

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Física Aplicada III



APLICACIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS A CHORROS CAPILARES

Josefa Guerrero Millán

Tesis Doctoral

Dirigida por: Heliodoro González García
Francisco Javier García García

APLICACIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS A CHORROS CAPILARES

Memoria presentada por
Josefa Guerrero Millán
para optar al grado de
Doctor por la Universidad de Sevilla

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA III
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Sevilla, Julio de 2011

APLICACIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS A CHORROS CAPILARES

Memoria presentada por
Josefa Guerrero Millán
para optar al grado de
Doctor por la Universidad de Sevilla

Sevilla, Julio de 2011

Directores del trabajo

**Dr. Heliodoro González
García**
Profesor Titular de Física
Aplicada

**Dr. Francisco Javier
García García**
Profesor Titular de Física
Aplicada

Josefa Guerrero Millán
Doctorando

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA III
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

A mi familia

Agradecimientos

Estoy muy agradecida a mis directores de tesis, Heliodoro González y Francisco Javier García. Nunca podré agradecer lo suficiente a Helio, su paciencia y su ayuda en la tarea de la búsqueda y caracterización de los modos espaciales. Además, no ha pasado un día donde no encontrara un momento para ayudarme con todas las dificultades que han ido surgiendo a lo largo de estos más de cinco años. Y a Javi, que con su visión siempre crítica del trabajo, me ha enseñado a cuidar de los detalles.

Quiero darle las gracias a Antonio Castellanos por permitirme trabajar en el grupo de Electrohidrodinámica y Medios Granulares Cohesivos. También al resto del grupo, que siempre ha estado dispuesto a echar una mano. No ha pasado un café o una comida donde no pudiera consultar con ellos cuestiones de física o de cualquier otra índole.

Quiero mencionar especialmente a mis compañeros de almuerzo: Miguel Ángel, Fran, Pablo, Manolo, José Manuel, Manuel, Elías, Luis..., que han hecho de la hora de la comida, la mejor del día.

No quiero olvidarme de mis compañeros del departamento de Física Aplicada III de la Escuela de Ingenieros, que han hecho que las sesiones de prácticas con los alumnos siempre acabaran bien. También, agradecerles su ayuda en todas las tareas burocráticas que han surgido durante estos años.

Por último, quiero dedicar este trabajo a aquellos que siempre confiaron en que podría conseguirlo.

Índice general

Agradecimientos	VIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación y aplicaciones	1
1.2. Antecedentes	6
1.2.1. Chorros líquidos sin campo eléctrico aplicado . . .	6
1.2.2. Chorros líquidos sometidos a campos eléctricos . .	9
1.2.3. Modelos unidimensionales	11
1.3. Un primer acercamiento al problema	12
1.4. Organización del trabajo	17
2. Estimulación mediante esfuerzos en la superficie del chorro	19
2.1. Configuración geométrica	19
2.2. Propiedades del fluido	20
2.3. Ecuaciones y condiciones de contorno fluidomecánicas . .	21
2.3.1. Ecuaciones de volumen	21
2.3.2. Condiciones de contorno	21
2.3.3. Adimensionalización	22
2.3.4. Ecuaciones y condiciones de contorno linealizadas	24
2.4. Análisis modal de la función de Green	25
2.4.1. La función de Green	26
2.4.2. El caso no viscoso	28
2.5. Modos espaciales	29
2.5.1. Localización de los polos y campos de velocidades	33
2.5.2. Modos capilares	38
2.5.3. Modos capilares aguas arriba	40
2.5.4. Modos inerciales	43
2.5.5. Modos hidrodinámicos	44
2.6. Aplicación a la estimulación superficial	48
2.7. Revisión de la inestabilidad absoluta	54

3. Análisis modal de la función de Green a partir de los modelos unidimensionales	59
3.1. Modelos unidimensionales	59
3.2. Ecuaciones lineales y relaciones de dispersión	62
3.3. Modos espaciales	65
3.4. Inestabilidad absoluta	68
3.5. Resultados de la estimulación	69
4. Aplicación de la estimulación EHD a chorros capilares	77
4.1. Introducción	77
4.2. Problema eléctrico	77
4.2.1. Ecuaciones eléctricas	77
4.3. Condiciones de contorno	80
4.4. Resolución del problema eléctrico	82
4.5. Tiempos típicos del problema eléctrico	84
4.6. Estimación de las magnitudes eléctricas	86
4.7. Estudio paramétrico de los esfuerzos eléctricos	87
4.7.1. Efecto de la velocidad	88
4.7.2. Efecto de la frecuencia	89
4.7.3. Efecto de la permitividad del líquido	92
4.7.4. Modelo circuital	93
4.8. Respuesta del chorro a la estimulación	97
4.9. Diseño del dispositivo estimulador	99
4.10. Respuesta modal a la estimulación EHD	106
4.11. Naturaleza de la estimulación EHD	108
5. Conclusiones y líneas de trabajo futuras	111
5.1. Conclusiones	111
5.2. Líneas futuras de investigación	113
Bibliografía	115

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y aplicaciones

El título de la tesis, *Aplicación de campos eléctricos a chorros líquidos capilares*, abarca un campo muy amplio, que engloba aplicaciones tales como la producción de aerosoles a partir de chorros cargados (Clopeau & Prunet-Foch, 1989), producción de nanoesferas y nanotubos (Jayasinghe, 2006), electrospinning (Doshi & Reneker, 1995), o la estimulación electrohidrodinámica (Goedde & Yuen, 1970b; Crowley, 1981, 1983).

En esta tesis nos centraremos justamente en la última de estas aplicaciones, la estimulación electrohidrodinámica (EHD), que se basa en la aplicación de campos eléctricos sobre una porción localizada en la superficie del chorro capilar para producir gotas de características controladas (tamaño, tasa de producción, etc.).

Un chorro capilar es típicamente generado mediante la emersión de un líquido, por diferencia de presión, de un orificio circular. En función de la velocidad de salida se pueden encontrar distintos regímenes, en sentido creciente de la velocidad (Reitz & Bracco, 1986): goteo (*dripping mode*), rotura capilar (*Rayleigh mode*), atomización inducida aerodinámicamente (*wind-induced atomization*) y atomización (*atomization*). En el régimen de goteo, no se forma un chorro propiamente dicho, sino que el líquido se desgaja directamente del orificio de salida en un proceso gobernado esencialmente por las fuerzas capilares (Lasheras & Hopfinger, 2000). En el régimen de rotura capilar, con velocidades mayores, las fuerzas de inercia empiezan a tener un papel importante (Rayleigh, 1945). Los esfuerzos debidos a la presencia del gas exterior son los responsables de la atomización inducida aerodinámicamente, que se caracteriza por una rotura en gotas de tamaño algo menor que en el régimen anterior (Gordillo & Pérez-Saborid, 2005). Finalmente, el régimen de atomización se caracteriza por la rotura en muy finas gotas desde el mismo orificio de

salida como consecuencia del efecto conjunto de la turbulencia generada en el conducto de salida y de los esfuerzos aerodinámicos (Reitz & Bracco, 1986). De todos estos regímenes, la estimulación EHD es aplicable en principio tanto al régimen de rotura capilar como al de atomización inducida aerodinámicamente, pero en las aplicaciones las velocidades suelen ser tales que podemos restringirnos exclusivamente al régimen de rotura capilar. Omitiremos por tanto los efectos aerodinámicos en esta tesis.

El amplio estudio al que han sido sometidos los chorros líquidos se debe a la gran cantidad de aplicaciones tecnológicas en los que están presentes. Normalmente, los chorros líquidos capilares aparecen en procesos industriales donde se desea incrementar el cociente superficie/volumen del líquido, por ejemplo, en combustiones, reactores químicos, etc.; o para aplicar a un objeto un líquido en forma de gotas (pinturas, pulverización de pesticidas, impresión por chorro de tinta, etc.). También están presentes en procesos como la citometría de flujo o la clasificación de células (Shapiro, 2003). La electrificación de los chorros permite un mayor control de estos procesos ya que las fuerzas eléctricas pueden cambiar la estabilidad de los chorros o la trayectoria de las gotas cargadas creadas a partir de la rotura del chorro. Se puede encontrar una amplia revisión de este tipo de aplicaciones en Basaran (2002). En nuestro caso, la aplicación localizada de campos eléctricos poco después de la salida produce una rotura muy regular en cuanto al tamaño de las gotas, que es uno de los objetivos habituales de cualquier estimulación de chorros capilares.

