

23728309

Consulta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARÍA GENERAL

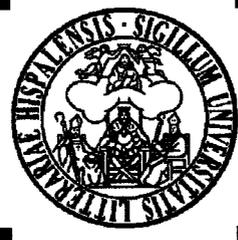
Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 045 número 128 del libro  
Correspondencia.

Sevilla, 27, Marzo, 2003

El Jefe del Negociado de Tesis

*[Handwritten signature]*

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA - BIBLIOTECA -
N.º ORDEN GENERAL. 011503579
OBRA N.º..... TOMO.....
SIGNATURA.....
N.º EN ESPECIALIDAD.....
EJEMPLAR NUMERO. R. 14.800



UNIVERSIDAD  
de SEVILLA

Tesis  
79

Departamento de Matemática Aplicada I

# Inmersiones de Grafos en Pseudosuperficies: Grafos prohibidos, Invariantes y Algoritmos

María Teresa Dávila de Tena

Sevilla, 2003





UNIVERSIDAD  
de SEVILLA

RECTORADO



Sevilla, 3 de Julio de 2003  
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/CAR  
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA  
E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- DÁVILA DE TENA, MARÍA TERESA
- FERNÁNDEZ NIETO, ENRIQUE DOMINGO
- JIMÉNEZ RODRÍGUEZ, MARÍA JOSÉ
- LINARES BARRANCO, ALEJANDRO

LA JEFA DE SECCIÓN DE DOCTORADO



  
Fdo.: Yolanda Díaz Rolando.



# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

## Inmersiones de Grafos en Pseudosuperficies: Grafos prohibidos, Invariantes y Algoritmos

Memoria presentada por M<sup>a</sup> Teresa Dávila  
de Tena para optar al grado de Doctor en  
Matemáticas por la Universidad de Sevilla



V<sup>o</sup>. B<sup>o</sup>.

de los Directores,



Fdo. Luis Boza Prieto, Profesor  
Titular de Universidad del Depar-  
tamento de Matemática Aplicada  
I de la Universidad de Sevilla.



Fdo. Rafael Moyano Franco,  
Doctor en Matemáticas por la  
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Marzo de 2003.



# Índice General

Índice	4
<b>0 Preliminares</b>	<b>5</b>
0.1 Superficies y pseudosuperficies . . . . .	6
0.1.1 Pseudosuperficies . . . . .	7
0.2 Grafos topológicos . . . . .	12
0.3 Inmersiones de grafos en superficies . . . . .	18
0.4 Algunos conceptos algorítmicos . . . . .	22
0.4.1 Recursión . . . . .	24
0.4.2 Problemas NP-Completos . . . . .	25



<b>I</b>	<b>Pseudosuperficies con una célula</b>	<b>29</b>
1	Células no caracterizables por menores	31
1.1	Introducción . . . . .	31
1.2	Células no caracterizables por menores . . . . .	32
1.3	Generalización a otras pseudosuperficies . . . . .	35
1.3.1	Pseudosuperficies esféricas . . . . .	35
1.3.2	Pseudosuperficies no esféricas . . . . .	38
2	El invariante $s$	43
2.1	Introducción . . . . .	43
2.2	El invariante $s$ del grafo completo . . . . .	45
2.3	El invariante $s$ del grafo bipartito completo . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Pseudosuperficies con dos células</b>	<b>69</b>
3	Infinitud del Teorema de Kuratowski	71
3.1	Preliminares . . . . .	71
3.2	Familias minimales prohibidas para $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ . . . . .	75
3.3	Familias de grafos prohibidas para $S_p \overset{n}{\amalg} S_q$ . . . . .	79

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<b>4 El invariante <math>j</math></b>	<b>85</b>
4.1 Introducción . . . . .	85
4.2 El invariante $j$ del grafo completo . . . . .	87
4.3 El invariante $j$ del grafo bipartito completo . . . . .	94
<b>5 Relaciones entre invariantes de grafos</b>	<b>107</b>
5.1 Introducción . . . . .	108
5.2 Relación entre los invariantes $j$ y $s$ . . . . .	109
5.3 Relación entre $s$ y el género orientable . . . . .	116
5.4 Relación entre $s$ y el género no orientable . . . . .	118
5.5 Relación entre los invariantes $s$ y $\sigma$ . . . . .	121
5.6 Relación entre los invariantes $j$ y $\nu$ . . . . .	126
5.7 Otras relaciones . . . . .	130
 <b>III Pseudosuperficies con más de dos células</b>	 <b>133</b>
<b>6 Algoritmos en pseudosuperficies</b>	<b>135</b>
6.1 Introducción . . . . .	135
6.2 Un algoritmo para $S_0 \amalg^2 S_0$ . . . . .	136



6.3	En una pseudosuperficie cualquiera . . . . .	137
6.3.1	Descripción del Algoritmo B . . . . .	140
6.3.2	Descripción del Algoritmo A . . . . .	145
6.4	Problemas abiertos . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Teoremas de Kuratowski en bosques</b>	<b>155</b>
7.1	Introducción . . . . .	155
7.2	Grafos 2-conexos prohibidos . . . . .	158
7.3	Bosques caracterizables por menores . . . . .	160
7.4	Grafos no 2-conexos prohibidos . . . . .	160
7.5	Teoremas de Kuratowski en bosques concretos. . . . .	162

# Capítulo 0

## Preliminares

La parte de la Teoría de Grafos a la que nos referiremos es la que se conoce como Teoría de Grafos Topológicos, que trata de inmersiones de grafos en superficies y pseudosuperficies (evitando que se corten las aristas). Un estudio bastante completo de los grafos, así como un análisis detallado de sus propiedades, puede obtenerse de textos generales como el de Harary [24] (para grafos finitos) o de artículos monográficos como el de Thomassen [44] (para grafos infinitos). Procuraremos utilizar notaciones compatibles con las de ellos en toda nuestra exposición.

En este Capítulo 0 se presentan las definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grafos Topológicos que se utilizarán en el resto de la memoria. Algunos conceptos o propiedades serán utilizados de forma particular en alguno de los capítulos. En esos casos, se ha preferido exponer dichos conceptos en el momento en que se necesiten para agilizar la sucesión de conocimientos previos al estudio que nos proponemos.

En primer lugar vamos a recordar algunas nociones topológicas sobre superficies para introducir el resto de los conceptos. Se refieren a cuestiones básicas que pueden consultarse en mayor profundidad en manuales específicos [18, 29, 43].



## 0.1 Superficies y pseudosuperficies

A las 2-variedades conexas se les suele llamar *superficies*. *Esfera* ( $S_0$ ), *toro* ( $\mathbb{T}$ ) y *plano proyectivo* ( $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ ) son superficies. De hecho, a partir de estos tres ejemplos, podemos construir todas las superficies compactas mediante la *suma conexa*. De forma intuitiva, diremos que la suma conexa de dos superficies se obtiene quitando de ambas un disco e identificando los bordes de dichos discos.

Denotaremos por  $\mathbb{T}_n$  la suma conexa de  $n$  toros; es decir,  $\mathbb{T}_n = \mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$ .

Existen numerosos textos que se ocupan de explicar la clasificación de las 2-variedades conexas y compactas (como [18, 35]).

Dicho teorema de clasificación fue propuesto por Brahana en 1923 (en *Ann. of Math.*(2)23). El enunciado que utilizaremos será el siguiente:

**Teorema 0.1.** *Toda superficie compacta es homeomorfa exactamente a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Según la notación que utilizaremos, es equivalente escribir que, si  $M$  es una superficie compacta, es homeomorfa a una de las siguientes:

1.  $S_2 \# \mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$ , con  $m \geq 0$ . En este caso, se dice que el *género orientable* de  $M$  es  $\gamma(M) = m$  y que  $M$  es *orientable*.

En general, equivalentemente, se puede llamar *género* de una superficie cerrada orientable al número máximo de curvas cerradas de Jordan, disjuntas dos a dos, que pueden trazarse sobre la superficie sin dividirla [29, pág. 146].

2.  $S_2 \# \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ , con  $n \geq 0$ . En este otro caso, se dice que el *género no orientable* de  $M$  es  $\tilde{\gamma}(M) = n$  y, si  $n \neq 0$ , que  $M$  es *no orientable*.

De hecho, una consecuencia inmediata de cualquier demostración del resultado anterior es que toda superficie no orientable es la suma conexa de una orientable bien con  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  o bien con la *botella de Klein*, que es  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .

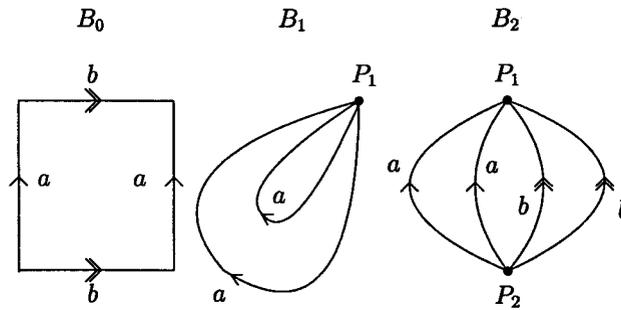


Figura 1: El toro y las pseudosuperficies más sencillas.

### 0.1.1 Pseudosuperficies

En cuanto a las pseudosuperficies (caracterizadas ya en 1949 por Lu [33]), poseen puntos (llamados *puntos singulares*) en los que no existe un entorno homeomorfo a un disco abierto (ver [51]). De hecho, se suele considerar que cada pseudosuperficie tiene una cantidad finita de puntos singulares (ver [12]).

Formalmente, una *pseudosuperficie* es un espacio topológico de Hausdorff tal que cada punto suyo posee un entorno homeomorfo al disco abierto  $\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, (0, 0)) < 1\}$  o a la unión en ese punto de una cantidad finita de discos abiertos. Normalmente, se trabajará con pseudosuperficies compactas.

En esta memoria vamos a precisar algo más esta definición y en adelante haremos referencia a los siguientes conceptos.

Llamaremos *célula* al espacio topológico resultante de efectuar un número finito de identificaciones de un número finito de puntos cada una en una superficie conexa y compacta.

*Pseudosuperficie* es el espacio topológico que resulta al realizar un número finito de identificaciones de un número finito de puntos cada una en una colección de células. Llamaremos *punto singular* a cada uno de los puntos obtenidos mediante tales identificaciones.



Así, las pseudosuperficies son superficies salvo por “unos cuantos” puntos, los que hemos denominado *puntos singulares*, y las *células* son subconjuntos de la pseudosuperficie con la propiedad de que sus puntos no pueden pertenecer a distintas componentes conexas al eliminar cualquier conjunto finito de puntos de la pseudosuperficie.

A modo de ejemplo de pseudosuperficies, se exponen las siguientes, que se obtienen mediante la identificación de una cantidad finita de puntos de distintas esferas.

**Definición 1.** Si  $n > 1$ , consideremos  $n$  esferas  $S_0^1, \dots, S_0^n$ , y dos puntos distintos de cada una  $P_i, Q_i \in S_0^i$  con  $i = 1, \dots, n$ .  $B_n$  es la pseudosuperficie obtenida identificando  $Q_i$  con  $P_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $Q_n$  con  $P_1$ . Los puntos obtenidos mediante tales identificaciones son puntos singulares, por lo que  $B_n$  posee  $n$  puntos singulares.

Para completar la Definición 1 denotamos  $B_0 = \mathbb{T}$  y llamamos  $B_1$  a la pseudosuperficie obtenida identificando dos puntos distintos de una misma esfera.

A partir de la definición concluimos en que  $B_n$  tiene  $n$  células, con  $n \in \mathbb{N}$ .

Observemos que las pseudosuperficies  $B_n$  pueden también definirse de otra forma, mediante contracción de curvas cerradas en superficies:

**Definición 2.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  es la pseudosuperficie obtenida al contraer a puntos  $n$  meridianos distintos de un toro.

**Ejemplo 1.**  $B_0 = \mathbb{T}$ ,  $B_1$  es el *toro estrangulado* y  $B_2$  es el *biplátano*.  $B_0, B_1, B_2$  y  $B_3$  están representados gráficamente en las Figuras 1, 2, 3 y 4.

Los lados que se identifican en la Figura 1 están indicados con la misma letra del abecedario y con el mismo tipo de flecha; la identificación ha de hacerse de modo que coincidan los sentidos de las flechas. Nótese, además, que varios puntos podrían, en este tipo de representaciones de una pseudosuperficie, ir al mismo punto tras hacer la identificación.

A estas pseudosuperficies que se pueden obtener “pegando” esferas por puntos



Figura 2: Dos representaciones de  $B_1$ .

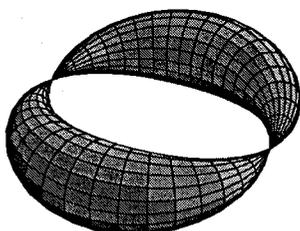


Figura 3:  $B_2$ .

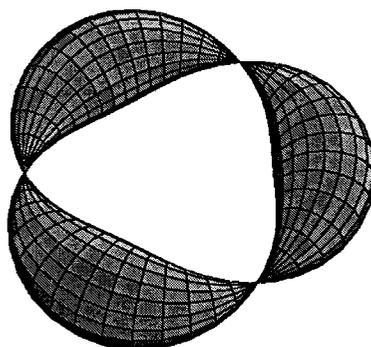


Figura 4:  $B_3$ .

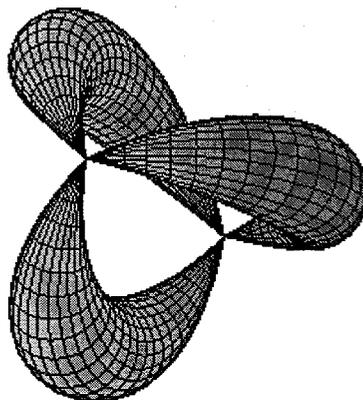


Figura 5: La pseudosuperficie  $L_3$ .

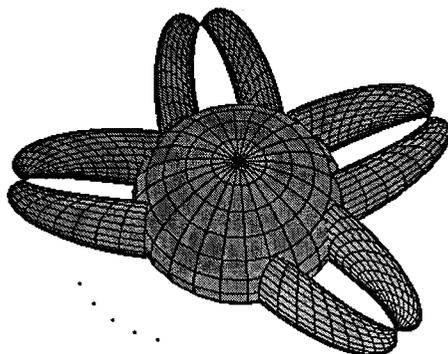
se les llamará en lo sucesivo *pseudosuperficies esféricas*. Si además cada esfera tiene solo 2 puntos singulares serán *pseudosuperficies esféricas simples*.

Cada una de las esferas que componen una pseudosuperficie esférica es una célula de la pseudosuperficie.

Otro ejemplo de pseudosuperficie esférica simple es la pseudosuperficie  $L_n$ , para  $n > 1$ , que se define a partir de  $n$  esferas identificando dos puntos distintos de cada esfera a dos únicos puntos singulares. De esta forma,  $L_2 = B_2$  y  $L_3$  puede verse en la Figura 5

Según la notación de [22], las pseudosuperficies esféricas simples son 0-homogéneas (todas las células son de género 0) y 2-regulares (cada célula tiene 2 puntos singulares). Algunas de ellas son, además, uniformes: las  $B_n$  son 2-uniformes porque cada punto singular pertenece a 2 células (con lo que son  $(2, 2, 0)$ -perfectas) y las  $L_n$  son  $n$ -uniformes (luego son  $(n, 2, 0)$ -perfectas).

En esta memoria vamos a prestar una especial atención a dos familias de pseudosuperficies esféricas muy particulares. La primera familia está formada por pseudosuperficies que constan de una única célula y provienen de una generalización del toro estrangulado en otro sentido que las  $B_i$ . A partir de ahora denotaremos por  $\mathcal{G}_n$

Figura 6: La pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$ .

a la pseudosuperficie formada por la suma conexas de  $n$  toros estrangulados (véase la Figura 6), donde  $\mathcal{G}_0$  es la esfera y  $\mathcal{G}_1$  el toro estrangulado.

La pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$  es esférica para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pues proviene de efectuar  $n$  identificaciones entre  $2n$  puntos distintos de una misma esfera, tomados dos a dos. Siguiendo la notación de [22],  $\mathcal{G}_n$  es  $(1, 2n, 0)$ -perfecta.

La segunda de las familias de pseudosuperficies esféricas a que aludíamos anteriormente está formada por las pseudosuperficies  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ , con  $n \geq 1$ , que son una generalización del biplátano  $B_2$  y que se definen como sigue:

**Definición 3.** Consideremos dos esferas y  $n$  puntos distintos de cada una de ellas respectivamente.  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  es la pseudosuperficie obtenida identificando cada uno de los  $n$  puntos de la primera esfera con cada uno de los de la segunda (véase la Figura 7).

Observemos que si  $n = 2$  entonces  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0 = B_2$ . Para  $n \geq 3$ ,  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  ya no es una pseudosuperficie esférica simple y, según la notación dada en [22],  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  es  $(2, n, 0)$ -perfecta para  $n \geq 1$ .

También van a ser objeto de estudio en esta memoria algunas pseudosuperficies



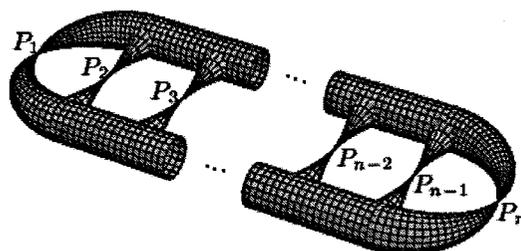


Figura 7: La pseudosuperficie  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ .

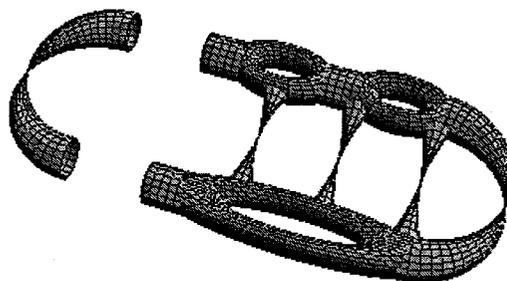


Figura 8: La pseudosuperficie  $T_2 \overset{n}{\amalg} T$ .

no esféricas. Una de ellas,  $S \overset{n}{\amalg} S'$ , es una generalización de  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ , y se obtiene identificando por  $n$  puntos distintos dos superficies compactas  $S$  y  $S'$  con  $n \geq 1$ .

La Figura 8 nos muestra la pseudosuperficie  $T_2 \overset{n}{\amalg} T$ .

## 0.2 Grafos topológicos

Un grafo  $G$  es un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto y  $A$  es un conjunto de pares distintos no ordenados de distintos elementos de  $V$ . Los elementos de  $V$  se llaman *vértices* y los de  $A$  se llaman *aristas*. Cuando  $G = (V, A)$ , denotamos  $V = V(G)$  y  $A = A(G)$ . Además, para simplificar la notación, se suele escribir  $v_1 v_2$  en lugar de

la arista  $\{v_1, v_2\}$ .

Para cada  $n \geq 1$  hay un grafo con  $n$  vértices y  $\frac{n(n-1)}{2}$  aristas. Tal grafo se llama *grafo completo de  $n$  vértices* y se denota  $K_n$ .

En esta memoria,  $V(G)$  es finito, con lo que  $G$  se dice *grafo finito*.

Dos vértices distintos de un grafo se dicen *adyacentes* si pertenecen a una misma arista del grafo; en ese caso, ambos vértices se dicen *extremos* de la arista a la que pertenecen.

Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus extremos; dos *aristas* se dicen *incidentes* cuando comparten un extremo.

Se llama *valencia* de un vértice  $v$  (y se escribe  $\delta(v)$ ) al número de aristas del grafo que son incidentes con él; equivalentemente, se puede definir  $\delta(v)$  como el número de vértices adyacentes con  $v$ .

En particular, se distinguen los dos siguientes tipos de vértices:

- Los vértices de valencia 0 se llaman *vértices aislados*.
- Los vértices de valencia 1 se llaman *hojas* del grafo.

Un grafo se dice *regular* cuando todos sus vértices tienen la misma valencia.  $K_n$ , por ejemplo, es el grafo regular de  $n$  vértices y valencia  $n-1$ . Más adelante se verán otros tipos de grafos regulares como los *ciclos* y los *grafos cúbicos*.

A continuación se describen algunas operaciones habituales en el conjunto de los grafos.

$G' = (V', A')$  se dice que es *subgrafo* de  $G = (V, A)$  cuando  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$ .

Sean  $G = (V, A)$  un grafo y  $V' \subseteq V$ . El *subgrafo inducido* o *generado* por  $V'$  es el grafo  $G' = (V', A')$  donde  $A'$  es el conjunto de las aristas de  $A$  cuyos extremos están ambos en  $V'$ .



Dados dos grafos  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$ , se definen:

- El *grafo intersección* de dos grafos,  $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, A_1 \cap A_2)$ .
- El *grafo unión* (o unión disjunta) de dos grafos,  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$ .  
En general, podemos referirnos a la unión de  $n$  copias de un mismo grafo  $G$  como a  $nG = \bigcup_{i=1}^n G$ .
- El *grafo suma*,  $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\})$ .  
Evidentemente, según se ha definido, no es lo mismo  $2G$  que  $G + G$ .
- El *grafo producto*,  $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A)$ , con  $A = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1, v_1 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2, [u_1 = v_1 \text{ y } u_2v_2 \in A_2] \text{ ó } [u_2 = v_2 \text{ y } u_1v_1 \in A_1]\}$ .  
Un ejemplo de producto es el *grafo cubo*  $Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$ .

Con la misma intención de la definición de suma de grafos, se puede definir la suma de un grafo con un vértice u otras sumas:

Dados  $G$  un grafo y  $v \notin V(G)$  un vértice,  $G + v$  es el grafo  $(V(G) \cup \{v\}, A(G) \cup \{uv : u \in V(G)\})$ .

Si  $u_1, u_2 \in V(G)$  pero  $u_1u_2 \notin A(G)$ ,  $G + u_1u_2$  es el grafo que se obtiene añadiéndole a  $A(G)$  la arista  $u_1u_2$ . Sin embargo, si alguno de los extremos de  $uv$  no es de  $V(G)$ , se entiende que  $G + uv$  es la suma de dos grafos.

En cuanto a la *resta* de grafos, presenta diversas formas. Si  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  es el subgrafo de  $G$  resultado de eliminar  $v$  y las aristas incidentes en  $v$ ; también se le llama *borrado* del vértice  $v$ . Si  $a \in A(G)$ ,  $G - a$  es el subgrafo  $(V(G), A(G) \setminus \{a\})$ .

Si, por el contrario,  $v_1v_2 \notin A$ , entendemos que  $G - v_1v_2 = G$ .

Con esto, es posible restarle a un grafo un conjunto de aristas, un subgrafo, etcétera.

Dado un grafo  $G$  y una arista suya  $x = \{u, v\}$ , denotamos por  $G/x$  al grafo que se obtiene de  $G$  quitando los vértices  $u$  y  $v$  y añadiendo un nuevo vértice  $w$  y las aristas  $\{w, u_i\}$  donde  $u_i$  son los vértices adyacentes a  $u$  o a  $v$  en  $G$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Diremos que  $G/x$  se ha obtenido de  $G$  contrayendo la arista  $x$ , o bien que  $G$  se ha obtenido de  $G/x$  dividiendo el vértice  $w$ .

Un *grafo bipartito* es un grafo  $G$  en el que  $V(G)$  se puede descomponer como unión disjunta  $V(G) = V_1 \sqcup V_2$  de modo que  $a \in A(G)$  implica que  $a = uv$ , con  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ .

En particular, el *grafo bipartito completo*  $K_{n,m}$  es un grafo bipartito en el que  $|V_1| = n$ ,  $|V_2| = m$  y existen todas las aristas posibles. Según la notación anterior,  $K_{n,m}$  es la suma de los grafos formados, respectivamente, por  $n$  y  $m$  vértices aislados.

Un *morfismo* entre dos grafos es una aplicación entre sus vértices respectivos que conserve la adyacencia. Un *isomorfismo* entre dos grafos es un morfismo biyectivo cuya aplicación inversa también es un morfismo. Dichos grafos entre los que existe un isomorfismo se dicen *equivalentes* o *isomorfos*. Por definición de isomorfismo, *ser isomorfos* es una relación de equivalencia en el conjunto de los grafos.

Teniendo en cuenta los orígenes de los grafos, resultan imprescindibles las siguientes nociones:

Un *camino* en un grafo es una sucesión finita de vértices y aristas alternados cuyo primer y último elementos son vértices y tal que dos elementos consecutivos son siempre incidentes. Esta definición anterior es más intuitiva que rigurosa o universal; en ciertos contextos, resulta conveniente definir *camino* como la sucesión finita de vértices adyacentes.

A partir del concepto anterior, se introducen otros para nombrar a subgrafos de un cierto grafo:

Un *recorrido* es un camino en el cual todas las aristas que lo forman son distintas. Un *arco* es un recorrido en el que todos los vértices son distintos. Un *ciclo* es un

arco excepto porque su primer y último vértice coinciden.

La *longitud* de un camino en un grafo es el número de aristas que posee (uno menos que el número de vértices en un arco). Dados  $u, v \in V(G)$  dos vértices que pertenecen a un mismo arco en  $G$ , se llama *distancia* entre  $u$  y  $v$  a la menor longitud de todas las de los arcos que unen  $u$  y  $v$ . Se denota por  $d(u, v)$ .

Un grafo se dice *conexo* si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un camino.

Intuitivamente, una *componente conexa* de un grafo  $G$  es cada uno de los subgrafos conexos de  $G$  que tengan el mayor número posible de vértices. Así, por ejemplo, un vértice aislado es una componente conexa. Pero la definición de componente conexa ha de ser combinatoria si se quiere mantener que la conexión sea un invariante topológico de los grafos infinitos no numerables. En el conjunto  $V(G)$ , se define la siguiente relación de equivalencia: dos vértices están relacionados si coinciden o si existe un arco del uno al otro. Cada una de las clases de equivalencia de  $V(G)$  obtenida con esta relación, define una *componente conexa* del grafo  $G$ : los subgrafos inducidos por dichas clases de equivalencia.

Se llama *ciclo* a todo grafo regular y conexo de valencia 2. El ciclo de  $n$  vértices se representa por  $C_n$ . De este modo, el ciclo con menos vértices es  $C_3 = K_3$ .

Se llama *grafo cúbico* a todo grafo regular de valencia 3.  $K_4$  es el único grafo cúbico de 4 vértices.

Entroncadas con la necesidad de simplificar los problemas, surgen otras operaciones sobre los grafos:

Sean  $G = (V, A)$ ,  $a = uv \in A$  y  $x \notin V$ . El grafo que se obtiene de  $G$  por *contracción* de la arista  $a$  tiene por vértices los de  $G$  salvo porque se eliminan  $u$  y  $v$  y se introduce un nuevo vértice  $x$ ; las aristas también son las de  $G$  salvo que los vértices adyacentes con  $u$  o con  $v$  tienen que ser los adyacentes con  $x$ .

En cierto sentido, puede definirse una operación inversa de la contracción de

aristas: la subdivisión. La *subdivisión* de una arista de un grafo consiste en la sustitución de la arista por un arco. Así, una *subdivisión* de un grafo  $G$  es otro grafo que se obtiene de  $G$  mediante sucesivas subdivisiones de aristas y dos grafos se dicen *homeomorfos* si existe un grafo que es una subdivisión simultáneamente de ambos.

En esta memoria, también utilizamos la operación *cortar* un vértice de un grafo, que la definimos de la siguiente manera. Sea  $G$  un grafo y sea  $u \in V(G)$  con  $\delta(u) \geq 2$ . Definimos el corte de  $u$  como un nuevo grafo donde el vértice  $u$  se sustituye por otros dos vértices  $u_1$  y  $u_2$  tales que  $\delta(u_1) + \delta(u_2) = \delta(u)$  y además  $\delta(u_i) \geq 1$  con  $i = 1, 2$ . Observemos que si  $\delta(u) \geq 4$ , el corte de  $u$  no es único ya que puede ocurrir que  $\delta(u_1) = k$  y  $\delta(u_2) = \delta(u) - k$  donde  $k = 1, 2, \dots, \delta(u) - 1$ .

Un grafo  $G_1$  es un *menor topológico* de otro grafo  $G_2$  si una subdivisión de  $G_1$  es un subgrafo de  $G_2$ . Por tanto, podemos llegar de  $G_2$  a  $G_1$  mediante el borrado de vértices o de aristas o contracciones de aristas incidentes con un vértice de valencia 2.

Un grafo  $G_1$  es un *menor* de otro  $G_2$ , si se puede llegar desde  $G_2$  hasta  $G_1$  mediante el borrado de vértices o de aristas o contracciones de aristas.

En adelante denotaremos  $G_1 <_1 G_2$  si  $G_1$  es un menor topológico de  $G_2$  y  $G_1 <_2 G_2$  si  $G_1$  es un menor de  $G_2$ .

Son muy habituales las siguientes familias infinitas de grafos:

- $P_n$  es un grafo que solo consta de un arco de longitud  $n - 1$ .
- La *rueda*  $W_n$  es  $K_1 + C_{n-1}$ , con  $n \geq 4$ . Llamaremos *aristas interiores* de la rueda a las  $n - 1$  aristas que no son del ciclo  $C_{n-1}$ .

Un grafo se dice *acíclico* si no contiene ciclos y se dice *árbol* si es conexo y acíclico.

Un grafo se dice *n-conexo* si se necesita borrar al menos  $n$  vértices para que sea  $K_1$  o un grafo no conexo. Así, todo grafo es 0-conexo (incluso los no conexos). Los

grafos 1-conexos son los conexos (salvo  $K_1$ ) y todo grafo  $n$ -conexo es  $m$ -conexo si  $m \leq n$ .

Sea  $v$  un vértice de un grafo  $G$ . Diremos que  $v$  es un *punto de corte* de  $G$  si la componente conexa de  $G$  a la que pertenece  $v$  deja de ser conexa al borrar  $v$ .

Análogamente, dos vértices de  $G$  (adyacentes o no) forman una *pareja de corte* (o un *par de corte*) si  $G$  se desconecta al borrar ambos vértices.

El concepto correspondiente a desconectar grafos por la eliminación de aristas es el que sigue:

La arista  $a$  de  $G$  se llama *punte* si  $G - a$  tiene más componentes conexas que  $G$ .

Se denomina *bloque* de  $G$  a todo subgrafo de  $G$  sin puntos de corte y maximal.

También se puede definir *2-bloque* (o bien *2-componente*) como un subgrafo 2-conexo de  $G$  al que no se le puede añadir ninguna arista o vértice de  $G$  sin que deje de ser 2-conexo.

### 0.3 Inmersiones de grafos en superficies

Aunque se han presentado los grafos como objetos combinatorios, resulta también útil trabajar con ellos comparándolos con otros objetos topológicos.

Una forma topológica de definir un grafo es utilizar los complejos simpliciales: un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y su interior, etc. Los grafos son complejos formados por 0-símplices y 1-símplices y esto nos aporta una forma de representarlos.

Gráficamente, representaremos cada vértice por un punto y cada arista por una

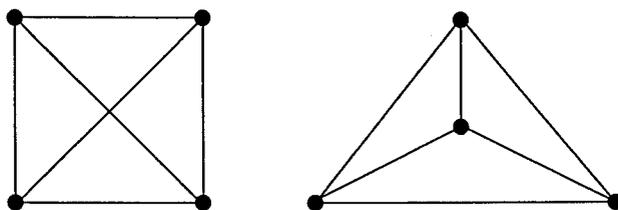


Figura 9: Dos representaciones de  $K_4$  distintas.

línea entre dichos puntos. Para que una representación gráfica de un grafo resulte “válida”, se le exigirá que un mismo punto no pueda pertenecer a dos aristas distintas salvo que sean incidentes en dicho punto. En la Figura 9 se representa gráficamente  $K_4$ . De los 2 dibujos, solo el segundo resulta apropiado.

En adelante, se dirá que un punto pertenece a un grafo (y se escribe  $P \in G$ ) cuando  $P \in V(G)$  o  $P$  es un punto interior de una arista de  $G$ .

Una *inmersión plana* de un grafo no es más que una representación en el plano apropiada, en el sentido que se acaba de explicar. Un grafo se dice, por eso, *plano* cuando admite alguna inmersión plana. Conceptos análogos al de grafo plano pueden definirse para otras superficies compactas (e, incluso, para pseudosuperficies). Formalmente, se tiene:

Dados un grafo  $G$  y una superficie  $S$ , una inmersión de  $G$  en  $S$  es una aplicación  $\varphi : G \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que sea homeomorfismo en su imagen considerando en  $S$  la topología inducida por la euclídea de  $\mathbb{R}^n$ . Es decir,  $\varphi$  es biyectiva y bicontinua (continua y con  $\varphi^{-1}$  continua). De forma abreviada, denotaremos por  $G \hookrightarrow S$

Según lo anterior, un grafo es *plano* cuando admite una inmersión en el plano, de manera que (por ser biyectiva y bicontinua) dos aristas solo se pueden cortar en vértices.

Del mismo modo, se definen los grafos *esféricos*, *tóricos*, y, en general,  $S$ -representables para cualquier superficie o pseudosuperficie  $S$ . En todos los casos anteriores, se admiten inmersiones en las que se produzcan acumulación de vértices y aristas si el



grafo es infinito; entendiendo por *acumulación* de vértices o de aristas que todo entorno de algún punto contenga infinitos vértices o puntos de infinitas aristas, respectivamente.

En esta memoria trabajaremos con varios invariantes. Uno de los más conocidos es el *género* de un grafo. El género orientable  $\gamma(G)$  de un grafo  $G$  es el mínimo número de asas que debemos de añadir a la esfera para que  $G$  admita una inmersión en la superficie resultante.

Vamos a hacer referencia a la relación que existe entre el género de un grafo y el de sus bloques. Battle, Harary, Kodama y Youngs demuestran en [6] la siguiente igualdad:

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^n \gamma(G_i)$$

donde  $G_i$  con  $i = 1, \dots, n$  son los bloques de  $G$ .

De la misma forma, el género no orientable  $\tilde{\gamma}(G)$  es el mínimo número de planos proyectivos que se deben añadir a la esfera para que  $G$  pueda ser sumergido en la superficie resultante.

Sin embargo, la relación anterior no es cierta en el caso no orientable. Por ejemplo,  $\tilde{\gamma}(K_7) = 3$  y sin embargo  $\tilde{\gamma}(K_7 \cup K_7) = 5$ . No obstante, se verifica la siguiente igualdad, obtenida por Stahl y Beineke ([42]).

donde  $G_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  son los bloques de  $G$  y  $\mu(G_i) = \max\{2 - 2\gamma(G_i), 2 - \tilde{\gamma}(G_i)\}$

Como se ha podido comprobar en el dibujo de la Figura 9, que la representación de un grafo no sea plana no quiere decir que dicho grafo no sea plano. No todas las inmersiones son similares, aunque sí lo son todas las inmersiones planas de un grafo que sea una subdivisión de un 3-conexo (la demostración de este aserto puede consultarse en [50]). Sin embargo, hay grafos que no poseen ninguna representación plana. Precisamente, el resultado matemático más citado del pasado siglo XX es el Teorema de Kuratowski, que caracteriza los grafos planos:

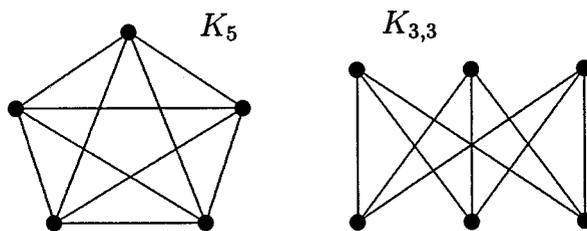


Figura 10: Grafos de Kuratowski.

**Teorema 0.2.** [31] *Un grafo finito es plano si y solo si no tiene un subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ó  $K_{3,3}$ .*  $\square$

Diremos que un grafo  $G$  es prohibido para una (pseudo)superficie  $S$  dada respecto a un orden parcial  $<$  si  $G$  no admite una inmersión en  $S$  pero  $H$  sí la admite, para todo grafo  $H$  tal que  $H < G$ .

El Teorema 0.2 caracteriza cierta familia de grafos mediante una lista de menores topológicos prohibidos (en este caso, los grafos de la Figura 10,  $K_5$  y  $K_{3,3}$ , forman dicha lista, que también puede llamarse “de subgrafos prohibidos”). Si el Teorema 0.2 se hubiera enunciado “un grafo es plano si y solo si no tiene como menor a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$ ”, se hablaría de una lista de menores prohibidos (para los grafos planos, coincide con la lista de menores topológicos prohibidos [25, 48]).

Solo se conocen teoremas que caracterizan grafos con inmersiones en superficies mediante menores (o menores topológicos) prohibidos, en el caso del plano proyectivo. Dicha caracterización fue dada por Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [2, 3, 21] con una lista de 35 menores prohibidos y otra lista de 103 menores topológicos prohibidos.

Aunque no se han dado explícitamente otras listas de menores o de menores topológicos prohibidos, se conocen algunos resultados que consideramos conveniente recordar aquí:

Tiene sentido caracterizar por menores prohibidos toda familia de grafos definida



por una propiedad *hereditaria* por menores; esto es, todo menor de un grafo que verifica la propiedad (por ejemplo, “admitir inmersión en una superficie  $S$ ”) también verifica la misma propiedad. Lo mismo puede decirse de los menores topológicos.

En el caso de los menores, además, Robertson y Seymour [38] demostraron en 1990 que las listas de menores prohibidos siempre estaban formadas por una cantidad finita de grafos.

Cuando es posible caracterizar por menores prohibidos, también se puede obtener una lista finita de subgrafos prohibidos. Una forma de obtener la lista de menores topológicos prohibidos a partir de la de menores prohibidos se presenta en [13].

Del análisis de este procedimiento se deduce que, cuando existen ambas listas, todo menor prohibido es también menor topológico prohibido.

Ya se conocía (Archdeacon y Huneke [4]) que la caracterización de los grafos que admiten inmersión en una superficie no orientable se podía expresar mediante una lista finita de menores topológicos prohibidos. Pero debemos atribuir a Robertson y Seymour [38] el resultado para cualquier superficie compacta y para el toro estrangulado.

Sin embargo, Širáň y Gvozdjak [40] probaron en 1992 que la lista de subgrafos prohibidos es infinita para la pseudosuperficie  $B_2$ , con lo que se plantea una cuestión para cada tipo de pseudosuperficie, que retomaremos más adelante para cierto tipo de inmersiones.

## 0.4 Algunos conceptos algorítmicos

Muchas de las aplicaciones de conceptos que emanan directamente de la Teoría de grafos aparecen en Informática o en campos que se sirven muy a menudo de ordenadores. En esta sección repasaremos brevemente algunos conceptos de algorítmica que pueden encontrarse de manera mucho más amplia en el clásico libro de Aho,

Hopcroft y Ullmann [1], en el excelente texto de Garey y Johnson [20] o en el libro de Manber [34].

Existen muchas situaciones prácticas en la que es importante determinar si un grafo es plano o no, y si lo es, encontrar una representación plana suya; pensemos, por ejemplo, en el diseño de circuitos impresos. El Teorema de Kuratowski (Teorema 0.2) no proporciona un método algorítmico eficiente para reconocer a los grafos planos. En el año 1974, Hopcroft y Tarjan mostraron en [28] un algoritmo lineal para decidir si un grafo es plano o no. Otros algoritmos que determinan si un grafo es plano o no son el de Lempel, Even y Cederbaum [32] y el de Booth y Lueker [11]. En 1985, Chiba, Nishizeki, Abe y Ozawa [14] obtienen un algoritmo que proporciona la representación plana de un grafo si éste es plano.

Un algoritmo es, de una forma coloquial, la descripción paso a paso de un método para resolver cierta tarea. Más concretamente, podemos pensar en un algoritmo como en un programa de ordenador escrito en un determinado lenguaje de programación.

En general, estaremos interesados en encontrar el algoritmo más eficiente para resolver un problema. En sentido amplio, el concepto de “eficiencia” está relacionado con los recursos que se necesitan para ejecutar el algoritmo. Para nosotros, el algoritmo más eficiente quiere decir el “más rápido”, es decir, el que necesita menos tiempo de ejecución. Y en este sentido, diremos que un algoritmo es eficiente si el tiempo que requiere para su ejecución es polinomial respecto del tamaño de la entrada; entendiendo por tamaño de la entrada una medida de ella, como puede ser el número de elementos en el caso de ser una lista, el número de cifras en caso de ser un número entero o, en general, el número de bits necesarios para su completa descripción. En lo que sigue, denotaremos por  $\mathbf{P}$  a la clase de algoritmos polinomiales.

El tiempo de ejecución de un algoritmo es la suma de los tiempos de ejecución de sus pasos y viene expresado como una función del número de datos de la entrada del algoritmo. Sin embargo, hay que matizar dos aspectos de la afirmación anterior: en primer lugar, la naturaleza de esa entrada (y no sólo su tamaño) puede influir



en el tiempo de ejecución de un algoritmo, así que escogeremos como tiempo para un tamaño concreto el del peor de los casos posibles; en segundo lugar, tampoco estamos interesados en la función explícita del tiempo, sino en su crecimiento cuando el tamaño de los datos va aumentando.

Para poder comparar con mayor rigor la eficiencia de los algoritmos vamos a definir el orden de una función. Dadas  $f(n)$  y  $g(n)$  dos funciones definidas sobre  $\mathbb{N}$ , diremos que  $f(n)$  es del orden de  $g(n)$ , y lo denotaremos por  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , si existe una constante  $c$  y un número natural  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumple que  $f(n) \leq c \cdot g(n)$ . En otras palabras, para un  $n$  suficientemente grande, la función  $f(n)$  es menor que  $g(n)$  multiplicada por una constante. La función  $f(n)$  no sólo puede ser menor que  $g(n)$  sino que puede ser sustancialmente menor. Por ejemplo,  $5n^2 + 15$  es de orden  $\mathcal{O}(n^2)$ , ya que  $5n^2 + 15 \leq 6n^2$  para  $n \geq 4$ . Pero al mismo tiempo  $5n^2 + 15$  es de orden  $\mathcal{O}(n^3)$  ya que  $5n^2 + 15 \leq n^3$  para  $n \geq 6$ .

Utilizando el concepto de orden de una función, diremos que el algoritmo  $A$  es más eficiente que el algoritmo  $B$  si, siendo  $f(n)$  y  $g(n)$  las funciones de sus tiempos respectivos,  $f(n)$  es de orden  $\mathcal{O}(g(n))$  pero  $g(n)$  no es de orden  $\mathcal{O}(f(n))$ .

### 0.4.1 Recursión

La recursión es una generalización de la inducción matemática. En un algoritmo recursivo para un grafo  $G = (V, A)$ , un problema sobre  $G$  se transforma en problemas para un conjunto de grafos relacionados  $f_i(G)$  que tienen la propiedad de que existe una función  $c$  del conjunto de grafos en  $\mathbb{N}$  de forma que  $c(G) > c(f_i(G))$  y, además, existe un número finito de grafos que mediante  $c$  van a cero. En otras palabras, un algoritmo recursivo sobre grafos reduce un problema sobre un grafo a un problema sobre un conjunto de grafos que son “menores por la función  $c$ ” que el grafo original y los casos más pequeños se pueden resolver de una forma más o menos directa.

Un ejemplo clásico de algoritmo recursivo eficiente sobre grafos es el que usa búsqueda en profundidad para determinar los bloques de un grafo (ver [36]), que es

lineal en el número de aristas del grafo, i.e., es de orden  $\mathcal{O}(|A(G)|)$ .

### 0.4.2 Problemas NP-Completos

Existen muchos problemas para los que no se conoce un algoritmo polinomial que los resuelva. Aunque algunos de ellos podrían tener algoritmos eficientes que aún no han sido descubiertos. Sin embargo, se piensa que para muchos de ellos no existe tal algoritmo. Desde luego sería muy conveniente poder distinguir estos últimos para no tratar de buscarles un algoritmo eficiente que a la postre pueda resultar que no tienen. En particular trataremos con una clase especial de problemas denominados **NP-completos** (ver [1, 20, 34]).

Podemos agrupar los problemas NP-completos en una clase debido a que todos son equivalentes, es decir, existe un algoritmo eficiente para un problema NP-completo si y sólo si existe un algoritmo eficiente para todos los problemas NP-completos. Se cree que no existe ningún algoritmo eficiente para los problemas NP-completos, pero no hay ninguna prueba de ello. Incluso si existiera un algoritmo eficiente, sería tan complejo que, hasta la fecha, la comunidad científica no ha realizado serios esfuerzos por intentar encontrarlo.

En esta memoria nos vamos a restringir a problemas de decisión; esto es, consideraremos exclusivamente problemas cuya respuesta es SÍ o NO. Esto no restringe el número de problemas que podemos abordar ya que la mayoría de los problemas pueden convertirse fácilmente en un problema de decisión.

Un problema de decisión puede ser considerado como un **problema de reconocimiento de un lenguaje**. Sea  $U$  el conjunto de todas las posibles entradas del problema de decisión y sea  $L$  el conjunto de todas las entradas cuya respuesta por parte del algoritmo es SÍ. El problema de decisión consiste en determinar si una entrada concreta pertenece a  $L$  o no. En adelante  $L$  se denominará lenguaje correspondiente al problema, y usaremos las palabras *lenguaje* y *problema* indistintamente.

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos lenguajes de los espacios de entrada  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente. Diremos que  $L_1$  es polinomialmente reducible a  $L_2$  si existe un algoritmo polinomial que convierte cada entrada  $u_1 \in U_1$  en una entrada  $u_2 \in U_2$  de forma que  $u_1 \in L_1$  si y sólo si  $u_2 \in L_2$ . Como el algoritmo es polinomial respecto del tamaño de  $u_1$  y asumiendo que el tamaño está bien definido en  $U_1$  y  $U_2$ , el tamaño de  $u_2$  también es polinomial respecto del tamaño de  $u_1$ .

El algoritmo mencionado en la definición anterior convierte un problema en otro y, si tenemos un algoritmo polinomial para  $L_2$ , componiendo ambos algoritmos obtenemos un algoritmo polinomial para  $L_1$ . En particular tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 0.3.** *Si  $L_1$  es polinomialmente reducible a  $L_2$  y existe un algoritmo polinomial para  $L_2$ , entonces existe un algoritmo polinomial para  $L_1$ .*

La noción de reducibilidad no es simétrica aunque sí transitiva. Y el hecho de que no sea simétrica nos sugiere dar la siguiente definición: dos lenguajes son *polinomialmente equivalentes* o simplemente *equivalentes* si cada uno es polinomialmente reducible al otro.

Un algoritmo no determinista consta de, además de todas las operaciones regulares de un algoritmo determinista, una operación muy poderosa que denominaremos *oráculo* (elección no determinista o elección-nd). Esta primitiva está asociada con un número determinado de elecciones de forma que, para cada elección, el algoritmo toma un camino distinto (podemos suponer sin pérdida de generalidad que el número de elecciones es dos). La diferencia entre los algoritmos deterministas y no deterministas radica en cómo reconocen un lenguaje tales algoritmos. Diremos que un algoritmo no determinista reconoce un lenguaje  $L$  si, dada una entrada  $x$ , es posible convertir cada elección del oráculo encontrada durante la ejecución del algoritmo en una elección real de forma que el algoritmo aceptará  $x$  si y sólo si  $x \in L$ .

En otras palabras, el algoritmo debe dar, para todas las entradas  $x \in L$ , al menos un camino posible para que la salida sea aceptar la entrada. Observemos

que la definición no es simétrica ya que puede haber muchas posibles elecciones que nieguen que  $x$  esté en  $L$  y aún así estar, pues basta con que una de las elecciones lo verifique.

La clase de los problemas para los que existe un algoritmo no determinista que corre en tiempo polinomial respecto de la entrada se denomina NP. Parece razonable pensar que la clase de los problemas NP es mucho más poderosa que la clase de los problemas P. Una buena prueba de ello sería encontrar un problema NP que no sea un problema P, pero esto aún no ha sido posible. Tampoco se ha demostrado lo contrario, es decir, que todo problema NP pueda ser resuelto por un algoritmo determinista en tiempo polinomial respecto de la entrada (i.e.  $P=NP$ ).

A continuación vamos a definir dos clases, que contienen numerosos e importantes problemas de la clase NP, todos equivalentes entre sí, y de los que se ignora si están en P.

1. Un problema  $X$  se denomina **NP-duro** si todo problema NP es polinomialmente reducible a  $X$ .
2. Un problema  $X$  se denomina **NP-completo** si  $X$  está en la clase NP y  $X$  es NP-duro.

Por la propia definición se tiene que si algún problema NP-duro está en la clase P entonces  $P=NP$ .

Cook demostró la existencia de problemas NP-completos en [15], en particular probó que el problema de la satisfacibilidad (SAT), que tiene como entrada un conjunto  $U$  de variables y una colección  $C$  de cláusulas sobre  $U$ , y que decide si existe una asignación de valores de verdad que satisfaga  $C$ , es un problema NP-completo.

Una vez que tenemos un problema NP-completo es relativamente sencillo probar que otro problema también lo es. Dado un problema  $Y$ , para demostrar que es

NP-completo, basta probar que el problema SAT, o cualquier otro problema NP-completo, es polinomialmente reducible a  $Y$ . Este procedimiento queda descrito en el siguiente resultado:

**Lema 0.4.** *Un problema  $X$  es NP-completo si se verifican las dos condiciones siguientes.*

1.  *$X$  está en la clase NP.*
2. *Existe un problema NP-completo polinomialmente reducible a  $X$ .*

Con este resultado finalizamos el presente capítulo y la introducción de los conceptos básicos de los que haremos uso a lo largo de toda la memoria.

