UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

UNA GENERALIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES

Jesús Mª Cabezas Martínez de Aragón

Sevilla, 1996

UNIVERSIDAD de SEVILLA

RECTORADO

Sevilla a 3 de Febrero de 1997
N/Ref.Secc.Tercer Ciclo-MLP/PM
Asunto: Remitiendo Ejemplares Tesis Leidas

DESTINATARIO
SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
FACULTAD DE INFORMATICA Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD SEVILLA
SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de los fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS ENVIADAS

* CABEZAS MARTINEZ DE ARAGON, JESUS Mª

LA JEFA DEL NEGOCIADO DE TERCER CICLO
Y ESTUDIOS DE POSTGRADO

Fdo: Elena Laffitte Alaminos

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Una generalización de las álgebras de Lie filiformes

Memoria presentada por Jesús Mª Cabezas Martínez de Aragón para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Jesús Mª Cabezas Mtz. de Aragón

Vº Bº
del Director,

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de E.U. del Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, diciembre de 1996.

A Emi y Elena

Resumen

Se presentan en esta memoria algunos resultados algebraicos sobre clasificación de familias de álgebras de Lie nilpotentes en dimensión cualquiera, junto a algunas aplicaciones geométricas.

Si las álgebras de Lie filiformes son aquellas de sucesión característica (*invariante de Goze*) $(n-1,1)$, donde n es la dimensión del álgebra, se definen las álgebras de Lie *p-filiformes* como las de invariante de Goze $(n-p,1,\ldots,1)$.

Adaptando técnicas ya aplicadas a dimensiones concretas, se obtienen las clasificaciones de las álgebras de Lie $(n-2)$-filiformes y $(n-3)$-filiformes para dimensión arbitraria. Se obtienen también las familias genéricas de álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes y $(n-5)$-filiformes.

Estas técnicas resultan insuficientes para estudiar el caso de las $(n-4)$-filiformes; éste se ha resuelto mediante técnicas basadas en la consideración de estas álgebras como extensiones centrales.

Las álgebras p-filiformes se pueden interpretar también como extensiones por derivaciones de otras álgebras de Lie más sencillas. Se ha probado que las extensiones por derivaciones del único álgebra de Lie filiforme de dimensión 4 proporcionan todas las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes y que las extensiones por derivaciones de las dos únicas álgebras de Lie filiformes de dimensión 5 proporcionan, también, todas las álgebras $(n-4)$-filiformes.

Se estudian, finalmente, algunas aplicaciones geométricas para el caso de las álgebras $(n-3)$-filiformes. En concreto se hallan, vía el álgebra de derivaciones,

las dimensiones del primer espacio de cohomología, del espacio de las órbitas y del espacio de cobordes de grado 2 para cada álgebra $(n-3)$-filiforme.

Agradecimientos

Quisiera en primer lugar señalar todo lo que esta tesis debe al director de la misma: profesor José Ramón Gómez, quien no ha cesado en ningún momento de guiarme, de mostrarme su apoyo, su aliento y estímulo, sin los cuales esta investigación no hubiera podido realizarse.

Asimismo, ha sido importante el apoyo constante y la amistad recibidos por parte de su familia, en especial por Concha.

Por todo ello, (y aún sabiendo que cualquier frase es una manera bastante incompleta de expresar mi gratitud) mi más profundo y sincero agradecimiento.

He de hacer una mención muy especial al profesor Yusupdjan Khakimdjanov, que ha seguido con interés la elaboración de este trabajo y que, con sus observaciones y consejos ha contribuído de manera decisiva a que esta investigación llegara a buen término.

Mi gratitud al profesor Antonio Jiménez, quien siempre ha estado dispuesto a interrumpir su propio trabajo para atenderme y ayudarme.

Quiero agradecer a todo el profesorado del Departamento de Matemática Aplicada I de la Facultad de Informática y Estadística de la Universidad de Sevilla, que me ha acogido desde el primer día con exquisita cordialidad, brindándome en todo momento su apoyo, experiencia y ánimo. También, gracias a Juan Manuel Muñoz por su ayuda prestada.

Expreso también mi agradecimiento a José María González de Durana y a todos los compañeros y amigos de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial e Ingeniería Técnica en Topografía de Vitoria-Gasteiz que me animaron en mi tarea.

Gracias a la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea U.P.V.-E.H.U., que mediante su programa de perfeccionamiento del profesorado, ha colaborado en la financiación de mis viajes y estancias en Sevilla.

Gracias también, al Departamento de Matemática Aplicada de la U.P.V.-E.H.U., que al invitar al profesor José Ramón Gómez, me permitió compartir horas de trabajo con él.

Finalmente, no puedo dejar de citar a mi mujer y a mi hija, coautoras de este trabajo, por su ánimo constante y por el tiempo que no les dediqué.

Introducción

La clasificación de estructuras algebraicas de cualquier tipo, salvo isomorfismo, es un problema fundamental y uno de los primeros que surgen cuando se quiere comprender el "conjunto" de las estructuras que se consideran. Clasificar un tipo de estructuras algebraicas equivale a fibrar el conjunto que las tiene como elementos, correspondiendo las fibras a las clases de isomorfía.

La clasificación de las álgebras de Lie es un problema que está, en la actualidad, lejos de ser resuelto. De hecho, el teorema de Lévi, al garantizar que cualquier álgebra de Lie admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y de una subálgebra semisimple (la subálgebra de Lévi), reduce este problema al de las clasificaciones de las álgebras de Lie resolubles y semisimples.

Dado que toda álgebra de Lie semisimple se puede descomponer en suma directa de álgebras de Lie simples y que la clasificación de estas últimas es bien conocida, el problema que queda por resolver es el de la clasificación de las álgebras de Lie resolubles.

La importancia del estudio de las álgebras de Lie nilpotentes radica, entre otros motivos, en que, módulo las derivaciones, la clasificación de las álgebras de Lie resolubles se reduce a la de las nilpotentes.

Ya en el siglo pasado(1891) UMLAUF [19] da listas de álgebras de Lie nilpotentes que verifican $[X_0, X_i] = X_{i+1}$. El siguiente resultado importante es debido a DIXMIER [8] que publica en 1958 las listas de álgebras de Lie nilpotentes para dimensiones menores o iguales a 5. Tras algunos intentos por diferentes autores [17],[21],VERGNE [20] da en 1970 la primera lista completa para dimensión 6. Otros trabajos relacionados con estos tópicos son los de CEREZO [6] y MAGNIN [16], entre otros muchos. La principal innovación del trabajo de VERGNE es de caracter filosófico, ya que da por primera vez un tratamiento cohomológico al problema. Es éste el primer trabajo donde aparece la denominación de filiforme para aquellas álgebras nilpotentes de sucesión central descendente de longitud maximal; coloquialmente, son las "menos nilpotentes" de entre las nilpotentes.

La mayor dimensión para la que se conoce la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es la 7, obtenida por ANCOCHEA y GOZE [1],[3] e, independientemente, por ROMDHANI [18], ambas en 1989. El trabajo de ANCOCHEA y GOZE es de una gran importancia pues, al introducir un nuevo invariante, la sucesión característica o invariante de Goze, permite, de alguna manera, dar una partición de las álgebras de Lie nilpotentes, lo que facilita enormemente su estudio y clasificación. Las álgebras de Lie filiformes son las nilpotentes de invariante de Goze maximal, esto es, con invariante de Goze $(n-1,1)$, si n es la dimensión del álgebra.

Con la ayuda de este invariante y desarrollando técnicas específicas han obtenido ANCOCHEA y GOZE, no sólo la clasificación de las nilpotentes de dimensión 7 ya citada, sino también la de las filiformes de dimensión 8 [2]. Ampliando y adaptando estas técnicas, se ha obtenido en 1991 la clasificación de las filiformes de dimensión 9, por medio de GÓMEZ y ECHARTE [9] y las de dimensión 10 en 1994 por medio de BOZA,ECHARTE y NÚÑEZ [5].

Los últimos resultados que se conocen sobre clasificación de álgebras de Lie filiformes son una clasificación de las álgebras de Lie filiformes 2-abelianas en dimensión arbitraria debida a GÓMEZ,GOZE y KHAKIMDJANOV [10] y la clasificación de las filiformes de dimensión menores o iguales a 11, debida a GÓMEZ,JIMÉNEZ y KHAKIMDJANOV [11] que será publicada en 1997. Este trabajo se basa en técnicas distintas (cociclos y cambios de base elementales) y consigue mejorar sensiblemente los métodos de clasificación usados hasta ahora, simplificando los cálculos. Este nuevo tratamiento hace uso de técnicas informáticas, utilizando el paquete de cálculo simbólico MATHEMATICA y promete ser útil aún para alguna (o algunas) dimensión superior.

Como puede deducirse fácilmente de lo anterior, en la actualidad se suele trabajar con las álgebras de Lie filiformes y se intentan clasificaciones para dimensiones concretas.

El trabajo que aquí se presenta da un importante giro en cuanto a sus objetivos. A saber:

a) No se limita a estudiar las álgebras de Lie filiformes sino que estudia un tipo más general; en concreto, si el invariante de Goze de un álgebra filiforme de dimensión n es $(n-1,1)$, las álgebras que se estudian aquí tienen invariante de Goze del tipo $(n-p,1,\ldots,1)$ y se las denomina p-filiformes. Es obvio que las 1-filiformes son las propias filiformes.

b) No se limita a estudiar dimensiones concretas, sino que clasifica álgebras p-filiformes, en dimensión cualquiera, para algunos valores concretos de p.

Como complemento a lo anterior, se estudian algunas aplicaciones geométricas, determinándose el primer espacio de cohomología, el espacio de las órbitas y el de los cobordes de grado 2 asociados a cada álgebra.

En el capítulo 0 se da una breve recopilación de tópicos bien conocidos pero que son prerrequisitos necesarios para la mejor comprensión de la tesis. En cualquier caso, al comienzo de dicho capítulo se citan otras referencias destinadas a aquellos lectores no suficientemente familiarizados con los conceptos y resultados que se usan en la presente memoria.

En el capítulo 1 se aborda ya el problema de la clasificación de las álgebras p-filiformes para valores de p relativamente "grandes", es decir, próximos a la dimensión del álgebra, n. Dado que el mayor valor posible de p es $n-1$ y que las álgebras $(n-1)$-filiformes no son sino las abelianas, se comienza el estudio a partir de las álgebras $(n-2)$-filiformes.

Utilizando convenientemente argumentos sobre nilpotencia (generalmente, adjunto-nilpotencia), sucesión característica y p-filiformidad, junto a una adecuada selección de cambios de base sencillos, se consigue clasificar las álgebras $(n-2)$-filiformes y $(n-3)$-filiformes. Las primeras, encontradas ya por Goze y Piu [12],[14] se reducen a las álgebras de Heisenberg de dimensión menor o igual a n junto a la parte abeliana correspondiente para completar la dimensión; resultan ser $E(\frac{n-1}{2})$ no isomorfas entre sí, aunque las no escindidas, por lo ya dicho, se reducen a la correspondiente álgebra de Heisenberg para las dimensiones impares, no existiendo álgebra alguna no escindida para las dimensiones pares.

En una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3}\}$, las leyes de las álgebras $(n-2)$-filiformes complejas de dimensión n no isomorfas entre sí se pueden expresar como:

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^q : & [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_2 & 1 \leq k \leq q-1 \end{array}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-1}{2})$.

En cuanto a las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes complejas se encuentran $n-2$ álgebras no isomorfas entre sí. Para dimensión n, $n \geq 5$ y respecto a una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$, las leyes de las álgebras $(n-3)$-filiformes se pueden expresar como

$$\begin{array}{llclll} \mathfrak{g}_n^{2q-1} : & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & 1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2}) \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq q-1 & \\ & & & & & \\ \mathfrak{g}_n^{2s} : & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & 1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq s-1 & \\ & & & & & \\ \mathfrak{g}_n^{n-2} : & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} & & \end{array}$$

Como puede observarse, salvo para dimensión 5, para la que existen dos álgebras no escindidas ($\mathfrak{g}_5^2$ y $\mathfrak{g}_5^3$), en el resto de los casos hay un único álgebra no escindida (el álgebra $\mathfrak{g}_n^{n-3}$, que corresponde a la última de la primera familia si $n = \dot{2}$ y a la última de la segunda familia si $n \neq \dot{2}$).

Se determinan también en este capítulo las familias genéricas de álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes y $(n-5)$-filiformes, junto con las pertinentes restricciones entre los parámetros.

Se constata aquí la dificultad creciente que entraña la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes al disminuir p, por lo que no ha sido ya posible clasificar las álgebras $(n-4)$-filiformes por este método, habiendo sido necesario desarrollar nuevas técnicas.

En el capítulo 2 se resuelve el problema de la clasificación de las álgebras $(n-4)$-filiformes de dimensión n. Para ello se ha utilizado un método de clasificación mediante extensiones centrales de álgebras de dimensión una unidad menor.

Como toda álgebra de Lie $(n-4)$-filiforme de dimensión n tiene invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-4}{\dots}, 1)$, se sigue que su cociente por un ideal unidimensional central será un álgebra de dimensión $n-1$ e invariante de Goze, bien $(4, 1, \overset{(n-5}{\dots}, 1)$, bien $(3, 1, \overset{(n-4}{\dots}, 1)$. Luego, para encontrar las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes de dimensión n se pueden encontrar en primer lugar todas las extensiones centrales de dimensión n e invariante de Goze $(4, 1, \dots, 1)$ que sean extensiones centrales de álgebras de Lie $(n-1)$-dimensionales e invariante de Goze $(3, 1, \dots, 1)$ para, en segundo lugar hallar las extensiones centrales de dimensión n y sucesión característica $(4, 1, \dots, 1)$ que proceden de álgebras de Lie de dimensión $n-1$ y sucesión característica $(4, 1, \dots, 1)$. Si no apareciera ninguna nueva, el proceso habría terminado. En otro caso habría que repetir la segunda parte del proceso para estas nuevas álgebras.

Se obtiene así que para dimensión n, $n \geq 8$, hay exactamente $6n-29$ álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes complejas, no isomorfas entre sí y cuyas leyes se pueden expresar en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-5}\}$ mediante

$$\begin{array}{llcllr}
\mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcllr}
\mathfrak{g}_n^{2,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcllr}
\mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcllr}
\mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{5,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\
 & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{6,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\
 & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
 & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{7,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\
 & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
 & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{8,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\
 & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{9,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-6}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\
 & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
 & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll l}
\mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{11,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{12,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1, & \end{array}$$

con la salvedad de que cuando n sea impar se tiene que

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}.$$

En el capítulo 3 se ha introducido un nuevo método que se ha denominado clasificación por extensión por derivaciones. En esencia, se basa en que si a un álgebra de Lie de sucesión característica $(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1)$, que se denomina álgebra soporte, se le adjuntan $n - p_1 - p_2 - \ldots - p_k - 1$ derivaciones adecuadas (derivaciones nilpotentes no interiores o la derivación nula) se obtienen álgebras de Lie de dimensión n y sucesión característica $(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1, \ldots, 1)$.

Si se aplica el método a las p-filiformes para $p = n-2, n-3$ ó $n-4$ se obtienen exactamente las mismas álgebras en cada caso que las que se obtuvieron en los capítulos precedentes.

En el capítulo 4 se estudian algunas aplicaciones geométricas. En concreto se calculan las dimensiones del primer espacio de cohomología, $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, el espacio de las órbitas, $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ y el espacio de los 2-cobordes $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Dado que se tiene que $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})/B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, con $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq Der(\mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq Ad(\mathfrak{g})$ se tiene que la dimensión de $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ no es otra cosa que la de su álgebra de derivaciones asociada menos la del álgebra de las derivaciones interiores. Análogamente, como $dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = (dim(\mathfrak{g}))^2 - dim(Der(\mathfrak{g}))$, la mayor parte de este capítulo se reduce al cálculo de las derivaciones de las álgebras consideradas.

Dado que el caso $(n-2)$-filiforme es bien conocido, en este trabajo se determinan las derivaciones de las álgebras $(n-3)$-filiformes complejas de dimensión n. Para ello se ha hecho uso de que todas las álgebras que aparecen son graduadas y de que el cálculo de las derivaciones de este tipo de álgebras es bastante más asequible.

Los resultados obtenidos son que

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1},\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} n^2-5n+8 & \text{si} \quad q=1 & \\ \frac{4q^2-q+3}{2}+(n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q=\dot{2}+1 & q\geq 2 \\ \frac{4q^2-q+4}{2}+(n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q=\dot{2} & q\geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} n^2-6n+11 & \text{si} \quad s=1 & \\ \frac{4s^2+3s+3}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s=\dot{2}+1 & s\geq 2 \\ \frac{4s^2+3s+4}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s=\dot{2} & s\geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = n^2-6n+12.$$

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2q-1},\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} 5n-11 & \text{si} \quad q=1 & \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-9}{2} & \text{si} \quad q=\dot{2}+1 & q\geq 2 \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-10}{2} & \text{si} \quad q=\dot{2} & q\geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2s})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2s}, \mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} 6n - 15 & \text{si} \quad s = 1 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-13}{2} & \text{si} \quad s = \dot{2}+1 \qquad s \geq 2 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-14}{2} & \text{si} \quad s = \dot{2} \qquad s \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{n-2})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{n-2}, \mathfrak{g}_n^{n-2})) = 6n - 15.$$

Índice

Capítulo 0

Preliminares

Se recuerdan aquí algunos conceptos básicos y resultados que se usan a lo largo de la memoria. Se ha pretendido, conscientemente, no ser exhaustivo ya que se intenta no aburrir al lector antes de tiempo. En cualquier caso, puede consultarse cualquier tópico que se desee en alguno de los textos clásicos Chow [7] o Jacobson [15], en el más moderno Bauerle-De Kerf [4] o en el magnífico y más específico Goze-Khakimdjanov [13].

0.1 Generalidades

• Un **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ provisto de una multiplicación, es decir, de una aplicación bilineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \longrightarrow & [X, Y] \end{array}$$

que verifica

$$\begin{array}{ll} 1) & [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \\ 2) & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

Esta segunda igualdad se denomina identidad de Jacobi y se va a representar en todo el trabajo por $Jac(X, Y, Z)$.

• Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **simple** si es no abeliana ($[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \{0\}$) y no tiene ideales propios. En particular, se verifica $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

• Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **semisimple** si no posee ideales abelianos no triviales. Se excluye el álgebra nula.

Obviamente, toda álgebra de Lie simple es semisimple.

• La **sucesión derivada** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define mediante $(\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}))$,

$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g})], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{D}^m(\mathfrak{g}) = \{0\}$, pero $\mathcal{D}^{m-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, el álgebra de Lie se dice que es **resoluble** de índice de resolubilidad m.

• La **sucesión central descendente** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define mediante

$$(\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) = \{0\}$, pero $\mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, el álgebra de Lie se dice que es **nilpotente** de índice de nilpotencia m.

Obviamente, toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble.

• Un resultado muy conocido, el teorema de Lévi, justifica la afirmación de que el estudio de las álgebras de Lie se puede reducir, en esencia, al de las álgebras anteriormente definidas.

Teorema 0.1 (Descomposición de Lévi de un álgebra de Lie). Toda álgebra de Lie se puede descomponer en suma semidirecta de una subálgebra resoluble (su radical) y otra semisimple.

• Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$, se dice **filiforme** si se verifica que

$$dim\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = n - i - 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Estas álgebras son las que tienen el índice de nilpotencia maximal: $n - 1$. Las álgebras de Lie de índice de nilpotencia $n - 2$ se llaman **casifiliformes** y las de índice de nilpotencia 1 son las **abelianas**.

0.2 Bases adaptadas. Invariante de Goze

El teorema de **Engel** justifica que toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n admite una base , $\{X_i \ , \ 0 \leq i \leq n-1\}$, tal que

$$\begin{array}{lcl} X_0 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] & & \\ [X_0, X_i] & = & \epsilon_{i+1} X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2 \quad \text{con} \quad \epsilon_j \in \{0,1\} \ , \ 2 \leq j \leq n-1 \\ [X_0, X_{n-1}] & = & 0. \end{array}$$

Estas **bases** se llaman **adaptadas** y, al correspondiente vector X_0 se le denomina **vector característico** de $\mathfrak{g}$.

En realidad, los vectores característicos de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ son los $Z \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ para los que es maximal la sucesión finita, ordenada decrecientemente, de las dimensiones de los subespacios característicos del operador nilpotente $ad(Z)$.

Esta sucesión finita, que es invariante para cada álgebra de Lie nilpotente, es lo que se conoce como **invariante de Goze** o **sucesión característica**.

El invariante de Goze de las álgebras de Lie filiformes, casifiliformes y abelianas, de dimensión n, es respectivamente, $(n-1,1)$, $(n-2,1,1)$ y $(1,1,\ldots,1)$.

Se va a proceder a designar como álgebras de Lie p-filiformes a una amplia familia de álgebras de Lie, de las que las anteriores son casos particulares.

Definición 0.2. *Un álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{g}$*, de dimensión* n*, se denomina* **p -filiforme** *si su sucesión característica es* $(n-p,1,1,\ldots,1)$.

Las álgebras de Lie filiformes, casifiliformes y abelianas son las 1-filiformes, 2-filiformes y $(n-1)$-filiformes, respectivamente, supuesto que n es la dimensión del álgebra.

De la definición se sigue que cualquier álgebra de Lie p-filiforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, tiene índice de nilpotencia $n-p$ (pero la recíproca no es cierta), y que $1 \leq p \leq n-1$.

0.3 Derivaciones

Un endomorfismo δ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es una **derivación** del álgebra si

$$\delta([X,Y]) = [\delta(X),Y] + [X,\delta(Y)] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$, denotado por $Der(\mathfrak{g})$, es un álgebra de Lie definiendo

$$[\delta,\delta^*] = \delta \circ \delta^* - \delta^* \circ \delta.$$

Se tiene que, $\forall X \in \mathfrak{g}$, el endomorfismo $ad(X)$ es una derivación que se dice interior del álgebra. El conjunto de las derivaciones interiores, $Ad(\mathfrak{g})$, es un ideal de $Der(\mathfrak{g})$.

El álgebra de Lie de las derivaciones de una suma directa de álgebras generalmente no coincide con la suma directa de las álgebras de derivaciones. Sin embargo, existe una expresión que sí las relaciona.

Teorema 0.3. Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{g}_i$, donde los $\mathfrak{g}_i$ son ideales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se cumple que

$$Der\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{g}_i \right) = \left(\bigoplus_{i=1}^{p} Der(\mathfrak{g}_i) \right) \quad \bigoplus \quad \left(\bigoplus_{i \neq j} D(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j) \right),$$

donde $D(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)$ es el conjunto de derivaciones d de $\mathfrak{g}$ tales que

$$\begin{array}{lcll} d((\mathfrak{g}_k)) & = & 0 & \text{si} \quad k \neq i \\ d(\mathfrak{g}_i) & \subset & \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_j) & \text{y} \\ d([\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]) & = & 0. & \end{array}$$

0.4 Álgebras de Lie graduadas

Si G es un grupo conmutativo, se llama espacio vectorial G-graduado a la terna $(V \;,\; \{V_\alpha : \alpha \in G\} \;,\; G)$, donde V es un espacio vectorial y V_α un subespacio vectorial de V $\forall \alpha \in G$, verificándose que V es suma directa de los V_α , $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$.

Si $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$ y $W = \bigoplus_{\alpha \in G} W_\alpha$ son dos espacios vectoriales G-graduados, una aplicación lineal f de V en W se dice **aplicación homogénea de grado** β si verifica $f(V_\alpha) \subset W_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha \in G$.

Se llama **álgebra de Lie G-graduada** a un espacio vectorial G-graduado, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathfrak{g}_\alpha$, en el que se ha definido una estructura de álgebra de Lie compatible con la G-graduación (esto es, se ha definido una ley de álgebra de Lie o "producto corchete", tal que verifica $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha^*}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha^*} \quad \forall \alpha, \alpha^* \in G$).

Hay un resultado de enorme importancia a la hora de determinar el álgebra de derivaciones $Der(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie G-graduada $\mathfrak{g}$.

Si se denota por $Hom_\alpha(V, W)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales homogéneas de grado α de dos espacios vectoriales V y W G-graduados se cumple que $Hom(V, W)$ es G-graduado, siendo $Hom_\alpha(V, W) \quad \alpha \in G$ los subespacios graduantes, es decir, $Hom(V, W) = \bigoplus_{\alpha \in G} Hom_\alpha(V, W)$.

En la presente memoria todas las álgebras que se consideran resultarán ser $\mathbb{Z}$ -graduadas.

0.5 Extensiones de álgebras de Lie

Si $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ y $\mathfrak{g}$ son álgebras de Lie , se llama **extensión** de $\mathfrak{g}_2$ por $\mathfrak{g}_1$ a la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\eta} \mathfrak{g} \xrightarrow{\epsilon} \mathfrak{g}_2 \longrightarrow 0$.

Por ejemplo, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se puede considerar como una extensión del álgebra de sus derivaciones interiores por su centro.

Una extensión de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\eta} \mathfrak{g} \xrightarrow{\epsilon} \mathfrak{g}_2 \longrightarrow 0,$$

se dice **central** si $Ker(\epsilon) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ (es decir, si $Ker(\epsilon) = Im(\eta)$ está formado por elementos centrales).

0.6 Cohomología

Dados un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y un $\mathfrak{g}$-módulo V, se llama **cocadena** de grado j, $j \geq 1$, a cada aplicación multilineal alternada de $\bigotimes^j \mathfrak{g}$ en V. Si $C^j(\mathfrak{g}, V)$ es el espacio de las j-cocadenas, se tiene que

$$C^j(\mathfrak{g}, V) = Hom(\Lambda^j \mathfrak{g}, V) \quad j \geq 1.$$

Una cocadena de $\mathfrak{g}$ es un elemento de $C^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{j \in Z} C^j(\mathfrak{g}, V)$.

Si el endomorfismo $d : C^*(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, V)$ es el operador coborde, se designa por d_j a la restricción de d a $C^j(\mathfrak{g}, V)$, $d_j : C^j(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{j+1}(\mathfrak{g}, V)$.

Los subespacios de $C^j(\mathfrak{g}, V)$ definidos por

$$Z^j(\mathfrak{g}, V) = Ker\ d_j \quad \text{y} \quad B^j(\mathfrak{g}, V) = Im\ d_{j-1}$$

se denominan, respectivamente, espacio de los **cociclos** de grado j y espacio de los **cobordes** de grado j. Como $B^j(\mathfrak{g}, V)$ resulta ser un subespacio de $Z^j(\mathfrak{g}, V)$, tiene sentido hablar del espacio cociente $H^j(\mathfrak{g}, V) = Z^j(\mathfrak{g}, V)/B^j(\mathfrak{g}, V)$, al que se conoce como **espacio de cohomología** de grado j o j-ésimo espacio de cohomología (de $\mathfrak{g}$ con valores en V).

Si se considera $\mathfrak{g}$ como el G-módulo V anterior, se puede identificar $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el espacio de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $Der(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$, $Ad(\mathfrak{g})$, de donde surge una fácil interpretación de $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Si se denota mediante $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ la **órbita** correspondiente a la ley de $\mathfrak{g}$ en la variedad de leyes de álgebras de Lie de dimensión n, L^n , inducida por la acción de $GL(n, \mathbb{C})$, resulta que $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ puede ser provista de una estructura de variedad diferenciable, y que

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})).$$

Capítulo 1

Clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes para p $\geq$ n-3

Se aborda en este capítulo la clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de Lie p-filiformes de dimensión arbitraria para valores de p grandes. De hecho, se consiguen clasificar los casos en que $p \geq n-3$, mientras que en los casos $p = n-4$ y $p = n-5$ se obtienen las correspondientes familias generales de leyes de álgebras de Lie. Para ello se hará uso, esencialmente, de argumentos sobre nilpotencia, sucesión característica y p-filiformidad.

Dado que un álgebra de Lie p-filiforme de dimensión n admite una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_{n-p-1}\}$ para la que los únicos corchetes no nulos de X_0 por elementos de la base son los $[X_0, X_i] = X_{i+1}\quad 1 \leq i \leq p-1$, la identidad de Jacobi aplicada a una terna (X_0, U, V), con U y V de la base, da un primer esbozo de la familia.

La nilpotencia se traduce en una condición matricial relativamente sencilla: el polinomio característico de la matriz $ad(V)$, para cualquier vector V, es λ^n. Esta condición puede ser difícil de aplicar al principio pero, al irse simplificando la familia de leyes se hace cada vez más asequible.

La p-filiformidad también tiene una traducción matricial sencilla en términos de las matrices adjuntas correspondientes a vectores que no estén en la derivada, esto es, en términos de las matrices adjuntas de los posibles vectores característicos; las correspondientes matrices no pueden admitir menores de orden p no nulos. Esta propiedad bien manejada, combinada generalmente con procesos de inducción finita, proporciona muchas condiciones sencillas de los parámetros si se aplican a vectores convenientemente elegidos.

El resto de condiciones de Jacobi proporciona nuevas restricciones a la familia de leyes de álgebras de Lie correspondiente.

Se obtienen así determinadas familias con ciertos conjuntos de parámetros y algunas restricciones entre ellos. Dado que no es posible trabajar con cambios de base generales, es necesario encontrar cambios de base convenientes que simplifiquen suficientemente la familia encontrada.

Finalmente, debe probarse que las leyes de álgebras de Lie encontradas corresponden a álgebras dos a dos no isomorfas, para lo que habrá que calcular determinados invariantes de estas álgebras de Lie.

El proceso se va complicando al disminuir p con respecto a n y para $p = n-4$ y $p = n-5$ nos limitamos a encontrar las familias de leyes, dejando para el capítulo siguiente la clasificación de las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes.

1.1 Algebras (n-2) -filiformes

Teorema 1.1 (Familia de álgebras (n-2)-filiformes). *En dimensión n, $n \geq 3$, toda álgebra de Lie nilpotente, real o compleja y $(n-2)$-filiforme es isomorfa a una cuya ley, respecto a una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3}\}$, es isomorfa a una de la familia*

$$\begin{aligned} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_2 \qquad 1 \leq i < j \leq n-3. \end{aligned}$$

Demostración:

Cualquier álgebra de la familia anterior es $(n-2)$-filiforme.

Queda probar que cualquier álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, de dimensión n y sucesión característica $(2, 1, 1, \ldots, 1)$, es isomorfa a alguna de las álgebras de la citada familia.

Si $X_0 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un vector característico y $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$, se ha de cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ [X_0, X_2] & = & 0 & \\ [X_0, Y_i] & = & 0 & \quad 1 \leq i \leq n-3. \end{array} \right.$$

Exigiendo que se verifiquen las identidades de Jacobi para cualesquiera tres vectores entre los cuales esté X_0, considerando que $Y_i \notin Im\ adX_0$, $1 \leq i \leq n-3$, y aplicando alguna condición evidente de nilpotencia, se obtiene que
$Jac(X_0, X_1, X_2) \quad \Rightarrow$

$$[X_0, [X_1, X_2]] = 0 \Rightarrow [X_1, X_2] = \beta X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} \alpha_k Y_k$$

$Jac(X_0, Y_i, Y_j) \quad 1 \leq i < j \leq n-3 \quad \Rightarrow$

$$[X_0, [Y_i, Y_j]] = 0 \Rightarrow [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} c_{ij}^k Y_k$$

$Jac(X_0, X_2, Y_i) \quad 1 \leq i \leq n-3 \quad \Rightarrow$

$$[X_0, [X_2, Y_i]] = 0 \Rightarrow [X_2, Y_i] = a_{2i} X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} d_{2i}^k Y_k$$

$Jac(X_0, X_1, Y_i) \quad 1 \leq i \leq n-3 \quad \Rightarrow$

$$[X_0, [X_1, Y_i]] = [X_2, Y_i] = a_{2i} X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} d_{2i}^k Y_k$$

Como $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3} \notin Im\ ad(X_0) \Rightarrow$

$$d_{2i}^k = 0 \quad 1 \leq i, k \leq n-3 \quad \text{y} \quad [X_2, Y_i] = a_{2i} X_2 \Rightarrow a_{2i} = 0 \quad \text{por nilpotencia}$$

$$\Rightarrow [X_0, [X_1, Y_i]] = 0 \Rightarrow [X_1, Y_i] = a_i X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} d_i^k Y_k$$

En consecuencia, los productos corchete no nulos de $\mathfrak{g}$, salvo antisimetría, son:

$$\begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_1, X_2] &= \beta X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} \alpha_k Y_k \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} d_i^k Y_k & 1 \leq i \leq n-3 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} c_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-3. \end{cases}$$

Al ser $(2, 1, 1, \ldots, 1)$ la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ y $X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, no puede existir en

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \beta & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & d_1^1 & d_2^1 & \ldots & d_{n-3}^1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & d_1^2 & d_2^2 & \ldots & d_{n-3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-3} & d_1^{n-3} & d_2^{n-3} & \ldots & d_{n-3}^{n-3} \end{pmatrix}$$

ningún menor de orden dos distinto de cero, lo que implica que

$$\begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 0 & \alpha_k \end{vmatrix} = -\alpha_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [X_1, X_2] = \beta X_2 \quad \Rightarrow \beta = 0, \quad \text{por} \quad \text{nilpotencia}$$

y

$$\begin{vmatrix} -1 & a_i \\ 0 & d_i^k \end{vmatrix} = -d_i^k = 0 \Rightarrow d_i^k = 0 \quad 1 \leq i, k \leq n-3.$$

Entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ puede ser expresada mediante

$$\begin{cases} [X_0, X_1] &= X_2 \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_2 & 1 \leq i \leq n-3 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_2 + \sum_{k=1}^{n-3} c_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-3. \end{cases}$$

Se va a probar que $c_{ij}^k = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-3 \ , \ 1 \leq k \leq n-3$ por inducción finita.

