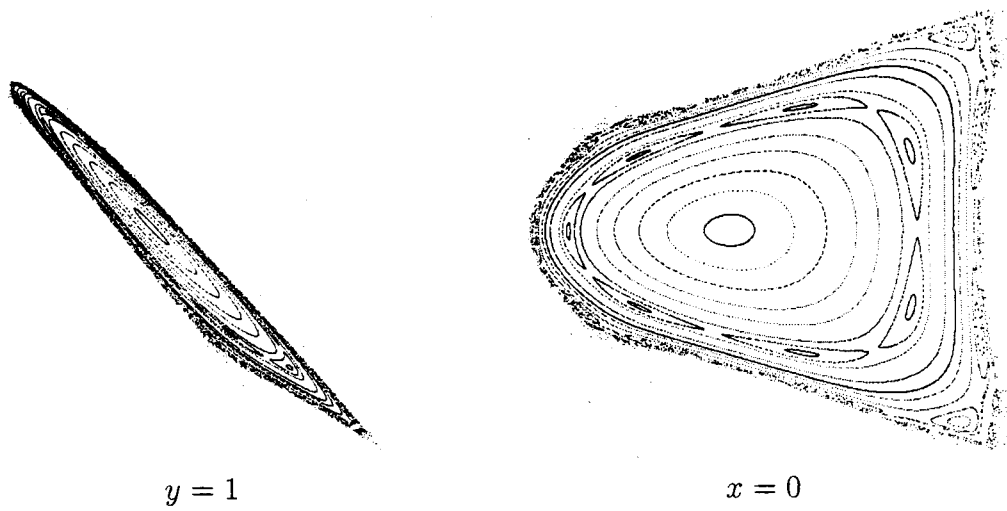


Figura 5.21: Secciones de Poincaré para (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

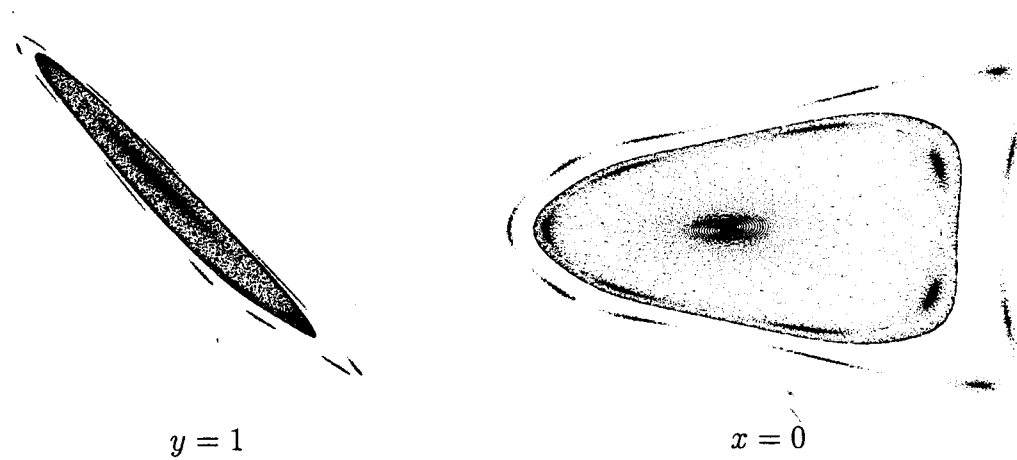
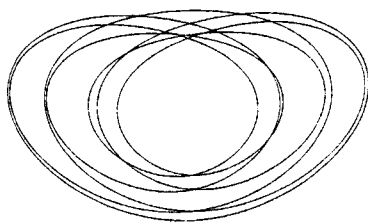
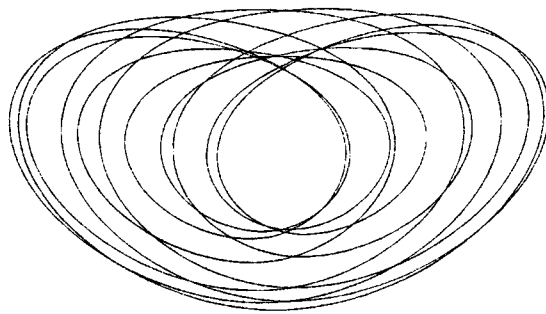


Figura 5.22: Secciones de Poincaré de (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = -0.02$ .



Periodo aprox.  $7 \cdot 2\pi$



Periodo aprox.  $11 \cdot 2\pi$

Figura 5.23: Órbitas periódicas de (5.45) con  $t^+ = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = -0.02$ .