Respecto a los tipos de estimulación (Middleman, 1995; Barbet, 1997; Lee, 2003), existen múltiples posibilidades, que podemos clasificar en dos categorías: (i) estimulación aplicada antes o en la salida del chorro y (ii) estimulación aplicada en la superficie del chorro ya formado. Al primer tipo pertenecen varias técnicas de estimulación, la mayoría de ellas funcionando en régimen de goteo (*drop-on-demand*).

La estimulación por piezoeléctricos (figura 1.1a) actúa cambiando el volumen de líquido del depósito situado justo antes de la salida. Esto produce la eyección del líquido y una disminución de la presión en el depósito. La ventaja de este tipo de estimulación es que los aumentos y decrementos de la presión pueden ser usados para optimizar la generación de gotas satélite monodispersas, así como alterar el diámetro de las gotas producidas. Dependiendo del caudal, este tipo de estimulación también puede funcionar como mecanismo de *drop-on-demand*.

La estimulación por burbuja (*bubble jet*) es un mecanismo de *drop-on-demand* (figura 1.1b). Usa impulsos eléctricos aplicados a elementos resistivos en contacto con el fluido cerca del orificio de salida. Estos elementos al calentarse provocan la evaporación de una pequeña cantidad

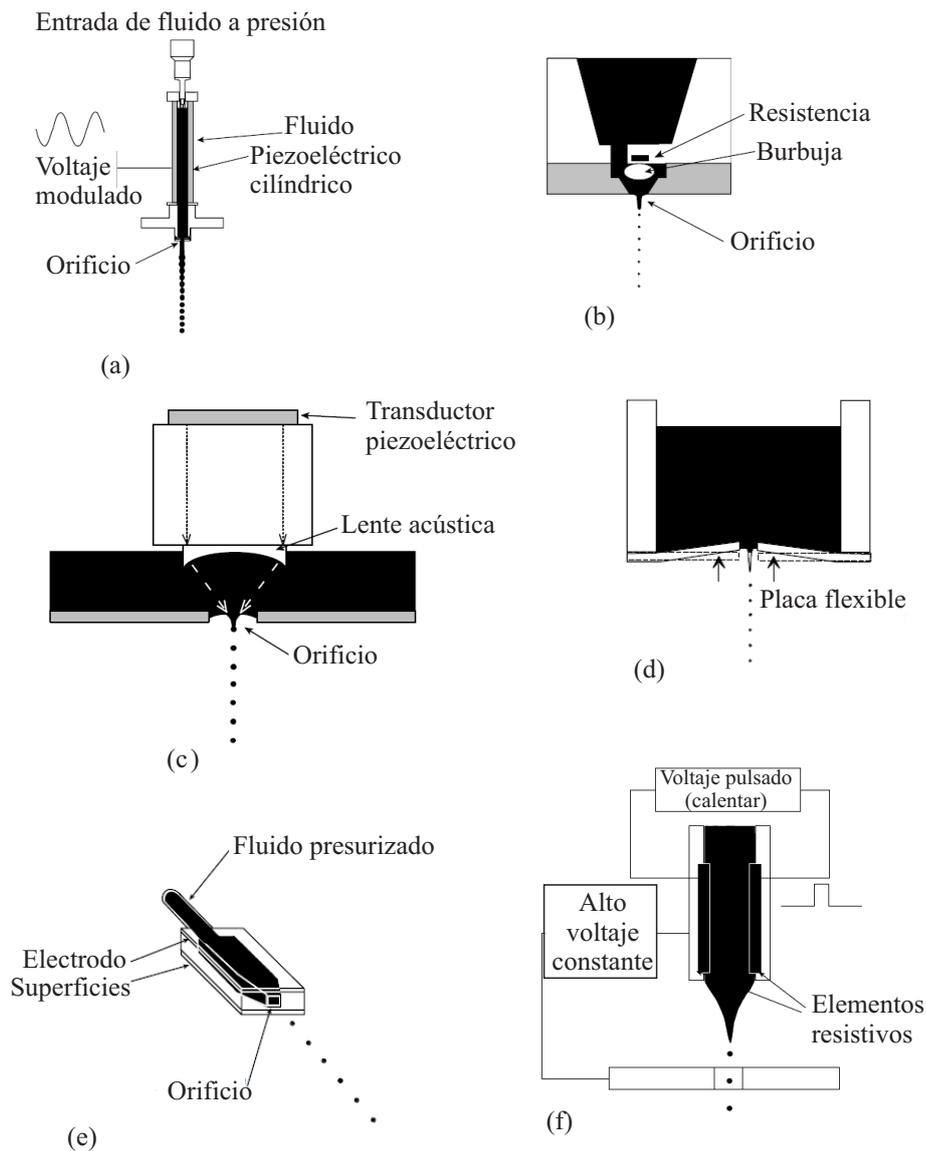


Figura 1.1: Tipos de estimulación (Lee, 2003): (a) Estimulación por piezoeléctricos, (b) Estimulación por burbuja, (c) Estimulación acústica focalizada, (d) Estimulación mediante una placa flexible, (e) Estimulación de un fluido electroreológico y (f) *LIFT process inkjet*.

de líquido que producirá cambios de presión debido a que se forman burbujas de vapor. Este pulso de presión es usado para eyectar el fluido a través de un orificio, que con los parámetros adecuados dará lugar a una única gota. Una variante de este dispositivo es generar la burbuja de gas mediante una descarga eléctrica producida por electrodos a alto voltaje que estarían en contacto con el líquido. Una posible desventaja de este

tipo de métodos son las posibles alteraciones en la composición química del líquido que se pueden dar debido al calentamiento.

La estimulación acústica focalizada es otro dispositivo de *drop-on-demand* (figura 1.1c). Este método consiste en dirigir un haz de ultrasonido focalizado con una lente acústica sobre la superficie de un menisco. La presión generada se usa para eyectar el líquido a través de un orificio y generar gotas. La ventaja de este método es que es inmune a los posibles bloqueos del orificio de salida, ya que éste es grande en comparación con el diámetro del haz de la perturbación. Otra ventaja es la facilidad con que puede cambiarse el diámetro de las gotas generadas cambiando sólo la distancia entre el transductor y el líquido, lo que equivale a cambiar el diámetro del haz que incide sobre el menisco. La región cercada por la estimulación debe estar ausente de perturbaciones en el líquido ya que esto podría desestabilizar la distancia lente-superficie del líquido. La energía necesaria para generar gotas por este método es unas 25 veces mayor que la usada por las técnicas de calentamiento. Este requerimiento energético no parece que sea una desventaja en la estimulación de líquidos con cargas delicadas como células vivas, proteínas y ADN, ya que ha sido utilizado en aplicaciones de biotecnología con éxito.

Otro mecanismo de *drop-on-demand* se consigue haciendo que la placa donde se sitúa el orificio de salida sea flexible (figura 1.1d). El movimiento de la placa es controlado por un mecanismo mecánico que permitirá controlar la eyección del líquido. Existen distintas formas de conseguir un movimiento controlado de la placa, por ejemplo, mediante la deposición sobre la placa de una fina capa de material piezoeléctrico, o de material térmico bimorfo, o por la atracción electrostática generada por una diferencia de potencial impuesta entre la placa donde está el orificio de salida del chorro y un electrodo colocado dentro del depósito.

El dispositivo llamado *electro-rheological fluid inkjet*, también de tipo *drop-on-demand*, utiliza un fluido que, bajo la acción de campos eléctricos intensos, sufre una transición de un fluido newtoniano a un fluido plástico. Éste se caracteriza por tener una gran disminución de presión, relativa a la presión umbral necesaria para el que el fluido se eyecte, de forma que el fluido no se desplaza. Cuando el campo eléctrico deja de actuar, el fluido tiene una viscosidad suficientemente baja de modo que forma un chorro de alta velocidad y se eyecta una microgota (figura 1.1e). La principal desventaja que presenta este método es que no es válido para cualquier tipo de líquido, además de ser necesarios campos del orden de los kilovoltios por milímetro para conseguir la transición de fase en el fluido.