$\forall A \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se cumple que $X_0 + AY_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-4$ y la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + AY_1$ es:

$$ad(X_0 + AY_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - Aa_1 & 0 & 0 & Ab_{12} & Ab_{13} & \dots & Ab_{1,n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^1 & Ac_{13}^1 & \dots & Ac_{1,n-3}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^2 & Ac_{13}^2 & \dots & Ac_{1,n-3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^{n-3} & Ac_{13}^{n-3} & \dots & Ac_{1,n-3}^{n-3} \end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A \neq 0$ y $1 - Aa_1 \neq 0$, lo que es siempre posible, y, al ser la sucesión característica $(2, 1, 1, \dots, 1)$, se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 - Aa_1 & Ab_{1j} \\ 0 & Ac_{1j}^k \end{vmatrix} = (1 - Aa_1)Ac_{1j}^k = 0 \Rightarrow c_{1j}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-3 \quad 2 \leq j \leq n-3.$$

Supóngase que las matrices $ad(X_0 + AY_2), ad(X_0 + AY_3), \dots, ad(X_0 + AY_{i-1})$ se han obtenido y de forma análoga, se ha encontrado que

$$c_{rj}^k = 0 \ , \quad 1 \leq r \leq i-1, \quad 1 \leq k \leq n-3 \quad r+1 \leq j \leq n-3.$$

En consecuencia, la matriz $ad(X_0 + AY_i)$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - Aa_i & 0 & -Ab_{1i} & \dots & -Ab_{i-1,i} & 0 & Ab_{i,i+1} & Ab_{i,i+2} & \dots & Ab_{i,n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^1 & Ac_{i,i+2}^1 & \dots & Ac_{i,n-3}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^2 & Ac_{i,i+2}^2 & \dots & Ac_{i,n-3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^{n-3} & Ac_{i,i+2}^{n-3} & \dots & Ac_{i,n-3}^{n-3} \end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A \neq 0$ y $1 - Aa_i \neq 0$, se llega a que

$$\begin{vmatrix} 1 - Aa_i & Ab_{ij} \\ 0 & Ac_{ij}^k \end{vmatrix} = (1 - Aa_i)Ac_{ij}^k = 0 \Rightarrow c_{ij}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-3 \quad i+1 \leq j \leq n-3,$$

con lo que se ha probado que es cierto para $1 \leq i \leq n-4$.

Por tanto: $[Y_i, Y_j] = b_{ij}X_2 \quad 1 \leq i < j \leq n-3$,

y la ley de $\mathfrak{g}$ tras aplicar el cambio de base definido por las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 2 \\ Y_i^* & = & Y_i + a_i X_0 & 1 \leq i \leq n-3, \end{array} \right.$$

se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_2 & 1 \leq i < j \leq n-3. \end{array} \right.$$

□

Teorema 1.2 (Clasificación de las álgebras (n-2)-filiformes). *En dimensión $n, n \geq 3$, hay exactamente $E(\frac{n-1}{2})$ álgebras de Lie nilpotentes, reales o complejas, no isomorfas entre sí y de sucesión característica $(2, 1, 1, \ldots, 1)$, que se designan mediante $\mathfrak{g}_n^i \quad 1 \leq i \leq E(\frac{n-1}{2})$ y cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3}\}$ mediante*

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^q : & [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_2 & 1 \leq k \leq q-1 \end{array}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-1}{2})$.

Demostración:

Todas las álgebras anteriores son nilpotentes y de sucesión característica $(2, 1, 1, \ldots, 1)$. Además, son no isomorfas entre sí porque las dimensiones del centro son:

$$dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_n^q) = n - 2q \quad , \quad 1 \leq q \leq E(\frac{n-1}{2}).$$

Por el teorema **1.1** se sabe que toda álgebra $\mathfrak{g}$ de Lie $(n-2)$-filiforme en una base adecuada es isomorfa a una de la familia

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_2 & 1 \leq i < j \leq n-3. \end{array} \right.$$

Se va a distinguir según sea $b_{ij} = 0$ siempre o exista algún $b_{ij} \neq 0$.

* Si $b_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-3$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^1$.

* Si existe algún $b_{ij} \neq 0$, $\quad 1 \leq i < j \leq n-3$, se puede suponer $b_{12} \neq 0$, sin más que hacer el cambio de base

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 2 \\ Y_1^* & = & Y_i & \\ Y_2^* & = & Y_j & \\ Y_i^* & = & Y_1 & \\ Y_j^* & = & Y_2 & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-3 \qquad k \notin \{1,2,i,j\}. \end{array}\right.$$

En tal caso es posible suponer, además, que $b_{12} = 1, \quad b_{1k} = 0 = b_{2k}$ $3 \leq k \leq n-3$. Basta con aplicar el cambio de base definido por

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_1^* & = & \frac{1}{b_{12}} Y_1 & \\ Y_2^* & = & Y_2 & \\ Y_k^* & = & Y_k + \frac{b_{2k}}{b_{12}} Y_1 - \frac{b_{1k}}{b_{12}} Y_2 & 3 \leq k \leq n-3, \end{array}\right.$$

obteniéndose un álgebra isomorfa de ley:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ [Y_1, Y_2] & = & X_2 & \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_2 & 3 \leq i < j \leq n-3. \end{array}\right.$$

Si fuesen ahora, todos los $b_{ij} = 0, \quad 3 \leq i < j \leq n-3$, se estaría ante $\mathfrak{g}_n^2$, mientras

que, si existe algún $b_{ij} \neq 0$, se puede suponer $b_{34} = 1$, $b_{3k} = 0 = b_{4k} \quad 5 \leq k \leq n-3$, sin más que hacer cambios de base análogos a algunos anteriores.

Si se continúa el proceso, resulta el álgebra $\mathfrak{g}$ dada isomorfa a alguna de las $\mathfrak{g}_n^i$, donde $1 \leq i \leq E(\frac{n-1}{2})$. Se observa que son todas escindidas, salvo una de ellas si la dimensión es impar. Estas álgebras son suma directa de las álgebras de *Heisenberg* de dimensión menor o igual a n con las copias del cuerpo base necesarias para mantener la dimensión.

$\square$

1.2 Algebras (n-3) -filiformes

Teorema 1.3 (Familia de álgebras (n-3)-filiformes). *En dimensión* n , $n \geq 5$, *toda álgebra de Lie nilpotente, real o compleja y* $(n-3)$*-filiforme es isomorfa a una cuya ley, respecto a una base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$, *es isomorfa a una de la familia*

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & \sum\limits_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] & = & a_i X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4, \end{array}\right.$$

con las restricciones

$$\left\{\begin{array}{lcll} \sum\limits_{k=2}^{n-4} \alpha_k b_{1k} & = & 0 & \\ \sum\limits_{k=i+1}^{n-4} \alpha_k b_{ik} & = & \sum\limits_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-5 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{k,n-4} & = & 0. & \end{array}\right.$$

Demostración:

Cualquier álgebra de la familia anterior es $(n-3)$-filiforme.

Queda probar que cualquier álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, de dimensión n y sucesión característica $(3, 1, 1, \ldots, 1)$, es isomorfa a alguna de las álgebras de la citada familia.

Si $X_0 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un vector característico y $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$, se ha de cumplir que

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, X_3] & = & 0 & \\ [X_0, Y_j] & = & 0 & 1 \leq j \leq n-4. \end{array}\right.$$

A partir de las identidades de Jacobi en las que interviene X_0 se obtiene una primera expresión de los restantes productos corchete entre elementos de la base. Se tiene en cuenta que $Y_j \notin Im\ adX_0$, $1 \leq j \leq n-4$, así como algunas condiciones sencillas de nilpotencia y, entonces, la expresión de los citados corchetes se simplifica extraordinariamente.

De $Jac(X_0, X_2, X_3)$ se deduce que

$$[X_0,[X_2,X_3]] = 0 \Rightarrow [X_2,X_3] = \beta_{23}X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_{23}^k Y_k$$

De $Jac(X_0, X_1, X_3)$ se deduce que

$$[X_0,[X_1,X_3]] = [X_2,X_3] = \beta_{23}X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_{23}^k Y_k$$

Como $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4} \notin Im\ ad(X_0) \Rightarrow$

$$\alpha_{23}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-4 \quad \text{y} \quad [X_2,X_3] = \beta_{23}X_3 \Rightarrow \beta_{23} = 0 \quad \text{por nilpotencia}$$

$$\Rightarrow [X_2,X_3] = 0 \Rightarrow [X_0,[X_1,X_3]] = 0 \Rightarrow [X_1,X_3] = \beta_{13}X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_{13}^k Y_k$$

A continuación y procediendo de forma análoga, se deduce que

$$Jac(X_0,X_1,X_2) \Rightarrow [X_1,X_3] = 0 \quad \text{y} \quad [X_1,X_2] = \beta X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k$$

$Jac(X_0, X_{3-k}, Y_i) \quad 0 \leq k \leq 2 \quad 1 \leq i \leq n-4 \Rightarrow$

$$\begin{array}{lcll} [X_3,Y_i] & = & 0 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_2,Y_i] & = & a_{2i}X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_1,Y_i] & = & a_{2i}X_2 + a_{1i}X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} d_i^k Y_k & 1 \leq i \leq n-4 \end{array}$$

$Jac(X_0, Y_i, Y_j) \quad 1 \leq i < j \leq n-4 \Rightarrow$

$$[Y_i,Y_j] = b_{ij}X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} c_{ij}^k Y_k \quad 1 \leq i < j \leq n-4$$

Ha resultado ser X_3 central y se consigue la siguiente familia de leyes:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & \beta X_3 + \sum\limits_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] & = & a_{2i} X_2 + a_{1i} X_3 + \sum\limits_{k=1}^{n-4} d_i^k Y_k & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_2, Y_i] & = & a_{2i} X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_3 + \sum\limits_{k=1}^{n-4} c_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

Por inducción finita se va a probar que

$$c_{ij}^k = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-4 \quad 1 \leq k \leq n-4.$$

$\forall A \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se cumple que $X_0 + AY_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-5$ y la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + AY_1$ es:

$$ad(X_0 + AY_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - Aa_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -Aa_{11} & 1 - Aa_{21} & 0 & 0 & Ab_{12} & Ab_{13} & \ldots & Ab_{1,n-5} & Ab_{1,n-4} \\ 0 & -Ad_1^1 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^1 & Ac_{13}^1 & \ldots & Ac_{1,n-5}^1 & Ac_{1,n-4}^1 \\ 0 & -Ad_1^2 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^2 & Ac_{13}^2 & \ldots & Ac_{1,n-5}^2 & Ac_{1,n-4}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -Ad_1^{n-5} & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^{n-5} & Ac_{13}^{n-5} & \ldots & Ac_{1,n-5}^{n-5} & Ac_{1,n-4}^{n-5} \\ 0 & -Ad_1^{n-4} & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^{n-4} & Ac_{13}^{n-4} & \ldots & Ac_{1,n-5}^{n-4} & Ac_{1,n-4}^{n-4} \end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A \neq 0$ y $1 - Aa_{21} \neq 0$, lo que es siempre posible, y, al ser la sucesión característica $(3, 1, 1, \ldots, 1)$, se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 - Aa_{21} & 0 & 0 \\ -Aa_{11} & 1 - Aa_{21} & Ab_{1j} \\ -Ad_1^k & 0 & Ac_{1j}^k \end{vmatrix} = (1 - Aa_{21})^2 Ac_{1j}^k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{1j}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-4 \quad 2 \leq j \leq n-4.$$

Supóngase que las matrices $ad(X_0+AY_2), ad(X_0+AY_3), \ldots, ad(X_0+AY_{i-1})$ se han obtenido y de forma análoga, se ha encontrado que

$$c_{rj}^k = 0 \ , \quad 2 \le r \le i-1 \ , \quad 1 \le k \le n-4 \ , \quad r+1 \le j \le n-4.$$

En consecuencia, la matriz $ad(X_0 + AY_i)$ es:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1-Aa_{2i} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & -Aa_{1i} & 1-Aa_{2i} & 0 & -Ab_{1i} & \ldots & -Ab_{i-1,i} & 0 & Ab_{i,i+1} & \ldots & Ab_{i,n-4} \\
0 & -Ad_i^1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^1 & \ldots & Ac_{i,n-4}^1 \\
0 & -Ad_i^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^2 & \ldots & Ac_{i,n-4}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & -Ad_i^{n-5} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^{n-5} & \ldots & Ac_{i,n-4}^{n-5} \\
0 & -Ad_i^{n-4} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & Ac_{i,i+1}^{n-4} & \ldots & Ac_{i,n-4}^{n-4}
\end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A \neq 0$ y $1 - Aa_{2i} \neq 0$, se cumple que

$$\begin{vmatrix}
1-Aa_{2i} & 0 & 0 \\
-Aa_{1i} & 1-Aa_{2i} & Ab_{ij} \\
-Ad_i^k & 0 & Ac_{ij}^k
\end{vmatrix} = (1-Aa_{2i})^2 Ac_{ij}^k = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c_{ij}^k = 0 \ , \ 1 \le k \le n-4 \ , \ i+1 \le j \le n-4$, con lo que se ha probado que es cierto para $1 \le i \le n-5$.

Por tanto:

$$[Y_i, Y_j] = b_{ij} X_3 \quad 1 \le i < j \le n-4.$$

El vector $AX_0 + X_1$ tampoco pertenece a la derivada $\forall A \in \mathbb{K}$ y su matriz adjunta es:

$$ad(AX_0+X_1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
-1 & A & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-5} & a_{2,n-4} \\
0 & 0 & A+\beta & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-5} & a_{1,n-4} \\
0 & 0 & \alpha_1 & 0 & d_1^1 & d_2^1 & \ldots & d_{n-5}^1 & d_{n-4}^1 \\
0 & 0 & \alpha_2 & 0 & d_1^2 & d_2^2 & \ldots & d_{n-5}^2 & d_{n-4}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{n-5} & 0 & d_1^{n-5} & d_2^{n-5} & \ldots & d_{n-5}^{n-5} & d_{n-4}^{n-5} \\
0 & 0 & \alpha_{n-4} & 0 & d_1^{n-4} & d_2^{n-4} & \ldots & d_{n-5}^{n-4} & d_{n-4}^{n-4}
\end{pmatrix}$$

Si $\exists d_i^k \neq 0 \quad 1 \leq i, k \leq n-4$, siempre se puede elegir A tal que

$$A \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} A & 0 & a_{2i} \\ 0 & A+\beta & a_{1i} \\ 0 & \alpha_k & d_i^k \end{vmatrix} = A(Ad_i^k + \beta d_i^k - a_{1i}\alpha_k) \neq 0,$$

lo que es imposible al ser la sucesión característica $(3, 1, 1, \dots, 1)$. Luego, queda demostrado que

$$d_i^k = 0 \qquad y \qquad a_{1i}\alpha_k = 0 \quad , \quad 1 \leq i, k \leq n-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [X_1, Y_i] = a_{2i}X_2 + a_{1i}X_3 \quad 1 \leq i \leq n-4.$$

Además, con el cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} X_1^* &= X_1 - \beta X_0 & \\ X_j^* &= X_j & j = 0, 2, 3 \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \end{cases}$$

se puede suponer $\beta = 0$.

Se deduce que los productos no nulos de $\mathfrak{g}$, salvo antisimetría, son:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] &= \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] &= a_{2i}X_2 + a_{1i}X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_2, Y_i] &= a_{2i}X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij}X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4, \end{cases}$$

cumpliéndose $\quad a_{1i}\alpha_k = 0 \quad , \quad 1 \leq i, k \leq n-4.$

De las restantes identidades de Jacobi y de la adjunto-nilpotencia se obtienen más restricciones:

$Jac(X_1, X_2, Y_i) \quad 1 \leq i \leq n-4 \Rightarrow$

$$[Y_i, [X_1, X_2]] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k [Y_i, Y_k] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=2}^{n-4} \alpha_k b_{1k} & = 0 \\ \sum_{k=i+1}^{n-4} \alpha_k b_{ik} & = \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} \qquad 2 \leq i \leq n-5 \\ \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{k,n-4} & = 0. \end{cases}$$

El polinomio característico de

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-5} & a_{2,n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-5} & a_{1,n-4} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-5} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{n-4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha de ser λ^n y, entonces:

$$|\lambda I_n - ad(X_1)| = \lambda^n - (\sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k a_{2k})\lambda^{n-2} = \lambda^n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k a_{2k} = 0.$$

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_t^* = X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_i^* = Y_i + a_{2i} X_0 & 1 \leq i \leq n-4 \end{cases}$$

permite suponer $a_{2i} = 0 \quad 1 \leq i \leq n-4$. En efecto:

$$[X_0^*, X_i^*] = [X_0, X_i] = X_{i+1} = X_{i+1}^* \qquad 1 \leq i \leq 2$$

$$\begin{aligned} [X_1^*, X_2^*] &= [X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k = \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k (Y_k^* - a_{2k} X_0) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k^* - (\sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k a_{2k}) X_0 = \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k^* \end{aligned}$$

$$[X_1^*, Y_i^*] = [X_1, Y_i + a_{2i} X_0] = [X_1, Y_i] - a_{2i} X_2 = a_{1i} X_3^* \qquad 1 \leq i \leq n-4$$

$$\begin{aligned}
[X_2^*, Y_i^*] &= [X_2, Y_i + a_{2i}X_0] = [X_2, Y_i] - a_{2i}X_3 = 0 && 1 \le i \le n-4 \\
[Y_i^*, Y_j^*] &= [Y_i + a_{2i}X_0, Y_j + a_{2j}X_0] = [Y_i, Y_j] = b_{ij}X_3^* && 1 \le i < j \le n-4.
\end{aligned}$$

Se obtiene así que todo álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de sucesión característica $(3, 1, 1, \ldots, 1)$ es isomorfa a alguna de ley:

$$\begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\
[X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \\
[X_1, Y_i] = a_i X_3 & 1 \le i \le n-4 \qquad (a_i = a_{1i}) \\
[Y_i, Y_j] = b_{ij} X_3 & 1 \le i < j \le n-4,
\end{cases}$$

debiéndose cumplir:

$$\begin{cases}
\sum_{k=2}^{n-4} \alpha_k b_{1k} = 0 & \\
\sum_{k=i+1}^{n-4} \alpha_k b_{ik} = \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \le i \le n-5 \\
\sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{k,n-4} = 0. &
\end{cases}$$

□

Teorema 1.4 (Clasificación de las álgebras (n-3)-filiformes). *En dimensión $n, n \ge 5$, hay exactamente $n-2$ álgebras de Lie nilpotentes, reales o complejas, no isomorfas entre sí y de sucesión característica $(3, 1, 1, \ldots, 1)$, que se designan mediante $\mathfrak{g}_n^i$, $1 \le i \le n-2$ y cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$ mediante*

$$\mathfrak{g}_n^{2q-1}: \begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 2 \qquad 1 \le q \le E(\tfrac{n-2}{2}) \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_3 \quad 1 \le k \le q-1 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2s}: \begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 2 \qquad 1 \le s \le E(\tfrac{n-3}{2}) \\ [X_1, Y_{n-4}] &= X_3 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_3 \quad 1 \le k \le s-1 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_n^{n-2}: \begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 2 \\ [X_1, X_2] &= Y_{n-4} \end{aligned}$$

Demostración:

Todas las álgebras anteriores son nilpotentes y de sucesión característica $(3, 1, 1, \ldots, 1)$. Además, son no isomorfas entre sí porque las dimensiones del centro y de la derivada son:

$$\begin{array}{lcll} dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_n^i) & = & n-i-2 & 1 \leq i \leq n-3 \\ dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_n^{n-2}) & = & n-3 & \\ dim[\mathfrak{g}_n^i, \mathfrak{g}_n^i] & = & 2 & 1 \leq i \leq n-3 \\ dim[\mathfrak{g}_n^{n-2}, \mathfrak{g}_n^{n-2}] & = & 3. & \end{array}$$

Se acaba de probar que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(n-3)$-filiforme es isomorfa a una de ley

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] & = & a_i X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4, \end{array} \right.$$

con las restricciones

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sum_{k=2}^{n-4} \alpha_k b_{1k} & = & 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-4} \alpha_k b_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-5 \\ \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k b_{k,n-4} & = & 0. & \end{array} \right.$$

Como la dimensión de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es 2 ó 3 si son nulos todos los α_k o si existe alguno no nulo, respectivamente, se pueden considerar los dos casos que se analizan a continuación.

Primer caso: $\alpha_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-4$

Se cumple que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, Y_i] & = & a_i X_3 & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

* Si $b_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-4 \quad$ y $\quad a_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n-4$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^1$.

* Si $b_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-4$, y existe algún $a_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n-4$, se puede suponer $a_{n-4} \neq 0$ con un cambio de base evidente:

$$\begin{cases} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_{n-4}^* & = & Y_i & \\ Y_i^* & = & Y_{n-4} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \qquad k \notin \{i, n-4\}. \end{cases}$$

En este caso es posible suponer, además, que $a_{n-4} = 1$ y $a_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n-5$. Esto se consigue considerando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_{n-4}^* & = & \frac{1}{a_{n-4}} Y_{n-4} & \\ Y_i^* & = & -a_i Y_{n-4} + a_{n-4} Y_i & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

y se obtiene $\mathfrak{g}_n^2$.

* Si existe algún $b_{ij} \neq 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-4$, se puede suponer $b_{12} \neq 0$. Basta con efectuar el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_1^* & = & Y_i & \\ Y_2^* & = & Y_j & \\ Y_i^* & = & Y_1 & \\ Y_j^* & = & Y_2 & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \qquad k \notin \{1, 2, i, j\}. \end{cases}$$

Se puede, además, suponer $b_{12}=1, b_{1k}=0=b_{2k}$ $\;3 \leq k \leq n-4$ y $a_1=0=a_2$, sin más que hacer el cambio de base expresado por

$$\begin{cases} X_1^* &= X_1 - \frac{a_2}{b_{12}}Y_1 + \frac{a_1}{b_{12}}Y_2 & \\ X_t^* &= X_t & t=0,2,3 \\ Y_1^* &= \frac{1}{b_{12}}Y_1 & \\ Y_2^* &= Y_2 & \\ Y_k^* &= Y_k + \frac{b_{2k}}{b_{12}}Y_1 - \frac{b_{1k}}{b_{12}}Y_2 & 3 \leq k \leq n-4 \end{cases}$$

y se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_1, Y_2] &= X_3 & \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_3 & 3 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_3 & 3 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

* Si $b_{ij}=0, \quad 3 \leq i < j \leq n-4$ y $a_i = 0 \quad 3 \leq i \leq n-4$, se obtiene $\mathfrak{g}_n^3$.

* Si $b_{ij}=0, \quad 3 \leq i < j \leq n-4$, y existe algún $a_i \neq 0 \quad 3 \leq i \leq n-4$, se puede suponer $a_{n-4}=1$ y $a_i=0 \quad 3 \leq i \leq n-5$ sin más que hacer cambios de base análogos a algunos anteriores y se obtiene $\mathfrak{g}_n^4$.

* Si existe algún $b_{ij} \neq 0 \quad 3 \leq i < j \leq n-4$, se puede suponer $b_{34}=1$, $b_{3k}=0=b_{4k} \quad 5 \leq k \leq n-4$ y $a_3=0=a_4$ y se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_1, Y_2] &= X_3 & \\ [Y_3, Y_4] &= X_3 & \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_3 & 5 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_3 & 5 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

Si se continúa el proceso, resulta el álgebra $\mathfrak{g}$ dada isomorfa a alguna de las $\mathfrak{g}_n^k, \quad 1 \leq k \leq 2r-2$ ó a una que tenga por ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_3 & 1 \leq k \leq r-1 \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_3 & 2r-1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_3 & 2r-1 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

* Si $b_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-4$ y $a_i = 0 \quad \forall i \quad 2r-1 \leq i \leq n-4$, se obtiene el álgebra $\mathfrak{g}_n^{2r-1}$.

* Si $b_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-4$ y existe algún $a_i \neq 0 \quad 2r-1 \leq i \leq n-4$, se puede considerar $a_{n-4} \neq 0$.

También se puede suponer, además, que $a_{n-4} = 1$ y $a_i = 0 \quad 2r-1 \leq i \leq n-5$. Esto se consigue efectuando el cambio de base definido por

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq 2r-2 \\ Y_i^* & = & -a_i Y_{n-4} + a_{n-4} Y_i & 2r-1 \leq i \leq n-5 \\ Y_{n-4}^* & = & \frac{1}{a_{n-4}} Y_{n-4} & \end{array}\right.$$

y se obtiene $\mathfrak{g}_n^{2r}$.

* Si existe algún $b_{ij} \neq 0 \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-4$, se puede suponer $b_{2r-1,2r} \neq 0$. Basta con aplicar el siguiente cambio de base:

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_{2r-1}^* & = & Y_i & \\ Y_{2r}^* & = & Y_j & \\ Y_i^* & = & Y_{2r-1} & \\ Y_j^* & = & Y_{2r} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \quad k \notin \{2r-1, 2r, i, j\}. \end{array}\right.$$

Se puede, además, suponer $b_{2r-1,2r} = 1$ y $b_{2r-1,k} = 0 = b_{2r,k} \quad 2r+1 \leq k \leq n-4$ y $a_{2r-1} = 0 = a_{2r}$, sin más que considerar el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \quad t \neq 1 \\ X_1^* & = & X_1 - \frac{a_{2r}}{b_{2r-1,2r}} Y_{2r-1} + \frac{a_{2r-1}}{b_{2r-1,2r}} Y_{2r} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq 2r-2 \\ Y_{2r-1}^* & = & \frac{1}{b_{2r-1,2r}} Y_{2r-1} & \\ Y_{2r}^* & = & Y_{2r} & \\ Y_k^* & = & Y_k + \frac{b_{2r,k}}{b_{2r-1,2r}} Y_{2r-1} - \frac{b_{2r-1,k}}{b_{2r-1,2r}} Y_{2r} & 2r+1 \leq k \leq n-4. \end{array}\right.$$

Se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_3 & 1 \leq k \leq r \\ [X_1, Y_i] &= a_i X_3 & 2r+1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_3 & 2r+1 \leq i < j \leq n-4 \end{cases}$$

y se llega, de nuevo, a una situación parecida a las ya analizadas.

Es evidente que al final del proceso se obtiene el álgebra $\mathfrak{g}_n^{n-3}$, cuya ley depende de si n es impar o par.

Si n es impar $(E(\frac{n-4}{2}) = \frac{n-5}{2})$, la ley de $\mathfrak{g}_n^{n-3}$ es:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_3 & 1 \leq k \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_{n-4}] &=& X_3 & \end{array}$$

Si n es par $(E(\frac{n-4}{2}) = \frac{n-4}{2})$, la ley de $\mathfrak{g}_n^{n-3}$ es:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_3 & 1 \leq k \leq \frac{n-4}{2}. \end{array}$$

Las álgebras obtenidas constituyen las dos subfamilias enunciadas en el teorema.

Segundo caso: $\alpha_k \neq 0$ **para algún** $1 \leq k \leq n-4$

Como debe cumplirse $a_i \alpha_k = 0 \quad 1 \leq i \leq n-4$, se deduce que $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n-4$. Además, se puede suponer que $\alpha_{n-4} \neq 0$.

El cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \\ Y_{n-4}^* &= \sum_{k=1}^{n-4} \alpha_k Y_k & \end{cases}$$

nos dice que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] &= Y_{n-4} & \\ [Y_i, Y_j] &= b_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

El vector $X_1 + Y_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y su matriz adjunta es:

$$ad(X_1+Y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Por ser $\mathfrak{g}$ un álgebra $(n-3)$-filiforme, cualquier menor de orden tres es nulo; luego:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1j} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b_{1j} = 0 \quad 2 \leq j \leq n-4.$$

Se consideran las matrices $ad(X_1+Y_k)$ $2 \leq k \leq i-1$ y, de forma similar, se demuestra que

$$b_{rj} = 0 \quad 2 \leq r \leq i-1 \qquad r+1 \leq j \leq n-4.$$

Entonces,

$$ad(X_1+Y_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{i,i+1} & b_{i,i+2} & \dots & b_{i,n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{ij} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b_{ij} = 0 \quad i+1 \leq j \leq n-4, \quad \text{siendo cierto para} \quad 1 \leq i \leq n-5.$$

En consecuencia, se obtiene la ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-4} & \end{cases}$$

que corresponde a $\mathfrak{g}_n^{n-2}$.

$\square$

Obsérvese que en el caso de dimensión 4 las álgebras $(n-3)$-filiformes son las de sucesión característica $(3,1)$; es decir, las filiformes. Para esta dimensión sólo se obtiene un álgebra, la modelo.

1.3 Algebras (n-4)-filiformes

Teorema 1.5 (Familia de álgebras (n-4)-filiformes). *En dimensión n, la ley de un álgebra de Lie nilpotente compleja y de sucesión característica* $(4,1,1,\ldots,1)$, *puede ser expresada en una base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ *mediante*

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k & \epsilon \in \{0,1\} \\
[X_2, Y_i] & = & a_{2i} X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\
[X_1, Y_i] & = & a_{2i} X_3 + a_{1i} X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\
[Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5,
\end{array}$$

donde los escalares que aparecen están sujetos a las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{lcll}
a_{2i}\alpha_k & = & 0 & 1 \leq i,k \leq n-5 \\
\sum_{k=2}^{n-5} \alpha_k b_{1k} & = & 0 & \\
\sum_{k=i+1}^{n-5} \alpha_k b_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-6 \\
\sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k b_{k,n-5} & = & 0. &
\end{array}\right.$$

Demostración:

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, compleja, de dimensión n y sucesión característica $(4,1,1,\ldots,1)$.

Si $X_0 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es un vector característico y $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ es una base adaptada, se ha de cumplir que

$$\left\{\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_0, X_4] & = & 0 & \\
[X_0, Y_j] & = & 0 & 1 \leq j \leq n-5.
\end{array}\right.$$

Utilizando sucesivamente la identidad de Jacobi y el hecho de ser los vectores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5} \notin Im\ ad(X_0)$ se obtiene que la ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$
\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_1, X_4] & = & \beta_{14}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_{14}^k Y_k & \\
[X_2, X_3] & = & \beta_{23}X_4 - \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_{14}^k Y_k & \\
[X_1, X_3] & = & (\beta_{14} + \beta_{23})X_3 + \beta_{13}X_4 & \\
[X_1, X_2] & = & (\beta_{14} + \beta_{23})X_2 + \beta_{13}X_3 + \beta_{12}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_{12}^k Y_k & \\
[X_3, Y_i] & = & a_{3i}X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\
[X_2, Y_i] & = & a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\
[X_1, Y_i] & = & a_{3i}X_2 + a_{2i}X_3 + a_{1i}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} d_i^k Y_k & 1 \leq i \leq n-5 \\
[Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} c_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-5.
\end{array}
$$

El cambio de base definido por

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \qquad t \neq 1 \\
X_1^* & = & X_1 - \beta_{13}X_0 & \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5,
\end{array}
\right.
$$

prueba que toda ley de las anteriores es isomorfa a una que verifique que $\beta_{23} = -\beta_{14}$ y $\beta_{13} = 0$, lo que permite suponer que

$$
\begin{array}{lcl}
[X_1, X_3] & = & 0 \\
[X_1, X_2] & = & \beta_{12}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_{12}^k Y_k
\end{array}
$$

y el resto de la familia no cambia.

$\forall A \in \mathbb{C}$ se cumple que $X_0 + AY_i \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-6$ y la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + AY_1$ es:

$$ad(X_0{+}AY_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-Aa_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Aa_{21} & 1-Aa_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Aa_{11} & -Aa_{21} & 1-Aa_{31} & 0 & 0 & Ab_{12} & \dots & Ab_{1,n-5} \\ 0 & -Ad_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^1 & \dots & Ac_{1,n-5}^1 \\ 0 & -Ad_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^2 & \dots & Ac_{1,n-5}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -Ad_1^{n-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & Ac_{12}^{n-5} & \dots & Ac_{1,n-5}^{n-5} \end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A \neq 0$ y $1 - Aa_{31} \neq 0$, lo que es siempre posible, y, al ser la sucesión característica $(4,1,1,\dots,1)$, se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1-Aa_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -Aa_{21} & 1-Aa_{31} & 0 & 0 \\ -Aa_{11} & -Aa_{21} & 1-Aa_{31} & Ab_{1j} \\ -Ad_1^k & 0 & 0 & Ac_{1j}^k \end{vmatrix} = (1-Aa_{31})^3 Ac_{1j}^k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{1j}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \quad 2 \leq j \leq n-5.$$

Un simple proceso de inducción finita prueba que se puede admitir siempre que

$$c_{ij}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5\ , \quad i+1 \leq j \leq n-5\ , \quad 1 \leq i \leq n-6,$$

con lo que resulta $\qquad [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_4 \quad 1 \leq i < j \leq n-5.$

El vector $AX_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ $\forall A \in \mathbb{K}$ y su matriz adjunta es:

$$ad(AX_0 + X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & A & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-5} \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-5} \\ 0 & 0 & \beta_{12} & A & \beta_{14} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-5} \\ 0 & 0 & \alpha_{12}^1 & 0 & \alpha_{14}^1 & d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_{n-5}^1 \\ 0 & 0 & \alpha_{12}^2 & 0 & \alpha_{14}^2 & d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_{n-5}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{12}^{n-5} & 0 & \alpha_{14}^{n-5} & d_1^{n-5} & d_2^{n-5} & \dots & d_{n-5}^{n-5} \end{pmatrix}$$

Sea $A \neq 0$ y al ser la sucesión característica $(4, 1, 1, \ldots, 1)$, se cumple que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{12} & A & \beta_{14} \\ 0 & \alpha_{12}^k & 0 & \alpha_{14}^k \end{vmatrix} = A^3\alpha_{14}^k = 0 \quad \Rightarrow \alpha_{14}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5.$$

Entonces:

$$[X_1, X_4] = \beta_{14}X_4 \quad \text{y} \quad \text{por} \quad \text{nilpotencia} \quad \beta_{14} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [X_1, X_4] = 0 \quad \text{y} \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Si $\exists d_i^k \neq 0 \quad 1 \leq i, k \leq n-5$, siempre se puede elegir A tal que

$$A \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & a_{3i} \\ 0 & A & 0 & a_{2i} \\ 0 & \beta_{12} & A & a_{1i} \\ 0 & \alpha_{12}^k & 0 & d_i^k \end{vmatrix} = A^2(Ad_i^k - a_{2i}\alpha_{12}^k) \neq 0,$$

lo que es imposible. Luego, queda demostrado que

$$d_i^k = 0 \qquad y \qquad a_{2i}\alpha_{12}^k = 0 \quad , \quad 1 \leq i, k \leq n-5 \Rightarrow$$

$$[X_1, Y_i] = a_{3i}X_2 + a_{2i}X_3 + a_{1i}X_4 \quad 1 \leq i \leq n-5.$$

El vector X_4 ha resultado ser un elemento central y la ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \beta_{12}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k & (\alpha_{12}^k = \alpha_k) \\ [X_3, Y_i] & = & a_{3i}X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_2, Y_i] & = & a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_1, Y_i] & = & a_{3i}X_2 + a_{2i}X_3 + a_{1i}X_4 & 1 \leq i \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5, \end{array}$$

cumpliéndose $a_{2i}\alpha_k = 0 \quad 1 \leq i, k \leq n-5.$

A continuación se extraen condiciones que deben cumplir $\alpha_k \quad 1 \leq k \leq n-5$, debidas a la identidad de Jacobi y al polinomio característico de la matriz adjunta correspondiente al vector X_1, que ha de ser λ^n.