# Parte I

## Pseudosuperficies con una célula

# Capítulo 1

## Células no caracterizables por menores

M. Knor probó en [30] que los grafos que admiten una inmersión en una pseudosuperficie cualquiera  $S$  son caracterizables en función de menores prohibidos si y sólo si  $S$  consiste en una pseudosuperficie  $S'$  con, a lo más, un punto singular y algunas (o ninguna) esferas pegadas a  $S'$  siguiendo una estructura arborescente. En este capítulo mostraremos algunos ejemplos de pseudosuperficies no caracterizables por menores, concretamente toda pseudosuperficie que conste de una única célula con dos o más puntos singulares, dando grafos que admiten una inmersión en estas pseudosuperficies y menores suyos que no las admiten.

### 1.1 Introducción

Sea  $S$  una pseudosuperficie. Si  $S$  contiene como subespacio topológico a una esfera con exactamente un punto singular, diremos que  $S$  es *esféricamente reducible*. En caso contrario diremos que  $S$  es *esféricamente irreducible*. De toda pseudosuperficie  $S$  se puede obtener otra esféricamente irreducible  $S'$  borrando sucesivamente las



esferas pegadas por exactamente un punto singular. Además  $S'$  está determinada de forma única por  $S$ .

Knor obtiene en [30] el siguiente resultado que nos muestra a las pseudosuperficies caracterizables por menores.

**Teorema 1.1.** *Sea  $S'$  una pseudosuperficie. Sea  $S$  la pseudosuperficie esféricamente irreducible que se obtiene de  $S'$  borrando sucesivamente las esferas pegadas por exactamente un punto singular. Entonces  $S$  es caracterizable por menores si y sólo si  $S'$  contiene a lo más un punto singular.*

Diremos que un grafo  $G$  es prohibido para una (pseudo)superficie  $S$  dada respecto a un orden parcial  $<$  si  $G$  no admite una inmersión en  $S$  pero  $H$  sí la admite, para todo grafo  $H$  tal que  $H < G$ .

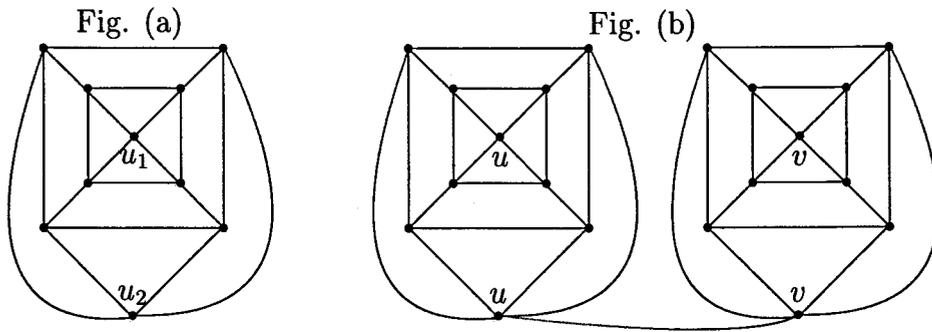
## 1.2 Células no caracterizables por menores

Como consecuencia del Teorema 1.1 se tiene que toda pseudosuperficie que consta de una única célula con dos o más puntos singulares no es caracterizable por menores. En esta sección vamos a dar, para cada pseudosuperficie de ese tipo, ejemplos de grafos que admiten una inmersión en ella y tales que contienen como menor a otro que no la admite.

El siguiente resultado, publicado en [8], caracteriza a los grafos que admiten una inmersión en  $\mathcal{B}_1$ .

**Teorema 1.2.** *Un grafo admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1$  si y sólo si algún corte suyo es plano.*

A partir de este Teorema podemos enunciar el siguiente Lema, en el cual se utiliza el grafo  $C_4 \times K_2 + K_1$ .  $C_4$  es un ciclo de orden 4, y el producto  $C_4 \times K_2$  es el usual en Teoría de grafos.

Figura 1.1: Inmersiones en  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_1\#\mathcal{B}_1$ .

**Lema 1.3.** Sea  $H = C_4 \times K_2 + K_1$  y sea  $u \in V(H)$  el vértice inducido por  $K_1$ . Entonces toda inmersión de  $H$  en  $\mathcal{B}_1$  coloca necesariamente a  $u$  en el punto singular.

*Demostración.* Sea  $v_i$  con  $i = 1, \dots, 8$  cada uno de los vértices de  $H$  distintos de  $u$ .

Por el Teorema 1.2 se puede ver que  $H$  admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1$  sin más que cortar el vértice  $u$  en dos vértices  $u_1$  y  $u_2$ , ambos de valencia 4, tal como muestra la Figura 1.1 (a), y verificar que el grafo resultante es plano.

Supongamos que  $H$  admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1$  sin estar  $u$  en el punto singular. Si la inmersión lleva un vértice  $v$  de  $H$  en el punto singular distinto de  $u$ , el grafo inducido por el corte del punto singular en la pseudosuperficie debe ser plano y contiene como subgrafo a  $H - v$ , con lo que  $H - v$  también debe ser plano.

Si la inmersión lleva un punto interior de una arista  $e$  de  $H$  en el punto singular, sea  $v$  un extremo de  $e$  distinto de  $u$ . El grafo inducido por el corte del punto singular en la pseudosuperficie debe ser plano y contiene como subgrafo a  $H - v$ .

Pero si  $v$  es un vértice distinto de  $u$ , es fácil observar que  $H - v$  contiene una subdivisión de  $K_5$ , con lo cual no es plano y llegamos a contradicción con la hipótesis de partida.  $\square$



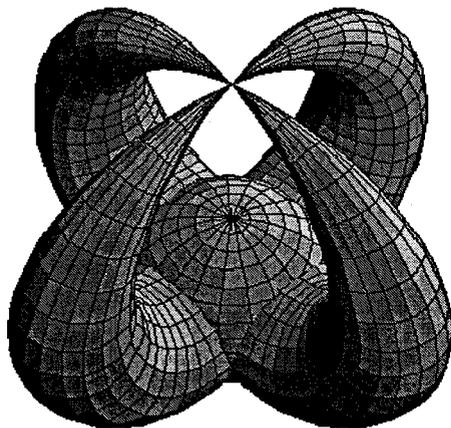


Figura 1.2: La pseudosuperficie  $C_4$ .

La siguiente proposición nos muestra un ejemplo de un grafo que admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1$  y tal que un menor suyo no la admite.

**Proposición 1.4.**  $H = (C_4 \times K_2 + K_1) + e + (C_4 \times K_2 + K_1)$  admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1$  pero  $H/e$  no la admite.

*Demostración.* Consideremos  $H = (C_4 \times K_2 + K_1) + e + (C_4 \times K_2 + K_1)$ , donde  $e = \{u, v\}$  siendo  $u$  y  $v$  los vértices inducidos por  $K_1$  en cada una de las copias de  $C_4 \times K_2 + K_1$  (véase la Figura 1.1 (b)). A partir de la inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $\mathcal{B}_1$  que nos muestra la Figura 1.1 (a) es fácil construir una de  $H$  en  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1$  sin más que considerar dos copias de la misma y añadir  $e$ , por ejemplo, por la cara exterior (Figura 1.1 (b)). Por tanto  $H$  admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1$ .

Sin embargo  $H/e$  no admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1$  ya que, elegidos dos vértices cualesquiera de  $H/e$  y cortados ambos una vez de forma cualquiera el grafo resultante no es plano al contener una subdivisión de  $K_5$ . Puesto que  $H/e$  es un menor de  $H$ , se tiene el resultado.  $\square$

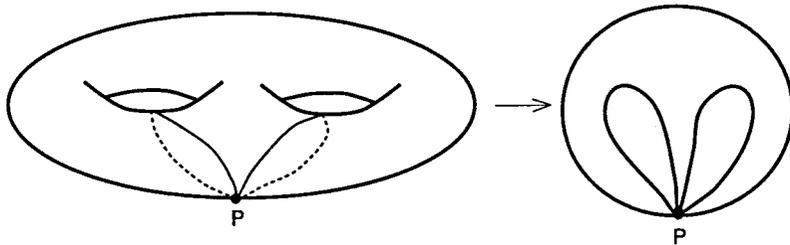


Figura 1.3: Construcción de  $\mathcal{C}_3$  a partir de  $\mathbb{T}_2$ .

## 1.3 Generalización a otras pseudosuperficies

### 1.3.1 Pseudosuperficies esféricas

En general se conoce con el nombre de pseudosuperficie esférica a aquella pseudosuperficie que resulta de efectuar un número finito de identificaciones de puntos en una cantidad finita de esferas.

Llamaremos  $\mathcal{C}_n$  a la pseudosuperficie obtenida identificando  $n$  puntos distintos de una esfera entre sí, para  $n \geq 2$ . Por tanto  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_2$  (véase la pseudosuperficie  $\mathcal{C}_4$  en la Figura 1.2).

La pseudosuperficie  $\mathcal{C}_n$  puede obtenerse también de la siguiente forma: consideremos en  $\mathbb{T}_{n-1}$ , la suma conexa de  $n - 1$  toros,  $n - 1$  meridianos distintos tales que su intersección es un único punto  $P$  y cada meridiano pasa por una única asa. Entonces  $\mathcal{C}_n$  resulta de contraer los  $n - 1$  meridianos anteriores al punto  $P$  (véase como ejemplo la Figura 1.3).

A partir de esta construcción obtenemos un resultado interesante que usaremos posteriormente.

**Lema 1.5.** *Toda inmersión de un grafo en  $\mathcal{C}_n$  induce otra en  $\mathbb{T}_{n-1}$ , con  $n \geq 2$ .  $\square$*

Puesto que  $\mathcal{C}_n$  tiene un solo punto singular, los grafos que admiten una inmersión en esta pseudosuperficie son caracterizables por menores [9, 30].

Consideremos ahora la pseudosuperficie  $\mathcal{C}_{p,q} = \mathcal{C}_p \# \mathcal{C}_q$ , para  $p, q \geq 2$ . (Observe-mos que  $\mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_{2,2}$ ). La siguiente proposición nos muestra un grafo que admite una inmersión en esta pseudosuperficie tal que contiene a otro como menor que no la admite.

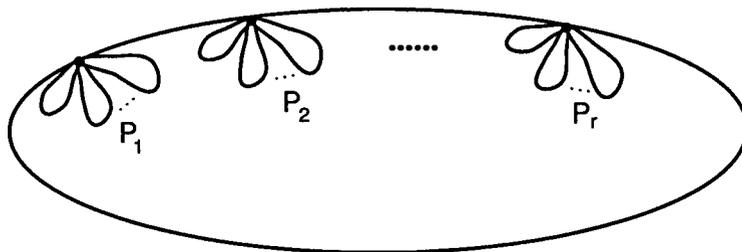
Consideremos  $p+q-2$  copias del grafo  $C_4 \times K_2 + K_1$  y sean  $u_1, \dots, u_{p-1}$  y  $v_1, \dots, v_{q-1}$  los vértices inducidos por  $K_1$  en las  $p-1$  primeras copias y en las  $q-1$  siguientes respectivamente. Consideremos los grafos  $H_p$  y  $H_q$  obtenidos respectivamente identificando los  $u_1, \dots, u_{p-1}$  en un nuevo vértice que llamaremos  $u$  y los  $v_1, \dots, v_{q-1}$  en un nuevo vértice que llamaremos  $v$ . Definimos el grafo  $H(p, q) = H_p + e + H_q$  donde  $e = \{u, v\}$ .

**Proposición 1.6.** *El grafo  $H(p, q)$  admite una inmersión en  $\mathcal{C}_{p,q}$  pero  $H(p, q)/e$  no la admite, con  $p, q \geq 2$ .*

*Demostración.* Por construcción, el grafo  $H(p, q)$  es sumergible en  $\mathcal{C}_{p,q}$ . Sea  $\tilde{H}$  la inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $\mathcal{B}_1$  que nos muestra la Figura 1.1(a). Pegando respectivamente  $p-1$  y  $q-1$  copias de  $\tilde{H}$  por los vértices resultantes del corte de los  $u_i$  y  $v_i$  que quedan en la cara exterior y añadiendo la arista  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$  donde  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  son los dos vértices que quedan al realizar los pegamientos anteriores, obtenemos una inmersión de  $H(p, q)$  en  $\mathcal{C}_{p,q}$ . La Figura 1.1(b) muestra esta inmersión en el caso  $p = q = 2$ .

Para concluir la demostración, consideremos el grafo  $H(p, q)/e = H_{p+q-1}$ . Vamos a probar a continuación que el grafo  $H(p, q)/e$  no admite una inmersión en  $\mathcal{C}_{p,q}$ , con lo que se tiene el resultado ya que  $H(p, q)/e$  es un menor de  $H(p, q)$ . Supongamos lo contrario. Vamos a llamar  $\alpha$  y  $\beta$  a los dos puntos singulares de  $\mathcal{C}_{p,q}$ , de entornos homeomorfos al pegamiento por un punto de  $p$  y  $q$  discos abiertos respectivamente, y  $w \in V(H(p, q)/e)$  al vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H(p, q)$ .

Consideremos una inmersión de  $H(p, q)/e$  en  $\mathcal{C}_{p,q}$  y supongamos que  $\beta$  es un

Figura 1.4: La pseudosuperficie  $C_{p_1, \dots, p_r}$ .

punto singular en el que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. El grafo inducido en  $H(p, q)/e$  por el corte de  $\beta$  contiene a  $H'$ , grafo resultante de borrar un vértice en  $H(p, q)/e$  distinto de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $C_p$ . De ello tenemos, aplicando el Lema 1.5, que  $H'$  admite una inmersión en  $\mathbb{T}_{p-1}$ . Sin embargo,  $H'$  tiene  $p+q-2$  bloques cada uno de los cuales contiene un  $K_5$  por lo que  $\gamma(H') \geq p+q-2$ , mientras que  $\gamma(\mathbb{T}_{p-1}) = p-1$ . Puesto que  $\gamma(H') \leq \gamma(\mathbb{T}_{p-1})$ , se obtiene que  $q \leq 1$  lo cual es una contradicción con el hecho de que  $q \geq 2$ .  $\square$

Una generalización de la pseudosuperficie anterior es la que definimos a continuación.

Sean  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$  números naturales con  $p_i \geq 2$  para  $i = 1, \dots, r$ . Definimos  $C_{p_1, \dots, p_r} = C_{p_1} \# \dots \# C_{p_r}$  (ver Figura 1.4).

También para esta pseudosuperficie vamos a dar un grafo que admite una inmersión en ella y tal que un menor suyo no la admite.

Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r-2)K_5$  donde  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración de la Proposición 1.6 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración.

**Proposición 1.7.** *El grafo  $H$  admite una inmersión en  $C_{p_1, \dots, p_r}$  pero  $H/e$  no la admite, donde  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 2$ .*



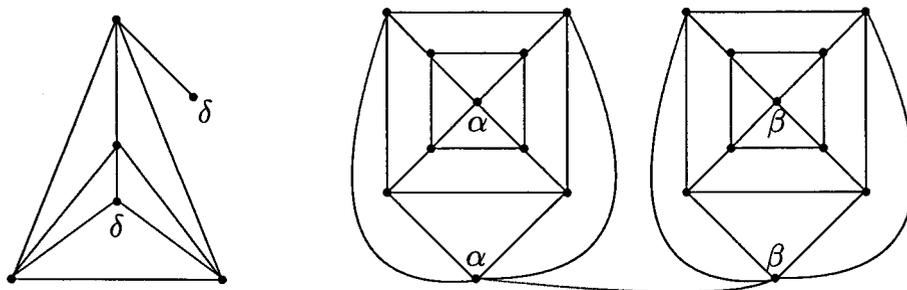


Figura 1.5: Una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5$  en  $\mathcal{C}_{2,2,2}$ .

*Demostración.* Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $\mathcal{C}_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración de la Proposición 1.6 y de una de  $K_5$  en  $\mathcal{C}_2$ . La Figura 1.5 nos muestra una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5$  en  $\mathcal{C}_{2,2,2}$ .

Al igual que en los anteriores resultados concluiremos probando que  $H/e$  no admite una inmersión en  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$ .

Para ello, supongamos lo contrario. Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ . Consideremos el grafo inducido por el corte de  $r - 1$  puntos singulares de  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión.

Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r - 1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $\mathcal{C}_{p_1}$  y, por el Lema 1.5, en  $\mathbb{T}_{p_1-1}$ . Sin embargo  $H'$  contiene al menos  $p_1 + p_2 - 2$  bloques con un  $K_5$  en cada uno de ellos, por lo que  $\gamma(H') \geq p_1 + p_2 - 2$  mientras que  $\gamma(\mathbb{T}_{p_1-1}) = p_1 - 1$ . Como  $p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción.  $\square$

### 1.3.2 Pseudosuperficies no esféricas

Una pseudosuperficie no esférica resulta de efectuar un número finito de identificaciones de puntos en una colección de superficies al menos una de las cuales tiene género (orientable o no) mayor que uno. Denotamos por  $\gamma(G)$  al género orientable de un grafo  $G$  y por  $\tilde{\gamma}(G)$  al género no orientable de  $G$ .

El género orientable de un grafo es la suma del género de cada uno de sus bloques (véase [6]). Esto no es cierto en general en el caso no orientable. No obstante se verifica el siguiente resultado.

**Lema 1.8.** *Sea  $G$  un grafo y sean  $G_i$  con  $i = 1, \dots, n$  sus bloques. Supongamos que  $\gamma(G_i) = 1$  y  $\tilde{\gamma}(G_i) = 1$  ó  $2$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $\tilde{\gamma}(G) = \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i)$ .*

*Demostración.* En las hipótesis del enunciado, ningún bloque de  $G$  verifica la relación  $\tilde{\gamma} = 2\gamma + 1$ . En este caso  $\tilde{\gamma}(G) = 2n - \sum_{i=1}^n \mu(G_i)$  con  $\mu(G_i) = \max\{2 - 2\gamma(G_i), 2 - \tilde{\gamma}(G_i)\}$  (véase [42]).

Sean  $G_1, \dots, G_k$  los bloques de  $G$  con género no orientable 1 y  $G_{k+1}, \dots, G_n$  los bloques de  $G$  con género no orientable 2. Entonces  $\mu(G_i) = 1$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $\mu(G_i) = 0$  para  $i = k + 1, \dots, n$ . Por tanto  $\tilde{\gamma}(G) = 2n - k$ .

Por otra parte  $\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i) = k + 2(n - k) = 2n - k$ . De ambas igualdades se tiene el resultado.  $\square$

Observemos que  $\gamma(K_6) = \tilde{\gamma}(K_6) = 1$ ; sin embargo  $K_6$  no admite una inmersión en  $\mathcal{B}_1$  según el Lema 1.2, ya que ningún corte suyo es plano. Asimismo  $\gamma(C_4 \times K_2 + K_1) = 1$  ya que es sumergible en  $\mathcal{B}_1$ . Sin embargo  $\tilde{\gamma}(C_4 \times K_2 + K_1) = 2$ , pues admite una inmersión en la Botella de Klein ( $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ) según muestra la Figura 1.6(a) pero no la admite en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , al contener a uno de los subgrafos prohibidos que nos muestra la Figura 1.6(b) (véase [21]).

Sean  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$  números naturales con  $p_i \geq 2$  para  $i = 1, \dots, r$ . Consideremos la pseudosuperficie  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$ , donde  $S$  es una superficie, orientable o no, de género al menos uno. Vamos a dar ejemplos de grafos, según sea  $S$  orientable o no, que admiten una inmersión en esta pseudosuperficie y tales que contienen un menor no sumergible en ella.

Vamos a distinguir dos casos, según sea  $S$  orientable o no orientable.

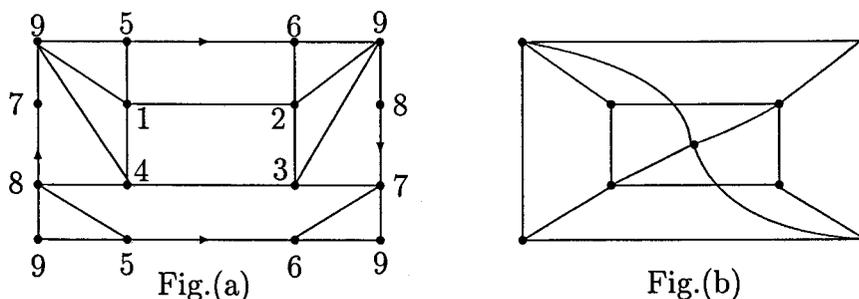


Figura 1.6: Inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y uno de los subgrafos prohibidos para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Caso I. S orientable:** Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r - 2)K_5 \cup gK_6$  donde  $g$  es el género de  $S$ ,  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración de la Proposición 1.6 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración.

En estas condiciones, podemos enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 1.9.** *El grafo  $H$  admite una inmersión en  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  pero  $H/e$  no la admite, donde  $S$  es una superficie de género orientable y  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 2$ .*

*Demostración.* Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $\mathcal{C}_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración de la Proposición 1.6 y sabiendo que  $K_5$  es sumergible en  $\mathcal{C}_2$  y que  $gK_6$  es sumergible en  $S$  por el Lema 1.8. La Figura 1.7 nos muestra una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5 \cup K_6$  en  $\mathbb{T} \# \mathcal{C}_{2,2,2}$ .

A continuación probaremos que  $H/e$  no admite una inmersión en  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$ . Supongamos lo contrario. Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ . Consideremos el grafo inducido por el corte de  $r - 1$  puntos singulares de  $S \# \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r - 1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $S \# \mathcal{C}_{p_1}$  y, por el Lema 1.5 y el Teorema de clasificación de superficies de Brahan [49], en  $S \# \mathbb{T}_{p_1-1}$ .

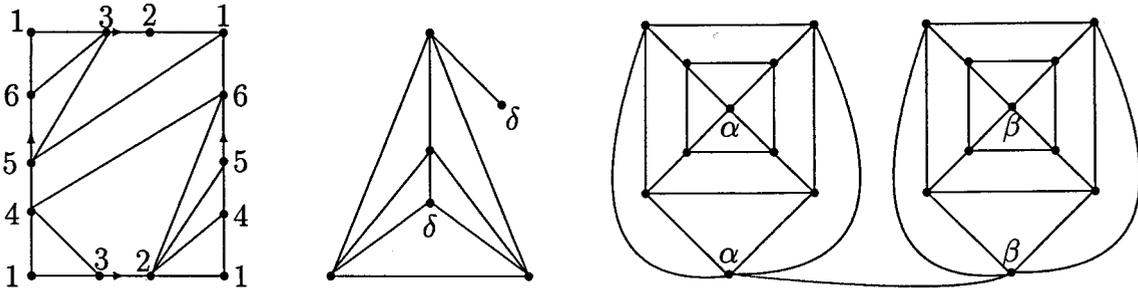


Figura 1.7: Una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5 \cup K_6$  en  $\mathbb{T}\#\mathcal{C}_{2,2,2}$ .

Sin embargo  $H'$  contiene al menos  $g+p_1+p_2-2$  bloques con un  $K_5$  en cada uno de ellos, por lo que  $\gamma(H') \geq g+p_1+p_2-2$  mientras que  $\gamma(S\#\mathbb{T}_{p_1-1}) = g+p_1-1$ . Como  $p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción.  $\square$

**Caso II.  $\tilde{S}$  no orientable:** Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r-2)(C_4 \times K_2 + K_1) \cup \tilde{g}K_6$  donde  $\tilde{g}$  es el género no orientable de  $\tilde{S}$ ,  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración de la Proposición 1.6 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración.

En estas condiciones, procedemos a enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 1.10.** *El grafo  $H$  admite una inmersión en  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  pero  $H/e$  no la admite, donde  $\tilde{S}$  es una superficie de género no orientable y  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 2$ .*

*Demostración.* Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $\mathcal{C}_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración de la Proposición 1.6 y sabiendo que  $C_4 \times K_2 + K_1$  es sumergible en  $\mathcal{C}_2$  (Figura 1.1) y que  $\tilde{g}K_6$  es sumergible en  $\tilde{S}$  por el Lema 1.8.

Supongamos que  $H/e$  admite una inmersión en  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$ . Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ .

Consideremos el grafo inducido por el corte de los  $r-1$  puntos singulares de  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r-1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por



tanto  $H'$  admite una inmersión en  $\tilde{S}\#\mathcal{C}_{p_1}$  y, por el Lema 1.5 y el Teorema de clasificación de superficies de Brahaná [49], en  $\tilde{S}\#\mathbb{T}_{p_1-1}$  que, al ser  $\tilde{S}$  no orientable, es homeomorfa a la suma conexa de  $\tilde{S}$  y  $2p_1 - 2$  planos proyectivos, cuyo género no orientable es  $\tilde{g} + 2p_1 - 2$ .

Sin embargo  $H'$  está formado, en el peor de los casos, por  $\tilde{g} + 1$  bloques de género orientable y no orientable 1 y  $p_1 + p_2 - 3$  bloques de género orientable 1 y no orientable 2. Por el Lema 1.8,  $\tilde{\gamma}(H') = \tilde{g} + 2p_1 + 2p_2 - 5$ . Por tanto  $\tilde{g} + 2p_1 + 2p_2 - 5 \leq \tilde{g} + 2p_1 - 2$  de donde  $2p_2 \leq 3$ . Como  $p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción.  $\square$

# Capítulo 2

## El invariante $s$

Las definiciones de género orientable o no orientable procede del hecho de que cualquier grafo es sumergible en alguna superficie orientable y no orientable. Podemos extender esta definición utilizando familias de pseudosuperficies con la siguiente propiedad: dado un grafo  $G$ , existe una pseudosuperficie de la familia tal que  $G$  se puede sumergir en ella. En este capítulo definimos un nuevo invariante de grafos a partir de una familia de esta forma y obtenemos explícitamente este número para cualquier grafo completo y bipartito completo.

### 2.1 Introducción

König observó que todo grafo es sumergible en una superficie orientable dada. Basta con dibujar el grafo en el plano y añadir por cada corte de aristas un *asa* (es decir, en el punto de corte se realiza la suma conexas de la superficie dada y un toro) . Ya que un corte de aristas también puede evitarse añadiendo un plano proyectivo (es decir, en el punto de corte se realiza la suma conexas de la superficie dada y un plano proyectivo), obtenemos que todo grafo es también sumergible en una superficie no orientable.



Tanto el género orientable como el no orientable son conocidos para el grafo completo  $K_p$  y para el grafo bipartito completo  $K_{p,q}$ , para todo  $p, q$  enteros positivos. (ver [24, 37, 49]).

Dado un grafo  $G$  existe un entero positivo  $n$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $\mathcal{G}_n$ . Como se dijo antes, es suficiente dibujar el grafo en el plano y evitar todos los cortes de aristas añadiendo un plano proyectivo.

A partir de que todo grafo puede ser sumergido en  $\mathcal{G}_n$ , podemos definir un nuevo invariante topológico de un grafo.

Dado un grafo  $G$  definimos el invariante  $s$  de  $G$ , y lo denotaremos por  $s(G)$ , como el mínimo entero positivo  $m$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $\mathcal{G}_m$ .

En las secciones siguientes vamos a encontrar el valor del invariante  $s$  del grafo completo  $K_p$  para cualquier entero positivo  $p$ , así como del grafo bipartito completo  $K_{p,q}$  para todos  $p, q$  enteros, positivos y que cumplan que  $p \leq q$ . Para simplificar, denotaremos  $s(p)$  en lugar de  $s(K_p)$ . De la misma forma, utilizaremos la notación  $s(p, q)$  en vez de  $s(K_{p,q})$ .

Terminaremos esta sección con un resultado previo.

**Lema 2.1.** *Sea  $G$  un grafo que admite una inmersión en  $\mathcal{G}_n$ . Entonces existe una inmersión de  $G$  en  $\mathcal{G}_n$  tal que todo punto singular es un vértice o un punto interior de una arista, cuyos extremos son puntos singulares. Además, para toda arista de  $G$  existe a lo más un punto interior suyo que es llevado por dicha inmersión en un punto singular de  $\mathcal{G}_n$ .*

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  una inmersión de  $G$  tal que un punto singular  $\alpha$  es un punto interior de una arista  $e$  incidente con un punto no singular  $v$ . Entonces  $\Gamma/\{v, \alpha\}$  es también una inmersión de  $G$  con un punto final de  $e$  en un punto singular. Iterando el proceso llegamos a que se cumple la primera parte del enunciado.

Supongamos para terminar que  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_n$  tal que dos puntos interiores de una arista  $a \in A(G)$  van a puntos singulares de  $\mathcal{G}_n$ . Según acabamos

de ver, podemos suponer que los extremos de  $a$  son también puntos singulares. Sean  $\alpha_1, \alpha_2$  los puntos singulares extremos de la arista  $a$  y  $\beta_1, \beta_2$  los puntos singulares interiores a la arista  $a$ . Borrando  $a$  y cortando  $\mathcal{G}_n$  por los puntos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  obtenemos una inmersión de  $G - a$  en  $\mathcal{G}_{n-2}$ . Añadimos a esta inmersión una hoja en  $\alpha_1$  y otra en  $\alpha_2$ . Sean  $v_1$  y  $v_2$  los puntos de  $\mathcal{G}_{n-2}$  en los que lleva la inmersión a los extremos de las hojas añadidas que no son  $\alpha_1$  ni  $\alpha_2$ . Identificando  $v_1$  con  $v_2$  y otros dos puntos cualesquiera de  $\mathcal{G}_{n-2}$  que no sean singulares ni estén ocupados por la inmersión, obtenemos una nueva inmersión de  $G$  en  $\mathcal{G}_n$  en la que sólo un punto interior de  $a$  pasa por un punto singular de  $\mathcal{G}_n$ , el punto  $v_1 = v_2$ .  $\square$

## 2.2 El invariante $s$ del grafo completo

En esta sección vamos a calcular  $s(p)$  para cualquier  $p$  entero positivo.

En primer lugar, vamos a mostrar una cota inferior para  $s(p)$ .

**Proposición 2.2.** *Sea  $p$  un número entero positivo,  $p \geq 3$ . Sea una inmersión de  $K_p$  en  $\mathcal{G}_{s(p)}$ . Entonces  $s(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 6$  donde  $k$  es el número de vértices de  $K_p$  que le corresponden puntos singulares de  $\mathcal{G}_{s(p)}$  en la inmersión.*

*Demostración.* Como  $K_p$  tiene  $k$  vértices en puntos singulares de  $\mathcal{G}_{s(p)}$ ,  $s(p) - k$  puntos singulares son puntos interiores de aristas de  $K_p$ .

Si quitamos todas esas aristas procedentes de  $K_p$  y cortamos los  $k$  vértices que caen en puntos singulares, entonces obtenemos un nuevo grafo plano con  $p + k$  vértices y  $\binom{p}{2} - (s(p) - k)$  aristas. (Ya que el grafo completo  $K_p$  tiene  $\binom{p}{2}$  aristas).

Por la fórmula de Euler

$$\binom{p}{2} - (s(p) - k) \leq 3(p + k) - 6$$

Desarrollando

$$\frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} - s(p) + k \leq 3p + 3k - 6$$

A partir de esta desigualdad, tenemos que

$$s(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 6. \square$$

Como consecuencia obtenemos los siguientes corolarios:

**Corolario 2.3.** *En las condiciones de la Proposición 2.2 se tiene que*  
 $s(p) \geq \max\left\{\frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 6, k\right\}.$

*Demostración.* Basta tener en cuenta que  $s(p) \geq k$  y la desigualdad de la Proposición 2.2.  $\square$

**Corolario 2.4.** *En las condiciones de la Proposición 2.2 se tiene que*  
 $s(p) \geq \frac{p^2 - 11p + 12}{2}.$

*Demostración.* Obsérvese que  $k \leq p$ . Aplicando la Proposición 2.2, obtenemos que  $s(p) \geq \frac{p^2 - 11p + 12}{2}$ .  $\square$

Utilizando esta cota inferior, podemos enunciar el siguiente resultado, el cual nos muestra los valores de  $s(p)$  cuando  $p \geq 12$ . El caso  $p = 12$  en la Figura 2.1 fue publicado por Heawood en [27].

**Teorema 2.5.**  $s(p) = \frac{p^2 - 11p + 12}{2}$  para  $p \geq 12$ .

*Demostración.* Tan sólo necesitamos probar que  $\frac{p^2 - 11p + 12}{2}$  es una cota superior de  $s(p)$ .

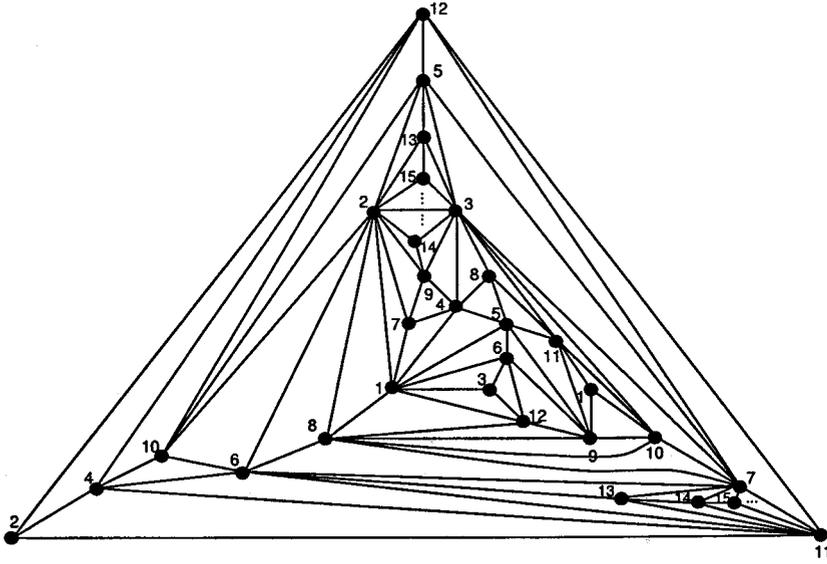


Figura 2.1: Un grafo con  $p$  vértices sumergido en  $\mathcal{G}_p$ .

Podemos ver en la Figura 2.1 una inmersión de un grafo con  $p$  vértices y  $3(2p) - 6$  aristas en  $\mathcal{G}_p$ , en donde los puntos que tienen el mismo número están identificados. A partir de esta inmersión podemos obtener otra de  $K_p$  en  $\mathcal{G}_{p+\binom{p}{2}-(3(2p)-6)}$ , simplemente dibujando las aristas que faltan a través de los nuevos  $\binom{p}{2} - (3(2p) - 6)$  puntos singulares.

Simplificando esta expresión tenemos que  $s(p) \leq \frac{p^2 - 11p + 12}{2}$ .  $\square$

Para completar totalmente este resultado, vamos a encontrar  $s(p)$  para  $p < 12$ . Para tal fin, necesitamos un Lema previo:

**Lema 2.6.** *Sea  $G$  un grafo.  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_n$  si y sólo si  $G$  se puede sumergir en  $\mathcal{G}_{n-1}$  o bien existe un corte de  $G$  que admite una inmersión en  $\mathcal{G}_{n-1}$ , en la que los vértices resultantes del corte no ocupan puntos singulares.*



*Demostración.* Haremos la demostración por inducción en  $n$ .

Para  $n = 1$  ya está probado en el Teorema 1.2.

Supongamos el resultado cierto para  $n$  y probémoslo para  $n + 1$ .

$\boxed{\Rightarrow}$  Consideremos una inmersión  $\Gamma$  de  $G$  en  $\mathcal{G}_{n+1}$ . Si algún punto singular no es un vértice ni el punto medio de una arista de  $\Gamma$ , tenemos ya que el grafo  $G$  se puede sumergir en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$ .

Sea  $\alpha$  un punto singular de  $\mathcal{G}_n$  ocupado por un vértice de  $\Gamma$ . Si cortamos  $\alpha$ , inducimos un corte de  $\Gamma$ , que llamaremos  $\Gamma'$ . Pero resulta que  $\Gamma'$  es la inmersión de un grafo resultante de cortar un vértice de  $G$  en  $\mathcal{G}_n$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Si  $G$  se puede sumergir en  $\mathcal{G}_n$ , entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_{n+1}$ . Si un corte de  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_n$  en las condiciones del enunciado, consideremos dicha inmersión y sean  $\alpha_1, \alpha_2$  los vértices resultantes del corte. Identificando  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en  $\mathcal{G}_n$  obtenemos una inmersión de  $G$  en  $\mathcal{G}_{n+1}$  como queríamos demostrar.  $\square$

Ahora estamos en disposición de calcular los restantes valores de  $s(p)$ :

Obsérvese que  $s(p) = 0$  para  $p \leq 4$  ya que  $K_p$  es un grafo plano.

Utilizando el Lema 2.6, podemos calcular  $s(p)$  para  $p = 5, 6, 7, 8$  de la siguiente manera:

$K_5$  no es plano pero cortando cualquier vértice de dicho grafo ya obtenemos un grafo plano, de tal forma que lo podemos sumergir en  $\mathcal{G}_1$  y así tenemos que  $s(5) = 1$ .

$K_6$  no se puede sumergir en  $\mathcal{G}_1$  porque el grafo que resulta de cortar cualquier vértice de dicho grafo no es plano. Sin embargo,  $K_6$  sí se puede sumergir en  $\mathcal{G}_2$  (ver Figura 2.2, donde los vértices con el mismo número están identificados). Por tanto se deduce que  $s(6) = 2$ .

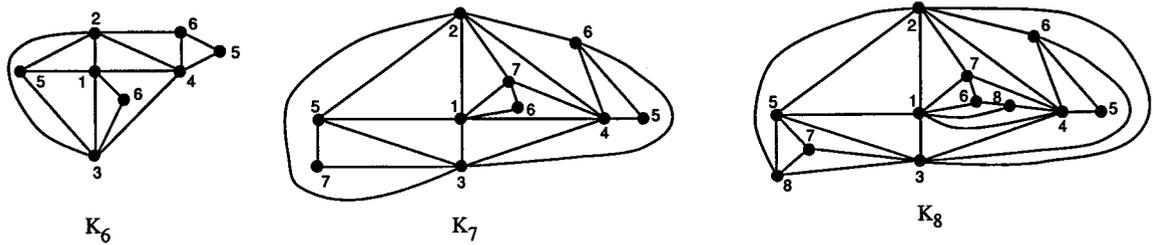


Figura 2.2: Inmersiones de  $K_6$ ,  $K_7$  y  $K_8$  en  $\mathcal{G}_2$ ,  $\mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{G}_4$  respectivamente.

$K_7$  no es sumergible en  $\mathcal{G}_2$  porque, si no, el grafo que resulta de quitarle cualquier vértice,  $K_6$ , se podría sumergir en  $\mathcal{G}_1$ . Sin embargo,  $K_7$  es sumergible en  $\mathcal{G}_3$  como muestra la Figura 2.2. Llegamos entonces a que  $s(7) = 3$ .

$K_8$  no es sumergible en  $\mathcal{G}_3$  ya que, si no, el grafo que resulta de quitarle cualquier vértice,  $K_7$ , se podría sumergir en  $\mathcal{G}_2$ . Pero la Figura 2.2 muestra una inmersión de  $K_8$  en  $\mathcal{G}_4$ , y tenemos que  $s(8) = 4$ .

Para obtener los restantes invariantes  $s$  necesitamos un resultado previo, probado en [26].

**Teorema 2.7.** *El mínimo número de vértices de  $K_9$  que hemos de cortar en dos nuevos vértices para obtener un grafo plano es 6.  $\square$*

El siguiente resultado muestra el valor de los restantes invariantes  $s$ .

**Teorema 2.8.** *Se cumplen los siguientes enunciados.*

1.  $s(9) = 6$ .
2.  $s(10) = 7$ .
3.  $s(11) = 10$ .

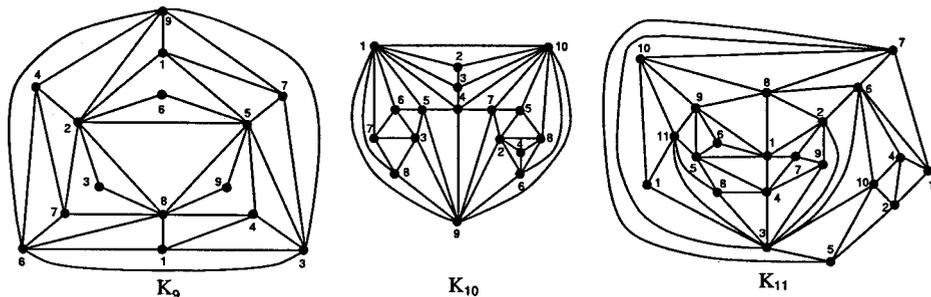


Figura 2.3: Inmersiones de  $K_9$ ,  $K_{10}$  y  $K_{11}$  en  $\mathcal{G}_6$ ,  $\mathcal{G}_7$  y  $\mathcal{G}_8$  respectivamente.

*Demostración.* Podemos ver en la Figura 2.3 una inmersión de  $K_9$ ,  $K_{10}$  y  $K_{11}$  en  $\mathcal{G}_6$ ,  $\mathcal{G}_7$  y  $\mathcal{G}_{10}$  respectivamente, por lo tanto  $s(9) \leq 6$ ,  $s(10) \leq 7$  y  $s(11) \leq 10$ . Vamos a probar las desigualdades contrarias.

Por el Corolario 2.3 obtenemos que  $s(9) \geq 5$  así que vamos a suponer que  $s(9) = 5$ . Utilizando la Proposición 2.2 tenemos que  $k = 5$ . Esto quiere decir que al cortar 5 vértices de  $K_9$  es posible encontrar un grafo plano procedente de él. Esto es una contradicción con el Teorema 2.7. Por tanto,  $s(9) \geq 6$ .

Aplicando nuevamente el Corolario 2.3 llegamos a que  $s(10) \geq 6$ . Supongamos ahora que  $s(10) = 6$ . Entonces, el grafo  $K_9$ , resultante de quitar cualquier vértice de  $K_{10}$ , se podría sumergir en  $\mathcal{G}_5$ , lo cual es una contradicción con  $s(9) = 6$ .

Para finalizar la prueba, obtenemos directamente del corolario 2.3 que  $s(11) \geq 10$ .  $\square$

Con idea de unificar todos los resultados obtenidos en esta sección, insertamos una tabla donde se puede consultar los distintos valores que tiene el invariante  $s$  cuando se trata del grafo completo  $K_p$ .

$p$	$\leq 4$	5	6	7	8	9	10	11	$\geq 12$
$s(p)$	0	1	2	3	4	6	7	10	$\frac{p^2 - 11p + 12}{2}$

En particular, para algunos valores de  $p$ , tenemos la siguiente tabla:

p	≤ 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s(p)	0	1	2	3	4	6	7	10	12	19	27	36	46	57	69	82	96

## 2.3 El invariante s del grafo bipartito completo

En esta sección calcularemos  $s(p, q)$  para todos  $p, q$  enteros, positivos y con  $p \leq q$ . Veamos en primer lugar una cota inferior para  $s(p, q)$ .

**Proposición 2.9.** Sean  $p$  y  $q$  enteros positivos con  $p \leq q$ . Entonces:

$$s(p, q) \geq pq - 3p - 3q + 4 \quad (2.1)$$

$$s(p, q) \geq \frac{pq}{2} - p - q + 2 \quad (2.2)$$

*Demostración.* Supongamos que tenemos una inmersión del grafo bipartito completo  $K_{p,q}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{s(p,q)}$ .

Por el Lema 2.1, sabemos que para toda arista del grafo existe a lo más un punto interior suyo que es llevado por dicha inmersión en un punto singular de  $\mathcal{G}_{s(p,q)}$ .

Por tanto, supongamos que tenemos  $h$  vértices del grafo  $K_{p,q}$  que son puntos singulares y que  $k$  puntos singulares son puntos interiores de aristas del grafo bipartito completo. Es evidente que  $h + k = s(p, q)$ .

Si cortamos todos los puntos singulares de la pseudosuperficie, obtenemos un grafo con  $p + q + h + 2k$  vértices y con  $pq + k$  aristas. Pero si quitamos las hojas de éste último grafo, obtenemos otro grafo  $G$  con  $p + q + h$  vértices y con  $pq - k$  aristas, y se tiene que  $G$  es bipartito y plano.

Por ser  $G$  un grafo plano de contorno al menos cuatro, se cumple que  $A(G) \leq 2V(G) - 4$ . Por tanto



$$pq - k \leq 2(p + q + h) - 4, \text{ es decir}$$

$$pq - 2p - 2q + 4 \leq k + 2h$$

Como  $k + 2h = s(p, q) + h$ , obtenemos

$$s(p, q) + h \geq pq - 2p - 2q + 4 \quad (2.3)$$

Al ser  $p + q \geq h$ , sustituimos en 2.3 y tenemos  $s(p, q) \geq pq - 3p - 3q + 4$ .

Como también se cumple que  $s \geq h$ , sustituimos nuevamente en 2.3 y obtenemos la desigualdad  $s(p, q) \geq \frac{pq}{2} - p - q + 2$ .  $\square$

A partir de este Teorema ya podemos obtener todos los valores de  $s(p, q)$ .

**Teorema 2.10.** *Se cumplen los siguientes enunciados*

- $s(3, q) = 1$  para  $q = 3, 4$
- $s(3, q) = 2$  para  $q = 5, 6$
- $s(3, q) = 3$  para  $q = 7$
- $s(3, q) = q - 5$  para todo  $q \geq 8$

*Demostración.* En la Figura 2.4 podemos ver una inmersión del grafo  $K_{3,4}$  en  $\mathcal{G}_1$  y se deduce por tanto que  $s(3, 4) \leq 1$ . Además, por la Proposición 2.9 obtenemos que  $s(3, 4) \geq 1$ .

Si en la misma figura quitamos el vértice 4, obtenemos una inmersión del grafo  $K_{3,3}$  en  $\mathcal{G}_1$  y tenemos que  $s(3, 3) \leq 1$ . Nuevamente por la Proposición 2.9 llegamos a que  $s(3, 3) \geq 1$ .

En la misma Figura 2.4 tenemos el grafo  $K_{3,6}$  sumergido en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_2$ , lo cual nos lleva a que  $s(3, 6) \leq 2$ . Si en la Proposición 2.9 sustituimos  $p = 3$  y  $q = 6$  obtenemos que  $s(3, 6) \geq 2$ .

Si en dicha figura quitamos el vértice 6, tenemos una inmersión de  $K_{3,5}$  en  $\mathcal{G}_2$  también y por tanto se deduce que  $s(3, 5) \leq 2$ . De la misma forma que anteriormente llegamos a que  $s(3, 5) \geq 2$ .

Si en la Figura 2.5 eliminamos los vértices  $8, 9, \dots, q$  obtenemos una inmersión del grafo  $K_{3,7}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_3$ , lo cual nos asegura que  $s(3, 7) \leq 3$ . Pero utilizando la Proposición 2.9 tenemos que  $s(3, 7) \geq 3$ .

Al quitar los vértices  $9, 10, \dots, q$  en la Figura 2.5, llegamos a que el grafo  $K_{3,8}$  se puede sumergir en  $\mathcal{G}_3$  y por tanto  $s(3, 8) \leq 3$ . Recurriendo nuevamente a la Proposición 2.9 obtenemos que  $s(3, 8) \geq 3$ .

Para finalizar la demostración, observemos que en la Figura 2.5 hay una inmersión del grafo  $K_{3,q}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{q-5}$ , ya que los puntos singulares son los tres vértices  $a, b$  y  $c$  del grafo  $K_{3,q}$  y las  $q - 8$  aristas  $\{b, 9\}, \{b, 10\}, \dots, \{b, q\}$  de dicho grafo también. Es, por tanto, evidente que  $s(3, q) \leq q - 5$ .

Para demostrar la otra desigualdad, recurrimos a la Proposición 2.9 y como  $p = 3$ , podemos suponer que  $h \leq 3$ . Sustituyendo ésta última desigualdad en 2.3 obtenemos

$$s(3, q) + 3 \geq s(3, q) + h \geq 3q - 6 - 2q + 4$$

De donde nos queda que  $s(3, q) \geq q - 5$ .  $\square$

**Teorema 2.11.**  $s(4, q) = q - 2$  para todo  $q \geq 4$ .

*Demostración.* La cota inferior la obtenemos a través de la Proposición 2.9, simplemente sustituyendo  $p = 4$ .

Para la cota superior, observemos que en la Figura 2.6 tenemos una inmersión del grafo  $K_{4,q}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{q-2}$  donde los puntos singulares son los vértices  $2, 3, 4, \dots, q - 1$  de dicho grafo.

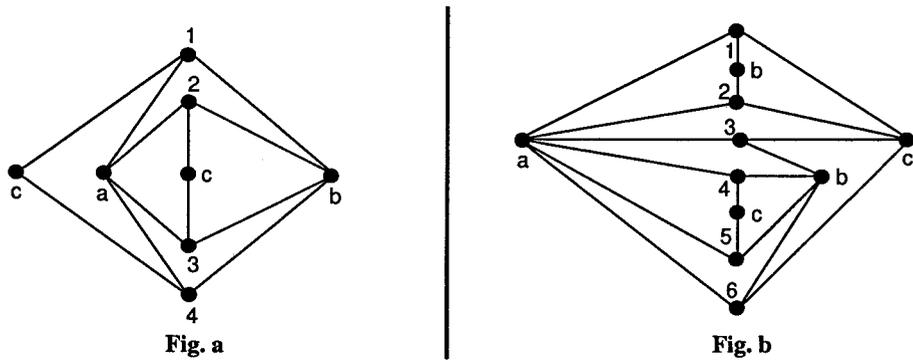


Figura 2.4: Inmersiones de  $K_{3,4}$  y  $K_{3,6}$  en  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  respectivamente.