Una variación de este método, conocida como *liquid ink fault tolerant process inkjet*, consiste en imponer sobre el menisco un campo eléctrico

con una amplitud por debajo del umbral necesario para la eyección, de forma que un aumento de temperatura produzca el cambio necesario en la tensión superficial del líquido para generar gotas (figura 1.1f).

A la categoría de estimulación en superficie corresponden la estimulación termocapilar y la estimulación electrohidrodinámica. En la primera, un haz láser de intensidad modulada calienta la superficie del chorro, generando una distribución de temperaturas (Nahas & Panton, 1990). Como la tensión superficial depende de la temperatura, se presentan dos efectos: (i) un decremento de la presión capilar en la región más caliente, donde la tensión superficial es más baja, y (ii) se generan esfuerzos tangenciales debido al efecto Marangoni generado por el gradiente de tensión superficial. Para un estudio detallado de este problema se remite al lector al trabajo de Barbet (1997).

La estimulación EHD consiste en colocar un electrodo, a distinto potencial eléctrico que el del chorro, cerca de la superficie de éste y muy próximo al orificio de salida. Los esfuerzos eléctricos aplicados sobre la superficie del chorro darán lugar a una perturbación de una longitud de onda bien definida. Si el potencial al que está sometido el electrodo es un pulso (estimulación EHD intermitente) se conseguirá romper una pequeña porción del chorro en gotas aisladas (Crowley, 1981, 1983; Hrdina & Crowley, 1989; Bardeau *et al.*, 1994; Atten *et al.*, 1995). Si el potencial es periódico, se conseguirá una rotura en gotas monodispersas (Goedde & Yuen, 1970b; Spohn & Atten, 1993; Barbet, 1997).

La ventaja de la estimulación en superficie frente a los otros tipos que se han comentado anteriormente es que permite fijar con relativa facilidad la longitud de onda de la perturbación, mientras que la estimulación antes o en la salida del chorro genera perturbaciones de varias longitudes de onda superpuestas, que pueden interferir entre sí dando lugar a patrones más complejos de estudiar. Incluso si estamos interesados en estos patrones, es fácil conseguir y controlar la superposición de distintas longitudes de onda con estimulación en superficie (Barbet, 1997). Por todo ello, desde el punto de vista de la investigación básica de dinámica de chorros capilares, la estimulación en superficie ofrece ventajas claras. El trabajo de esta tesis está principalmente enfocado a la caracterización de la estimulación EHD, pero el formalismo desarrollado es aplicable a cualquier tipo de estimulación en superficie.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Chorros líquidos sin campo eléctrico aplicado

Los chorros líquidos han atraído la atención de los investigadores desde hace siglos. Mariotte (1686) observa que un chorro que emerge de un orificio se rompe en gotas, aunque no identifica la fuerza responsable de la inestabilidad. Fueron Young (1805) y Laplace (1805) quienes desarrollaron una teoría sobre la tensión superficial. Gauss (1828) consolidó la formulación matemática de los fenómenos de tensión superficial, pero sin establecer aún una conexión entre esta fuerza y la inestabilidad de los chorros. El primero en hacer experimentos relacionados con la rotura de chorros fue Savart (1833). Eliminó cualquier posible fuente de perturbación del chorro y se dio cuenta que no podía evitar la rotura en gotas, aunque, como le pasó a Mariotte (1686), no identificó la fuerza responsable de la inestabilidad. Fue finalmente Plateau (1846) quien relacionó la rotura de los chorros con la tensión superficial, al verificar que la superficie del chorro disminuía ante perturbaciones de longitud de onda mayores que el diámetro del chorro sin perturbar (Plateau, 1863). También fue el primero en realizar experimentos cuantitativos sobre esa inestabilidad (Plateau, 1873).

Rayleigh (1878, 1879) estableció que la inercia interviene en contra del crecimiento de las perturbaciones de onda muy larga, que implican un gran desplazamiento de líquido. El estudio lineal temporal de la inestabilidad de chorros (Rayleigh, 1878), que consiste en seguir al chorro con la misma velocidad con la que sale del orificio, y observar el crecimiento de las perturbaciones, le permitió predecir que, en ausencia de viscosidad, las perturbaciones que crecen más rápidamente son aquellas cuya longitud de onda es aproximadamente nueve veces el radio inicial del chorro. Eso selecciona el tamaño típico de las gotas, lo cual corroboró experimentalmente. Revolucionó las técnicas experimentales, aplicando por primera vez iluminación estroboscópica (Rayleigh, 1882a) y técnicas fotográficas (Rayleigh, 1891) a este estudio. Pudo observar así las gotas satélites. También extendió su análisis modal a chorros líquidos muy viscosos, demostrando que en ese límite son favorecidas las perturbaciones de longitud de onda muy larga.

Tratando de caracterizar la influencia del baño gaseoso exterior sobre un chorro líquido con cierta velocidad, Weber (1931) volvió a derivar la relación de dispersión para viscosidad arbitraria, que ya había obtenido Rayleigh (1882b). Usó una aproximación de onda larga con la que pudo calcular aproximadamente cómo crecían las perturbaciones cuando el líquido es viscoso. Fue Chandrasekhar (1961) quien analizó numéricamente el problema con una viscosidad arbitraria. Tomotika (1935) tuvo

en cuenta el efecto del baño exterior sobre una columna líquida infinita, considerando densidades arbitrarias para el chorro y el baño exterior.

Muchos de los trabajos experimentales sobre chorros capilares realizados hasta el momento, entre los que destacan los de Haenlein (1931), Donnelly & Glaberson (1966) y Goedde & Yuen (1970a), González & García (2009), han ido encaminados, entre otros objetivos, a comprobar los resultados del análisis perturbativo lineal.

A pesar de la gran cantidad de trabajos publicados (Eggers, 1997; Lin, 2003; Eggers & Villermaux, 2008) sobre chorros capilares, el análisis modal temporal, es decir, la determinación y descripción de los modos naturales en que puede descomponerse cualquier pequeña perturbación del chorro respecto de su estado base, no ha sido completado hasta muy recientemente. Quizás, la falta de interés sobre un análisis modal sistemático sea debida a que se puede describir la característica principal de la evolución sólo considerando un único modo, el cual es inestable para longitudes de onda mayores que el perímetro del chorro sin perturbar ($2\pi R$). No obstante, los restantes modos, aunque estables, no dejan de ser necesarios para comprender completamente el comportamiento de este sistema físico. Finalmente, este análisis temporal ha sido realizado por García & González (2008). En él, como propuso Lord Rayleigh, el chorro sin perturbar es considerado como una columna en reposo. García y González establecen que, además de los dos modos capilares ya conocidos, llamados *capilar subdominante* el estable, y *capilar dominante* el inestable, hay que tener en cuenta un infinito numerable de modos estables conocidos como *modos hidrodinámicos*. Los modos capilares, que surgen de la competición entre las fuerzas de inercia y capilar, inducen una deformación importante en la forma del chorro y la combinación de estos dos modos es suficiente para describir cualquier perturbación en la forma del chorro y en su velocidad media. Por otro lado, los modos hidrodinámicos tienen su origen en la competencia entre la inercia y la fuerza viscosa, y están descritos por un campo de velocidades recirculatorio y generan pequeñas deformaciones en el chorro. Los modos hidrodinámicos han sido previamente descritos en los puentes líquidos (Nicolás & Vega, 2000) pero han sido ignorados en los chorros. Los dos modos capilares junto con la familia infinita de modos hidrodinámicos forman una base completa para describir cualquier perturbación axisimétrica en un chorro capilar viscoso.

Un enfoque distinto, más realista, es el análisis espacial del problema de inestabilidad, es decir, adoptando un sistema de referencia fijo en el orificio. Las perturbaciones crecerán o decrecerán espacialmente a lo largo de lo que se conoce como chorro semiinfinito. Así lo hicieron Keller *et al.* (1973), quienes demostraron en el caso no viscoso, que si la

velocidad del chorro es suficientemente alta (velocidades mucho mayores que la velocidad típica de propagación de las ondas capilares), el análisis espacial de inestabilidad conduce a los resultados obtenidos en el análisis temporal. Además de los modos capilares, emparentados con los mencionados en el análisis temporal, Keller *et al.* encontraron otra familia infinita de modos sin contrapartida en el análisis temporal y con características sorprendentes: factor de crecimiento mayor que el del modo capilar dominante y una longitud de onda muy grande. En el artículo de Keller no vienen muy bien descritos estos modos, y además se considera que su comportamiento no es físico. Debido a su gran longitud de onda, se descartó observarlos experimentalmente. Por otro lado, Bogy (1978) dio argumentos radiativos para excluirlos también de su análisis.