$Jac(X_1, X_2, Y_i) \quad 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow$

$$[Y_i, [X_1, X_2]] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k [Y_i, Y_k] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n-5} \alpha_k b_{1k} & = 0 \\ \sum\limits_{k=i+1}^{n-5} \alpha_k b_{ik} & = \sum\limits_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} \qquad 2 \leq i \leq n-6 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-6} \alpha_k b_{k,n-5} & = 0. \end{cases}$$

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-5} \\ 0 & 0 & \beta_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-5} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I_n - ad(X_1)| = \lambda^n - (\sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k a_{3k}) \lambda^{n-2} = \lambda^n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k a_{3k} = 0.$$

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_t^* & = X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_i^* & = Y_i + a_{3i} X_0 & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

permite suponer $a_{3i} = 0 \quad 1 \leq i \leq n-5$.

Si $\beta_{12} \neq 0$, se puede suponer $\beta_{12} = 1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_0^* & = & \sqrt{\beta_{12}}X_0 & \\ X_1^* & = & X_1 & \\ X_2^* & = & \sqrt{\beta_{12}}X_2 & \\ X_3^* & = & \beta_{12}X_3 & \\ X_4^* & = & \sqrt{\beta_{12}^3}X_4 & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5, \end{array}\right.$$

lo que prueba el teorema.

□

Se observa que aumenta el número de parámetros y el de restricciones. Cuanto más se aleja p de $n-1$ más inconvenientes aparecen en la clasificación de las álgebras p-filiformes, como queda confirmado en el siguiente teorema, cuya demostración no se incluye por ser similar a la del anterior. Surge así la necesidad de idear nuevos métodos de clasificación.

1.4 Algebras (n-5)-filiformes

En esta sección se presenta la familia genérica de álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes.

Teorema 1.6. *En dimensión n, la ley de un álgebra de Lie nilpotente compleja y $(n-5)$-filiforme puede ser expresada, siendo $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-6}\}$ una base adaptada, mediante*

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] & = & cX_4 + dX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, X_3] & = & cX_5 & \\ [X_1, X_4] & = & eX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k & \\ [X_2, X_3] & = & -eX_5 - \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] & = & a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & 1 \leq i \leq n-6 \\ [X_2, Y_i] & = & a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 & 1 \leq i \leq n-6 \\ [X_3, Y_i] & = & a_{3i}X_5 & 1 \leq i \leq n-6 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_5 & 1 \leq i < j \leq n-6, \end{array}$$

donde los escalares que aparecen deben cumplir:

$$\begin{cases} a_{3i}\beta_k = 0 \quad \text{y} \quad a_{3i}\alpha_k + a_{1i}\beta_k = 0 & 1 \leq i, k \leq n-6 \\ \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k a_{2k} = 0 & \\ \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k a_{3k} = \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k a_{1k} & \\ \sum_{k=2}^{n-6} \alpha_k b_{1k} = 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-6} \alpha_k b_{ik} = \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-7 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k b_{k,n-6} = 0 & \\ \sum_{k=2}^{n-6} \beta_k b_{1k} = 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-6} \beta_k b_{ik} = \sum_{r=1}^{i-1} \beta_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-7 \\ \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k b_{k,n-6} = 0. & \end{cases}$$

Demostración:

Es análoga a las anteriores.

$\square$

Capítulo 2

Clasificación de las álgebras (n-4)-filiformes por extensiones centrales

Como se ha visto en el capítulo anterior, la clasificación de las álgebras p-filiformes se hace cada vez más compleja al disminuir p, lo que nos lleva a desarrollar técnicas más eficientes. En este capítulo se expone un método que permite obtener la clasificación de las álgebras $(n-4)$-filiformes. Por claridad en la exposición, la justificación del proceso a seguir se va a hacer en términos del invariante de Goze y no en términos de p-filiformidad, aunque sea equivalente decir que un álgebra de Lie de dimensión n es p-filiforme que afirmar que su invariante de Goze es $(n-p, 1, \stackrel{(p}{\ldots}, 1)$.

Supóngase $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n y $(n-4)$-filiforme. Si se obtiene su cociente por un ideal central unidimensional, el álgebra cociente resultante tendrá dimensión $n-1$ y su invariante de Goze valdrá, bien $(3, 1, \stackrel{(n-4}{\ldots}, 1)$, bien $(4, 1, \stackrel{(n-5}{\ldots}, 1)$. En este segundo caso se puede volver a obtener el álgebra cociente por un ideal central unidimensional, obteniéndose un álgebra cociente de dimensión $n-2$ e invariante de Goze, bien $(3, 1, \stackrel{(n-5}{\ldots}, 1)$, bien $(4, 1, \stackrel{(n-6}{\ldots}, 1)$. Si se continúa el proceso (que ha de tener fin por ser n finito, luego $dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ también) es obvio que se llegará a obtener siempre un álgebra cociente de invariante de Goze $(3, 1, \stackrel{(n-k}{\ldots}, 1)$ (si la dimensión de la "última" álgebra cociente ha resultado ser $n-k+3$).

El proceso a seguir va a ser, en cierta medida, el inverso al que se acaba de describir. Lo que se va a hacer en primer lugar es determinar las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n e invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$ que se pueden obtener como extensiones centrales de álgebras de dimensión $n-1$ e invariante de Goze $(3, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$, a las que se va a denominar extensiones centrales de primera generación.

Posteriormente se buscarán las extensiones centrales de estas álgebras que sigan teniendo invariante de Goze $(4, 1, \ldots, 1)$ (en el sentido de hallar las álgebras de Lie de dimensión n e invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$ que sean extensiones centrales de álgebras de dimensión $n-1$, invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-5}{\ldots}, 1)$ y que sean de las obtenidas en la primera generación). A estas álgebras se les denominará extensiones centrales de segunda generación.

El proceso continúa, obteniéndose las álgebras $(n-4)$-filiformes de tercera generación, cuarta generación, etc., hasta que en una generación no aparezca ninguna nueva álgebra, momento en el cual el proceso se detendrá, pues ya se habrán obtenido todas las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes.

El método que se acaba de describir puede aplicarse, en principio, para álgebras de Lie nilpotentes cualquiera que sea su invariante de Goze, aún cuando la descripción del mismo se ha hecho, por conveniencia, para las $(n-4)$-filiformes.

Se va a probar en el presente capítulo que todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n e invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$ se obtienen como extensiones centrales de primera generación de tres únicas álgebras de dimensión $n-1$ e invariante de Goze $(3, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$ (la "primera" de cada una de las dos familias con dimensión de la derivada 2 y la única con dimensión de la derivada 3).

2.1 Clasificación por extensiones centrales

Lema 2.1. *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación, será extensión de alguna de las siguientes álgebras $[(n-1)-3]$-filiformes de dimensión $n-1$, cuyas leyes, respecto a una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$, se expresan mediante*

$$\begin{array}{lrcll} \mathfrak{g}_{n-1}^1: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ \\ \mathfrak{g}_{n-1}^2: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ \\ \mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \end{array}$$

Demostración:

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión n e invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$ que es extensión central de primera generación de un álgebra $\mathfrak{g}^*$, de dimensión $n-1$ e invariante de Goze $(3, 1, \overset{(n-4}{\ldots}, 1)$, se sigue que ha de existir en $\mathfrak{g}$ un ideal unidimensional central $< Z >$ tal que $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g} / < Z >$. Si no existieran en $\mathfrak{g}$ un vector característico X_0 y unos vectores X_1, X_2, X_3 tales que $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ $1 \le i \le 2$ y $[X_0, X_3] = Z$, se sigue que $\mathfrak{g}^*$ tendría invariante de Goze $(4, 1, \overset{(n-5}{\ldots}, 1)$, en contra de lo supuesto. Por tanto, se puede encontrar una base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ (donde se ha designado por X_4 al vector Z) tal que $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g} / < X_4 >$. Por lo visto en el capítulo anterior, la ley de $\mathfrak{g}$ puede expresarse, respecto a dicha base, mediante

$$\begin{array}{rcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [X_2, Y_i] & = & a_{2i} X_4 & 1 \le i \le n-5 \\ [X_1, Y_i] & = & a_{2i} X_3 + a_{1i} X_4 & 1 \le i \le n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & b_{ij} X_4 & 1 \le i < j \le n-5, \end{array}$$

cumpliéndose:

$$\begin{cases} a_{2i}\alpha_k & = 0 & 1 \le i, k \le n-5 \\ \sum_{k=2}^{n-5} \alpha_k b_{1k} & = 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-5} \alpha_k b_{ik} & = \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \le i \le n-6 \\ \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k b_{k,n-5} & = 0, & \end{cases}$$

por lo que la ley de $\mathfrak{g}^*$, respecto de la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-5}\}$ se expresa mediante

$$\begin{array}{rcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k & \\ [X_1, Y_i] & = & a_i X_3 & 1 \le i \le n-5 \qquad (a_i = a_{2i}), \end{array}$$

cumpliéndose:

$$a_i \alpha_k = 0 \qquad 1 \le i, k \le n-5,$$

donde se ha mantenido la misma denominación para los vectores de las bases de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$, aún cuando en el segundo caso se trata de “clases” de vectores.

Hay que distinguir dos casos:

Caso 1: $\alpha_k = 0 \quad 1 \le k \le n-5$

Se cumple que $\mathfrak{g}^*$ es isomorfa a un álgebra de ley:

$$\begin{array}{rcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_1, Y_i] & = & a_i X_3 & 1 \le i \le n-5. \end{array}$$

* Si $a_i = 0 \quad 1 \le i \le n-5$, se obtiene $\mathfrak{g}_{n-1}^1$.

* Si existe algún $a_i \ne 0 \quad 1 \le i \le n-5$, se puede suponer $a_{n-5} \ne 0$ con un cambio de base evidente:

$$\begin{cases} X_t^* & = X_t & 0 \le t \le 3 \\ Y_{n-5}^* & = Y_i & \\ Y_i^* & = Y_{n-5} & \\ Y_k^* & = Y_k & 1 \le k \le n-5 \qquad k \notin \{i, n-5\}. \end{cases}$$

En este caso es posible suponer, además, que $a_{n-5} = 1$ y $a_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n-6$. Esto se consigue considerando el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_{n-5}^* & = & \frac{1}{a_{n-5}} Y_{n-5} & \\ Y_i^* & = & -a_i Y_{n-5} + a_{n-5} Y_i & 1 \leq i \leq n-6 \end{array} \right.$$

y se obtiene $\mathfrak{g}_{n-1}^2$.

Caso 2: $\alpha_k \neq 0$ **para algún** $1 \leq k \leq n-5$

Como debe cumplirse $a_i \alpha_k = 0 \quad 1 \leq i \leq n-5$, se deduce que $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n-5$.

Además, se puede suponer que $\alpha_{n-5} \neq 0$.

El cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-5} \alpha_k Y_k & \end{array} \right.$$

nos dice que $\mathfrak{g}^*$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$.

$\square$

Ya se verá más adelante que todas las álgebras $(n-4)$-filiformes de dimensión n son extensiones centrales de primera generación de estas tres álgebras.

Corolario 2.2. *En dimensión n, la ley de un álgebra de Lie nilpotente compleja, de sucesión característica $(4,1,1,\dots,1)$ y que sea una extensión central de primera generación, en una base $\{X_0,X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-5},Z\}$, donde $Z\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, puede ser expresada mediante*

$$\begin{array}{lcll}
[X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 2\\
[X_0,X_3] & = & \alpha Z & \\
[X_0,Y_j] & = & d_jZ & 1\le j\le n-5\\
[X_1,X_2] & = & AY_{n-5}+aZ & \\
[X_1,X_3] & = & Ad_{n-5}Z & \\
[X_1,Y_j] & = & b_jZ & 1\le j\le n-6\\
[X_1,Y_{n-5}] & = & BX_3+b_{n-5}Z & \\
[X_2,Y_{n-5}] & = & B\alpha Z & \\
[Y_i,Y_j] & = & c_{ij}Z & 1\le i<j\le n-5,
\end{array}$$

cumpliéndose

$$Ac_{j,n-5}=0 \qquad 1\le j\le n-6,$$

y donde el par (A,B), puede tomar únicamente los valores:

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0).$$

Demostración:

Del lema anterior se deduce que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y extensión central de primera generación, admite una cierta base $\{X_0,X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-5},Z\}$, con $Z\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, respecto de la cual la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\begin{array}{lclll}
[X_0,X_i] & = & X_{i+1}+\beta_iZ & 1\le i\le 2 & \\
[X_0,X_3] & = & \alpha Z & & \\
[X_0,Y_j] & = & d_jZ & 1\le j\le n-5 & \\
[X_1,X_2] & = & AY_{n-5}+a_{12}Z & & \\
[X_i,X_j] & = & a_{ij}Z & 1\le i<j\le 3 & (i,j)\ne(1,2)\\
[X_1,Y_j] & = & b_{1j}Z & 1\le j\le n-6 & \\
[X_1,Y_{n-5}] & = & BX_3+b_{1,n-5}Z & & \\
[X_i,Y_j] & = & b_{ij}Z & 2\le i\le 3 & 1\le j\le n-5\\
[Y_i,Y_j] & = & c_{ij}Z & 1\le i<j\le n-5, &
\end{array}$$

y donde (A,B), puede tomar los valores:

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0)$$

dependiendo de que $\mathfrak{g}$ sea extensión central, respectivamente, de una u otra de las álgebras $[(n-1)-3]$-filiformes:

$$\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_{n-1}^{1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2, \\
\\
\mathfrak{g}_{n-1}^{2}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
\\
\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} &
\end{array}$$

Se puede suponer $\beta_1 = 0 = \beta_2$, sin más que aplicar el cambio de base definido por las relaciones

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_i^* & = & X_i & 0 \leq i \leq 1 \\
X_t^* & = & X_t + \beta_{t-1} Z & 2 \leq t \leq 3 \\
Z^* & = & Z & \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5.
\end{array}\right.$$

A continuación, al verificar que $\mathfrak{g}$ satisface la identidad de Jacobi, se obtiene una simplificación de algunos productos corchete y ciertas restricciones:

$Jac(X_0, X_1, X_3) \Rightarrow$

$$[X_2, X_3] = 0 \Rightarrow a_{23} = 0.$$

$Jac(X_0, X_2, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-5 \Rightarrow$

$$[X_3, Y_j] = 0 \Rightarrow b_{3j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-5.$$

$Jac(X_0, X_1, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \Rightarrow$

$$[X_2, Y_j] = 0 \Rightarrow b_{2j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6.$$

$Jac(X_0, X_1, Y_{n-5}) \Rightarrow$

$$[X_0, [X_1, Y_{n-5}]] = [X_2, Y_{n-5}] \Rightarrow [X_0, BX_3 + b_{1,n-5} Z] = [X_2, Y_{n-5}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\alpha Z = b_{2,n-5} Z \Rightarrow b_{2,n-5} = B\alpha.$$

$Jac(X_0, X_1, X_2) \Rightarrow$

$$[X_0, [X_1, X_2]] = [X_1, X_3] \Rightarrow [X_0, AY_{n-5}+a_{12}Z] = [X_1, X_3] \Rightarrow A[X_0, Y_{n-5}] = [X_1, X_3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ad_{n-5}Z = a_{13}Z \Rightarrow Ad_{n-5} = a_{13}.$$

$Jac(X_1, X_2, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \Rightarrow$

$$[Y_j, [X_1, X_2]] = 0 \Rightarrow [Y_j, AY_{n-5} + a_{12}Z] = 0 \Rightarrow A[Y_j, Y_{n-5}] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ac_{j,n-5}Z = 0 \Rightarrow Ac_{j,n-5} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6.$$

Si se designan mediante a y b_j , $1 \leq j \leq n-5$, a a_{12} y b_{1j} $1 \leq j \leq n-5$, respectivamente, queda demostrado el resultado.

□

Se va a enunciar a continuación un teorema con el listado de las leyes de las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes de dimensión n. En un primer momento se probará que éstas son las de primera generación aunque, tal como ya se indicó antes, se verá más adelante que toda álgebra de Lie $(n-4)$-filiforme es de primera generación.

Teorema 2.3 (Clasificación de las álgebras (n-4)-filiformes). *En dimensión $n, n \geq 8$, hay exactamente 6n-29 álgebras de Lie nilpotentes complejas, no isomorfas entre sí, $(n-4)$-filiformes y tales que, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ pueden ser expresadas sus leyes mediante*

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{2,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{5,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{6,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\ & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{7,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\ & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{8,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{9,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-6}{2}) \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{10,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{11,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{12,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1. \end{array}$$

Solamente cuando n es impar:

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}.$$

Demostración:

Es evidente que para que al menos exista un álgebra de cada una de las 12 familias ha de ser $dim(\mathfrak{g}) = n \geq 8$.

Estas álgebras son no isomorfas dos a dos porque dos cualesquiera de ellas difieren en la dimensión de alguno de los invariantes siguientes:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & = & \{X \in \mathfrak{g} \ : [X, Z] = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{g} \} & \\
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & = & [\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] & \\
\mathcal{C}en(\mathfrak{h}) & = & \{X \in \mathfrak{g} \ : [X, Z] = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{h} \} & (\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}) \\
\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) & = & \{X \in \mathfrak{g} \ : [X, \mathfrak{g}] \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\} & \\
[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] & = & \{[X, Z] \ : X \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{h}\} & (\mathfrak{h} \text{ subálgebra de } \mathfrak{g})
\end{array}$$

tal como queda reflejado en las tablas que a continuación se adjuntan. En las dos primeras se excluyen la última álgebra de cada familia porque en dichos casos las dimensiones varían según la paridad de n.

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$dim\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_1 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_1)$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}_n^{1,r}$	$n-2r-2$	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{2,r}$	$n-2r-2$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{3,r}$	$n-2r-3$	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{4,r}$	$n-2r-3$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{5,r}$	$n-2r-3$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{6,r}$	$n-2r-4$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{7,r}$	$n-2r-4$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{8,r}$	$n-2r-4$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{9,r}$	$n-2r-5$	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{10,r}$	$n-2r-2$	4	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{11,r}$	$n-2r-3$	4	$n-2$		$n-1$
$\mathfrak{g}_n^{12,r}$	$n-2r-3$	4	$n-2$		$n-2$

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{C}_2(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_2 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}_2(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_2)$	$dim\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2]$
$\mathfrak{g}_n^{1,r}$	$n-3$			3
$\mathfrak{g}_n^{2,r}$	$n-3$			3
$\mathfrak{g}_n^{3,r}$	$n-3$			2
$\mathfrak{g}_n^{4,r}$	$n-3$			2
$\mathfrak{g}_n^{5,r}$	$n-4$	$n-2r+1$	$n-4$	3
$\mathfrak{g}_n^{6,r}$	$n-4$	$n-2r$	$n-2$	3
$\mathfrak{g}_n^{7,r}$	$n-4$	$n-2r$	$n-4$	3
$\mathfrak{g}_n^{8,r}$	$n-4$	$n-2r$	$n-4$	2
$\mathfrak{g}_n^{9,r}$	$n-4$	$n-2r-1$	$n-3$	2
$\mathfrak{g}_n^{10,r}$				
$\mathfrak{g}_n^{11,r}$				
$\mathfrak{g}_n^{12,r}$				

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$dim\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_1 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_1)$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-5}{2})}$	2	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-5}{2})}$	2	3	$n-2$	5	
$\mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-2$	5	
$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-7}{2})}$	3	3			
$\mathfrak{g}_n^{7,E(\frac{n-5}{2})}$	1	3	$n-2$	3	
$\mathfrak{g}_n^{8,E(\frac{n-5}{2})}$	1	3	$n-2$	3	
$\mathfrak{g}_n^{9,E(\frac{n-6}{2})}$	2	3	$n-2$	5	
$\mathfrak{g}_n^{10,E(\frac{n-4}{2})}$	3	4	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{11,E(\frac{n-5}{2})}$	2	4	$n-2$		$n-1$
$\mathfrak{g}_n^{12,E(\frac{n-4}{2})}$	2	4	$n-2$		$n-2$

n impar

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{C}_2(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_2 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}_2(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_2)$	$dim\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2]$
$\mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$	$n-3$			
$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-5}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-3$			
$\mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}$	$n-4$			
$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-7}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{7,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-4$	5		3
$\mathfrak{g}_n^{8,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-4$	5		2
$\mathfrak{g}_n^{9,E(\frac{n-6}{2})}$	$n-4$			
$\mathfrak{g}_n^{10,E(\frac{n-4}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{11,E(\frac{n-5}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{12,E(\frac{n-4}{2})}$				

n impar

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{C}_2(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_2 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}_2(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_2)$	$dim\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2]$
$\mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$	$n-3$			
$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})}$	$n-3$			
$\mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}$	$n-4$		$n-4$	
$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-4$			
$\mathfrak{g}_n^{7,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-4$	6		3
$\mathfrak{g}_n^{8,E(\frac{n-5}{2})}$	$n-4$	6		2
$\mathfrak{g}_n^{9,E(\frac{n-6}{2})}$	$n-4$		$n-3$	
$\mathfrak{g}_n^{10,E(\frac{n-4}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{11,E(\frac{n-5}{2})}$				
$\mathfrak{g}_n^{12,E(\frac{n-4}{2})}$				

n par

$\mathfrak{g}$	$dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	$dim\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	$dim\ (\mathfrak{h}_1 = \mathcal{C}en(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})))$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathfrak{h}_1)$	$dim\ \mathcal{C}en(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$	2	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$	2	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-1$		
$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}$	1	3	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})}$	2	3	$n-2$	6	
$\mathfrak{g}_n^{7,E(\frac{n-5}{2})}$	2	3	$n-2$	4	
$\mathfrak{g}_n^{8,E(\frac{n-5}{2})}$	2	3	$n-2$	4	
$\mathfrak{g}_n^{9,E(\frac{n-6}{2})}$	1	3	$n-2$	5	
$\mathfrak{g}_n^{10,E(\frac{n-4}{2})}$	2	4	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{11,E(\frac{n-5}{2})}$	3	4	$n-2$		
$\mathfrak{g}_n^{12,E(\frac{n-4}{2})}$	1	4	$n-2$		

***n* par**

Resta probar, para terminar el teorema, que toda álgebra $(n-4)$-filiforme es isomorfa a alguna de las anteriores. Para hacer más asequible el seguimiento de este proceso, se van a encontrar separadamente las que proceden de cada una de las $\mathfrak{g}_{n-1}^1$, $\mathfrak{g}_{n-1}^2$, $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$ (es decir, las de primera generación). Para una mayor claridad se van a enunciar en forma de tres teoremas independientes que van a constituir, cada uno, una sección del presente capítulo. Posteriormente, en otra sección, se probará que entre las álgebras de segunda generación no aparece ninguna nueva, lo que termina la clasificación.

□

2.2 Extensiones centrales de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^1$

Corresponde al caso $(A, B) = (0, 0)$.

Teorema 2.4. *Toda álgebra de Lie nilpotente compleja $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^1$ es isomorfa a alguna de las álgebras de Lie de leyes*

$$\begin{array}{llcllr}
\mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-3}{2}) \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
\mathfrak{g}_n^{2,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-3}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
\mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-3}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 & \\
\mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-3}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

y, cuando n es impar, se tiene que

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}.$$

Demostración:

Como se probó en un corolario anterior, se puede expresar la ley de toda extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^1$, respecto de una cierta base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}, Z\}$, en la forma

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\
[X_0, X_3] & = & \alpha Z & \\
[X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \le j \le n-5 \\
[X_1, X_2] & = & a Z & \\
[X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \le j \le n-5 \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \le i < j \le n-5.
\end{array}$$

Se ha de verificar que $\alpha \neq 0$ porque, si $\alpha = 0$, al considerar:

$$X_0^* = \sum_{i=0}^{3} A_i^0 X_i + \sum_{j=1}^{n-5} B_j^0 Y_j + C^0 Z$$

$$X_1^* = \sum_{i=0}^{3} A_i^1 X_i + \sum_{j=1}^{n-5} B_j^1 Y_j + C^1 Z,$$

se deduce, al ser Z un vector de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, que

$$\begin{array}{lcl} [X_0^*, X_1^*] & = & X_2^* \in < X_2, X_3, Z > \\ [X_0^*, X_2^*] & = & X_3^* \in < X_3, Z > \\ [X_0^*, X_3^*] & = & 0 \end{array}$$

y, en consecuencia, no aparecería ningún álgebra $(n-4)$ -filiforme.

Tras aplicar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ X_4^* & = & \alpha Z & \\ Y_j^* & = & Y_j & 1 \leq j \leq n-5, \end{array} \right.$$

la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar como:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_0, Y_j] & = & d_j X_4 & 1 \leq j \leq n-5 \\ [X_1, X_2] & = & a X_4 & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j X_4 & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{array}$$

Se puede suponer $d_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n-5$, sin más que hacer el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_j^* & = & Y_j - d_j X_3 & 1 \leq j \leq n-5. \end{array} \right.$$

Se cumple, también, que $a \in \{0, 1\}$, porque, si $a \neq 0$, con el cambio de base definido por las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_0^* & = & \sqrt{a} X_0 & \\ X_1^* & = & X_1 & \\ X_2^* & = & \sqrt{a} X_2 & \\ X_3^* & = & a X_3 & \\ X_4^* & = & \sqrt{a^3} X_4 & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5, \end{array} \right.$$

se puede suponer $a = 1$, de donde, sin más que hacer $a = \epsilon$, se sigue que la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_j] & = & b_j X_4 & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{array}$$

Se van a distinguir ahora diferentes casos, según sean nulos todos los b_{ij} o no y también se distinguirá si $\epsilon = 0$ ó $\epsilon = 1$.

En todos los casos se estudiarán si los c_{ij} son nulos o no y cuáles pueden anularse en cada situación.

Primer Caso: $b_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n-5$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{array} \right.$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 1 \leq i < j \leq n-5$, se obtienen las álgebras siguientes, dependiendo del valor de ϵ:

$$\mathfrak{g}_n^{1,1} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,1} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \end{array} \right.$$

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 1 \leq i < j \leq n-5$, se puede suponer siempre que $c_{12} \neq 0$ mediante un cambio de base trivial.

Se puede, además, suponer que $c_{12} = 1$ y $c_{1k} = 0 = c_{2k} \quad 3 \leq k \leq n-5$, sin más que aplicar el cambio de base expresado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_1^* & = & \frac{1}{c_{12}} Y_1 & \\ Y_2^* & = & Y_2 & \\ Y_k^* & = & Y_k + \frac{c_{2k}}{c_{12}} Y_1 - \frac{c_{1k}}{c_{12}} Y_2 & 3 \leq k \leq n-5, \end{array} \right.$$

y se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 3 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i,j \quad 3 \le i < j \le n-5$, se obtienen las álgebras:

$$\mathfrak{g}_n^{1,2} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 & \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,2} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 & \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 & \end{cases}$$

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 3 \le i < j \le n-5$, se puede suponer $c_{34} = 1$ y $c_{3k} = 0 = c_{4k} \quad 5 \le k \le n-5$, y para demostrarlo es suficiente considerar cambios de base análogos a algunos anteriores. Se obtiene un álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 & \\ [Y_3, Y_4] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 5 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

Si se continúa el proceso, resulta el álgebra $\mathfrak{g}$ dada isomorfa a alguna de las $\mathfrak{g}_n^{1,k}$, $\mathfrak{g}_n^{2,k}$ $\quad 1 \le k \le r-1$ ó a una que tenga por ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 & 1 \le k \le r-1 \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 2r-1 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i,j \quad 2r-1 \le i < j \le n-5$, se obtienen las álgebras siguientes, dependiendo del valor de ϵ:

$$\mathfrak{g}_n^{1,r} : \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-5$, se puede suponer que $c_{2r-1,2r} \neq 0$ y que $c_{2r-1,2r} = 1$, $c_{2r-1,k} = 0 = c_{2r,k}$, $2r+1 \leq k \leq n-5$, y se obtiene el álgebra de ley

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 2r+1 \leq i < j \leq n-5 \end{array} \right.$$

llegándose, de nuevo, a una situación parecida a las ya consideradas.

Es evidente que el proceso finaliza cuando $r = E(\frac{n-5}{2}) + 1 = E(\frac{n-3}{2})$, por lo que surgen las familias:

$$\mathfrak{g}_n^{1,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

Segundo Caso: $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n-5\} : b_j \neq 0$

El álgebra $\mathfrak{g}$ dada es isomorfa a una de ley:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_j] & = & b_j X_4 & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{array}$$

Los cambios de base definidos por las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_j & \\ Y_j^* & = & Y_{n-5} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \quad k \notin \{j, n-5\} \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_j^* & = & b_{n-5} Y_j - b_j Y_{n-5} & 1 \leq j \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & \frac{1}{b_{n-5}} Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

permiten, el primero, suponer $b_{n-5} \neq 0$ y, el segundo, $b_{n-5} = 1$ y $b_j = 0$ $1 \leq j \leq n-6$. Entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{array} \right.$$

Los casos que se van a considerar ahora son, esquemáticamente, los siguientes:

1) $c_{ij} = 0$ $1 \leq i < j \leq n-6$ y se distingue según sea $c_{i,n-5} = 0$ $1 \leq i \leq n-6$ o exista algún $c_{i,n-5} \neq 0$.

2) existe $c_{ij} \neq 0$ $1 \leq i < j \leq n-6$. Se puede suponer $c_{12} = 1$, $c_{1k} = 0 = c_{2k}$, $3 \leq k \leq n-5$.

2.1) $c_{ij} = 0$ $3 \leq i < j \leq n-6$ y se distingue según sean todos los $c_{i,n-5}$ nulos o no.

2.2) existe $c_{ij} \neq 0$ $3 \leq i < j \leq n-6 \Rightarrow c_{34} = 1$, $c_{3k} = 0 = c_{4k}$, $5 \leq k \leq n-5$ (además de $c_{12} = 1$, $c_{1k} = 0 = c_{2k}$, $3 \leq k \leq n-5$, naturalmente) y así sucesivamente. En realidad, lo que se hace es un proceso de inducción finita.

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i,j \quad 1 \leq i < j \leq n-5$, se obtienen las álgebras siguientes, dependiendo del valor de ϵ:

$$\begin{array}{lrcll} \mathfrak{g}_n^{3,1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ \mathfrak{g}_n^{4,1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i,j \quad 1 \leq i < j \leq n-6$ y existe algún $c_{i,n-5} \neq 0$ $1 \leq i \leq n-6$, se puede suponer $c_{1,n-5} \neq 0$.

Subcaso: $\epsilon = 0$

La ley viene determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_i, Y_{n-5}] & = & c_{i,n-5} X_4 & 1 \leq i \leq n-6. \end{array} \right.$$

con $c_{1,n-5} \neq 0$.

Aplicando el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_0^* & = & X_0 & \\ X_1^* & = & c_{1,n-5} X_1 - Y_1 & \\ X_t^* & = & c_{1,n-5} X_t & 2 \leq t \leq 4 \\ Y_1^* & = & Y_1 & \\ Y_i^* & = & c_{1,n-5} Y_i - c_{i,n-5} Y_1 & 2 \leq i \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

se obtiene que

$$
\begin{aligned}
[X_0^*, X_1^*] &= [X_0, c_{1,n-5}X_1 - Y_1] = c_{1,n-5}X_2 = X_2^* \\
[X_0^*, X_t^*] &= [X_0, c_{1,n-5}X_t] = c_{1,n-5}X_{t+1} = X_{t+1}^* \quad 2 \leq t \leq 3 \\
[X_1^*, Y_{n-5}^*] &= [c_{1,n-5}X_1 - Y_1, Y_{n-5}] = c_{1,n-5}[X_1, Y_{n-5}] - [Y_1, Y_{n-5}] = \\
&= (c_{1,n-5} - c_{1,n-5}).X_4 = 0.X_4 = 0 \\
[Y_1^*, Y_{n-5}^*] &= [Y_1, Y_{n-5}] = c_{1,n-5}X_4 = X_4^* \\
[Y_i^*, Y_{n-5}^*] &= [c_{1,n-5}Y_i - c_{i,n-5}Y_1, Y_{n-5}] = c_{1,n-5}[Y_i, Y_{n-5}] - c_{i,n-5}[Y_1, Y_{n-5}] = \\
&= (c_{1,n-5}c_{i,n-5} - c_{i,n-5}c_{1,n-5}).X_4 = 0.X_4 = 0 \quad 2 \leq i \leq n-6
\end{aligned}
$$

y se consigue el álgebra de ley:

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [Y_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array} \right.
$$

que es obviamente, isomorfa a

$$
\mathfrak{g}_n^{1,2} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [Y_1, Y_2] & = & X_4 & \end{array} \right.
$$

ya obtenida anteriormente.