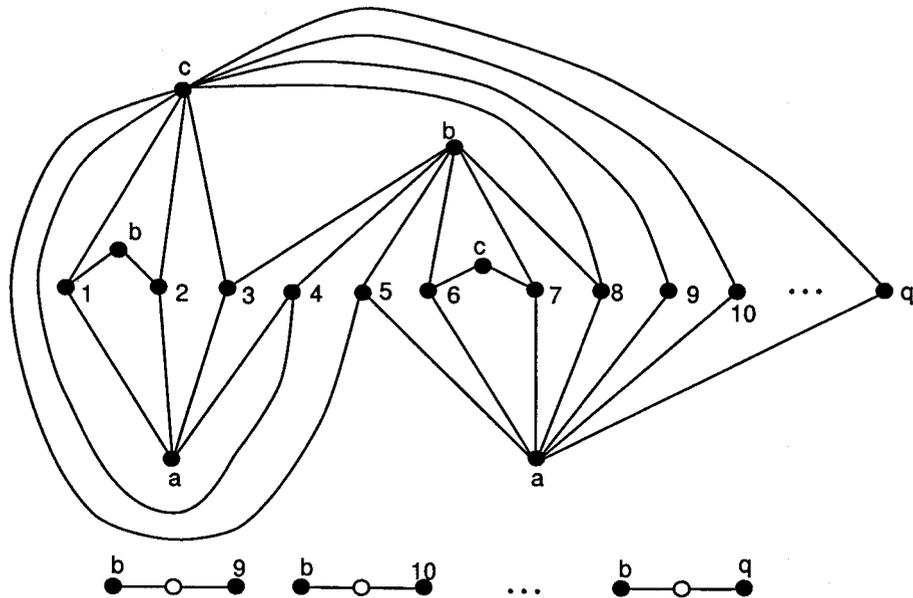


Figura 2.5: Una inmersión de  $K_{3,q}$  en  $\mathcal{G}_{q-5}$ .

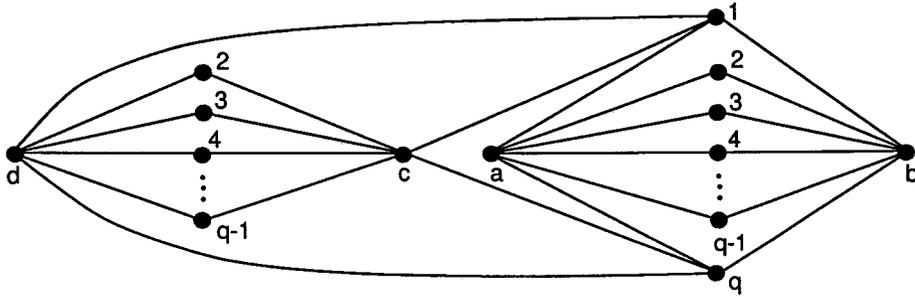


Figura 2.6: Una inmersión de  $K_{4,q}$  en  $\mathcal{G}_{q-2}$ .

A partir de las dos cotas tenemos el resultado deseado; es decir,  $s(4, q) = q - 2$ .

□

**Teorema 2.12.** *Se cumplen las siguientes igualdades:*

- $s(5, q) = \lceil \frac{3q}{2} - 3 \rceil$  para  $5 \leq q \leq 16$ .
- $s(5, q) = 2q - 11$  para todo  $q \geq 16$ .

*Demostración.*

- Veamos primero que  $s(5, q) = \lceil \frac{3q}{2} - 3 \rceil$  para  $5 \leq q \leq 16$ .

Para la cota inferior, basta sustituir  $p = 5$  en la Proposición 2.9. Las cotas superiores las especificaremos una a una dando cada inmersión.

$s(5, 5) \leq 5$  ya que en la Figura 2.7.a podemos ver una inmersión del grafo  $K_{5,5}$  en  $\mathcal{G}_5$ .

$s(5, 6) \leq 6$  porque en la Figura 2.7.b tenemos el grafo  $K_{5,6}$  sumergido en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_6$ .

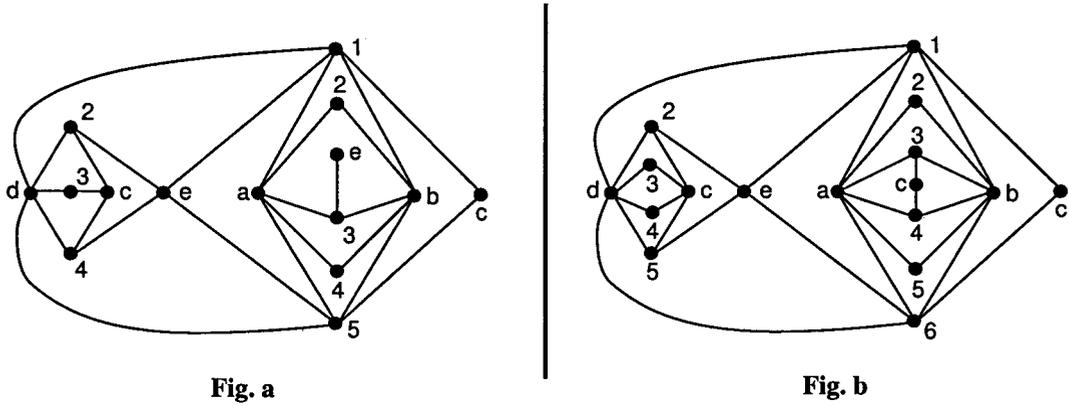


Figura 2.7: Inmersiones de  $K_{5,5}$  y  $K_{5,6}$  en  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  respectivamente.

En la Figura 2.8.a observamos una inmersión del grafo  $K_{5,7}$  en  $\mathcal{G}_8$  y por tanto se cumple que  $s(5, 7) \leq 8$ .

De la misma forma, tenemos en la Figura 2.8.b al grafo  $K_{5,8}$  sumergido en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_9$  y se deduce que  $s(5, 8) \leq 9$ .

$s(5, 9) \leq 11$  porque en la Figura 2.9.a tenemos una inmersión del grafo  $K_{5,9}$  en  $\mathcal{G}_{11}$ .

También se cumple que  $s(5, 10) \leq 12$  puesto que en la Figura 2.9.b observamos que el grafo  $K_{5,10}$  está sumergido en  $\mathcal{G}_{12}$ .

En la Figura 2.10.a podemos ver una inmersión de  $K_{5,11}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{14}$ , y se tiene que  $s(5, 11) \leq 14$ .

También en la Figura 2.10.b observamos que hemos podido sumergir el grafo  $K_{5,12}$  en  $\mathcal{G}_{15}$ , de donde se deduce que  $s(5, 12) \leq 15$ .

En la Figura 2.11 observamos una inmersión del grafo  $K_{5,14}$  en  $\mathcal{G}_{18}$  y se cumple que  $s(5, 14) \leq 18$ .

Pero en la misma Figura 2.11, si eliminamos el vértice 14 (en cursiva, y las aristas incidentes con él punteadas), tenemos al grafo  $K_{5,13}$  sumergido en  $\mathcal{G}_{17}$

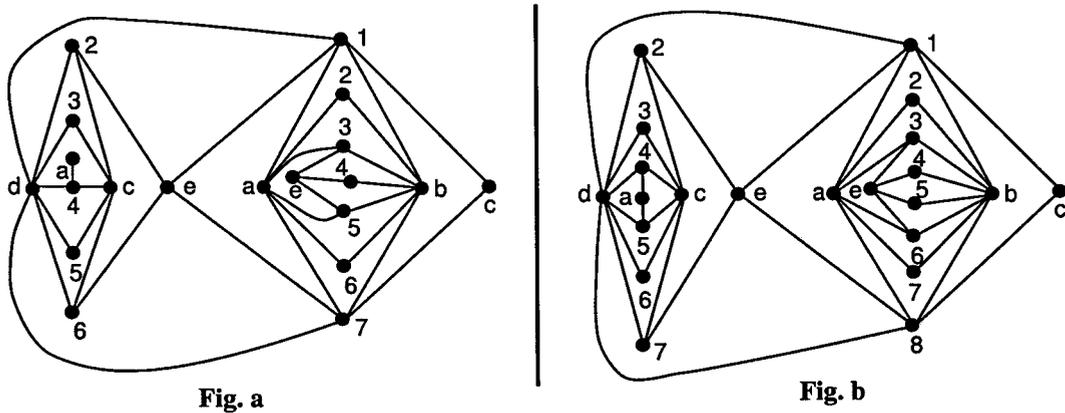


Figura 2.8: Inmersiones de  $K_{5,7}$  y  $K_{5,8}$  en  $\mathcal{G}_8$  y  $\mathcal{G}_9$  respectivamente.

y deducimos que  $s(5, 13) \leq 17$ .

$s(5, 15) \leq 20$  ya que si en la Figura 2.12 eliminamos los vértices  $16, 17, \dots, q$ , obtenemos una inmersión de  $K_{5,15}$  en  $\mathcal{G}_{20}$ .

De la misma forma, si en dicha Figura 2.12 quitamos los vértices  $17, \dots, q$  también tendremos al grafo  $K_{5,16}$  sumergido en  $\mathcal{G}_{21}$ , por lo cual  $s(5, 16) \leq 21$ .

- Veamos ahora que  $s(5, q) = 2q - 11$  para todo  $q \geq 16$ .

Para la cota inferior, basta sustituir  $p = 5$  en la Proposición 2.9 y ya tenemos que  $s(5, q) \geq 2q - 11$ .

Para la cota superior, basta observar que en la Figura 2.12 tenemos una inmersión de un grafo con  $5 + q$  vértices en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{5+q}$ , donde todos los vértices del grafo son puntos singulares. A partir de aquí podemos construir fácilmente una inmersión del grafo bipartito completo  $K_{5,q}$  en  $\mathcal{G}_{2q-11}$ , simplemente introduciendo las  $q - 16$  aristas que le faltan al grafo por otros tantos puntos singulares. De esta forma,  $s(5, q) \leq 2q - 11$ .  $\square$

**Teorema 2.13.** *Se cumplen las siguientes igualdades:*



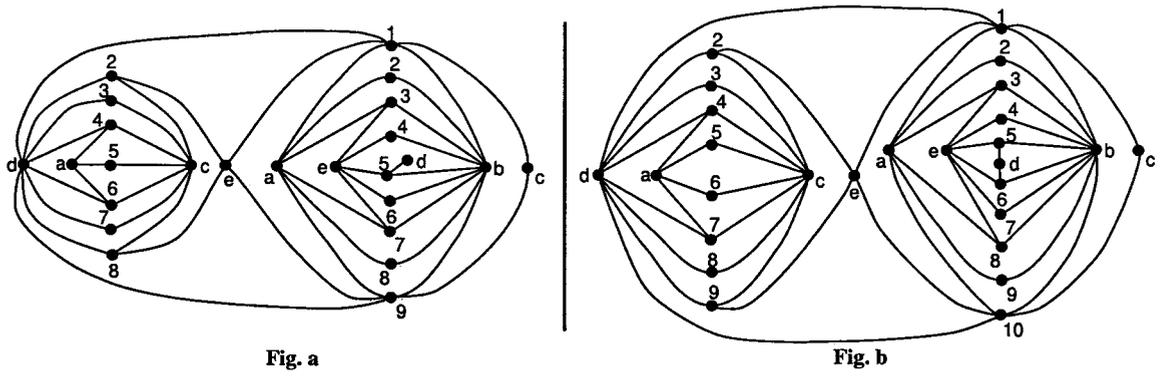


Figura 2.9: Inmersiones de  $K_{5,9}$  y  $K_{5,10}$  en  $G_{11}$  y  $G_{12}$  respectivamente.

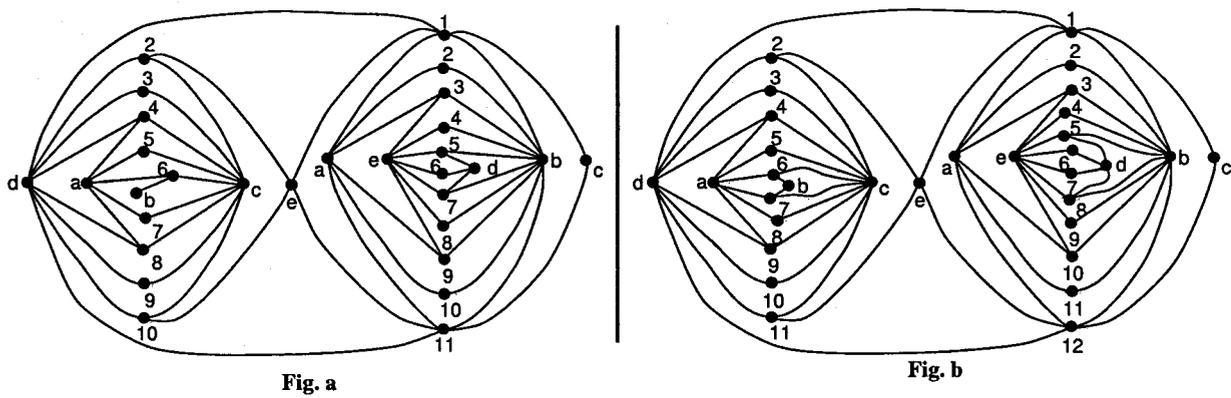


Figura 2.10: Inmersiones de  $K_{5,11}$  y  $K_{5,12}$  en  $G_{14}$  y  $G_{15}$  respectivamente.

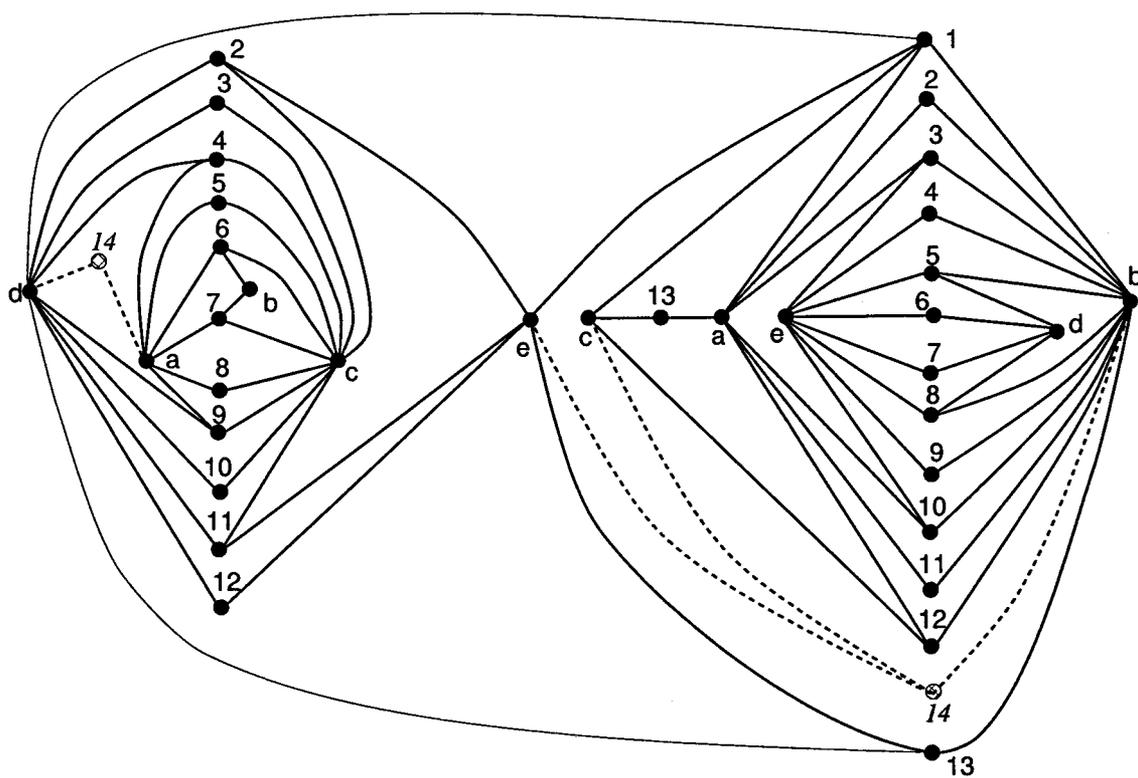


Figura 2.11: Inmersión de  $K_{5,14}$  en  $\mathcal{G}_{18}$ .

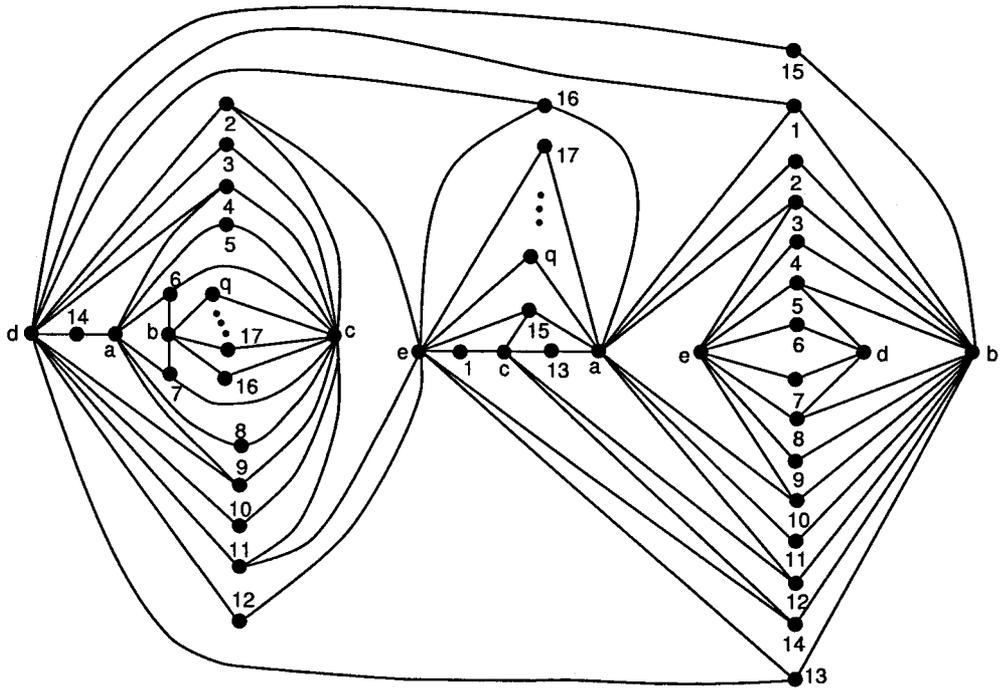


Figura 2.12: Inmersión de un grafo con  $5 + q$  vértices en  $\mathcal{G}_{5+q}$ .

- $s(6, q) = 2q - 4$  para  $6 \leq q \leq 10$ .
- $s(6, q) = 3q - 14$  para todo  $q \geq 10$ .

*Demostración.*

- Veamos en primer lugar que  $s(6, q) = 2q - 4$  para  $6 \leq q \leq 10$ .

Para la cota inferior, basta sustituir  $p = 6$  en la Proposición 2.9 y ya tenemos que  $s(6, q) \leq 2q - 4$ .

Las cotas superiores las daremos una a una, especificando cada inmersión.

$s(6, 6) \leq 8$  porque en la Figura 2.13.a tenemos una inmersión del grafo  $K_{6,6}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_8$ .

Asimismo en la Figura 2.13.b observamos que el grafo  $K_{6,7}$  está sumergido en  $\mathcal{G}_{10}$ , por lo cual  $s(6, 7) \leq 10$ .

También se cumple que  $s(6, 8) \leq 12$  puesto que en la Figura 2.13.c tenemos una inmersión de  $K_{6,8}$  en  $\mathcal{G}_{12}$ .

En la Figura 2.14 observamos una inmersión del grafo bipartito completo  $K_{6,9}$  en  $\mathcal{G}_{14}$  y por lo tanto  $s(6, 9) \leq 14$ .

Para finalizar, vemos que en la Figura 2.15, si eliminamos los vértices  $11, 12, \dots, q$ , tenemos una inmersión del grafo  $K_{6,10}$  en  $\mathcal{G}_{16}$ , con lo cual  $s(6, 10) \leq 16$ .

- Veamos ahora que  $s(6, q) = 3q - 14$  para todo  $q \geq 10$ .

Para obtener la cota inferior, basta sustituir  $p = 6$  en la Proposición 2.9 y ya tenemos que  $s(6, q) \leq 3q - 14$ .

Para la cota superior, observemos que en la Figura 2.15 tenemos una inmersión de un grafo con  $6 + q$  vértices en  $\mathcal{G}_{6+q}$ , donde todos los vértices de dicho grafo son puntos singulares. A partir de esta inmersión podemos dar otra del grafo bipartito completo  $K_{6,q}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{3q-14}$ , simplemente introduciendo las  $2(q - 10)$  aristas que le faltan al grafo  $K_{6,q}$  por otros nuevos puntos singulares. De tal forma,  $s(6, q) \leq 6 + q + 2(q - 10)$ ; es decir,  $s(6, q) \leq 3q - 14$ .  $\square$



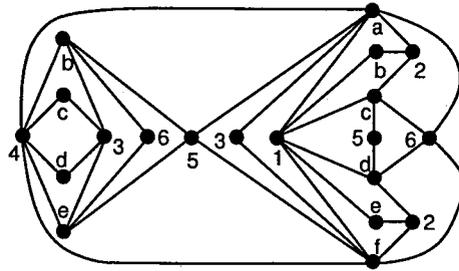


Fig. a

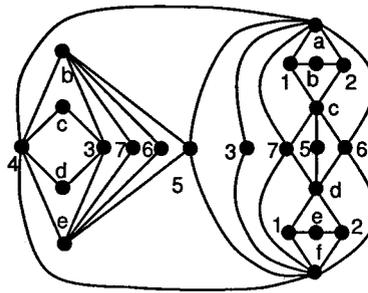


Fig. b

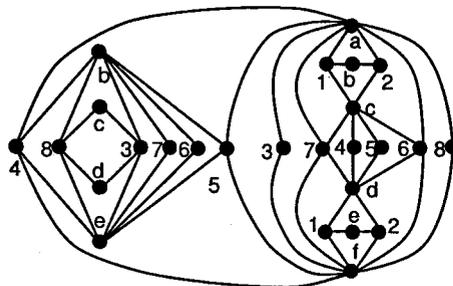


Fig. c

Figura 2.13: Inmersiones de  $K_{6,6}$ ,  $K_{6,7}$  y  $K_{6,8}$  en  $\mathcal{G}_8$ ,  $\mathcal{G}_{10}$  y  $\mathcal{G}_{12}$  respectivamente.

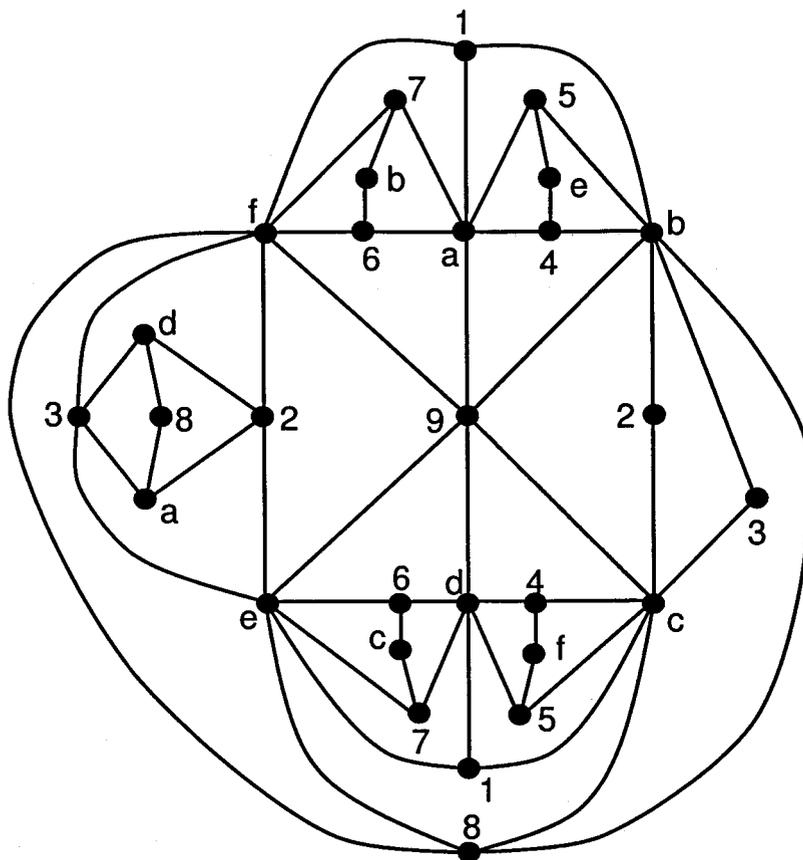


Figura 2.14: Inmersión de  $K_{6,9}$  en  $\mathcal{G}_{14}$ .



Veamos los casos que faltan

**Teorema 2.14.** *Se cumplen las siguientes igualdades*

- $s(7, 7) = 13$
- $s(7, 8) = 15$

*Demostración.*

- $s(7, 7) \geq 13$  sustituyendo  $p = 7$  y  $q = 7$  en la Proposición 2.9.

Además, si observamos la Figura 2.16, tenemos una inmersión del grafo  $K_{7,7}$  en  $\mathcal{G}_{13}$  por lo cual  $s(7, 7) \leq 13$ .

- $s(7, 8) \geq 15$  haciendo uso nuevamente de la Proposición 2.9.

Para demostrar la otra desigualdad, observemos que si en la Figura 2.17 eliminamos los vértices  $9, 10, \dots, q$ , así como los vértices  $a_8, a_9, \dots, a_p$ , obtenemos una inmersión de  $K_{7,8}$  en  $\mathcal{G}_{15}$ , donde los puntos singulares son todos los vértices del grafo. Por tanto,  $s(7, 8) \leq 15$ .  $\square$

**Teorema 2.15.**  $s(p, q) = pq - 3p - 3q + 4$  para todo  $p \geq 7$  y para todo  $q \geq 8$ .

*Demostración.* La cota inferior se obtiene a partir de la Proposición 2.9.

Para demostrar la otra desigualdad, observemos que en la Figura 2.17 tenemos una inmersión de un grafo con  $p + q$  vértices en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{p+q}$ . En dicha inmersión, denotamos por  $a_1, a_2, \dots, a_p$  a los  $p$  vértices y a los otros  $q$  vértices los llamamos  $1, 2, 3, \dots, q$ . A partir de aquí, podemos sumergir el grafo bipartito completo  $K_{p,q}$  en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_{p+q+pq-4p-4q+4} = \mathcal{G}_{pq-3p-3q+4}$ , simplemente dibujando las aristas que faltan a través de los nuevos  $pq - 4p - 4q + 4$  puntos singulares.  $\square$

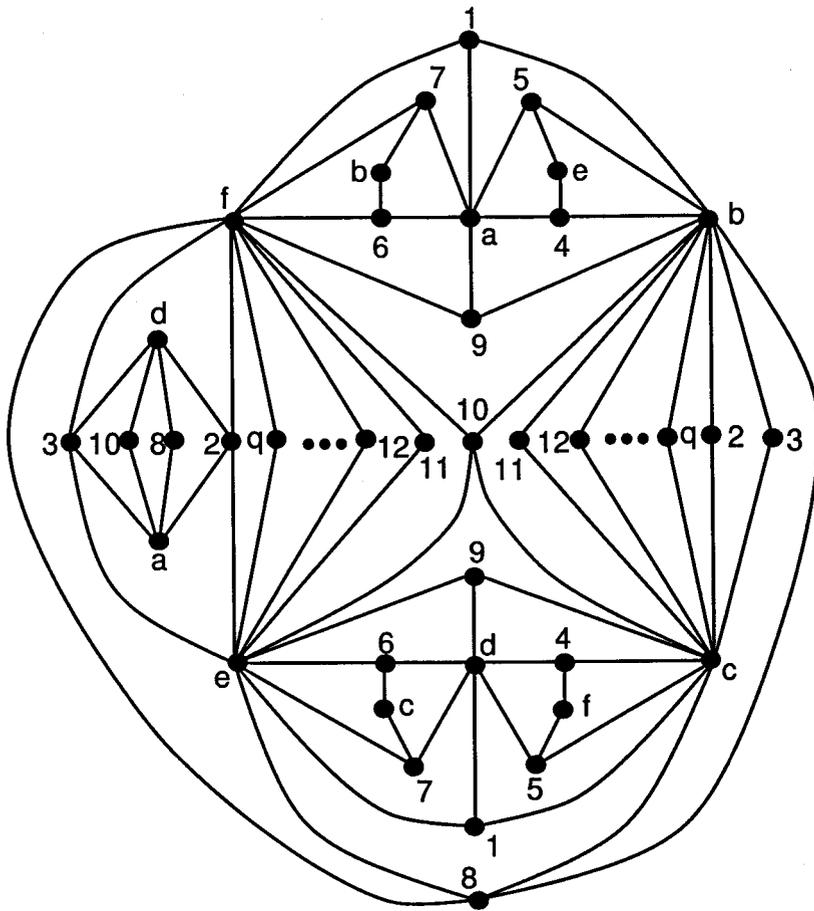


Figura 2.15: Inmersión de un grafo de  $6 + q$  vértices en  $\mathcal{G}_{6+q}$ .

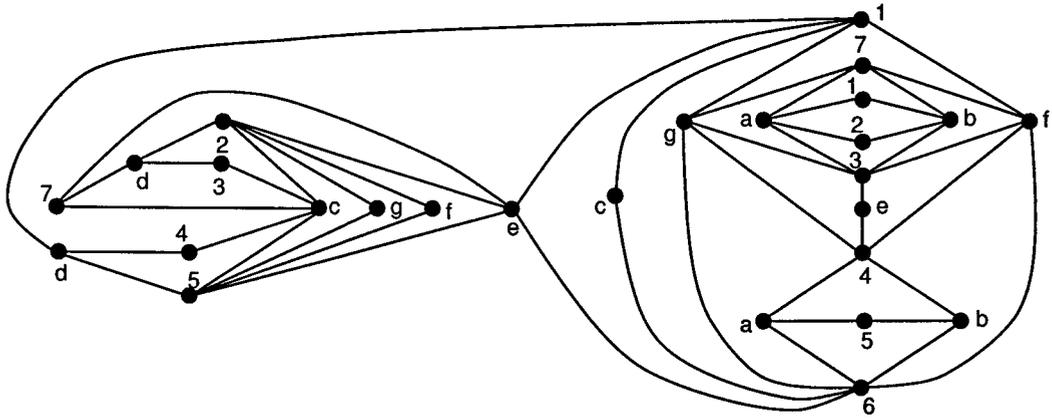


Figura 2.16: Inmersión de  $K_{7,7}$  en  $\mathcal{G}_{13}$ .

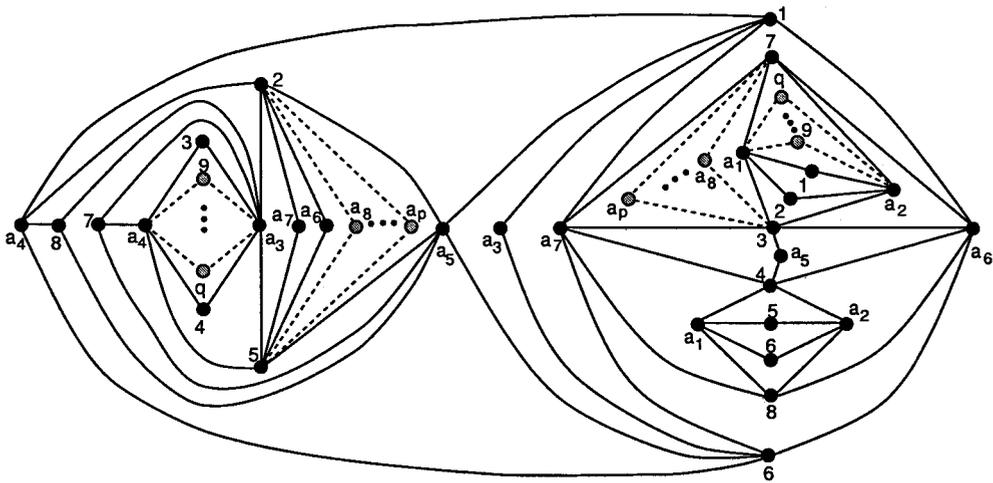


Figura 2.17: Inmersión de un grafo de  $p + q$  vértices en  $\mathcal{G}_{p+q}$ .

A continuación, insertamos una tabla donde se recogen todos los valores que tiene el invariante  $s$  cuando se trata del grafo bipartito completo  $K_{p,q}$

$q \rightarrow$	$\leq 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\geq 16$
$p \leq 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p = 3$		1	1	2	2	3	$q - 5$								
$p = 4$			$q - 2$												
$p = 5$				$\lceil \frac{3q}{2} - 3 \rceil$											$2q - 11$
$p = 6$					$2q - 4$				$3q - 14$						
$p = 7$							13	15	$pq - 3p - 3q + 4$						
$p \geq 8$								$pq - 3p - 3q + 4$							

En particular, para ciertos valores de  $p$  y de  $q$ , tenemos la siguiente tabla:

$q \rightarrow$	$\leq 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$p \leq 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p = 3$		1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p = 4$			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p = 5$				4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	23	25
$p = 6$					8	10	12	14	16	19	22	25	28	31	34	37	40
$p = 7$						13	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55
$p = 8$							20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$p = 9$								31	37	43	49	55	61	67	73	79	85
$p = 10$									44	51	58	65	72	79	86	93	100

## Parte II

### Pseudosuperficies con dos células

## Capítulo 3

# Infinitud del Teorema de Kuratowski

Širáň y Gvozďjak probaron en [40] que la pseudosuperficie que resulta de identificar dos esferas en dos puntos no tiene un teorema de Kuratowski finito.

En este capítulo ampliaremos este resultado, probando en primer lugar que al identificar dos esferas en  $n$  puntos, con  $n \geq 3$ , se obtiene un Teorema de Kuratowski infinito, y posteriormente demostraremos que las pseudosuperficies que resultan de identificar dos superficies cerradas en  $n$  puntos para  $n \geq 2$ , no admiten un teorema de Kuratowski finito y mostraremos familias infinitas de grafos minimales prohibidos en la pseudosuperficie  $S \overset{n}{\amalg} S'$ , donde  $S$  y  $S'$  previamente serán esferas y posteriormente cualquier superficie cerrada, con  $n \geq 2$ .

### 3.1 Preliminares

Širáň y Gvozďjak [40] obtuvieron el siguiente resultado:



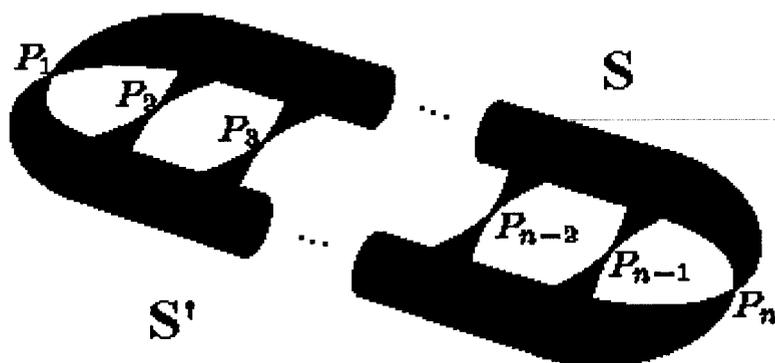


Figura 3.1: Una identificación de  $S$  y  $S'$  en  $n$  puntos.

**Teorema 3.1.** Si  $n \geq 3$  entonces  $H_n$  (ver Figura 3.2) es un grafo minimal prohibido para  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ .  $\square$

Ahora vamos a probar algunos resultados previos que nos harán falta posteriormente.

**Lema 3.2.** Sea  $G$  un grafo conexo.  $G$  es un grafo sumergible en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$  si y sólo si  $G$  tiene dos subgrafos planos  $G_1$  y  $G_2$  tal que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $E(G_1) \cup E(G_2) = E(G)$ , donde  $v_i \in V(G)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* Necesaria: Una inmersión de  $G$  en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$  puede ser construida dibujando  $G_1$  en una célula y  $G_2$  en la otra de tal forma que  $v_1, v_2$  y  $v_3$  coinciden con los puntos singulares en ambos casos. Esto es posible porque  $G_1$  y  $G_2$  son planos.

Suficiente: Hemos visto fácilmente que el resultado es cierto cuando  $G$  es plano. En otro caso, necesitamos las dos células de  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$  para poder dibujar  $G$  en dicha pseudosuperficie. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que tres vértices de  $G$  ( $v_1, v_2$  y  $v_3$ ) son en los puntos singulares.

Sea  $G_1 = (V_1 \cup \{v_1, v_2, v_3\}, E_1)$  un subgrafo de  $G$  donde  $V_1$  es el conjunto de vértices

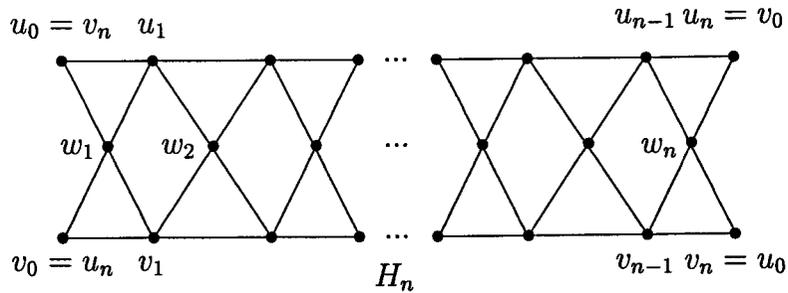


Figura 3.2: Una familia infinita de grafos prohibidos en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ .

que están en una célula y  $E_1$  es el conjunto de aristas con al menos un extremo en  $V_1$  y las aristas con ambos finales en  $\{v_1, v_2, v_3\}$  que están en la célula. De una forma similar definimos  $G_2 = (V_2 \cup \{v_1, v_2, v_3\}, E_2)$  como otro subgrafo de  $G$ , donde  $V_2$  es el conjunto de vértices que están en la otra célula y  $E_2$  es el conjunto de aristas con al menos un extremo en  $V_2$  y las restantes aristas con ambos finales en  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

Es fácil comprobar que estos grafos cumplen las condiciones del lema, ya que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$  por definición y además  $E(G_1) \cup E(G_2) = E(G)$  por la construcción llevada a cabo.  $\square$

Como consecuencia del Lema 3.2 tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.3.**  $H_n$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$ , para cualquier entero positivo  $n$ .

*Demostración.* Se deduce del Lema 3.2 considerando el subgrafo inducido por  $\{u_0, u_1, w_1\}$  como  $G_1$  y como  $G_2$  el resto del grafo. Obsérvese que  $G_2$  es plano al igual que  $G_1$  y cumplen las condiciones del Lema 3.2. Por tanto,  $H_n$  se puede sumergir en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$ .  $\square$

Dado un grafo  $G$ , sea  $j(G)$  el mínimo entero positivo tal que  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{j(G)}{\amalg} S_0$ . En el capítulo siguiente trabajaremos ampliamente con este nuevo concepto al que denominaremos *invariante  $j$* .

**Corolario 3.4.** Si  $n \geq 3$  entonces  $j(H_n) = 3$ .

*Demostración.* Por el Lema 3.3 ya tenemos que  $j(H_n) \leq 3$ . Pero además  $j(H_n) \geq 3$  puesto que  $H_n$  está prohibido en  $S_0 \amalg^2 S_0$ .  $\square$

De esta forma, obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.5.** Sean  $n$  grafos,  $G_1, \dots, G_n$ . Entonces  $j\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right) = \sum_{k=1}^n j(G_k)$ .

*Demostración.* Vamos a probar el resultado por inducción en  $n$ . El caso  $n = 1$  es trivial.

- $n = 2$ . Es fácil construir una inmersión de  $G_1 \cup G_2$  en  $S_0 \amalg^{j(G_1)+j(G_2)} S_0$  a partir de la inmersión de  $G_1$  en  $S_0 \amalg^{j(G_1)} S_0$  y la inmersión de  $G_2$  en  $S_0 \amalg^{j(G_2)} S_0$ . Por tanto,  $j(G_1 \cup G_2) \leq j(G_1) + j(G_2)$ .

Ahora, vamos a considerar una inmersión de  $G_1 \cup G_2$  en  $S_0 \amalg^{j(G_1 \cup G_2)} S_0$ .

Si la inmersión de  $G_1$  contiene  $r$  puntos singulares de  $S_0 \amalg^{j(G_1 \cup G_2)} S_0$ , con  $r \leq j(G_1 \cup G_2)$ , entonces la inmersión de  $G_2$  contiene, como máximo,  $j(G_1 \cup G_2) - r$  puntos singulares.

Así que

$$r \geq j(G_1)$$

$$j(G_1 \cup G_2) - r \geq j(G_2).$$

A partir de estas desigualdades tenemos que  $j(G_1 \cup G_2) \geq j(G_1) + j(G_2)$ .

- Vamos a suponer ahora que el resultado se cumple para  $n \geq 2$  y veamos si es cierto para  $n + 1$ .

Entonces tenemos que  $j(\bigcup_{k=1}^{n+1} G_k) = j((\bigcup_{k=1}^n G_k) \cup G_{n+1}) = (\sum_{k=1}^n j(G_k)) + j(G_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} j(G_k). \square$

### 3.2 Familias minimales prohibidas para $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$

En esta sección vamos a dar una familia infinita de grafos minimales prohibidos en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ , para cualquier  $n \geq 3$ . Como consecuencia, obtendremos que  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  no tiene un teorema de Kuratowski finito.

Vamos a considerar la familia de grafos  $H'_n$  que se explicita en la Figura 3.3. Tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.6.** *Si  $n \geq 3$  entonces  $H'_n$  es un grafo minimal prohibido para  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$ .*

*Demostración.* En primer lugar probaremos que  $H'_n$  no es sumergible en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$ . Supongamos lo contrario.

Los dos únicos conjuntos de corte con tres vértices son  $\{u_i, v_i, w_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  y  $\{u_j, v_{j-1}, w_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Podemos considerar  $\{u_0, v_0, w_0\}$  sin pérdida de generalidad.

Es fácil comprobar que el subgrafo  $H'_n - v - \{u_0, v_0\} - \{v_0, w_0\}$  no es plano y la condición del Lema 3.2 no se cumple, lo cual es una contradicción.

Para terminar la prueba, vamos a ver que  $H'_n - e$  es sumergible en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$ , para cualquier  $e \in E(H'_n)$ . Teniendo en cuenta la simetría, existen sólo cuatro tipos de aristas en  $H'_n$ , denominadas  $a, b, c$  y  $d$  en la figura 3.3.

$H'_n - a$  satisface las condiciones del Lema 3.2, eligiendo como  $G_1$  el subgrafo inducido por  $\{b, c, d\}$  y  $G_2 = (H'_n - a) - G_1$ . Por tanto, cuando seleccionamos una

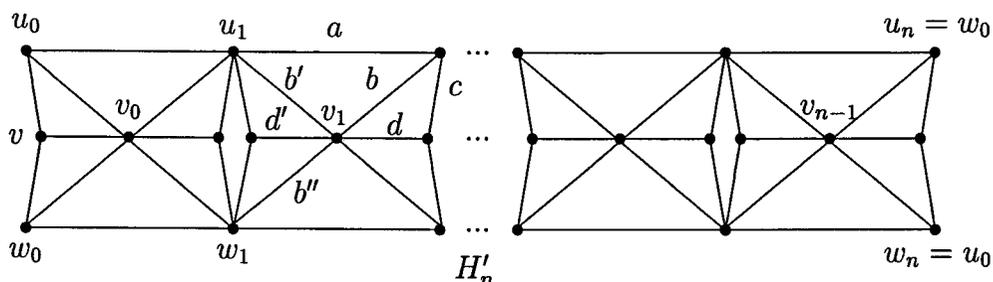


Figura 3.3: Una familia infinita minimal prohibida en  $S_0 \amalg^3 S_0$ .

arista del tipo  $a$  el problema ya está resuelto.

$H'_n - b$  también cumple que es sumergible en  $S_0 \amalg^3 S_0$ , ya que si tomamos como  $G_1$  el subgrafo inducido por  $\{a, c\}$  y como  $G_2$  el resto del grafo, estamos en las condiciones del Lema 3.2 y podemos aplicarlo.

$H'_n - c$  cumple las condiciones del Lema 3.2, simplemente eligiendo como  $G_1$  el subgrafo inducido por  $\{a, b\}$  y como  $G_2$  el subgrafo  $G_2 = (H'_n - c) - G_1$ . De esta forma tenemos que  $H'_n - c$  es sumergible en  $S_0 \amalg^3 S_0$ .

$H'_n - d$  satisface las condiciones del Lema 3.2, eligiendo el subgrafo inducido por  $\{a, b, b'\}$  como  $G_1$  y definiendo  $G_2$  como el resto. En este caso, también se cumple que  $H'_n - d$  es sumergible en  $S_0 \amalg^3 S_0$ .  $\square$

Vamos a generalizar este resultado a la pseudosuperficie  $S_0 \amalg^m S_0$ , en donde seguiremos viendo que el Teorema de Kuratowski es infinito, ya que daremos una familia infinita de subgrafos prohibidos a partir de la familia  $H_n$  definida anteriormente, distinguiendo cuando  $m$  es par o impar.

Además veremos que también podemos dar otra familia infinita de subgrafos prohibidos en función de  $H'_n$ , cuando  $m$  es impar.

**Teorema 3.7.** *Se verifican los siguientes enunciados:*

1.  $\{2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5\}$  es una familia infinita de subgrafos minimales prohibidos en  $S_0 \amalg^m S_0$ , con  $n \geq 3$  y  $m$  impar,  $m \geq 5$ .

2.  $\{H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5\}$  es una familia infinita de subgrafos minimales prohibidos en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , con  $n \geq 3$  y  $m$  par,  $m \geq 2$ .

*Demostración:*

1. Veamos primero que  $2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5$  no se puede sumergir en la pseudosuperficie  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , con  $m$  impar y  $m \geq 5$ . Para ello, vamos a calcular el valor de  $j(2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5)$ .

Por el Lema 3.5 se tiene que  $j(2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) = j(2H_n) + j(\frac{m-5}{2}K_5) = 2j(H_n) + \frac{m-5}{2}j(K_5)$ .

Pero por el Corolario 3.4, sabemos que  $j(H_n) = 3$  y además  $j(K_5) = 2$  porque  $K_5$  no es plano y lo podemos sumergir en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  introduciendo  $K_5 - e$  en una esfera y la arista  $e$  en la otra esfera.

Por tanto,  $j(2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) = 6 + m - 5 = m + 1$ .

Probemos ahora que si a la familia  $\{2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5\}$  le quitamos una arista, sí se puede sumergir en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ . Para ello, distinguiremos dos casos: cuando  $e \in K_5$  y cuando  $e \in H_n$ .

Supongamos que  $e \in K_5$ . En este caso, observamos que  $(2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) - e = 2H_n \cup \frac{m-7}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}$ .

Utilizando nuevamente el Lema 3.5 tenemos que  $j(2H_n \cup \frac{m-7}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}) = j(2H_n) + j(\frac{m-7}{2}K_5) + j(K_2 + \overline{K_3}) = 2j(H_n) + \frac{m-7}{2}j(K_5) + j(K_2 + \overline{K_3})$ .

Pero ya sabemos que  $j(H_n) = 3$  y  $j(K_5) = 2$  y además  $j(K_2 + \overline{K_3}) = 0$  ya que dicho grafo es plano.

Por tanto,  $j((2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) - e) = 6 + m - 7 = m - 1$ .

Supongamos ahora que  $e$  es una arista que hemos quitado de  $H_n$ . Entonces,  $j((2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) - e) = j(H_n - e) + j(H_n) + \frac{m-5}{2}j(K_5)$  por el Lema 3.5.

Pero  $j(H_n - e) = 2$  por el Teorema 3.1, de manera que  $j((2H_n \cup \frac{m-5}{2}K_5) - e) = 2 + 3 + m - 5 = m$

2. Tenemos que demostrar que la familia  $\{H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5\}$  no es sumergible en la pseudosuperficie  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  con  $m$  par y  $m \geq 2$ .

Utilizando el Lema 3.5 tenemos que  $j(H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5) = j(H_n) + j(\frac{m-2}{2}K_5) =$

$$j(H_n) + \frac{m-2}{2}j(K_5).$$

Por el Corolario 3.4 y teniendo en cuenta que  $j(K_5) = 2$  llegamos a que  $j(H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5) = 3 + m - 2 = m + 1$ .

Veamos por último que si a  $H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5$  le eliminamos una arista, se puede realizar la inmersión en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ . Supongamos nuevamente los dos casos anteriores:  $e \in K_5$ , o bien  $e \in H_n$ .

Si  $e \in K_5$ , se tiene que  $(H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5) - e = H_n \cup \frac{m-4}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}$ .

Haciendo uso del Lema 3.5 y del Corolario 3.4 tenemos que  $j(H_n \cup \frac{m-4}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}) = j(H_n) + j(\frac{m-4}{2}K_5) + j(K_2 + \overline{K_3}) = 3 + m - 4 = m - 1$ .

En el caso de que  $e \in H_n$ , tenemos que  $j((H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5) - e) = j(H_n - e) + \frac{m-2}{2}j(K_5) = 2 + m - 2 = m$ , razonando de forma análoga que en el apartado anterior.  $\square$

**Proposición 3.8.**  $H'_n$  es sumergible en  $S_0 \overset{4}{\amalg} S_0$ .

*Demostración.* Vamos a dar una inmersión de  $H'_n$  en  $S_0 \overset{4}{\amalg} S_0$ . En una de las esferas introducimos el subgrafo inducido por  $\{u_0, v, v_0, u_1\}$  que lo llamaremos  $G_1$ , y en la otra célula el resto del grafo que lo denotaremos  $G_2$ . Observemos que  $G_2$  es plano al igual que  $G_1$  y que los puntos singulares son los cuatro vértices utilizados en  $G_1$ .  $\square$

**Corolario 3.9.**  $j(H'_n) = 4$  para todo  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Vamos a probar que  $j(H'_n) = 4$  por doble desigualdad.