También hay constancia de otro modo, mencionado por Busker & Lamers (1989), en el caso no viscoso, que apareció en literatura gris (comunicación privada de Boersma a estos autores). Aunque este modo no aparece en el artículo de Keller, en el de Busker sólo se menciona su existencia y su localización asintótica para velocidades altas. Más recientemente, Le Dizès (1997) lo ha tenido en cuenta en la búsqueda de modos globales en chorros capilares.

Paralelamente al avance que supuso el trabajo de Keller, los conceptos de inestabilidad convectiva y absoluta desarrollados inicialmente para el estudio de plasmas fueron aplicados a problemas de inestabilidad hidrodinámica (Briggs, 1964; Bers, 1983; Huerre & Monkewitz, 1990). Según estas teorías, la localización de los ceros y las ramas en el plano complejo k de una relación de dispersión no da toda la información física relevante sobre su estabilidad. La relación de dispersión surge de manera natural como el denominador de la transformada de Fourier espacio-temporal de la función de Green para cualesquiera condiciones de contorno. La función de Green se obtiene de la transformada inversa con el apropiado contorno de Bromwich en los planos complejos ω y k satisfaciendo las condiciones de causalidad (Briggs, 1964). Es necesario pues monitorizar el movimiento de los ceros cuando se hace la parte imaginaria de la frecuencia tender a cero. Este procedimiento define una clara separación de los ceros (polos de la transformada de la función de Green) que afectan al flujo aguas arriba y aguas abajo y sólo entonces los polos revelan la naturaleza creciente o decreciente de sus modos asociados.

Estos conceptos de inestabilidad absoluta y convectiva fueron por primera vez aplicados a los chorros por Leib & Goldstein (1986a). En este primer artículo, los autores consideran un chorro no viscoso y un perfil de velocidades de Hagen-Poiseuille, incluyendo como límite el perfil plano. La existencia de la inestabilidad absoluta, que se manifiesta por la presencia de perturbaciones que se amplifican desde la salida del chorro,

no necesita una descripción completa de los modos espaciales que surgen de la relación de dispersión. Sólo es necesario mostrar la coalescencia de dos de estos modos provenientes de semiespacios diferentes del plano complejo k cuando la parte imaginaria de la frecuencia tiende a cero. Como consecuencia de esto, la caracterización del conjunto completo de los modos no se presenta en ese trabajo. Lo mismo ocurre con la extensión al estudio del chorro viscoso (Leib & Goldstein, 1986b). Así pues, la tarea de encontrar y describir todos los modos espaciales ha sido siempre evitada. Esta es una laguna dentro del estudio fundamental de los chorros capilares que este trabajo pretende completar.

1.2.2. Chorros líquidos sometidos a campos eléctricos

El primero estudio, tanto teórico como experimental, sobre el efecto del campo eléctrico radial sobre un chorro conductor no viscoso fue realizado por Melcher (1963). Concluyó que el efecto del campo era desestabilizador para perturbaciones axisimétricas, excepto para longitudes de onda muy largas. También predijo y comprobó que las perturbaciones no axisimétricas pueden ser más inestables que las axisimétricas para campos suficientemente intensos. El papel de la viscosidad fue analizado más adelante por Saville (1971). Más recientemente, González *et al.* (2003) estudiaron la estabilidad del chorro viscoso bajo la acción de un campo radial alterno.

El estudio de un campo tangencial sobre columnas líquidas dieléctricas no viscosas fue llevado a cabo por Nayyar & Murty (1960). Para líquidos conductores con pérdidas, el análisis de estabilidad bajo el efecto de un campo eléctrico tangencial fue realizado por Mestel (Mestel, 1994; Mestel, 1996). La estabilidad de fluidos dieléctricos usando el modelo de conductor con pérdidas, *Taylor–Melcher leaky dielectric model* (Saville, 1997) sin efectos electrocinéticos fue estudiado por López-Herrera *et al.* (1999). El efecto de un campo tangencial sobre una interfaz entre dos fluidos aislantes siempre es estabilizante (Melcher, 1963).

El análisis lineal ha permitido comprender el efecto del campo eléctrico sobre el tamaño de las gotas y la longitud de rotura del chorro. En los trabajos anteriores se ha puesto de manifiesto los mecanismos de actuación de un campo eléctrico sobre una superficie libre cilíndrica cargada. En el caso de chorros conductores deben distinguirse dos de estos mecanismos: (i) el efecto punta, que frente a una deformación de la superficie da lugar a un incremento de la presión hacia el exterior en dichos puntos que ayuda al crecimiento de la inestabilidad, (ii) el efecto de la inhomogeneidad del campo en geometría cilíndrica (dependencia radial del tipo

$1/r$). Dado que la superficie libre es equipotencial, el campo se intensifica en los puntos más cercanos al eje; así ocurre también con la presión electrostática, lo cual se opone al crecimiento de la inestabilidad. Se trata de dos efectos contrapuestos, si bien el segundo es independiente de la longitud de onda de las perturbaciones, el primero asociado a la curvatura de la superficie, aumenta para pequeñas longitudes de onda y compite con la estabilización debida a las fuerzas capilares.

Los trabajos mencionados hasta ahora consideraban el efecto que los campos eléctricos tienen sobre chorros cuando se aplican en toda la longitud. Frente a esto, primero Goedde & Yuen (1970b) y posteriormente, Crowley (1981, 1983) consideraron la aplicación local de los campos eléctricos como herramienta de estimulación, como una opción más sencilla y práctica a la generada por piezoeléctricos. La estimulación no se ejercerá a la salida del chorro como ocurre con otros tipos de estimulación como la piezoeléctrica o la acústica, sino que se aplica aguas abajo, pero aún en la región donde el ruido natural no se ha amplificado demasiado. Esto tiene la ventaja de que se pueden diseñar separadamente el orificio de salida y el electrodo, para que sean lo más eficientes posibles, cada uno en su objetivo. Goedde & Yuen (1970b) realizaron un estudio experimental donde se centraron en ver la influencia de los efectos no lineales sobre los factores de crecimiento de las ondas superficiales. Crowley (1983) resolvió el problema lineal de un chorro infinito perfectamente conductor descrito mediante el modelo de Lee, que entraba en un electrodo coaxial situado muy cerca de la superficie del chorro, generando una presión eléctrica tipo escalón, de anchura igual a la longitud del electrodo. Obtuvo unos resultados que estaban en buen acuerdo con las medidas de longitud de ruptura del chorro. Para conseguir longitudes de rotura más cortas con campos débiles, ideó un dispositivo compuesto por una serie de electrodos, del tal forma que se optimizaba la separación y la fase con la que actuaba cada uno. En esta línea se encuentran también los trabajos de Spohn & Atten (1993) y Barbet (1997), donde se estudia la longitud de rotura del chorro como función del voltaje aplicado y del número de electrodos equidistantes usados. En estos trabajos se aborda el problema de la estimulación dividiendo el espacio en dos regiones, una, aquella donde es aplicada la estimulación, y otra, donde ésta ya no actúa, y se produce el crecimiento de las perturbaciones. Además se simplifica el tratamiento en la primera zona suponiendo que el líquido es perfecto. A este respecto, en esta memoria se desarrolla un tratamiento espacial del problema de estimulación que no requiere división alguna en regiones ni restricción a líquidos no viscosos.