Subcaso: $\epsilon = 1$

La ley viene determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_{n-5}] &= c_{i,n-5}X_4 & 1 \le i \le n-6, \end{cases}$$

con $c_{1,n-5} \neq 0$.

Con el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \le t \le 4 \\ Y_1^* &= \frac{1}{c_{1,n-5}}Y_1 & \\ Y_i^* &= c_{1,n-5}Y_i - c_{i,n-5}Y_1 & 2 \le i \le n-6 \\ Y_{n-5}^* &= Y_{n-5} & \end{cases}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} [X_0^*, X_i^*] &= X_{i+1}^* \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1^*, X_2^*] &= X_4^* \\ [X_1^*, Y_{n-5}^*] &= [X_1, Y_{n-5}] = X_4 = X_4^* \\ [Y_1^*, Y_{n-5}^*] &= [\tfrac{1}{c_{1,n-5}}Y_1, Y_{n-5}] = \tfrac{1}{c_{1,n-5}}.c_{1,n-5}.X_4 = X_4 = X_4^* \\ [Y_i^*, Y_{n-5}^*] &= [c_{1,n-5}Y_i - c_{i,n-5}Y_1, Y_{n-5}] = c_{1,n-5}[Y_i, Y_{n-5}] - c_{i,n-5}[Y_1, Y_{n-5}] = \\ &= (c_{1,n-5}c_{i,n-5} - c_{i,n-5}c_{1,n-5}).X_4 = 0.X_4 = 0 \quad 2 \le i \le n-6 \end{aligned}$$

y queda demostrado que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_1, Y_{n-5}] &= X_4 & \end{cases}$$

Los cambios de base sucesivos:

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \le t \le 4 & t \neq 1 \\ X_1^* &= X_1 - Y_1 & & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \le k \le n-5 & \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \le t \le 4 \\ Y_1^* &= Y_1 \\ Y_2^* &= Y_{n-5} \\ Y_k^* &= Y_k & 3 \le k \le n-6 \\ Y_{n-5}^* &= Y_2 \end{cases}$$

demuestran que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a:

$$\mathfrak{g}_n^{2,2} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \end{cases}$$

ya obtenida anteriormente.

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 1 \le i < j \le n-6$, se puede suponer siempre que $c_{12} \neq 0$ y que $c_{12} = 1$, $c_{1k} = 0 = c_{2k}$, $3 \le k \le n-5$, tras cambios de base análogos a algunos anteriores, obteniéndose el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 3 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 3 \le i < j \le n-5$, se obtienen las álgebras:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_n^{3,2} : \quad [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_n^{4,2} : \quad [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \end{aligned}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 3 \le i < j \le n-6$ y existe algún $c_{i,n-5} \neq 0$ $3 \le i \le n-6$, se puede suponer $c_{3,n-5} \neq 0$, y considerando cambios de base

análogos a algunos anteriores se demuestra que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a alguna de las álgebras de leyes

$$\mathfrak{g}_n^{1,3} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \\ [Y_3, Y_4] &= X_4 \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,3} : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \\ [Y_3, Y_4] &= X_4 \end{cases}$$

ambas aparecidas anteriormente.

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 3 \le i < j \le n-6$, se puede suponer $c_{34} = 1$ y $c_{3k} = 0 = c_{4k} \quad 5 \le k \le n-5$, y se obtiene la ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 \quad \epsilon \in \{0, 1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_1, Y_2] &= X_4 \\ [Y_3, Y_4] &= X_4 \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 \quad 5 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

Si se continúa el proceso, resulta el álgebra $\mathfrak{g}$ dada isomorfa a alguna de las $\mathfrak{g}_n^{4,k}, \mathfrak{g}_n^{5,k}, \mathfrak{g}_n^{1,k^*}, \mathfrak{g}_n^{2,k^*} \quad 1 \le k \le r-1 \quad 1 \le k^* \le r$, ó a una que tenga por ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 \quad 1 \le k \le r-1 \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 \quad 2r-1 \le i < j \le n-5. \end{cases}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad 2r-1 \le i < j \le n-5$, se obtienen las álgebras siguientes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_n^{3,r} : \quad [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le 3 \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 \quad 1 \le k \le r-1 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

* Si $c_{ij} = 0 \quad \forall i,j \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-6$ y existe algún $c_{i,n-5} \neq 0$ $2r-1 \leq i \leq n-6$, se puede suponer $c_{2r-1,n-5} \neq 0$. Basta con efectuar el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_{2r-1}^* & = & Y_i & \\ Y_i^* & = & Y_{2r-1} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \qquad k \notin \{2r-1, i\} \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

Subcaso: $\epsilon = 0$

La ley viene determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 \\ [Y_i, Y_{n-5}] & = & c_{i,n-5} X_4 & 2r-1 \leq i \leq n-6. \end{array} \right.$$

Los cambios de base sucesivos:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_0^* & = & X_0 & \\ X_1^* & = & c_{2r-1,n-5} X_1 - Y_{2r-1} & \\ X_t^* & = & c_{2r-1,n-5} X_t & 2 \leq t \leq 4 \\ Y_{2k-1}^* & = & c_{2r-1,n-5} Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq r-1 \\ Y_{2k}^* & = & Y_{2k} & 1 \leq k \leq r-1 \\ Y_{2r-1}^* & = & Y_{2r-1} & \\ Y_j^* & = & c_{2r-1,n-5} Y_j - c_{j,n-5} Y_{2r-1} & 2r \leq j \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_{2r}^* & = & Y_{n-5} & \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{2r} & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \qquad k \neq 2r \end{array} \right.$$

demuestran que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a

$$\mathfrak{g}_n^{1,r+1}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r, \end{array}$$

ya obtenida anteriormente.

Subcaso: $\epsilon = 1$

La ley viene determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \\ [Y_i, Y_{n-5}] & = & c_{i,n-5}X_4 & 2r-1 \le i \le n-6. \end{array} \right.$$

Con el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \le t \le 4 \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \le k \le 2r-2 \\ Y_{2r-1}^* & = & \frac{1}{c_{2r-1,n-5}} Y_{2r-1} & \\ Y_i^* & = & c_{2r-1,n-5}Y_i - c_{i,n-5}Y_{2r-1} & 2r \le i \le n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

se obtienen los siguientes productos corchete no nulos, salvo antisimetría:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array} \right.$$

y haciendo sucesivamente los cambios:

$$\left\{ \begin{array}{lclll} X_t^* & = & X_t & 0 \le t \le 4 & t \ne 1 \\ X_1^* & = & X_1 - Y_{2r-1} & & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \le k \le n-5 & \end{array} \right.$$

y

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_{2r}^* &= Y_{n-5} & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \qquad k \neq 2r \\ Y_{n-5}^* &= Y_{2r} & \end{cases}$$

se demuestra que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_n^{2,r+1}: & [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [X_1, X_2] &= X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 & 1 \leq k \leq r. \end{array}$$

* Si existe algún $c_{ij} \neq 0 \quad 2r-1 \leq i < j \leq n-6$, se puede suponer que $c_{2r-1,2r} = 1$ y $c_{2r-1,k} = 0 = c_{2r,k} \quad 2r+1 \leq k \leq n-5$. Se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 & 1 \leq k \leq r \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 2r+1 \leq i < j \leq n-5 \end{cases}$$

llegándose a una situación parecida a las ya consideradas.

El último paso del proceso se realiza cuando $r = E(\frac{n-5}{2})$, y se observa que $r+1 = E(\frac{n-3}{2})$. En consecuencia, cuando aparecen $\mathfrak{g}_n^{1,r+1}$ y $\mathfrak{g}_n^{2,r+1}$, se trata de álgebras ya obtenidas anteriormente. Por lo que en este caso, surgen las familias:

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, X_2] &= X_4 & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &= X_4 & 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Caso particular : n impar

Se cumple que $E(\frac{n-3}{2}) = \frac{n-3}{2}$.
El cambio de base:

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ X_1^* &= X_1 - Y_{n-6} & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \end{cases}$$

aplicado al álgebra

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} : \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 & 1 \leq k \leq \frac{n-5}{2} \end{array}$$

demuestra que $\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$, y aplicado al álgebra

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} : \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &=& X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 & 1 \leq k \leq \frac{n-5}{2} \end{array}$$

demuestra que $\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$.

□

2.3 Extensiones centrales de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^2$

Corresponde al caso $(A, B) = (0, 1)$.

Teorema 2.5. *Toda álgebra de Lie nilpotente compleja $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^2$ es isomorfa a alguna de las álgebras de Lie de leyes*

$$\mathfrak{g}_n^{5,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \quad 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \quad 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] &=& X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{7,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \quad 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, X_2] &=& X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] &=& X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{8,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \quad 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, Y_{n-6}] &=& X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{9,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \quad 1 \leq r \leq E(\frac{n-6}{2}) \\ [X_1, Y_{n-6}] &=& X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &=& X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] &=& X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] &=& X_4 & \end{array}$$

y cuando n es impar,

$$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}.$$

Demostración:

Es bastante más laboriosa pero, en esencia, análoga a la del teorema anterior, por lo que se omite.

□

2.4 Extensiones centrales de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$

Corresponde al caso $(A, B) = (1, 0)$.

Ahora se debe verificar que $c_{j,n-5} = 0 \quad 1 \le j \le n-6$. Por tanto, toda álgebra $\mathfrak{g}$ $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$ es isomorfa a una de ley

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\
[X_0, X_3] & = & \alpha Z & \\
[X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \le j \le n-5 \\
[X_1, X_2] & = & Y_{n-5} + a Z & \\
[X_1, X_3] & = & d_{n-5} Z & \\
[X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \le j \le n-5 \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \le i < j \le n-6.
\end{array}$$

Como ahora se tiene que los vectores $X_2, X_3, Y_{n-5} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, se sigue que podría ser α nulo o no, a diferencia de los otros dos casos en que necesariamente había de ser α no nulo. Se van a estudiar en las subsecciones siguientes los casos $\alpha \neq 0$ y $\alpha = 0$.

2.4.1 Extensiones centrales de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$, caso $\alpha \neq 0$

Teorema 2.6. *Toda álgebra de Lie nilpotente compleja $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$ con $\alpha \neq 0$ (en el sentido explicado anteriormente) es isomorfa a alguna de las álgebras de Lie de leyes*

$$\begin{array}{llclll}
\mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llclll}
\mathfrak{g}_n^{11,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & & \\
& [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 &
\end{array}$$

$$
\mathfrak{g}_n^{12,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1. \end{array}
$$

Demostración:

Tal como se ha visto, toda álgebra de Lie de las consideradas en este teorema es isomorfa a una de ley

$$
\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_0, X_3] & = & \alpha Z & \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \le j \le n-5 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} + aZ & \\ [X_1, X_3] & = & d_{n-5} Z & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \le j \le n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \le i < j \le n-6. \end{array}
$$

Además, se puede suponer que

$$
\alpha = 1 \quad d_j = 0 \quad 1 \le j \le n-6 \quad \text{y} \quad a = 0,
$$

sin más que aplicar sucesivamente los cambios de base siguientes:

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \le t \le 3 \\ X_4^* & = & \alpha Z & \\ Y_j^* & = & Y_j & 1 \le j \le n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} + aZ & \end{array} \right.
$$

y

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \le t \le 4 \\ Y_j^* & = & Y_j - d_j X_3 & 1 \le j \le n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5}\,. & \end{array} \right.
$$

Entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ se convierte en

$$
\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \\ [X_0, Y_{n-5}] & = & d_{n-5} X_4 & \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, X_3] & = & d_{n-5} X_4 & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j X_4 & 1 \le j \le n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \le i < j \le n-6. \end{array}
$$

Además, se puede suponer $d_{n-5} = 0$, sin más que hacer seguidamente los siguientes cambios de base:

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_{n-5}^* &= Y_{n-5} - d_{n-5}X_3 & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 4 & t \neq 1 \\ X_1^* &= X_1 - d_{n-5}X_0 & & \\ Y_j^* &= Y_j & 1 \leq j \leq n-5. & \end{cases}$$

En consecuencia, los productos corchete no nulos de $\mathfrak{g}$,salvo antisimetría, son:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &=& Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_j] &=& b_j X_4 & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] &=& c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Se deben distinguir ahora los casos $b_{n-5} = 0$ y $b_{n-5} \neq 0$.

Cuando $b_{n-5} = 0$ se deben estudiar por separado los casos en que sean $b_j = 0$, $1 \leq j \leq n-6$, o bien exista algún $b_j \neq 0$.

Cuando $b_{n-5} \neq 0$ se puede probar que se pueden suponer nulos todos los restantes b_j. En todos los casos se va a distinguir la nulidad o no de los c_{ij}.

El proceso es, en todo, análogo al seguido para el caso de las extensiones centrales de $\mathfrak{g}_{n-1}^1$ o $\mathfrak{g}_{n-1}^2$ y no se desarrollará.

□

2.4.2 Extensiones centrales de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$, caso $\alpha = 0$

Este caso, que no es especialmente complicado, es, sin embargo, un poco distinto a los anteriores, por lo que se desarrollará de nuevo con detalle.

Se va a probar que las álgebras que aparecen como extensiones centrales de primera generación del álgebra $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$ en el caso $\alpha = 0$ son algunas de las ya descritas anteriomente.

Teorema 2.7. *Toda álgebra de Lie nilpotente compleja $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y que sea extensión central de primera generación de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$ con $\alpha = 0$ (en el sentido explicado anteriormente) es isomorfa a alguna de las álgebras de Lie de leyes*

$$\mathfrak{g}_n^{10,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{11,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{12,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

Demostración:

Por lo visto anteriormente, se tiene que toda álgebra $\mathfrak{g}$ de las que estamos considerando debe ser isomorfa a alguna de ley determinada por

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-5 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} + aZ & \\ [X_1, X_3] & = & d_{n-5} Z & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Se puede suponer, además, que $a = 0$, sin más que hacer el cambio:

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Z^* &= Z & \\ Y_j^* &= Y_j & 1 \leq j \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* &= Y_{n-5} + aZ. & \end{cases}$$

Caso 1: $d_{n-5} \neq 0$

Se puede suponer:

$$d_{n-5} = 1 \quad \text{y} \quad b_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6,$$

sin más que aplicar sucesivamente los cambios de base siguientes:

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Z^* &= d_{n-5}Z & \\ Y_j^* &= Y_j & 1 \leq j \leq n-5 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Z^* &= Z & \\ Y_j^* &= Y_j - b_j X_3 & 1 \leq j \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* &= Y_{n-5} & \end{cases}$$

Entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ se convierte en

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_{n-5}] &=& Z & \\ [X_1, X_2] &=& Y_{n-5} & \\ [X_1, X_3] &=& Z & \\ [X_0, Y_j] &=& d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\ [X_1, Y_{n-5}] &=& b_{n-5} Z & \\ [Y_i, Y_j] &=& c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Si $b_{n-5} \neq 0$, se puede suponer $b_{n-5} = 1$ sin más que efectuar el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_0^* &= X_0 & \\ X_t^* &= \frac{1}{b_{n-5}} X_t & 1 \leq t \leq 3 \\ Z^* &= \frac{1}{b_{n-5}^2} Z & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* &= \frac{1}{b_{n-5}^2} Y_{n-5} & \end{cases}$$

y, entonces, los productos corchete no nulos de $\mathfrak{g}$, salvo antisimetría, son:

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_0, Y_{n-5}] & = & Z & \\
[X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
[X_1, X_3] & = & Z & \\
[X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & \epsilon Z & \epsilon \in \{0, 1\} \qquad (\epsilon = b_{n-5}) \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6.
\end{array}$$

Se va ahora a probar que $d_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6$.

* Si $\epsilon = 0$, para demostrarlo basta únicamente con hacer el cambio de base expresado por

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\
Z^* & = & Z & \\
Y_j^* & = & Y_j - d_j Y_{n-5} & 1 \leq j \leq n-6 \\
Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} &
\end{array}\right.$$

* Si $\epsilon = 1$ y $\exists d_j \neq 0 \quad j \in \{1, 2, \ldots, n-6\}$ se puede suponer, con un cambio de base evidente, que $d_{n-6} \neq 0$. Los cambios sucesivos:

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\
Z^* & = & Z & \\
Y_j^* & = & d_{n-6} Y_j - d_j Y_{n-6} & 1 \leq j \leq n-7 \\
Y_{n-6}^* & = & \frac{1}{d_{n-6}} Y_{n-6} & \\
Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} &
\end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\
Z^* & = & Z & \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \qquad k \neq n-6 \\
Y_{n-6}^* & = & Y_{n-6} - Y_{n-5} + X_3 &
\end{array}\right.$$

demuestran que, efectivamente, se pueden suponer nulos todos los d_j $1 \leq j \leq n-6$.

En consecuencia, el álgebra $\mathfrak{g}$ dada es isomorfa a una de ley:

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_0, Y_{n-5}] & = & Z & \\
[X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
[X_1, X_3] & = & Z & \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & \epsilon Z & \epsilon \in \{0,1\} \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6.
\end{array}$$

Al aplicar seguidamente los cambios de base siguientes:

$$\left\{\begin{array}{lclll}
X_0^* & = & X_0 + X_1 & & \\
X_t^* & = & X_t & 1 \leq t \leq 2 & \\
X_3^* & = & X_3 + Y_{n-5} & & \\
X_4^* & = & (2+\epsilon) Z & & \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2}+1 \\
Y_k^* & = & (2+\epsilon) Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2} \\
Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & &
\end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{lclll}
X_0^* & = & X_0 & & \\
X_1^* & = & iX_0 - \frac{(2+\epsilon)i}{1+\epsilon} X_1 & & \\
X_t^* & = & -\frac{(2+\epsilon)i}{1+\epsilon} X_t & 2 \leq t \leq 4 & \\
Y_k^* & = & -\frac{(2+\epsilon)i}{1+\epsilon} Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2}+1 \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2} \\
Y_{n-5}^* & = & \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} X_3 - (\frac{2+\epsilon}{1+\epsilon})^2 Y_{n-5} & &
\end{array}\right.$$

se obtienen, respectivamente, las leyes isomorfas a la de $\mathfrak{g}$ siguientes:

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_0, Y_{n-5}] & = & \frac{1+\epsilon}{2+\epsilon} X_4 & \\
[X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
[X_1, X_3] & = & \frac{1+\epsilon}{2+\epsilon} X_4 & \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & \frac{\epsilon}{2+\epsilon} X_4 & \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & -\frac{(2+\epsilon)i}{(1+\epsilon)^3} X_4 = \beta X_4 & \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6.
\end{array}$$

Se observa que $\beta \neq 0 \quad \forall \epsilon \in \{0,1\}$ y se puede suponer $\beta = 1$, sin más que hacer el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0^* &= X_0 & & \\ X_t^* &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} X_t & 1 \leq t \leq 4 & \\ Y_k^* &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2}+1 \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-6 & k = \dot{2} \\ Y_{n-5}^* &= \frac{1}{\beta} Y_{n-5} & & \end{cases}$$

Luego, la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6, \end{array}$$

que es el caso en que se obtienen, en la sección anterior, las álgebras de la familia

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{12,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

De todas formas, el proceso a seguir para obtener la familia $\mathfrak{g}_n^{12,r}$ de la familia genérica anterior es ya, prácticamente, evidente.

Caso 2: $d_{n-5} = 0$

El álgebra $\mathfrak{g}$ dada es isomorfa a una de ley:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \leq j \leq n-5 \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Se cumple que $b_{n-5} \neq 0$, porque si $b_{n-5} = 0$, la ley anterior no puede corresponder a un álgebra $(n-4)$-filiforme. En efecto, si

$$X_0^* = \sum_{i=0}^{3} A_i^0 X_i + \sum_{j=1}^{n-5} B_j^0 Y_j + C^0 Z$$

$$X_1^* = \sum_{i=0}^{3} A_i^1 X_i + \sum_{j=1}^{n-5} B_j^1 Y_j + C^1 Z,$$

se deduce, al ser Z un vector de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, que

$$\begin{array}{lcl} [X_0^*, X_1^*] & = & X_2^* \in < X_2, X_3, Z, Y_{n-5} > \\ [X_0^*, X_2^*] & = & X_3^* \in < X_3, Y_{n-5} > \\ [X_0^*, X_3^*] & = & 0. \end{array}$$

Además, se puede suponer $b_{n-5} = 1$ y $b_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6$, sin más que hacer el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Z^* & = & b_{n-5} Z & \\ Y_j^* & = & b_{n-5} Y_j - b_j Y_{n-5} & 1 \leq j \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} & \end{array} \right.$$

En consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & Z & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Caso 2.1: $d_j = 0 \qquad 1 \leq j \leq n-6$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & Z & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Al aplicar sucesivamente los cambios de base siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_0^* & = & X_0 + X_1 & \\ X_t^* & = & X_t & 1 \leq t \leq 2 \\ X_3^* & = & X_3 + Y_{n-5} & \\ X_4^* & = & Z & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{lclll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 & t \neq 1 \\ X_1^* & = & X_1 - X_0 & & \\ Y_{n-5}^* & = & Y_{n-5} - X_3 & & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6, & \end{array} \right.$$

se obtienen, respectivamente, las leyes isomorfas a la de $\mathfrak{g}$ siguientes:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_0, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, X_3] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

De esta familia de álgebras se obtiene, trivialmente, la familia

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Caso 2.2: $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n-6\} : d_j \neq 0$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & Z & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Cambios de base análogos a algunos anteriores permiten suponer que $d_{n-6} = 1$ y $d_j = 0$, $1 \leq j \leq n-7$, con lo que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_{n-6}] & = & Z & \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & Z & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Al efectuar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_0^* & = & X_1 & \\ X_1^* & = & X_0 & \\ X_2^* & = & -X_2 & \\ X_3^* & = & -Y_{n-5} & \\ X_4^* & = & -Z & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-7 \\ Y_{n-6}^* & = & -Y_{n-6} & \\ Y_{n-5}^* & = & -X_3 & \end{array} \right.$$

se demuestra que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley:

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-6. \end{array}$$

Es ya fácil probar que la ley de $\mathfrak{g}$ puede corresponder a cualquiera de las álgebras siguientes:

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & \qquad 2 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{g}_n^{11,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 & 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & & \\ & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1. & \end{array}$$

y, en consecuencia, cuando se consideran extensiones centrales de $\mathfrak{g}_{n-1}^{n-3}$, siendo $\alpha = 0$, no surge ninguna álgebra nueva.

□

Se concluye que están clasificadas todas las álgebras $(n-4)$-filiformes de primera generación y solamente falta confirmar que entre las extensiones centrales de estas doce familias en dimensión $n-1$ y que sigan teniendo el invariante de Goze $(4, 1, \ldots, 1)$, es decir, entre las extensiones centrales de segunda generación, no aparece ninguna nueva.

2.5 Extensiones centrales de segunda generación

Para cerrar la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes $(n-4)$-filiformes de dimensión n sólo resta probar que no falta ninguna en la lista dada en el teorema de la sección **2.1** y, para ello, se va a demostrar que entre las álgebras $(n-4)$-filiformes que son extensiones centrales de segunda generación no aparece ninguna que no sea también extensión central de primera generación. Esto constituye el objetivo de la presente sección.

Teorema 2.8. *Todas las álgebras de Lie nilpotentes $(n-4)$-filiformes de dimensión n que son extensiones centrales de segunda generación son, también, extensiones centrales de primera generación.*

Demostración:

Habrá que estudiar, caso por caso, las extensiones centrales de segunda generación de cada una de las doce familias de álgebras de primera generación. Se desarrollará con detalle el caso de la familia $\mathfrak{g}_{n-1}^{1,r}$, dado que los restantes son, en lo fundamental, análogos.

Caso 1 : Extensiones centrales de la familia de álgebras $\mathfrak{g}_{n-1}^{1,r}$ $1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2})$

Las leyes de la familia de álgebras $\mathfrak{g}_{n-1}^{1,r}$, $1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2})$ se pueden expresar mediante

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_{n-1}^{1,r} : & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente $(n-4)$-filiforme, de dimensión n y extensión central de alguna de la familia de álgebras de dimensión $n-1$ que se ha designado mediante $\mathfrak{g}_{n-1}^{1,r}$. La ley de $\mathfrak{g}$ se podrá expresar como

$$\begin{array}{lcllll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} + \beta_i Z & 1 \leq i \leq 3 & \\ [X_0, X_4] & = & \alpha Z & & \\ [X_0, Y_j] & = & d_j Z & 1 \leq j \leq n-6 & \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq 4 & \\ [X_i, Y_j] & = & b_{ij} Z & 1 \leq i \leq 4 & 1 \leq j \leq n-6 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 + c_{2k-1,2k} Z & 1 \leq k \leq r-1 & \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} Z & 1 \leq i < j \leq n-6 & (i,j) \neq (2k-1, 2k) \\ & & & 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Es evidente que $\alpha = 0$ porque de lo contrario la ley anterior correspondería a un álgebra $(n-5)$-filiforme.

Se puede también suponer que $\beta_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$, sin más que aplicar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 1 \\ X_j^* & = & X_j + \beta_{j-1} Z & 2 \leq j \leq 4 \\ Z^* & = & Z & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6. \end{array} \right.$$

Se obtienen a continuación restricciones de los parámetros al exigir que se verifique la identidad de Jacobi:

$$Jac(X_0, X_3, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \quad \Rightarrow \quad b_{4j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6$$

$$Jac(X_0, X_2, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \quad \Rightarrow \quad b_{3j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6$$

$$Jac(X_0, X_1, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \quad \Rightarrow \quad b_{2j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n-6$$

$$\begin{aligned} Jac(X_0,X_1,X_4) &\Rightarrow & a_{24}=0 \\ Jac(X_0,X_2,X_4) &\Rightarrow & a_{34}=0 \\ Jac(X_0,X_1,X_3) &\Rightarrow & a_{23}=-a_{14} \\ Jac(X_0,X_1,X_2) &\Rightarrow & a_{13}=0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{array}{lcllr} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\leq i\leq 3 & \\ [X_0,Y_j] & = & d_jZ & 1\leq j\leq n-6 & \\ [X_1,X_2] & = & a_{12}Z & & \\ [X_1,X_4] & = & a_{14}Z & & \\ [X_2,X_3] & = & -a_{14}Z & & \\ [X_1,Y_j] & = & b_jZ & 1\leq j\leq n-6 & (b_j=b_{1j}) \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4+c_{2k-1,2k}Z & 1\leq k\leq r-1 & \\ [Y_i,Y_j] & = & c_{ij}Z & 1\leq i<j\leq n-6 & (i,j)\neq(2k-1,2k) \\ & & & 1\leq k\leq r-1. & \end{array}$$

$\forall A\in\mathbb{K}$ se sigue que AX_0+Y_j , $1\leq j\leq n-7$, no pertenece al álgebra derivada y la matriz adjunta correspondiente al vector AX_0+Y_1 es:

$$ad(AX_0+Y_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & \epsilon & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & Ad_1 & Ad_2+c_{12} & \dots & Ad_{n-6}+c_{1,n-6} & 0 \end{pmatrix}$$

donde ϵ toma los valores 0 ó 1 dependiendo de si $r=1$ ó $r>1$.

Si se elige $A \neq 0$, al tener que ser la sucesión característica $(4, 1, 1, \ldots, 1)$, se cumple que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & Ad_1 \end{vmatrix} = A^4 d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = 0.$$

Si $\exists d_k \neq 0 \quad 2 \leq k \leq n-6$, siempre se puede elegir A tal que $A \neq 0$ y

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \epsilon \\ -b_1 & 0 & 0 & Ad_2 + c_{12} \end{vmatrix} = A^3(Ad_2 + c_{12}) \neq 0 \quad \text{si} \quad k = 2$$

ó

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & Ad_k + c_{1k} \end{vmatrix} = A^3(Ad_k + c_{1k}) \neq 0 \quad \text{si} \quad 3 \leq k \leq n-6,$$

lo que es imposible. En consecuencia, queda demostrado que

$$\begin{array}{rcll} d_k & = & 0 & 1 \leq k \leq n-6 \\ c_{1k} & = & 0 & 2 \leq k \leq n-6. \end{array}$$

Si se calculan las matrices $ad(AX_0 + Y_2), ad(AX_0 + Y_3), \ldots, ad(AX_0 + Y_{i-1})$, se puede probar, de forma análoga, que

$$c_{rj} = 0 \ , \ 2 \leq r \leq i-1 \ , \ r+1 \leq j \leq n-6,$$

y, entonces

$$ad(AX_0+Y_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & \ldots & \epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{i,i+1} & c_{i,i+2} & \cdots & c_{i,n-6} & 0 \end{pmatrix}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 valen 0 ó 1 en función de la paridad de i y de que sea $r \geq i$ o no. En cualquier caso, como máximo sólo uno de ellos puede ser no nulo.

Si se elige $A \neq 0$ se cumple que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \epsilon_2 \\ -b_i & 0 & 0 & c_{i,i+1} \end{vmatrix} = A^3 c_{i,i+1} = 0 \Rightarrow c_{i,i+1} = 0$$

y

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ -b_i & 0 & 0 & c_{ik} \end{vmatrix} = A^3 c_{ik} = 0 \Rightarrow c_{ik} = 0 \quad i+2 \leq k \leq n-6.$$

Luego se verifica que $\quad c_{ij} = 0 \quad i+1 \leq j \leq n-6$ y es cierto para $1 \leq i \leq n-7$.

Por tanto, la ley de $\mathfrak{g}$ se convierte en

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & a_{12} Z & \\ [X_1, X_4] & = & a_{14} Z & \\ [X_2, X_3] & = & -a_{14} Z & \\ [X_1, Y_j] & = & b_j Z & 1 \leq j \leq n-6 \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

El vector $X_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y su matriz adjunta es

$$ad(X_0 + X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-6} & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la sucesión característica $(4, 1, \ldots, 1)$, se sigue, como antes, que

$$\begin{array}{lcl} a_{14} & = & 0 \\ b_j & = & 0\,, \quad 1 \leq j \leq n-6 \end{array}$$

y, entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & a_{12}Z & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1. \end{array}$$

Hay que distinguir dos casos dependiendo de que a_{12} sea cero o no.

Primer caso: $a_{12} = 0$

Vuelve a aparecer la familia

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Segundo caso: $a_{12} \neq 0$

Tras aplicar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 4 \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \\ Y_{n-5}^* & = & a_{12}Z & \end{array} \right.$$

aparece la familia

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Las extensiones centrales de las restantes familias se determinarían en forma similar, no apareciendo ninguna nueva álgebra $(n-4)$-filiforme de dimensión n.

$\square$

Capítulo 3

Las álgebras de Lie p-filiformes como extensiones por derivaciones

Si se considera un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ que tenga por invariante de Goze $(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1, \ldots, 1)$, se tiene que habrán de existir vectores de $\mathfrak{g}$, $X_0, X_1^1, \ldots, X_{p_1}^1, X_1^2, \ldots, X_{p_2}^2, \ldots, X_1^k, \ldots, X_{p_k}^k$, para los cuales se verifique que

$$\begin{cases} X_0 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & & & \\ [X_0, X_{i_j}^j] & = X_{i_j+1}^j & 1 \leq i_j \leq p_j - 1 & 1 \leq j \leq k \\ [X_0, X_{p_j}^j] & = 0 & 1 \leq j \leq k. & \end{cases}$$

Al espacio vectorial engendrado por dichos vectores, $\mathfrak{g}^*$, se le puede dotar de una estructura de álgebra de Lie considerando como ley del álgebra de $\mathfrak{g}^*$ la restricción de la ley de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$, es decir, definiendo

$$[X, Y]^* = [X, Y]|_{\mathfrak{g}^*} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}^*$$

Obviamente, la sucesión característica del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}^*$ resulta ser $(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1)$. A dicho álgebra de Lie se le va a denominar "álgebra soporte" de $\mathfrak{g}$.

Si se conoce $\mathfrak{g}^*$, se puede intentar encontrar $\mathfrak{g}$ "añadiendo" a $\mathfrak{g}^*$ derivaciones adecuadas. Estas habrán de ser derivaciones nilpotentes (para que $\mathfrak{g}$ sea álgebra de Lie nilpotente), no interiores (en otro caso no se añadiría vector "nuevo" alguno) o bien la derivación nula de $\mathfrak{g}^*$.

Este método parece especialmente apropiado para las álgebras p-filiformes, en los casos en que $n - p$ sea pequeño, ya que entonces el álgebra soporte $\mathfrak{g}^*$ resulta ser filiforme de dimensión $p+1$.

En el presente capítulo se aplicarán estas técnicas a la determinación de las álgebras de Lie nilpotentes $(n-3)$-filiformes y $(n-4)$-filiformes. En realidad, el interés principal será llegar a la familia genérica en cada caso pues, a partir de ahí, para obtener cada clasificación se actuaría como en los capítulos anteriores.

3.1 Las álgebras (n-3)-filiformes

Se van a determinar las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes de dimensión n que se pueden obtener como extensiones por derivaciones de la única álgebra de Lie filiforme de dimensión 4 , L_4 , tal que su ley de álgebra se expresa, respecto a una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ mediante

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Lema 3.1. *Las aplicaciones lineales δ_i , $1 \leq i \leq 7$, $\delta_i : L_4 \longrightarrow L_4$ definidas, respecto de una base adaptada de L_4 , $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$, mediante*

$$\begin{array}{lll}
\delta_1(X_0) = X_0 & \delta_1(X_i) = (i-1)X_i & 1 \leq i \leq 3 \\
\delta_2(X_0) = X_1 & & \\
\delta_3(X_0) = X_2 & & \\
\delta_4(X_0) = X_3 & & \\
\delta_5(X_i) = X_i & 1 \leq i \leq 3 & \\
\delta_6(X_i) = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & \\
\delta_7(X_1) = X_3 & &
\end{array}$$

constituyen una base del álgebra de Lie de las derivaciones de L_4 , $Der(L_4)$.