# Conclusiones

En las siguientes líneas intentamos resumir y sintetizar los resultados que consideramos más relevantes en esta memoria.

En primer lugar, queremos hacer hincapié en la importancia de las formas canónicas recogidas en el Capítulo 1, que reducen la presencia de la no linealidad a una sola ecuación (formas canónicas de Van der Pol y Duffing) y transforman los sistemas observables a la forma canónica de Liernad.

Con esta última forma canónica hemos sido capaces de capturar, localmente en el espacio de parámetros, las bifurcaciones que se producen en sistemas planos continuos lineales a trozos bizonales y trizonales simétricos. Para ello, se ha analizado sistemáticamente en el Capítulo 2 la diferencial de las semiaplicaciones de Poincaré, lo que nos ha permitido en el Capítulo 3 demostrar que la teoría de Melnikov desarrollada para sistemas diferenciables puede extenderse a sistemas continuos y diferenciables a trozos.

Por otro lado, la diferencial de las semiaplicaciones de Poincaré nos ha proporcionado en el Capítulo 2 la derivada de la aplicación de Poincaré para sistemas planos continuos y diferenciables a trozos, pudiendo comprobar que tal derivada coincide con la expresión bien conocida de ésta para los sistemas planos y diferenciables.

Como la pérdida de observabilidad reduce la dimensión del problema lineal a trozos, para los sistemas no observables tridimensionales la dinámica del problema puede reducirse, como se pone de manifiesto en el Capítulo 5,

a un sistema bien unidimensional o bien bidimensional lineal a trozos. Si la reducción nos conduce a un sistema bidimensional que posee una órbita periódica, entonces nos encontramos con un cilindro invariante para la dinámica tridimensional y, en condiciones genéricas, la aparición de una única órbita periódica sobre el citado cilindro invariante.

Para los sistemas homogéneos observables tridimensionales estudiados en el Capítulo 4, la forma canónica de Lienard ha sido clave en la obtención de las expresiones paramétricas de las semiaplicaciones de Poincaré usadas para describir algunas de las bifurcaciones de conos invariantes. Con el estudio de estas bifurcaciones hemos sido capaces de dar algunos resultados de estabilidad asintótica global para el origen y otros de inestabilidad cuando el sistema posee uno o ningún cono invariante.

Hemos podido completar las bifurcaciones de conos invariantes de un sistema observable cuando las matrices del sistema comparten un autovalor real. En este caso, el sistema es no controlable y su dinámica periódica se restringe a un sistema bidimensional. Estos hechos nos han llevado a la caracterización de la bifurcación de Hopf en el infinito para sistemas bizonales planos de tipo foco-foco, caracterización que pudimos intuir de forma local a partir de la teoría de Melnikov desarrollada en el Capítulo 3.

Hemos comprobado que un sistema observable puede descomponerse, sin modificar el hiperplano de separación, si las matrices que rigen al sistema comparten algún autovalor. Para el caso tridimensional, si estas matrices sólo comparten un autovalor real, entonces la dinámica del sistema es básicamente bidimensional. Por el contrario, si las matrices comparten un par de autovalores complejos conjugados con parte real nula, entonces la dinámica del sistema se rige mediante una ecuación diferencial unidimensional lineal a trozos no autónoma con excitación  $2\pi$ -periódica.

El estudio de esta ecuación periódica unidimensional ha sido el eje principal del Capítulo 5. Analizando las soluciones de tal ecuación hemos podido describir la dinámica del sistema tridimensional y encontramos que en tal sistema

puede que no aparezcan movimientos periódicos, pero si los hay, entonces el sistema siempre posee un continuo, acotado o no, de órbitas periódicas.

El estudio de la ecuación unidimensional no autónoma ha sido posible completarlo gracias al análisis realizado en caso de reversibilidad y hemos tomado esta situación de reversibilidad como punto de partida para la simulación numérica realizada sobre el sistema tridimensional, que ha puesto de manifiesto la complejidad dinámica que presentan los sistemas lineales a trozos. En primer lugar, se ha considerado un sistema reversible y controlable en el que aparecen continuos de toros invariantes rodeando a órbitas periódicas de periodo alto, y en segundo lugar, se ha considerado un sistema no reversible y controlable como perturbación del anterior, donde aparecen órbitas periódicas y observamos que uno de los toros invariantes permanece tras la perturbación.

Somos conscientes de que en la memoria no se determina todo el conjunto de bifurcaciones que puede presentarse en los sistemas lineales a trozos. Consideramos que tal cometido sería un trabajo, por nuestra parte, demasiado pretencioso.