Por el Teorema 3.6 ya sabemos que  $H'_n$  está prohibido en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$  y por tanto  $j(H'_n) \geq 4$ .

Para la cota superior, utilizamos la proposición anterior, donde damos propiamente la inmersión, y ya tenemos que  $j(H'_n) \leq 4$ .  $\square$

**Corolario 3.10.**  $\{H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5\}$  es otra familia infinita de subgrafos minimales prohibidos para  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  con  $n \geq 3$  y  $m$  impar,  $m \geq 5$ .

*Demostración.* En primer lugar vemos que  $H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5$  no se puede sumergir en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , ya que por el Lema 3.5  $j(H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5) = j(H'_n) + \frac{m-3}{2}j(K_5)$ .

Utilizando el Corolario anterior y que  $j(K_5) = 2$  llegamos a que  $j(H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5) = 4 + m - 3 = m + 1$ .

También dicha familia cumple que al quitarle una arista sí se puede realizar una inmersión en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ . Vamos a distinguir el caso en el que  $e \in K_5$  y aquel otro cuando  $e \in H'_n$ .

Cuando la arista que eliminamos es de un  $K_5$  nos queda  $\{H'_n \cup \frac{m-5}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}\}$  y se tiene que  $j(H'_n \cup \frac{m-5}{2}K_5 \cup K_2 + \overline{K_3}) = 4 + m - 5 = m - 1$ , ya que  $K_2 + \overline{K_3}$  es plano.

En el caso de que suprimamos una arista de  $H'_n$ , obtenemos que  $j((H'_n - e) \cup \frac{m-3}{2}K_5) = j(H'_n - e) + \frac{m-3}{2}j(K_5) = 3 + m - 3 = m$ . Hemos utilizado que  $j(H'_n - e) = 3$  gracias al Teorema 3.6.  $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 3.1, 3.6 y 3.7 podemos obtener el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.11.**  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  tiene un teorema de Kuratowski infinito para  $n \geq 2$ .  $\square$

### 3.3 Familias de grafos prohibidas para $S_p \overset{n}{\amalg} S_q$

Sea  $S_p$  una superficie de género  $p$ , orientable o no, y sea  $S_q$  otra superficie de género  $q$ , el cual puede ser orientable o no orientable.

Ahora vamos a dar una familia infinita de grafos minimales prohibidos en  $S_p \overset{n}{\amalg} S_q$ , para cualquier  $n \geq 2$  y  $p, q \geq 1$ , tanto en el caso orientable como no orientable.

Como consecuencia,  $S_p \overset{n}{\amalg} S_q$  no tiene un teorema de Kuratowski finito.

Necesitamos algunos resultados previos.

Battle, Harary, Kodama y Youngs probaron en [6] que  $\gamma(G) = \sum_{i=1}^n \gamma(G_i)$  donde  $\gamma(G)$  es el género orientable del grafo  $G$  y  $G_i$  son los bloques del grafo  $G$  para  $i = 1, \dots, n$ .

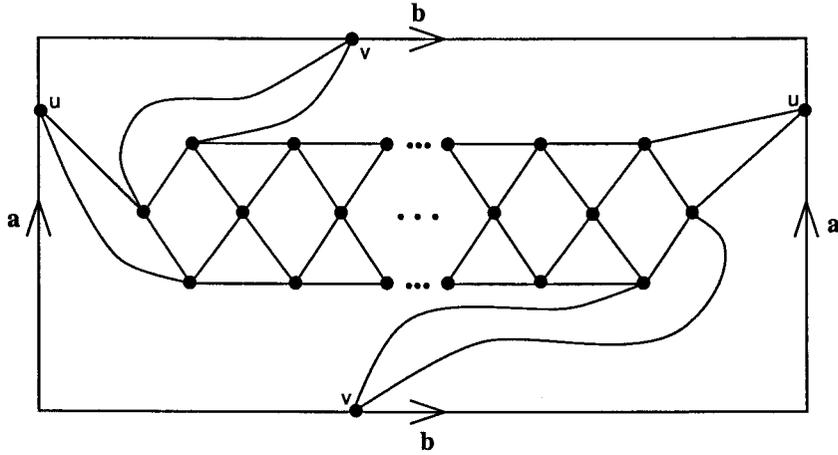


Figura 3.4: Una inmersión de  $H_n$  en  $\mathbb{T}_2$ .

A partir de los resultados de Stahl y Beineke [42] también tenemos la siguiente propiedad, la cual es similar a la anterior pero para el género no orientable.

**Lema 3.12.** *Sea  $G$  un grafo tal que  $\tilde{\gamma}(G_i) = 1$  para cualquier  $G_i$  bloque de  $G$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $\tilde{\gamma}(G) = \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i)$ .  $\square$*

De acuerdo con el Lema anterior, obtenemos el género orientable y no orientable de las familias  $H_n$  y  $H'_n$ .

**Lema 3.13.**  $\gamma(H_n) = \tilde{\gamma}(H_n) = \gamma(H'_n) = \tilde{\gamma}(H'_n) = 1$ , para cualquier  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Para  $n \geq 3$ ,  $H_n$  y  $H'_n$  no se pueden sumergir en el plano ya que ambos contienen  $K_{3,3}$  como menor topológico.

Sin embargo, es fácil construir una inmersión de  $H_n$  en el toro como muestra la Figura 3.4, con lo cual  $\gamma(H_n) = 1$ . La inmersión de  $H'_n$  en el toro es totalmente similar, y a partir de ella tenemos que  $\gamma(H'_n) = 1$ .

En la Figura 3.5 podemos observar una inmersión de  $H_n$  en el plano proyectivo, de

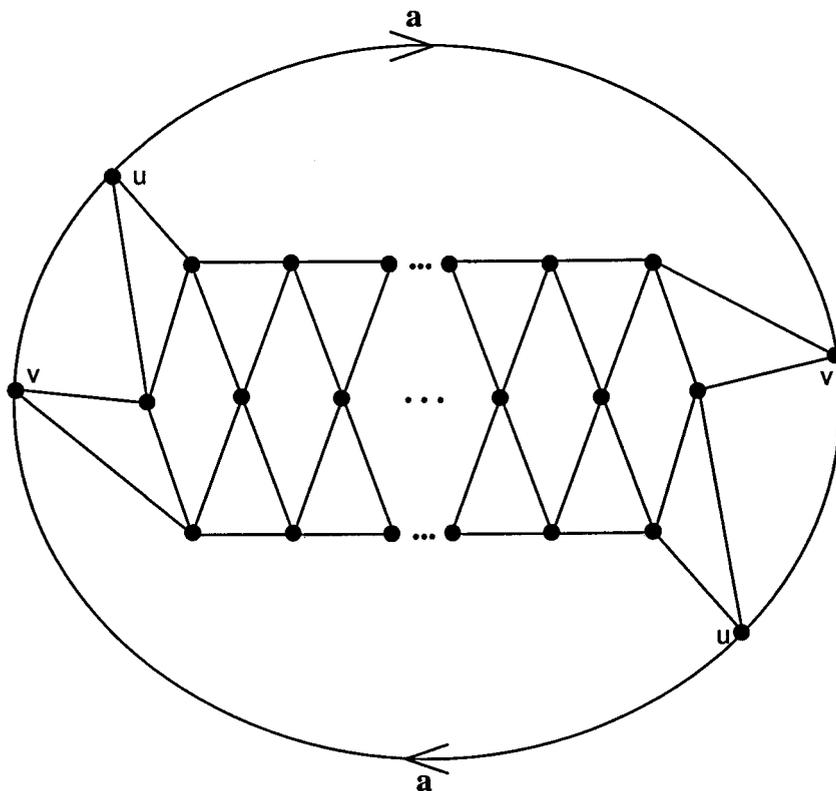


Figura 3.5: Una inmersión de  $H_n$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

donde se deduce que  $\tilde{\gamma}(H_n) = 1$ . De forma totalmente análoga se construye una inmersión de  $H'_n$  en el plano proyectivo y se obtiene que  $\tilde{\gamma}(H'_n) = 1$ .  $\square$

Pasemos a enunciar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.14.** Sean  $S_p$  y  $S_q$  dos superficies de género  $p$  y  $q$  respectivamente (orientable o no) con  $p, q \geq 1$ . Se verifican los siguientes enunciados:

1.  $\{(p+q+1)H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5\}$  es una familia infinita de subgrafos prohibidos en  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q$ , con  $n \geq 3$  y  $m$  impar,  $m \geq 3$ .



2.  $\{(p+q+1)H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5\}$  es una familia infinita de subgrafos prohibidos en  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q$ , con  $n \geq 3$  y  $m$  par,  $m \geq 2$ .

*Demostración.*

1. Para probar el primer enunciado vamos a suponer que  $(p+q+1)H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5$ , para cualquier  $n \geq 3$ , se puede sumergir en  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q$  con  $m$  impar,  $m \geq 3$ .

Obsérvese que  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q = (S_p \# S_0) \overset{m}{\amalg} (S_0 \# S_q)$ , donde  $\#$  representa la suma conexa de dos superficies.

Sea  $k$  la cantidad de  $K_5$  que se pueden sumergir en  $S_p$  ó  $S_q$ . Por lo tanto, hay  $(\frac{m-3}{2} - k)$   $K_5$  sumergibles en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , ya que como  $K_5$  no es plano, cualquier inmersión de  $K_5$  debe contener al menos 2 puntos singulares de  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ .

Sea  $h$  la cantidad de  $H'_n$  que se pueden sumergir en  $S_p$  ó  $S_q$ . Por lo tanto, hay  $(p+q+1-h)$   $H'_n$  sumergibles en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , teniendo en cuenta que  $H'_n$  no es sumergible en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  (por el Teorema 3.6) y cualquier inmersión de  $H'_n$  debe contener al menos 4 puntos singulares de  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ .

Obsérvese que  $k, h \geq 0$  y  $p+q \geq k+h$  por el Lema 3.13 y por tanto  $p+q-k-h \geq 0$ .

Podemos enunciar otra relación utilizando el número de puntos singulares:

$$m - 2\left(\frac{m-3}{2} - k\right) - 4(p+q+1-h) \geq 0$$

Desarrollando:

$$3 + 2k - 4p - 4q - 4 + 4h \geq 0$$

y de aquí

$$2k + 4h \geq 1 + 4p + 4q$$

Pero como  $k+h \geq 0$ , obtenemos

$$2k + 4h \geq 1 + 4k + 4h$$

Por tanto,  $1 + 2k \leq 0$  lo cual es una contradicción, puesto que  $k \geq 0$ .

Para probar la minimalidad de  $(p + q + 1)H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5$  vamos a sumergir  $((p + q + 1)H'_n \cup \frac{m-3}{2}K_5) - e$  en  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q$ .

Primero, consideremos que  $e$  es una arista que hemos quitado de  $K_5$ . Entonces podemos sumergir  $p H'_n$  en  $S_p$ ,  $q H'_n$  en  $S_q$ ,  $H'_n \cup \frac{m-5}{2}K_5$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  (por el Corolario 3.10) y  $K_5 - e$  en cualquier cara plana y por lo tanto ya tenemos la inmersión.

Finalmente, si  $e$  es una arista que hemos quitado de  $H'_n$ , podemos sumergir  $p H'_n$  en  $S_p$ ,  $q H'_n$  en  $S_q$  y  $(H'_n - e) \cup \frac{m-3}{2}K_5$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  utilizando el Corolario 3.10.

2. Para probar el segundo enunciado supongamos que  $(p + q + 1)H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5$  se puede sumergir, para cualquier  $n \geq 3$ , en  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q$  con  $m$  par,  $m \geq 2$ .

También tenemos nuevamente que  $S_p \overset{m}{\amalg} S_q = (S_p \# S_0) \overset{m}{\amalg} (S_0 \# S_q)$ .

Al igual que antes, sea  $k$  la cantidad de  $K_5$  que se pueden sumergir en  $S_p$  ó  $S_q$  y sea  $h$  la cantidad de  $H_n$  sumergibles en  $S_p$  ó  $S_q$ . Así que hay  $(\frac{m-2}{2} - k) K_5$  que se puede sumergir en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  y hay  $(p + q + 1 - h) H_n$  sumergibles en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ .

Pero  $H_n$  no se puede sumergir en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  (por el Teorema 3.1) y por lo tanto cualquier inmersión de  $H_n$  debe contener al menos 3 puntos singulares de  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ .

Una vez más  $p + q \geq k + h$  por el Lema 3.13 y usando el número de puntos singulares, tenemos que

$$m - 2\left(\frac{m-2}{2} - k\right) - 3(p + q + 1 - h) \geq 0$$

Desarrollando

$$2 + 2k - 3p - 3q - 3 + 3h \geq 0$$

y de aquí

$$2k + 3h \geq 1 + 3p + 3q$$

Pero como  $p + q \geq k + h$  obtenemos

$$2k + 3h \geq 1 + 3k + 3h$$



Por tanto,  $1 + k \leq 0$  lo cual es una contradicción, ya que  $k \geq 0$ .

Para probar la minimalidad de  $(p + q + 1)H_n \cup \frac{m-2}{2}K_5$  seguimos un razonamiento similar.

Si  $e$  la hemos quitado de un  $K_5$  entonces podemos sumergir  $p H_n$  en  $S_p$ ,  $q H_n$  en  $S_q$ ,  $H_n \cup \frac{m-4}{2}K_5$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  (por el Teorema 3.7) y  $K_5 - e$  en cualquier cara plana y por tanto ya tenemos la inmersión.

Finalmente, si  $e$  es una arista que la hemos eliminado de  $H_n$ , podemos sumergir  $p H_n$  en  $S_p$ ,  $q H_n$  en  $S_q$  y  $(H_n - e) \cup \frac{m-2}{2}K_5$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  (utilizando el Teorema 3.7).  $\square$

# Capítulo 4

## El invariante $j$

En el Capítulo 2, hemos definido el invariante  $s$  a partir de que cualquier grafo se puede sumergir en la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$ . En este capítulo utilizamos otras familias de pseudosuperficies, concretamente  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ , con la siguiente propiedad: dado un grafo  $G$ , existe una pseudosuperficie de la familia tal que  $G$  se puede sumergir en ella. De esta forma definimos otro nuevo invariante de grafos a partir de las familias de esta forma y obtenemos explícitamente este número para cualquier grafo completo y bipartito completo.

### 4.1 Introducción

Ya se dijo en el Capítulo 2 que todo grafo es sumergible en una superficie orientable dada, simplemente dibujando el grafo en el plano y añadiendo por cada corte de aristas un asa (es decir, en cada punto de corte se realiza la suma conexa de la superficie dada y un toro.)

Tanto el género orientable como el no orientable son conocidos para el grafo completo  $K_p$  y para el grafo bipartito completo  $K_{p,q}$ , para todo  $p, q$  enteros positivos.

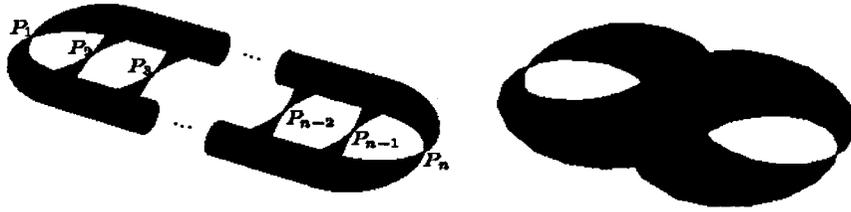


Figura 4.1: Las pseudosuperficies  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  y  $\mathcal{G}_2$ .

(ver [24, 37, 49]).

Dado un grafo  $G$  existe un entero positivo  $n$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  como consecuencia del siguiente resultado, que probaremos posteriormente.

**Teorema 4.1.** *Para todo entero positivo  $p$  existe otro entero positivo  $n$  tal que  $K_p$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ .  $\square$*

A partir de que todo grafo puede ser sumergido en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ , podemos definir otro nuevo invariante topológico de un grafo.

Dado un grafo  $G$  definimos el invariante  $j$  de  $G$ , y lo denotaremos por  $j(G)$ , al mínimo entero positivo  $n$  tal que  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ .

En las secciones siguientes vamos a encontrar el invariante  $j$  del grafo completo  $K_p$  para cualquier entero positivo  $p$ , así como del grafo bipartito completo  $K_{p,q}$  para todos  $p, q$  enteros, positivos y que cumplan que  $p \leq q$ . Para simplificar, denotaremos por  $j(p)$  en lugar de  $j(K_p)$ . De la misma forma, utilizaremos la notación  $j(p, q)$  en lugar de  $j(K_{p,q})$ .

Terminaremos esta sección, al igual que hacíamos en el Capítulo 2, con un resultado previo.

**Lema 4.2.** *Sea  $G$  un grafo que puede ser sumergido en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ . Entonces existe una inmersión de  $G$  en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$  tal que todo punto singular es un vértice o un punto*

interior de una arista uniendo dos puntos singulares. Además, para toda arista de  $G$  existe a lo más un punto interior suyo que es llevado por dicha inmersión en un punto singular de  $S_0 \amalg^n S_0$ .

*Demostración.* Análoga a la demostración del Lema 2.1.  $\square$

## 4.2 El invariante $j$ del grafo completo

En esta sección, procederemos a calcular  $j(p)$  para cualquier  $p$  entero positivo.

El siguiente resultado muestra una cota inferior para  $j(p)$ .

**Proposición 4.3.** *Sea  $p$  un entero positivo,  $p \geq 6$ . Entonces  $j(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 12$  donde  $k$  es el número de vértices de  $K_p$  que caen en puntos singulares de  $S_0 \amalg^{j(p)} S_0$ .*

*Demostración.* Supongamos que la inmersión de  $K_p$  tiene  $k$  vértices en puntos singulares de  $S_0 \amalg^{j(p)} S_0$ . Por lo tanto  $j(p) - k$  puntos singulares son puntos interiores de aristas de  $K_p$ .

Sean  $p_1$  y  $p_2$  el número de vértices de  $K_p$  en cada esfera de  $S_0 \amalg^{j(p)} S_0$  respectivamente, de manera que no son puntos singulares. De esta forma,  $p_1 + k + p_2 = p$ .

Asumiendo que la inmersión es óptima, tenemos en ambas esferas  $p_1 + k$  y  $p_2 + k$  triangulaciones planas respectivamente. Por la fórmula de Euler, una triangulación plana con  $q$  aristas y  $n$  vértices verifica que  $q = 3n - 6$ , y así obtenemos que

$$\binom{p}{2} - (j(p) - k) \leq 3(p_1 + k) - 6 + 3(p_2 + k) - 6$$

( $K_p$  tiene  $\binom{p}{2}$  aristas).

Desarrollando, nos quedaría

$$\frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} - j(p) + k \leq 3p_1 + 3p_2 + 6k - 12$$

De donde

$$j(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} - 3p - 2k + 12$$

A partir de esta desigualdad tenemos que

$$j(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 12. \square$$

Obtenemos inmediatamente el siguiente corolario:

**Corolario 4.4.** *En las condiciones de la Proposición 4.3 se tiene que*  
 $j(p) \geq \max\{\frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2k + 12, k\}$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $j(p) \geq k$  y la desigualdad de la Proposición 4.3, se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 4.5.** *En las condiciones de la Proposición 4.3 se tiene que*  
 $j(p) \geq \frac{p^2 - 11p + 24}{2}$ .

*Demostración.* Observemos que  $k \leq p$ . Aplicando la Proposición 4.3 obtenemos que

$$j(p) \geq \frac{p^2}{2} - \frac{7p}{2} - 2p + 12$$

Y simplificando, nos queda que

$$j(p) \geq \frac{p^2 - 11p + 24}{2}. \square$$

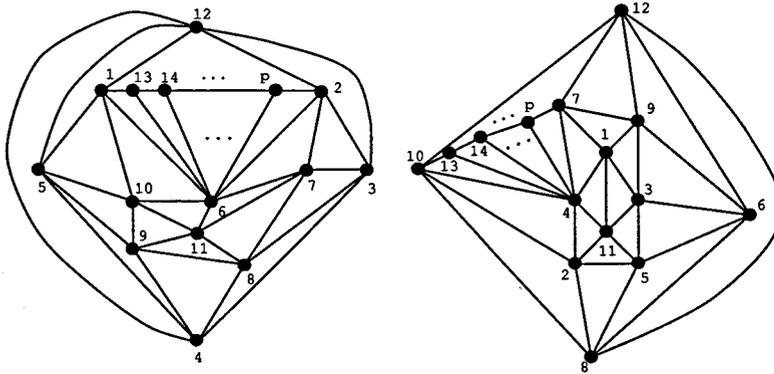


Figura 4.2: Un grafo con  $p$  vértices sumergido en  $S_0 \amalg S_0$ .

Utilizando esta cota inferior, podemos enunciar uno de nuestros resultados fundamentales.

**Teorema 4.6.**  $j(p) = \frac{p^2 - 11p + 24}{2}$  para  $p \geq 12$ .

*Demostración.* Sólo necesitamos probar que  $\frac{p^2 - 11p + 24}{2}$  es una cota superior de  $j(p)$ . Podemos ver en la Figura 4.2 una inmersión de un grafo con  $p$  vértices y  $2(3p - 6)$  aristas en  $S_0 \amalg S_0$ , donde los puntos que tienen el mismo número están identificados.

A partir de esta inmersión, podemos obtener que  $K_p$  se puede sumergir en  $S_0 \amalg_{p + \binom{p}{2} - 2(3p-6)} S_0$  dibujando las aristas restantes a través de los nuevos  $\binom{p}{2} - 2(3p-6)$  puntos singulares. Por tanto,  $s(p) \leq \binom{p}{2} - 2(3p-6)$  y operando se obtiene el resultado deseado.  $\square$

Para finalizar esta sección necesitamos encontrar  $j(p)$  para  $p < 12$ .

Observemos que  $j(p) = 0$  para  $p \leq 4$  ya que  $K_p$  es un grafo plano.

$K_5$  no es plano, pero se puede sumergir en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  dibujando  $K_5 - e$  en una esfera y la arista  $e$  en la otra. De esta forma,  $j(5) = 2$ .

A partir de ahora, sean  $\{1, \dots, p\}$  los vértices de  $K_p$ .

$K_6$  se puede sumergir en  $S_0 \overset{4}{\amalg} S_0$ . La forma de hacerlo es dibujando el  $K_4$  inducido por  $\{1, \dots, 4\}$  en una esfera, con todos sus vértices ocupando puntos singulares y el complementario en la otra esfera. Sin embargo, la inmersión no es posible hacerla en  $S_0 \overset{3}{\amalg} S_0$  porque  $K_6 - K_3$  no es plano. Por lo tanto, deducimos que  $j(6) = 4$ .

$K_7$  se puede sumergir en  $S_0 \overset{5}{\amalg} S_0$ . Vamos a llamar  $K$  al  $K_5$  inducido por  $\{1, \dots, 5\}$ . Podemos dibujar  $K - e$  en una esfera con todos sus vértices en puntos singulares y el complementario en la otra esfera. Pero observemos que esto no es posible hacerlo en  $S_0 \overset{4}{\amalg} S_0$  ya que  $K_7 - K_4$  no es plano. Por todo lo anterior, tenemos que  $j(7) = 5$ .

$K_8$  se puede sumergir en  $S_0 \overset{6}{\amalg} S_0$ . Sea  $K$  el  $K_6$  inducido por  $\{1, \dots, 6\}$ . Podemos dibujar  $(K - \{4, 5\}) \cup \{\{6, 1\}, \{6, 3\}, \{6, 5\}\}$  en una esfera con todos sus vértices en los puntos singulares y el complementario en la otra esfera. Sin embargo  $K_8$  no se puede sumergir en  $S_0 \overset{5}{\amalg} S_0$  como consecuencia de que  $K_8 - (K_5 - e)$  no es plano. De esta forma deducimos que  $j(8) = 6$ .

Para probar nuestro próximo teorema, necesitamos un resultado previo probado en [7].

**Lema 4.7.** *Todo grafo plano con al menos nueve vértices tiene un complementario no plano.*  $\square$

El siguiente teorema muestra el valor de los restantes invariantes  $j$ .

**Teorema 4.8.** *Se cumplen los siguientes enunciados.*

1.  $j(9) = 8$ .

2.  $j(10) = 11$ .

3.  $j(11) = 15$ .

*Demostración:* Podemos ver en la Figura 4.3 una inmersión de  $K_9$ ,  $K_{10}$  y  $K_{11}$  en  $S_0 \amalg^8 S_0$ ,  $S_0 \amalg^{11} S_0$  y  $S_0 \amalg^{15} S_0$  respectivamente, donde los círculos rellenos de negro son vértices en puntos singulares, los vértices con forma de cuadrado no están en puntos singulares y los círculos en blanco son puntos singulares de la pseudosuperficie, pero no son vértices.

A partir de tales inmersiones, tenemos que  $j(9) \leq 8$ ,  $j(10) \leq 11$  and  $j(11) \leq 15$ .

Ahora vamos a probar las desigualdades contrarias.

Utilizando el Corolario 4.4, obtenemos que  $j(9) \geq 7$ . Vamos a suponer que  $j(9) = 7$ . Entonces  $k = 7$ , y de esta forma existe un subgrafo plano de  $K_9$  cuyo complementario es también plano. Sin embargo, esto es una contradicción con el Lema 4.7. Por lo tanto,  $j(9) \geq 8$ .

Haciendo uso una vez mas del Corolario 4.4 obtenemos que  $j(10) \geq 9$ . Si suponemos que  $j(10) = 9$  entonces  $k = 9$  y si  $j(10) = 10$  resulta que  $k \geq 9$ . En ambos casos tenemos que existe un subgrafo plano de  $K_{10}$  o  $K_{10} - e$  con un complementario plano, lo cual es una contradicción con el Lema 4.7.

Por el Corolario 4.4, tenemos que  $j(11) \geq 12$ . Pueden presentarse los siguientes casos:

Si  $j(11) = 12$  ó  $j(11) = 13$  entonces  $k \geq 11$ , y por lo tanto existe un subgrafo plano de  $K_{11}$  con un complementario plano. Pero esto es una contradicción como ya hemos visto.

Si  $j(11) = 14$  entonces  $k \geq 10$ .

- Supongamos que  $k = 11$ . En este caso, existe un subgrafo plano  $G'$  de  $K_{11} - \{e_1, e_2, e_3\}$  cuyo complementario es también plano, donde  $e_i \in$



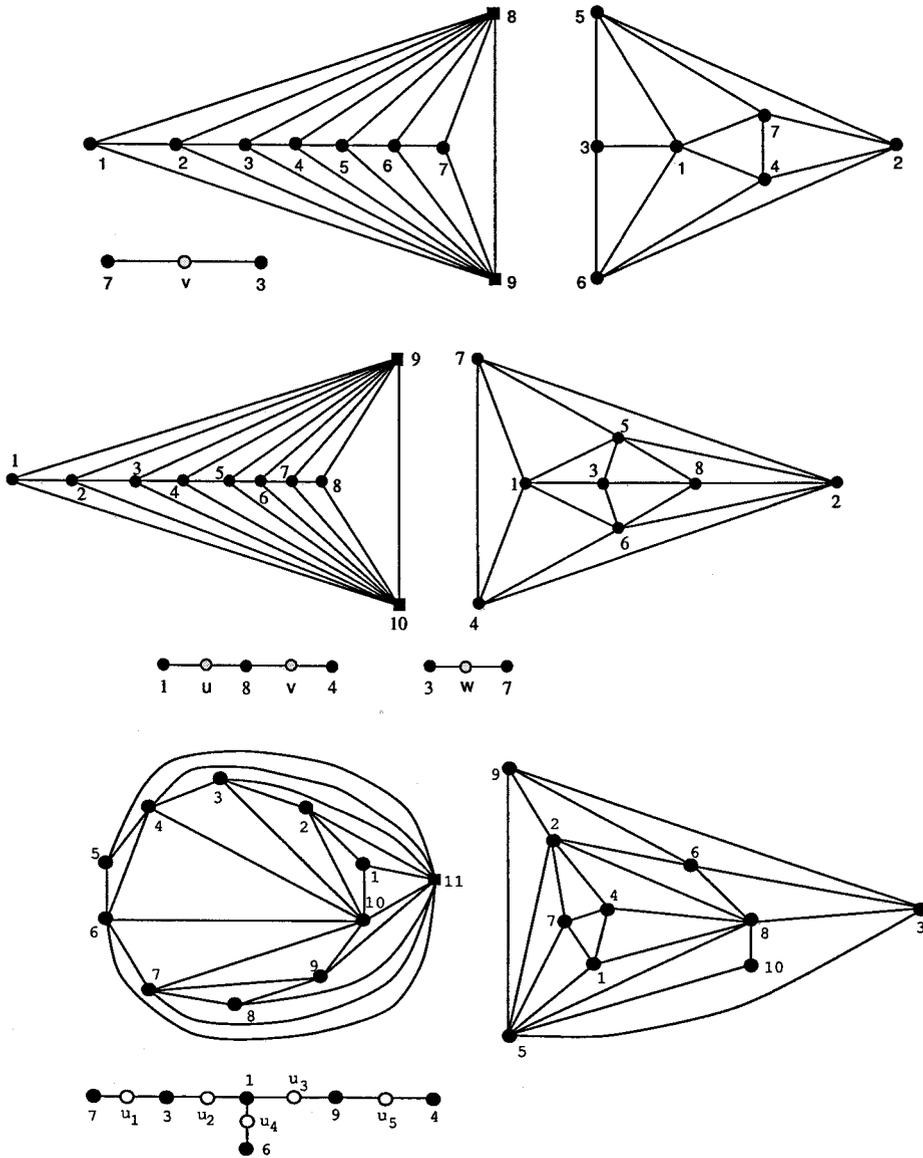


Figura 4.3: Una inmersión de  $K_9$ ,  $K_{10}$  y  $K_{11}$  en  $S_0 \amalg S_0$ ,  $S_0 \amalg S_0$  y  $S_0 \amalg S_0$  respectivamente.

$E(K_{11})$  para  $i = 1, 2, 3$  y podemos suponer que son disjuntas ya que de lo contrario  $K_{11} - \{e_1, e_2, e_3\}$  contiene a  $K_9$  como subgrafo, el cual no puede descomponerse en dos grafos planos. Podemos suponer además que  $G'$  es una triangulación porque en caso contrario, podemos añadir algunas aristas del complementario para obtenerla. En concreto, existen 1249 triangulaciones de 11 vértices cada una de ellas. Al quitarles tres aristas disjuntas de todas las formas posibles se obtienen 1037043 grafos. De ellos hay 468638 no isomorfos y se ha comprobado mediante el uso de un ordenador que ninguno de ellos es plano.

- Finalmente, vamos a suponer que  $k = 10$ . Entonces existe un subgrafo plano de  $K_{11} - \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  cuyo complementario es también plano, donde  $e_i \in E(K_{11})$  para  $i = 1, 2, 3$ . Por el Lema 4.2  $e_i$  no es incidente con  $v$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , siendo  $v$  el vértice que no cae en un punto singular.

Sea  $G$  el subgrafo plano de  $K_{11} - \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  que contiene a  $v$  y cuyo complementario es también plano.  $G - v$  es periplano por el hecho de que  $v$  es adyacente con todos los otros vértices de  $G$ . De la misma forma,  $G - v$  es periplano maximal razonando de la misma forma que antes. Es conocido que existen 82 grafos periplanos maximales de 10 vértices; es decir, existen 82 triangulaciones de polígonos de 10 vértices. Cogemos los complementarios de los 82 grafos, que tienen 28 aristas, y le quitamos 4 aristas de todas las formas posibles. Por cada uno de los 82 grafos generamos  $\binom{28}{4}$  grafos. En total obtenemos, pues,  $\binom{28}{4} \cdot 82 = 1678950$  grafos. Se ha comprobado mediante el uso de un ordenador que ninguno de ellos es plano.

En ambos casos obtenemos una contradicción a partir de que hemos supuesto que  $j(11) = 14$  y por lo tanto  $j(11) \geq 15$  y la demostración está concluida.  $\square$

Con idea de unificar todos los resultados obtenidos en esta sección, insertamos una tabla donde se puede consultar los distintos valores que tiene el invariante  $j$  cuando se trata del grafo completo  $K_p$ .

p	$\leq 4$	5	6	7	8	9	10	11	$\geq 12$
$j(p)$	0	2	4	5	6	8	11	15	$\frac{p^2-11p+24}{2}$

En particular, para algunos valores de  $p$ , tenemos la siguiente tabla:

p	$\leq 4$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$j(p)$	0	2	4	5	6	8	11	15	18	25	33	42	52	63	75	88	102

### 4.3 El invariante $j$ del grafo bipartito completo

En esta sección vamos a dar explícitamente el valor de  $j(K_{p,q})$  con  $p \leq q$ . Para simplificar la notación, pondremos  $j(K_{p,q}) = j(p, q)$ .

Observemos que si  $p \leq 2$  el grafo  $K_{p,q}$  es plano y para este caso tenemos que  $j(p, q) = 0$ .

Procederemos a partir de ahora buscando  $j(p, q)$  para distintos valores de  $p$ .

**Teorema 4.9.**  $j(3, q) = q - 1$  para todo  $q \geq 3$ .

*Demostración.* Vamos a probar la fórmula anterior por doble desigualdad. Llamaremos  $a, b$  y  $c$  a los tres vértices de  $K_{3,q}$  de valencia  $q$  y denotaremos  $1, 2, 3, \dots, q$  a los vértices de  $K_{3,q}$  de valencia 3.

La Figura 4.4 nos muestra una inmersión de  $K_{3,q}$  en  $S_0 \coprod_{q-1} S_0$ , donde los vértices  $a, 1, 2, \dots, q-2$  caen en los puntos singulares de la pseudosuperficie. Por tanto  $j(3, q) \leq q - 1$ .

Demostraremos la otra desigualdad por inducción en  $q$ .

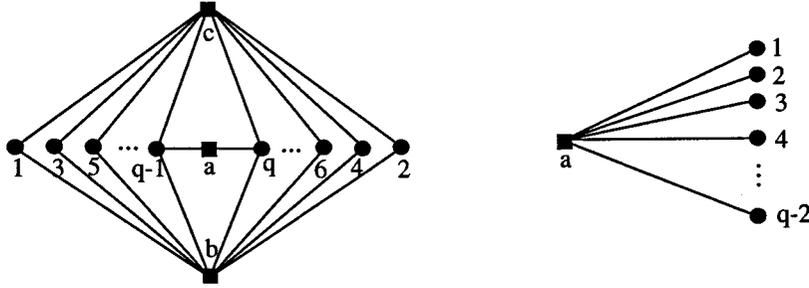


Figura 4.4: Una inmersión de  $K_{3,q}$  en  $S_0 \prod_{q-1} S_0$ .

$j(3, 3) \geq 2$  puesto que  $K_{3,3}$  no es plano.

$j(3, 4) \geq 3$  puesto que si existiera una inmersión de  $K_{3,4}$  en  $S_0 \overset{2}{\prod} S_0$  una de las esferas contendría un  $K_{3,3}$ .

$j(3, 5) \geq 4$  ya que si hubiera una inmersión de  $K_{3,5}$  en  $S_0 \overset{3}{\prod} S_0$  obtendríamos un  $K_{3,3}$  en una de las esferas.

Supongamos ahora que  $j(3, q) \geq q - 1$  y probemos que  $j(3, q + 1) \geq q$ . Para ello, vamos a suponer que  $j(3, q + 1) \leq q - 1$ .

Los  $q - 1$  puntos singulares tienen que ser vértices del grafo, ya que si hubiera una arista que pasara por un punto singular, se tendría que el grafo  $K_{3,q+1} - K_2$  contiene a  $K_{3,q}$ . Por tanto, los  $q - 1$  puntos singulares son vértices del grafo, pero pueden ser los de valencia 3 ó los de valencia  $q + 1$ . Veamos, pues, todos los casos posibles.

Si los tres vértices de valencia  $q + 1$  están ocupando puntos singulares, nos faltarían introducir 5 vértices de valencia 3. Pero de cualquier forma que se haga, siempre obtendremos un  $K_{3,3}$ .

Si hay dos vértices de los de valencia  $q+1$  que están ocupando puntos singulares, nos faltan por introducir uno de valencia  $q+1$  y cuatro de valencia 3. De cualquier manera, siempre tendremos un  $K_{3,4}$ .

También obtendremos siempre un  $K_{3,3}$  en los dos casos que faltan; es decir, si un vértice de los de valencia  $q+1$  está ocupando un punto singular, o bien si no hay ningún vértice de valencia  $q+1$  en los puntos singulares.

Por tanto,  $j(3, q+1) \geq q$ .

De las dos desigualdades obtenemos que  $j(3, q+1) = q$ .  $\square$

**Teorema 4.10.**  $j(4, q) = q$  para todo  $q \geq 4$ .

*Demostración.*  $j(4, q) \leq q$  ya que si descomponemos el grafo  $K_{4,q}$  de la forma  $2K_{2,q}$ , podemos dar una inmersión de  $K_{4,q}$  en  $S_0 \amalg^q S_0$  introduciendo en cada una de las esferas cada uno de los grafos  $K_{2,2}$  y poniendo los  $q$  vértices en los puntos singulares.

Además,  $j(4, q) \geq j(3, q)$  y por tanto  $j(4, q) \geq q-1$ .

Veamos ahora que  $j(4, q) \geq q$ , razonando por inducción en  $q$ .

Vamos a denotar a partir de ahora por  $a, b, c$  y  $d$  a los cuatro vértices de  $K_{4,q}$  de valencia  $q$  y por  $1, 2, \dots, q$  a los  $q$  vértices de  $K_{4,q}$  de valencia 4.

$j(4, 4) \geq 4$  ya que si  $j(4, 4) = 3$  tendríamos una inmersión de  $K_{4,4}$  en  $S_0 \amalg^3 S_0$ . Evidentemente, los tres puntos singulares de la pseudosuperficie tienen que ser vértices del grafo. Se pueden presentar los siguientes casos:

Si los tres puntos singulares son vértices del tipo  $a, b, c$  ó  $d$ , resulta que una de las esferas contiene un  $K_{4,4}$  lo cual no puede ser.

Si los tres puntos singulares están ocupados por dos vértices del tipo  $a, b, c$  ó  $d$  y el otro es del tipo  $1, 2, 3, 4$ , obtenemos que una de las esferas contiene un  $K_{3,3}$ , lo cual es imposible.

Los casos restantes son análogos por simetría.

Supongamos ahora que  $j(4, q-1) \geq q-1$  para  $q \geq 5$ , y vamos a demostrar que  $j(4, q) \geq q$ . Para ello, supongamos que  $j(4, q) \leq q-1$ . Nuevamente tenemos que suponer que los  $q-1$  puntos singulares de la pseudosuperficie son vértices del grafo tal como se razonó previamente. Podemos tener los siguientes casos:

Si los cuatro vértices de valencia  $q$  están ocupando puntos singulares, tenemos que introducir en la pseudosuperficie cinco vértices de los de valencia 4. Pero de cualquier forma siempre vamos a obtener un  $K_{3,3}$ .

Si hay tres vértices de los de valencia  $q$  ocupando puntos singulares, aún nos faltan por introducir en la pseudosuperficie uno de los de valencia  $q$  y cuatro de los de valencia 4. De cualquier manera, siempre vamos a tener un  $K_{3,3}$ .

Si dos vértices de los de valencia  $q$  están en puntos singulares, resulta que tenemos que introducir dos de los de valencia  $q$  y tres de los de valencia 4. De esta forma siempre vamos a obtener un  $K_{3,4}$ .

También va a surgir un  $K_{3,3}$  cuando consideremos que uno de los de valencia  $q$  es un punto singular y tendremos un  $K_{3,4}$  al suponer que ningún vértice de los de valencia  $q$  está ocupando un punto singular.

Por tanto,  $j(4, q) \geq q$ .

De las dos desigualdades probadas tenemos que  $j(4, q) = q$ .  $\square$

Para estudiar los siguientes  $j(p, q)$  necesitamos un resultado previo:

**Proposición 4.11.** Sean  $p$  y  $q$  enteros positivos con  $p \leq q$ . Entonces  $j(p, q) \geq pq - 2p - 2q - r - s + 8$  donde  $r$  y  $s$  es el número de vértices de  $K_p$  y  $K_q$ , respectivamente, que están en puntos singulares.

*Demostración.* Supongamos que tenemos una inmersión de  $K_{p,q}$  en la pseudosu-



perficie  $S_0 \coprod^{j(p,q)} S_0$ , donde  $r$  son los vértices de  $K_p$  que están en puntos singulares,  $s$  son los vértices de  $K_q$  en puntos singulares de la pseudosuperficie y  $k$  es el número de puntos singulares ocupados por aristas del grafo  $K_{p,q}$ . Está claro que  $r+s+k = j(p,q)$

Consideremos el grafo  $G$  definido por  $K_{p,q} - \{k \text{ aristas}\}$ , siendo las  $k$  aristas que están ocupando los puntos singulares. Sean  $G_1$  y  $G_2$  los subgrafos de  $G$  que ocupan cada una de las dos esferas de la pseudosuperficie.

Se tiene que  $V(G_1) + V(G_2) = p + q + r + s$ , ya que los puntos singulares son vértices de  $G_1$  y  $G_2$  simultáneamente.

Además,  $A(G_1) + A(G_2) = pq - (j(p,q) - r - s)$ .

Por ser  $G_1$  y  $G_2$  grafos de contorno cuatro se cumple que

$$2V(G_1) - 4 \geq A(G_1),$$

$$2V(G_2) - 4 \geq A(G_2).$$

Sumando ambas expresiones llegamos a que

$$2(p + q + r + s) - 8 \geq pq - j(p,q) + r + s.$$

Desarrollando  $j(p,q) \geq pq - 2p - 2q - r - s + 8$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de este resultado tenemos el siguiente Corolario:

**Corolario 4.12.** *En las condiciones de la Proposición anterior se tiene*

$$j(p,q) \geq pq - 3p - 3q + 8, \tag{4.1}$$

$$j(p,q) \geq \lceil \frac{pq}{2} - p - q + 4 \rceil. \tag{4.2}$$

*Demostración.* Si en la desigualdad de la Proposición anterior utilizamos que  $r \leq p$  y que  $s \leq q$  obtenemos que  $j(p,q) \geq pq - 3p - 3q + 8$ .

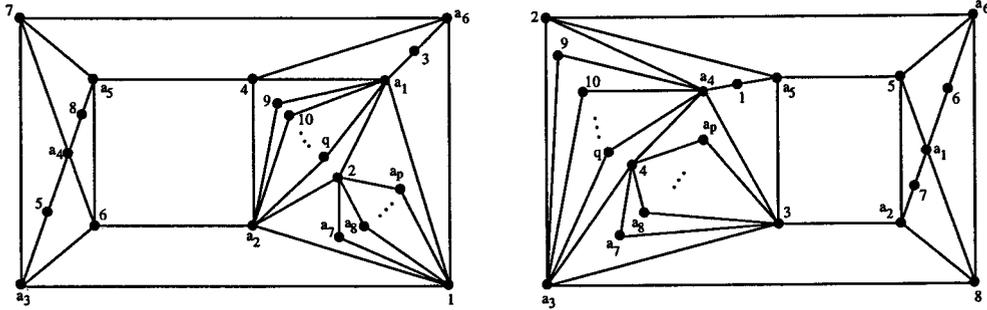


Figura 4.5: Inmersión de un grafo bipartito con  $p + q$  vértices en  $S_0 \amalg^{p+q} S_0$ .

Si en la misma Proposición tenemos en cuenta que  $r + s \leq j(p, q)$  llegamos a que  $j(p, q) \geq \lceil \frac{pq}{2} - p - q + 4 \rceil$ .  $\square$

**Teorema 4.13.** *Se cumplen los siguientes enunciados*

- $j(5, q) = \lceil \frac{3q}{2} - 1 \rceil$  para  $5 \leq q \leq 12$ ,
- $j(5, q) = 2q - 7$  para todo  $q \geq 12$ .

*Demostración.*

- Veamos que  $j(5, q) = \lceil \frac{3q}{2} - 1 \rceil$  cuando  $5 \leq q \leq 12$ .

Para la cota inferior, basta sustituir  $p = 5$  en el Corolario 4.12.

Para la cota superior, lo haremos especificando cada inmersión. En cada una de ellas, los vértices con el mismo nombre están identificados y cada uno ocupa un punto singular.

En la Figura 4.6.a tenemos una inmersión de  $K_{5,6}$  en  $S_0 \amalg^8 S_0$ . Por lo tanto,  $j(5, 6) \leq 8$ .

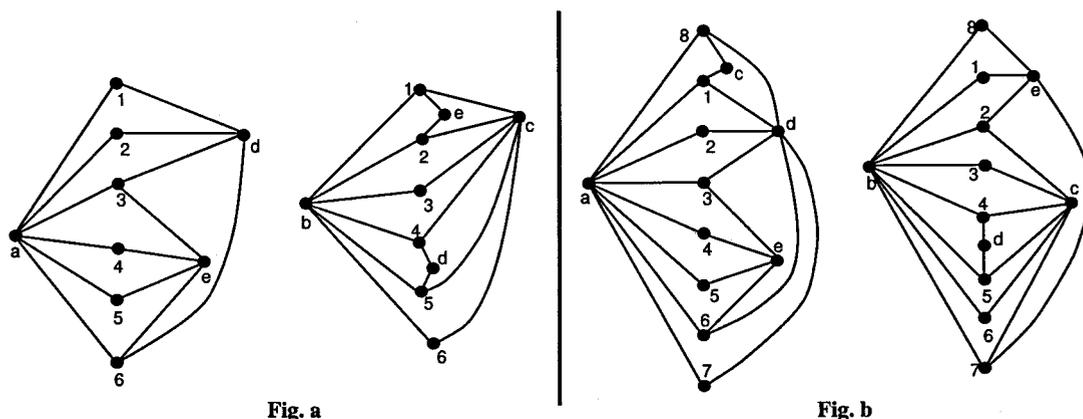


Figura 4.6: Inmersiones de  $K_{5,6}$  y  $K_{5,8}$  en  $S_0 \overset{8}{\amalg} S_0$  y  $S_0 \overset{11}{\amalg} S_0$  respectivamente.

Pero en la misma inmersión de la Figura 4.6.a, si quitamos el vértice 6 ya tenemos el grafo  $K_{5,5}$  sumergido en  $S_0 \overset{7}{\amalg} S_0$ . Se deduce que  $j(5, 5) \leq 7$ .

En la Figura 4.6.b podemos ver una inmersión del grafo  $K_{5,8}$  en la pseudosuperficie  $S_0 \overset{11}{\amalg} S_0$ . Entonces,  $j(5, 8) \leq 11$ .

En la misma Figura 4.6.b, si quitamos el vértice 8 obtenemos el grafo  $K_{5,7}$  sumergido en  $S_0 \overset{10}{\amalg} S_0$ . De aquí  $j(5, 7) \leq 10$ .

Por la Figura 4.7 sabemos que el grafo  $K_{5,10}$  se puede sumergir en la pseudosuperficie  $S_0 \overset{14}{\amalg} S_0$ . Se deduce, por tanto, que  $j(5, 10) \leq 14$ .

Procediendo igual que antes, si en la Figura 4.7 quitamos el vértice 10, obtenemos una inmersión de  $K_{5,9}$  en  $S_0 \overset{13}{\amalg} S_0$ . Por tanto,  $j(5, 9) \leq 13$ .

Si observamos la Figura 4.8, eliminando los vértices  $13, 14, 15, \dots, q$ , vemos una inmersión del grafo  $K_{5,12}$  en la pseudosuperficie  $S_0 \overset{17}{\amalg} S_0$ . Es por tanto evidente que  $j(5, 12) \leq 17$ .

Si en dicha figura eliminamos los vértices  $12, 13, 14, \dots, q$ , tenemos que el grafo  $K_{5,11}$  se puede sumergir en  $S_0 \overset{16}{\amalg} S_0$ . Tenemos entonces que  $j(5, 11) \leq 16$ .

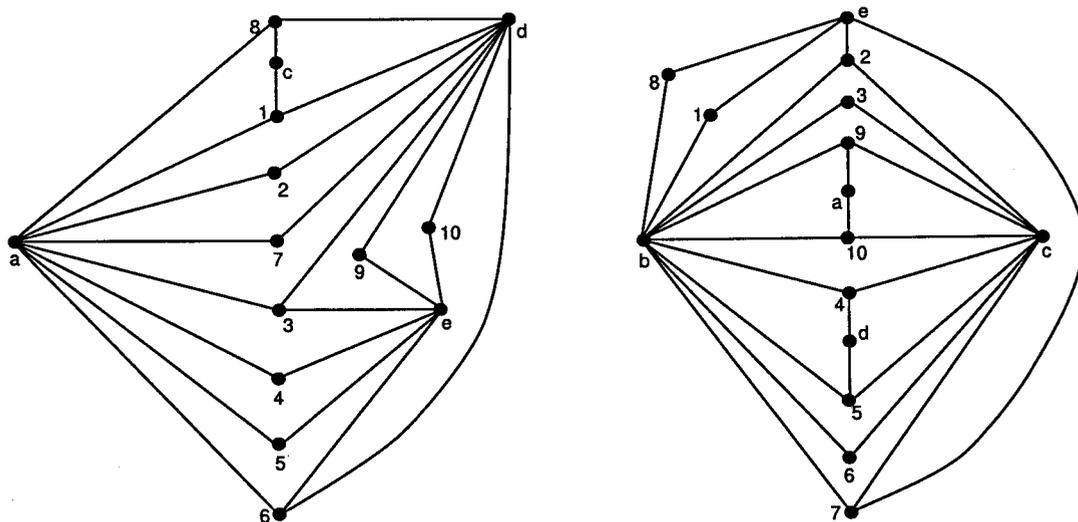


Figura 4.7: Una inmersión de  $K_{5,10}$  en  $S_0 \amalg^{14} S_0$ .