Demostración:

Es un resultado bien conocido, que puede encontrarse, entre otros, en [13].

□

Teorema 3.2. *En dimensión $n, n \geq 5$, hay exactamente $n-2$ álgebras de Lie nilpotentes $(n-3)$-filiformes, reales o complejas, dos a dos no isomorfas y que se pueden obtener como extensiones por derivaciones del único álgebra de Lie filiforme de dimensión 4. Respecto a una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$, se pueden expresar sus leyes mediante*

$$\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{2q-1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \qquad 1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2}) \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq q-1 \\
& & & & \\
\mathfrak{g}_n^{2s}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \qquad 1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq s-1 \\
& & & & \\
\mathfrak{g}_n^{n-2}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} &
\end{array}$$

Demostración:

Si se designa por $\mathfrak{g}$ a un álgebra de Lie $(n-3)$-filiforme de dimensión n , una base suya puede expresarse como $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$, donde $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ es una base adaptada del álgebra soporte L_4 y los vectores Y_i , $1 \leq i \leq n-4$, están asociados a derivaciones adecuadas de L_4 .

Entre éstas no se pueden admitir δ_3 , δ_4 o δ_6 , por ser las derivaciones interiores, ni δ_1 o δ_5 , porque, al ser diagonalizables, no darían lugar a un vector Y_i adjunto-nilpotente.

Tampoco es adecuada δ_2 ya que en tal caso existiría algún vector Y_j , $1 \leq j \leq n-4$, tal que $[X_0, Y_j] = X_1$ y el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_0^* & = & X_0 & \\
X_1^* & = & Y_j & \\
X_i^* & = & X_{i-1} & 2 \leq i \leq 4 \\
Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \quad , \quad k \neq j
\end{array}\right.$$

permite afirmar que el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$ es mayor o igual que $(4, 1, \ldots, 1)$, luego $\mathfrak{g}$ no sería $(n-3)$-filiforme.

Finalmente, como máximo un vector de los Y_i , $1 \leq i \leq n-4$, puede estar asociado a δ_7 ya que, si existieran dos Y_j , Y_k , $j \neq k$, se tendría que $[X_1, Y_j] = X_3$ y $[X_1, Y_k] = X_3$ y el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* = X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ Y_j^* = Y_j - Y_k & \\ Y_r^* = Y_r & 1 \leq r \leq n-4 \quad , \quad r \neq j \end{cases}$$

hace que sea $[X_1^*, Y_j^*] = 0$.

Por tanto, sólo es necesario analizar dos casos según estén:

* todos los vectores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}$ asociados a la derivación nula (caso 1).

* $n-5$ de los vectores Y_i asociados a la derivación nula (sin pérdida de generalidad puede suponerse que sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}$) y uno (que será Y_{n-4}) asociado a δ_7 (caso 2).

Es decir, se ha de verificar que

$$\begin{array}{lcll} [X_k, Y_i]|_{L_4} & = & 0 & 1 \leq i \leq n-4 \qquad k = 0, 2, 3 \\ [X_1, Y_i]|_{L_4} & = & 0 & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_1, Y_{n-4}]|_{L_4} & = & \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0, 1\} \end{array}$$

correspondiendo el caso 1 a $\epsilon = 0$ y el caso 2 a $\epsilon = 1$.

La ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar, respecto de la base adaptada anterior, mediante

$$\begin{array}{lcll} [X_i, X_j] & = & [X_i, X_j]|_{L_4} + \sum_{k=1}^{n-4} b_{ij}^k Y_k & 0 \leq i < j \leq 3 \\ [X_i, Y_j] & = & \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} d_{ij}^k Y_k & 0 \leq i \leq 3 \qquad 1 \leq j \leq n-4 \\ [Y_i, Y_j] & = & \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} \beta_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4. \end{array}$$

El cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_i^* = X_i & i = 0, 1, 3 \\ X_2^* = X_2 + \sum_{k=1}^{n-4} b_{01}^k Y_k & \\ Y_k^* = Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \end{cases}$$

permite suponer que $b_{01}^k = 0$ para $1 \leq k \leq n-4$ y, análogamente, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i^* &= X_i & 0 \leq i \leq 2 \\ X_3^* &= X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} b_{02}^k Y_k & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-4 \end{cases}$$

permite suponer que $b_{02}^k = 0$ para $1 \leq k \leq n-4$.

Se tiene, además, que $b_{03}^k = 0$ para $1 \leq k \leq n-4$ ya que, en otro caso, sería la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ mayor o igual que $(4, 1, \ldots, 1)$.

Por otra parte, los escalares a_{ij}^k , $1 \leq k \leq 3$, vienen determinados por las derivaciones. En concreto se tiene que $a_{1,n-4}^3 = \epsilon$ (con $\epsilon = 0$ en el caso 1 y $\epsilon = 1$ en el caso 2) y $a_{ij}^k = 0$ en otro caso.

Se puede suponer, igualmente, que $d_{0j}^k = 0$ para $1 \leq j, k \leq n-4$ ya que, en otro caso, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i^* &= X_i & 0 \leq i \leq 3 \\ Y_1^* &= Y_j & \\ Y_2^* &= \sum_{t=1}^{n-4} d_{0j}^t Y_t & \\ Y_j^* &= Y_1 & \\ Y_k^* &= Y_2 & \\ Y_r^* &= Y_r & 1 \leq r \leq n-4 \qquad r \notin \{1, 2, j, k\} \end{cases}$$

muestra que $X_0^* \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y

$$\begin{aligned} [X_0^*, X_i^*] &= X_{i+1}^* & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0^*, Y_1^*] &= Y_2^* & \end{aligned}$$

y la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ sería mayor o igual que $(3, 2, 1, \ldots, 1)$.

Resulta que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar en la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$ por

$$\begin{array}{llll}
[X_0, X_i] & = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & \\
[X_i, X_j] & = \sum_{k=1}^{n-4} b_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq 3 & \\
[X_i, Y_j] & = \sum_{k=1}^{n-4} d_{ij}^k Y_k & 1 \leq i \leq 3 & \\
 & & 1 \leq j \leq n-4 & (i,j) \neq (1, n-4) \\
[X_1, Y_{n-4}] & = \epsilon X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} d_{1,n-4}^k Y_k & \epsilon \in \{0, 1\} & \\
[Y_i, Y_j] & = \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} \beta_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4. &
\end{array}$$

La identidad de Jacobi permite dar más restricciones a los valores de los parámetros:

$$Jac(X_0, X_1, X_3) \Rightarrow [X_0, [X_1, X_3]] = [X_2, X_3] = \sum_{k=1}^{n-4} b_{23}^k Y_k \Rightarrow b_{23}^k = 0\,,\ 1 \leq k \leq n-4$$

$$Jac(X_0, X_1, X_2) \Rightarrow [X_0, [X_1, X_2]] = [X_1, X_3] = \sum_{k=1}^{n-4} b_{13}^k Y_k \Rightarrow b_{13}^k = 0\,,\ 1 \leq k \leq n-4$$

$$Jac(X_0, X_i, Y_j)\,,\quad 1 \leq i \leq 2\,,\quad 1 \leq j \leq n-4 \Rightarrow [X_0, [X_i, Y_j]] = [X_{i+1}, Y_j] = 0\,,$$

de donde se sigue que $d_{2j}^k = 0 = d_{3j}^k$, $1 \leq j, k \leq n-4$

$$Jac(X_0, Y_i, Y_j) \quad 1 \leq i < j \leq n-4 \Rightarrow [X_0, [Y_i, Y_j]] = 0 = \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k [X_0, X_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2} c_{ij}^k X_{k+1} = 0 \quad , \text{ por lo que será } \quad c_{ij}^1 = 0 = c_{ij}^2\,,\ 1 \leq i < j \leq n-4.$$

Se puede suponer, también, que $d_{1j}^k = 0$ para $1 \leq j, k \leq n-4$ ya que, si existe $d_{1j}^k \neq 0$, el cambio de base definido por

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_0^* & = & X_0 + X_1 & \\ X_i^* & = & X_i & 1 \leq i \leq 2 \\ X_3^* & = & X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} b_{12}^k Y_k & \\ Y_1^* & = & Y_j & \\ Y_2^* & = & \sum_{k=1}^{3} a_{1j}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-4} d_{1j}^k Y_k & \\ Y_j^* & = & Y_1 & \\ Y_k^* & = & Y_2 & \\ Y_r^* & = & Y_r & 1 \leq r \leq n-4 \qquad r \notin \{1, 2, j, k\}, \end{array}\right.$$

(donde $a_{1j}^k = 0$ salvo $(j, k) = (n-4, 3)$ que puede ser 1 en el caso 2) probaría que el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$ es mayor o igual que $(3, 2, 1, \ldots, 1)$.

Resulta así que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar mediante

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-4} b_k Y_k & (b_k = b_{12}^k) \\ [X_1, Y_{n-4}] & = & \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 + \sum_{k=1}^{n-4} \beta_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-4 \qquad (c_{ij} = c_{ij}^3). \end{array}$$

Entonces, la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + Y_1$ es

$$ad(X_0 + Y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1,n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^1 & \beta_{13}^1 & \ldots & \beta_{1,n-4}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & \ldots & \beta_{1,n-4}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^{n-4} & \beta_{13}^{n-4} & \ldots & \beta_{1,n-4}^{n-4} \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{1j} \\ 0 & 0 & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = \beta_{1j}^k = 0 \ , \ 2 \leq j \leq n-4 \ , \ 1 \leq k \leq n-4.$$

Si se da un tratamiento análogo a $ad(X_0 + Y_2), \ldots, ad(X_0 + Y_i)$ y mediante un proceso de inducción finita se obtiene que

$$\beta_{ij}^k = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i < j \leq n-4 \ , \ 1 \leq k \leq n-4.$$

Si se considera la matriz adjunta del vector X_1 resulta

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \epsilon \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n-4} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & b_k & 0 \end{vmatrix} = \epsilon b_k \quad 1 \leq k \leq n-4$$

y se debe cumplir $\quad \epsilon b_k = 0 \ , \ 1 \leq k \leq n-4.$

Finalmente de $Jac(X_1, X_2, Y_j)$, $1 \leq j \leq n-4$, se obtienen las restricciones que más abajo se especifican, con lo que se ha demostrado que toda ley de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$,$(n-3)$-filiforme de dimensión n que se obtenga por extensiones por derivaciones de L_4 es isomorfa a una de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & \sum_{k=1}^{n-4} b_k Y_k & \\ [X_1, Y_{n-4}] & = & \epsilon X_3 & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_3 & 1 \leq i < j \leq n-4, \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{cases} \epsilon b_k & = 0 & 1 \leq k \leq n-4 \\ \sum_{k=2}^{n-4} b_k c_{1k} & = 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-4} b_k c_{ik} & = \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-5 \\ \sum_{k=1}^{n-5} b_k c_{k,n-4} & = 0. & \end{cases}$$

El resto de la demostración es ya, en todo, análoga a otras desarrolladas en capítulos anteriores.

□

Corolario 3.3. *Toda álgebra de Lie nilpotente $(n-3)$-filiforme de dimensión n se puede obtener como extensión por derivaciones de la única álgebra de Lie filiforme de dimensión* 4 , L_4 .

3.2 Las álgebras (n-4)-filiformes

Se van a determinar en esta sección las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes de dimensión n que se pueden obtener como extensiones por derivaciones de las dos álgebras de Lie filiformes, no isomorfas entre sí, de dimensión 5. El proceso a seguir será análogo al de la sección anterior.

En todo lo que sigue se supondrá que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, de dimensión n y sucesión característica $(4, 1, 1, \ldots, 1)$.

Existen solamente dos álgebras de sucesión característica $(4, 1)$: el álgebra modelo L_4 y el álgebra μ_4, cuyas leyes, en una base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$, vienen dadas mediante

$$L_4: \quad [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\begin{array}{rrcll} \mu_4: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \end{array}$$

Cualquiera de ellas puede considerarse álgebra soporte de $\mathfrak{g}$ y, para contemplar ambas situaciones, su ley se denota por

$$\begin{array}{rrcll} \mathfrak{g}^*: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ & [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Al ser $\mathfrak{g}$ un álgebra de sucesión característica $(4, 1, 1, \ldots, 1)$, se puede obtener una base de $\mathfrak{g}$ como una extensión de la base de $\mathfrak{g}^*$ añadiendo $n-5$ vectores: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}$ asociados a derivaciones adecuadas de $\mathfrak{g}^*$: la nula, las homogéneas (δ_1, δ_2) o alguna combinación lineal de ellas, cumpliéndose que

$$\begin{array}{ll} \delta_1(X_1) = X_3 & \delta_1(X_2) = X_4 \\ \delta_2(X_1) = X_4. & \end{array}$$

Teorema 3.4. *En dimensión $n, n \geq 8$, hay exactamente 6n-29 álgebras de Lie nilpotentes complejas, dos a dos no isomorfas y que se pueden obtener como extensiones por derivaciones de alguna de las dos álgebras de Lie filiformes de dimensión 5. Sus leyes se pueden expresar, respecto a una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$, mediante*

$$\begin{array}{rrclll} \mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{2,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1,X_2] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{3,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1,X_2] & = & X_4 & \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{5,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-3}{2}) \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \\ [Y_{2r-1},Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{7,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1,X_2] & = & X_4 & \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \\ [Y_{2r-1},Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{8,r}: \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\le i\le 3 \qquad 1\le r\le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1,Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [X_1,Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2,Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = & X_4 & 1\le k\le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{9,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-6}{2}) \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \\ [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{10,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{11,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-5}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_n^{12,r}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 3 \qquad 1 \le r \le E(\frac{n-4}{2}) \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \le k \le r-1. \end{array}$$

Solamente cuando n es impar:

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}.$$

Demostración:

Por existir varios tipos de derivaciones admisibles de $\mathfrak{g}^*$, es necesario considerar tres casos distintos para los vectores asociados a ellas y que se adjuntan a X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 para conseguir una base de $\mathfrak{g}$.

Sea Z_i un vector asociado a δ_i $\quad i = 1, 2$.

Caso 1: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}$ asociados a la derivación nula.

Es evidente que, entonces, se cumple que

$$[X_k, Y_i]|_{\mathfrak{g}^*} = 0 \quad 0 \leq k \leq 4 \quad 1 \leq i \leq n-5.$$

Caso 2: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-6}$ asociados a la derivación nula y el vector Y_{n-5} asociado a alguna derivación no nula.

Sea $Y = \gamma Z_1 + \beta Z_2$.

Caso 2.1: $\gamma = 0$

$Y = \beta Z_2$ y al ser $\beta \neq 0$ se puede elegir $Y_{n-5} = -\frac{1}{\beta}.Y = -Z_2$.

Se cumple que

$$\begin{array}{lcll}
[X_k, Y_i]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & 0 \leq k \leq 4 \quad 1 \leq i \leq n-6 \\
[X_0, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & \\
[X_1, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_4 & \\
[X_2, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & \\
[X_3, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & \\
[X_4, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0. &
\end{array}$$

Caso 2.2: $\gamma \neq 0$

$Y_{n-5} = -\frac{1}{\gamma}.Y = -Z_1 - \frac{\beta}{\gamma}Z_2 \Rightarrow Y_{n-5} = -Z_1 - \alpha Z_2$.

Se cumple que

$$\begin{array}{lcll}
[X_k, Y_i]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & 0 \leq k \leq 4 \qquad 1 \leq i \leq n-6 \\
[X_0, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & \\
[X_1, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_3 + \alpha X_4 & \\
[X_2, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_4 & \\
[X_3, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & \\
[X_4, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0. &
\end{array}$$

Caso 3: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-7}$ asociados a la derivación nula y cada uno de los vectores Y_{n-6}, Y_{n-5} asociados a alguna derivación no nula.

Sean $Y = \gamma_1 Z_1 + \beta_1 Z_2$, $Y^* = \gamma_2 Z_1 + \beta_2 Z_2$ y al tener que ser linealmente independientes se debe cumplir que $\gamma_1.\beta_2 - \beta_1.\gamma_2 \neq 0$.

Se pueden elegir:

$$Y_{n-6} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1.\beta_2-\beta_1.\gamma_2}.Y - \frac{\gamma_1}{\gamma_1.\beta_2-\beta_1.\gamma_2}.Y^* = -Z_2$$

$$Y_{n-5} = \frac{-\beta_2}{\gamma_1.\beta_2-\beta_1.\gamma_2}.Y + \frac{\beta_1}{\gamma_1.\beta_2-\beta_1.\gamma_2}.Y^* = -Z_1$$

y, entonces, se verifica que

$$\begin{array}{lcllr}
[X_k, Y_i]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & 0 \leq k \leq 4 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_k, Y_{n-6}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & k = 0, 2, 3, 4 & \\
[X_1, Y_{n-6}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_4 & & \\
[X_k, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & 0 & k = 0, 3, 4 & \\
[X_1, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_3 & & \\
[X_2, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_4 & &
\end{array}$$

Se pueden resumir todos los casos afirmando que

$$\begin{array}{lcl}
[X_1, Y_{n-6}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & \lambda_1 X_4 \\
[X_1, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4 \\
[X_2, Y_{n-5}]|_{\mathfrak{g}^*} & = & \lambda_2 X_4
\end{array}$$

donde la terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ puede tomar los valores

$$\begin{array}{ll}
(0,0,0) & \text{(caso 1)} \\
(0,0,1) & \text{(caso 2.1)} \\
(0,1,\alpha) & \text{(caso 2.2)} \\
(1,1,0) & \text{(caso 3).}
\end{array}$$

A continuación se va a determinar la ley del álgebra $(n-4)$-filiforme dada $\mathfrak{g}$, considerando la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ y con álgebra soporte $\mathfrak{g}^*$, de base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$, en la cual los productos corchete no nulos, salvo antisimetría, son

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i]|_{\mathfrak{g}^*} & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2]|_{\mathfrak{g}^*} & = & \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Obtención de $[X_i, X_j]$ $\quad 0 \leq i < j \leq 4$

Se ha de cumplir que

$$[X_i, X_j] = [X_i, X_j]|_{\mathfrak{g}^*} + \sum_{k=1}^{n-5} b_{ij}^k Y_k \qquad 0 \leq i < j \leq 4.$$

Si $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $b_{01}^k \neq 0$, el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 1 \\ X_2^* & = & X_2 + \sum_{k=1}^{n-5} b_{01}^k Y_k & \\ X_t^* & = & [X_0^*, X_{t-1}^*] & 3 \leq t \leq 4 \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \end{array} \right.$$

hace que sea $[X_0^*, X_1^*] = X_2^*$, lo que permite suponer que

$$b_{01}^k = 0 \qquad 1 \leq k \leq n-5.$$

Si $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $b_{02}^k \neq 0$, el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_t^* & = & X_t & 0 \leq t \leq 2 \\ X_3^* & = & X_3 + \sum_{k=1}^{n-5} b_{02}^k Y_k & \\ X_4^* & = & [X_0^*, X_3^*] & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \end{array} \right.$$

hace que sea $[X_0^*, X_2^*] = X_3^*$, lo que permite suponer que

$$b_{02}^k = 0 \qquad 1 \leq k \leq n-5.$$

Si $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $b_{03}^k \neq 0$, el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_t^* &= X_t & 0 \leq t \leq 3 \\ X_4^* &= X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_{03}^k Y_k & \\ Y_k^* &= Y_k & 1 \leq k \leq n-5 \end{cases}$$

hace que sea $[X_0^*, X_3^*] = X_4^*$, lo que permite suponer que

$$b_{03}^k = 0 \qquad 1 \leq k \leq n-5.$$

Si $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $b_{04}^k \neq 0$, entonces la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ es superior o igual a $(5, 1, 1, \ldots, 1)$ por lo que

$$b_{04}^k = 0 \qquad 1 \leq k \leq n-5.$$

Para calcular el resto de productos corchete se aplica sucesivamente la identidad de Jacobi y se obtiene que

$$Jac(X_0, X_2, X_4) \Rightarrow [X_0, [X_2, X_4]] = [X_3, X_4] = \sum_{k=1}^{n-5} b_{34}^k Y_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{34}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \Leftrightarrow [X_3, X_4] = 0.$$

$$Jac(X_0, X_1, X_4) \Rightarrow [X_0, [X_1, X_4]] = [X_2, X_4] = \sum_{k=1}^{n-5} b_{24}^k Y_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{24}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \Leftrightarrow [X_2, X_4] = 0.$$

$$Jac(X_0, X_1, X_3) \Rightarrow [X_0, [X_1, X_3]] = [X_2, X_3] + [X_1, X_4] = \sum_{k=1}^{n-5} (b_{23}^k + b_{14}^k) Y_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{23}^k + b_{14}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \Leftrightarrow [X_2, X_3] = -[X_1, X_4].$$

$$Jac(X_0, X_1, X_2) \Rightarrow [X_0, [X_1, X_2]] = [X_1, X_3] = \sum_{k=1}^{n-5} b_{13}^k Y_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{13}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \Leftrightarrow [X_1, X_3] = 0.$$

También, se cumple que

$$[X_1, X_2]|_{\mathfrak{g}^*} = \epsilon X_4 \Rightarrow [X_1, X_2] = \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_{12}^k Y_k \ , \ \epsilon \in \{0,1\}.$$

Si $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $b_{14}^k \neq 0$, en la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

$$ad(X_0 + X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \epsilon & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & b_{12}^1 & 0 & b_{14}^1 & \ldots \\ 0 & 0 & b_{12}^2 & 0 & b_{14}^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & b_{12}^k & 0 & b_{14}^k & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & b_{12}^{n-5} & 0 & b_{14}^{n-5} & \ldots \end{pmatrix}$$

el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & b_{12}^k & 0 & b_{14}^k \end{vmatrix} = b_{14}^k \neq 0$, lo que es imposible al ser $(4, 1, 1, \ldots, 1)$ la sucesión característica de $\mathfrak{g}$, por lo que

$$b_{14}^k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5 \Rightarrow [X_1, X_4] = 0 \Rightarrow [X_2, X_3] = 0.$$

En consecuencia, los productos corchete no nulos, salvo antisimetría, obtenidos son

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & (b_k = b_{12}^k) \qquad \epsilon \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Obtención de $[X_i, Y_j] \quad 0 \leq i \leq 4 \qquad 1 \leq j \leq n-5$

Se ha de cumplir que

$$[X_i, Y_j] = [X_i, Y_j]|_{\mathfrak{g}^*} + \sum_{k=1}^{n-5} d_{ij}^k Y_k \quad 0 \leq i \leq 4 \quad 1 \leq j \leq n-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [X_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{4} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} d_{ij}^k Y_k \quad 0 \le i \le 4 \quad 1 \le j \le n-5,$$

donde los escalares a_{ij}^k vienen determinados por las derivaciones; es decir:

$$\begin{array}{lcl} a_{1,n-6}^4 & = & \lambda_1 \\ a_{1,n-5}^3 & = & \lambda_2 \\ a_{1,n-5}^4 & = & \lambda_3 \\ a_{2,n-5}^4 & = & \lambda_2 \\ a_{ij}^k & = & 0 \quad \text{en cualquier otro caso.} \end{array}$$

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ cualquiera.

Si $\exists t \in \{1, 2, \ldots, n-5\}$ tal que $d_{0j}^t \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_k^* & = & X_k & 0 \le k \le 4 \\ Y_1^* & = & Y_j & \\ Y_2^* & = & [X_0^*, Y_1^*] = \sum_{k=1}^{n-5} d_{0j}^k Y_k & \\ Y_j^* & = & Y_1 & \\ Y_t^* & = & Y_2 & \\ Y_k^* & = & Y_k & 1 \le k \le n-5 \quad k \notin \{1, 2, j, t\} \end{array} \right.$$

hace que sea $[X_0, Y_1] = Y_2$, lo que implica que la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ será superior o igual a $(4, 2, 1, \ldots, 1)$, lo que demuestra que

$$d_{0j}^k = 0 \quad 1 \le k \le n-5 \Rightarrow [X_0, Y_j] = 0 \quad 1 \le j \le n-5.$$

Al aplicar sucesivamente la identidad de Jacobi se obtiene que

$$Jac(X_0, X_i, Y_j), \quad 1 \le i \le 3, \quad 1 \le j \le n-5 \Rightarrow [X_0, [X_i, Y_j]] = [X_{i+1}, Y_j] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [X_{i+1}, Y_j] = [X_0, \sum_{k=1}^{4} a_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} d_{ij}^k Y_k] = \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k [X_0, X_k] = \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k X_{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{i+1,j}^k = 0 \ , \quad 1 \le k \le n-5 \ , \quad 1 \le i \le 3 \ , \quad 1 \le j \le n-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{ij}^k = 0 \ , \quad 1 \le k \le n-5 \ , \quad 2 \le i \le 4 \ , \quad 1 \le j \le n-5$$

y se deduce que

$$\begin{array}{lcll}
[X_2, Y_j] & = & 0 & 1 \leq j \leq n-6 \\
[X_2, Y_{n-5}] & = & \lambda_2 X_4 & \\
[X_3, Y_k] & = & 0 & 1 \leq k \leq n-5 \\
[X_4, Y_k] & = & 0 & 1 \leq k \leq n-5.
\end{array}$$

Entonces, se verifica que

$$\left\{\begin{array}{lcll}
[X_1, Y_j] & = & \sum_{k=1}^{n-5} d_{1j}^k Y_k & 1 \leq j \leq n-7 \\
[X_1, Y_{n-6}] & = & \lambda_1 X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} d_{1,n-6}^k Y_k & \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} d_{1,n-5}^k Y_k & \\
[X_2, Y_{n-5}] & = & \lambda_2 X_4 &
\end{array}\right.$$

El vector $X_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y su matriz adjunta es

$$ad(X_0+X_1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 \\
0 & 0 & \epsilon & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\
0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & d_{11}^1 & \dots & d_{1j}^1 & \dots & d_{1,n-7}^1 & d_{1,n-6}^1 & d_{1,n-5}^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & b_k & 0 & 0 & d_{11}^k & \dots & d_{1j}^k & \dots & d_{1,n-7}^k & d_{1,n-6}^k & d_{1,n-5}^k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & b_{n-5} & 0 & 0 & d_{11}^{n-5} & \dots & d_{1j}^{n-5} & \dots & d_{1,n-7}^{n-5} & d_{1,n-6}^{n-5} & d_{1,n-5}^{n-5}
\end{pmatrix}$$

y al ser $(4, 1, 1, \dots, 1)$ la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ todos los menores siguientes son nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & b_k & 0 & d_{1j}^k \end{vmatrix} = d_{1j}^k = 0 \qquad 1 \le j \le n-7 \quad 1 \le k \le n-5,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & \lambda_1 \\ 0 & b_k & 0 & d_{1,n-6}^k \end{vmatrix} = d_{1,n-6}^k = 0 \quad 1 \le k \le n-5 \quad \text{y}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \epsilon & 1 & \lambda_3 \\ 0 & b_k & 0 & d_{1,n-5}^k \end{vmatrix} = d_{1,n-5}^k - \lambda_2 b_k = 0 \Leftrightarrow d_{1,n-5}^k = \lambda_2 b_k \quad 1 \le k \le n-5.$$

Por tanto, se cumple:

$$\begin{cases} [X_1, Y_{n-6}] &= \lambda_1 X_4 \\ [X_1, Y_{n-5}] &= \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4 + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k \\ [X_2, Y_{n-5}] &= \lambda_2 X_4 \end{cases}$$

Obtención de $[Y_i, Y_j] \quad 1 \le i < j \le n-5$

Se ha de cumplir que

$$[Y_i, Y_j] = [Y_i, Y_j]|_{\mathfrak{g}^*} + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k \quad 1 \le i < j \le n-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{4} c_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k \quad 1 \le i < j \le n-5.$$

Al aplicar sucesivamente la identidad de Jacobi se obtiene que

$$Jac(X_0, Y_i, Y_j) \quad 1 \le i < j \le n-5 \Rightarrow [X_0, [Y_i, Y_j]] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{4} c_{ij}^k [X_0, X_k] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k X_{k+1} = 0 \Rightarrow c_{ij}^k = 0 \quad 1 \le k \le 3 \quad 1 \le i < j \le n-5$$

y, por tanto

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij}X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} \beta_{ij}^k Y_k \quad 1 \leq i < j \leq n-5 \quad (c_{ij} = c_{ij}^4).$$

El vector $X_0 + Y_1$, al no pertenecer a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, puede ser vector característico de $\mathfrak{g}$.

Su matriz adjunta es:

$$ad(X_0 + Y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1,n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^1 & \beta_{13}^1 & \dots & \beta_{1j}^1 & \dots & \beta_{1,n-5}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & \dots & \beta_{1j}^2 & \dots & \beta_{1,n-5}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^k & \beta_{13}^k & \dots & \beta_{1j}^k & \dots & \beta_{1,n-5}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{12}^{n-5} & \beta_{13}^{n-5} & \dots & \beta_{1j}^{n-5} & \dots & \beta_{1,n-5}^{n-5} \end{pmatrix}$$

y al ser $(4, 1, 1, \dots, 1)$ la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ todos los menores siguientes son nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{1j} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{1j}^k \end{vmatrix} = \beta_{1j}^k = 0 \quad 2 \leq j \leq n-5 \quad 1 \leq k \leq n-5.$$

Se calculan las matrices $ad(X_0 + Y_2), ad(X_0 + Y_3), \dots, ad(X_0 + Y_{i-1})$ y, de forma análoga, se consigue demostrar que

$$\beta_{rj}^k = 0 \quad 2 \leq r \leq i-1 \ , \quad 1 \leq k \leq n-5 \ , \quad r+1 \leq j \leq n-5.$$

Entonces, la matriz adjunta correspondiente al vector $X_0 + Y_i$ es

$$ad(X_0+Y_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_{1i} & \dots & -c_{i-1,i} & 0 & c_{i,i+1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{i,n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta^1_{i,i+1} & \dots & \beta^1_{ij} & \dots & \beta^1_{i,n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta^k_{i,i+1} & \dots & \beta^k_{ij} & \dots & \beta^k_{i,n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta^{n-5}_{i,i+1} & \dots & \beta^{n-5}_{ij} & \dots & \beta^{n-5}_{i,n-5} \end{pmatrix}.$$

Por la misma razón anterior se ha de cumplir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & \beta^k_{ij} \end{vmatrix} = \beta^k_{ij} = 0 \quad i+1 \leq j \leq n-5\,, \quad 1 \leq k \leq n-5$$

y es cierto para $1 \leq i \leq n-6$.

En consecuencia, se obtiene que

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij} X_4 \quad 1 \leq i < j \leq n-5,$$

y la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 + \sum\limits_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_{n-6}] &= \lambda_1 X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &= \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4 + \lambda_2 \sum\limits_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \\ [X_2, Y_{n-5}] &= \lambda_2 X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

A continuación se extraen condiciones debidas a la identidad de Jacobi y a la matriz adjunta correspondiente al vector X_1 .

$$Jac(X_1, X_2, Y_j) \quad 1 \leq j \leq n-6 \ \Rightarrow [[X_1, X_2], Y_j] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-5} b_k [Y_k, Y_j] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=2}^{n-5} b_k c_{1k} & = & 0 \\ \sum_{k=i+1}^{n-5} b_k c_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} \qquad 2 \leq i \leq n-6 \end{cases}$$

y de $Jac(X_1, X_2, Y_{n-5})$ se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n-6} b_k c_{k,n-5} = -\lambda_2^2 b_{n-5}.$$

Como $X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 b_1 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n-5} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 b_{n-5} \end{pmatrix},$$

se deduce que son nulos los menores

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \epsilon & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & b_k & 0 & \lambda_2 b_k \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 b_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5.$$

Queda demostrado que el álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\left\{\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \epsilon \in \{0,1\} \\
[X_1, Y_{n-6}] & = & \lambda_1 X_4 & \\
[X_1, Y_{n-5}] & = & \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4 + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \\
[X_2, Y_{n-5}] & = & \lambda_2 X_4 & \\
[Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5,
\end{array}\right.$$

cumpliéndose

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\lambda_1 \lambda_2 b_k & = & 0 & 1 \leq k \leq n-5 \\
\sum_{k=2}^{n-5} b_k c_{1k} & = & 0 & \\
\sum_{k=i+1}^{n-5} b_k c_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-6 \\
\sum_{k=1}^{n-6} b_k c_{k,n-5} & = & -\lambda_2^2 b_{n-5} &
\end{array}\right.$$

y donde la terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ puede tomar los valores

$$\begin{array}{ll}
(0,0,0) & (\text{caso } 1) \\
(0,0,1) & (\text{caso } 2.1) \\
(0,1,\alpha) & (\text{caso } 2.2) \\
(1,1,0). & (\text{caso } 3).
\end{array}$$

Una vez obtenida la familia general de álgebras $(n-4)$-filiformes que son extensiones por derivaciones de las álgebras filiformes de dimensión 5, en cada uno de los casos anteriores aparecen distintas familias de álgebras sin más que proceder de forma similar a la expuesta en la sección precedente. Por esta razón, a continuación solamente figura un resumen de los resultados.