1.2.3. Modelos unidimensionales

Los modelos unidimensionales surgen en vista de la dificultad que entraña resolver las ecuaciones que gobiernan la evolución de una columna líquida. El primer modelo aplicado a chorros fue el construido por Melcher & Warren (1971). Consideraron independientes de la coordenada radial la presión y la velocidad axial, y despreciaron la velocidad radial. Aunque los resultados no eran malos, el campo de velocidades no verificaba la ecuación de continuidad y se encontraron inconsistencias en la deducción de los términos viscosos. El modelo de rodajas no viscoso de Lee (1974) desprecia la dependencia radial de la velocidad axial y la presión, mientras que la velocidad radial dependerá linealmente de esta coordenada. Eggers & Dupont (1994) y, de forma independiente, García & Castellanos (1994), generalizaron este modelo al caso con viscosidad basándose en la hipótesis de esbeltez. En la aproximación lineal, este resultado coincide con el obtenido por Weber (1931). El modelo de Cosserat surgió en el contexto de la mecánica de barras sólidas y fue extendido su uso a chorros por Green (1976). Fue justificado a partir del promedio radial de las ecuaciones de Navier–Stokes, así como su extensión a fluidos no newtonianos por Bousfield *et al.* (1986). Este modelo es inconsistente con algunos términos viscosos, por lo que puede fallar a viscosidades altas. Sorprende el excelente comportamiento del modelo lineal no viscoso, puesto de manifiesto por Bogy (1978b, 1979), quien comparó los modelos lineales de Lee y Cosserat con los resultados de Rayleigh (1878) sin viscosidad. García & Castellanos (1994) dedujeron otro modelo, el modelo promediado, donde se estiman los términos viscosos despreciados en el modelo de Cosserat, así como un modelo de orden superior, el modelo parabólico, donde la dependencia de la velocidad axial y de la presión es cuadrática en la coordenada radial. Resulta clave mantener intacto el término de presión capilar para obtener buenos resultados con los modelos unidimensionales ya que es éste el término que gobierna la dinámica del chorro.

Desde un sistema de referencia fijo (análisis espacial), no se han encontrado muchos trabajos. Podemos mencionar el de Bogy (1978), que usa el modelo de Cosserat y emplea argumentos radiativos para eliminar los modos inerciales. También tenemos el trabajo de Pimbley (1976), que usa el modelo de Lee para justificar la formación de gotas a partir de un problema de condiciones de contorno.

Los modelos unidimensionales han sido una herramienta muy útil a la hora de estudiar la dinámica de los chorros capilares. El hecho de que estos modelos funcionen tan bien ha hecho que su uso se extienda a muchos campos, por ejemplo, el trabajo de López-Herrera *et al.* (1999) en electrosprays, la impresión por chorro de tinta (Barbet, 1997),

o en la modelización de rotura de fluidos no newtonianos (Clasen *et al.*, 2006; Hoever *et al.*, 2010). En chorros newtonianos perfectamente conductores bajo los efectos de unos esfuerzos radiales, López-Herrera *et al.* (2005) ha usado el modelo unidimensional promediado para encontrar soluciones numéricas. López-Herrera & Gañán-Calvo (2004) investigaron experimentalmente el efecto tanto de la viscosidad como de la amplitud del campo aplicado sobre el tamaño de las gotas satélite y la carga acumulada para chorros conductores bajo la acción de un campo radial. Compararon sus resultados experimentales con los obtenidos a partir de un modelo unidimensional consiguiendo un buen acuerdo para moderadas amplitudes del campo eléctrico aplicado.

1.3. Un primer acercamiento al problema

La estimulación EHD sobre chorros conductores produce esfuerzos sobre la superficie del chorro, que son puramente normales cuando el chorro es conductor perfecto, pero que tienen una componente tangencial si la conductividad es finita. Es previsible, y así se mostrará en esta tesis, que los esfuerzos más importantes sean los normales en la mayoría de los casos prácticos. Por otra parte, este tipo de estimulación está caracterizada por generar perturbaciones de pequeña amplitud, al menos en comparación con otros sistemas tales como los piezoeléctricos. Esto justifica que a lo largo de toda la tesis podamos restringirnos a un tratamiento lineal. Con base en estas dos premisas, podemos construir un modelo sencillo que nos permita comprender el mecanismo de estimulación principal, que es el de los esfuerzos normales. También, al final de este apartado haremos un breve comentario acerca de los efectos de un esfuerzo tangencial sobre la superficie del chorro.

Desde un punto de vista físico, el efecto de cualquier estimulación puede ser un cambio en la velocidad de las partículas fluidas a la salida de la región de estimulación, unido a una deformación de la superficie del chorro. Esto conduce a una clasificación en cuanto a la naturaleza de la estimulación. Se dirá que la naturaleza de la estimulación es de tipo *impulso* cuando su efecto es esencialmente un cambio en la velocidad del chorro manteniendo su superficie sin perturbar. Cuando lo que se consigue es una deformación de la superficie sin cambio en la velocidad, se estará ante una estimulación tipo *deformación*. En la situación más general aparecerán condiciones mixtas, con una velocidad y deformación iniciales.

A la vista de los resultados experimentales existentes sobre estimulación EHD aplicada a un chorro conductor, podemos decir que el efecto es un cambio en la velocidad debido al impulso ejercido por la fuerza eléctrica.

ca. Un primer acercamiento a este problema puede consistir en calcular el impulso que siente una partícula fluida en la región de estimulación. El efecto básico que ejerce el campo eléctrico sobre el chorro es la aplicación de una presión electrostática distribuida de manera no uniforme sobre su superficie. Las diferencias de presión aplicadas implican una fuerza axial, responsable del impulso ejercido sobre el fluido. Esto se puede justificar considerando un modelo de rodajas para describir el chorro. Despreciando términos no lineales y viscosos, podemos escribir la componente axial de la conservación del momento, referida a un sistema que se mueve con la velocidad del chorro, como

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.1)$$

donde $w(z, t)$ es la velocidad axial en cualquier punto de una rodaja y $p(z, t)$ su presión. Por otra parte, el equilibrio de esfuerzos normales en la superficie del chorro se escribe

$$p + p_E = \gamma\kappa \simeq 0, \quad (1.2)$$

donde $p_E = 1/2\epsilon_0 E^2$, es la presión electrostática, con E el módulo del campo eléctrico en la superficie del chorro y donde hemos despreciado el salto capilar $\gamma\kappa$, producto de la tensión superficial por la curvatura de la superficie. De todo lo anterior podemos sacar la imagen sencilla de una fuerza axial responsable del impulso dada por

$$F = \frac{\partial p_E}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Para el campo generado por un electrodo se usará una aproximación que retenga las características esenciales: una campana de anchura $2d$ dada por

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \right] \cos(\omega t) \quad -d < z < d. \quad (1.4)$$

Queda por tanto la presión eléctrica como

$$p_E(z, t) = p_{E0}(z) [1 + \cos(2\omega t)]. \quad (1.5)$$

El impulso que sufre una partícula debido a una fuerza F es

$$\Delta v = \int_{-\infty}^{\infty} F dt. \quad (1.6)$$

Como la zona de estimulación está limitada a la región $-d < z < d$, la integral se reescribirá de este modo

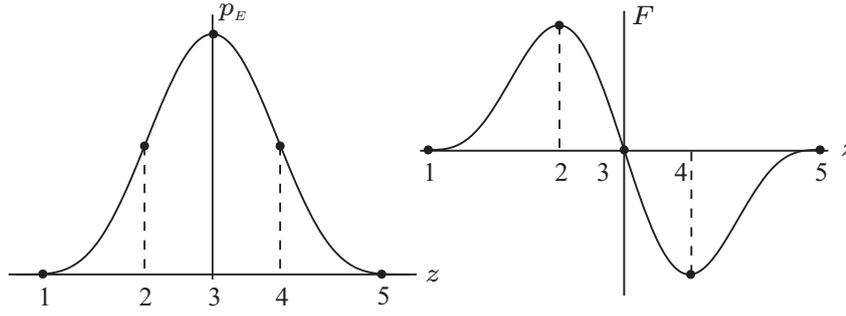


Figura 1.2: Presión eléctrica y fuerza asociada como función de la coordenada axial.

$$\Delta v = \int_{t(-d)}^{t(d)} F(z(t), t) dt, \quad (1.7)$$

donde $t(-d)$ y $t(d)$ son los instantes en los que la rodaja fluida pasa por las posiciones $-d$ y d respectivamente, $z(t)$ es la posición de la rodaja en el instante t y $F(z(t), t)$ es la fuerza ejercida sobre dicha rodaja, que depende de su posición en la campana de campo eléctrico y del instante t . Como $\Delta v \ll v_0$ (v_0 es la velocidad del chorro), se puede aproximar la expresión (1.7) por

$$\Delta v = \int_{-d}^d F\left(z, \frac{z}{v_0}\right) \frac{dz}{v_0}. \quad (1.8)$$

Sustituyendo la fuerza por su expresión se llega a

$$\Delta v = \int_{-d}^d \frac{1}{8v_0} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right]^2 \cos^2\left[\omega\left(\frac{z}{v_0} + t_0\right)\right] dz, \quad (1.9)$$

donde t_0 es el instante en el que la partícula fluida llega al centro de la campana.