- Veamos ahora que  $j(5, q) = 2q - 7$  cuando  $q \geq 12$ .

La cota inferior se obtiene simplemente sustituyendo  $p = 5$  en el Corolario 4.12.

Para demostrar la cota superior, basta tener en cuenta la inmersión de la Figura 4.8 donde tenemos el grafo  $K_{5,q}$  sumergido en la pseudosuperficie

$S_0 \amalg^{2q-7} S_0$ . Observemos que los puntos singulares son los  $5 + q$  vértices del grafo y los puntos interiores de las  $q - 12$  aristas  $\{b, 13\}, \{b, 14\}, \dots, \{b, q\}$ , representados en blanco en la figura.  $\square$

**Teorema 4.14.** *Se verifican los siguientes enunciados:*

- $j(6, 6) = 10$ ,
- $j(6, 7) = 12$ .

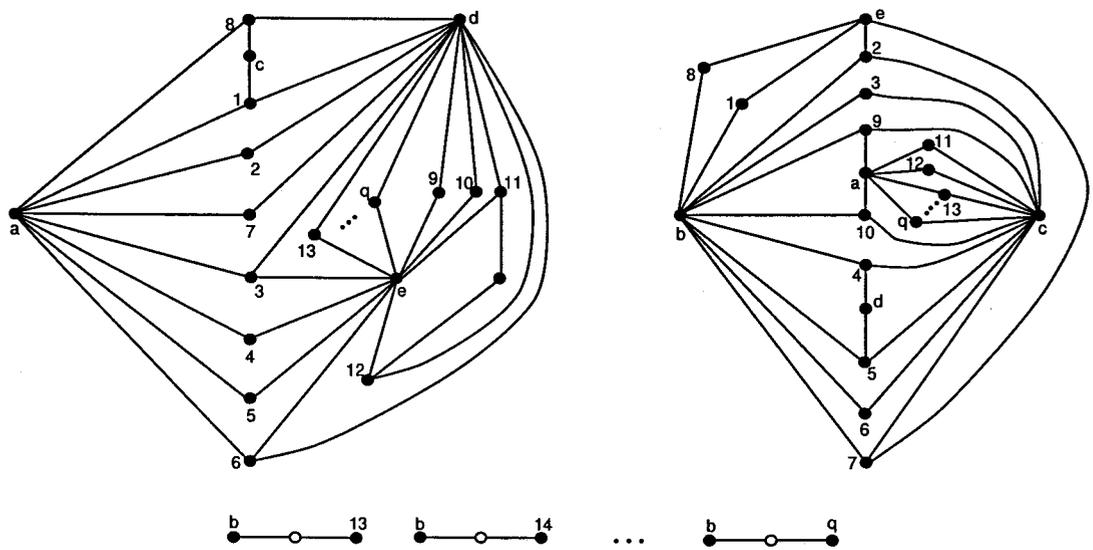


Figura 4.8: Una inmersión de  $K_{5,q}$  en  $S_0 \amalg^{2q-7} S_0$ .

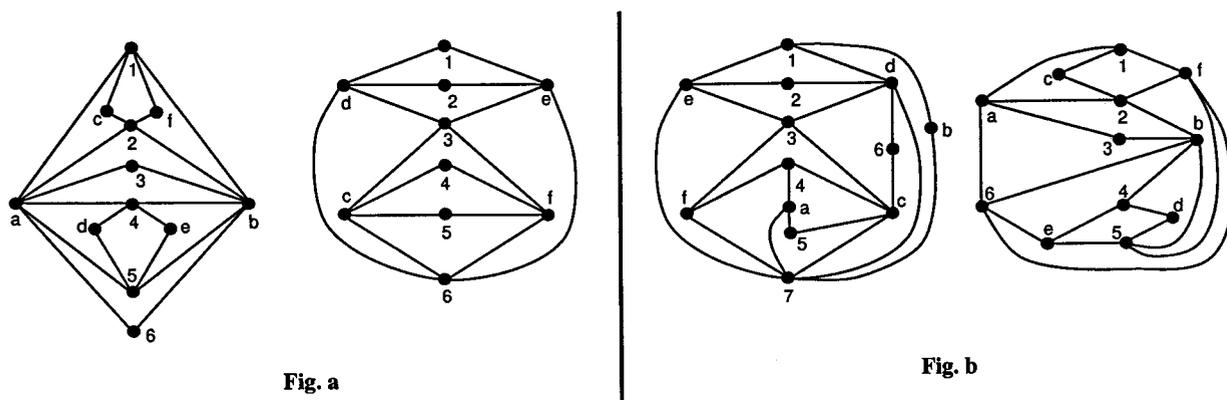


Figura 4.9: Inmersiones de  $K_{6,6}$  y  $K_{6,7}$  en  $S_0 \amalg^{10} S_0$  y  $S_0 \amalg^{12} S_0$  respectivamente.

*Demostración.* Veamos primero que  $j(6, 6) = 10$ .

En primer lugar,  $j(6, 6) \leq 10$  ya que en la Figura 4.9.a podemos ver una inmersión de  $K_{6,6}$  en  $S_0 \amalg^{10} S_0$ , en la cual los vértices identificados con el mismo nombre son puntos singulares.

Por otra parte, si utilizamos el Corolario 4.12 llegamos a que  $j(6, 6) \geq 8$  (utilizando (1.1)) y que  $j(6, 6) \geq 10$  (utilizando (1.2)). Por tanto,  $j(6, 6) \geq 10$ .

Veamos ahora que  $j(6, 7) = 12$ .

Tenemos que  $j(6, 7) \leq 12$  porque en la Figura 4.9.b podemos ver una inmersión de  $K_{6,7}$  en  $S_0 \amalg^{12} S_0$ . Al igual que antes, todos los vértices identificados con el mismo nombre, son puntos singulares.

Además, si hacemos uso del Corolario 4.12 obtenemos que  $j(6, 7) \geq 11$  (utilizando (1.1)) y que  $j(6, 7) \geq 12$  (utilizando (1.2)). Por tanto,  $j(6, 7) \geq 12$ .  $\square$

**Teorema 4.15.** Sean  $p$  y  $q$  dos enteros positivos tales que  $p \geq 6$  y  $q \geq 8$ . Entonces  $j(p, q) = pq - 3p - 3q + 8$ .

*Demostración.* Tenemos que  $j(p, q) \geq pq - 3p - 3q + 8$  por el Corolario 4.12.

Para demostrar la otra desigualdad observemos que en la Figura 4.5 tenemos una inmersión de un grafo bipartito con  $p + q$  vértices y  $4p + 4q - 8$  aristas en  $S_0 \amalg^{p+q} S_0$ , donde los puntos con el mismo número están identificados. En dicha inmersión denotamos por  $a_1, a_2, \dots, a_p$  a los  $p$  vértices y a los  $q$  vértices los llamamos  $1, 2, \dots, q$ .

A partir de esta inmersión podemos obtener que el grafo bipartito completo  $K_{p,q}$  se puede sumergir en la pseudosuperficie  $S_0 \amalg^{p+q+pq-4p-4q+8} S_0 = S_0 \amalg^{pq-4p-4q+8} S_0$ , dibujando las aristas restantes a través de los nuevos  $pq-4p-4q+8$  puntos singulares.  $\square$

De la misma forma que en la sección anterior, recogemos todos los valores obtenidos para el invariante  $j$ , cuando se trata del grafo bipartito completo  $K_{p,q}$ , en la siguiente tabla:

$q \rightarrow$	$\leq 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\geq 12$
$p \leq 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p = 3$			$q - 1$								
$p = 4$			$q$								
$p = 5$				$\lceil \frac{3q}{2} - 1 \rceil$						$2q - 7$	
$p = 6$					10	12	$pq - 3p - 3q + 8$				
$p \geq 7$						$pq - 3p - 3q + 8$					

En particular, para ciertos valores de  $p$  y de  $q$ , tenemos la siguiente tabla:

$q \rightarrow$	$\leq 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p \leq 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p = 3$		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p = 4$			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p = 5$				6	8	9	11	12	14	15	17	19	21	23
$p = 6$					10	12	14	17	20	23	26	29	32	35
$p = 7$						15	19	23	27	31	35	39	43	47
$p = 8$							24	29	34	39	44	49	54	59
$p = 9$								35	41	47	53	59	65	71
$p = 10$									48	55	62	69	76	83

## Capítulo 5

# Relaciones entre invariantes de grafos

Las definiciones de género orientable o no orientable proceden del hecho de que cualquier grafo es sumergible en alguna superficie orientable y no orientable. En los Capítulos 2 y 4 hemos extendido esta definición utilizando familias de pseudosuperficies con la siguiente propiedad: dado un grafo  $G$ , existe una pseudosuperficie de la familia tal que  $G$  se puede sumergir en ella; en concreto hemos utilizado las familias  $\{S_0 \amalg S_0/n \in \mathbb{N}\}$  y  $\{\mathcal{G}_n/n \in \mathbb{N}\}$ . En este capítulo vamos a determinar las relaciones existentes entre estos nuevos invariantes definidos así como las existentes entre ellos y otros invariantes clásicos: el género, el género no orientable, la *escisión* (splitting number), el *cruzamiento* (crossing number), el *grosor* (thickness) y el *exceso* (coarseness).



## 5.1 Introducción

En el Capítulo 4 demostramos que dado un grafo  $G$  existe un entero positivo  $n$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $S_0 \amalg^n S_0$  (Teorema 4.1). A partir de esta propiedad hemos definido el invariante  $j$  de un grafo cualquiera  $G$ , denotado por  $j(G)$ , como el mínimo entero positivo  $n$  tal que  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \amalg^n S_0$ .

Asimismo dado un grafo  $G$  existe un entero positivo  $n$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $\mathcal{G}_n$ , tal como resaltamos en el Capítulo 2. Como consecuencia de ello definimos el invariante  $s$  de cualquier grafo  $G$ ,  $s(G)$ , como el mínimo entero positivo  $m$  tal que  $G$  puede ser sumergido en  $\mathcal{G}_m$ .

En este capítulo vamos a determinar en primer lugar las relaciones que se verifican entre el invariante  $j$  y el invariante  $s$ . En concreto vamos a responder a la siguiente cuestión. Si tenemos una familia de grafos cuyo invariante  $j$  está acotado, ¿Lo está también el invariante  $s$ ? En caso afirmativo, determinar la cota óptima. En este caso la respuesta es afirmativa y si  $G$  es un grafo tal que  $j(G) = j$  entonces  $s(G) \leq j - 1$ . Demostraremos que tal acotación es óptima.

Analizaremos también a la cuestión recíproca que, en este caso, tiene respuesta negativa, tal como probaremos posteriormente. No obstante, si nos restringimos al caso en que  $G$  es un grafo cúbico, obtenemos que si  $s(G) = s$  entonces  $j(G) \leq 2s$ .

En segundo lugar vamos a plantear idénticas cuestiones entre los invariantes  $j$  y  $s$  y algunos invariantes clásicos: el género orientable  $\gamma$ , el no orientable  $\tilde{\gamma}$ , la *escisión*  $\sigma$ , el *cruzamiento*  $\nu$ , el *grosor*  $\theta$  y el *exceso*  $\xi$ .

El grosor de un grafo  $G$ , denotado por  $\theta(G)$ , es el menor número de subgrafos planos de  $G$  cuya unión es  $G$ . Evidentemente, el grosor de un grafo es uno si y sólo si el grafo es plano.

Dado un grafo  $G$ , la escisión de  $G$ , denotada por  $\sigma(G)$ , es el menor número  $k$  tal que  $G$  se puede obtener a partir de un grafo plano  $G'$  mediante identificaciones de

$k$  vértices (de dos vértices cada una). Claramente,  $\sigma(G) = 0$  si y sólo si  $G$  es plano.

El cruzamiento de un grafo, denotado  $\nu(G)$ , es el menor número  $k$  tal que  $G$  puede ser dibujado en el plano con un máximo de  $k$  cruces de aristas. Es obvio que el cruzamiento de un grafo es cero si y solamente si el grafo es plano.

El exceso de un grafo  $G$ , denotado por  $\xi(G)$ , es el mayor número de subgrafos no planos disjuntos por aristas contenido en  $G$ .

## 5.2 Relación entre los invariantes $j$ y $s$

Nuestro objetivo es determinar si podemos acotar el valor del invariante  $s$  de un grafo en función del invariante  $j$  o viceversa y, en caso de que esto sea posible, obtener la cota óptima. Vamos a concretar el problema en dos cuestiones que resolveremos a lo largo de esta sección.

Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{A}_n = \{G/j(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $s(G) \leq m(n)$ .

El siguiente resultado nos va a permitir responder de forma afirmativa a la cuestión anterior.

**Teorema 5.1.** *Sea  $G$  un grafo no plano. Entonces se verifica que  $s(G) + 1 \leq j(G)$ .*

*Demostración.* Consideremos la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$ . Ya sabemos que esta pseudosuperficie está formada por la suma conexa de  $n$  toros estrangulados, pero también la podemos considerar como se muestra en la Figura 5.1.

Mediante un estrangulamiento conveniente tenemos que  $\mathcal{G}_n$  se transforma en la pseudosuperficie  $S_0 \coprod^{n+1} S_0$ . Por tanto, si un grafo  $G$  admite una inmersión en

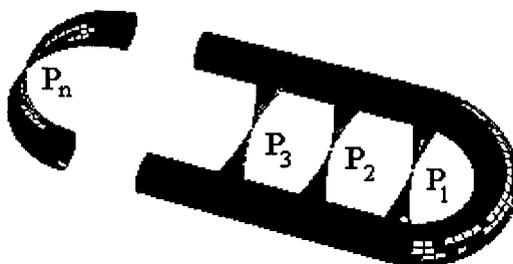


Figura 5.1: Una pseudosuperficie homeomorfa a  $\mathcal{G}_n$ .

$S_0 \coprod^{n+1} S_0$  también la admite en  $\mathcal{G}_n$ .

Sea  $G$  un grafo no plano. Entonces  $j(G) \geq 2$ . Si  $j(G) = n+1$  entonces  $s(G) \leq n$  y por tanto se tiene que  $s(G) + 1 \leq j(G)$ .  $\square$

Por tanto la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa en el caso de grafos no planos, y la función buscada es  $m(n) = n - 1$ . En el caso de grafos planos la solución del problema es trivial puesto que ambos invariantes son nulos.

Queremos ahora determinar si la cota que nos da el Teorema 5.1 es óptima. Es decir, siguiendo con la formulación inicial del problema, nos preguntamos si existe otra función  $m_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , estrictamente menor que  $m$  a partir de un cierto natural y tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $s(G) \leq m_1(n)$ .

Consideremos el grafo obtenido de identificar  $p$  grafos  $K_5$  en un punto, que denotaremos  $\bigvee_{i=1}^p K_5$ . Vamos a determinar  $s(\bigvee_{i=1}^p K_5)$  y  $j(\bigvee_{i=1}^p K_5)$ .

**Teorema 5.2.** *Se verifican los siguientes enunciados.*

1.  $s(\bigvee_{i=1}^p K_5) = p$ .

$$2. j\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) = p + 1.$$

*Demostración.* Como el género orientable de un grafo es la suma del género orientable de sus bloques ([6]) tenemos que  $\gamma\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) = p$ , por lo que  $s\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) \geq p$  ya que  $\mathcal{G}_p$  se puede obtener de una esfera con  $p$  asas estrangulando un paralelo en cada una de ellas.

Por otra parte, en  $K_5$ , un vértice cualquiera puede cortarse en dos de forma que el grafo resultante sea plano. Efectuando esta operación en cada uno de los  $p$   $K_5$  en un vértice que no sea el que comparten, se obtiene un grafo plano tal que al identificar los  $p$  cortes hechos induce una inmersión de  $\bigvee_{i=1}^p K_5$  en  $\mathcal{G}_p$  (véase Figura 5.2.a, donde los vértices con el mismo nombre están identificados), por lo que  $s\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) \leq p$ . De ambas  $s\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) = p$ .

Probemos ahora el segundo enunciado. Por el Teorema 5.1 y puesto que hemos probado que  $s\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) = p$  se tiene que  $j\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) \geq s\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) + 1 = p + 1$ .

La otra desigualdad se tiene a partir de la inmersión de  $\bigvee_{i=1}^p K_5$  en  $S_0 \prod_{i=1}^{p+1} S_0$  que nos muestra la Figura 5.2.b, donde los vértices  $1, 2, \dots, p, p + 1$  ocupan puntos singulares, las aristas punteadas están en una célula y el resto del grafo en la otra.

La inmersión anterior nos demuestra que  $j\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) \leq p + 1$ , y, de ambas desigualdades obtenemos  $j\left(\bigvee_{i=1}^p K_5\right) = p + 1. \square$



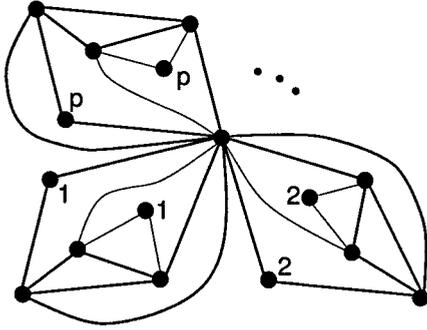


Fig. a

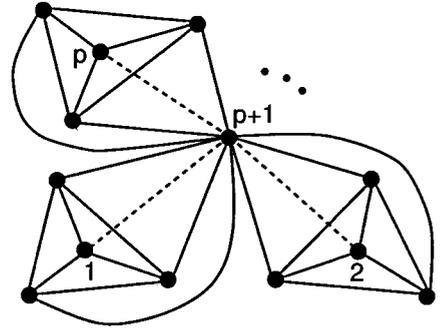


Fig. b

Figura 5.2: Inmersiones de  $\bigvee_{i=1}^p K_5$  en  $\mathcal{G}_p$  y  $S_0 \amalg \amalg_{i=1}^{p+1} S_0$ .

Por tanto, para esta familia de grafos se cumple la igualdad; es decir,  $s(\bigvee_{i=1}^p K_5) + 1 = j(\bigvee_{i=1}^p K_5)$ . Como consecuencia, la cota anterior es óptima.

Vamos a plantear ahora el problema recíproco del que acabamos de tratar. Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{B}_n = \{G/s(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos ahora si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{B}_n$  se tiene que  $j(G) \leq m(n)$ .

La respuesta a la pregunta anterior es negativa en general. Consideremos la familia de grafos  $\{V_k/k \in \mathbb{N}\}$ . El grafo  $V_k$ , que llamaremos *grafo-ventilador* de orden  $k$ , puede verse en la Figura 5.3.a. Cortando el vértice  $\alpha$  se obtiene un grafo plano, por lo que  $V_k$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  (véase Figura 5.3.b). Por tanto,  $s(V_k) \leq 1$ .

Sin embargo  $j(V_k)$  crece a medida que lo hace  $k$ , según nos muestra el siguiente resultado.

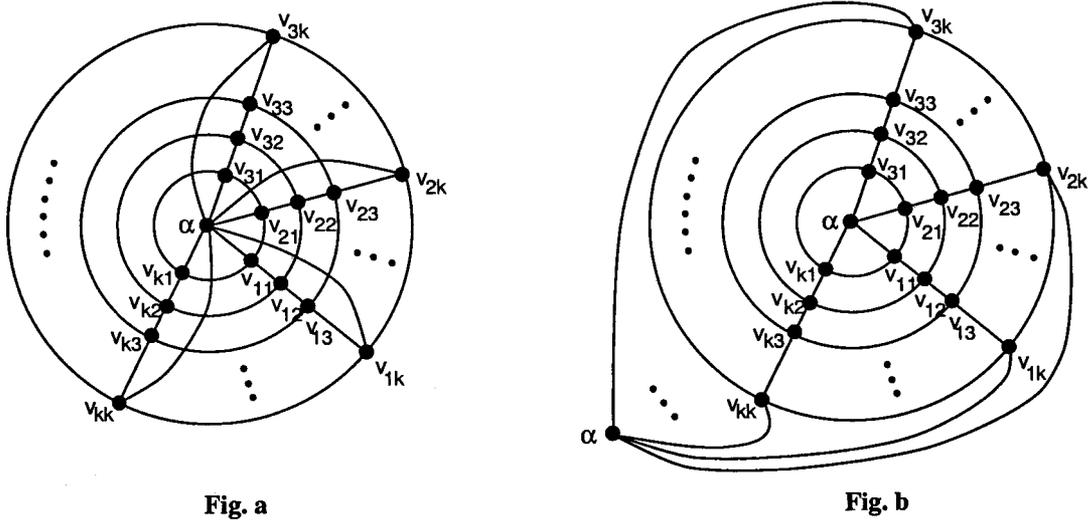


Figura 5.3: El grafo  $V_k$  y una inmersión suya en  $\mathcal{G}_1$ .

**Proposición 5.3.**  $j(V_{n+2}) \geq n + 2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Veamos en primer lugar que el resultado es cierto para  $n = 1$ . Supongamos que  $j(V_3) = 2$ . Puesto que  $V_3$  es 3-conexo, existe una arista  $x \in A(V_3)$  tal que  $V_3 - x$  es plano.

Por la simetría del grafo, podemos limitarnos a las aristas de tipo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ó  $d$  que nos muestra la Figura 5.4. Si  $x$  es una arista de uno cualquiera de los tipos anteriores, se puede comprobar que el grafo  $V_3 - x$  contiene a una subdivisión de  $K_5$  en todos los casos. Por tanto  $V_k - x$  no es plano, lo que contradice nuestra hipótesis; luego  $j(V_3) \geq 3$ .

Supongamos ahora por hipótesis de inducción que  $j(V_{n+2}) \geq n + 2$ . Supongamos que  $j(V_{n+3}) = n + 2$ . Consideremos una inmersión de  $V_{n+3}$  en  $S_0 \prod_{n+2} S_0$ , en la que podemos suponer que algún punto singular es un vértice distinto de  $\alpha$ . Borrando un vértice que ocupe un punto singular de la pseudosuperficie que no sea  $\alpha$ , inducimos

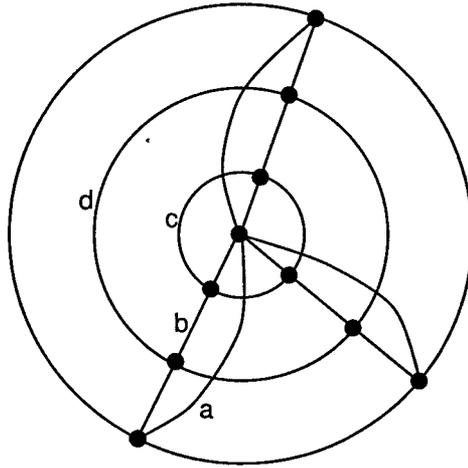


Figura 5.4: Tipos de aristas del grafo  $V_3$ .

una inmersión de  $V_{n+2}$  en  $S_0 \amalg^{n+1} S_0$ , lo que contradice nuestra hipótesis de partida. Por tanto  $j(V_{n+3}) \geq n + 3$ .  $\square$

No obstante, si a la formulación del problema anterior añadimos la restricción de que el grafo  $G$  sea cúbico podemos encontrar una función  $m$  que satisface las condiciones de dicho problema. Para ello, necesitamos el siguiente lema:

**Lema 5.4.** *Si  $G$  es un grafo cúbico se tiene que  $s(G) \leq n$  si y sólo si existen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  aristas de  $G$  tal que  $G - \{x_1, \dots, x_n\}$  es plano.*

*Demostración.*

Suficiente: Como  $G - \{x_1, \dots, x_n\}$  es plano basta añadir  $n$  toros estrangulados para que el grafo  $G$  se pueda sumergir en  $\mathcal{G}_n$  y ya tenemos que  $s(G) \leq n$ .

Necesaria: Sea  $s(G) = s \leq n$ . El grafo inducido de cortar los  $s$  puntos singulares en la pseudosuperficie es plano. Este grafo contiene como subgrafo al grafo construido de la siguiente forma: borramos cada arista de  $G$  que pasa por un punto singular;

por ser  $G$  cúbico, del corte de cada vértice que está en un punto singular, resulta un nuevo vértice de valencia 1. Borraremos la arista incidente con dicho vértice.

Sean  $x_1, \dots, x_s$  las aristas borradas. El grafo que hemos construido es por tanto  $G - \{x_1, \dots, x_s\}$ , con  $s \leq n$ , que es plano por ser subgrafo de otro grafo plano.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar la siguiente relación:

**Teorema 5.5.** *Si  $G$  es un grafo cúbico, se tiene que  $j(G) \leq 2s(G)$ .*

*Demostración.* Gracias al Lema 5.4, podemos construir una inmersión del grafo cúbico  $G$  en la pseudosuperficie  $S_0 \amalg^{2n} S_0$ , dibujando  $G - \{x_1, \dots, x_n\}$  en una de las esferas y pasando las  $n$  aristas que faltan por puntos singulares.

De esta forma ya tenemos que  $j(G) \leq 2s(G)$ .  $\square$

Como consecuencia del Teorema 5.5, una función que satisface las condiciones exigidas en el problema anterior es  $m(n) = 2n$ .

En [17] los autores probaron que el problema que tiene como datos de entrada un grafo cúbico  $G = (V, A)$  y un entero positivo  $K \leq \#A$  y que decide si el grafo  $G$  puede transformarse en un grafo plano con, a lo más,  $K$  cortes de vértices en dos, es NP-completo.

Otra consecuencia del Teorema 5.5 y del Lema 5.4 es el siguiente resultado, que se obtiene de forma inmediata.

**Teorema 5.6.** *El problema que tiene como datos de entrada un grafo cúbico  $G = (V, A)$  y un entero positivo  $K \leq \#A$  y que decide si  $s(G) \leq K$  es NP-completo.  $\square$*

### 5.3 Relación entre $s$ y el género orientable

En esta sección vamos a determinar si podemos acotar el valor del invariante  $s$  de un grafo en función del género orientable del mismo o viceversa y, en caso de que esto sea posible, obtener la cota óptima. Vamos a concretar el problema en dos cuestiones que resolveremos a lo largo de esta sección.

Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{A}_n = \{G/s(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\gamma(G) \leq m(n)$ .

El siguiente resultado nos va a permitir responder de forma afirmativa a la cuestión anterior.

**Teorema 5.7.** *Sea  $G$  un grafo no plano. Entonces se verifica que  $\gamma(G) \leq s(G)$ .*

*Demostración.* Puesto que la pseudosuperficie  $\mathcal{G}_n$  se obtiene a partir de la suma conexa de  $n$  toros estrangulados, toda inmersión de un grafo en  $\mathcal{G}_n$  induce otra en  $\mathbb{T}_n$ , es decir, en la suma conexa de  $n$  toros. Por tanto se tiene que  $\gamma(G) \leq s(G)$ .  $\square$

Por tanto, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa y una función en las condiciones del enunciado del problema es  $m(n) = n$ .

Además, la cota que nos da el Teorema 5.7 es óptima. Es decir, siguiendo con la formulación inicial del problema, no existe otra función  $m_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , estrictamente menor que  $m$  a partir de un cierto natural y tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\gamma(G) \leq m_1(n)$ .

Consideremos de nuevo el grafo  $\bigvee_{i=1}^p K_5$ . Sabemos que  $s(\bigvee_{i=1}^p K_5) = p$  por el Teorema 5.2 y puesto que el género orientable de un grafo es la suma del género orientable de sus bloques ([6]) tenemos que  $\gamma(\bigvee_{i=1}^p K_5) = p$ . Por tanto, para esta familia de grafos se da la igualdad entre  $\gamma$  y  $s$ .

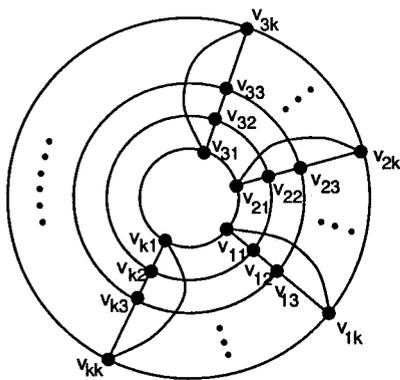


Fig. a

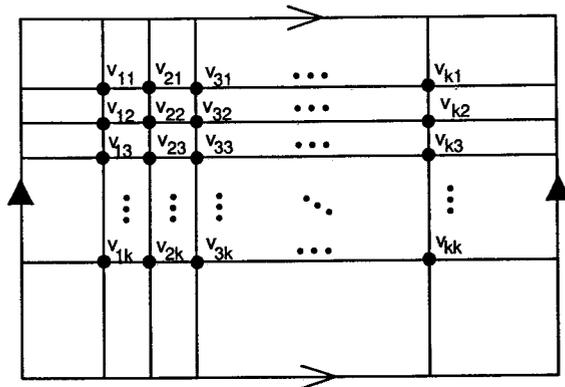


Fig. b

Figura 5.5: El grafo  $A_k$  y una inmersión suya en  $\mathbb{T}$ .

Vamos a plantear ahora el problema recíproco del que acabamos de tratar. Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{B}_n = \{G/\gamma(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos ahora si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{B}_n$  se tiene que  $s(G) \leq m(n)$ .

La respuesta a la pregunta anterior es negativa en general. Consideremos la familia de grafos  $\{A_k/k \in \mathbb{N}\}$ . El grafo  $A_k$ , que llamaremos *grafo-anular* de orden  $k$ , puede verse en la Figura 5.5.a. El grafo  $A_k$  admite una inmersión en  $\mathbb{T}$ , tal como puede verse en la Figura 5.5.b, por lo que  $\gamma(A_k) = 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Sin embargo  $s(A_k)$  crece a medida que lo hace  $k$ , según nos muestra el siguiente resultado.

**Proposición 5.8.**  $s(A_{n+3}) \geq n + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Veamos en primer lugar que el resultado es cierto para  $n = 1$ . Supongamos que  $s(A_4) = 1$ . Entonces podemos cortar un vértice de  $A_4$  en dos de tal forma que el grafo resultante es plano.

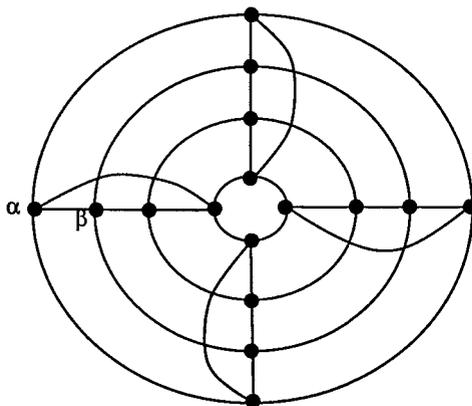


Figura 5.6: Tipos de vértices del grafo  $A_4$ .

Por la simetría del grafo, podemos limitarnos a los vértices de tipo  $\alpha$  o  $\beta$ , que nos muestra la Figura 5.6. Tanto el vértice  $\alpha$  como el  $\beta$  pueden cortarse en dos vértices de valencia 1 y 3 respectivamente o bien en dos vértices de valencia 2. Puede comprobarse que en todos los casos el grafo resultante contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$ , por lo que no es plano y llegamos a contradicción con la hipótesis de partida.

Supongamos ahora por hipótesis de inducción que  $s(A_{n+3}) \geq n+1$ . Supongamos que  $s(A_{n+4}) = n+1$ . Consideremos una inmersión de  $A_{n+4}$  en  $\mathcal{G}_{n+1}$ . Borrando un vértice que ocupe un punto singular de la pseudosuperficie inducimos una inmersión de  $A_{n+3}$  en  $\mathcal{G}_n$ , lo que contradice nuestra hipótesis de partida. Por tanto  $S(A_{n+4}) \geq n+2$ .  $\square$

## 5.4 Relación entre $s$ y el género no orientable

Vamos a determinar en esta sección si podemos acotar el valor del invariante  $s$  de un grafo en función del género no orientable del mismo. Vamos a concretar el problema en los mismos términos que en las secciones precedentes.

Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{A}_n = \{G/s(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\tilde{\gamma}(G) \leq m(n)$ .

El género orientable y el no orientable de un grafo están relacionados mediante la siguiente desigualdad:  $\tilde{\gamma} \leq 2\gamma + 1$ . Como consecuencia de la misma y del Teorema 5.7 se obtiene que  $\tilde{\gamma}(G) \leq 2s(G) + 1$ , por lo que podemos responder de forma afirmativa a la cuestión anterior, siendo  $m(n) = 2n + 1$  una función en las condiciones del problema anterior. No obstante esta función es mejorable a partir del siguiente resultado.

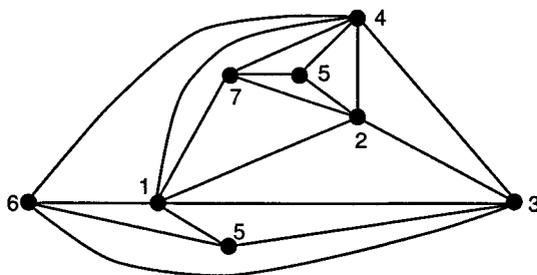
**Teorema 5.9.** *Sea  $G$  un grafo no plano. Entonces se verifica que  $\tilde{\gamma}(G) \leq 2s(G)$ .*

*Demostración.* El toro estrangulado  $\mathcal{G}_1$  puede obtenerse estrangulando un ciclo esencial en la botella de Klein que, como sabemos, tiene género no orientable 2. Por tanto una inmersión de un grafo en  $\mathcal{G}_n$  induce otra en la suma conexas de  $n$  botellas de Klein, que es una superficie no orientable de género  $2n$ .  $\square$

Por tanto la función  $m_1(n) = 2n$  verifica las condiciones del problema anterior y mejora a la función  $m$  obtenida anteriormente (es estrictamente menor). Además la función  $m_1$  es óptima, es decir, no existe otra función  $m_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , estrictamente menor que  $m_1$  a partir de un cierto natural y tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\tilde{\gamma}(G) \leq m_2(n)$ .

Para ver esto, consideremos el grafo  $K_7 - C_4$ . Este grafo admite una inmersión en  $\mathcal{G}_1$ , tal como puede verse en la Figura 5.7, la cual induce otra inmersión de este mismo grafo en la botella de Klein. Sin embargo  $K_7 - C_4$  no admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  al contener a  $D_6$ , uno de los 35 menores prohibidos para el plano proyectivo [2, 3, 21]. Por tanto  $s(K_7 - C_4) = 1$  y  $\tilde{\gamma}(K_7 - C_4) = 2$ .

Vamos a definir el grafo  $H_p = \bigcup_{i=1}^p (K_7 - C_4)$ . A partir de la inmersión de  $K_7 - C_4$  en  $\mathcal{G}_1$  que vemos en la Figura 5.7 podemos construir de forma inmediata otra de  $H_p$  en  $\mathcal{G}_p$ , por lo que  $s(H_p) \leq p$ . Asimismo  $K_7 - C_4$  es un subgrafo de  $K_7$  y  $\gamma(K_7) = 1$

Figura 5.7: Inmersión de  $K_7 - C_4$  en  $\mathcal{G}_1$ .

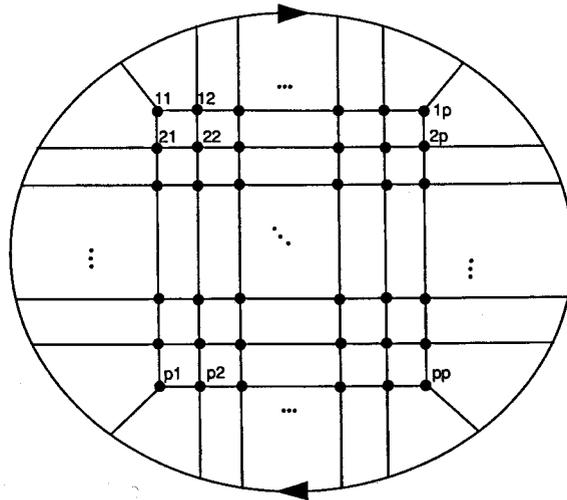
[24], por lo que  $\gamma(H_p) = p$  [6] con lo que  $s(H_p) \geq p$  (por el Teorema 5.7). De ambas desigualdades  $s(H_p) = p$ .

Por otra parte, aplicando la fórmula de Stahl y Beineke [42] que nos da el género no orientable de un grafo en función de el de sus bloques, tenemos que  $\tilde{\gamma}(H_p) = 2p$ . Por tanto  $s(H_p) = 2\tilde{\gamma}(H_p)$ .

Vamos a plantear ahora el problema recíproco del que acabamos de tratar. Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{B}_n = \{G/\tilde{\gamma}(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos ahora si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{B}_n$  se tiene que  $s(G) \leq m(n)$ .

La respuesta a la pregunta anterior es negativa en general puesto que ya lo era para el género orientable. En [5] los autores observan que  $\gamma(G)$  no está acotado en función de  $\tilde{\gamma}(G)$ . De hecho, consideremos el grafo  $G_p$  que nos muestra la Figura 5.8; Thomassen demuestra en [47] que  $\gamma(G_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$  mientras que  $\tilde{\gamma}(G_p) = 1$ , para todo  $p \geq 1$ , ya que la Figura 5.8 nos muestra una inmersión del grafo  $G_p$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Como por el Teorema 5.7 se tiene que  $\gamma(G_p) \leq s(G_p)$  entonces  $s(G_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$  mientras que  $\tilde{\gamma}(G_p) = 1$ .

Figura 5.8: Inmersión de  $G_p$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

## 5.5 Relación entre los invariantes $s$ y $\sigma$

El invariante  $\sigma(G)$ , denominado escisión del grafo  $G$  y que ha sido definido en la introducción de este Capítulo, parece, en principio, guardar una estrecha relación con el invariante  $s$ ; de hecho, ambos valores coinciden cuando  $G$  es un grafo cúbico según veremos posteriormente.

En esta sección vamos a determinar si podemos acotar el valor del invariante  $s$  de un grafo en función de la escisión del mismo o viceversa y, en caso de que esto sea posible, obtener la cota óptima. Como antes, vamos a concretar el problema en dos cuestiones que resolveremos a lo largo de esta sección.

Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{A}_n = \{G/s(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\sigma(G) \leq m(n)$ .

El siguiente resultado nos va a permitir responder de forma afirmativa a la



cuestión anterior.

**Proposición 5.10.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces se verifica que  $\sigma(G) \leq s(G)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $s(G) = s$  y supongamos que  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{G}_s$  en la que  $k$  puntos singulares son ocupados por vértices y  $s - k$  puntos singulares son ocupados por aristas. Por el Lema 2.1 los extremos de estas aristas han de ocupar puntos singulares. Sea  $G_1$  el grafo inducido por el corte de los  $s$  puntos singulares en la superficie (subdividimos las aristas que pasan por puntos singulares para que resulte un grafo). Entonces  $G_1$  es plano.

Efectuemos ahora en  $G$  la siguiente secuencia de cortes: cada vértice que ocupaba un punto singular en la inmersión anterior es cortado de la misma forma descrita antes. De cada arista que pasaba por un punto singular cortamos un extremo de tal forma que el nuevo extremo de la arista resultante del corte tenga valencia 1. Sea  $G_2$  el grafo resultante de esta secuencia de cortes. Por construcción  $G_2$  es  $G_1$  menos algunas hojas, con lo que  $G_2$  también es plano. Como realizando  $s$  cortes de vértices en  $G$  hemos obtenido un grafo plano, se tiene que  $\sigma(G) \leq s(G)$ .  $\square$

Por tanto, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa y una función en las condiciones del enunciado del problema es  $m(n) = n$ .

Además, la cota que nos da la Proposición 5.10 es óptima. Es decir, siguiendo con la formulación inicial del problema, no existe otra función  $m_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , estrictamente menor que  $m$  a partir de un cierto natural y tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $\sigma(G) \leq m_1(n)$ .

Consideremos el grafo  $\bigcup_{i=1}^p K_5$ . Veamos que  $s(\bigcup_{i=1}^p K_5) = p$ . De forma análoga a la que nos muestra la Figura 5.2.a podemos dar una inmersión de  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  en  $\mathcal{G}_p$ , con lo que  $s(\bigcup_{i=1}^p K_5) \leq p$ . Por otra parte, sumando los géneros de sus bloques ([6]) tenemos

que  $\gamma(\bigcup_{i=1}^p K_5) = p$  con lo que aplicando el Teorema 5.7 se tiene que  $s(\bigcup_{i=1}^p K_5) \geq p$ .

De ambas desigualdades se deduce que  $s(\bigcup_{i=1}^p K_5) = p$ .

Por la Proposición 5.10  $\sigma(\bigcup_{i=1}^p K_5) \leq p$ . Por otra parte, para obtener un grafo plano a partir de una secuencia de cortes en  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  hay que realizar al menos un corte en cada  $K_5$ , con lo que  $\sigma(\bigcup_{i=1}^p K_5) \geq p$ . De ambas consideraciones tenemos que  $\sigma(\bigcup_{i=1}^p K_5) = p$ . Tenemos, pues, que  $s(\bigcup_{i=1}^p K_5) = \sigma(\bigcup_{i=1}^p K_5)$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

Otro resultado que nos relaciona  $s$  con la escisión es el siguiente.

**Teorema 5.11.** *Sea  $G$  un grafo.  $s(G) = 1$  si y sólo si  $\sigma(G) = 1$ .*

*Demostración.* Si  $s(G) = 1$  entonces cortando un vértice se obtiene un grafo plano, luego  $\sigma(G) \leq 1$ , pero  $G$  no puede ser plano (e. o. c.  $s(G) = 0$ ), con lo que  $\sigma(G) \geq 1$ .

Razonamos de forma análoga si la hipótesis es  $\sigma(G) = 1$ .  $\square$

Vamos a plantear ahora el problema recíproco del que acabamos de tratar. Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{B}_n = \{G/\sigma(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos ahora si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{B}_n$  se tiene que  $s(G) \leq m(n)$ .

La respuesta a la pregunta anterior es negativa para  $n \geq 2$ . Consideremos la familia de grafos  $\{B_k/k \in \mathbb{N}\}$ . El grafo  $B_k$  puede verse en la Figura 5.9, donde vértices con el mismo nombre están identificados. A partir del grafo  $B_k$  puede obtenerse un grafo plano con sólo dos cortes del vértice  $\alpha$  tal como vemos en la misma

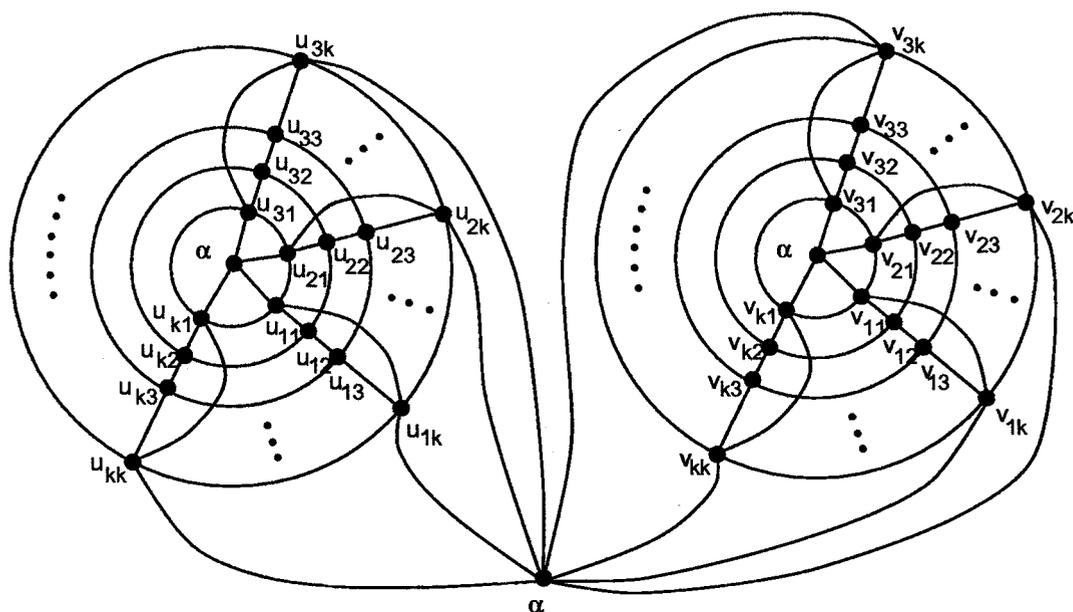


Figura 5.9: El grafo  $B_k$  y un 2-corte suyo plano.

Figura 5.9, con lo que  $\sigma(B_k) \leq 2$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De hecho  $\sigma(B_k) = 2$  ya que, a partir de la Proposición 5.12 se tiene que  $s(B_k) \geq 2$ , luego, por el Teorema 5.11,  $\sigma(B_k) \geq 2$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Sin embargo  $s(B_k)$  crece a medida que lo hace  $k$ , según nos muestra el siguiente resultado.

**Proposición 5.12.**  $s(B_{n+3}) \geq n + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Veamos primero que el teorema se verifica para  $n = 1$ . Supongamos que  $s(B_4) = 1$ . Entonces efectuando un corte en algún vértice de  $B_4$  obtenemos un grafo plano. Nombraremos los vértices según se muestra en la Figura 5.9 haciendo  $k = 4$ .

Si cortamos algún  $v_{ij}$ , entonces el subgrafo inducido por los vértices  $u_{ij}$  y  $\alpha$

contiene a  $K_5$  como menor, con  $i, j = 1, \dots, 4$ . Por simetría, nos sucede lo mismo cortando a algún  $u_{ij}$ . Supongamos, pues, que cortamos el vértice  $\alpha$  en dos, que llamaremos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

Si la valencia de alguno de ellos (e. g. de  $\alpha_1$ ) es mayor o igual que 9 entonces  $\alpha_1$  es adyacente con al menos 5 vértices del conjunto  $\{u_{ij}/i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 4\}$  o bien del conjunto  $\{v_{ij}/i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 4\}$ . En este caso el subgrafo inducido por  $\alpha_1$  y los 5 vértices adyacentes contiene a  $K_5$  como menor.

Por tanto  $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2) = 8$ . Pero también en este caso el grafo resultante del corte contiene a  $K_5$  como menor, con lo que llegamos a contradicción y, por tanto  $s(B_4) \geq 2$ .

Supongamos ahora por hipótesis de inducción que  $s(B_{n+3}) \geq n+1$ . Supongamos que  $s(B_{n+4}) = n+1$ . Consideremos una inmersión de  $B_{n+4}$  en  $\mathcal{G}_{n+1}$ . Borrando un vértice que ocupe un punto singular de la pseudosuperficie que no sea  $\alpha$  inducimos una inmersión de  $B_{n+3}$  en  $\mathcal{G}_n$ , lo que contradice nuestra hipótesis de partida. Por tanto  $S(B_{n+4}) \geq n+2$ .  $\square$

No obstante para todo grafo  $G \in \mathcal{B}_1$  se tiene que  $s(G) = 1$  a partir del Teorema 5.11.

Para concluir esta sección, mostraremos que el problema que decide si  $s(G) \leq K$ , siendo  $G$  un grafo cúbico, es NP-completo.

En [17] los autores probaron que el problema que tiene como datos de entrada un grafo cúbico  $G = (V, A)$  y un entero positivo  $K \leq \#A$  y que decide si el grafo  $G$  puede transformarse en un grafo plano con, a lo más,  $K$  cortes de vértices en dos, es NP-completo.

En grafos cúbicos, el invariante  $s$  y el invariante *escisión* de un grafo, coinciden ambos. Vamos a probarlo por doble desigualdad.

Ya sabemos que  $\sigma(G) \leq s(G)$  por la Proposición 5.10. Tenemos que probar que  $s(G) \leq \sigma(G)$  cuando  $G$  es un grafo cúbico. Supongamos que tenemos una inmersión

de  $G$  con  $\sigma(G)$  cortes. Sea  $G^*$  el grafo que se obtiene al hacer  $\sigma(G)$  cortes, pudiendo cortar cada vértice varias veces. Tomemos un vértice  $u \in V(G)$ . Si dicho vértice no se corta ó se le hace un sólo corte ya hemos terminado. En el caso de que se le hagan dos cortes, observemos que el grafo que se obtiene en  $G^*$  es homeomorfo a otro en el que se realiza un corte al vértice  $u$  y otro corte a un punto interior de una arista incidente con  $u$ . Por tanto, en cualquier caso, se tiene que  $s(G) \leq \sigma(G)$ .

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado de forma inmediata:

**Teorema 5.13.** *El problema que tiene como datos de entrada un grafo cúbico  $G = (V, A)$  y un entero positivo  $K \leq \#A$  y que decide si  $s(G) \leq K$  es NP-completo.  $\square$*

## 5.6 Relación entre los invariantes $j$ y $\nu$

El invariante  $\nu(G)$ , denominado cruzamiento del grafo  $G$  ya ha sido definido en la introducción de este Capítulo.

En esta sección vamos a determinar si podemos acotar el valor del invariante  $j$  de un grafo en función del cruzamiento del mismo o viceversa y, en caso de que esto sea posible, obtener la cota óptima. Como en secciones anteriores, vamos a concretar el problema en dos cuestiones que resolveremos a lo largo de esta sección.

Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{A}_n = \{G/\nu(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $j(G) \leq m(n)$ .

El siguiente resultado nos va a permitir responder de forma afirmativa a la cuestión anterior.

**Proposición 5.14.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces se verifica que  $j(G) \leq 2\nu(G)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es un grafo tal que  $\nu(G) = n$ . Entonces existen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aristas de  $G$  tales que  $G - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es plano. Sean  $v_1,$

$v_2, \dots, v_m$  los extremos de las aristas anteriores, donde  $n+1 \leq m \leq 2n$ . Consideremos una inmersión de  $G - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  en una esfera. Identificando los puntos  $v_1, \dots, v_m$  con  $m$  puntos de otra esfera y dibujando las aristas  $a_1, \dots, a_n$  en la segunda esfera hemos construido una inmersión de  $G$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$  con  $m \leq 2n$ . Por tanto  $j(G) \leq 2n$ .  $\square$

Por tanto, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa y una función en las condiciones del enunciado del problema es  $m(n) = 2n$ .