Caso 1: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] & = & \epsilon X_4 + \sum\limits_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [Y_i, Y_j] & = & c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5, \end{array}\right.$$

cumpliéndose

$$\left\{\begin{array}{lcll} \sum\limits_{k=2}^{n-5} b_k c_{1k} & = & 0 & \\ \sum\limits_{k=i+1}^{n-5} b_k c_{ik} & = & \sum\limits_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-6 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-6} b_k c_{k,n-5} & = & 0. & \end{array}\right.$$

Se encuentran las familias

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{2,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & X_4 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \text{y} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Caso 2.1: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \epsilon \in \{0, 1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5, \end{cases}$$

cumpliéndose

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^{n-5} b_k c_{1k} &= 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-5} b_k c_{ik} &= \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-6 \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_k c_{k,n-5} &= 0. & \end{cases}$$

Se encuentran las familias

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, X_2] = X_4 & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_n^{11,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, X_2] = Y_{n-5} & & \\ & [X_1, Y_{n-6}] = X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \text{y} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_n^{12,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\ & [X_1, X_2] = Y_{n-5} & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1. & \end{array}$$

Caso 2.2: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 1, \alpha)$

El álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_3 + \alpha X_4 + \sum_{k=1}^{n-5} b_k Y_k & \\ [X_2, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5, \end{cases}$$

cumpliéndose

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^{n-5} b_k c_{1k} &= 0 & \\ \sum_{k=i+1}^{n-5} b_k c_{ik} &= \sum_{r=1}^{i-1} b_r c_{ri} & 2 \leq i \leq n-6 \\ \sum_{k=1}^{n-6} b_k c_{k,n-5} &= -b_{n-5}. & \end{cases}$$

Se encuentran las familias

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{g}_n^{5,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_3 & & & \\ & [X_2, Y_{n-5}] = X_4 & & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1, & & \\ \mathfrak{g}_n^{6,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_3 & & & \\ & [X_2, Y_{n-5}] = X_4 & & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & & \\ & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] = X_4 & & & \text{y} \\ \mathfrak{g}_n^{7,r}: & [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, X_2] = X_4 & & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] = X_3 & & & \\ & [X_2, Y_{n-5}] = X_4 & & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] = X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & & \\ & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] = X_4 & & & \end{array}$$

Caso 3: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, 0)$

Al cumplirse $\lambda_1\lambda_2 b_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5$, se deduce que $b_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n-5$ y, entonces, las demás restricciones se verifican trivialmente y el álgebra dada $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] &= \epsilon X_4 & \epsilon \in \{0,1\} \\ [X_1, Y_{n-6}] &= X_4 & \\ [X_1, Y_{n-5}] &= X_3 & \\ [X_2, Y_{n-5}] &= X_4 & \\ [Y_i, Y_j] &= c_{ij} X_4 & 1 \leq i < j \leq n-5. \end{cases}$$

Se encuentran las familias

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{g}_n^{8,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\ & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \text{y} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{g}_n^{9,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-6}{2}) \\ & [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & & \\ & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & & \\ & [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \\ & [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \end{array}$$

□

Se observa que aparecen cada una de las 12 familias de álgebras $(n-4)$-filiformes que existen. Haciendo referencia a este resultado se concluye el capítulo con lo que puede considerarse un corolario del último teorema.

Corolario 3.5. *Cualquier álgebra de Lie nilpotente $(n-4)$-filiforme es una extensión por derivaciones de alguna de las dos únicas álgebras filiformes de dimensión 5.*

Capítulo 4

Aplicaciones geométricas

Se aborda en este capítulo el estudio de algunas aplicaciones geométricas de los resultados hallados en los capítulos precedentes.

Tal como se indicó en el capítulo sobre preliminares, el primer espacio de cohomología de un álgebra $\mathfrak{g}$ con valores en el $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{g}$, $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, se define como

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})/B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

donde $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ son, respectivamente, el espacio de los 1-cociclos y el de los 1-cobordes.

Como $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ se identifica con el espacio de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $Der(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores, $Ad(\mathfrak{g})$, se puede interpretar el primer espacio de cohomología $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ como el espacio de las derivaciones "exteriores" del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Por tanto, si se pretende encontrar el primer espacio de cohomología $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ de un álgebra p-filiforme $\mathfrak{g}$, bastará calcular $Der(\mathfrak{g})$ y $Ad(\mathfrak{g})$.

$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ para un álgebra de Lie $(n-2)$-filiforme es bien conocido, ya que las álgebras $(n-2)$-filiformes no son sino sumas directas de álgebras de Heisenberg y álgebras abelianas. Por dicho motivo, vamos a estudiar en este capítulo $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie $(n-3)$-filiforme.

Dado que las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes son también suma directa con una parte abeliana (salvo la "última" álgebra de cada familia si la paridad de

$dim(\mathfrak{g})$ es la adecuada), habrá de aplicarse el teorema que da las derivaciones de un álgebra suma directa de otras en función de las derivaciones de estas álgebras y de unas ciertas derivaciones especiales.

De todas maneras, el cálculo de las derivaciones de la parte no abeliana de un álgebra $(n-3)$-filiforme es, en sí mismo, complejo. Sin embargo, el hecho de que estas álgebras sean todas graduadas, facilita la tarea.

Por otra parte, como también se vio en los preliminares, la órbita de una ley de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n , $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, se identifica con $GL(n, \mathbb{C}) \ / \ Aut(\mathfrak{g})$ y como el álgebra de Lie $Aut(\mathfrak{g})$ no es sino $Der(\mathfrak{g})$, resulta

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g}))$$

con lo que los mismos cálculos anteriores permiten obtener, directamente, la dimensión de la órbita de cada álgebra de Lie $(n-3)$-filiforme.

Finalmente, dado que el espacio de los 2-cobordes, $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, coincide con el espacio tangente a la ley de $\mathfrak{g}$ (considerada como punto de la variedad $\mathcal{L}^n$ de las álgebras de Lie de dimensión n) en la órbita $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, se ha encontrado, en realidad, la dimensión de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ para cada álgebra $(n-3)$-filiforme $\mathfrak{g}$.

Se estructura el capítulo en 4 secciones. Las tres primeras se dedican al cálculo del álgebra de Lie de las derivaciones de las álgebras $(n-3)$-filiformes para, en la cuarta, usar los resultados encontrados para determinar las dimensiones de los distintos entes geométricos.

4.1 Derivaciones de las álgebras de la familia $\mathfrak{g}_n^{2q-1}$, $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$

Se describe en esta sección el álgebra de derivaciones $Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})$, donde $\mathfrak{g}_n^{2q-1}$, $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$, designa a la familia de álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes, de dimensión n, de leyes

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^{2q-1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq q-1 \end{array}$$

para cada $q \in \{1, 2, \ldots, E(\frac{n-2}{2})\}$.

Aún cuando en la demostración se determina una base de $Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})$, el enunciado del teorema que se da a continuación se limita a expresar el valor de $dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1}))$.

Teorema 4.1. *Se verifica que*

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} n^2 - 5n + 11 & \text{si} \quad q = 1 & \\ \frac{4q^2+3q+5}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q = \dot{2}+1 & q \geq 2 \\ \frac{4q^2+3q+6}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q = \dot{2} & q \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

Demostración:

Para cada q, la correspondiente álgebra se puede expresar como suma directa de dos álgebras:

$$\mathfrak{g}_n^{2q-1} = \mathfrak{h}_1^{2q-1} \oplus \mathfrak{h}_2^{2q-1}$$

donde

$$\begin{array}{l} \mathfrak{h}_1^{2q-1} =< X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2q-3}, Y_{2q-2} > \\ \mathfrak{h}_2^{2q-1} =< Y_{2q-1}, Y_{2q}, \ldots, Y_{n-4} > . \end{array}$$

Se tiene, por tanto, que

$$Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1}) = Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) \oplus Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) \oplus D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1}) \oplus D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1}).$$

Si $d \in Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})$, entonces

$$\exists \bar{d}_i \in Der(\mathfrak{h}_i^{2q-1}) \quad i = 1, 2 \quad \text{y} \quad \exists \bar{d}_{ij} \in D(\mathfrak{h}_i^{2q-1}, \mathfrak{h}_j^{2q-1}) \quad (i,j) = (1,2), (2,1),$$

tal que $d = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_{12} + \bar{d}_{21}$, verificándose que

$$\bar{d}_i \in Der(\mathfrak{h}_i^{2q-1}) \Rightarrow \bar{d}_i(\mathfrak{h}_i^{2q-1}) \subset \mathfrak{h}_i^{2q-1} \quad i = 1, 2.$$

$$\bar{d}_{ij} \in D(\mathfrak{h}_i^{2q-1}, \mathfrak{h}_j^{2q-1}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{d}_{ij}(\mathfrak{h}_i^{2q-1}) & \subset & \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_j^{2q-1}) \\ \bar{d}_{ij}([\mathfrak{h}_i^{2q-1}, \mathfrak{h}_i^{2q-1}]) & = & \{0\} \\ \bar{d}_{ij}(\mathfrak{h}_j^{2q-1}) & = & \{0\} \end{cases}$$

para $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$.

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1})$

Dado que $\mathfrak{h}_2^{2q-1} =< Y_{2q-1}, Y_{2q}, \ldots, Y_{n-4} >$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión $n - 2q - 2$ se verifica que

$$\bar{d}_2 \in Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) \Leftrightarrow \bar{d}_2 \in gl(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) \Leftrightarrow Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) = gl(\mathfrak{h}_2^{2q-1}).$$

- Base de $Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) = \{\bar{\delta}_{kj}\}$ $2q-1 \leq k, j \leq n-4$, donde $\bar{\delta}_{kj}(Y_k) = Y_j$

.

- $dim(Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1})) = dim(gl(\mathfrak{h}_2^{2q-1})) = (n-4-(2q-2))^2 = (n-2q-2)^2.$

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1})$

Sea $\bar{d}_{12} \in D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1})$ cualquiera. Se verifica que

$$\bar{d}_{12}([\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1}]) = \{0\} \Rightarrow \bar{d}_{12}(X_2) = 0 \quad , \quad \bar{d}_{12}(X_3) = 0.$$

$$\bar{d}_{12}(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) = \mathfrak{h}_2^{2q-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \bar{d}_{12}(X_i) & = & \sum_{k=2q-1}^{n-4} a_{ik} Y_k & 0 \leq i \leq 1 \\ \bar{d}_{12}(Y_j) & = & \sum_{k=2q-1}^{n-4} b_{jk} Y_k & 1 \leq j \leq 2q-2. \end{array} \right.$$

$$\bar{d}_{12}(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) = \{0\} \Rightarrow \bar{d}_{12}(Y_k) = 0 \quad 2q-1 \leq k \leq n-4.$$

* Parámetros libres $= (a_{ik}, b_{jk})$ $0 \leq i \leq 1$, $1 \leq j \leq 2q-2$, $2q-1 \leq k \leq n-4$.

- Base de $D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1}) = \{\bar{f}_{ik}, \bar{g}_{jk}\}$ donde

$$\bar{f}_{ik}(X_i) = Y_k$$
$$\bar{g}_{jk}(Y_j) = Y_k$$

$$0 \leq i \leq 1 \ , \ 1 \leq j \leq 2q-2 \ , \ 2q-1 \leq k \leq n-4.$$

- $dim(D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1})) = (2+2q-2).(n-4-(2q-2)) = 2q.(n-2q-2).$

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1})$

Sea $\bar{d}_{21} \in D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1})$ cualquiera.

Se cumple, evidentemente, que $\bar{d}_{21}([\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1}]) = \{0\}$.

$\bar{d}_{21}(\mathfrak{h}_2^{2q-1}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) =< X_3 > \Rightarrow \bar{d}_{21}(Y_k) = c_k X_3 \quad 2q-1 \leq k \leq n-4.$

$$\bar{d}_{21}(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{d}_{21}(X_i) &= 0 \quad 0 \leq i \leq 3 \\ \bar{d}_{21}(Y_j) &= 0 \quad 1 \leq j \leq 2q-2. \end{cases}$$

* Parámetros libres $= (c_k)$, $2q-1 \leq k \leq n-4$.

- Base de $D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1}) = \{\bar{h}_k\}$, donde $\bar{h}_k(Y_k) = X_3$, $2q-1 \leq k \leq n-4$.

- $dim(D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1})) = (n-4-(2q-2)) = (n-2q-2)$.

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$

Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{h}_1^{2q-1}$:

$\mathfrak{h}_1^{2q-1} =< Y_1 > \oplus < Y_3 > \oplus < Y_5 > \oplus \ldots \oplus < Y_{2q-5} > \oplus < Y_{2q-3} > \oplus$
$\oplus < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y_{2q-2} > \oplus < Y_{2q-4} > \oplus$
$\oplus < Y_{2q-6} > \oplus \ldots \oplus < Y_6 > \oplus < Y_4 > \oplus < Y_2 >$, donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_{-k} & = & < Y_{-2k+2q-3} > & 0 \leq k \leq q-2 \\ \mathfrak{g}_k & = & < X_{k-1} > & 1 \leq k \leq 3 \\ \mathfrak{g}_4 & = & < X_3, Y_{2q-2} > & \\ \mathfrak{g}_k & = & < Y_{-2k+2q+6} > & 5 \leq k \leq q+2. \end{array}$$

Sea $\bar{d}_1 \in Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$. Entonces

$$\bar{d}_1 = \sum_{i \in Z} d_i$$

donde $d_i \in Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$ y $d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para $k < -q+2$ y $k > q+2$.

Como $d_{2q}(\mathfrak{g}_{-q+2}) \subset \mathfrak{g}_{q+2}$ y $d_{-2q}(\mathfrak{g}_{q+2}) \subset \mathfrak{g}_{-q+2}$, se deduce que

$$d_i = 0 \quad i > 2q \ , \ i < -2q \Rightarrow \bar{d}_1 = \sum_{i=-2q}^{2q} d_i$$

Habrá que expresar cada d_i , $-2q \leq i \leq 2q$, como una combinación lineal de un cierto conjunto, B_i , $-2q \leq i \leq 2q$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{h}_1^{2q-1}$ cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-2q}^{2q} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$ y, evidentemente,

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})) = \sum_{i=-2q}^{2q} dim(K < B_i >).$$

En los cálculos se tendrá en cuenta que los ideales de la sucesión central descendente:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) & = & \mathfrak{h}_1^{2q-1} \\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) & = & [\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathcal{C}^0(\mathfrak{h}_1^{2q-1})] =< X_2, X_3 > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{h}_1^{2q-1}) & = & [\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathcal{C}^1(\mathfrak{h}_1^{2q-1})] =< X_3 > \end{array}$$

son característicos, es decir, estables para cualquier derivación.

Cálculo de d_{-j} $\quad q+3 \leq j \leq 2q$

Como $d_{-j}(\mathfrak{g}_t) \subset \mathfrak{g}_{t-j}$ $\quad \forall t$, se cumple que

$$d_{-j}(Y_{2k}) = \beta^j_{2k}.Y_{4q-2j-2k+3} \quad 1 \leq k \leq 2q-j+1.$$

Al exigir que d_{-j} sea derivación, se obtiene que

$$\beta^j_{2k} = \beta^j_{4q-2j-2k+4} \quad 1 \leq k \leq 2q-j+1.$$

Se consideran las derivaciones $\quad \delta_k^{-j}$, $1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+2}{2})$, definidas por

$$\delta_k^{-j}(Y_{2k}) = Y_{4q-2j-2k+3} \qquad \delta_k^{-j}(Y_{4q-2j-2k+4}) = Y_{2k-1} \quad , \ 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+2}{2}).$$

* Parámetros libres = (β^j_{2k}) $\quad 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+2}{2})$.

- $B_{-j} = \{\delta_k^{-j}\}$ $\quad 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+2}{2})$, con $d_{-j} \in \mathbb{K} < B_{-j} >$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = E(\frac{2q-j+2}{2})$ $\quad q+3 \leq j \leq 2q \quad (q \geq 3)$.

Cálculo de d_{-j} $\quad 4 \leq j \leq q+2$

Como $d_{-j}(\mathfrak{g}_t) \subset \mathfrak{g}_{t-j} \quad \forall t$, se cumple que

$$\begin{cases} d_{-j}(Y_{2k+2j-1}) &= \beta^j_{2k+2j-1}.Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2q-3}) &= \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2j-3} & \\ d_{-j}(X_0) &= \bar{\alpha}^j_0.Y_{2q-2j-1} & \\ d_{-j}(X_1) &= \bar{\alpha}^j_1.Y_{2q-2j+1} & \\ d_{-j}(Y_{2q-2}) &= \beta^j_{2q-2}.Y_{2q-2j+5} & \\ d_{-j}(Y_{2k}) &= \beta^j_{2k}.Y_{4q-2j-2k+3} & q-j+3 \leq k \leq q-2 \\ d_{-j}(Y_{2q-2j+4}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j+4}.X_0 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j+2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j+2}.X_1 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j}.X_2 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j-2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j-2}.X_3 + \beta^j_{2q-2j-2}.Y_{2q-2} & \\ d_{-j}(Y_{2k}) &= \beta^j_{2k}.Y_{2k+2j} & 1 \leq k \leq q-j-2. \end{cases}$$

Al exigir que d_{-j} sea derivación, se obtiene que

$$\begin{cases} \bar{\beta}^j_{2q-2j+2} &= 0 & \Rightarrow & d_{-j}(Y_{2q-2j+2}) = 0 \\ \bar{\alpha}^j_1 &= 0 & \Rightarrow & d_{-j}(X_1) = 0 \\ \bar{\beta}^j_{2q-2j+4} &= 0 & \Rightarrow & d_{-j}(Y_{2q-2j+4}) = 0 \\ \bar{\beta}^j_{2q-2j} &= -\bar{\alpha}^j_0 & & \\ \beta^j_{2k+2j-1} &= -\beta^j_{2k} & & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ \beta^j_{2q-3} &= -\beta^j_{2q-2j-2} & & \\ \beta^j_{2q-2j+2k+2} &= \beta^j_{2q-2k+2} & & 2 \leq k \leq E(\frac{j}{2}). \end{cases}$$

En consecuencia, se verifica que

$$\begin{cases} d_{-j}(X_0) &= \bar{\alpha}^j_0.Y_{2q-2j-1} & \\ d_{-j}(Y_{2k+2j-1}) &= -\beta^j_{2k}.Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2k}) &= \beta^j_{2k}.Y_{2k+2j} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2q-3}) &= \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2j-3} & \\ d_{-j}(Y_{2q-2k+2}) &= \beta^j_{2q-2k+2}.Y_{2q-2j+2k+1} & 2 \leq k \leq E(\frac{j}{2}) \\ d_{-j}(Y_{2q-2j+2k+2}) &= \beta^j_{2q-2k+2}.Y_{2q-2k+1} & 2 \leq k \leq E(\frac{j}{2}) \\ d_{-j}(Y_{2q-2j}) &= -\bar{\alpha}^j_0.X_2 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j-2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j-2}.X_3 - \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2} & \end{cases}$$

Se consideran las derivaciones f_k^{-j} $1 \leq k \leq 3$, g_k^{-j} $1 \leq k \leq q-j-2$ y h_k^{-j} $1 \leq k \leq E(\frac{j-2}{2})$, definidas por

$$\begin{array}{lllllll}
f_1^{-j}(X_0) & = & Y_{2q-2j-1} & f_1^{-j}(Y_{2q-2j}) & = & -X_2 & \\
f_2^{-j}(Y_{2q-2j-2}) & = & X_3 & & & & \\
f_3^{-j}(Y_{2q-3}) & = & Y_{2q-2j-3} & f_3^{-j}(Y_{2q-2j-2}) & = & -Y_{2q-2} & \\
g_k^{-j}(Y_{2k}) & = & Y_{2k+2j} & g_k^{-j}(Y_{2k+2j-1}) & = & -Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\
h_k^{-j}(Y_{2q-2k}) & = & Y_{2q-2j+2k+3} & h_k^{-j}(Y_{2q-2j+2k+4}) & = & Y_{2q-2k-1} & 1 \leq k \leq E(\frac{j-2}{2}),
\end{array}$$

donde $4 \leq j \leq q+2$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $4 \leq j \leq q-3$

Evidentemente, $q \geq 7$, ya que $j \geq 4$.

* Parámetros libres =

$$= (\bar{\alpha}_0^j, \bar{\beta}_{2q-2j-2}^j, \beta_{2q-3}^j, \beta_2^j, \beta_4^j, \ldots, \beta_{2q-2j-4}^j, \beta_{2q-2}^j, \beta_{2q-4}^j, \ldots, \beta_{2q+2-2E(\frac{j}{2})}^j).$$

- $B_{-j} = \{f_1^{-j}, f_2^{-j}, f_3^{-j}, g_1^{-j}, g_2^{-j}, \ldots, g_{q-j-2}^{-j}, h_1^{-j}, h_2^{-j}, \ldots, h_{E(\frac{j-2}{2})}^{-j}\}$, con $d_{-j} \in \mathbb{K} < B_{-j} >$.

- $dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = q-j+1+E(\frac{j-2}{2})$, $4 \leq j \leq q-3$ $(q \geq 7)$.

Caso 2: $j = q-2$

Evidentemente, $q \geq 6$, ya que $j \geq 4$.

* Parámetros libres = $(\bar{\alpha}_0^{q-2}, \bar{\beta}_2^{q-2}, \beta_{2q-3}^{q-2}, \beta_{2q-2}^{q-2}, \beta_{2q-4}^{q-2}, \ldots, \beta_{2q+2-2E(\frac{q-2}{2})}^{q-2})$.

- $B_{-q+2} = \{f_1^{-q+2}, f_2^{-q+2}, f_3^{-q+2}, h_1^{-q+2}, h_2^{-q+2}, \ldots, h_{E(\frac{q-4}{2})}^{-q+2}\}$, con $d_{-q+2} \in \mathbb{K} < B_{-q+2} >$.

- $dim(\mathbb{K} < B_{-q+2} >) = 3 + E(\frac{q-4}{2})$ $(q \geq 6)$.

Caso 3: $j = q - 1$

Evidentemente, $q \geq 5$, ya que $j \geq 4$.

* Parámetros libres $= (\bar{\alpha}_0^{q-1}, \beta_{2q-2}^{q-1}, \beta_{2q-4}^{q-1}, \ldots, \beta_{2q+2-2E(\frac{q-1}{2})}^{q-1})$.

• $B_{-q+1} = \{f_1^{-q+1}, h_1^{-q+1}, h_2^{-q+1}, \ldots, h_{E(\frac{q-3}{2})}^{-q+1}\}$, con $d_{-q+1} \in \mathbb{K} < B_{-q+1} >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_{-q+1} >) = 1 + E(\frac{q-3}{2}) \quad (q \geq 5)$.

Caso 4: $q \leq j \leq q + 2$

* Parámetros libres $= (\beta_{2q-2}^{j}, \beta_{2q-4}^{j}, \ldots, \beta_{2q+2-2E(\frac{j}{2})}^{j})$.

• $B_{-j} = \{h_1^{-j}, h_2^{-j}, \ldots, h_{E(\frac{j-2}{2})}^{-j}\}$, con $d_{-j} \in \mathbb{K} < B_{-j} >$.

• Se tiene que

$$\begin{array}{llll} j = q & \Rightarrow \; dim(\mathbb{K} < B_{-q} >) & = & E(\frac{q-2}{2}) \quad (q \geq 4) \\ j = q + 1 & \Rightarrow \; dim(\mathbb{K} < B_{-q-1} >) & = & E(\frac{q-1}{2}) \quad (q \geq 3) \\ j = q + 2 & \Rightarrow \; dim(\mathbb{K} < B_{-q-2} >) & = & E(\frac{q}{2}) \quad\;\;\, (q \geq 2). \end{array}$$

Cálculo de d_{-j} $\quad 1 \leq j \leq 3$

Como $d_{-j}(\mathfrak{g}_t) \subset \mathfrak{g}_{t-j}$ $\quad \forall t$, se cumple que

$$\begin{cases} d_{-j}(Y_{2k+2j-1}) &= \beta^j_{2k+2j-1}.Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2q-3}) &= \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2j-3} & \\ d_{-j}(X_0) &= \bar{\alpha}^j_0.Y_{2q-2j-1} & \\ d_{-j}(X_1) &= \alpha^j_1\delta_{j1}.X_0 + \bar{\alpha}^j_1(1-\delta_{j1}).Y_{2q-2j+1} & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j+4}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j+4}.X_0 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j+2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j+2}.X_1 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j}.X_2 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j-2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j-2}.X_3 + \beta^j_{2q-2j-2}.Y_{2q-2} & \\ d_{-j}(Y_{2k}) &= \beta^j_{2k}.Y_{2k+2j} & 1 \leq k \leq q-j-2. \end{cases}$$

Al exigir que d_{-j} sea derivación, se obtiene que

$$\begin{cases} d_{-j}(X_1) &= 0 & 1 \leq j \leq 3 \\ \beta^j_{2k+2j-1} &= -\beta^j_{2k} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ \bar{\beta}^j_{2q-2j+2} &= 0 & \Rightarrow \quad d_{-j}(Y_{2q-2j+2}) = 0 \\ \bar{\beta}^j_{2q-2j} &= -\bar{\alpha}^j_0 & \\ \beta^j_{2q-2j-2} &= -\beta^j_{2q-3} & \\ \bar{\beta}^j_{2q-2j+4} &= 0 & \Rightarrow \quad d_{-j}(Y_{2q-2j+4}) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, se verifica que

$$\begin{cases} d_{-j}(X_0) &= \bar{\alpha}^j_0.Y_{2q-2j-1} & \\ d_{-j}(Y_{2k+2j-1}) &= -\beta^j_{2k}.Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2k}) &= \beta^j_{2k}.Y_{2k+2j} & 1 \leq k \leq q-j-2 \\ d_{-j}(Y_{2q-2j}) &= -\bar{\alpha}^j_0.X_2 & \\ d_{-j}(Y_{2q-2j-2}) &= \bar{\beta}^j_{2q-2j-2}.X_3 - \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2} & \\ d_{-j}(Y_{2q-3}) &= \beta^j_{2q-3}.Y_{2q-2j-3} & \end{cases}$$

Se consideran las derivaciones f_k^{-j} $\quad 1 \leq k \leq 3 \quad y \quad g_k^{-j}$ $\quad 1 \leq k \leq q-j-2$, donde $\quad 1 \leq j \leq 3 \quad$ y definidas por

$$\begin{array}{lll lll} f_1^{-j}(X_0) &=& Y_{2q-2j-1} & f_1^{-j}(Y_{2q-2j}) &=& -X_2 \\ f_2^{-j}(Y_{2q-2j-2}) &=& X_3 & & & \\ f_3^{-j}(Y_{2q-3}) &=& Y_{2q-2j-3} & f_3^{-j}(Y_{2q-2j-2}) &=& -Y_{2q-2} \\ g_k^{-j}(Y_{2k}) &=& Y_{2k+2j} & g_k^{-j}(Y_{2k+2j-1}) &=& -Y_{2k-1} \qquad 1 \leq k \leq q-j-2. \end{array}$$

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $j \leq q-3$

* Parámetros libres $= (\bar{\alpha}_0^j, \bar{\beta}_{2q-2j-2}^j, \beta_{2q-3}^j, \beta_2^j, \beta_4^j, \ldots, \beta_{2q-2j-4}^j)$.

• $B_{-j} = \{f_1^{-j}, f_2^{-j}, f_3^{-j}, g_1^{-j}, g_2^{-j}, \ldots, g_{q-j-2}^{-j}\}$, con $d_{-j} \in \mathbb{K} < B_{-j} >$.

• Se tiene que

$$j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = q-2 \quad (q \geq 6)$$

$$j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = q-1 \quad (q \geq 5)$$

$$j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = q \qquad (q \geq 4).$$

Caso 2: $j = q-2$

* Parámetros libres $= (\bar{\alpha}_0^{q-2}, \bar{\beta}_2^{q-2}, \beta_{2q-3}^{q-2})$.

• $B_{-q+2} = \{f_1^{-q+2}, f_2^{-q+2}, f_3^{-q+2}\}$, con $d_{-q+2} \in \mathbb{K} < B_{-q+2} >$.

• Se tiene que

$$j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = 3 \quad (q = 5)$$

$$j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = 3 \quad (q = 4)$$

$$j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 3 \quad (q = 3).$$

Caso 3: $j = q - 1$

* Parámetros libres $= (\bar{\alpha}_0^{q-1})$.

- $B_{-q+1} = \{f_1^{-q+1}\}$, con $d_{-q+1} \in \mathbb{K} < B_{-q+1} >$.
- Se tiene que

$$j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = 1 \quad (q = 4)$$

$$j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = 1 \quad (q = 3)$$

$$j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 1 \quad (q = 2).$$

Caso 4: $j \geq q$

* No hay parámetros libres $\Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = 0$, $\forall j = 1, 2, 3$.

Se obtiene, como resumen de los casos analizados, que

$$dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = \begin{cases} q-2 & \text{si} \quad q \geq 5 \\ 1 & \text{si} \quad q = 4 \\ 0 & \text{si} \quad q \leq 3 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = \begin{cases} q-1 & \text{si} \quad q \geq 4 \\ 1 & \text{si} \quad q = 3 \\ 0 & \text{si} \quad q \leq 2 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \geq 3 \\ 1 & \text{si} \quad q = 2 \\ 0 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Cálculo de d_0

Como $d_0(\mathfrak{g}_t) \subset \mathfrak{g}_t \quad \forall t$, se cumple que

$$\left\{\begin{array}{lll} d_0(Y_{2k-1}) & = & \beta^0_{2k-1}.Y_{2k-1} \qquad\qquad 1 \le k \le q-1 \\ d_0(X_0) & = & \alpha^0_0.X_0 \\ d_0(X_1) & = & \alpha^0_1.X_1 \\ d_0(X_2) & = & \alpha^0_2.X_2 \\ d_0(X_3) & = & \alpha^0_3.X_3 \\ d_0(Y_{2k}) & = & \beta^0_{2k}.Y_{2k} \qquad\qquad 1 \le k \le q-2 \\ d_0(Y_{2q-2}) & = & \bar{\beta}^0_{2q-2}.X_3 + \beta^0_{2q-2}.Y_{2q-2} \end{array}\right.$$

Al exigir que d_0 sea derivación, se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha^0_2 & = & \alpha^0_0 + \alpha^0_1 \\ \alpha^0_3 & = & 2\alpha^0_0 + \alpha^0_1 \\ \beta^0_{2q-3} & = & 2\alpha^0_0 + \alpha^0_1 - \beta^0_{2q-2} \\ \beta^0_{2k-1} & = & 2\alpha^0_0 + \alpha^0_1 - \beta^0_{2k} \qquad 1 \le k \le q-2. \end{array}\right.$$

En consecuencia, se verifica que

$$\left\{\begin{array}{lll} d_0(X_0) & = & \alpha^0_0.X_0 \\ d_0(X_1) & = & \alpha^0_1.X_1 \\ d_0(X_2) & = & (\alpha^0_0 + \alpha^0_1).X_2 \\ d_0(X_3) & = & (2\alpha^0_0 + \alpha^0_1).X_3 \\ d_0(Y_{2k-1}) & = & (2\alpha^0_0 + \alpha^0_1 - \beta^0_{2k}).Y_{2k-1} \qquad 1 \le k \le q-1 \\ d_0(Y_{2k}) & = & \beta^0_{2k}.Y_{2k} \qquad\qquad 1 \le k \le q-2 \\ d_0(Y_{2q-2}) & = & \bar{\beta}^0_{2q-2}.X_3 + \beta^0_{2q-2}.Y_{2q-2} \end{array}\right.$$

Se consideran las derivaciones $\delta^0_k \quad 1 \le k \le 2$, f^0_2 y $g^0_k \quad 1 \le k \le q-1$, definidas por

$$\begin{array}{llllll} \delta^0_1(X_0) = X_0 & \delta^0_1(X_2) = X_2 & \delta^0_1(X_3) = 2X_3 & \delta^0_1(Y_{2k-1}) = 2Y_{2k-1} & 1 \le k \le q-1 \\ \delta^0_2(X_1) = X_1 & \delta^0_2(X_2) = X_2 & \delta^0_2(X_3) = X_3 & \delta^0_2(Y_{2k-1}) = Y_{2k-1} & 1 \le k \le q-1 \\ f^0_2(Y_{2q-2}) = X_3 & & & & \\ g^0_k(Y_{2k}) = Y_{2k} & g^0_k(Y_{2k-1}) = -Y_{2k-1} & 1 \le k \le q-1. & & \end{array}$$

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $q \geq 2$

* Parámetros libres = $(\alpha_0^0, \alpha_1^0, \bar{\beta}_{2q-2}^0, \beta_2^0, \beta_4^0, \ldots, \beta_{2q-2}^0)$.

• $B_0 = \{\delta_1^0, \delta_2^0, f_2^0, g_1^0, g_2^0, \ldots, g_{q-1}^0\}$, con $d_0 \in \mathbb{K} < B_0 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_0 >) = q + 2 \quad (q \geq 2)$.

Caso 2: $q = 1$

* Parámetros libres = (α_0^0, α_1^0).

• $B_0 = \{\delta_1^0, \delta_2^0\}$, con $d_0 \in \mathbb{K} < B_0 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_0 >) = 2 \quad (q = 1)$.

Se obtiene, como resumen de los casos analizados, que

$$dim(\mathbb{K} < B_0 >) = \begin{cases} q+2 & \text{si} \quad q \geq 2 \\ 2 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Cálculo de d_j $\quad 1 \leq j \leq 3$

En este caso se llega, como antes, a que

$$\begin{cases} d_j(X_0) & = \alpha_0^j.\delta_{j1}.X_1 + \alpha_0^j.\delta_{j2}.X_2 + \alpha_0^j.\delta_{j3}.X_3 + \bar{\alpha}_0^j.\delta_{j3}.Y_{2q-2} & \\ d_j(X_1) & = \alpha_1^j.\delta_{j1}.X_2 + \alpha_1^j.\delta_{j2}.X_3 & \\ d_j(X_2) & = \alpha_1^j.\delta_{j1}.X_3 & \\ d_j(Y_{2k-1}) & = \beta_{2k-1}^j.Y_{2k+2j-1} & 1 \leq k \leq q-j-1 \\ d_j(Y_{2k+2j}) & = -\beta_{2k-1}^j.Y_{2k} & 1 \leq k \leq q-j-1 \\ d_j(Y_{2q-2j+3}) & = \bar{\alpha}_0^j.\delta_{j3}.X_2 & \end{cases}$$

Se consideran las derivaciones f_k^j, $1 \leq k \leq 3$, y g_k^j, $1 \leq k \leq q-j-1$, definidas por

$$\begin{array}{lcllcll} f_1^j(X_0) & = & \delta_{j1}.X_1 + \delta_{j2}.X_2 + \delta_{j3}.X_3 & & & & \\ f_2^j(X_1) & = & \delta_{j1}.X_2 + \delta_{j2}.X_3 & f_2^j(X_2) & = & \delta_{j1}.X_3 & \\ f_3^j(X_0) & = & \delta_{j3}.Y_{2q-2} & f_3^j(Y_{2q-2j+3}) & = & \delta_{j3}.X_2 & \\ g_k^j(Y_{2k+2j}) & = & -Y_{2k} & g_k^j(Y_{2k-1}) & = & Y_{2k+2j-1} & 1 \leq k \leq q-j-1, \end{array}$$

donde $\quad 1 \leq j \leq 3$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $j \leq q-2$

Caso 1.1: $j = 1 \quad (q \geq 3)$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^1, \alpha_1^1, \beta_1^1, \beta_3^1, \ldots, \beta_{2q-5}^1)$.