No obstante, el análisis efectuado nos lleva a considerar algunos interrogantes. Así, la presente memoria deja abiertas, entre otras, las siguientes cuestiones referidas a sistemas observables tridimensionales bizonales:

- ¿Es posible determinar de manera precisa el conjunto de bifurcaciones de conos invariantes en un sistema homogéneo?
- Cuando existen dos conos invariantes bizonales en un sistema homogéneo, ¿es posible caracterizar la dinámica del sistema restringida a dichos conos?
- ¿Cómo puede caracterizarse, en función de los parámetros del sistema, la estabilidad del origen para un sistema homogéneo?
- ¿Bajo qué condiciones, la perturbación no homogénea de un sistema homogéneo que posee un cono invariante bizonal genera órbitas periódicas?

¿Qué bifurcaciones pueden aparecer en estas órbitas periódicas ?

- ¿Qué órbitas periódicas persisten cuando perturbamos un sistema no controlable que posee un continuo de órbitas periódicas? ¿Qué bifurcaciones pueden presentar estas órbitas periódicas? ¿Qué nuevas variedades invariantes aparecen?



# Bibliografía

- [1] V.N. AFANAS'EV, V.B. KOLMANOSVSKII, V.R. NOSOV, *Mathematical Theory of Control Systems Design*, Academic Publishers, Kluwer , 1995.
- [2] H. AMANN, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.
- [3] A. AMBROSETTI, G. PRODI *On the Inversion of Some Differentiable Mappings With Singularities Between Banach Spaces*, Ann. Mat Pura Appl. Vol. 4, No. 93 (1972), pp. 231–246.
- [4] A.A. ANDRONOV, E.A. LEONTOVICH, I.I. GORDON Y A.G. MAIER, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Kefer Press, Jerusalem, 1971.
- [5] A.A. ANDRONOV, A. VITT, S. KHAIKIN, *Theory of Oscillations*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [6] N. BARABANOV, *On the Kalman Problem*, Siberian Mathematical Journal Vol. 29, pp. 333–341.
- [7] T.R. BLOWS Y L.M. PERKO, *Bifurcation of Limit Cycles from Centers and Separatrix Cycles of Planar Analytic Systems*, Siam Review, Vol. 36, No. 3 (1994), pp. 341–376.
- [8] S. BARNET Y R.G. CAMERON, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford University Press, New York, 1985.

- [9] J. BERNAT Y J. LLIBRE, *Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Vol. 2 (1996), No. 3, pp. 337–379.
- [10] S. BUSENBERG Y L.K. JADERBERG, *Decay Characteristics for Differential Equations*, Journal of Differential Equations, Vol. 18 (1975), pp. 87–102.
- [11] S. BUSENBERG Y P. VAN DEN DRIESSCHE, *A Method for Proving the Non-existence of Limit Cycles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 172 (1993), pp. 463–469.
- [12] V. CARMONA, E. FREIRE, E. PONCE, AND F. TORRES, *On Simplifying and Classifying Piecewise Linear Systems*, aparecerá en Mayo de 2002 en IEEE Trans. Circuits Syst.
- [13] C.T. CHEN, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [14] C. CHICONE Y M. JACOBS, *Bifurcation of Limit Cycles from Quadratic Isochrones*, Journal of Differential Equations, Vol. 91 (1991), pp. 268–326.
- [15] C. CHICONE, *Bifurcations of Nonlinear Oscillations and Frequency Entrainment near Resonance*, Siam J. Math. Anal., Vol. 23, No. 6 (1992), pp. 1577–1608.
- [16] C. CHICONE, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [17] S.N. CHOW Y J.K. HALE, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [18] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numerique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1989.

- [19] E.A. CODDINGTON Y N.A. LEVINSON *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [20] G.F.D. DUFF *Limit Cycles and Rotated vector fields*, Ann. Math., 67 (1953), pp. 15-31.
- [21] M. FARKAS, *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994
- [22] E. FREIRE, E. PONCE, F. RODRIGO Y F. TORRES, *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11 (1998), pp. 2073-2097.
- [23] E. FREIRE, E. PONCE, F. RODRIGO AND F. TORRES, *Bifurcation Sets of Symmetrical Continuous Piecewise-Linear Systems with Three Zones*, aparecerá en Agosto de 2002 en Int. J. Bifurcation and Chaos.
- [24] E. FREIRE, E. PONCE Y F. TORRES, *Hopf-like Bifurcations in Planar Piecewise Linear Systems*, Publicacions Matemàtiques, Vol. 41 (1997), pp. 135-148.
- [25] E. FREIRE, E. PONCE Y J. ROS *Limit Cycle Bifurcation From Center in Symmetric Piecewise-Linear Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 5 (1999), pp. 895-907.
- [26] E. FREIRE, E. PONCE Y F. TORRES, *Transformaciones de Filippov en Sistemas Lineales a Trozos*, Actas XV CEDYA, Vigo (1997) pp. 273-278.
- [27] J. GUCKENHEIMER Y P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [28] K.P. HADELER, *Periodic Solutions of Homogeneous Equations*, Journal of Differential Equations, 95 (1992), pp. 183-202.
- [29] J.K. HALE, H. KOCAK, *Dynamics and Bifurcations*, Springer Verlag, New York, 1991.