Además, la cota que nos da la Proposición 5.14 es óptima. Es decir, siguiendo con la formulación inicial del problema, no existe otra función  $m_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , estrictamente menor que  $m$  a partir de un cierto natural y tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{A}_n$  se tiene que  $j(G) \leq m_1(n)$ . Para demostrarlo, veamos antes un lema previo.

**Lema 5.15.**  $j\left(\bigcup_{i=1}^p K_5\right) = 2p$ .

*Demostración.* La Figura 5.10 nos muestra una inmersión de  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  en  $S_0 \overset{2p}{\amalg} S_0$ , donde los puntos singulares son  $1, \dots, 2p$ , con lo que  $j\left(\bigcup_{i=1}^p K_5\right) \leq 2p$ .

Por otra parte, consideremos una inmersión de  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  en  $S_0 \overset{m}{\amalg} S_0$ , para cierto  $m \in \mathbb{N}$ . Por cada  $K_5$  que dibujemos en una esfera hay que pasar al menos una arista por la otra esfera. Además los  $K_5$  son disjuntos, luego cada una de estas aristas pasa por, al menos, dos puntos singulares. Por tanto  $m \geq 2p$ . De ambas desigualdades concluimos en que  $j\left(\bigcup_{i=1}^p K_5\right) = 2p$ .  $\square$

Consideremos el grafo  $\bigcup_{i=1}^p K_5$ . Por el Lema 5.15 se tiene que  $j\left(\bigcup_{i=1}^p K_5\right) = 2p$ . Por

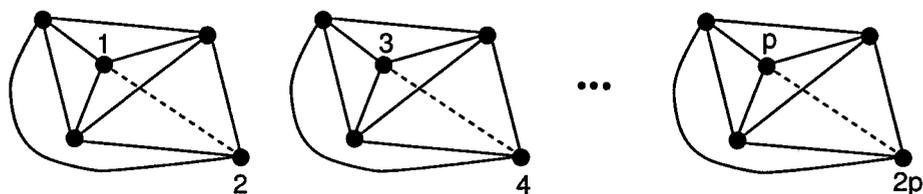


Figura 5.10: Inmersión de  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  en  $S_0 \amalg S_0$ .

otra parte  $\nu(\bigcup_{i=1}^p K_5) = p$ . En efecto, la Figura 5.10 nos muestra un dibujo plano de  $\bigcup_{i=1}^p K_5$  con  $p$  cruces. Por otra parte como  $\nu(K_5) = 1$ , por cada  $K_5$  dibujado en el plano ha de haber necesariamente un cruce con lo que  $\nu(\bigcup_{i=1}^p K_5) \geq p$ . De ambas desigualdades se obtiene la igualdad. Hemos llegado por tanto a que  $j(\bigcup_{i=1}^p K_5) = 2\nu(\bigcup_{i=1}^p K_5)$ .

Como en secciones anteriores, vamos a plantear ahora el problema recíproco del que acabamos de tratar. Consideremos la familia de grafos  $\mathcal{B}_n = \{G/j(G) \leq n\}$ . Nos preguntamos ahora si existe una función  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G \in \mathcal{B}_n$  se tiene que  $\nu(G) \leq m(n)$ .

La respuesta a la pregunta anterior es negativa para  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos el grafo  $K_5^n$ , obtenido de duplicar  $n$  veces todas las aristas de  $K_5$  excepto una, subdividiendo las aristas añadidas para evitar aristas múltiples (ver Figura 5.11). Puesto que  $\nu(K_5) = 1$ , cualquier dibujo de  $K_5$  en el plano tiene como mínimo un cruce de dos aristas. Al menos una de esas está  $n$  veces duplicada en  $K_5^n$ , por lo que cualquier dibujo de  $K_5^n$  en el plano contiene al menos  $n$  cruces de aristas. Por otra parte,

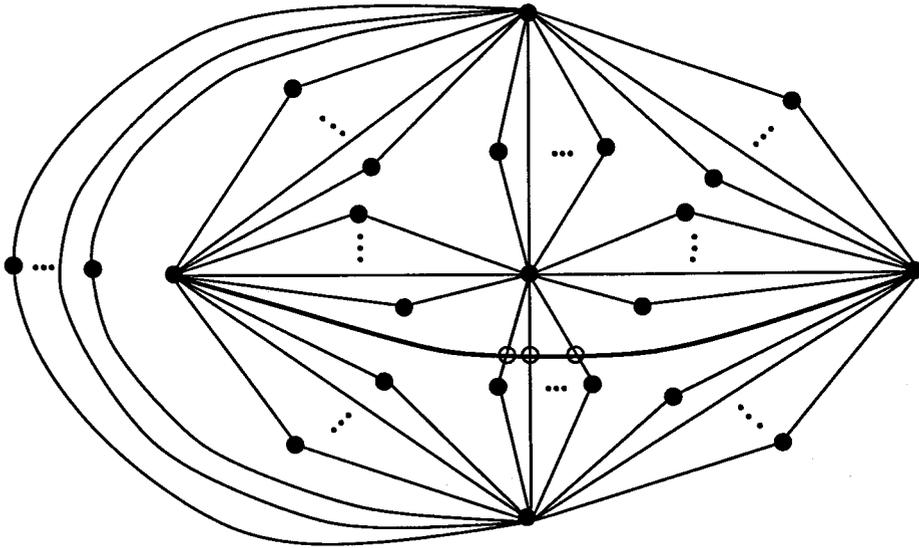


Figura 5.11: Dibujo de  $K_5^n$  en  $\mathbb{R}^2$  con  $n$  cruces.

la Figura 5.11 nos muestra un dibujo de  $K_5^n$  en el plano con  $n$  cruces, donde la arista sin duplicar está en trazo grueso y los cruces se han señalado con un círculo transparente. Por tanto  $\nu(K_5^n) = n$ .

Sin embargo, si llamamos  $e$  a la arista de  $K_5^n$  que no fue duplicada en el  $K_5$  original,  $K_5^n - e$  es plano, por lo que  $K_5^n$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  sin más que sumergir  $K_5^n - e$  en una esfera y  $e$  en la otra, siendo los extremos de  $e$  llevados por la inmersión en los puntos singulares de  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ . Por tanto  $j(K_5^n) = 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 5.7 Otras relaciones

Los invariantes  $\theta(G)$  y  $\xi(G)$ , denominados respectivamente grosor y exceso del grafo  $G$  ya han sido definidos en la introducción de este Capítulo.

En esta sección vamos a determinar si podemos acotar el valor del invariante  $j$  de un grafo en función del grosor del mismo o viceversa. Procederemos de igual forma con el exceso de un grafo.

Al contrario que en las secciones anteriores, no vamos a formalizar excesivamente el problema de relacionar los invariantes antes mencionados. Concretamente, en lo que se refiere al grosor, el siguiente resultado nos muestra que si el invariante  $j$  está acotado para una determinada familia de grafos, también lo está el grosor.

**Teorema 5.16.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $\theta(G) \leq j(G)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $j(G) = n$ . Entonces  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ . Puesto que podemos suponer que toda arista que pase por un punto singular tiene sus extremos en otros dos puntos singulares, tenemos, en el peor de los casos,  $n - 2$  aristas que pasan por puntos singulares. Sean  $e_1, \dots, e_{n-2}$  dichas aristas. Sean además  $G_1$  y  $G_2$  los subgrafos de  $G - \{e_1, \dots, e_{n-2}\}$  inducidos por el corte de los  $n$  puntos singulares de  $S_0 \overset{n}{\amalg} S_0$ . Por construcción  $G_1$  y  $G_2$  son planos. Por tanto  $G_1, G_2, e_1, \dots, e_{n-2}$  es una descomposición de  $G$  en  $n$  subgrafos planos disjuntos por aristas, con lo que  $\theta(G) \leq n$ .  $\square$

La cota que nos muestra el resultado anterior dista mucho de ser óptima. Tratar de hallar una cota óptima parece una tarea compleja y queda como problema abierto.

El recíproco no es cierto, es decir, existen familias infinitas de grafos con el grosor acotado y para los cuales el invariante  $j$  crece indefinidamente.

Consideremos el grafo  $\bigcup_{i=1}^n K_5$ . La Figura 5.10 nos muestra una descomposición de

$\bigcup_{i=1}^n K_5$  en dos grafos planos, el primero de los cuáles es  $\bigcup_{i=1}^n K_5 - \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{p, 2p\}\}$

y el segundo grafo está formado por todos los vértices de  $\bigcup_{i=1}^n K_5$  y sólo las aris-

tas  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{p, 2p\}$ . Puesto que  $\bigcup_{i=1}^n K_5$  no es plano, esto demuestra que

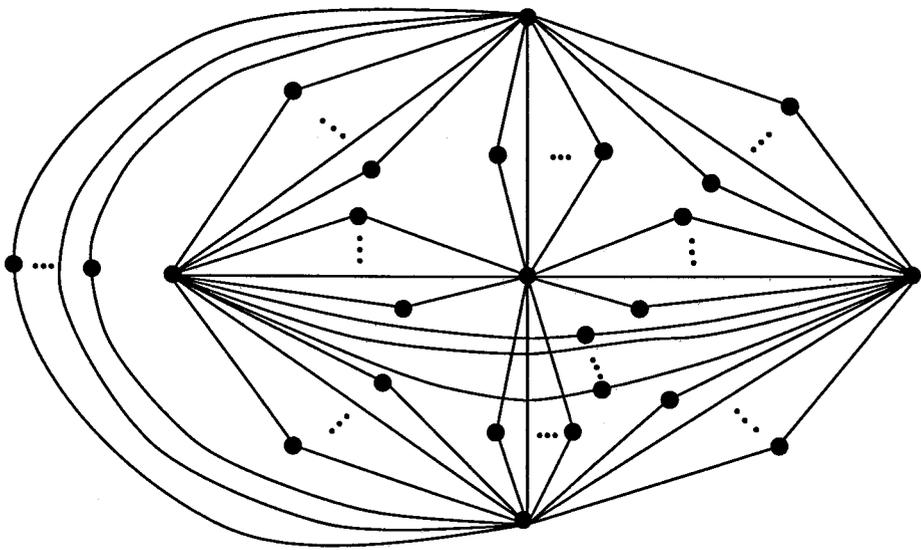
$\theta(\bigcup_{i=1}^n K_5) = 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sin embargo se tiene por el Lema 5.15 que  $j(\bigcup_{i=1}^n K_5) = 2n$ .

Respecto al exceso, existen familias infinitas de grafos con el invariante  $j$  acotado y para los cuales el exceso crece indefinidamente.

Consideremos el grafo  $L_5^n$ , obtenido de duplicar  $n$  veces todas las aristas de  $K_5$ , subdividiendo las aristas añadidas para evitar aristas múltiples (ver Figura 5.12). De forma natural podemos descomponerlo en  $n$  subgrafos homeomorfos a  $K_5$  y, por tanto, no planos, con lo que  $\xi(G) \geq n$ . Sin embargo  $L_5^n$  admite una inmersión en  $S_0 \amalg^2 S_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sin más que dibujar una “ $n$ -arista” en una de las esferas y el resto del grafo en la otra.

El problema recíproco, es decir, estudiar la acotación de  $\xi$  en función de la de  $j$ , queda abierto.



Figura 5.12: El grafo  $L_5^n$ .

## **Parte III**

# **Pseudosuperficies con más de dos células**

# Capítulo 6

## Algoritmos en pseudosuperficies

En este capítulo presentamos dos algoritmos que deciden si un grafo admite una inmersión en una pseudosuperficie. El primero lo hace para una pseudosuperficie concreta ( $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ ) en tiempo polinomial. El segundo es independiente de la pseudosuperficie, es decir, tiene como entrada un grafo y una pseudosuperficie cualesquiera y decide si dicho grafo admite una inmersión en esa pseudosuperficie.

### 6.1 Introducción

Robertson y Seymour muestran en [39] un algoritmo que comprueba si un grafo admite una inmersión en una superficie en tiempo  $O(n^3)$ . De forma natural podemos plantearnos si existen algoritmos que determinen en tiempo polinomial si un grafo es sumergible en una pseudosuperficie dada.

En este capítulo desarrollamos un algoritmo que decide, en tiempo polinomial, si un grafo admite una inmersión en una pseudosuperficie concreta:  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ . Este algoritmo no es extensible a una pseudosuperficie cualquiera, ya que se basa en que los 84 grafos 2-conexos minimales prohibidos para la pseudosuperficie  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  son

conocidos (véase [10]).

No obstante lo anterior presentaremos posteriormente un algoritmo que tiene como entrada un grafo y una pseudosuperficie cualesquiera, y que decide si dicho grafo admite o no una inmersión en esa pseudosuperficie. Aunque trabaja en tiempo exponencial, el interés que suscita no es tanto el algoritmo en sí sino la existencia del mismo. Concluiremos con un ejemplo aplicado a una pseudosuperficie concreta.

## 6.2 Un algoritmo para $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$

En esta sección damos un algoritmo que decide en tiempo polinomial (en realidad  $O(n^3)$ ) si un grafo admite una inmersión en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ . Este algoritmo se basa en un algoritmo de planaridad en tiempo lineal (e. g. [28])

Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices. ¿Admite  $G$  una inmersión en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$ ?

**G es 3-conexo o subdivisión de 3-conexo:** Quitamos una arista de todas las formas posibles y aplicamos un algoritmo de planaridad. Si el grafo resultante es plano  $\implies$  **SÍ** FIN. En otro caso  $\implies$  **NO** FIN.

**G es 2-conexo y no 3-conexo:** Existe  $\{u, v\}$  pareja de corte de  $G$ . Sean  $G_1$  y  $G_2$  el resultado del corte y sea  $e$  la arista  $uv$ . Sean  $G_1^* = G_1 + e$ ,  $G_2^* = G_2 + e$ . Pueden darse varios casos:

1.  $G_1$  y  $G_2$  planos  $\implies$  **SÍ** FIN.
2.  $G_1$  y  $G_2$  no planos. Entonces  $G$  contiene uno de los 84 grafos 2-conexos minimales prohibidos en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0 \implies$  **NO** FIN.
3.  $G_1$  no plano y  $G_2$  plano. De nuevo se presentan dos casos.
  - (a)  $G_2^*$  es plano. Entonces  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \overset{2}{\amalg} S_0$  si y sólo si  $G_1^*$  la admite. Por tanto **aplicamos el algoritmo con  $G_1^*$  como entrada.**

(b)  $G_2^*$  no es plano. Entonces  $G$  contiene uno de los 84 grafos 2-conexos minimales prohibidos en  $S_0 \stackrel{2}{\amalg} S_0 \implies \boxed{\text{NO}} \text{ FIN.}$

$G$  no es 2-conexo: Tres casos.

1.  $G$  tiene 2 o más bloques no planos. Entonces  $G$  contiene uno de los 84 grafos 2-conexos minimales prohibidos en  $S_0 \stackrel{2}{\amalg} S_0 \implies \boxed{\text{NO}} \text{ FIN.}$
2.  $G$  tiene un solo bloque  $G_1$  no plano. Entonces  $G$  admite una inmersión en  $S_0 \stackrel{2}{\amalg} S_0$  si y sólo si  $G_1$  la admite. Por tanto **aplicamos el algoritmo con  $G_1$  como entrada.**
3.  $G$  plano  $\implies \boxed{\text{SÍ}} \text{ FIN.}$

Observemos que este algoritmo trabaja en tiempo  $O(n^3)$ . Su funcionamiento se basa en un algoritmo de planaridad en tiempo lineal (e. g. [28]).

Tengamos en cuenta, además que los grafos  $G_1^*$  y  $G_1$  son estrictamente menores que  $G$ , por lo que la recursión es finita, y que la detección de los bloques de un grafo se realiza en tiempo lineal.

Como ya hemos indicado anteriormente, este algoritmo no es generalizable a otras pseudosuperficies.

### 6.3 En una pseudosuperficie cualquiera

Thomassen probó en [45] que el problema que tiene como entrada un grafo  $G$  y una superficie  $S$  y que decide si  $G$  admite una inmersión en  $S$  es NP-completo. Incluso el problema que tiene como entrada un grafo cúbico  $G$  y una superficie  $S$  y que decide si  $G$  admite una inmersión en  $S$  es también NP-completo, según demuestra el mismo autor en [46].

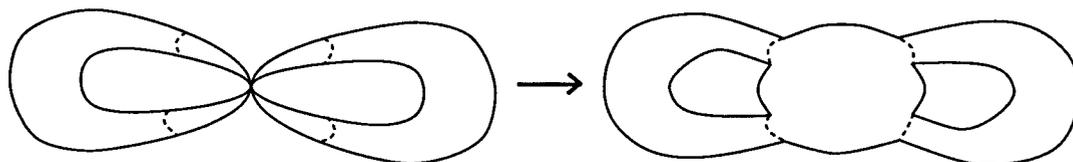


Figura 6.1: Obtención de  $S$  a partir de  $\mathfrak{G}$ .

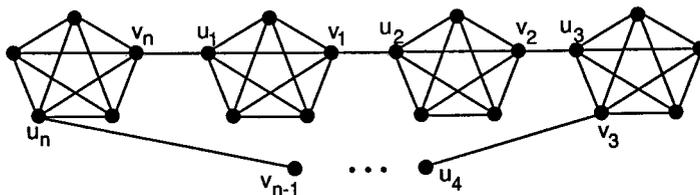
Nuestro objetivo en esta sección es encontrar un algoritmo que tenga como entrada un grafo  $G$  y una pseudosuperficie  $\mathfrak{G}$  y que decida si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{G}$ . Por los resultados obtenidos por Thomassen comentados anteriormente y puesto que la entrada  $(G, \mathfrak{G})$  es más general que la entrada  $(G, S)$ , es de esperar que los algoritmos como el que buscamos no sean polinomiales, por lo que no nos preocuparemos de la eficiencia de nuestro algoritmo.

El que vamos a describir a continuación, que llamaremos **Algoritmo A**, es exponencial. Se basa a su vez en otro algoritmo que tiene una entrada más restrictiva y que llamaremos **Algoritmo B**, que también es exponencial. Describiremos en primer lugar el **Algoritmo B** dejando para después el **Algoritmo A** que es el algoritmo general. Como ya hemos comentado anteriormente, el interés del **Algoritmo A** estriba en que prueba la existencia de tales algoritmos y no en su implementación.

Antes de describir los algoritmos, vamos a dar algunos resultados previos.

**Lema 6.1.** *Sea  $\mathfrak{G}$  una pseudosuperficie cualquiera. Entonces existe una superficie  $S$  tal que para todo grafo  $G$  sumergible en  $\mathfrak{G}$  se tiene que  $G$  admite una inmersión en  $S$ .*

*Demostración.* Consideremos un punto singular  $\alpha$  de  $\mathfrak{G}$ . Un entorno de  $\alpha$  es homeomorfo a la unión en  $\alpha$  de  $n$  discos. Cortemos de  $\mathfrak{G}$  un entorno de  $\alpha$ , con lo que resultan  $n$  agujeros en  $\mathfrak{G}$ . Consideremos una esfera con  $n$  agujeros e identifiquemos los bordes de cada uno de los agujeros de la esfera con cada uno de los agujeros de  $\mathfrak{G}$  (ver Figura 6.1). Repitiendo este proceso con todos los puntos singulares se obtiene

Figura 6.2: El grafo  $C_n(K_5)$ .

una superficie o una unión disjunta de superficies. En este último caso obtendríamos una superficie conectando las distintas componentes conexas entre sí mediante la suma conexas de esferas.

Si llamamos  $S$  a la superficie resultante del proceso, se tiene por construcción que una inmersión de un grafo en  $\mathfrak{S}$  induce una inmersión de ese grafo en  $S$ .  $\square$

El siguiente lema nos muestra el género del grafo  $C_n(K_5)$ , que puede verse en la Figura 6.2.

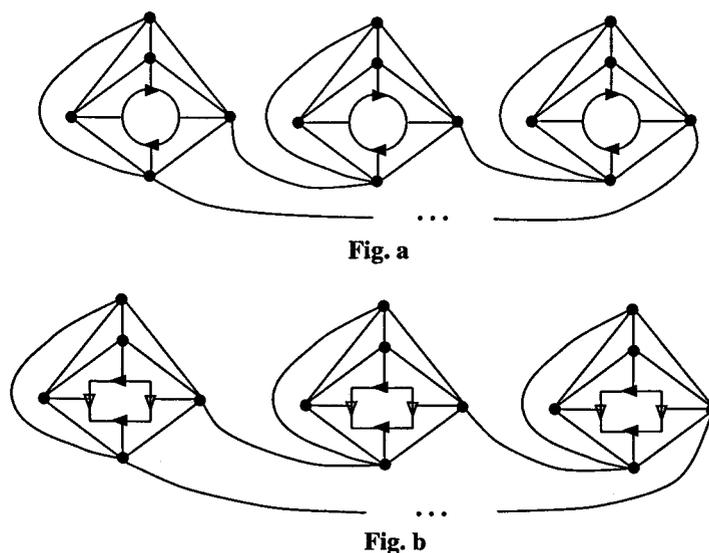
**Lema 6.2.** *El grafo  $C_n(K_5)$  es 2-conexo y  $\gamma(C_n(K_5)) = \tilde{\gamma}(C_n(K_5)) = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Por construcción, si borramos un vértice de  $C_n(K_5)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , resulta un grafo conexo.

La Figura 6.3.a nos muestra una inmersión de  $C_n(K_5)$  en una superficie de género no orientable  $n$  y en la Figura 6.3.b podemos ver una inmersión de  $C_n(K_5)$  en una superficie de género orientable  $n$ , por lo que  $\gamma(C_n(K_5)) \leq n$  y  $\tilde{\gamma}(C_n(K_5)) \leq n$ .

Por otra parte  $C_n(K_5)$  contiene al grafo  $n K_5$  como subgrafo. Puesto que  $\gamma(n K_5) = \tilde{\gamma}(n K_5) = n$ , se tiene que  $\gamma(C_n(K_5)) \geq n$  y  $\tilde{\gamma}(C_n(K_5)) \geq n$ .  $\square$



Figura 6.3: Inmersiones de  $C_n(K_5)$ .

### 6.3.1 Descripción del Algoritmo B

A continuación vamos a construir un algoritmo, que llamaremos **Algoritmo B**. Este algoritmo tiene como entrada un grafo  $G$  y una pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$  tal que todas sus células son superficies y todos sus puntos singulares poseen entornos homeomorfos a la unión en un punto de dos discos de los que, al menos uno, pertenece a una célula con un solo punto singular; y que decide si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ .

El **Algoritmo B** se basa, a su vez, en otro algoritmo, que llamaremos **Algoritmo B<sub>1</sub>** y que tiene la misma entrada que el **Algoritmo B**, siendo, además, la pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$  conexa. El **Algoritmo B<sub>1</sub>** decide si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ .

#### Descripción del Algoritmo B<sub>1</sub>

La entrada de este algoritmo es un grafo  $G$  y una pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$  conexa tal que todas sus células son superficies y todos sus puntos singulares poseen entornos homeomorfos a la unión en un punto de dos discos de los que, al menos uno, pertenece a una célula con un solo punto singular. Supongamos que  $\mathfrak{S}$  tiene  $n$  puntos singulares y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dichos puntos singulares.

El algoritmo decide si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ . Para ello se basa en un algoritmo que teniendo como entrada un grafo  $G$  y una superficie  $S$  decida si  $G$  admite una inmersión en  $S$ . Tales algoritmos existen pues, como hemos mencionado anteriormente, Thomassen probó en [45] que el problema de decidir si  $G$  admite una inmersión en  $S$  es NP-completo. No obstante y precisamente por la NP-completitud, es de esperar que tales algoritmos no sean polinomiales.

Observemos, además, que si  $n = 0$  entonces  $\mathfrak{S}$  es una superficie o una unión disjunta de superficies; en este caso definimos el **Algoritmo B<sub>1</sub>** como cualquiera de los algoritmos citados en el párrafo anterior o bien cualquiera de los algoritmos a los que hace referencia el Lema 6.3. Por tanto supondremos que  $n \geq 1$ .

A partir de un algoritmo que decide si un grafo admite una inmersión en una superficie, podemos diseñar otro que decida si un grafo admite una inmersión en la pseudosuperficie consistente en la unión disjunta de una colección de superficies, tal como nos muestra el siguiente lema.

**Lema 6.3.** *Existe un algoritmo cuya entrada es  $(G, S_1, \dots, S_n)$ , donde  $G$  es un grafo y  $S_1, \dots, S_n$  superficies para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , y que decide si  $G$  admite una inmersión en  $\bigsqcup_{i=1}^n S_i$ .*

*Demostración.* Sean  $G_1, \dots, G_k$  las componentes conexas de  $G$ , con  $k \geq 1$ . Vamos a llamar algoritmo **GS** a un algoritmo cualquiera que, teniendo como entrada un grafo y una superficie, decida si el grafo admite una inmersión en la superficie. Demostraremos este resultado construyendo un algoritmo en las condiciones del enunciado, al que llamaremos algoritmo **GPS**.

*Descripción del algoritmo GPS.*

Si  $n = 1$  entonces aplicamos el algoritmo **GS** a la entrada  $(G, S_1)$ .

Si  $n > 1$  entonces consideremos los grafos  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$ , para todo  $\beta \in I$ , donde  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$  son uniones disjuntas de componentes conexas de  $G$  que vienen dadas en función de los elementos del conjunto  $I = \{\beta = (b_1, \dots, b_k) / b_i \in \{1, 0\}, \forall i = 1, \dots, k\}$ , de tal forma que, dado  $\beta \in I$ ,  $G_i \subset G_1^\beta \Leftrightarrow b_i = 1$  y  $G_i \subset G_2^\beta \Leftrightarrow b_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Consideremos, además,  $\bigsqcup_{i=1}^n S_i = \left( \bigsqcup_{i=1}^{n-1} S_i \right) \sqcup S_n$ . Aplicamos el algoritmo **GPS** a la entrada  $\left( G_1^\beta, \bigsqcup_{i=1}^{n-1} S_i \right)$  y el algoritmo **GS** a la entrada  $(G_2^\beta, S_n)$ . Si existe  $\beta \in I$  para la que el algoritmo **GPS** y el algoritmo **GS** responden afirmativamente, entonces

$$\boxed{G \hookrightarrow \bigsqcup_{i=1}^n S_i} \text{ FIN.}$$

En otro caso  $\boxed{G \not\hookrightarrow \bigsqcup_{i=1}^n S_i} \text{ FIN.} \square$

Enunciemos otro resultado previo, cuya demostración es inmediata.

**Lema 6.4.** *Sea  $G$  un grafo 2-conexo y  $\mathfrak{S}$  una pseudosuperficie en las condiciones de la de la entrada del Algoritmo **B**. Entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$  si y sólo si existe  $S$  célula de  $\mathfrak{S}$  tal que  $G$  admite una inmersión en  $S$ .  $\square$*

A continuación pasamos a describir el Algoritmo **B**<sub>1</sub>.

**Paso I.** Computamos el grado de conexión de  $G$ . Si  $G$  es 2-conexo, para toda célula  $S$  de  $\mathfrak{S}$  aplicamos el algoritmo **GS** referido en el Lema 6.3 a la entrada  $(G, S)$ . Si la respuesta del algoritmo **GS** es afirmativa para alguna entrada entonces

$$\boxed{G \hookrightarrow \mathfrak{S}} \text{ FIN.}$$

Si, por el contrario, la respuesta del algoritmo **GS** es negativa para todas las entradas entonces  $\boxed{G \not\rightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

Si  $G$  no es 2-conexo vamos al paso siguiente.

**Paso II.** Vamos a usar un contador  $c$  que inicializamos con el valor  $c := 1$ . Si  $c > n$  entonces saltamos al **Paso III**. Cortamos la pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$  por el punto singular  $\alpha_c$ . Resulta de dicho corte una pseudosuperficie  $\mathfrak{S}_c$  con  $n - 1$  puntos singulares y una superficie  $S_c$  (célula de  $\mathfrak{S}$ ). Sean  $G_1, \dots, G_k$  las componentes conexas de  $G$  donde, eventualmente,  $k$  puede ser 1.

Al igual que en el Lema 6.3, consideremos los grafos  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$ , para todo  $\beta \in I$ , donde  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$  son uniones disjuntas de componentes conexas de  $G$  que vienen dadas en función de los elementos del conjunto  $I = \{\beta = (b_1, \dots, b_k) / b_i \in \{1, 0\}, \forall i = 1, \dots, k\}$ , de tal forma que, dado  $\beta \in I$ ,  $G_i \subset G_1^\beta \Leftrightarrow b_i = 1$  y  $G_i \subset G_2^\beta \Leftrightarrow b_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Aplicamos de forma recursiva el **algoritmo B<sub>1</sub>** a la entrada  $(G_1^\beta, \mathfrak{S}_c)$  y el algoritmo **GS** referido en el Lema 6.3 a la entrada  $(G_2^\beta, S_c)$ . Si existe  $\beta \in I$  para la que la respuesta de ambos algoritmos es afirmativa entonces  $\boxed{G \hookrightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

En otro caso, si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ , ha de utilizarse el punto singular  $\alpha_c$  en la inmersión, es decir, la inmersión habrá de llevar un vértice o un punto interior de una arista de  $G$  en  $\alpha_c$ .

Incrementamos el contador en una unidad,  $c := c + 1$  y volvemos al **Paso II**.

**Paso III.** Si el flujo del algoritmo todavía no ha sido interrumpido, de existir una inmersión de  $G$  en  $\mathfrak{S}$ , ésta debe usar los  $n$  puntos singulares en la forma descrita anteriormente.

Sea  $S_\alpha$  la célula de  $\mathfrak{S}$  que contiene a todos los puntos singulares de la pseudosuperficie y sean  $S_1, \dots, S_n$  las otras células.

Computamos los puntos de corte de  $G$  y supongamos que  $G$  tiene  $m$  puntos de corte, que llamaremos  $v_1, \dots, v_m$ . Si  $m < n$  entonces  $\boxed{G \not\rightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

**Paso IV.** Consideremos  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \subset \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Vamos a cortar en dos cada  $v_{i_j}$  con  $j = 1, \dots, n$  de forma que exista un subgrafo de  $G$ , que llamaremos  $G'$ , tal que  $u_{i_j} \in V(G')$  para todo  $j = 1, \dots, n$  donde  $u_{i_j}$  es uno de los dos vértices resultantes del corte de  $v_{i_j}$ . Si esto no fuera posible, hacemos otra elección del conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$  y repetimos la operación. Si encontrar  $G'$  en las condiciones descritas no fuera posible para ningún conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \subset \{v_1, \dots, v_m\}$  entonces  $\boxed{G \not\rightarrow \mathfrak{G}}$  FIN.

Consideremos  $G = G' \cup G''$  para todo  $G'$  en las condiciones anteriores, donde  $G'' = G - G'$ . Por construcción  $G' \cap G'' = \emptyset$ . Aplicamos el algoritmo **GS** referido en el Lema 6.3 a la entrada  $(G', S_\alpha)$  y el algoritmo **GPS**, también detallado en el Lema 6.3, a la entrada  $(G'', \bigsqcup_{i=1}^n S_i)$ .

Si en algún caso los algoritmos **GS** y **GPS** dan una respuesta afirmativa entonces  $\boxed{G \hookrightarrow \mathfrak{G}}$  FIN.

En otro caso repetimos el **Paso IV** haciendo otra elección del conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ . Si para ninguna de estas elecciones se obtiene una respuesta afirmativa de los algoritmos **GS** y **GPS** entonces  $\boxed{G \not\rightarrow \mathfrak{G}}$  FIN.

Observemos que el proceso recursivo del algoritmo es finito pues, en cada paso, resulta una pseudosuperficie con un punto singular menos que la anterior. Puesto que la pseudosuperficie inicial tiene un número finito de puntos singulares, la recursión comprende, a lo más, este número de pasos.

### Descripción del Algoritmo B

La entrada de este algoritmo es un grafo  $G$  y una pseudosuperficie  $\mathfrak{G}$  en las condiciones descritas en el **Algoritmo B<sub>1</sub>** excepto en que  $\mathfrak{G}$  puede no ser conexa.

Sean  $G_1, \dots, G_k$  las componentes conexas de  $G$ , con  $k \in \mathbb{N}$ .

**Paso I.** Computamos las componentes conexas de  $\mathfrak{G}$ . Supongamos que  $\mathfrak{G}$  tiene  $n$  componentes conexas  $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Denotaremos, pues,  $\mathfrak{G} = \bigsqcup_{i=1}^n \mathfrak{G}_i$ .

Si  $n = 1$  entonces  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ . Aplicamos el **Algoritmo B<sub>1</sub>** a la entrada  $(G, \mathfrak{S})$ .

Si  $n > 1$  entonces nos vamos al **Paso II**.

**Paso II.** Consideremos los grafos  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$ , para todo  $\beta \in I$ , donde  $G_1^\beta$  y  $G_2^\beta$  son uniones disjuntas de componentes conexas de  $G$  que vienen dadas en función de los elementos del conjunto  $I = \{\beta = (b_1, \dots, b_k) / b_i \in \{1, 0\}, \forall i = 1, \dots, k\}$ , de tal forma que, dado  $\beta \in I$ ,  $G_i \subset G_1^\beta \Leftrightarrow b_i = 1$  y  $G_i \subset G_2^\beta \Leftrightarrow b_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Aplicamos el **Algoritmo B** a la entrada  $\left(G_1^\beta, \bigsqcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{S}_i\right)$  y el **Algoritmo B<sub>1</sub>** a la entrada  $(G_2^\beta, \mathfrak{S}_n)$ . Si existe  $\beta \in I$  para la cual el **Algoritmo B** y el **Algoritmo B<sub>1</sub>** responden afirmativamente, entonces  $\boxed{G \hookrightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

En otro caso  $\boxed{G \not\hookrightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

### 6.3.2 Descripción del Algoritmo A

A continuación vamos a construir un algoritmo, que llamaremos **Algoritmo A**, que tiene como entrada un grafo  $G$  y una pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$ , y que decide si  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ .

Todo punto singular de  $\mathfrak{S}$  tiene un entorno homeomorfo a la unión en ese punto de  $n$  discos abiertos con  $n \geq 2$  (véase [33]). Consideremos el conjunto  $A_\mathfrak{S}$  de puntos singulares  $\alpha$  de  $\mathfrak{S}$  tales que  $\alpha$  posee un entorno homeomorfo a la unión en un punto de al menos tres discos abiertos o bien que no pertenece a una célula cuyo único punto singular es  $\alpha$ . Si  $A_\mathfrak{S} = \emptyset$  entonces aplicamos directamente el **Algoritmo B** a la entrada  $(G, \mathfrak{S})$ , por lo que vamos a suponer lo contrario. Sea, pues,  $\#A_\mathfrak{S} = k$  donde  $k < \aleph_0$ .

**Paso I.** Consideremos un punto singular  $\alpha$  del conjunto anterior y vamos a cortarlo en los puntos  $a_1, \dots, a_m$ , donde  $m$  es la cantidad de discos abiertos que posee un entorno de  $\alpha$ , de tal forma que  $a_1, \dots, a_m$  poseen entornos homeomorfos a



discos abiertos. En cada  $a_i$  para  $i = 1, \dots, m$  vamos a pegar la superficie  $S \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , donde  $S$  es una superficie de género el mínimo de los géneros de las superficies en las condiciones del Lema 6.1 para la pseudosuperficie  $\mathfrak{S}$ . Sea  $\mathfrak{S}_1$  la pseudosuperficie resultante. Obsérvese que, por construcción, los  $a_i$  no son elementos de  $A_{\mathfrak{S}_1}$  por lo que  $\#A_{\mathfrak{S}_1} = k - 1$ .

Consideremos todos los grafos que resultan de cortar un punto interior a una arista de  $G$  de todas las formas posibles (subdividimos la arista y cortamos el vértice añadido) y todos los grafos que resultan de cortar un vértice de  $G$  en  $m'$  nuevos vértices, donde  $2 \leq m' \leq m$ . Sea  $\mathcal{G}$  el conjunto de los grafos resultantes de pegar a cada uno de los grafos anteriores el grafo  $C_n(K_5)$  (véase Figura 6.2) en cada vértice resultante del corte, donde  $n = \tilde{\gamma}(S \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ .

Por construcción se tiene que si algún elemento de  $\mathcal{G}$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}_1$  entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}$ . En efecto, supongamos que  $G' \in \mathcal{G}$  admite una inmersión en  $\mathfrak{S}_1$ . Entonces el género de  $C_n(K_5)$  y su grado de conexión obliga a que la inmersión lleve estos bloques a  $S \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , por lo que los vértices resultantes del corte que originaron  $G'$  van a  $a_1, \dots, a_{m'}$ . Cortando en  $\mathfrak{S}_1$  los puntos singulares  $a_1, \dots, a_m$  e identificando estos, se induce una inmersión de  $G$  en  $\mathfrak{S}$ .

**Paso II.** Si  $A_{\mathfrak{S}_1} = \emptyset$  entonces aplicamos el **Algoritmo B** a la entrada  $(G', \mathfrak{S}_1)$ , para todo  $G' \in \mathcal{G}$ . Si para una de estas entradas se obtiene una respuesta positiva, entonces  $\boxed{G \hookrightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

Si la respuesta es negativa para todo  $G' \in \mathcal{G}$  entonces  $\boxed{G \not\hookrightarrow \mathfrak{S}}$  **FIN**.

$A_{\mathfrak{S}_1} \neq \emptyset$ , entonces aplicamos de forma recursiva el **Algoritmo A** a cada entrada  $(G', \mathfrak{S}_1)$  para todo  $G' \in \mathcal{G}$ .

Observemos que el proceso recursivo del **Algoritmo A** es finito, pues en cada etapa decrece en una unidad el cardinal de  $A_{\mathfrak{S}}$ . Al final de la recursión se obtiene una pseudosuperficie con las siguientes características:

1. Todas sus células son superficies.

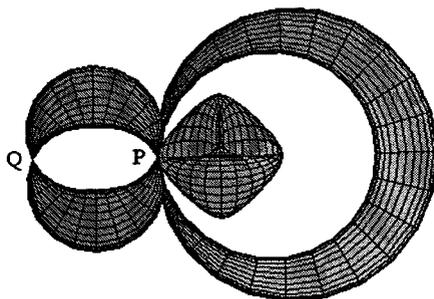


Figura 6.4: La pseudosuperficie  $\mathcal{T}$ .

2. Todos sus puntos singulares son homeomorfos a la unión en un punto de dos discos.
3. Al menos uno de esos discos pertenece a una célula con un solo punto singular (el del pegamiento de los dos discos).

Por tanto, la pseudosuperficie obtenida cumple las condiciones exigidas para la entrada del **Algoritmo B**.

Para terminar esta sección, y a modo de ejemplo, vamos a describir el algoritmo A tomando una pseudosuperficie concreta para la entrada.

**Ejemplo 2.** Sea  $\mathcal{T}$  la pseudosuperficie que se obtiene de identificar un punto de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , el punto singular de  $B_1$  y un punto singular de  $B_2$  en un mismo punto (véase la Figura 6.4) y sea  $G$  un grafo cualquiera. ¿Admite  $G$  una inmersión en  $\mathcal{T}$ ?

Vamos a aplicar el algoritmo A a la entrada  $(G, \mathcal{T})$ .

**Paso I.** Comprobamos si la pseudosuperficie  $\mathcal{T}$  tiene algún punto singular con un entorno homeomorfo a la unión en un punto de al menos tres discos abiertos o bien que no pertenece a una célula cuyo único punto singular sea él. Encontramos dos de tales puntos singulares, uno con entornos homeomorfos a la



unión en un punto de 5 discos abiertos, que denotamos  $P$ , y otro que pertenece a una única célula que tiene, además, otro punto singular, que denotaremos  $Q$  (véase la Figura 6.4). Por tanto y siguiendo la notación del algoritmo,  $A_{\mathfrak{X}} = \{P, Q\}$ .

Consideremos el punto singular  $P$  del conjunto anterior y vamos a cortarlo en los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$ .

Si aplicamos el procedimiento descrito en la demostración del Lema 6.1 a la pseudosuperficie  $\mathfrak{X}$  obtenemos la superficie  $\mathbb{T}_2 \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})$  donde  $\tilde{\gamma}(\mathbb{T}_2 \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})) = 5$ .

En cada  $P_i$  para  $i = 1, \dots, 5$  vamos a pegar la superficie  $\mathbb{T}_2 \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})$ . Sea  $\mathfrak{X}_1$  la pseudosuperficie resultante, que puede verse en la Figura 6.5. Obsérvese que  $A_{\mathfrak{X}_1} = \{Q\}$ .

Consideremos todos los grafos que resultan de cortar un punto interior a una arista de  $G$  de todas las formas posibles (subdividimos la arista y cortamos el vértice añadido) y todos los grafos que resultan de cortar un vértice de  $G$  en  $m$  nuevos vértices, donde  $2 \leq m \leq 5$ . Sea  $\mathcal{G}(G)$  el conjunto de los grafos resultantes de pegar a cada uno de los grafos anteriores el grafo  $C_6(K_5)$  en cada vértice resultante del corte, ya que  $\tilde{\gamma}(\mathbb{T}_2 \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})) = 6$ .

Por construcción se tiene que si algún elemento de  $\mathcal{G}(G)$  admite una inmersión en  $\mathfrak{X}_1$  entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{X}$ .

**Paso II.**  $A_{\mathfrak{X}_1} = \{Q\} \neq \emptyset$ . Por tanto, aplicamos el **algoritmo A** a cada entrada  $(G', \mathfrak{X}_1)$  para todo  $G' \in \mathcal{G}(G)$ .

Consideremos el punto singular  $Q$  y vamos a cortarlo en los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Si aplicamos el procedimiento descrito en la demostración del Lema 6.1 a la pseudosuperficie  $\mathfrak{X}_1$  obtenemos la superficie  $\mathbb{T}_{15} \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})$  donde  $\tilde{\gamma}(\mathbb{T}_{15} \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})) = 31$ .

En  $Q_1$  y  $Q_2$  vamos a pegar la superficie  $\mathbb{T}_{15} \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{I}P_2(\mathbb{R})$ . Sea  $\mathfrak{X}_2$  la pseudosuperficie resultante (véase la Figura 6.6). Obsérvese que  $A_{\mathfrak{X}_2} = \emptyset$ .

Consideremos todos los grafos que resultan de cortar un punto interior a una arista de  $G'$  de todas las formas posibles (subdividimos la arista y cortamos

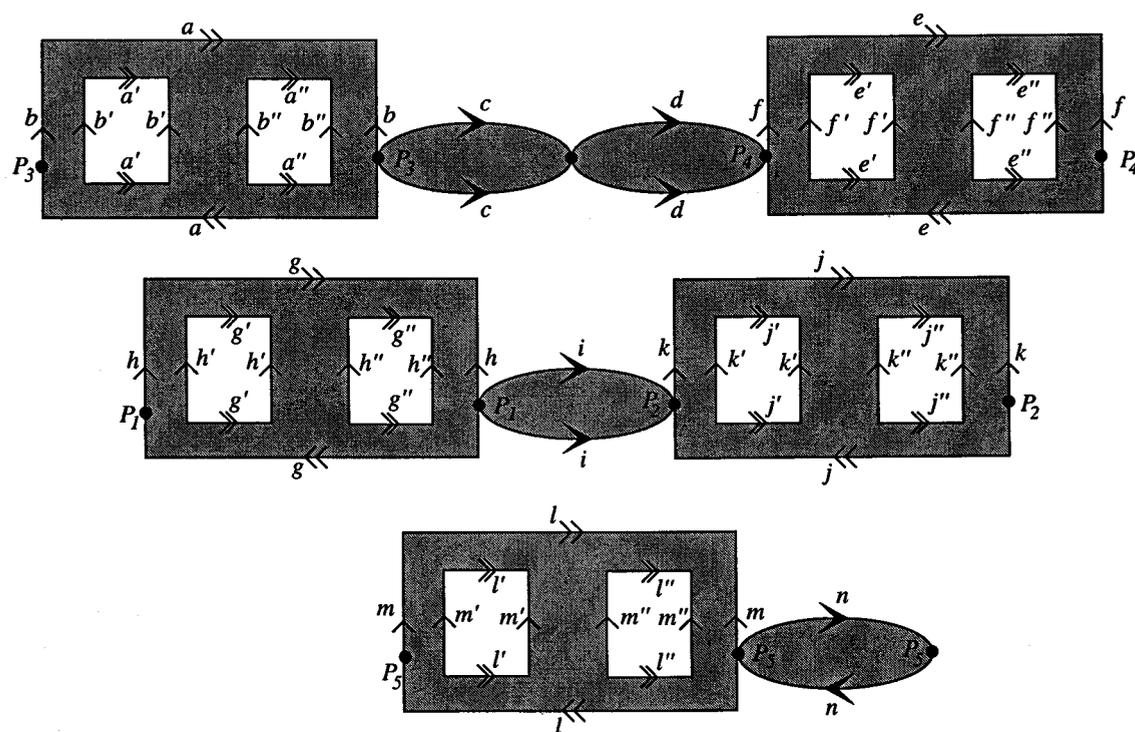


Figura 6.5: La pseudosuperficie  $\mathfrak{T}_1$ .

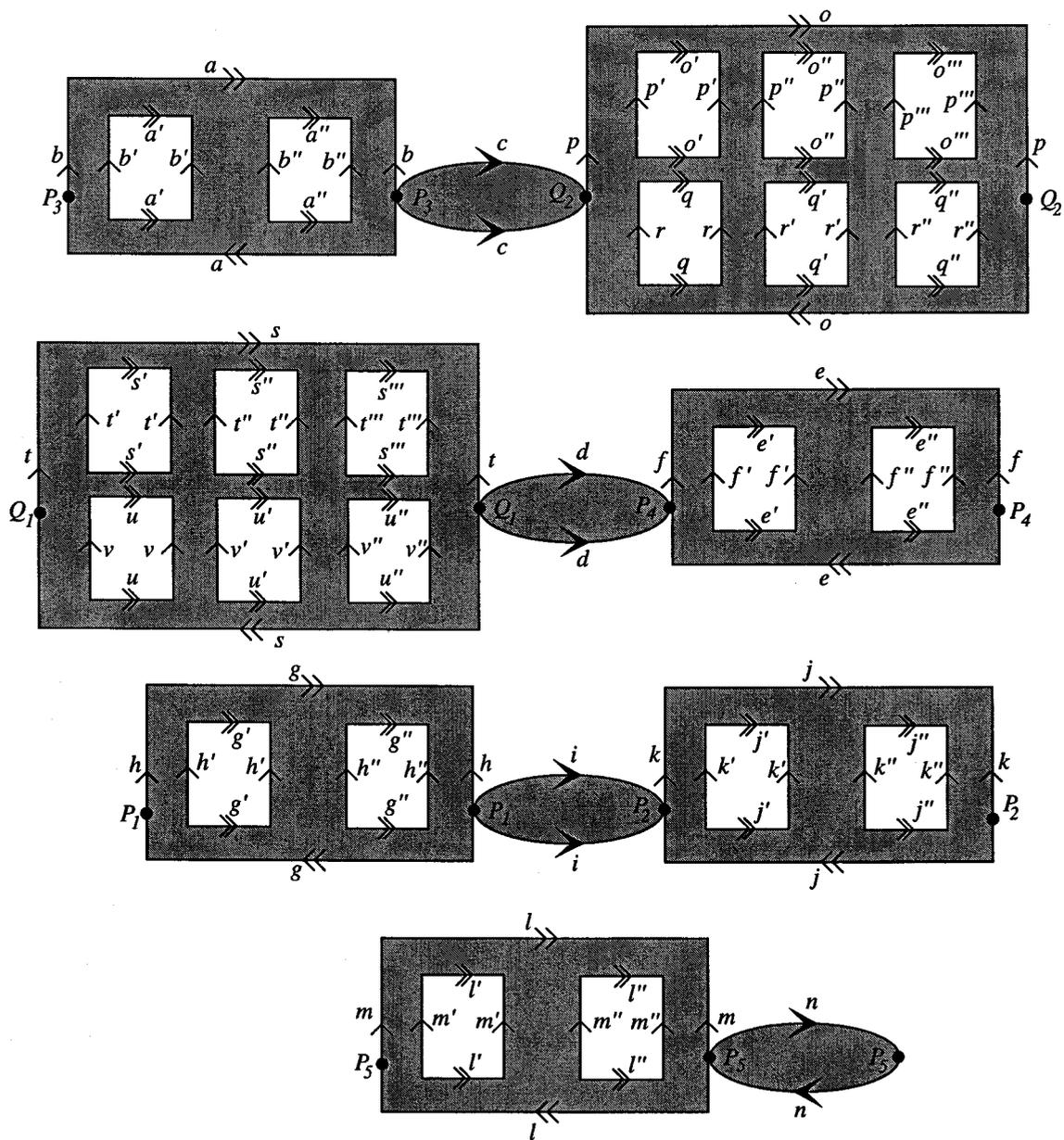


Figura 6.6: La pseudosuperficie  $\mathcal{T}_2$  y sus componentes conexas, de arriba a abajo,  $\mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{U}_3$  y  $\mathcal{U}_4$ .

el vértice añadido) y todos los grafos que resultan de cortar un vértice de  $G'$  en 2 nuevos vértices. Sea  $\mathcal{G}(G')$  el conjunto de los grafos resultantes de pegar a cada uno de los grafos anteriores el grafo  $C_{32}(K_5)$  en cada vértice resultante del corte, ya que  $\tilde{\gamma}(\mathbb{T}_{15}\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 32$ .