- $B_1 = \{f_1^1, f_2^1, g_1^1, g_2^1, \ldots, g_{q-2}^1\}$, con $d_1 \in \mathbb{K} < B_1 >$.

- $dim(\mathbb{K} < B_1 >) = q \quad (q \geq 3)$.

Caso 1.2: $j = 2 \quad (q \geq 4)$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^2, \alpha_1^2, \beta_1^2, \beta_3^2, \ldots, \beta_{2q-7}^2)$.

- $B_2 = \{f_1^2, f_2^2, g_1^2, g_2^2, \ldots, g_{q-3}^2\}$, con $d_2 \in \mathbb{K} < B_2 >$.

- $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = q-1 \quad (q \geq 4)$.

Caso 1.3: $j = 3 \quad (q \geq 5)$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^3, \bar{\alpha}_0^3, \beta_1^3, \beta_3^3, \ldots, \beta_{2q-9}^3)$.

• $B_3 = \{f_1^3, f_3^3, g_1^3, g_2^3, \ldots, g_{q-4}^3\}$, con $d_3 \in \mathbb{K} < B_3 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = q - 2 \quad (q \geq 5)$.

Caso 2: $j \geq q - 1$

Caso 2.1: $j = 1 \quad (1 \leq q \leq 2)$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^1, \alpha_1^1)$.

• $B_1 = \{f_1^1, f_2^1\}$, con $d_1 \in \mathbb{K} < B_1 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_1 >) = 2 \quad (1 \leq q \leq 2)$.

Caso 2.2: $j = 2 \quad (1 \leq q \leq 3)$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^2, \alpha_1^2)$.

• $B_2 = \{f_1^2, f_2^2\}$, con $d_2 \in \mathbb{K} < B_2 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = 2 \quad (1 \leq q \leq 3)$.

Caso 2.3: $j = 3 \quad (1 \leq q \leq 4)$

Caso 2.3.1: $2 \leq q \leq 4$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^3, \bar{\alpha}_0^3)$.

• $B_3 = \{f_1^3, f_3^3\}$, con $d_3 \in \mathbb{K} < B_3 >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 2 \quad (2 \leq q \leq 4)$.

Caso 2.3.2: $q = 1$

* Parámetros libres $= (\alpha_0^3)$.

- $B_3 = \{f_1^3\}$, con $d_3 \in \mathbb{K} < B_3 >$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 1 \quad (q = 1)$.

Se obtiene, como resumen de los casos analizados, que

$$dim(\mathbb{K} < B_1 >) = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \geq 2 \\ 2 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_2 >) = \begin{cases} q-1 & \text{si} \quad q \geq 3 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq q \leq 2 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_3 >) = \begin{cases} q-2 & \text{si} \quad q \geq 4 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq q \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Cálculo de d_j $\quad 4 \leq j \leq q+2$

En este caso se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{lll} d_j(X_0) & = \bar{\alpha}_0^j.Y_{2q-2j+4} & \\ d_j(Y_{2k-1}) & = \beta_{2k-1}^j.Y_{2k+2j-1} & 1 \leq k \leq q-j-1 \\ d_j(Y_{2k+2j}) & = -\beta_{2k-1}^j.Y_{2k} & 1 \leq k \leq q-j-1 \\ d_j(Y_{2q-2k-3}) & = \beta_{2q-2k-3}^j.Y_{2q-2j+2k+6} & 1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2}) \\ d_j(Y_{2q-2j+2k+5}) & = \beta_{2q-2k-3}^j.Y_{2q-2k-2} & 1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2}) \\ d_j(Y_{2q-2j+3}) & = \bar{\alpha}_0^j.X_2 & \\ d_j(Y_{2q-2j+5}) & = \bar{\beta}_{2q-2j+5}^j.X_3 + \beta_{2q-3}^j.Y_{2q-2} & \\ (1-\delta_{j4}).d_j(Y_{2q-3}) & = (1-\delta_{j4}).\beta_{2q-3}^j.Y_{2q-2j+6} & \end{array}\right.$$

Se consideran las derivaciones f_k^j $\ 1 \leq k \leq 3$, g_k^j $\ 1 \leq k \leq q-j-1$ y h_k^j $\ 1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2})$ definidas por

$$\begin{array}{llll} f_1^j(X_0) & = Y_{2q-2j+4} & f_1^j(Y_{2q-2j+3}) & = X_2 \\ f_2^j(Y_{2q-2j+5}) & = X_3 & & \\ (1-\delta_{j4}).f_3^j(Y_{2q-3}) & = (1-\delta_{j4}).Y_{2q-2j+6} & f_3^j(Y_{2q-2j+5}) & = Y_{2q-2} \\ g_k^j(Y_{2k-1}) & = Y_{2k+2j-1} & g_k^j(Y_{2k+2j}) & = -Y_{2k} \\ \quad 1 \leq k \leq q-j-1 & & & \\ h_k^j(Y_{2q-2k-3}) & = Y_{2q-2j+2k+6} & h_k^j(Y_{2q-2j+2k+5}) & = Y_{2q-2k-2} \\ \quad 1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2}) & & & \end{array}$$

donde $\quad 4 \leq j \leq q+2$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $4 \leq j \leq q-2$

Evidentemente, $q \geq 6$, ya que $j \geq 4$.

* Parámetros libres =
$= (\bar{\alpha}_0^j, \bar{\beta}_{2q-2j+5}^j, \beta_{2q-3}^j, \beta_1^j, \beta_3^j, \ldots, \beta_{2q-2j-3}^j, \beta_{2q-5}^j, \beta_{2q-7}^j, \ldots, \beta_{2q-3-2E(\frac{j-4}{2})}^j)$.

• $B_j = \{f_1^j, f_2^j, f_3^j, g_1^j, g_2^j, \ldots, g_{q-j-1}^j, h_1^j, h_2^j, \ldots, h_{E(\frac{j-4}{2})}^j\}$, con $d_j \in \mathbb{K} < B_j >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_j >) = q-j+2+E(\frac{j-4}{2}) \quad 4 \leq j \leq q-2 \quad (q \geq 6)$.

Caso 2: $q-1 \leq j \leq q+1$

* Parámetros libres $= (\bar{\alpha}_0^j, \bar{\beta}_{2q-2j+5}^j, \beta_{2q-3}^j, \beta_{2q-5}^j, \beta_{2q-7}^j, \dots, \beta_{2q-3-2E(\frac{j-4}{2})}^j)$.

• $B_j = \{f_1^j, f_2^j, f_3^j, h_1^j, h_2^j, \dots, h_{E(\frac{j-4}{2})}^j\}$, con $d_j \in \mathbb{K} < B_j >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_j >) = 3 + E(\frac{j-4}{2}) \quad q-1 \leq j \leq q+1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} j = q-1 & \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_{q-1} >) & = & 3 + E(\frac{q-5}{2}) & (q \geq 5) \\ j = q & \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_q >) & = & 3 + E(\frac{q-4}{2}) & (q \geq 4) \\ j = q+1 & \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_{q+1} >) & = & 3 + E(\frac{q-3}{2}) & (q \geq 3). \end{cases}$$

Caso 3: $j = q+2$

Evidentemente, $q \geq 2$, ya que $j \geq 4$.

* Parámetros libres $= (\bar{\beta}_1^{q+2}, \beta_{2q-3}^{q+2}, \beta_{2q-5}^{q+2}, \beta_{2q-7}^{q+2}, \dots, \beta_{2q-3-2E(\frac{q-2}{2})}^{q+2})$.

• $B_{q+2} = \{f_2^{q+2}, f_3^{q+2}, h_1^{q+2}, h_2^{q+2}, \dots, h_{E(\frac{q-2}{2})}^{q+2}\}$, con $d_{q+2} \in \mathbb{K} < B_{q+2} >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_{q+2} >) = 2 + E(\frac{q-2}{2}) \quad (q \geq 2)$.

Cálculo de $d_j \quad q+3 \leq j \leq 2q$

Ahora se tiene que

$$d_j(Y_{2k-1}) = \beta^j_{2k-1}.Y_{4q-2j-2k+4} \quad 1 \leq k \leq 2q-j+1,$$

verificándose que

$$\beta^j_{4q-2j-2k+3} = \beta^j_{2k-1} \quad 1 \leq k \leq 2q-j+1.$$

Se consideran las derivaciones δ^j_k , $1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+3}{2})$, definidas por

$$\delta^j_k(Y_{2k-1}) = Y_{4q-2j-2k+4} \ , \ \delta^j_k(Y_{4q-2j-2k+3}) = Y_{2k} \ , \ 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+3}{2}).$$

* Parámetros libres = $(\beta^j_{2k-1}) \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+3}{2})$

• $B_j = \{\delta^j_k\} \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2q-j+3}{2})$, con $d_j \in \mathbb{K} < B_j >$.

• $dim(\mathbb{K} < B_j >) = E(\frac{2q-j+3}{2}) \quad q+3 \leq j \leq 2q \quad (q \geq 3)$.

Cálculo de $dim(Der(h_1^{2q-1}))$

Para que los cálculos anteriores no abrumen, se va a dar aquí un breve resumen con los principales resultados encontrados y que tienen interés para el cálculo de $dim(Der(h_1^{2q-1}))$.

Sea $\bar{d}_1 \in Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$ cualquiera. Se ha probado que

$$\bar{d}_1 = \sum_{i \in Z} d_i$$

donde $d_i \in Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$ y $d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para $k < -q+2$ y $k > q+2$.

Como $d_{2q}(\mathfrak{g}_{-q+2}) \subset \mathfrak{g}_{q+2}$ y $d_{-2q}(\mathfrak{g}_{q+2}) \subset \mathfrak{g}_{-q+2}$, se deduce que

$$d_i = 0 \quad i > 2q \ , \ i < -2q \Rightarrow \bar{d}_1 = \sum_{i=-2q}^{2q} d_i$$

Se ha expresado cada d_i , $-2q \leq i \leq 2q$, como una combinación lineal de un cierto conjunto B_i , $-2q \leq i \leq 2q$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{h}_1^{2q-1}$ cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-2q}^{2q} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})$ y, evidentemente,

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})) = \sum_{i=-2q}^{2q} dim(K < B_i >).$$

Resumiendo lo anteriormente obtenido, se tiene que

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = E(\tfrac{2q-j+2}{2}) \quad q+3 \leq j \leq 2q \qquad q \geq 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=q+3}^{2q} dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = \begin{cases} \frac{(q-1)^2}{4} & \text{si } q = \dot{2}+1 \qquad q \geq 1 \\ \frac{q.(q-2)}{4} & \text{si } q = \dot{2} \qquad q \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) & = & q-j+1+E(\frac{j-2}{2}) \quad 4 \leq j \leq q-3 & q \geq 7 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-q+2} >) & = & 3+E(\frac{q-4}{2}) & q \geq 6 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-q+1} >) & = & 1+E(\frac{q-3}{2}) & q \geq 5 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-q} >) & = & E(\frac{q-2}{2}) & q \geq 4 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-q-1} >) & = & E(\frac{q-1}{2}) & q \geq 3 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{-q-2} >) & = & E(\frac{q}{2}) & q \geq 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=4}^{q+2} dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q=2 \\ 2 & \text{si} \quad q=3 \\ 4 & \text{si} \quad q=4 \\ \frac{3q^2-10q+3}{4} & \text{si} \quad q=\dot{2}+1 \quad q \geq 5 \\ \frac{3q^2-10q+4}{4} & \text{si} \quad q=\dot{2} \quad q \geq 5 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = \begin{cases} q-2 & \text{si} \quad q \geq 5 \\ 1 & \text{si} \quad q=4 \\ 0 & \text{si} \quad q \leq 3 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = \begin{cases} q-1 & \text{si} \quad q \geq 4 \\ 1 & \text{si} \quad q=3 \\ 0 & \text{si} \quad q \leq 2 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \geq 3 \\ 1 & \text{si} \quad q=2 \\ 0 & \text{si} \quad q=1 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{0} >) = \begin{cases} q+2 & \text{si} \quad q \geq 2 \\ 2 & \text{si} \quad q=1 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{1} >) = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \geq 2 \\ 2 & \text{si} \quad q=1 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{2} >) = \begin{cases} q-1 & \text{si} \quad q \geq 3 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq q \leq 2 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_{3} >) = \begin{cases} q-2 & \text{si} \quad q \geq 4 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq q \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad q=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcll}
* \ dim(\mathbb{K} < B_{j} >) & = & q-j+2+E(\frac{j-4}{2}) & 4 \leq j \leq q-2 \quad q \geq 6 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{q-1} >) & = & 3+E(\frac{q-5}{2}) & q \geq 5 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{q} >) & = & 3+E(\frac{q-4}{2}) & q \geq 4 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{q+1} >) & = & 3+E(\frac{q-3}{2}) & q \geq 3 \\
* \ dim(\mathbb{K} < B_{q+2} >) & = & 2+E(\frac{q-2}{2}) & q \geq 2 \quad \Rightarrow
\end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=4}^{q+2} dim(\mathbb{K} < B_{j} >) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad q=2 \\ 5 & \text{si} \quad q=3 \\ \frac{3q^2-10q+27}{4} & \text{si} \quad q=\dot{2}+1 \quad q \geq 4 \\ \frac{3q^2-10q+28}{4} & \text{si} \quad q=\dot{2} \quad q \geq 4 \end{cases}$$

$$* \ dim(\mathbb{K} < B_j >) = E(\tfrac{2q-j+3}{2}) \quad q+3 \leq j \leq 2q \quad q \geq 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=q+3}^{2q} dim(\mathbb{K} < B_j >) = \begin{cases} \frac{q^2-5}{4} & \text{si} \quad q = \dot{2}+1 \quad q \geq 3 \\ \frac{q^2-4}{4} & \text{si} \quad q = \dot{2} \quad q \geq 3. \end{cases}$$

Se ha llegado, por tanto, a que

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})) = \sum_{i=-2q}^{i=2q} dim(K < B_i >) = \begin{cases} 7 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{4q^2+3q+5}{2} & \text{si} \quad q = \dot{2}+1 \quad q \geq 2 \\ \frac{4q^2+3q+6}{2} & \text{si} \quad q = \dot{2} \quad q \geq 2. \end{cases}$$

Cálculo de $dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1}))$

Como se cumple que $\mathfrak{g}_n^{2q-1} = \mathfrak{h}_1^{2q-1} \oplus \mathfrak{h}_2^{2q-1}$, donde $\mathfrak{h}_1^{2q-1} =< X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2q-3}, Y_{2q-2} >$ y $\mathfrak{h}_2^{2q-1} =< Y_{2q-1}, Y_{2q}, \ldots, Y_{n-4} >$, habrá de ser $dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) =$

$$= dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})) + dim(Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1})) + dim(D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1})) + dim(D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1})).$$

Como se ha obtenido que

$$\begin{array}{lcl} dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2q-1})) & = & \begin{cases} 7 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{4q^2+3q+5}{2} & \text{si} \quad q = \dot{2}+1 \quad q \geq 2 \\ \frac{4q^2+3q+6}{2} & \text{si} \quad q = \dot{2} \quad q \geq 2 \end{cases} \\ dim(Der(\mathfrak{h}_2^{2q-1})) & = & (n-2q-2)^2 \\ dim(D(\mathfrak{h}_1^{2q-1}, \mathfrak{h}_2^{2q-1})) & = & 2q.(n-2q-2) \\ dim(D(\mathfrak{h}_2^{2q-1}, \mathfrak{h}_1^{2q-1})) & = & (n-2q-2), \end{array}$$

se llega a que

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} 7 + (n-4).(n-1) & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{4q^2+3q+5}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q = \dot{2}+1 \quad q \geq 2 \\ \frac{4q^2+3q+6}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si} \quad q = \dot{2} \quad q \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

□

4.2 Derivaciones de las álgebras de la familia $\mathfrak{g}_n^{2s}$, $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$

Se describe en esta sección el álgebra de derivaciones $Der(\mathfrak{g}_n^{2s})$, donde $\mathfrak{g}_n^{2s}$, $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$, designa a la familia de álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes, de dimensión n, de leyes

$$\mathfrak{g}_n^{2s}: \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & \\ [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq s-1 \end{array}$$

para cada $s \in \{1, 2, \ldots, E(\frac{n-3}{2})\}$.

Teorema 4.2. *Se verifica que*

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} n^2 - 6n + 15 & \text{si} \quad s = 1 & \\ \frac{4s^2+7s+7}{2} + (n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s = \dot{2}+1 & s \geq 2 \\ \frac{4s^2+7s+8}{2} + (n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s = \dot{2} & s \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

Demostración:

Para cada s, la correspondiente álgebra se puede expresar como suma directa de dos álgebras:

$$\mathfrak{g}_n^{2s} = \mathfrak{h}_1^{2s} \oplus \mathfrak{h}_2^{2s}$$

donde

$$\begin{array}{l} \mathfrak{h}_1^{2s} =< X_0, X_1, X_2, X_3, Y_{n-4}, Y_1, \ldots, Y_{2s-3}, Y_{2s-2} > \\ \mathfrak{h}_2^{2s} =< Y_{2s-1}, Y_{2s}, \ldots, Y_{n-5} > . \end{array}$$

Se deduce que

$$Der(\mathfrak{g}_n^{2s}) = Der(\mathfrak{h}_1^{2s}) \oplus Der(\mathfrak{h}_2^{2s}) \oplus D(\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathfrak{h}_2^{2s}) \oplus D(\mathfrak{h}_2^{2s}, \mathfrak{h}_1^{2s}).$$

Si $d \in Der(\mathfrak{g}_n^{2s})$, entonces

$$\exists \bar{d}_i \in Der(\mathfrak{h}_i^{2s}) \quad i = 1, 2 \quad \text{y} \quad \exists \bar{d}_{ij} \in D(\mathfrak{h}_i^{2s}, \mathfrak{h}_j^{2s}) \quad (i,j) = (1,2), (2,1),$$

tal que $d = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_{12} + \bar{d}_{21}$, verificándose que

$\bar{d}_i \in Der(\mathfrak{h}_i^{2s}) \Rightarrow \bar{d}_i(\mathfrak{h}_i^{2s}) \subset \mathfrak{h}_i^{2s} \quad i = 1, 2.$

$$\bar{d}_{ij} \in D(\mathfrak{h}_i^{2s}, \mathfrak{h}_j^{2s}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{d}_{ij}(\mathfrak{h}_i^{2s}) & \subset & \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_j^{2s}) \\ \bar{d}_{ij}([\mathfrak{h}_i^{2s}, \mathfrak{h}_i^{2s}]) & = & \{0\} \\ \bar{d}_{ij}(\mathfrak{h}_j^{2s}) & = & \{0\} \end{cases}$$

para $\quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_2^{2s})$

$\bar{d}_2 \in Der(\mathfrak{h}_2^{2s}) \Leftrightarrow \bar{d}_2 \in gl(\mathfrak{h}_2^{2s}) \Leftrightarrow Der(\mathfrak{h}_2^{2s}) = gl(\mathfrak{h}_2^{2s})$.

- Base de $Der(\mathfrak{h}_2^{2s}) = \{\bar{\delta}_{kj}\}$ $\quad 2s - 1 \leq k, j \leq n - 5$, donde $\quad \bar{\delta}_{kj}(Y_k) = Y_j$.

- $dim(Der(\mathfrak{h}_2^{2s})) = dim(gl(\mathfrak{h}_2^{2s})) = (n - 5 - (2s - 2))^2 = (n - 2s - 3)^2$.

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathfrak{h}_2^{2s})$

- Base de $D(\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathfrak{h}_2^{2s}) = \{\bar{f}_{ik}, \bar{g}_{jk}\}$ $\quad$ donde

$$\begin{array}{rcl} \bar{f}_{ik}(X_i) & = & Y_k \\ \bar{g}_{jk}(Y_j) & = & Y_k \end{array}$$

$$0 \leq i \leq 1 \ , \ 1 \leq j \leq 2s - 2 \ , \ j = n - 4 \ , \ 2s - 1 \leq k \leq n - 5.$$

- $dim(D(\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathfrak{h}_2^{2s})) = (2 + 2s - 2 + 1).(n - 5 - (2s - 2)) = (2s + 1).(n - 2s - 3)$.

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_2^{2s}, \mathfrak{h}_1^{2s})$

- Base de $D(\mathfrak{h}_2^{2s}, \mathfrak{h}_1^{2s}) = \{\bar{h}_k\}$, $\quad$ donde

$$\bar{h}_k(Y_k) = X_3 \ , \ 2s - 1 \leq k \leq n - 5.$$

- $dim(D(\mathfrak{h}_2^{2s}, \mathfrak{h}_1^{2s})) = (n - 5 - (2s - 2)) = (n - 2s - 3)$.

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_1^{2s})$

Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{h}_1^{2s}$:

$$\mathfrak{h}_1^{2s} =< Y_1 > \oplus < Y_3 > \oplus < Y_5 > \oplus \ldots \oplus < Y_{2s-5} > \oplus < Y_{2s-3} > \oplus$$
$$\oplus < X_0 > \oplus < X_1, Y_{n-4} > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y_{2s-2} > \oplus < Y_{2s-4} > \oplus$$
$$\oplus < Y_{2s-6} > \oplus \ldots \oplus < Y_6 > \oplus < Y_4 > \oplus < Y_2 >, \text{ donde}$$

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{g}_{-k} & = & < Y_{-2k+2s-3} > & 0 \leq k \leq s-2 \\
\mathfrak{g}_k & = & < X_{k-1} > & k = 1, 3 \\
\mathfrak{g}_2 & = & < X_1, Y_{n-4} > & \\
\mathfrak{g}_4 & = & < X_3, Y_{2s-2} > & \\
\mathfrak{g}_k & = & < Y_{-2k+2s+6} > & 5 \leq k \leq s+2.
\end{array}$$

Sea $\bar{d}_1 \in Der(\mathfrak{h}_1^{2s})$. Entonces

$$\bar{d}_1 = \sum_{i \in Z} d_i$$

donde $d_i \in Der(\mathfrak{h}_1^{2s})$ y $d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para $k < -s+2$ y $k > s+2$.

Como $d_{2s}(\mathfrak{g}_{-s+2}) \subset \mathfrak{g}_{s+2}$ y $d_{-2s}(\mathfrak{g}_{s+2}) \subset \mathfrak{g}_{-s+2}$, se deduce que

$$d_i = 0 \quad i > 2s \ , \ i < -2s \Rightarrow \bar{d}_1 = \sum_{i=-2s}^{2s} d_i$$

Habrá que expresar cada d_i , $-2s \leq i \leq 2s$, como una combinación lineal de un cierto conjunto B_i , $-2s \leq i \leq 2s$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{h}_1^{2s}$ cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-2s}^{2s} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{h}_1^{2s})$ y, evidentemente,

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2s})) = \sum_{i=-2s}^{2s} dim(K < B_i >).$$

En los cálculos habrá que tener en cuenta que los ideales de la sucesión central descendente:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0(\mathfrak{h}_1^{2s}) & = & \mathfrak{h}_1^{2s} \\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{h}_1^{2s}) & = & [\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathcal{C}^0(\mathfrak{h}_1^{2s})] =< X_2, X_3 > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{h}_1^{2s}) & = & [\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathcal{C}^1(\mathfrak{h}_1^{2s})] =< X_3 > \end{array}$$

son característicos, es decir, estables para cualquier derivación.

El proceso de cálculo de las d_i , $-2s \leq i \leq 2s$, es , en todo análogo al del caso de $Der(h_1^{2q-1})$, por lo que solamente se indicará, en cada caso, B_i y $dim(\mathbb{K} < B_i >)$.

Cálculo de $d_{-j} \quad s+3 \leq j \leq 2s$

Se consideran las derivaciones δ_k^{-j} , $1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+2}{2})$, definidas por

$$\delta_k^{-j}(Y_{2k}) = Y_{4s-2j-2k+3} \quad \delta_k^{-j}(Y_{4s-2j-2k+4}) = Y_{2k-1} \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+2}{2}).$$

- $B_{-j} = \{\delta_k^{-j}\} \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+2}{2})$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = E(\frac{2s-j+2}{2}) \quad s+3 \leq j \leq 2s \quad (s \geq 3)$.

Cálculo de d_{-j} $\quad 4 \leq j \leq s+2$

Se consideran las derivaciones f_k^{-j} $1 \leq k \leq 4$, g_k^{-j} $1 \leq k \leq s-j-2$ y h_k^{-j} $1 \leq k \leq E(\frac{j-2}{2})$, donde $4 \leq j \leq s+2$ y definidas por

$$\begin{array}{lllllll}
f_1^{-j}(X_0) & = & Y_{2s-2j-1} & f_1^{-j}(Y_{2s-2j}) & = & -X_2 & \\
f_2^{-j}(Y_{2s-2j-2}) & = & X_3 & & & & \\
f_3^{-j}(Y_{2s-3}) & = & Y_{2s-2j-3} & f_3^{-j}(Y_{2s-2j-2}) & = & -Y_{2s-2} & \\
f_4^{-j}(X_1) & = & Y_{2s-2j+1} & f_4^{-j}(Y_{2s-2j+2}) & = & -Y_{n-4} & \\
g_k^{-j}(Y_{2k}) & = & Y_{2k+2j} & g_k^{-j}(Y_{2k+2j-1}) & = & -Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq s-j-2 \\
h_k^{-j}(Y_{2s-2k}) & = & Y_{2s-2j+2k+3} & h_k^{-j}(Y_{2s-2j+2k+4}) & = & Y_{2s-2k-1} & 1 \leq k \leq E(\frac{j-2}{2}),
\end{array}$$

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $4 \leq j \leq s-3$

- $B_{-j} = \{f_1^{-j}, f_2^{-j}, f_3^{-j}, f_4^{-j}, g_1^{-j}, g_2^{-j}, \ldots, g_{s-j-2}^{-j}, h_1^{-j}, h_2^{-j}, \ldots, h_{E(\frac{j-2}{2})}^{-j}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = s-j+2+E(\frac{j-2}{2}) \quad 4 \leq j \leq s-3 \quad (s \geq 7)$.

Caso 2: $j = s-2$

- $B_{-s+2} = \{f_1^{-s+2}, f_2^{-s+2}, f_3^{-s+2}, f_4^{-s+2}, h_1^{-s+2}, h_2^{-s+2}, \ldots, h_{E(\frac{s-4}{2})}^{-s+2}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-s+2} >) = 4+E(\frac{s-4}{2}) \quad (s \geq 6)$.

Caso 3: $j = s-1$

- $B_{-s+1} = \{f_1^{-s+1}, f_4^{-s+1}, h_1^{-s+1}, h_2^{-s+1}, \ldots, h_{E(\frac{s-3}{2})}^{-s+1}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-s+1} >) = 2+E(\frac{s-3}{2}) \quad (s \geq 5)$.

Caso 4: $j = s$

- $B_{-s} = \{f_4^{-s}, h_1^{-s}, h_2^{-s}, \ldots, h_{E(\frac{s-2}{2})}^{-s}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-s} >) = 1+E(\frac{s-2}{2}) \quad (s \geq 4)$.

Caso 5: $s+1 \leq j \leq s+2$

- $B_{-j} = \{h_1^{-j}, h_2^{-j}, \ldots, h_{E(\frac{j-2}{2})}^{-j}\}$.
- $\begin{array}{lllll} j = s+1 \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_{-s-1} >) & = & E(\frac{s-1}{2}) & (s \geq 3) \\ j = s+2 \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_{-s-2} >) & = & E(\frac{s}{2}) & (s \geq 2). \end{array}$

Cálculo de d_{-j} $\quad 1 \leq j \leq 3$

Se consideran las derivaciones f_k^{-j} $\quad 1 \leq k \leq 4$ $\quad y \quad$ g_k^{-j} $\quad 1 \leq k \leq s-j-2$, definidas por

$$\begin{array}{lcllcll}
f_1^{-j}(X_0) & = & Y_{2s-2j-1} & f_1^{-j}(Y_{2s-2j}) & = & -X_2 & \\
f_2^{-j}(Y_{2s-2j-2}) & = & X_3 & & & & \\
f_3^{-j}(Y_{2s-3}) & = & Y_{2s-2j-3} & f_3^{-j}(Y_{2s-2j-2}) & = & -Y_{2s-2} & \\
f_4^{-j}(X_1) & = & Y_{2s-2j+1} & f_4^{-j}(Y_{2s-2j+2}) & = & -Y_{n-4} & \\
g_k^{-j}(Y_{2k}) & = & Y_{2k+2j} & g_k^{-j}(Y_{2k+2j-1}) & = & -Y_{2k-1} & 1 \leq k \leq s-j-2,
\end{array}$$

donde $\quad 1 \leq j \leq 3$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $j \leq s-3$

- $B_{-j} = \{f_1^{-j}, f_2^{-j}, f_3^{-j}, (1-\delta_{j1}).f_4^{-j}, g_1^{-j}, g_2^{-j}, \ldots, g_{s-j-2}^{-j}\}$.

- $\begin{array}{ll} j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = s-1 & (s \geq 6) \\ j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = s & (s \geq 5) \\ j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = s & (s \geq 4). \end{array}$

Caso 2: $j = s-2$

- $B_{-s+2} = \{f_1^{-s+2}, f_2^{-s+2}, f_3^{-s+2}, (1-\delta_{s-2,1}).f_4^{-s+2}\}$.

- $\begin{array}{ll} j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = 4 & (s = 5) \\ j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = 4 & (s = 4) \\ j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 3 & (s = 3). \end{array}$

Caso 3: $j = s-1$

- $B_{-s+1} = \{f_1^{-s+1}, (1-\delta_{s-1,1}).f_4^{-s+1}\}$.

- $\begin{array}{ll} j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = 2 & (s = 4) \\ j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = 2 & (s = 3) \\ j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 1 & (s = 2). \end{array}$

Caso 4: $j = s$

- $B_{-s} = \{(1-\delta_{s,1}).f_4^{-s}\}$.

- $j = 3 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = 1 \quad (s = 3)$
  $j = 2 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = 1 \quad (s = 2)$
  $j = 1 \Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 0 \quad (s = 1)$.

Caso 5: $j \geq s+1$

* No hay parámetros libres $\Rightarrow dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = 0 \quad \forall j = 1,2,3$.

Se obtiene, como resumen de todos los casos analizados, que

$$dim(\mathbb{K} < B_{-3} >) = \begin{cases} s-1 & \text{si} \quad s \geq 5 \\ 2 & \text{si} \quad s = 4 \\ 1 & \text{si} \quad s = 3 \\ 0 & \text{si} \quad s \leq 2 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_{-2} >) = \begin{cases} s & \text{si} \quad s \geq 4 \\ 2 & \text{si} \quad s = 3 \\ 1 & \text{si} \quad s = 2 \\ 0 & \text{si} \quad s = 1 \end{cases}$$

$$dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = \begin{cases} s & \text{si} \quad s \geq 3 \\ 1 & \text{si} \quad s = 2 \\ 0 & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

Cálculo de d_0

Se consideran las derivaciones $h_k^0 \quad 1 \leq k \leq 2$, δ_2^0 , f_2^0 y $g_k^0 \quad 1 \leq k \leq s-1$, definidas por

$$\begin{array}{lllllll}
h_1^0(X_0) & = X_0 & h_1^0(X_2) & = X_2 & h_1^0(X_3) & = & 2X_3 \\
h_1^0(Y_{2k-1}) & = 2Y_{2k-1} & h_1^0(Y_{n-4}) & = 2.Y_{n-4} & & & \\
\quad 1 \leq k \leq s-1 & & & & & & \\
h_2^0(X_1) & = Y_{n-4} & & & & & \\
\delta_2^0(X_1) & = X_1 & \delta_2^0(X_2) & = X_2 & \delta_2^0(X_3) & = & X_3 \\
\delta_2^0(Y_{2k-1}) & = Y_{2k-1} & & & & & \\
\ 1 \leq k \leq s-1 & & & & & & \\
f_2^0(Y_{2s-2}) & = X_3 & & & & & \\
g_k^0(Y_{2k}) & = Y_{2k} & g_k^0(Y_{2k-1}) & = -Y_{2k-1} & & & \\
\quad 1 \leq k \leq s-1. & & & & & &
\end{array}$$

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $s \geq 2$

- $B_0 = \{h_1^0, h_2^0, \delta_2^0, f_2^0, g_1^0, g_2^0, \ldots, g_{s-1}^0\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_0 >) = s + 3 \quad (s \geq 2)$.

Caso 2: $s = 1$

- $B_0 = \{h_1^0, h_2^0, \delta_2^0\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_0 >) = 3 \quad (s = 1)$.