- [30] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, Birkäusen, Boston, 1982.
- [31] M. W. HIRSCH Y S. SAMLE, *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [32] C. KAHLERT Y L.O. CHUA, *A generalized canonical piecewise-linear representation*, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 37, No. 3, (1990), pp. 373–383, .
- [33] C. KAHLERT Y L.O. CHUA, *The complete canonical piecewise-linear representation: I Geometry of the domain space*, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 39, No. 3, (1992), pp. 226–236.
- [34] C. KAHLERT Y O.E. ROSSLER *Analytical Properties of Poincaré Half-maps in a class of Piecewise-Linear Dynamical System*, Z. Naturforsch-A, 40 (1985), pp. 1011–1025.
- [35] C. KHALERT, *The Ranges of Transfer and Return Maps in Three-Region Piecewise-Linear Dynamical Systems*, J. Circuit Theory Appl., 16 (1988), pp. 11–23.
- [36] C. KHALERT. *Existence and Uniqueness of Solutions of Piecewise-Defined Continuous Dynamical Systems*, Z. Naturforsch 41a (1986), pp. 567–568.
- [37] Y. A. KUSNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1997.
- [38] P. LE CORBEILLER, *Two-Stroke Oscillators*, IRE Transaction on Circuit Theory, 7 (1960), pp. 387–398.
- [39] J. LLIBRE Y E. PONCE, *Bifurcations of Periodic Orbit from Infinity in Planar Piecewise Linear Vector Fields*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 36, (1999) pag. 623–653.

- [40] N. G. LLOYD, *Some One-Parameter Families of Ordinary Differential Equations*, Bulletin de la Societe Mathematique de Belgique (Serie B), Vol. 40, No. 3 (1988), pp. 299-320.
- [41] J. MARSDEN Y M. MCCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [42] M. MEDVED', *Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcation Theory*, Adam Hilger, 1992.
- [43] J. MAWHIN, *First Order Ordinary Differential Equations with several periodic solutions*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 38, No. 2 (1987), pp. 257-265.
- [44] L.M. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [45] L.M. PERKO, *Homoclinic Loop and Multiple Limit Cycle Bifurcation Surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 344, No. 1 (1994), pp. 101-130.
- [46] C. ROBINSON, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1995.
- [47] F. RODRIGO, *Comportamiento Dinámico de Osciladores Electrónicos del Tipo Van der Pol-Duffing*, Tesis Doctoral, 1997, Universidad de Sevilla.
- [48] A. J. RODRÍGUEZ, *Bifurcaciones Multiparamétricas en Osciladores Autónomos*, Tesis Doctoral, 1991, Universidad de Sevilla.
- [49] D. A. SÁNCHEZ, *Periodic Enviroments, Harvesting, and A Riccati Equation*, Proceedings of the International Conference Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Arlington, Tex., Academic Press, 1982,

- [50] J. A. SCHWARTZ, *Generalization of Poincaré-Bendixson Theorem to Closed Two-dimensional Manifolds*, American Journal of Mathematic 85 (1963), pp. 225–230.
- [51] A. E. TERUEL, *Clasificación Topológica de una Familia de Campos Vectoriales Lineales a Trozos Simétricos en el Plano*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, 2000.
- [52] S. WIGGINS *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [53] C. W. WU, L.O. CHUA, *On the Generality of the Unfolded Chua's Circuit*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, No. 5 (1996), pp. 801–832.
- [54] ZHANG ZHI-FEN ET AL., *Qualitative Theory of Differential Equations*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 101, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.

## UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Victoriano Carmena Centeno titulada Bifurcaciones en sistemas dinámicos lineales a Trozos

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

por Unanimitad Sevilla, 4 de Julio 2002

El Vocal

El Vocal,

El Vocal

El Presidente

El Secretario,

El Doctorado.