Integrando se obtiene la siguiente expresión para el impulso,

$$\Delta v = \frac{3\pi^4 \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(v_0 y t_0 / d)}{4v_0 [(\pi^2 - y^2)(4\pi^2 - y^2)]} \quad (1.10)$$

que es el cambio en la velocidad que sufre una partícula fluida a la salida de la región de estimulación. El parámetro $y = 2\omega d/v_0$ es una frecuencia adimensional y da cuenta del cociente entre el período de la estimulación y el tiempo de paso de la partícula fluida por la región de estimulación. El término $\operatorname{sen}(v_0 y t_0 / d)$ pone de manifiesto que una partícula fluida puede experimentar un impulso positivo, negativo o nulo, dependiendo del

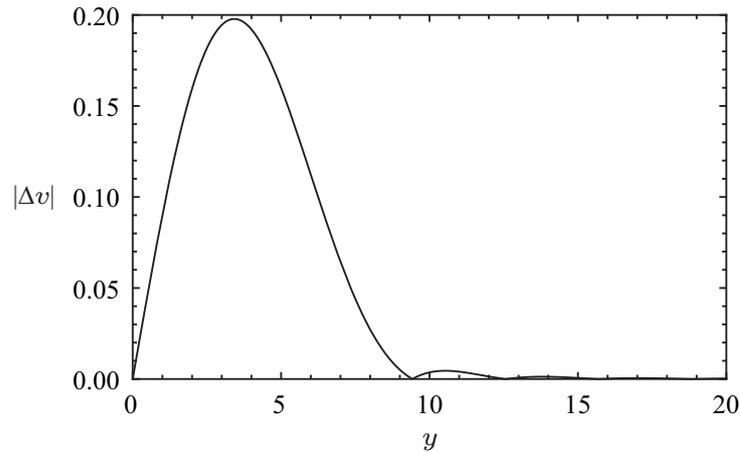


Figura 1.3: Módulo del cambio de velocidad en función del parámetro adimensional $y = 2\omega d/v_0$.

instante concreto en que entra en la región de estimulación. La expresión (1.10) se ilustra en la figura 1.3.

Este tipo de análisis ha sido realizado por Hrdina & Crowley (1989) usando para la distribución espacial de campo una función uniforme en toda la región de estimulación, y por Barbet (1997) usando también una distribución tipo campana, pero diferente a la considerada por nosotros.

De esta expresión se puede deducir qué longitud de onda es estimulada con mayor amplitud, a saber

$$\lambda = 2d. \quad (1.11)$$

Esto se podría haber deducido de la figura 1.2: cuando una partícula fluida entra en la región de estimulación (punto 1) empieza a sentir una fuerza en sentido aguas abajo cada vez de mayor amplitud hasta que llega al punto 2 (el punto de máxima pendiente en la campana de presión), donde la amplitud de la fuerza se hace máxima. Luego la amplitud de la fuerza empieza a disminuir hasta que se llega al punto 3, donde se hace nula y la fuerza cambia su sentido (aguas arriba). La amplitud vuelve a crecer hasta que llega al máximo en la posición 4. A partir de este punto la amplitud vuelve a decrecer hasta llegar al final de la estimulación (punto 5). Estas amplitudes están moduladas temporalmente como se ha visto en la ecuación (1.5) como $\cos(2\omega t)$.

Para determinar cuándo el impulso que sufre una partícula fluida se hace máximo, podemos simplificar la situación suponiendo que la partícula sólo sufre dos “tirones” en la región de estimulación. Para que el impulso sea máximo se ha de cumplir que cuando dicha partícula pase por el punto 2, la fuerza sea máxima ($\cos(2\omega t) = 1$) y cuando llegue al pun-

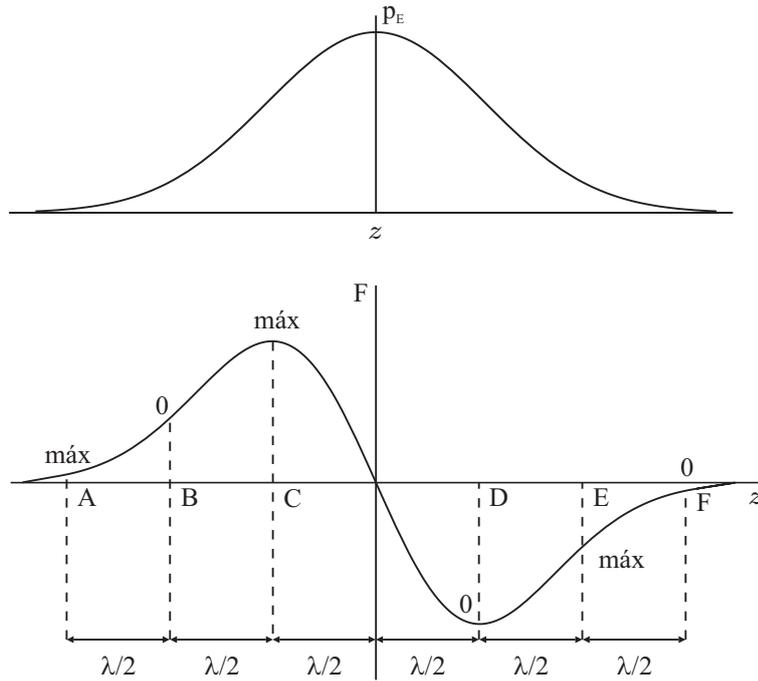


Figura 1.4: Campana de presiones extendida y la fuerza asociada, donde “máx” indica un máximo temporal ($\cos(2\omega t) = 1$) y “0” indica un cero en la dependencia temporal ($\cos(2\omega t) = 0$).

to 4 sea cero ($\cos(2\omega t) = 0$). Estos dos puntos están separados por una distancia,

$$d = v_0 \frac{T}{2}, \quad (1.12)$$

donde T es el período de la estimulación. Esto es equivalente a $\lambda = 2d$, que concuerda con lo obtenido a partir de la expresión del impulso.

Cuando no se dan estas condiciones óptimas, el impulso neto será menor. A partir de este razonamiento se deduce también por qué no estimula un esfuerzo constante: se irían compensando los impulsos por pares y a la salida el impulso neto será cero.

En el caso de una campana muy extendida (figura 1.4), las “colas” actúan de manera negativa. Agrupando los esfuerzos por pares, se puede deducir el esfuerzo neto que sufre una partícula fluida. En la figura 1.4 se observa cómo la mayor parte del impulso que sufre la partícula se debe a los tirones en los puntos C y D, como se comentó antes. Si nos fijamos en el siguiente par de puntos, B y E, vemos que el impulso neto actúa en sentido contrario al mayor de los impulsos, punto C. El siguiente par, A y F, sí que dan un impulso neto positivo, pero de menor amplitud que el anterior. Se puede concluir entonces que una campana de presiones

extendida es menos eficiente que una más estrecha.

Con respecto a los esfuerzos tangenciales, no tenemos un modelo sencillo que permita hacer predicciones cuantitativas. Sin embargo, si podemos desarrollar cierta intuición a partir de argumentos cualitativos. En concreto, debemos esperar que los esfuerzos eléctricos aplicados en la superficie se difundan al interior del fluido debido a su carácter viscoso. Por tanto, la viscosidad debe jugar un papel más importante en este tipo de estimulación. Su análisis detallado se verá posteriormente.