Se obtiene, como resumen de todos los casos analizados, que

$$dim(\mathbb{K} < B_0 >) = \begin{cases} s+3 & \text{si} \quad s \geq 2 \\ \\ 3 & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

Cálculo de $d_j \quad 1 \leq j \leq 3$

Se consideran las derivaciones $h_k^j \quad 1 \leq k \leq 4$, f_2^j y $g_k^j \quad 1 \leq k \leq s-j-1$, definidas por

$$
\begin{array}{llll}
h_1^j(X_0) = \delta_{j1}.X_1 + \delta_{j2}.X_2 + \delta_{j3}.X_3 & h_1^j(Y_{n-4}) = -\delta_{j1}.X_2 \\
f_2^j(X_1) = \delta_{j1}.X_2 + \delta_{j2}.X_3 & f_2^j(X_2) = \delta_{j1}.X_3 \\
h_2^j(Y_{n-4}) = \delta_{j2}.X_3 & \\
h_3^j(X_0) = \delta_{j1}.Y_{n-4} + \delta_{j3}.Y_{2s-2} & h_3^j(X_2) = -\delta_{j1}.X_3 \\
h_3^j(Y_{2s-2j+3}) = \delta_{j3}.X_2 & \\
h_4^j(X_1) = \delta_{j2}.Y_{2s-2} + \delta_{j3}.Y_{2s-4} & h_4^j(Y_{2s-2j+1}) = (\delta_{j2} + \delta_{j3}).Y_{n-4} \\
g_k^j(Y_{2k+2j}) = -Y_{2k} & g_k^j(Y_{2k-1}) = Y_{2k+2j-1} \\
\quad 1 \leq k \leq s-j-1 &
\end{array}
$$

donde $\quad 1 \leq j \leq 3$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $j \leq s-2$

Caso 1.1: $j = 1 \quad (s \geq 3)$

- $B_1 = \{h_1^1, f_2^1, h_3^1, g_1^1, g_2^1, \ldots, g_{s-2}^1\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_1 >) = s+1 \quad (s \geq 3)$.

Caso 1.2: $j = 2 \quad (s \geq 4)$

- $B_2 = \{h_1^2, f_2^2, h_2^2, h_4^2, g_1^2, g_2^2, \ldots, g_{s-3}^2\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = s+1 \quad (s \geq 4)$.

Caso 1.3: $j = 3 \quad (s \geq 5)$

- $B_3 = \{h_1^3, h_3^3, h_4^3, g_1^3, g_2^3, \ldots, g_{s-4}^3\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = s-1 \quad (s \geq 5)$.

Caso 2: $j \geq s-1$

Caso 2.1: $j = 1 \quad (1 \leq s \leq 2)$
- $B_1 = \{h_1^1, f_2^1, h_3^1\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_1 >) = 3 \quad (1 \leq s \leq 2)$.

Caso 2.2: $j = 2 \quad (1 \leq s \leq 3)$

Caso 2.2.1: $2 \leq s \leq 3$

- $B_2 = \{h_1^2, f_2^2, h_2^2, h_4^2\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = 4 \quad (2 \leq s \leq 3)$.

Caso 2.2.2: $s = 1$

- $B_2 = \{h_1^2, f_2^2, h_2^2\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = 3 \quad (s = 1)$.

Caso 2.3: $j = 3 \quad (1 \leq s \leq 4)$

Caso 2.3.1: $3 \leq s \leq 4$

- $B_3 = \{h_1^3, h_3^3, h_4^3\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 3 \quad (3 \leq s \leq 4)$.

Caso 2.3.2: $s = 2$

- $B_3 = \{h_1^3, h_3^3\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 2 \quad (s = 2)$.

Caso 2.3.3: $s = 1$

- $B_3 = \{h_1^3\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 1 \quad (s = 1)$.

Se obtiene, como resumen de todos los casos analizados, que

$$
\begin{aligned}
dim(\mathbb{K} < B_1 >) &= \begin{cases} s+1 & \text{si} \quad s \geq 2 \\ 3 & \text{si} \quad s = 1 \end{cases} \\
dim(\mathbb{K} < B_2 >) &= \begin{cases} s+1 & \text{si} \quad s \geq 3 \\ 4 & \text{si} \quad s = 2 \\ 3 & \text{si} \quad s = 1 \end{cases} \\
dim(\mathbb{K} < B_3 >) &= \begin{cases} s-1 & \text{si} \quad s \geq 4 \\ 3 & \text{si} \quad s = 3 \\ 2 & \text{si} \quad s = 2 \\ 1 & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Cálculo de d_j $4 \leq j \leq s+2$

Se consideran las derivaciones f_k^j $1 \leq k \leq 4$, g_k^j $1 \leq k \leq s-j-1$ y h_k^j $1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2})$ definidas por

$$\begin{array}{lll|lll}
f_1^j(X_0) & = & Y_{2s-2j+4} & f_1^j(Y_{2s-2j+3}) & = & X_2 \\
f_2^j(Y_{2s-2j+5}) & = & X_3 & & & \\
(1-\delta_{j4}).f_3^j(Y_{2s-3}) & = & (1-\delta_{j4}).Y_{2s-2j+6} & f_3^j(Y_{2s-2j+5}) & = & Y_{2s-2} \\
f_4^j(X_1) & = & Y_{2s-2j+2} & f_4^j(Y_{2s-2j+1}) & = & Y_{n-4} \\
g_k^j(Y_{2k-1}) & = & Y_{2k+2j-1} & g_k^j(Y_{2k+2j}) & = & -Y_{2k} \\
\quad 1 \leq k \leq s-j-1 & & & & & \\
h_k^j(Y_{2s-2k-3}) & = & Y_{2s-2j+2k+6} & h_k^j(Y_{2s-2j+2k+5}) & = & Y_{2s-2k-2} \\
\quad 1 \leq k \leq E(\frac{j-4}{2}) & & & & &
\end{array}$$

donde $4 \leq j \leq s+2$.

Hay que distinguir los casos siguientes:

Caso 1: $4 \leq j \leq s-2$

- $B_j = \{f_1^j, f_2^j, f_3^j, f_4^j, g_1^j, g_2^j, \ldots, g_{s-j-1}^j, h_1^j, h_2^j, \ldots, h_{E(\frac{j-4}{2})}^j\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_j >) = s-j+3+E(\frac{j-4}{2})$ $4 \leq j \leq s-2$ $(s \geq 6)$.

Caso 2: $s-1 \leq j \leq s$

- $B_j = \{f_1^j, f_2^j, f_3^j, f_4^j, h_1^j, h_2^j, \ldots, h_{E(\frac{j-4}{2})}^j\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_j >) = 4+E(\frac{j-4}{2})$ $s-1 \leq j \leq s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll} j = s-1 & \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_{s-1} >) & = & 4+E(\frac{s-5}{2}) \quad (s \geq 5) \\ j = s & \Rightarrow & dim(\mathbb{K} < B_s >) & = & 4+E(\frac{s-4}{2}) \quad (s \geq 4). \end{array}$$

Caso 3: $j = s+1$

- $B_{s+1} = \{f_1^{s+1}, f_2^{s+1}, f_3^{s+1}, h_1^{s+1}, h_2^{s+1}, \ldots, h_{E(\frac{s-3}{2})}^{s+1}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{s+1} >) = 3+E(\frac{s-3}{2})$ $(s \geq 3)$.

Caso 4: $j = s+2$

- $B_{s+2} = \{f_2^{s+2}, f_3^{s+2}, h_1^{s+2}, h_2^{s+2}, \ldots, h_{E(\frac{s-2}{2})}^{s+2}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{s+2} >) = 2+E(\frac{s-2}{2})$ $(s \geq 2)$.

Cálculo de $d_j \quad s+3 \leq j \leq 2s$

Se consideran las derivaciones δ_k^j , $1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+3}{2})$, definidas por

$$\delta_k^j(Y_{2k-1}) = Y_{4s-2j-2k+4} \quad \delta_k^j(Y_{4s-2j-2k+3}) = Y_{2k} \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+3}{2}).$$

- $B_j = \{\delta_k^j\} \quad 1 \leq k \leq E(\frac{2s-j+3}{2})$.
- $dim(\mathbb{K} < B_j >) = E(\frac{2s-j+3}{2}) \quad s+3 \leq j \leq 2s \quad (s \geq 3)$.

Cálculo de $dim(Der(h_1^{2s}))$

Se verifica que

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{2s})) = \sum_{i=-2s}^{i=2s} dim(K < B_i >) = \begin{cases} 10 & \text{si} \quad s=1 & \\ \frac{4s^2+7s+7}{2} & \text{si} \quad s=\dot{2}+1 & s \geq 2 \\ \frac{4s^2+7s+8}{2} & \text{si} \quad s=\dot{2} & s \geq 2. \end{cases}$$

Cálculo de $dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2s}))$

Se ha obtenido que

$$\begin{aligned} dim(Der(\mathfrak{h}_2^{2s})) &= (n-2s-3)^2 \\ dim(D(\mathfrak{h}_1^{2s}, \mathfrak{h}_2^{2s})) &= (2s+1).(n-2s-3) \\ dim(D(\mathfrak{h}_2^{2s}, \mathfrak{h}_1^{2s})) &= (n-2s-3). \end{aligned}$$

En consecuencia, se verifica que

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} 10+(n-5).(n-1) & \text{si} \quad s=1 & \\ \frac{4s^2+7s+7}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s=\dot{2}+1 & s \geq 2 \\ \frac{4s^2+7s+8}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si} \quad s=\dot{2} & s \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

□

4.3 Derivaciones del álgebra $\mathfrak{g}_n^{n-2}$

Se va a describir el álgebra de derivaciones $Der(\mathfrak{g}_n^{n-2})$ del único álgebra de Lie $(n-3)$-filiforme de dimensión n que resta, la que se ha denominado $\mathfrak{g}_n^{n-2}$, de ley

$$\mathfrak{g}_n^{n-2}: \begin{array}{rcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] & = & Y_{n-4}. & \end{array}$$

Teorema 4.3. *Se verifica que*

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{n-2})) = n^2 - 6n + 15.$$

Demostración:

Dicha álgebra se puede expresar como suma directa de dos álgebras:

$$\mathfrak{g}_n^{n-2} = \mathfrak{h}_1^{n-2} \oplus \mathfrak{h}_2^{n-2}$$

donde

$$\mathfrak{h}_1^{n-2} =< X_0, X_1, X_2, X_3, Y_{n-4} > \text{ y } \mathfrak{h}_2^{n-2} =< Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5} > .$$

Se deduce que

$$Der(\mathfrak{g}_n^{n-2}) = Der(\mathfrak{h}_1^{n-2}) \oplus Der(\mathfrak{h}_2^{n-2}) \oplus D(\mathfrak{h}_1^{n-2}, \mathfrak{h}_2^{n-2}) \oplus D(\mathfrak{h}_2^{n-2}, \mathfrak{h}_1^{n-2}).$$

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_2^{n-2})$

$\bar{d}_2 \in Der(\mathfrak{h}_2^{n-2}) \Leftrightarrow \bar{d}_2 \in gl(\mathfrak{h}_2^{n-2}) \Leftrightarrow Der(\mathfrak{h}_2^{n-2}) = gl(\mathfrak{h}_2^{n-2})$.

- Base de $Der(\mathfrak{h}_2^{n-2}) = \{\bar{\delta}_{kj}\}$ $1 \leq k, j \leq n-5$, donde $\bar{\delta}_{kj}(Y_k) = Y_j$.
- $dim(Der(\mathfrak{h}_2^{n-2})) = dim(gl(\mathfrak{h}_2^{n-2})) = (n-5)^2$.

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_1^{n-2}, \mathfrak{h}_2^{n-2})$

- Base de $D(\mathfrak{h}_1^{n-2}, \mathfrak{h}_2^{n-2}) = \{\bar{f}_{ik}\}$ donde

$$\bar{f}_{ik}(X_i) = Y_k \quad 0 \leq i \leq 1 \quad , \quad 1 \leq k \leq n-5.$$

- $dim(D(\mathfrak{h}_1^{n-2}, \mathfrak{h}_2^{n-2})) = 2.(n-5)$.

Cálculo de $D(\mathfrak{h}_2^{n-2}, \mathfrak{h}_1^{n-2})$

- Base de $D(\mathfrak{h}_2^{n-2}, \mathfrak{h}_1^{n-2}) = \{\bar{h}_k, \bar{u}_k\}$, donde

$$\bar{h}_k(Y_k) = X_3 \quad \bar{u}_k(Y_k) = Y_{n-4} \quad 1 \leq k \leq n-5.$$

- $dim(D(\mathfrak{h}_2^{n-2}, \mathfrak{h}_1^{n-2})) = 2.(n-5)$.

Cálculo de $Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})$

Se considera la siguiente graduación de $\mathfrak{h}_1^{n-2}$:

$\mathfrak{h}_1^{n-2} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3 > \oplus < Y_{n-4} >$, donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_k & = & < X_{k-1} > & 1 \leq k \leq 4 \\ \mathfrak{g}_5 & = & < Y_{n-4} > . & \end{array}$$

Sea $\bar{d}_1 \in Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})$. Entonces:

$$\bar{d}_1 = \sum_{i \in Z} d_i$$

donde $d_i \in Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})$ y $d_i(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para $k < 1$ y $k > 5$.
Como $d_4(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_5$ y $d_{-4}(\mathfrak{g}_5) \subset \mathfrak{g}_1$, se deduce que:

$$d_i = 0 \quad i > 4 \ , \ i < -4 \Rightarrow \bar{d}_1 = \sum_{i=-4}^{4} d_i$$

Habrá que expresar cada d_i , $-4 \leq i \leq 4$, como una combinación lineal de un cierto conjunto B_i , $-4 \leq i \leq 4$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{h}_1^{n-2}$, cumpliéndose que

$$\bigcup_{i=-4}^{4} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})$ y, evidentemente,

$$dim(Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})) = \sum_{i=-4}^{4} dim(K < B_i >).$$

Cálculo de d_{-j} $\quad 2 \leq j \leq 4$

Se deduce que $d_{-j} = 0$ y, en consecuencia, $dim(\mathbb{K} < B_{-j} >) = 0 \quad 2 \leq j \leq 4$.

Cálculo de d_{-1}

Se considera la derivación δ_1, definida por

$$\delta_1(X_1) = X_0 \qquad \delta_1(Y_{n-4}) = X_3$$

- $B_{-1} = \{\delta_1\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_{-1} >) = 1$.

Cálculo de d_0

Se consideran las derivaciones δ_k , $2 \leq k \leq 3$, definidas por

$$\begin{array}{llll} \delta_2(X_0) = X_0 & \delta_2(X_2) = X_2 & \delta_2(X_3) = 2X_3 & \delta_2(Y_{n-4}) = Y_{n-4} \\ \delta_3(X_1) = X_1 & \delta_3(X_2) = X_2 & \delta_3(X_3) = X_3 & \delta_3(Y_{n-4}) = 2Y_{n-4} \end{array}$$

- $B_0 = \{\delta_2, \delta_3\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_0 >) = 2$.

Cálculo de d_1

Se consideran las derivaciones δ_k , $4 \leq k \leq 5$, definidas por

$$\begin{array}{ll} \delta_4(X_0) = X_1 & \delta_4(X_3) = Y_{n-4} \\ \delta_5(X_1) = X_2 & \delta_5(X_2) = X_3 \end{array}$$

- $B_1 = \{\delta_4, \delta_5\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_1 >) = 2$.

Cálculo de d_2

Se consideran las derivaciones δ_k , $6 \leq k \leq 7$, definidas por

$$\begin{array}{ll} \delta_6(X_0) = X_2 & \delta_6(X_2) = -Y_{n-4} \\ \delta_7(X_1) = X_3 & \end{array}$$

- $B_2 = \{\delta_6, \delta_7\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_2 >) = 2$.

Cálculo de d_3

Se consideran las derivaciones δ_k , $8 \leq k \leq 9$, definidas por

$$\begin{array}{l} \delta_8(X_0) = X_3 \\ \delta_9(X_1) = Y_{n-4} \end{array}$$

- $B_3 = \{\delta_8, \delta_9\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_3 >) = 2$.

Cálculo de d_4

Se considera la derivación δ_{10}, definida por

$$\delta_{10}(X_0) = Y_{n-4}$$

- $B_4 = \{\delta_{10}\}$.
- $dim(\mathbb{K} < B_4 >) = 1$.

Cálculo de $dim(Der(\mathfrak{g}_n^{n-2}))$

Se ha obtenido que

$$\begin{array}{lcl} dim(Der(\mathfrak{h}_1^{n-2})) & = & 10 \\ dim(Der(\mathfrak{h}_2^{n-2})) & = & (n-5)^2 \\ dim(D(\mathfrak{h}_1^{n-2}, \mathfrak{h}_2^{n-2})) & = & 2.(n-5) \\ dim(D(\mathfrak{h}_2^{n-2}, \mathfrak{h}_1^{n-2})) & = & 2.(n-5). \end{array}$$

En consecuencia, se verifica que

$$dim(Der(\mathfrak{g}_n^{n-2})) = 10 + (n-5).(n-1) = n^2 - 6n + 15.$$

□

4.4 Aplicaciones cohomológicas

Como ya se ha indicado, el conocimiento del álgebra de derivaciones de un álgebra de Lie permite obtener resultados de la cohomología.

Se supondrán conocidas las $n-2$ álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes de dimensión n, que se designan, como en todo el trabajo, por $\mathfrak{g}_n^{2q-1}$, $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$, $\mathfrak{g}_n^{2s}$, $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$, y $\mathfrak{g}_n^{n-2}$ y que no se vuelven a describir aquí.

Corolario 4.4. *Se verifica que*

$$dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})) = 2q+1 \quad (q \geq 1)$$

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} n^2-5n+8 & \text{si } q=1 \\ \frac{4q^2-q+3}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si } q=\dot{2}+1 \quad q \geq 2 \\ \frac{4q^2-q+4}{2} + (n-2q-2).(n-1) & \text{si } q=\dot{2} \quad q \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

Demostración:

Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta que

$$B^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1}) = Ad(\mathfrak{g}_n^{2q-1}) = \mathbb{K} < ad(X_0), ad(X_1), ad(X_2), ad(Y_1), \ldots, ad(Y_{2q-2}) >$$

(al ser $ad(X_3) = ad(Y_{2q-1}) = \ldots = ad(Y_{n-4}) = 0$) y que

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})) = Dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) - dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})).$$

□

Corolario 4.5. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} 5n-11 & \text{si } q=1 \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-9}{2} & \text{si } q=\dot{2}+1 \quad q \geq 2 \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-10}{2} & \text{si } q=\dot{2} \quad q \geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

Demostración:

Basta recordar que

$$dim(O(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2q-1}, \mathfrak{g}_n^{2q-1})).$$

□

Corolario 4.6. *Se verifica que*

$$dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = 2s+2 \quad (s \geq 1)$$

$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} n^2-6n+11 & \text{si } s=1 \\ \frac{4s^2+3s+3}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si } s=\dot{2}+1 \quad s\geq 2 \\ \frac{4s^2+3s+4}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si } s=\dot{2} \quad s\geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

Corolario 4.7. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2s})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} 6n-15 & \text{si } s=1 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-13}{2} & \text{si } s=\dot{2}+1 \quad s\geq 2 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-14}{2} & \text{si } s=\dot{2} \quad s\geq 2, \end{cases}$$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

Corolario 4.8. *Se verifica que*

$$dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = 3$$
$$dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = n^2-6n+12.$$

Corolario 4.9. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{n-2})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = 6n-15.$$

Conclusión y problemas abiertos

La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes (y, por ende, la de las álgebras de Lie resolubles) es un problema que se ha demostrado no puede ser resuelto totalmente (véase, por ejemplo [13]). Uno de los objetivos del presente trabajo es, desde luego, hacer una aproximación a los "límites" de dicha clasificación. Pero, en realidad, se incardina dentro de un proyecto más ambicioso: en las tres últimas décadas el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes se ha limitado, casi en su totalidad, al estudio de las filiformes y se pretende comenzar a trabajar con las álgebras de Lie nilpotentes no filiformes.

Si se desea conocer mejor un cierto conjunto de estructuras algebraicas, es claro que su clasificación es uno de los primeros problemas a abordar. Es por ello que nuestro grupo de trabajo ha comenzado con este problema; y no sólo se ha empezado por los casos de invariantes de Goze pequeños como en esta memoria, sino que se está trabajando también con las álgebras de Lie nilpotentes con invariante de Goze grande, como las casifiliformes, aunque en este caso la clasificación tiene tal complejidad que ha sido necesario limitarse a conocer ciertas álgebras que, en cierta manera, constituyen el "esqueleto" de estas familias de álgebras de Lie, como son algunas álgebras graduadas, en particular, las denominadas naturalmente graduadas, en las que la filtración asociada a la graduación está íntimamente ligada a la sucesión central descendente.

Aspecto de cierta importancia es el hecho de que, hasta el momento, las clasificaciones conocidas se habían limitado, salvo algún caso sencillo, a dimensiones concretas y las que se presentan aquí lo son para dimensión cualquiera.

Naturalmente que el estudio comenzado no termina en la mera clasificación que, en sí misma, va perdiendo interés a medida que aumenta la complejidad de las listas obtenidas, sino en el conocimiento de propiedades genéricas de las familias de álgebras de Lie que se estudien, la determinación de las componentes irreducibles que las corten etc.

Quedan, por tanto, planteados, diversos problemas relacionados con el que se ha desarrollado en la presente memoria. Entre otros, se pueden señalar los siguientes:

- Continuar la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes en dimensión cualquiera con invariante de Goze pequeño. De hecho, se ha comenzado ya a trabajar en la determinación de las "primeras" álgebras de Lie metabelianas aún no conocidas: aquéllas de invariante de Goze $(2, 2, 1, \ldots, 1)$.

- Delimitar en qué condiciones es posible hallar álgebras de Lie p-filiformes de dimensión cualquiera como extensiones por derivaciones de álgebras de Lie filiformes de dimensión $p+1$ y probar si todas las p-filiformes se pueden obtener como extensiones por derivaciones de estas álgebras de Lie filiformes.

- Intentar la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes en dimensión cualquiera con invariante de Goze grande y que admitan una graduación "interesante". En concreto, se han determinado ya las álgebras de Lie casifiliformes naturalmente graduadas y se ha abordado la clasificación de las que admiten una graduación maximal. Se conoce ya, también, cómo son las álgebras de Lie p-filiformes naturalmente graduadas, para dimensión cualquiera y para todo p, en algún caso particularmente sencillo. Se piensa comenzar en breve el estudio de las álgebras de Lie 3-filiformes naturalmente graduadas.

- Determinar componentes irreducibles que corten a las familias de álgebras estudiadas, encontrando explícitamente componentes irreducibles concretas para cada dimensión, si ello fuera posible.

- Describir las álgebras de Lie de derivaciones de algunas de estas familias que aún no se ha hecho; por ejemplo, no se conoce aún $Der(\mathfrak{g})$ para un álgebra de Lie casifiliforme naturalmente graduada $\mathfrak{g}$.

- Como consecuencia de lo anterior, describir o, al menos, calcular la dimensión de ciertos espacios interesantes de la cohomología relacionados con las familias de álgebras de Lie consideradas.

- Estudiar otras propiedades genéricas de dichas familias de álgebras de Lie.

Apéndice A

A.1 Algebras de Lie p-filiformes, n-2 $\geq$ p $\geq$ n-4.

Se listan a continuación las leyes de álgebras de Lie de dimensión n que son $(n-2)$-filiformes, $(n-3)$-filiformes y $(n-4)$-filiformes.

A.1.1 Algebras de Lie (n-2)-filiformes

En dimensión $n, n \geq 3$, hay exactamente $E(\frac{n-1}{2})$ álgebras de Lie nilpotentes, reales o complejas, no isomorfas entre sí y de sucesión característica $(2,1,1,\ldots,1)$, que se designan mediante $\mathfrak{g}_n^i \quad 1 \leq i \leq E(\frac{n-1}{2})$ y cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-3}\}$ mediante

$$\begin{array}{llcll} \mathfrak{g}_n^q : & [X_0, X_1] & = & X_2 & \\ & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_2 & 1 \leq k \leq q-1 \end{array}$$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-1}{2})$.

A.1.2 Algebras de Lie (n-3)-filiformes

En dimensión $n, n \geq 5$, hay exactamente $n-2$ álgebras de Lie nilpotentes, reales o complejas, no isomorfas entre sí y de sucesión característica $(3,1,1,\ldots,1)$, que se designan mediante $\mathfrak{g}_n^i$, $1 \leq i \leq n-2$ y cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-4}\}$ mediante

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{g}_n^{2q-1}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & 1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2}) \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq q-1 & \\
 & & & & & \\
\mathfrak{g}_n^{2s}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & 1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-4}] & = & X_3 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_3 & 1 \leq k \leq s-1 & \\
 & & & & & \\
\mathfrak{g}_n^{n-2}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 & \\
 & [X_1, X_2] & = & Y_{n-4} & &
\end{array}$$

A.1.3 Algebras de Lie (n-4)-filiformes

En dimensión $n, n \geq 8$, hay exactamente 6n-29 álgebras de Lie nilpotentes complejas, no isomorfas entre sí, $(n-4)$-filiformes y tales que, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-5}\}$ pueden ser expresadas sus leyes mediante

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{g}_n^{1,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \\
 & & & & & \\
\mathfrak{g}_n^{2,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \\
\mathfrak{g}_n^{3,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 & \\
\mathfrak{g}_n^{4,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
 & [X_1, X_2] & = & X_4 & & \\
 & [X_1, Y_{n-5}] & = & X_4 & & \\
 & [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 & 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{5,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-3}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
& [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{6,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
& [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\
& [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{7,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & X_4 & \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
& [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\
& [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{8,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
& [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{9,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-6}{2}) \\
& [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\
& [X_1, Y_{n-5}] & = & X_3 & \\
& [X_2, Y_{n-5}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 & \\
& [Y_{2r-1}, Y_{n-5}] & = & X_4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{10,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-4}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\mathfrak{g}_n^{11,r}: & [X_0, X_i] & = & X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 & 1 \leq r \leq E(\frac{n-5}{2}) \\
& [X_1, X_2] & = & Y_{n-5} & \\
& [X_1, Y_{n-6}] & = & X_4 & \\
& [Y_{2k-1}, Y_{2k}] & = & X_4 \quad 1 \leq k \leq r-1 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{llll}\mathfrak{g}_n^{12,r}: & [X_0,X_i] & = X_{i+1} \quad 1\leq i\leq 3 & 1\leq r\leq E(\frac{n-4}{2})\\ & [X_1,X_2] & = Y_{n-5} & \\ & [X_1,Y_{n-5}] & = X_4 & \\ & [Y_{2k-1},Y_{2k}] & = X_4 \quad 1\leq k\leq r-1. & \end{array}$$

Solamente cuando n es impar:

$$\mathfrak{g}_n^{3,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{1,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{4,E(\frac{n-3}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{2,E(\frac{n-3}{2})}$$

$$\mathfrak{g}_n^{6,E(\frac{n-5}{2})} \simeq \mathfrak{g}_n^{5,E(\frac{n-3}{2})}.$$

A.1.4 Familia genérica de las leyes de álgebras de Lie (n-5)-filiformes

En dimensión n, la ley de un álgebra de Lie nilpotente compleja y $(n-5)$-filiforme puede ser expresada, siendo $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-6}\}$ una base adaptada, mediante

$$\begin{array}{lcll}[X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2] & = & cX_4+dX_5+\sum_{k=1}^{n-6}\alpha_kY_k & \\ [X_1,X_3] & = & cX_5 & \\ [X_1,X_4] & = & eX_5+\sum_{k=1}^{n-6}\beta_kY_k & \\ [X_2,X_3] & = & -eX_5-\sum_{k=1}^{n-6}\beta_kY_k & \\ [X_1,Y_i] & = & a_{3i}X_3+a_{2i}X_4+a_{1i}X_5 & 1\leq i\leq n-6\\ [X_2,Y_i] & = & a_{3i}X_4+a_{2i}X_5 & 1\leq i\leq n-6\\ [X_3,Y_i] & = & a_{3i}X_5 & 1\leq i\leq n-6\\ [Y_i,Y_j] & = & b_{ij}X_5 & 1\leq i<j\leq n-6,\end{array}$$

donde los escalares que aparecen deben cumplir:

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
a_{3i}\beta_k & = & 0 \quad \text{y} \quad a_{3i}\alpha_k + a_{1i}\beta_k = 0 & 1 \leq i, k \leq n-6 \\
\sum\limits_{k=1}^{n-6} \beta_k a_{2k} & = & 0 & \\
\sum\limits_{k=1}^{n-6} \alpha_k a_{3k} & = & \sum\limits_{k=1}^{n-6} \beta_k a_{1k} & \\
\sum\limits_{k=2}^{n-6} \alpha_k b_{1k} & = & 0 & \\
\sum\limits_{k=i+1}^{n-6} \alpha_k b_{ik} & = & \sum\limits_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-7 \\
\sum\limits_{k=1}^{n-7} \alpha_k b_{k,n-6} & = & 0 & \\
\sum\limits_{k=2}^{n-6} \beta_k b_{1k} & = & 0 & \\
\sum\limits_{k=i+1}^{n-6} \beta_k b_{ik} & = & \sum\limits_{r=1}^{i-1} \beta_r b_{ri} & 2 \leq i \leq n-7 \\
\sum\limits_{k=1}^{n-7} \beta_k b_{k,n-6} & = & 0. &
\end{array}
\right.
$$

A.2 Dimensión de algunos espacios interesantes de la cohomología, para las álgebras de Lie (n-3)-filiformes

A.2.1 Espacio de los 1-cobordes $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

- $dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1},\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = 2q+1 \qquad 1 \le q \le E(\frac{n-2}{2}).$

- $dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = 2s+2 \qquad 1 \le s \le E(\frac{n-3}{2}).$

- $dim(B^1(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = 3.$

A.2.2 Primer espacio de cohomología $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

- $dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2q-1},\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} n^2-5n+8 & \text{si } q=1 \\ \frac{4q^2-q+3}{2}+(n-2q-2).(n-1) & \text{si } q=\dot{2}+1 \quad q\ge 2 \\ \frac{4q^2-q+4}{2}+(n-2q-2).(n-1) & \text{si } q=\dot{2} \quad q \ge 2, \end{cases}$

para $1 \le q \le E(\frac{n-2}{2})$.

- $dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} n^2-6n+11 & \text{si } s=1 \\ \frac{4s^2+3s+3}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si } s=\dot{2}+1 \quad s\ge 2 \\ \frac{4s^2+3s+4}{2}+(n-2s-3).(n-1) & \text{si } s=\dot{2} \quad s \ge 2, \end{cases}$

para $1 \le s \le E(\frac{n-3}{2})$.

- $dim(H^1(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = n^2-6n+12.$

A.2.3 Dimensión de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ y $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

- $dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2q-1},\mathfrak{g}_n^{2q-1})) = \begin{cases} 5n-11 & \text{si} \quad q=1 \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-9}{2} & \text{si} \quad q=\dot{2}+1 \quad\quad q\geq 2 \\ \frac{(6+4q)n-4q^2-7q-10}{2} & \text{si} \quad q=\dot{2} \quad\quad q\geq 2 \end{cases}$

para $1 \leq q \leq E(\frac{n-2}{2})$.

- $dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{2s})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{2s},\mathfrak{g}_n^{2s})) = \begin{cases} 6n-15 & \text{si} \quad s=1 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-13}{2} & \text{si} \quad s=\dot{2}+1 \quad\quad s\geq 2 \\ \frac{(8+4s)n-4s^2-11s-14}{2} & \text{si} \quad s=\dot{2} \quad\quad s\geq 2, \end{cases}$

para $1 \leq s \leq E(\frac{n-3}{2})$.

- $dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^{n-2})) = dim(B^2(\mathfrak{g}_n^{n-2},\mathfrak{g}_n^{n-2})) = 6n-15.$

Bibliografía

[1] J.M. Ancochea and M. Goze, *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7*, C.R.A.S. París I (17)-302, pp. 611-613, 1986.

[2] J.M. Ancochea and M. Goze, *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8*, Archiv. Math., 50, pp. 511-525, 1988.

[3] J.M. Ancochea and M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7*, Archiv. Math., 52:2, pp. 175-185, 1989.

[4] G.G.A. Bäuerle and E.A. de Kerf, *Lie Algebras. Part 1: Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, North-Holland, 1990.

[5] L. Boza, F.J. Echarte and J. Núñez, *Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 10*, Algebra, Groups and Geometries, 11:3, pp. 253-276, 1994.

[6] A. Cerezo, *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dim. 6*, Publications Université Nice 27, 1983.

[7] Y. Chow, *General theory of Lie algebras*, Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 1 y 2, 1985.

[8] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes III*, Canadian J. Math. 10, pp. 321-348, 1958.

[9] J.R. Gómez and F.J. Echarte, *Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 9*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, 61:1, pp. 21-29, 1991.

[10] J.R. Gómez, M. Goze and Y. Khakimdjanov, *On the k-abelian filiform Lie algebras*, Aceptado para su publicación en Communications in Algebra.

[11] J.R. Gómez, A. Jiménez and Y. Khakimdjanov, *On the Variety of Nilpotent Lie Algebra Laws of dimension 11*, Aceptado para su publicación en Journal of Pure and Applied Algebra.

[12] M. Goze, *Systèmes de Pfaff associés aux algèbres de Lie de type H*, Rend. Sem. Mat. U. Politecn. Torino. 46:1, pp. 91-110, 1988.

[13] M. Goze and Y. Khakimdjanov, *Nilpotent Lie Algebras*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[14] M. Goze and P. Piu, *Classification des métriques invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg*, Rend. Circ. Mat. di Palermo. Serie II, Tomo XXXIX, pp. 299-306, 1990.

[15] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[16] L. Magnin, *Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7*, J. Geom. and Phys. vol. 3:1, pp. 119-144, 1986.

[17] V. Morosov, *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order* (en ruso en el original), Isvestia Vyschih Uchebnyh Zavedenii, Matematika 4(5), pp. 161-171, 1958.

[18] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Alg., 24, pp. 167-189, 1989.

[19] K. A. Umlauf, *Über die Zusammentsung der endlichen kontinuierlichen Transformations gruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null*, Tesis doctoral, Leipzig, 1891.

[20] M. Vergne, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France, 98, pp. 81-116, 1970.

[21] G. Vranceanu, *Lecciones de Geometría Dif. 4*, Edic. Acad. Rom. Bucarest, 1975.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Jesús M. Cabezas Martínez de Aragón titulada Una generalización de las álgebras de Lie filiformes

acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 30 de enero 1997

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

F.J. Ayuhekai Michel Goze Yu. Khakimdjanov

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,

F.J. Echarte A. Jiménez Jesús Mª Cabezas Mtz. de Aragón