Por construcción se tiene que si algún elemento de  $\bigcup_{G' \in \mathcal{G}(G)} \mathcal{G}(G')$  admite una inmersión en  $\mathfrak{T}_2$  entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathfrak{T}$ .

**Paso III.** Puesto que  $A_{\mathfrak{T}_2} = \emptyset$ , llamamos (como a un subprograma) al **algoritmo B** aplicándolo a la entrada  $(H, \mathfrak{T}_2)$  donde  $H \in \bigcup_{G' \in \mathcal{G}(G)} \mathcal{G}(G')$ .

Sean  $\mathcal{U}_i$  las componentes conexas de  $\mathfrak{T}_2$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$  (según nos muestra la Figura 6.6).

Sean  $H_1, \dots, H_k$  las componentes conexas de  $H$ , con  $k \in \mathbb{N}$ . Consideremos los grafos  $H_1^\beta$  y  $H_2^\beta$ , para todo  $\beta \in I$ , donde  $H_1^\beta$  y  $H_2^\beta$  son uniones disjuntas de componentes conexas de  $H$  que vienen dadas en función de los elementos del conjunto  $I = \{\beta = (b_1, \dots, b_k) / b_i \in \{1, 0\}, \forall i = 1, \dots, k\}$ , de tal forma que, dado  $\beta \in I$ ,  $H_i \subset H_1^\beta \Leftrightarrow b_i = 1$  y  $H_i \subset H_2^\beta \Leftrightarrow b_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

**Paso IV.** Aplicamos el **Algoritmo B<sub>1</sub>** a la entrada  $(H_1^\beta, \mathcal{U}_1)$  que describimos a continuación.

**Paso IV.I.** Para simplificar la notación, nombramos  $\hat{H} = H_1^\beta$ . Si  $\hat{H}$  es 2-conexo, aplicamos el algoritmo GS (véase Lema 6.3) a la entrada  $(\hat{H}, S)$  con  $S \in \{\mathbb{T}_{15}\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R}), S_0, \mathbb{T}_2\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\}$ , que son las células de  $\mathcal{U}_1$ . Si la respuesta del algoritmo GS es afirmativa para alguna entrada entonces  $\boxed{\hat{H} \hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

Si, por el contrario, la respuesta del algoritmo GS es negativa para todas las entradas entonces  $\boxed{\hat{H} \not\hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

Si  $G$  no es 2-conexo vamos al paso siguiente.

**Paso IV.II.** Cortamos la pseudosuperficie  $\mathcal{U}_1$  por el punto singular  $P_4$ . Resulta de dicho corte la pseudosuperficie  $(\mathbb{T}_{15}\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \vee S_0$  y la superficie  $\mathbb{T}_2\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Consideremos los grafos  $\hat{H}_1^\beta$  y  $\hat{H}_2^\beta$ , para todo  $\beta \in I$ , contruidos tal como se describe en el Paso III.

Aplicamos de forma recursiva el **algoritmo B<sub>1</sub>** a la entrada  $(\hat{H}_1^\beta, (\mathbb{T}_{15} \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \vee S_0)$  y el algoritmo **GS** referido en el Lema 6.3 a la entrada  $(\hat{H}_2^\beta, \mathbb{T}_2 \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ . Si existe  $\beta \in I$  para la que la respuesta de ambos algoritmos es afirmativa entonces  $\boxed{\hat{H} \hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

En otro caso, si  $\hat{H}$  admite una inmersión en  $\mathcal{U}_1$ , ha de utilizarse el punto singular  $P_4$  en la inmersión, es decir, la inmersión habrá de llevar un vértice o un punto interior de una arista de  $\hat{H}$  en  $P_4$ .

Volvemos al Paso IV.II con el otro punto singular  $Q_1$ .

**Paso IV.III.** Si el flujo del algoritmo todavía no ha sido interrumpido, de existir una inmersión de  $\hat{H}$  en  $\mathcal{U}_1$ , ésta debe usar los puntos singulares  $P_4$  y  $Q_1$  en la forma descrita anteriormente. La célula de  $\mathcal{U}_1$  que contiene a los dos puntos singulares es  $S_0$ .

Computamos los puntos de corte de  $\hat{H}$  y supongamos que  $\hat{H}$  tiene  $m$  puntos de corte, que llamaremos  $v_1, \dots, v_m$ . Si  $m < 2$  entonces  $\boxed{\hat{H} \not\hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

**Paso IV.IV.** Consideremos  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \subset \{v_1, \dots, v_m\}$ .

Vamos a cortar en dos cada  $v_{i_j}$  con  $j = 1, \dots, n$  de forma que exista un subgrafo de  $\hat{H}$ , que llamaremos  $\hat{H}'$ , tal que  $u_{i_j} \in V(\hat{H}')$  para todo  $j = 1, \dots, n$  donde  $u_{i_j}$  es uno de los dos vértices resultantes del corte de  $v_{i_j}$ . Si esto no fuera posible, hacemos otra elección del conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$  y repetimos la operación. Si encontrar  $\hat{H}'$  en las condiciones descritas no fuera posible para ningún conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \subset \{v_1, \dots, v_m\}$  entonces  $\boxed{\hat{H} \not\hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

Consideremos  $\hat{H} = \hat{H}' \cup \hat{H}''$  para todo  $\hat{H}'$  en las condiciones anteriores, donde  $\hat{H}'' = \hat{H} - \hat{H}'$ . Por construcción  $\hat{H}' \cap \hat{H}'' = \emptyset$ . Aplicamos el algoritmo **GS** referido en el Lema 6.3 a la entrada  $(\hat{H}', S_0)$  y el algoritmo **GPS**, también detallado en el Lema 6.3, a la entrada  $(\hat{H}'', \mathbb{T}_{15} \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \sqcup \mathbb{T}_2 \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ .

Si en algún caso los algoritmos **GS** y **GPS** dan una respuesta afirmativa entonces  $\boxed{\hat{H} \hookrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

En otro caso repetimos el **Paso IV.IV** haciendo otra elección del conjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ . Si para ninguna de estas elecciones se obtiene una respuesta afirmativa de los algoritmos **GS** y **GPS** entonces  $\boxed{\hat{H} \not\leftrightarrow \mathcal{U}_1}$ .

**Paso V.** Aplicamos de forma recursiva el **Algoritmo B** a la entrada  $\left(H_2^\beta, \bigsqcup_{i=2}^4 \mathcal{U}_i\right)$ .

Si existe  $\beta \in I$  para la cual el **Algoritmo B** y el **Algoritmo B<sub>1</sub>** responden afirmativamente, entonces  $\boxed{G \leftrightarrow \mathcal{T}}$  **FIN**.

En otro caso  $\boxed{G \not\leftrightarrow \mathcal{T}}$  **FIN**.

## 6.4 Problemas abiertos

Para terminar, quedan abiertos los siguientes problemas: caracterizar las pseudosuperficies que poseen un teorema de Kuratowski finito y determinar si para cualquier pseudosuperficie existe un algoritmo que decida en tiempo polinomial si un grafo dado admite una inmersión en ella. En relación con la primera de las cuestiones proponemos la siguiente conjetura:



# Capítulo 7

## Teoremas de Kuratowski en bosques

En este capítulo, probaremos que todas las pseudosuperficies denominadas bosques y formadas por esferas y planos proyectivos poseen los mismos grafos 2-conexos prohibidos, esto es, los 90 grafos 2-conexos prohibidos para el plano proyectivo [2, 3, 21]. Los no 2-conexos prohibidos dependerán de cada bosque en concreto, algunos de los cuales explicitaremos.

### 7.1 Introducción

Sea  $S$  una pseudosuperficie. Si  $S$  contiene como subespacio topológico a una esfera con exactamente un punto singular, diremos que  $S$  es *esféricamente reducible*. En caso contrario diremos que  $S$  es *esféricamente irreducible*. De toda pseudosuperficie  $S$  se puede obtener otra esféricamente irreducible  $S'$  borrando sucesivamente las esferas pegadas por exactamente un punto singular. Además  $S'$  está determinada de forma única por  $S$ .

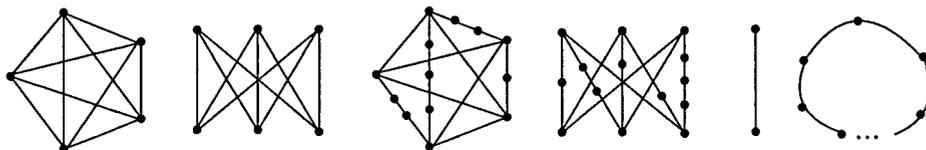


Figura 7.1: Algunos bloques de grafos prohibidos no 2-conexos.

Diremos que un grafo  $G$  es prohibido para una (pseudo)superficie  $S$  dada respecto a un orden parcial  $<$  si  $G$  no admite una inmersión en  $S$  pero  $H$  sí la admite, para todo grafo  $H$  tal que  $H < G$ .

Un *bosque* es una pseudosuperficie en la que toda curva cerrada simple de Jordan está contenida en una sola célula. La Figura 7.2 nos muestra un ejemplo. Un  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$  bosque es un bosque en el que toda célula es una esfera o un plano proyectivo.

Hemos elegido  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques para evitar cualquier configuración similar a la de la bananas surface. Además,  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  y  $S_0$  son las únicas superficies con un Teorema de Kuratowski explícito.

Proponemos la siguiente conjetura en base a los resultados obtenidos en este trabajo.

**Conjetura 7.1.** *Todo  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque tiene un conjunto de grafos prohibidos finito.*

En adelante, vamos a usar la siguiente notación: denotamos por  $A \vee B$  a la pseudosuperficie obtenida identificando un punto de  $A$  con exactamente un punto de  $B$ , donde  $A$  y  $B$  son células.  $G_1 \vee G_2$  es el grafo obtenido identificando un vértice del grafo  $G_1$  con un vértice del grafo  $G_2$ . Si el grafo resultante depende de los vértices identificados, éstos se explicitan. Notaremos  $G_1 \frown G_2 = G_1 \vee K_2 \vee G_2$  y  $G_1 \nabla G_2 = G_1 \vee K_3 \vee G_2$ .

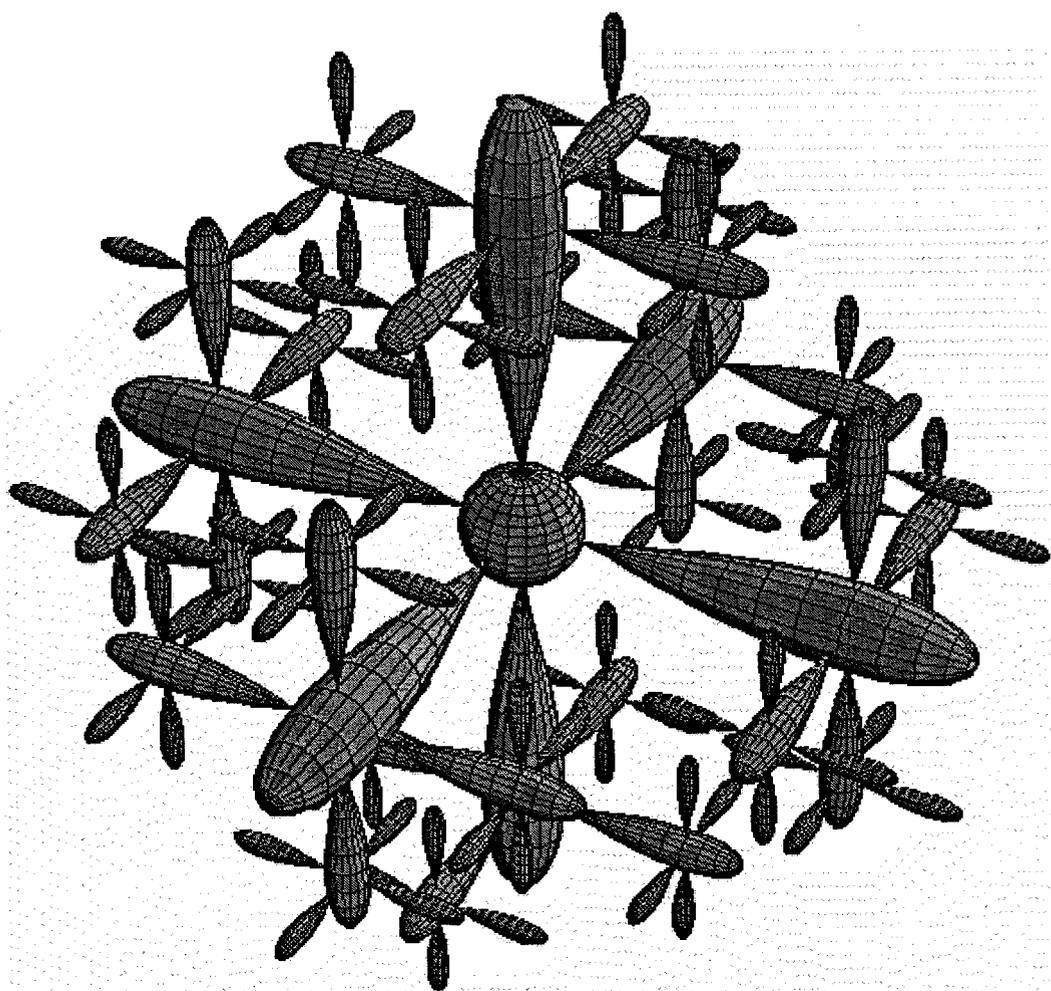


Figura 7.2: Ejemplo de pseudosuperficie denominada *bosque*.



## 7.2 Grafos 2-conexos prohibidos

Es evidente que el conjunto de obstrucciones minimales para cualquier  $S_0$ -bosque es  $\{K_5, K_{3,3}\}$ , esto es, el conjunto de obstrucciones minimales para el plano. Por tanto, podemos suponer que al menos una célula de cada  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque es un plano proyectivo.

Para demostrar nuestro resultado principal vamos a distinguir grafos minimales prohibidos 2-conexos y no 2-conexos. El siguiente resultado nos muestra cuáles son los grafos minimales 2-conexos prohibidos en todo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque. Para demostrarlo necesitamos varios lemas previos.

**Lema 7.2.** *Sea  $G$  un grafo 2-conexo y sea  $\mathcal{B}$  un  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque tal que al menos una de sus células es un plano proyectivo. Entonces  $G$  admite una inmersión en  $\mathcal{B}$  si y sólo si  $G$  admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.*  $\boxed{\Leftarrow}$  Es evidente puesto que al menos una de las células de  $\mathcal{B}$  es un plano proyectivo.

$\boxed{\Rightarrow}$  Supongamos que  $G$  no admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Consideremos una inmersión de  $G$  en  $\mathcal{B}$ . En dicha inmersión ha de haber necesariamente dos vértices de  $G$  en dos células distintas de  $\mathcal{B}$ . Puesto que  $G$  es 2-conexo, por el Teorema de Menger ha de haber dos caminos disjuntos de  $G$  que conectan los dos vértices anteriores. Por tanto hay un ciclo que pasa por dos células de  $\mathcal{B}$  con lo que llegamos a contradicción pues  $\mathcal{B}$  es un bosque.  $\square$

A continuación presentamos otro resultado previo.

**Lema 7.3.** *Sea  $G$  un grafo 2-conexo no sumergible en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Entonces existe  $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  tal que  $H$  es 2-conexo y  $H <_1 G$ .*

*Demostración.* Puesto que  $G$  no es sumergible en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  existe  $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  tal que  $H <_1 G$ . Si  $H$  es 2-conexo se tiene el enunciado, luego supongamos que  $H$  no es 2-conexo.

La demostración de este resultado concluye tomando de forma exhaustiva todos los grafos 0-conexos y 1-conexos de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ , transformándolos en 2-conexos añadiendo aristas (o caminos) vértice-vértice, vértice-arista o arista-arista, y comprobando que en todos los casos los grafos obtenidos contienen como menor topológico a algún 2-conexo de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ .

Los grafos 0-conexos y 1-conexos de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  son  $K_5 \cup K_5$ ,  $K_5 \cup K_{3,3}$ ,  $K_{3,3} \cup K_{3,3}$  o bien  $H_1 \vee H_2$ , donde  $H_i$ , con  $i = 1, 2$ , es  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  o bien cualquiera de ellos con una arista subdividida. En este último caso pegamos el vértice que subdivide a la arista. Se obtienen 13 grafos en total (véase [2, 3, 21]).  $\square$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores ya podemos enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

**Teorema 7.4.** *Sea  $\mathcal{B}$  un  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque tal que al menos una de sus células es un plano proyectivo.  $G$  es un grafo 2-conexo prohibido en  $\mathcal{B}$  si y sólo si  $G$  es un grafo 2-conexo prohibido en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.*  $\Leftarrow$  Sea  $G$  un grafo minimal 2-conexo prohibido en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Por el Lema 7.2,  $G$  no admite una inmersión en  $\mathcal{B}$ . Sea  $H$  un grafo tal que  $H <_1 G$ . Por ser  $G$  minimal en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $H$  admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y, por el Lema 7.2, en  $\mathcal{B}$ . De ambas se obtiene que  $G$  es un grafo 2-conexo prohibido en  $\mathcal{B}$ .

$\Rightarrow$  Supongamos que  $G$  es un grafo 2-conexo prohibido en  $\mathcal{B}$ . Por el Lema 7.2,  $G$  no admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Usando el Lema 7.3 se tiene que existe  $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  con  $H$  2-conexo y  $H <_1 G$ . Supongamos que  $H \neq G$ . Puesto que  $H$  no admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , por el Lema 7.2,  $H$  tampoco es sumergible en  $\mathcal{B}$ . Puesto que  $H$  es un menor topológico de  $G$ , llegamos a contradicción con la minimalidad de  $G$  en  $\mathcal{B}$ .

Por tanto  $H = G$  con lo que  $G$  es un subgrafo 2-conexo prohibido en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .  $\square$



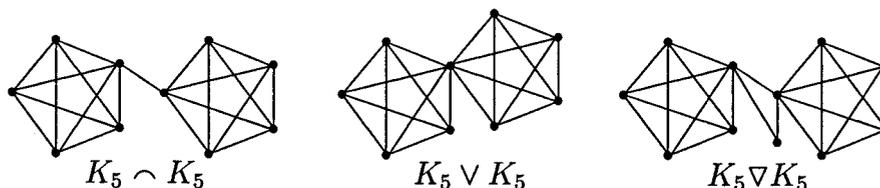


Figura 7.3: Los grafos  $K_5 \sim K_5$ ,  $K_5 \vee K_5$  y  $K_5 \nabla K_5$ .

### 7.3 Bosques caracterizables por menores

Observemos que no todos los conjuntos de obstrucciones minimales en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques pueden ser obtenidos usando el orden  $<_2$ . Por ejemplo,  $K_5 \sim K_5$  admite una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  y  $K_5 \vee K_5$  no la admite. Sin embargo  $K_5 \vee K_5 <_2 K_5 \sim K_5$  (véase Figuras 7.3 y 7.4). Para abreviar, diremos que un bosque es caracterizable por menores en vez de afirmar que el conjunto de obstrucciones minimales en dicho bosque puede obtenerse usando el orden  $<_2$ .

Knor obtiene en el Teorema 1.1 el resultado que nos muestra cuales son las pseudosuperficies caracterizables por menores.

Como consecuencia de este resultado y de [38] los  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques que verifiquen las condiciones del enunciado poseen un teorema de Kuratowski finito usando los órdenes  $<_1$  y  $<_2$ .

### 7.4 Grafos no 2-conexos prohibidos

El conjunto de grafos prohibidos no 2-conexos depende de cada  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque en particular. Algunos de los bloques que los forman son los siguientes:  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ , subdivisiones de  $K_5$  y  $K_{3,3}$ ,  $K_2$  y  $C_n$  (véase Figura 7.1).

Como ejemplo, observemos que  $K_5 \nabla K_5$  es un grafo minimal prohibido para

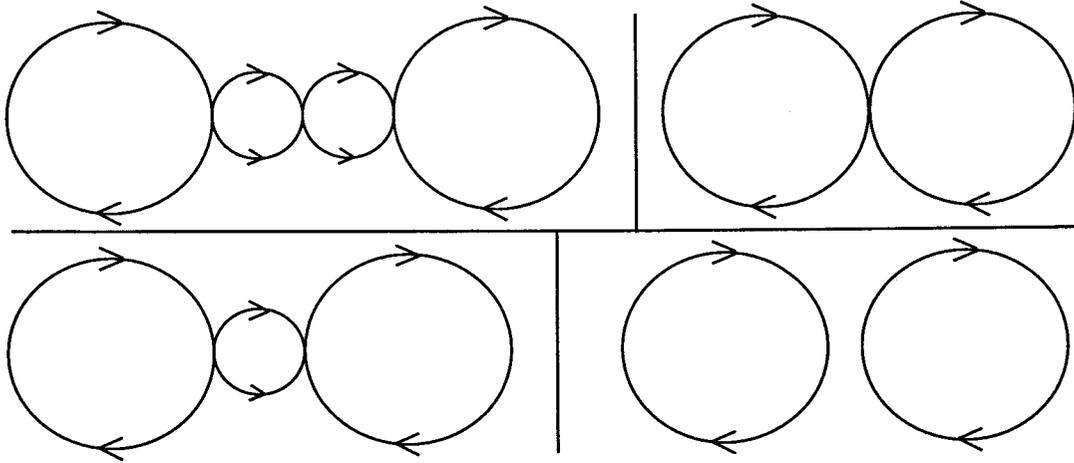


Figura 7.4: Los  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , y  $K_5 \frown K_5$  es un grafo minimal prohibido para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , ambos usando el orden  $<_1$  (véase Figura 7.3).

Aún cuando cada bosque en particular tenga distintos grafos no 2-conexos prohibidos, proponemos la siguiente conjetura:

**Conjetura 7.5.** *Todo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosque tiene un conjunto de grafos no 2-conexos prohibidos finito.*

Una idea de la demostración sería la siguiente: puesto que las células de mayor género son planos proyectivos, los bloques no planos de los grafos prohibidos tienen género, a lo más, 1 pues de lo contrario contendrían a un 2-conexo prohibido en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Por minimalidad, estos bloques han de ser  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  o subdivisiones de éstos. Puesto que el bosque tiene una cantidad finita de células, el número de bloques no planos ha de ser finito también.

Por otra parte, el resto del grafo, que es plano, ha de ser tal que al quitar un

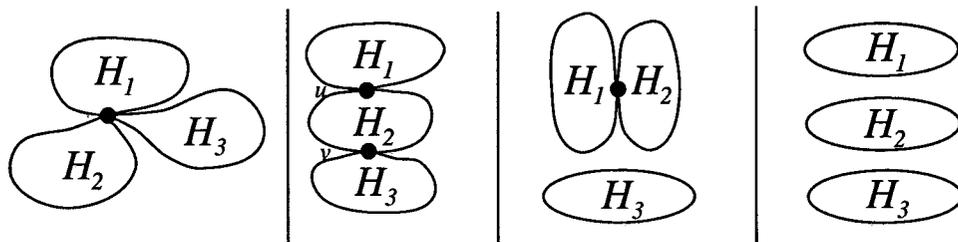


Figura 7.5: Los grafos  $\bigvee_{i=1}^3 H_i$ ,  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$ ,  $(H_1 \vee H_2) \cup H_3$  y  $\bigcup_{i=1}^3 H_i$ .

elemento, tome una forma parecida a un árbol en el que se han sustituido algunos vértices por ciclos, no mucho mayores que el número de células adyacentes a una dada, para que los bloques no planos del grafo resultante puedan ser llevados a planos proyectivos y el grafo resultante pueda sumergirse en el bosque. De ambos razonamientos se obtendría el enunciado.

Observemos que, de probarse esta conjetura, y usando el Teorema 7.4 se tendría la Conjetura 7.1.

Finalmente, vamos a estudiar varios casos particulares:

## 7.5 Teoremas de Kuratowski en bosques concretos.

En esta sección mostramos los menores minimales y los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para algunos  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques.

En primer lugar, estudiaremos los bosques  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$ .

Dichos bloques son caracterizables por menores por el Teorema 1.1, pero además también daremos la lista de los menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.6.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\{H_1 \vee H_2\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que los grafos dados no admiten una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ; pero sin embargo, los grafos que resultan de quitarles un elemento o efectuar una contracción a los dados, sí se pueden sumergir en dicha pseudosuperficie.

Por otra parte se comprueba que la lista está completa de forma exhaustiva; es decir, tomamos un grafo  $H$  minimal no 2-conexo prohibido. Sucede que los bloques de  $H$  admiten una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Pero además, dichos bloques tienen que ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . Pueden ocurrir los siguientes casos:

- Hay dos bloques pegados por un punto. En este caso llegamos a que es uno de los del enunciado del Teorema.
- Hay tres bloques disjuntos. También llegamos a que es uno de los casos del enunciado.
- Hay dos bloques disjuntos. En esta situación, dicho grafo admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , lo cual es una contradicción.

Por tanto, se llega a que  $H$  es uno de los grafos arriba enumerados.

Vamos ahora a contar el número de menores minimales no 2-conexos prohibidos de este bosque. Observamos que grafos del tipo  $H_1 \vee H_2$  hay 3 distintos y del tipo

$\bigcup_{i=1}^3 H_i$  hay 4 distintos. En total son 7.

Pero ya sabemos que los 2-conexos prohibidos de este bosque son los mismos que los de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  por el Teorema 7.4, que en total son 29.

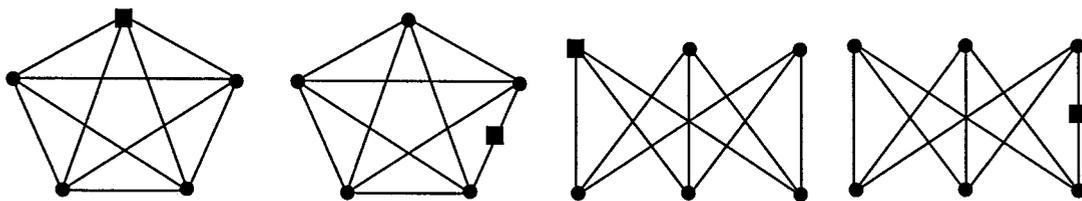


Figura 7.6: Algunos bloques de grafos prohibidos en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - $S_0$ -bosques.

Como consecuencia,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene 36 menores minimales prohibidos.  $\square$

Procederemos ahora a calcularle a este mismo bosque, los menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.7.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\} \cup \{H_1 \wedge H_2\}$ , donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Todos los grafos del enunciado no se pueden sumergir en la pseudosuperficie  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , pero si a dichos grafos le quitamos una arista se puede realizar la inmersión. La familia  $\{H_1 \wedge H_2\}$  posee  $CR(4, 2) = 10$  grafos ya que  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6, al tratarse de menores topológicos.

Por tanto, menores topológicos no 2-conexos existen 24 ya que además hay que considerar los 4 que surgen de la familia  $\bigcup_{i=1}^3 H_i$ , y tener en cuenta que grafos del tipo  $H_1 \vee H_2$  existen  $CR(4, 2) = 10$  puesto que  $H_i$  con  $i = 1, 2$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6. Por otra parte, los menores topológicos 2-conexos son los mismos del plano proyectivo por el Teorema 7.4, que en total son 90.

Así pues, el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene 114 menores topológicos prohibidos.  $\square$ .

Vamos a generalizar este resultado, dando los menores minimales y los menores

topológicos prohibidos del bosque  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$

**Teorema 7.8.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\}$ , donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Está claro que los grafos que se describen en el enunciado no admiten una inmersión en el bosque citado; pero los grafos que resultan de quitarles un elemento o efectuar una contracción a los grafos dados, sí la admiten.

La lista está completa por el mismo razonamiento seguido en el Teorema 7.6.

Para finalizar, vamos a contar el número de menores minimales no 2-conexos prohibidos de este bosque.

Grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$  existen  $n + 2$  ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . Además, grafos del tipo  $\{H_1 \vee H_2\}$  hay 3. A esta cantidad hay que añadir los 29 menores 2-conexos prohibidos del plano proyectivo.

Por tanto, la pseudosuperficie  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$  tiene  $34+n$  menores minimales prohibidos.  $\square$ .

**Teorema 7.9.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\} \cup \{H_1 \frown H_2\}$ , donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Los grafos dados en el enunciado son todos los menores topológicos prohibidos por el mismo razonamiento utilizado en el Teorema 7.7.

A la hora de contar el total de ellos, observemos que grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$



existen  $n + 2$  ya que  $h_i$  puede ser un  $K_5$  o bien un  $K_{3,3}$ . De la forma  $\{H_1 \vee H_2\}$  hay  $\text{CR}(4, 2) = 10$  grafos porque, en este caso, el bloque  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6. También existen 10 grafos del tipo  $\{H_1 \wedge H_2\}$  puesto que los  $H_i$  juegan el mismo papel que en el caso anterior. El total de menores topológicos no 2-conexos prohibidos es, pues, de  $22+n$ . Pero a esta cantidad tenemos que sumarles los 90 menores topológicos del plano proyectivo.

Por tanto, el bosque  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \cdots \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$  posee  $112 + n$  menores topológicos prohibidos.  $\square$ .

A continuación, vamos a calcular los menores minimales del bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y, en general, de  $\underbrace{\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \cdots \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})}_{n \text{ veces}}$ . A este último bosque lo denotaremos, por comodidad, de la forma  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Estas pseudosuperficies ya sabemos que son caracterizables por menores. Pero también hallaremos los menores topológicos prohibidos para los citados bosques.

**Teorema 7.10.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Es evidente que los grafos dados en el enunciado del Teorema no admiten una inmersión en la pseudosuperficie  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y sin embargo, los grafos que resultan de quitarles un elemento o efectuar una contracción a los grafos dados, sí la admiten.

Por otra parte se comprueba que la lista está completa de forma exhaustiva; es decir, tomamos un grafo  $H$  no 2-conexo prohibido y, distinguiendo casos, se llega a que  $H$  es uno de los grafos arriba enumerados.

Por último, vamos a contar el número de menores minimales no 2-conexos prohibidos de este bosque. Observemos que grafos del tipo  $(H_1 \vee H_2) \cup H_3$  hay 6 distintos, mientras que del tipo  $\bigcup_{i=1}^3 H_i$  hay 4 distintos, del tipo  $\bigvee_{i=1}^3 H_i$  nos encontramos con 4 distintos. Sin embargo, de la forma  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$  existen 9 grafos distintos porque cuando  $H_2 = K_{3,3}$  hay que distinguir los dos casos en los que el par  $u, v$  juegan el mismo papel dentro del  $K_{3,3}$  ó no. En total, obtenemos 23 menores minimales no 2-conexos prohibidos.

Pero ya sabemos por el Teorema 7.4, que los 2-conexos prohibidos son los 29 del plano proyectivo.

Como consecuencia,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene 52 menores minimales prohibidos.  $\square$

En lugar de calcular los menores minimales prohibidos del bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  vamos a calcular los menores topológicos prohibidos de dicho bosque y veremos que el número total de grafos será a muy distinto.

**Teorema 7.11.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Tal como se dijo en el Teorema anterior, todos estos grafos no admiten una inmersión en el bosque, pero al quitarles una arista se pueden sumergir en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Observemos que grafos del tipo  $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3\}$  hay ahora  $CR(4, 2) \cdot 2 = 20$  ya que  $H_i$  puede ser alguno de los grafos de la Figura 7.6. En cuanto a la familia  $\bigcup_{i=1}^3 H_i$  sigue habiendo 4 ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . Por otra parte, grafos de la forma  $\bigvee_{i=1}^3 H_i$  existen  $CR(4, 3) = 20$ .

Tan sólo quedan por contar los grafos de la forma  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$ . Los grafos que están en los extremos, a los cuales hemos llamado  $H_1$  y  $H_3$ , pueden ser algunos de

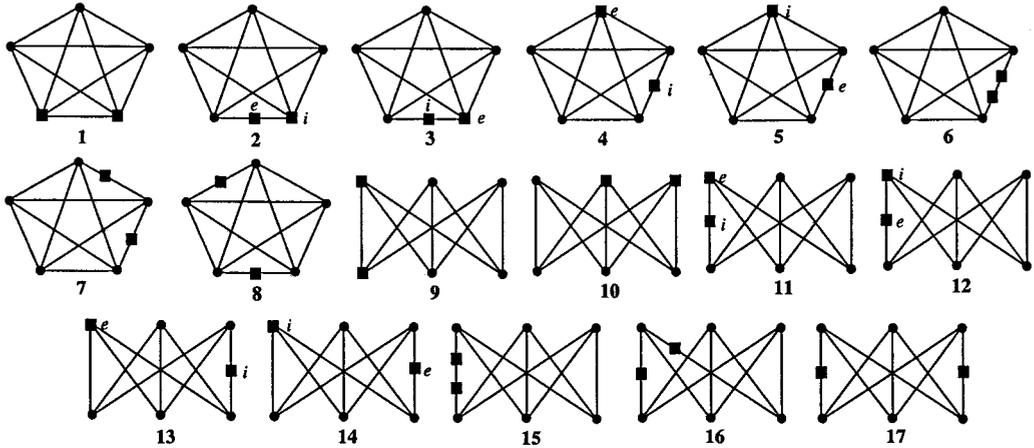


Figura 7.7: Algunos bloques de grafos prohibidos en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\text{-S}_0\text{-bosques}$ .

los cuatro grafos de la Figura 7.6. Distingamos dos casos:

- Si  $H_1$  y  $H_3$  son grafos distintos de la lista, tenemos seis parejas distintas para poder colocar en los extremos del grafo. Pero  $H_2$  puede ser cualquiera de los 17 grafos de la Figura 7.7. En dicha figura, el grafo 2 y el grafo 3 son iguales, salvo que en 2 el vértice  $e$  se identifica con un  $H_i$  exterior y el vértice  $i$  se identifica con un  $H_i$  interior, mientras que en el grafo 3 los vértices  $i$  y  $e$  están intercambiados. Análogamente ocurre con las parejas 4 – 5, 11 – 12 y 13 – 14. Por tanto, el total de casos es  $6 \cdot 17 = 102$ .
- Si  $H_1$  y  $H_3$  son dos grafos iguales, tenemos cuatro parejas posibles para colocar en los extremos del grafo. Pero en este caso,  $H_2$  puede ser uno de los 13 grafos de la Figura 7.7 ya que las parejas 2-3, 4-5, 11-12 y 13-14 se reducen a uno sólo por la simetría. Por tanto, el total de casos es  $4 \cdot 13 = 52$ .

Como consecuencia de lo anterior, la familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$  posee 154 grafos.

En total, obtenemos 198 menores topológicos no 2-conexos prohibidos. A ésta

cantidad tenemos que añadirle los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos del plano proyectivo.

Por tanto, el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  posee 288 menores topológicos prohibidos.  $\square$ .

Vamos a generalizar los dos resultados anteriores con el bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 7.12.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para la pseudosuperficie  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , con  $n \geq 3$ , son  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^k H_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=k+1}^{n+1} H_j \right) \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\} \cup \left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right) \right\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$  y con  $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$ .*

*Demostración.* Es obvio que los grafos dados en el enunciado del Teorema no se pueden sumergir en el bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . Sin embargo, al efectuar una contracción de dichos grafos, o bien al quitarles un elemento, los grafos resultantes sí admiten una inmersión en la pseudosuperficie.

También se comprueba que la lista está completa de forma exhaustiva; es decir, tomamos un grafo  $H$  no 2-conexo prohibido y, distinguiendo casos, se llega a que  $H$  es uno de los grafos arriba enumerados.

En último lugar, vamos a contar el número de menores minimales no 2-conexos prohibidos que tiene este bosque en concreto. Observemos que cuando  $k = 1$  obtenemos la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$  en la cual existen  $CR(2, n+1) = n+2$ , que es la misma cantidad de grafos que podemos encontrar en la familia  $\left\{ \bigvee_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$  la cual se obtiene para  $k = n+1$ .

Cuando nos referimos a los grafos de la familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^k H_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=k+1}^n H_j \right) \right\}$ , con



$2 \leq k \leq n$ , podemos decir que hay  $\sum_{i=2}^n \text{CR}(2, i) \cdot \text{CR}(2, n-i+1) = \sum_{i=2}^n (i+1)(n-i+2)$ . Por último, ya sabemos por el Teorema anterior que existen 9 grafos distintos del tipo  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$ . Es obvio que la familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right) \right\}$  posee 6 grafos distintos.

En total, hay  $19 + 2n + \sum_{i=2}^n (i+1)(n-i+2)$  grafos no 2-conexos prohibidos. Si a esta cantidad, le añadimos los 29 menores minimales 2-conexos prohibidos llegamos a la conclusión de que el bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene  $48 + 2n + \sum_{i=2}^n (i+1)(n-i+2)$  menores minimales prohibidos. Teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ , llegamos a que el número de menores minimales prohibidos de  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  es  $\frac{n^3 + 9n^2 + 14n + 276}{6}$

□

A continuación, mostramos una tabla donde se puede observar la evolución del número de menores minimales prohibidos de la pseudosuperficie  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , en función de los valores de  $n$ .

$n$	2	3	4	5	6	...	20
Núm. menores	52	71	90	116	150	...	2026

**Teorema 7.13.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , con  $n \geq 3$ , son  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^k H_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=k+1}^{n+1} H_j \right) \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\} \cup \left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right) \right\} \cup \{(H_1 \frown H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\} \cup \{(H_1 \frown H_2) \cup (H_3 \frown H_4)\} \cup \{H_1 \vee H_2 \frown H_3\} \cup \{H_1 \frown H_2 \frown H_3\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$  y con  $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$ . (Para las cuatro últimas familias, véase Figura 7.8).*

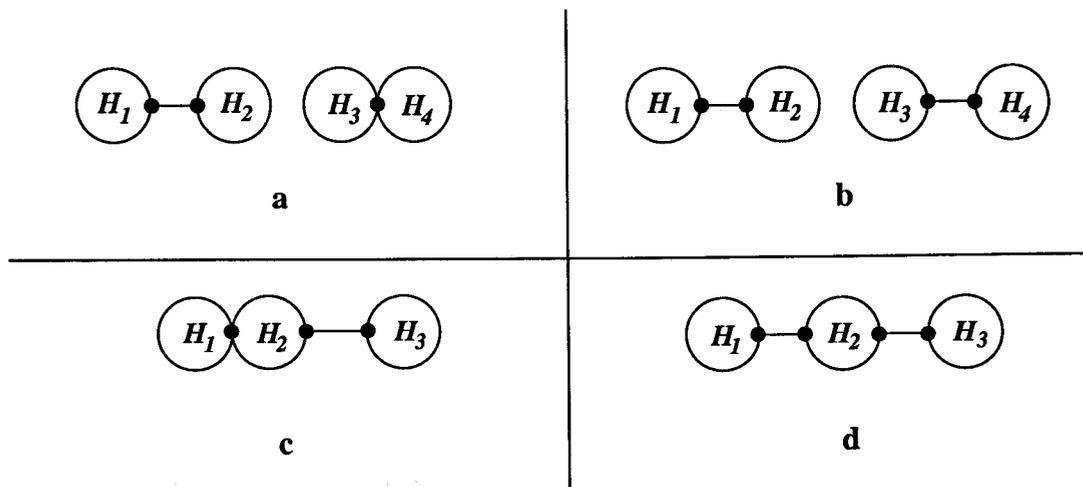


Figura 7.8: Algunos menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* La familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$  tiene  $n + 2$  grafos distintos ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . Pero en la familia  $\left\{ \bigvee_{i=1}^{n+1} H_i \right\}$  podemos encontrar  $CR(4, n + 1) = \frac{(n + 4)(n + 3)(n + 2)}{6}$  ya que  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6. Grafos del tipo  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$  hay 154 por el Teorema 7.11. Además, grafos de la familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^k H_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=k+1}^n H_j \right) \right\}$ , con  $2 \leq k \leq n$ , existen  $\sum_{i=2}^n CR(4, i) \cdot (n - i + 1) = \sum_{i=2}^n \frac{(i + 3)(i + 2)(i + 1)}{6} \cdot (n - i + 2)$ . Hay que tener en cuenta que grafos del tipo  $\left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right)$  existen 55 ya que grafos de la forma  $\bigvee_{i=1}^2 H_i$  hay  $CR(4, 2) = 10$ , los mismos que del tipo  $\bigvee_{j=3}^4 H_j$ . El total de casos es  $\frac{10 \cdot 10 - 10}{2} = 55$ .



Por último, vamos a contar la cantidad de grafos que poseen las familias de la Figura 7.8. En la familia  $a$  existen  $10 \cdot 10 = 100$  grafos ya que  $H_i$  puede ser algunos de los cuatro grafos de la Figura 7.6. Grafos del tipo  $b$  existen  $CR(10, 2) = 55$  por el mismo razonamiento utilizado en la familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right) \right\}$ . En los grafos de la forma  $c$ , observemos que  $H_1$  y  $H_3$  pueden ser algunos de los cuatro grafos de la Figura 7.6 mientras que  $H_2$  es uno de los 17 grafos de la Figura 7.7. El total es  $4 \cdot 17 \cdot 4 = 272$ . La familia denominada  $d$  tiene 154 grafos tal como se detalla en el Teorema 7.11.

También hay que tener en cuenta los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos del plano proyectivo.

Por tanto, el bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , posee la siguiente cantidad de menores topológicos prohibidos:

$$882 + n + \frac{n^3 + 9n^2 + 26n + 24}{6} + \sum_{i=2}^n \frac{(i+3)(i+2)(i+1)}{6} (n-i+2)$$

Teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$   $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$  y que  $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$ , llegamos a que  $\sum_{i=2}^n \frac{(i+3)(i+2)(i+1)}{6} (n-i+2) = \frac{n^5 + 20n^4 + 135n^3 + 400n^2 - 76n - 480}{120}$ .

De esta forma, el número de menores topológicos prohibidos del bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  es:

$$\frac{n^5 + 20n^4 + 155n^3 + 580n^2 + 564n + 105840}{120} \quad \square.$$

Para finalizar, mostramos una tabla donde se puede observar la evolución del

número de menores topológicos del bosque  $\bigvee_n \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  en función de  $n$

$n$	2	3	4	5	6	7	...	20
Núm. menores topológicos	288	990	1112	1318	1644	2135	...	66576

A partir de ahora vamos a trabajar con otro tipo de bosques, concretamente con  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , y en general con el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \underbrace{S_0 \vee \cdots \vee S_0}_{n \text{ veces}} \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  al cual por comodidad notaremos de la forma  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee n S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Ya sabemos que estos bosques no son caracterizables por menores, según lo dicho en las secciones anteriores. Por tanto, el objetivo será ahora encontrar los menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.14.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Es fácil comprobar que los grafos dados en el enunciado no admiten una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , puesto que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  son menores topológicos prohibidos para  $S_0$ .

Sin embargo, al suprimir una arista de cualquiera de ellos, ya sí admite una inmersión en el citado bosque puesto que  $H_i - \{e\}$  se puede sumergir en  $S_0$  con  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .

Además la lista está completa, ya que si tomamos un grafo  $H$  no 2-conexo prohibido y distinguimos casos, se llega a que  $H$  es uno de los grafos del enunciado.

Por último, vamos a calcular el número de menores topológicos no 2-conexos prohibidos que posee dicho bosque. Observemos que grafos del tipo  $\bigcup_{i=1}^3 H_i$  hay 4

distintos; de la forma  $H_1 \vee H_2$  existen  $CR(4, 2) = 10$ , ya que al tratarse de menores topológicos, los grafos  $H_i$  con  $i = 1, 2$  puede ser alguno de los cuatro que se muestran en la Figura 7.6. En total, son 14.

Además tenemos que añadir los menores topológicos 2-conexos prohibidos, que ya sabemos que son los de  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  por el Teorema 7.4, y éstos son 90 en total.

Como consecuencia, el bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  tiene un total de 104 menores topológicos prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.15.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee S_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\} \cup \{H_1 \vee K_3 \vee H_2\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* En primer lugar, observamos que todos los grafos que se detallan en el enunciado no admiten una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee S_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .

Sin embargo, cuando eliminamos una arista de cualquiera de ellos, sí se puede sumergir en el citado bosque.

Además, la lista está completa de forma exhaustiva, ya que al tomar un grafo  $H$  no 2-conexo prohibido y distinguir todos los casos posibles, llegamos a que  $H$  es uno de los grafos que se describen en el enunciado.

Para finalizar, vamos a hacer un recuento de todos los menores topológicos no 2-conexos prohibidos que posee este bosque. Observamos que las dos primeras familias son las mismas que las del Teorema anterior y en total se obtienen 14 grafos. Además, grafos del tipo  $H_1 \vee K_3 \vee H_2$  existen  $CR(4, 2) = 10$  en total ya que los grafos  $H_i$  con  $i = 1, 2$  pueden ser algunos de los cuatro que se muestran en la Figura 7.6. En total, este bosque posee 24 menores topológicos no 2-conexos prohibidos. A ésta cantidad hay que añadirle los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos.

Por tanto, llegamos a la conclusión de que la pseudosuperficie  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee S_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  tiene en total 114 menores topológicos prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.16.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque*

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\} \cup \{H_1 \vee rK_3 \vee H_2\}_{r=1,2,\dots,n-1}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$  con  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* Es evidente que todos los grafos del enunciado no admiten una inmersión en el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , pero si a cada uno de dichos grafos le suprimimos una arista, llegamos a que sí admiten una inmersión en dicho bosque.

La lista está completa por el mismo razonamiento utilizado anteriormente.

Procederemos a contar el número de menores topológicos no 2-conexos prohibidos de este bosque. Las dos primeras familias son las mismas del Teorema 7.14, que poseen en total 14 grafos distintos. La familia  $\{H_1 \vee rK_3 \vee H_2\}_{r=1,2,\dots,n-1}$  tiene  $10(n-1)$  grafos distintos ya que  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos que se muestran en la Figura 7.6 y además existen  $n-1$  familias distintas. En total, obtenemos  $14 + 10(n-1) = 10n + 4$  menores topológicos no 2-conexos prohibidos. A ésta cantidad tenemos que añadir los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Por tanto, el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene un total de  $10n + 94$  menores topológicos prohibidos.  $\square$

A continuación, mostramos una tabla donde se puede observar como va evolucionando el número de menores topológicos del bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , en función de los valores de  $n$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
Núm. menores toplógicos	104	114	124	134	144	154	164	...	294

**Nota 7.17.** Supongamos que  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ . Podemos observar que el grafo  $H_1 \vee K_3 \vee H_2$  no se puede sumergir en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  con  $n \geq 2$ , sin embargo dicho grafo sí admite una inmersión en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_0 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .



De la misma forma, el grafo  $H_1 \vee 2K_3 \vee H_2$  no es sumergible en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  con  $n \geq 3$ , pero sí lo es en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  con  $n \leq 2$ .

En general, el grafo  $H_1 \vee rK_3 \vee H_2$  no admite una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  con  $n \geq r + 1$ , pero se puede sumergir en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  con  $n \leq r$ .

Análogamente ocurre con los grafos  $H_1 \vdash K_3 \vee H_2$  y  $H_1 \vdash K_3 \dashv H_2$

A continuación, enunciaremos dos corolarios que se obtienen a partir de que un grafo  $G$  admita una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$

**Corolario 7.18.** *Si un grafo  $G$  admite una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee rS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ , también la admite en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$   $\forall n \leq r$*

**Corolario 7.19.** *Si un grafo  $G$  admite una inmersión en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee nS_0 \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ , también la admite en la botella de Klein.*

Seguidamente, vamos a calcular los menores topológicos prohibidos de otros nuevos bosques.

Denotamos por  $F_n(S_0)$  a la pseudosuperficie formada por una esfera en la cual  $n$  puntos distintos de dicha esfera se identifican con  $n$  puntos pertenecientes a planos proyectivos distintos (véase Figura 7.9). De la misma manera, definimos  $F_n(\mathbb{P}_2)$  como la pseudosuperficie formada por un plano proyectivo en el cual  $n$  puntos distintos de dicho plano proyectivo se identifican con otros  $n$  puntos pertenecientes a planos proyectivos distintos (véase Figura 7.10).

Observemos que tanto  $F_n(S_0)$  como  $F_n(\mathbb{P}_2)$  son bosques no caracterizables por menores y vamos a proceder a calcular sus menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.20.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para  $F_n(S_0)$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i \right\} \cup \{H_1 \vee H_2\} \cup \{H_1 \frown H_2 \frown H_3\}$ , donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

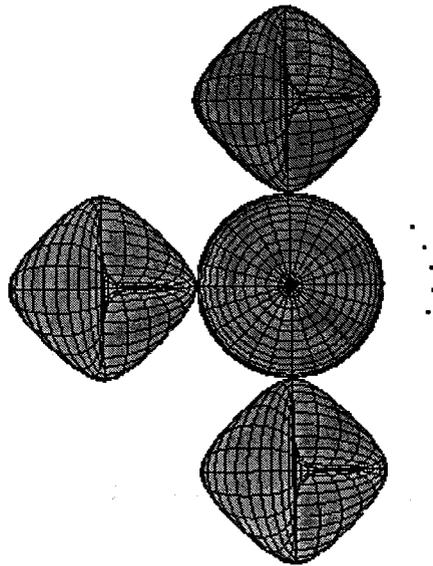


Figura 7.9: La pseudosuperficie  $F_n(S_0)$ .

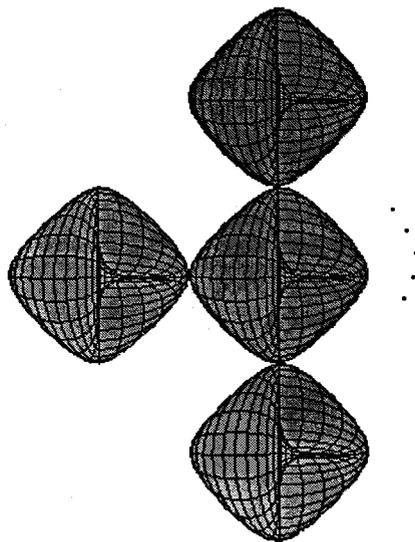


Figura 7.10: La pseudosuperficie  $F_n(\mathbb{P}_2)$ .