1.4. Organización del trabajo

Los resultados de este trabajo no se restringen a la mera caracterización de la estimulación EHD, sino que por un lado el formalismo es útil para la descripción de cualquier tipo de estimulación realizada mediante esfuerzos en la superficie del chorro, y por otro, se han obtenido resultados relativos a la dinámica del chorro que tienen interés por sí mismos. Nos referimos a la descripción de los modos espaciales. Por ello, la organización más natural de la tesis nos parece aquella en la que primero se plantee el problema fluidomecánico de un chorro sometido a esfuerzos superficiales de cualquier origen, y posteriormente se aborde el problema eléctrico propio de la estimulación EHD.

Para ello, en el capítulo dos se presentarán las ecuaciones y condiciones de contorno que describirán la dinámica del problema fluido sometido a cualquier tipo de estimulación superficial. Se resolverá el problema fluido sometido a una estimulación puntual con una dependencia temporal armónica (problema de la señal), mediante el formalismo de la función de Green. En esta solución aparecerá una combinación de los modos del sistema. Se mostrará un estudio detallado del análisis espacial del chorro capilar y se comprobará que la función de Green es una herramienta imprescindible para la comprensión de los modos espaciales.

Una vez realizado el análisis modal, el objetivo del capítulo tres es realizar un estudio análogo mediante los modelos unidimensionales, lo cual suministra una herramienta de análisis más simple y, como se verá, suficientemente precisa. Se estudiarán los modos que aparecen en cada uno de los modelos y se comprobará su bondad comparando los resultados obtenidos para la función de Green con los del caso 3D.

La caracterización de la estimulación EHD se realizará en el capítulo cuatro. Aunque en general están acoplados el problema fluidomecánico y eléctrico, en la práctica estos problemas pueden considerarse desacoplados. Se resolverá el problema eléctrico mediante el método de los elementos finitos usando el software comercial COMSOL Multiphysics y a partir de sus resultados se obtendrán los esfuerzos eléctricos que actúan sobre

el chorro. Para comprobar y entender estos resultados numéricos, se pondrá un modelo circuital del problema. A partir del estudio numérico se diseñará un estimulador que actúe de forma eficiente. Por último, para dicho diseño, se estudiará la respuesta del chorro a la estimulación. Para ello se calculará la convolución de la función de Green obtenida en capítulos anteriores con los esfuerzos que se han obtenidos de forma numérica. De estos resultados se podrá obtener mucha información, como por ejemplo, cómo afecta la estimulación a cada uno de los modos espaciales, o a qué tipo de condición de contorno corresponde la deformación y velocidad obtenidas a la salida de la estimulación. También se verá cuál de las dos componentes de la estimulación, normal o tangencial, es más eficiente.

Capítulo 2

Estimulación mediante esfuerzos en la superficie del chorro

2.1. Configuración geométrica

El sistema que se pretende estudiar es un chorro líquido que emerge a través de un orificio, circular muchas de las veces, siendo el medio exterior aire a presión atmosférica. Aunque para velocidades mayores que la velocidad capilar (velocidad de propagación de las ondas capilares) se puede estudiar la dinámica del chorro desde un sistema de referencia que se mueve con la velocidad del chorro (Rayleigh, 1945), en este trabajo se hará desde un sistema de referencia fijo (Keller *et al.*, 1973; Bogy, 1979). Pasar de un sistema al otro se traducirá en una transformación galileana de coordenadas aplicada a las ecuaciones y las condiciones de contorno. Típicamente la estimulación se realiza a cierta distancia del orificio de salida, de manera que los posibles efectos asociados a la relajación del perfil inicial de velocidades no intervienen en la zona de estimulación. Por ello, podemos suponer que el chorro es una columna líquida que se extiende hasta el infinito en ambos sentidos y que posee un perfil plano de velocidades.

Conseguir una determinada distribución de campos eléctricos en la superficie del chorro requerirá una configuración de electrodos apropiada. En este caso se busca un efecto localizado de la estimulación, para lo que se necesitará, además de un electrodo sometido a potencial, otros dos conectados a tierra para apantallar el campo (González & García, 2009), tal y como se muestra en la figura 2.1. Así pues, el montaje estará compuesto por tres electrodos coaxiales situados muy cerca de la superficie del chorro.

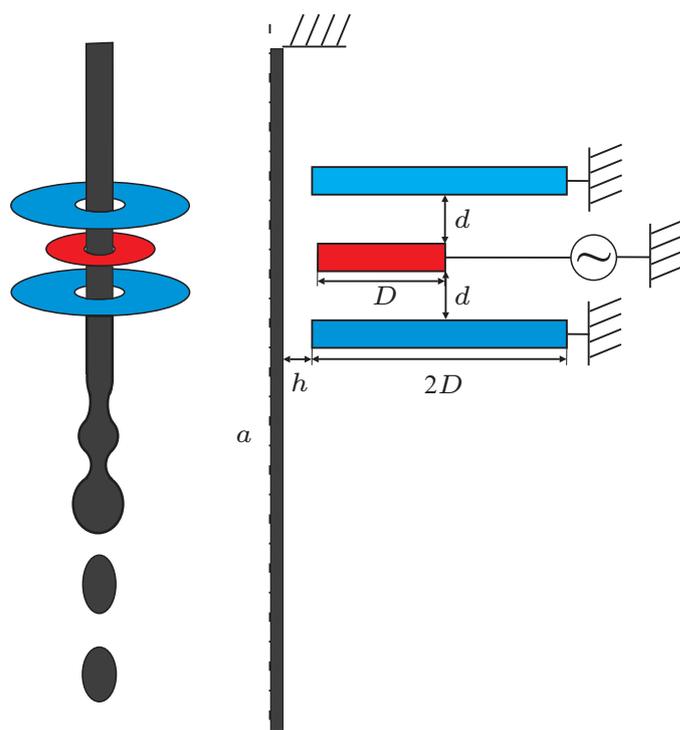


Figura 2.1: Esquema de la configuración chorro-electrodos.

2.2. Propiedades del fluido

El líquido que formará el chorro se considera incompresible, newtoniano y termodinámicamente homogéneo, es decir, no se contemplan ni gradientes de temperatura ni de concentración. Así pues, se consideran constantes y uniformes todas las propiedades del fluido: ρ , la densidad, μ , la viscosidad dinámica, y γ , la tensión superficial.

La influencia de este baño ha sido estudiada por Tomotika (1935), aunque restringiéndose a una velocidad igual a la del chorro. Si la densidad del fluido exterior es pequeña, el baño no influye mecánicamente en la evolución del chorro. Al ser la densidad y viscosidad cinemática del gas típicamente tres órdenes de magnitud menores que las del líquido, se podrá despreciar su efecto siempre que la velocidad de emersión no sea demasiado elevada (Sterling & Sleicher, 1975; Gordillo & Pérez-Saborid, 2005; González & García, 2009). Como segunda consecuencia importante, el perfil de velocidades del chorro podrá tomarse como plano.

2.3. Ecuaciones y condiciones de contorno fluidomecánicas

2.3.1. Ecuaciones de volumen

La conservación de la masa para un fluido incompresible exige que se cumpla la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.1)$$

La evolución del campo de velocidades estará gobernada por la ecuación de Navier–Stokes,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{T}_m + \mathbf{f}_{\text{vol}}, \quad (2.2)$$

en la cual, \mathbf{T}_m es el tensor de esfuerzos mecánicos y \mathbf{f}_{vol} es la densidad de fuerza volumétrica. En el caso que incumbe a este trabajo, no habrá fuerzas en volumen, ya que se despreciará el efecto de la gravedad, y las fuerzas ejercidas por el dispositivo de estimulación estarán aplicadas en la superficie. En el caso de la estimulación EHD justificaremos la ausencia de fuerzas eléctricas en volumen en el capítulo .

El tensor de esfuerzos mecánicos viene dado por

$$\mathbf{T}_m = -P\mathbf{I} + \mathbf{T}_v, \quad (2.3)$$

donde P es la presión, \mathbf{I} es el tensor identidad, y \mathbf{T}_v es el tensor de esfuerzos viscoso, que para fluidos newtonianos e incompresibles tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_v = \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t), \quad (2.4)$$

donde el superíndice t indica la transposición del tensor $\nabla \mathbf{v}$.

2.3.2. Condiciones de contorno

La forma del líquido que constituye la columna, lo que se llamará interfaz, se expresará matemáticamente como

$$G(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición.