*Demostración.* Es evidente que todos los grafos que se detallan en el enunciado no se pueden sumergir en  $F_n(S_0)$ . Sin embargo, al eliminar una arista de cualquiera de ellos, el grafo resultante sí admite una inmersión en el citado bosque.

Además, la lista está completa, ya que si cogemos un grafo  $H$  no 2-conexo y razonamos igual que en el Teorema 7.6, llegamos a que  $H$  es uno de los grafos que se describen en el enunciado.

Por último, vamos a contar el número total de menores topológicos no 2-conexos prohibidos que tiene este bosque. Observemos que grafos del tipo  $\bigcup_{i=1}^{n+1} H_i$  existen  $CR(2, n+1) = n+2$ . De la forma  $H_1 \vee H_2$  obtenemos 10 grafos distintos por el mismo razonamiento que se ha utilizado en casos anteriores. En cuanto a la familia  $\{H_1 \frown H_2 \frown H_3\}$  hay que decir que posee los mismos grafos que  $H_1 \vee H_2 \vee H_3$ , que son 154 por el razonamiento utilizado en el Teorema 7.11. En total, obtenemos  $166 + n$  menores topológicos no 2-conexos prohibidos. A ésta cantidad tenemos que añadirle los menores topológicos 2-conexos prohibidos, que ya sabemos que son los 90 de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  por el Teorema 7.4.

Como consecuencia, el bosque  $F_n(S_0)$  tiene  $1256+n$  menores topológicos prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.21.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos para  $F_n(\mathbb{P}_2)$  son los que se describen en la Figura 7.11, donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ .*

*Demostración.* Observamos que ninguno de los grafos del enunciado admite una inmersión en el citado bosque pero si a dichos grafos le suprimimos una arista ya sí se puede sumergir en dicha pseudosuperficie.

Hay que tener en cuenta que en la familia  $a$ , si hacemos  $k = 0$ , obtenemos  $n+2$  bloques  $H_i$  disjuntos. Pero si  $k = n+1$ , el resultado es un  $H_i$  con otros  $k+1$  bloques pegados a él por  $k+1$  puntos distintos.

La lista está completa de forma exhaustiva utilizando el mismo razonamiento seguido en el Teorema 7.6.

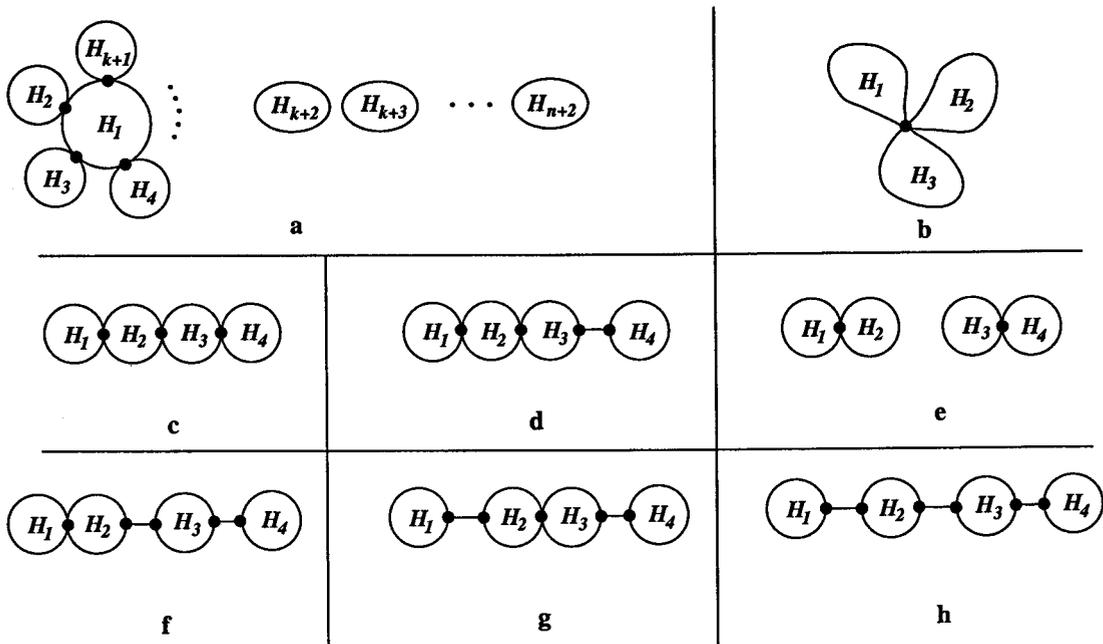


Figura 7.11: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos para  $F_n(\mathbb{P}_2)$ .

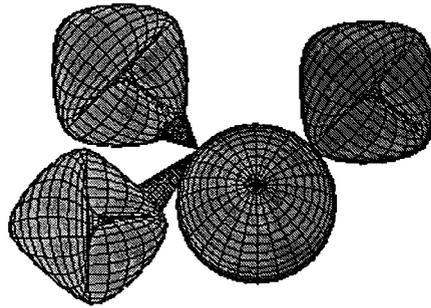


Figura 7.12: El bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u S_0 \vee_v \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .

En este Teorema no procedemos a contar el número de menores topológicos, dada la dificultad del recuento de la familia  $a$ .

Seguidamente, vamos a estudiar los menores topológicos prohibidos de algunos bosques con cuatro células. Consideremos el bosque que se representa en la Figura 7.12, en el cual tres de sus células son planos proyectivos y una de ellas es una esfera. Dicho bosque lo notaremos por  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u S_0 \vee_v \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 7.22.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u S_0 \vee_v \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  son los que se describen en la Figura 7.13, con  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Es evidente que todos los grafos del enunciado del teorema cumplen la propiedad de que no pueden ser sumergidos en el bosque citado. Sin embargo, al eliminar una de las aristas de cada uno de dichos grafos sí se pueden sumergir en la pseudosuperficie en cuestión.

La lista de grafos está completa razonando de la misma forma que en el Teorema 7.6.

Por último procederemos a contar el número total de menores topológicos no

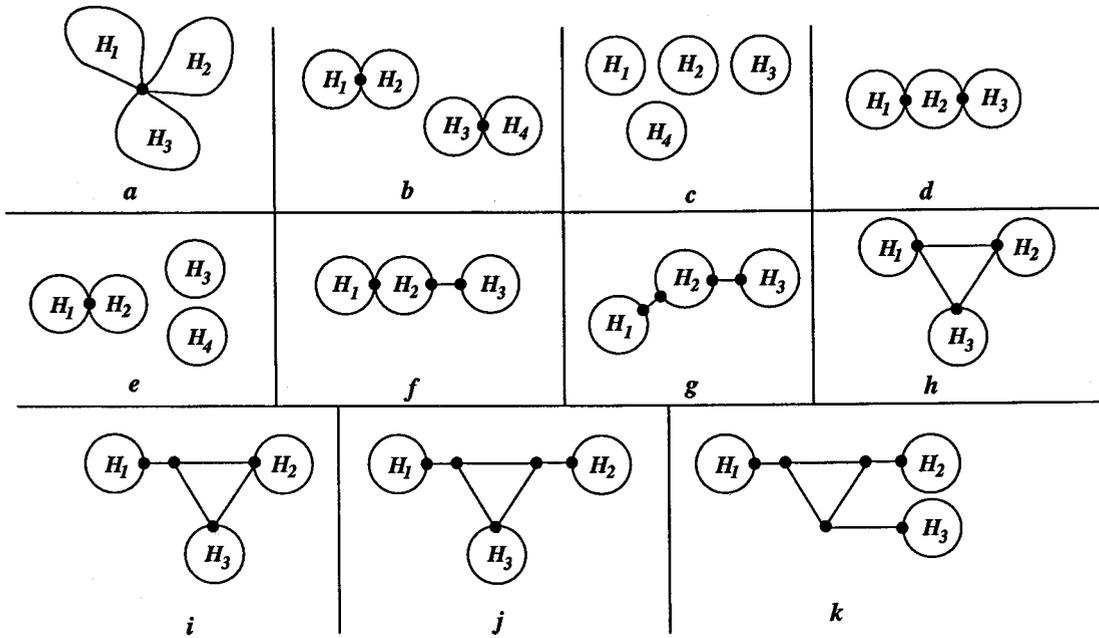


Figura 7.13: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos para el bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_u \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee_v S_0 \vee_v \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .



2-conexos prohibidos que posee este bosque.

Grafos del tipo  $\bigvee_{i=1}^3 H_i$ , los cuales se describen en  $a$ , hay  $CR(4, 3) = 20$  ya que al trabajar con menores topológicos, los  $H_i$  pueden ser algunos de los cuatro grafos de la Figura 7.6.

Vamos a contar el total de casos de la familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigvee_{j=3}^4 H_j \right) \right\}$ , a la cual hemos denominado  $b$  en la Figura 7.13. Grafos de la forma  $\bigvee_{i=1}^2 H_i$  hay  $CR(4, 2) = 10$ , los mismos que del tipo  $\bigvee_{j=3}^4 H_j$ . El total de casos es  $\frac{10 \cdot 10 - 10}{2} + 10 = 55$ .

Grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^4 H_i \right\}$ , denominada por  $c$ , existen 5 ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o bien un  $K_{3,3}$ .

La familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$ , la cual hemos llamado  $d$  en la Figura 7.13, posee 154 grafos por el Teorema 7.11

La familia  $\left\{ \left( \bigvee_{i=1}^2 H_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=3}^4 H_j \right) \right\}$ , denominada por  $e$ , tiene 30 grafos distintos ya que del tipo  $\bigvee_{i=1}^2 H_i$  hay  $CR(4, 2) = 10$  grafos y de la forma  $\bigcup_{j=3}^4 H_j$  existen 3 grafos distintos. Por tanto, el total de casos es  $3 \cdot 10 = 30$ .

Cuando tratamos la familia  $H_1 \vee H_2 \cap H_3$ , denominada  $f$ , el número de grafos es  $4 \cdot 17 \cdot 4 = 272$  puesto que  $H_1$  y  $H_3$  pueden ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6 mientras que  $H_2$  es alguno de los 17 grafos de la Figura 7.7. Hay que considerar los 272 casos porque no se repite ninguno ni existe ningún tipo de simetría.

En la familia  $g$ , la cual es  $H_1 \frown H_2 \frown H_3$ , existen los mismos casos que en la familia  $d$  porque los  $H_i$  juegan el mismo papel. Por tanto, existen 154 grafos en la familia  $g$ .

La familia  $h$  posee  $\text{CR}(4, 3) = 20$  grafos ya que  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro de la Figura 7.6.

Al tratar la familia  $i$ , observamos que el número de grafos que existen es  $4 \cdot \text{CR}(4, 2) = 40$ .

Por el mismo razonamiento utilizado para la familia  $i$ , se llega a que la familia  $j$  también posee 40 grafos.

En la familia  $k$ , el número de casos es igual que en la familia  $h$  puesto que los  $H_i$  juegan un mismo papel. Por tanto, hay 20 grafos en dicha familia.

En resumen, el número total de grafos no 2-conexos prohibidos es 810. A ésta cantidad hay que añadirle los 90 grafos 2-conexos prohibidos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Por tanto, el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee_u \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee_u S_0 \vee_v \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  posee 900 menores topológicos prohibidos.  $\square$

A continuación vamos a describir de qué forma son todos los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque de la Figura 7.14, en el cual vemos que las cuatro células que lo componen son planos proyectivos y al cual denominaremos  $\left(\bigvee_{i=1}^3 \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\right) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 7.23.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $\left(\bigvee_{i=1}^3 \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\right) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son de la forma que se describen en la Figura 7.15 y donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Es fácil comprobar que todos los grafos del enunciado del Teorema no admiten una inmersión en el citado bosque, pero si a cualquiera de dichos grafos

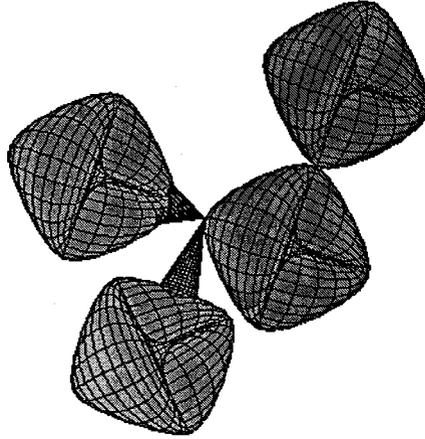


Figura 7.14: La pseudosuperficie  $\left(\bigvee_{i=1}^3 \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\right) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

le suprimimos una arista ya sí se puede realizar la inmersión.

Además la lista está completa razonando de forma similar que en la demostración del Teorema 7.6.

Por último vamos a proceder a contar el número de menores topológicos no 2-conexos prohibidos que posee este bosque. Para ello, analizaremos las familias una a una.

- La familia  $a$  tiene 6 grafos ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ .
- Vamos a contar el número de grafos que posee la familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3 \vee_w H_4\}$ , a la cual hemos denominado  $b$ . Los grafos que están en los extremos, a los que hemos llamado  $H_1$  y  $H_4$ , pueden ser algunos de los cuatro que aparecen en la Figura 7.6. Sin embargo los grafos que están en el interior, a los que hemos denominado  $H_2$  y  $H_3$ , pueden ser algunos de los 17 grafos que se muestran en la Figura 7.7.

Por tanto, el número total de grafos que hay en la familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3 \vee_w H_4\}$

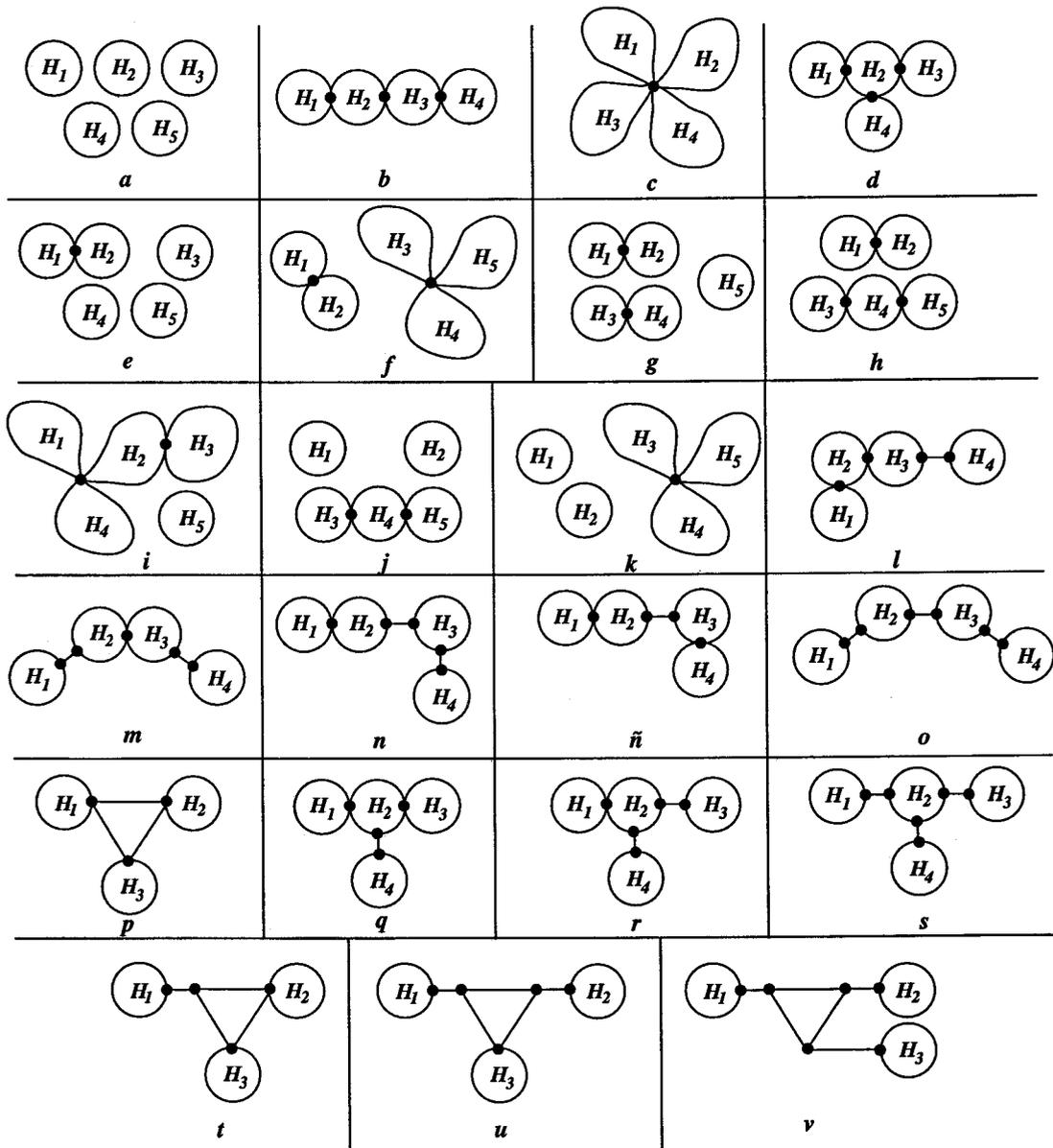


Figura 7.15: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $\left(\bigvee_{i=1}^3 \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})\right) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .



$$\text{es } \frac{4 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 4 - \cdot 17}{2} + 4 \cdot 17 = \frac{4 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 4 + 4 \cdot 17}{2} = 34 \cdot 69 = 2346.$$

- En la familia  $c$  existen  $\text{CR}(4, 4) = 35$  grafos, ya que  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6.
- Grafos de la forma  $d$  hay 1768. Dicha cantidad se ha obtenido mediante el uso de un ordenador y eliminando todos los isomorfos entre ellos.
- La familia  $e$  posee  $10 \cdot 4 = 40$  grafos, ya que de la forma  $H_1 \vee H_2$  existen 10 grafos y del tipo  $H_3 \cup H_4 \cup H_5$  hay 4 grafos.
- En  $f$  hay 10 grafos de la forma  $H_1 \vee H_2$  y otros 20 del tipo  $H_3 \vee H_4 \vee H_5$ . El total es 200.
- Ya hemos visto anteriormente que el número de grafos de  $(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)$  es 55. Por tanto, la familia  $g$  posee 110 grafos.
- En la familia  $h$  hay  $154 \cdot 10 = 1540$  grafos porque de la forma  $H_1 \vee H_2$  existen 10 grafos, mientras que hay 154 del tipo  $H_1 \vee H_2 \vee H_3$ .
- Al contar el número de grafos de  $i$ , obtenemos que hay  $17 \cdot \text{CR}(4, 2) \cdot 4 = 680$ .
- Es fácil obtener que la familia  $j$  posee  $154 \cdot 3 = 462$  grafos, ya que hay 3 de la forma  $H_1 \cup H_2$  y 154 del tipo  $H_3 \vee H_4 \vee H_5$ .
- Obtenemos  $20 \cdot 3 = 60$  grafos de la familia  $k$  puesto que existen 3 del tipo  $H_1 \cup H_2$  y 20 de  $H_1 \vee H_2 \vee H_3$ .
- La familia  $l$  tiene  $4 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 4 = 4624$  grafos ya que  $H_1$  y  $H_4$  pueden ser uno de los cuatro de la Figura 7.6, mientras que  $H_2$  y  $H_3$  son uno de los 17 de la Figura 7.7.
- El número de grafos de la familia  $m$  es el mismo que el de  $b$  puesto que los bloques  $H_i$  juegan el mismo papel. Son, pues, 2346 grafos.
- En la familia  $n$  nos encontramos con los mismos grafos que en  $l$ ; es decir, 4624.
- Las familias  $\tilde{n}$  y  $o$  tienen el mismo número de grafos que la familia  $b$ . Por tanto, poseen 2346 grafos cada una de ellas.

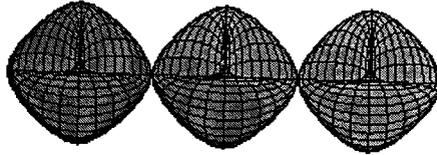


Figura 7.16: La pseudosuperficie  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$ .

- En el Teorema 7.22 se han contado todos los grafos que tienen las familias  $p, t, u, v$ , que son 120 grafos entre las cuatro familias.
- Las familias  $q$  y  $r$  poseen la misma cantidad de grafos. Dicho número es 4832 para cada una de ellas. El cálculo ha sido realizado mediante la ayuda de un ordenador y descartando todos los isomorfos.
- Cuando queremos calcular el número de grafos de la familia  $s$ , observamos que tiene la misma cantidad que la familia  $d$  ya que los bloques  $H_i$  juegan el mismo papel. Dicha cantidad es de 1768 grafos.

Por tanto, el número total de menores topológicos no 2-conexos prohibidos es de 35085. A ésta cantidad hay que añadirle los 90 grafos 2-conexos del plano proyectivo.

En conclusión, el bosque  $\left(\bigvee_{i=1}^3 \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})\right) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$  tiene 35175 menores topológicos prohibidos.  $\square$ .

Seguidamente vamos a describir todos los menores topológicos prohibidos no 2-conexos que posee el bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$  el cual está representado en la Figura 7.16, y en el que observamos que las tres células son planos proyectivos.

**Teorema 7.24.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$  son los dados en la Figura 7.17, donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*



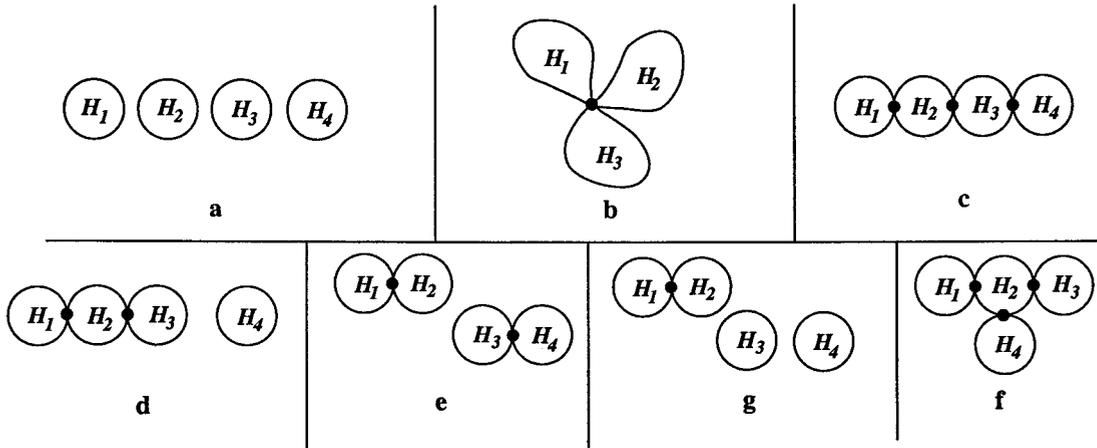


Figura 7.17: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Es evidente que todos los grafos del Teorema cumplen que no admiten una inmersión en el bosque; sin embargo, al quitarles una arista se puede realizar dicha inmersión.

La lista está completa por el mismo razonamiento utilizado anteriormente.

Por último vamos a contar todos los menores topológicos no 2-conexos prohibidos de este bosque. Grafos del tipo *a* existen 5, ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ .

Del tipo *b* hay  $CR(4, 3) = 20$  puesto que al tratarse de menores topológicos,  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6.

Si consideramos la estructura *c*, ya hemos calculado en el Teorema 7.23 que existen 2346 grafos.

También se calculó en el Teorema 7.11 que grafos de la familia  $\{H_1 \vee H_2 \vee H_3\}$  existen 154 y, por tanto, hay  $2 \cdot 154 = 308$  grafos del tipo *d*.

Por el Teorema 7.22 ya sabemos que grafos del tipo  $e$  existen 55.

Hay que calcular los grafos que existen del tipo  $f$ , que ya sabemos que son 1768 por el Teorema 7.23.

Para concluir, señalar que son 30 los grafos existentes del tipo  $g$ .

Por tanto, el número de menores topológicos no 2-conexos prohibidos es 4532. A ésta cantidad hay que sumarle los 90 menores topológicos del plano proyectivo.

En resumen, el bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene 4622 menores topológicos prohibidos.  $\square$

Para concluir esta sección, vamos a describir los Teoremas de Kuratowski para algunos bosques con pocas células y que no se pueden englobar en los casos estudiados anteriormente.

Empezaremos con el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , el cual es caracterizable por menores por el Teorema 1.1. También daremos los menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.25.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^4 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Es evidente que los grafos descritos en el enunciado del Teorema cumplen que no admiten una inmersión en el citado bosque; pero si a dichos grafos le quitamos un elemento o efectuamos una contracción ya sí se pueden sumergir en dicho bosque.

La lista está completa razonando de la misma forma que en el Teorema 7.6.



Para finalizar, vamos a contar el número de menores no 2-conexos prohibidos que posee este bosque. Grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^4 H_i \right\}$  existen 5 puesto que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . De la misma forma,  $\left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\}$  tiene 4 grafos distintos. La familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$  posee 9 grafos porque cuando  $H_2 = K_{3,3}$  hay que distinguir los dos casos en los que el par  $u, v$  juegan el mismo papel dentro del  $K_{3,3}$  ó no. Además, tenemos 6 grafos distintos del tipo  $\{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\}$ . En cuanto a la familia  $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4\}$ , señalar que tiene  $3 \cdot 3 = 9$  grafos distintos.

En cuanto a la cantidad de menores minimales 2-conexos prohibidos, ya sabemos que tiene los mismos que  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ ; es decir, 29 grafos.

Por tanto, el bosque  $(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  posee 62 menores minimales prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.26.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$  son los que se describen en la Figura 7.18.*

*Demostración.* Los grafos del enunciado son todos los menores topológicos no 2-conexos prohibidos por un razonamiento análogo al del Teorema 7.13.

A la hora de contar el total de todos ellos, observamos que grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^4 H_i \right\}$ , denominada  $a$ , existen 5 puesto que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un  $K_{3,3}$ . De la forma  $b$ ; es decir,  $\left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\}$  hay  $\text{CR}(4, 3) = 20$  grafos porque  $H_i$  puede ser alguno de los cuatro grafos de la Figura 7.6. Ya se demostró en el Teorema 7.11 que la familia  $\{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$ , llamada  $c$ , posee 154 grafos. Además, tenemos  $\text{CR}(10, 2) = 55$  grafos del tipo  $\{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\}$ , ó  $d$ , tal como se vió en el Teorema 7.13. En cuanto a la familia  $e$ , podemos decir que hay  $10 \cdot 3 = 30$  grafos con la estructura  $(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4$ . En el Teorema 7.22 se contaron todos los grafos existentes de las familias  $f$  y  $g$ ; cuando nos referimos a  $\{H_1 \vee H_2 \frown H_3\}$  existen 272 grafos, mientras que  $\{H_1 \frown H_2 \frown H_3\}$  posee 154. La familia denominada  $h$  tiene  $4 \cdot \text{CR}(4, 2) = 40$

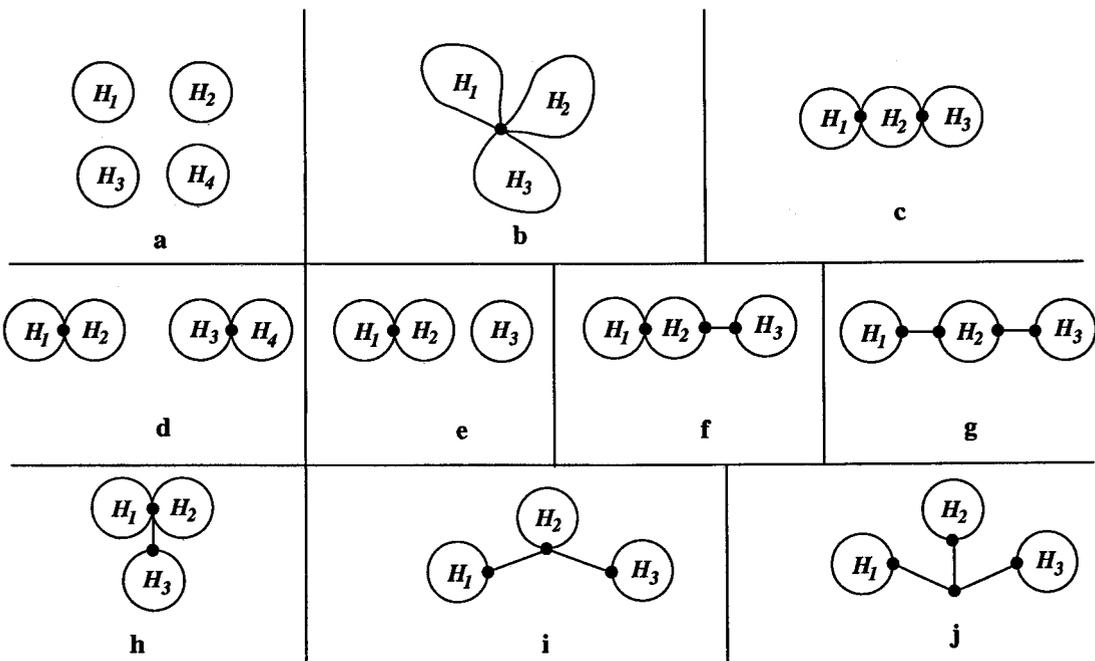


Figura 7.18: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

grafos, al igual que la familia  $i$ . Por último, existen  $CR(4, 3) = 20$  grafos en la familia  $j$  ya que los  $H_i$  juegan el mismo papel que en la familia  $b$ . No hay que olvidar los 90 grafos 2-conexos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

En conclusión, el número total de menores topológicos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  es de 880 grafos.

Seguidamente, nos centraremos en el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ . Observamos que también es caracterizable por menores por el Teorema 1.1. Así pues, procederemos a dar la lista de menores minimales y de menores topológicos prohibidos.

**Teorema 7.27.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^5 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4) \cup H_5\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Los grafos del enunciado son todos los menores minimales no 2-conexos prohibidos por el mismo razonamiento seguido en el Teorema 7.25

Procederemos a contar la cantidad de ellos. Grafos de la familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^5 H_i \right\}$  hay 6 distintos. Del tipo  $\bigvee_{i=1}^3 H_i$  existen 4. De la forma  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$  obtenemos 9 grafos distintos; cuando nos referimos a la familia  $\{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4) \cup H_5\}$  hay  $6 \cdot 2 = 12$  grafos. Además, existen otros 12 grafos de la familia  $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5\}$ . Hay que tener en cuenta también los 29 menores minimales 2-conexos prohibidos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Así pues, el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  posee 72 menores minimales prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.28.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  son:*

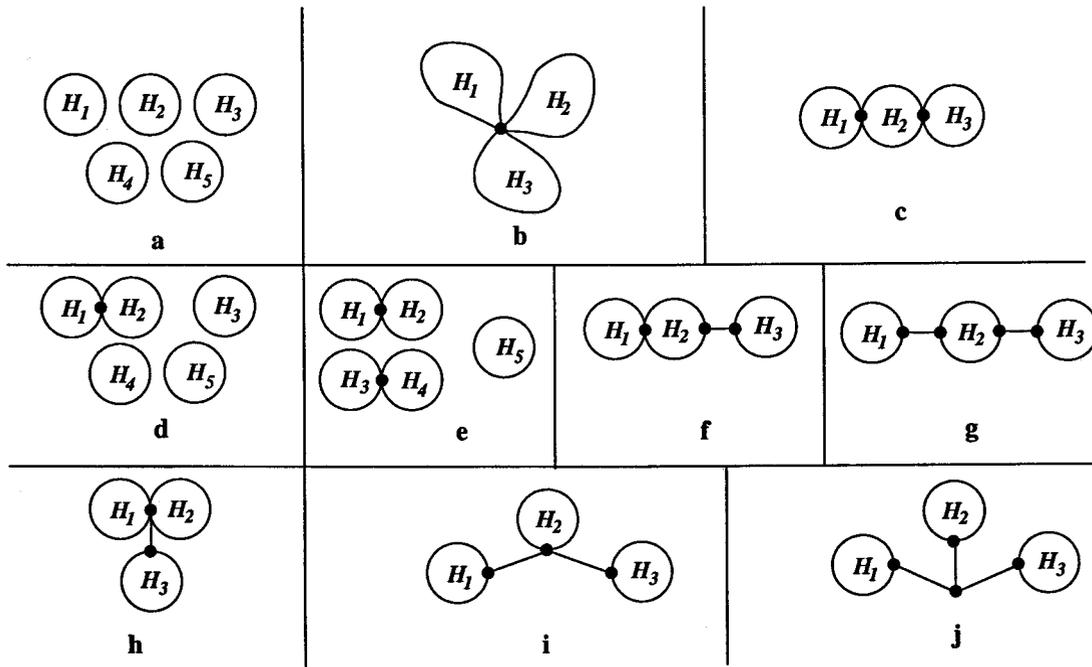


Figura 7.19: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}))$ .

$\vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \cup (\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}))$  son los que se describen en la Figura 7.19, donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .

*Demostración.* Está claro que todos los grafos que se describen en el enunciado cumplen que no se pueden sumergir en el bosque mencionado; pero si a dichos grafos le suprimimos una arista, ya se puede realizar dicha inmersión.

La lista está completa por un razonamiento análogo al seguido en el Teorema 7.6.

A la hora de contar el número de menores topológicos, tenemos lo siguiente. La familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^5 H_i \right\}$ , denominada  $a$ , tiene 6 grafos, ya que  $H_i$  puede ser un  $K_5$  o un



$K_{3,3}$ . Ya sabemos por el Teorema 7.26 el número de grafos de las familias  $b$ ,  $c$ ,  $f$  y  $g$ ; en concreto,  $\left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\}$  posee 20 grafos, hay 154 del tipo  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$ , así como 272 grafos de la familia  $\{H_1 \vee H_2 \frown H_3\}$  y otros 154 del tipo  $H_1 \frown H_2 \frown H_3$ .

Observemos que hay  $10 \cdot 4 = 40$  grafos del tipo  $d$ , ó lo que es lo mismo, de la forma  $(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5$ .

En la familia  $\{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4) \cup H_5\}$ , a la que hemos llamado  $e$ , nos podemos encontrar con  $55 \cdot 2 = 110$  grafos distintos.

La cantidad de grafos que existen en las familias  $h$ ,  $i$  y  $j$  se han estudiado en el Teorema 7.26. El total es de 100 grafos distintos.

No olvidemos, por último, los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

En total, el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup (\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$  posee 946 menores topológicos prohibidos.  $\square$

Ya hemos estudiado los menores topológicos prohibidos del bosque  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . A continuación, procederemos al estudio de este mismo bosque añadiéndole un plano proyectivo disjunto; es decir, hallaremos los menores topológicos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 7.29.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son los que se describen en la Figura 7.20, donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Se cumple que todos los grafos del enunciado no admiten una inmersión en el mencionado bosque, pero si a dichos grafos le eliminamos una arista ya se obtiene dicha inmersión.

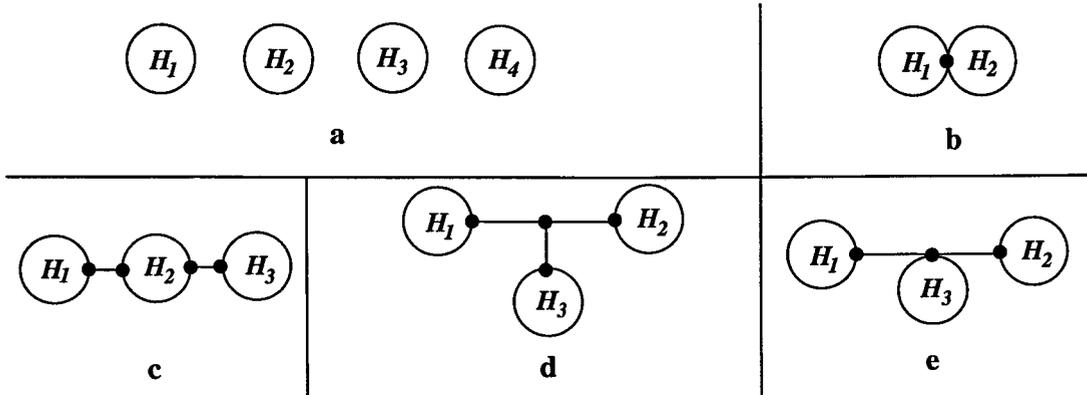


Figura 7.20: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

La lista está completa por un razonamiento similar al del Teorema 7.6.

A la hora de contar el número de grafos de dicho bosque llegamos a que la familia  $a$  posee 5 grafos distintos, la familia denominada  $b$  tiene otros 10 grafos, mientras que existen 154 grafos de la familia  $c$ . Además, hay  $CR(4, 3) = 20$  grafos de la familia  $d$  y, por último, la familia  $e$  tiene  $4 \cdot CR(4, 2) = 40$  grafos distintos. También tenemos que contar con los 90 menores topológicos 2-conexos prohibidos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

En resumen, el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  posee 319 menores topológicos prohibidos.  $\square$

Para concluir esta sección, vamos a calcular los menores minimales y menores topológicos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 7.30.** *Los menores minimales no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son  $\left\{ \bigcup_{i=1}^5 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\} \cup \{(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5\}$  donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que los grafos dados en el enunciado no admiten una inmersión en el bosque mencionado; pero los grafos que resultan de quitarles un elemento o realizar una contracción a los dados, sí se pueden sumergir en dicha pseudosuperficie.

La lista está completa de forma exhaustiva siguiendo un razonamiento similar al del Teorema 7.6.

Para finalizar, vamos a proceder a contar todos los menores minimales de este bosque. La familia  $\left\{ \bigcup_{i=1}^5 H_i \right\}$  tiene 6 grafos distintos. Además, obtenemos 4 grafos cuando nos referimos a la familia  $\left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\}$ . Existen 9 grafos del tipo  $H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3$  tal como se explicó en el Teorema 7.10. La familia  $\{(H_1 \vee H_2) \cup (H_3 \vee H_4)\}$  posee 6 grafos distintos, y obtenemos  $3 \cdot 4 = 12$  grafos de la forma  $(H_1 \vee H_2) \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5$ . No hay que olvidar los 29 menores minimales 2-conexos del plano proyectivo.

Por tanto, el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tiene 66 menores minimales prohibidos.  $\square$

**Teorema 7.31.** *Los menores topológicos no 2-conexos prohibidos del bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son los que se describen en la Figura 7.21, donde  $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ .*

*Demostración.* Todos los grafos de la Figura 3 cumplen la propiedad de que no admiten una inmersión en el bosque citado en el enunciado; pero si a cada uno de dichos grafos le eliminamos una arista ya sí se puede realizar la inmersión.

La lista está completa razonando igual que en el teorema 7.6.

El número de menores topológicos de todas estas familias están ya averiguados en Teoremas anteriores. Procederemos, pues, simplemente a recordar dichas cantidades.

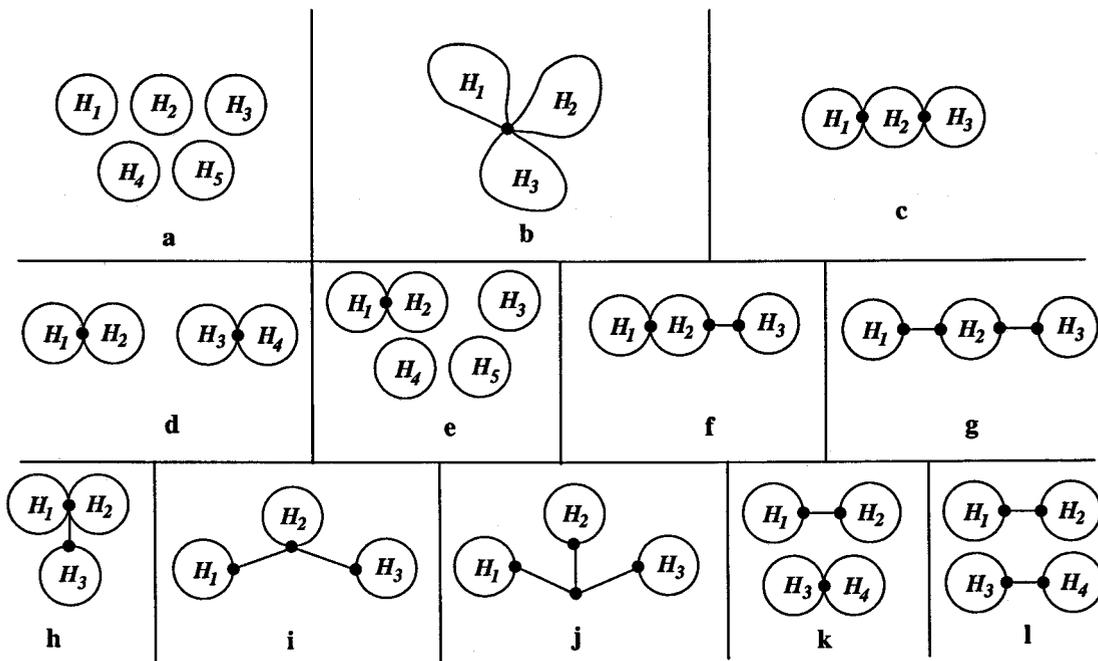


Figura 7.21: Menores topológicos no 2-conexos prohibidos en  $(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ .



La familia  $a$  tiene 6 grafos. En cambio,  $b$  tiene 20. Hay 154 grafos del tipo  $c$  y 55 se engloban dentro de la familia  $d$ . Cuando nos referimos a grafos de la forma  $e$  hay 40, pero en  $f$  existen 272. Los bloques  $H_i$  de la familia  $g$  juegan el mismo papel que los de  $c$  y, por tanto, también posee 1545 grafos. Entre las familias  $h$ ,  $i$  y  $j$  surgen 100 grafos. Además tenemos los 100 de la familia  $k$  y los 55 de  $l$ . Hay que tener en cuenta los 90 grafos 2-conexos del plano proyectivo.

Por tanto, el bosque  $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  pose 1046 menores topológicos prohibidos.

# Bibliografía

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. The Design and Analysis of Computer Algorithms. *Addison-Wesley Publishing Company*, 1974.
- [2] D. Archdeacon. A Kuratowski Theorem for the Projective Plane. *Journal of Graph Theory*, 5:243–246, 1981.
- [3] D. Archdeacon. *A Kuratowski Theorem for the Projective Plane*. Ph. D. Dissertation. The Ohio State University, 1980.
- [4] D. Archdeacon and P. Huneke. A Kuratowski Theorem for non-orientable surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27:332–370, 1979.
- [5] L. Auslander, I. A. Brown, and J. W. T. Youngs. The embedding of graphs in manifolds. *J. Math. Mech.*, 12:629–634, 1963.
- [6] J. Battle, F. Harary, Y. Kodama, and J. W. T. Youngs. Additivity of the genus of a graph. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:565–568, 1962.
- [7] J. Battle, F. Harary, and Y. Kodama. Every planar graph with nine points has a nonplanar complement. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:569–571, 1962.
- [8] B. Bodendiek and K. Wagner. The Fascination of Minimal Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 41:39–52, 1989.
- [9] B. Bodendiek and K. Wagner. Solution to König’s graph embedding problem. *Math. Nachr.*, 140:251–272, 1989.

- [10] R. Bodendiek, P. Gvozdjak, and J. Širáň. On Minimal Graphs for Bananas Surface  $B_2$ . *R. Bodendiek: Contemporary Methods in Graph Theory (in honour to K. Wagner)*, Mannheim, 1990.
- [11] K. S. Booth and G. S. Lueker. Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graphs planarity using PQ-trees algorithms. *J. Comput. Syst. Sci.*, 13:335–379, 1976.
- [12] O. Borodin and L. S. Melnikov. The chromatic number of a pseudosurface. *Diskret. Analiz. Issledovanija Struktury i Fukcionirovanija Upravljajuscih Sistem*, 24:8–20, 1974.
- [13] J. Cáceres. Diversos tipos de planaridad de grafos. *Tesis doctoral, Universidad de Almería*, 1996.
- [14] N. Chiba, T. Nishizeki, S. Abe, and T. Ozawa. A linear algorithm for embedding planar graphs using PQ-trees. *J. Comput. Syst. Sci.*, 30(1):54–76, 1985.
- [15] S. A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *In Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 151-158, New York*, 1971.
- [16] L. Boza, M.T. Dávila, E. M. Fedriani y R. Moyano. On Infinite Kuratowski Theorem. *Por aparecer en Combinatorica*.
- [17] L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, and C. F. X. de Mendonça. Splitting number is NP-Complete. In J. Hromkovič and O. Sýkora, editors, *Proceedings 24rd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'98, Smolenice Castle, Slovak Republic, June 18-20, 1998*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 1517:285-297, 1998.
- [18] M. Fréchet and K. Fan. Introducción a la Topología Combinatoria. *Ed. Universitaria de Buenos Aires*, 1959.
- [19] H. Freudenthal. Überdie Enden Topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeit*, 33:692–713, 1931.
- [20] M. Garey and D. Johnson. Computers and Intractability: A Guide To The Theory Of NP-Completeness. *W. H. Freeman*, 1979.

- [21] H. H. Glover, J. P. Huneke, and C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *Journal of Combinatorial Theory*, 27(3):332–370, 1979.
- [22] M. Gradolato and T. Pisanski. Combinatorial description of pseudosurfaces. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste*, 21(2):193–210, 1989.
- [23] R. Halin. Über Trennende Eckenmemgen in Graphen und der Mengerstchen Satz Wege in Graphen. *Math. Ann.*, 157:34–41, 1964.
- [24] F. Harary. Graph Theory. *Addison Wesley. Reading Mass.*, 1969.
- [25] F. Harary and W. T. Tutte. A dual form of Kuratowski's theorem. *Canada Math. Bull.*, 8:17–20, 1965.
- [26] N. Hartsfield, B. Jackson, and G. Ringel. The splitting number of the complete graph. *Graphs and Combinatorics*, 1:311–329, 1985.
- [27] P. J. Heawood. Map Colour Theorem. *Quart. J. Math.*, 24:332–338, 1890.
- [28] J. Hopcroft y R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Jour. of the ACM*, 21(4):549–568, 1976.
- [29] B. M. Kerékjártó. Vorlesungen uber Topologie I. *Julius Springer. Berlin*, 1923.
- [30] M. Knor. Characterization of Minor-Closed Pseudosurfaces. *Ars Combinatoria*, 43:246–256, 1996.
- [31] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [32] A. Lempel, S. Even, and I. Cederbaum. An algorithm for planarity testing of graphs. *In Theory of Graphs, pages 215-232. Gordon and Breach, 1967.*
- [33] C. K. Lu. Classification of 2-manifolds with singular points. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:1093–1098, 1949.
- [34] U. Manber. Introduction To Algorithms. *Addison-Wesley*, 1989.

- [35] W. S. Massey. Introducción a la Topología algebraica. *Ed. Reverté*. Barcelona, 1972.
- [36] J. A. McHugh. Algorithmic Graph Theory. *Prentice Hall.*, 1990.
- [37] G. Ringel. Map Color Theorem. *Springer-Verlag*, 1974.
- [38] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph Minors. VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces. *J. Combinatorial Theory. Series B.*, 48:255–288, 1990.
- [39] N. Robertson y P. D. Seymour. An outline of a disjoint paths algorithm. Editores B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel y A. Schrijver. *Paths, Flows and VLSI-Layout*. Springer-Verlag. Berlin, 267–292, 1990.
- [40] J. Širáň and P. Gvozdjak. Kuratowski-Type Theorems Do Not Extend to Pseudosurfaces. *J. Combinatorial Theory. Series B*, 54:209–212, 1992.
- [41] J. Širáň, P. Gvozdjak, and R. Bodendiek. On minimal graphs for 2-amalgamations of spheres. *Contemporary Methods in Graph Theory (in Honour of K. Wagner)*, in press.
- [42] S. Stahl and L. W. Beineke. Blocks and the Nonorientable Genus of Graphs. *J. of Graph Theory*, 1:75–78, 1977.
- [43] H. Seifert and W. Threlfall. A textbook of Topology. *Academic Press*. New York, 1980.
- [44] C. Thomassen. Infinite Graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, 2:129–160, 1983.
- [45] C. Thomassen. The graph genus problem is NP-problem. *J. Algorithms*, 10:568–576, 1989.
- [46] C. Thomassen. The genus problem for cubic graphs. *J. Combinatorial Theory. Series B*, 69:52–58, 1997.
- [47] C. Thomassen. Embeddings and Minors. *Handbook of Combinatorics*, Edited by R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász. Elsevier Science B. V., 301–349, 1995.

- [48] K. Wagner. Fastplättbare Graphen. *Journal Combinatorial Theory*, 3:326–365, 1967.
- [49] A. T. White and L. W. Beineke. Topological graph theory. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, 15-49, 1978.
- [50] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 55:339–362, 1932.
- [51] E. F. Whittlesey. Finite surfaces: a study of finite 2-complexes. II. The canonical form. *Math. Mag.*, 34:67–80, 1960.

ED. DE 1978  
D<sup>ña</sup> MARÍA TERESA DAULA DE TENA  
Escribana INMERSIONES DE GRAFOS EN PRESUNSCRIPCIÓN: GRAFOS RECORRIDOS,  
INVASANTES Y ALGEBRIMOS

acordado en el día 27 de JUNIO de 2003  
NIMIDAD

SUSPENSAMENTE CUM LAUDE POR UNA

BOVILLA, 27 de JUNIO

2003

El Vocal

El Presidente

El Vocal

El Secretario

El Vocal

El Doctorado