La primera condición que debe cumplirse en la interfaz es que el fluido, por definición, no puede atravesarla; esto es la condición cinemática

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G \right) \Big|_{G(\mathbf{r}, t) = 0} = 0. \quad (2.6)$$

También se exigirá una condición de equilibrio de esfuerzos en la interfaz. En general, los tensores de esfuerzos mecánicos y esfuerzos externos toman valores distintos a cada lado de la interfaz. La fuerza neta por unidad de área que por ello se produce tiene que compensarse con el salto capilar de presiones. La presión capilar es proporcional a la curvatura media de la superficie, siendo la constante de proporcionalidad la tensión superficial. La condición de equilibrio de esfuerzos queda como

$$P\mathbf{e}_n - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{e}_n + \|\mathbf{T}\| \cdot \mathbf{e}_n = (\nabla \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n, \quad (2.7)$$

donde se ha tomado como referencia la presión exterior a la columna y \mathbf{T} son los esfuerzos externos actuando sobre la superficie libre del chorro. Sus signos han sido elegidos de acuerdo con la dirección positiva de las coordenadas radial y axial. El símbolo $\|(\cdot)\|$ indica que hay que evaluar el salto de una magnitud dada (\cdot) en la interfaz. El vector \mathbf{e}_n es unitario y normal a la interfaz, y viene dado por

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \Big|_{G(\mathbf{r},t)=0} = \frac{1}{K_n}\mathbf{e}_r - \frac{F_z}{K_n}\mathbf{e}_z, \quad (2.8)$$

donde $K_n = (1 + F_z^2)^{1/2}$ y, \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_z , los vectores unitarios en la dirección radial y axial en coordenadas cilíndricas respectivamente. En general, la forma que tendrán los esfuerzos externos \mathbf{T} será

$$\mathbf{T} = T_n\mathbf{e}_n + T_t\mathbf{e}_t, \quad (2.9)$$

siendo T_n y T_t las componentes normal y tangencial del esfuerzo aplicado y

$$\mathbf{e}_t = \frac{F_z}{K_n}\mathbf{e}_r + \frac{1}{K_n}\mathbf{e}_z, \quad (2.10)$$

el vector unitario tangente a la interfaz.

2.3.3. Adimensionalización

Se usarán como escalas, para las distancias, a (radio del chorro sin perturbar), para el tiempo, $t_c = (\rho a^3/\gamma)^{1/2}$ (tiempo capilar), para la velocidad, a/t_c (velocidad capilar), y para la presión, γ/a (presión capilar). A la vista de esto surgen dos números adimensionales: una velocidad adimensional $\beta = v_0(\rho a/\gamma)^{1/2}$ (de aquí en adelante la llamaremos velocidad del chorro), y el número de Ohnesorge, $C = \mu/(\gamma\rho a)^{1/2}$.

Es necesario justificar la adimensionalización elegida basada en las fuerzas capilares, cuando lo usual en la literatura es la inercia advectiva. En trabajos previos sobre evolución espacio-temporal de chorros capilares se presentan los resultados en función del número de Weber ($We \equiv \beta^2$) y

el número de Reynolds ($Re \equiv \rho v_0 a / \mu$), en lugar del número de Ohnesorge, que está relacionado con los anteriores según la identidad $C = \beta / Re$. En la literatura no se suelen encontrar argumentos para justificar las escalas escogidas. La principal ventaja de las escalas elegidas en este trabajo es que sólo se tiene un número adimensional, β , que depende de la velocidad del chorro, que será el parámetro de control en un experimento. Por otro lado, el número de Ohnesorge, depende exclusivamente de las propiedades del fluido y de la geometría, y normalmente en un experimento estará fijado. Además de estas consideraciones de tipo práctico, se encuentran otras de tipo teórico:

(i) Las fuerzas capilares constituyen una mejor referencia que la inercia advectiva para medir todas las fuerzas, debido a que en la evolución del chorro, el papel de la inercia es advectar un crecimiento causado por la capilaridad y, eventualmente, por la viscosidad. La inercia tiene como papel la selección de la longitud de onda de las perturbaciones, pero no de sus amplitudes.

(ii) El análisis espacial obtenido mediante esta adimensionalización se relaciona con el análisis temporal mediante el límite de velocidades altas, $\beta \gg 1$ de forma natural.

Por otro lado, el número de Reynolds tiene un papel clásico en la determinación de la escala típica de longitudes en la difusión radial del momento axial (Sevilla, 2011). Esta característica se encuentra específicamente en el análisis de los modos hidrodinámicos. El número de Reynolds también predice el rango de velocidades para el cual el chorro no es turbulento, pero estas propiedades no parecen ser suficientes para justificar el uso de esta adimensionalización clásica.

Ecuaciones de volumen adimensionalizadas

Se denotará a partir de ahora con el superíndice “*” a las variables con dimensiones, que son las que hasta ahora hemos manejado. Las variables que no lleven ese superíndice se entenderá que son adimensionales.

Para fluidos newtonianos e incompresibles, el tensor de esfuerzos viscosos adimensional tiene la siguiente forma

$$\mathbf{T}_v = C (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t), \quad (2.11)$$

por lo que las ecuaciones de Navier–Stokes y de continuidad quedarán como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + C \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.13)$$

Condiciones de contorno adimensionalizadas

La expresión que define a la interfaz para una geometría cilíndrica es

$$G(r, z, t) \equiv r - F(z, t) = 0, \quad (2.14)$$

La ecuación de equilibrio de esfuerzos quedará de la misma forma,

$$P\mathbf{e}_n - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{e}_n + \|\mathbf{T}\| \cdot \mathbf{e}_n = (\nabla \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n. \quad (2.15)$$

que en términos de las componentes normal y tangencial a la superficie quedan

$$P - (\nabla \cdot \mathbf{e}_n) - \frac{2C}{K_n^2} \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] - \|T_n\| = 0, \quad (2.16)$$

$$\|T_t\| + C \left[2 \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) + (1 - F^2) \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (2.17)$$

donde estas expresiones están evaluadas en $r = F(z, t)$, y se ha usado la expresión de la velocidad en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_r + W\mathbf{e}_z. \quad (2.18)$$

2.3.4. Ecuaciones y condiciones de contorno linealizadas

Se ha justificado en el capítulo anterior la pertinencia de un tratamiento lineal del problema de estimulación. Se propone pues la siguiente expresión para el campo de velocidades y la presión en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{v} = \beta\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{v}, \quad (2.19)$$

$$P = 1 + p, \quad (2.20)$$

siendo $\delta\mathbf{v} \ll \beta$ y $p \ll 1$. El campo de velocidades perturbado presentará las siguientes componentes $\delta\mathbf{v}(r, z, t) = u(r, z, t)\mathbf{e}_r + w(r, z, t)\mathbf{e}_z$.

La ecuaciones de continuidad y Navier–Stokes quedarán como sigue

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial z} = -\nabla p + C\nabla^2 \delta\mathbf{v}. \quad (2.22)$$

A partir de aquí, y por economía en la escritura, se evitará el uso de $\delta \mathbf{v}$ y se escribirá para la magnitud perturbada \mathbf{v} . El siguiente paso será linealizar las condiciones de contorno. La condición cinemática quedará como sigue

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta \frac{\partial f}{\partial z} - u = 0, \quad (2.23)$$

donde se ha hecho uso de la expresión linealizada de la interfaz,

$$G(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - f. \quad (2.24)$$

Para linealizar las componentes de la ecuación de equilibrio de esfuerzos, se necesitará también la expresión del tensor viscoso en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{T}_v = C \begin{pmatrix} 2\frac{\partial U}{\partial r} & 0 & \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \\ 0 & 2\frac{U}{r} & 0 \\ \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} & 0 & 2\frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Las componentes normal y tangencial del balance de esfuerzos linealizados presentan la forma

$$p - f - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2C \frac{\partial u}{\partial r} + ||T_n|| = 0, \quad (2.26)$$

$$-C \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + ||T_t|| = 0. \quad (2.27)$$

Para llegar a estas ecuaciones se ha usado la expresión linealizada del vector unitario normal a la interfaz,

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_r - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (2.28)$$

2.4. Análisis modal de la función de Green

A continuación se obtendrá una solución general para una estimulación armónica con una dependencia espacial tipo pulso, o lo que es lo mismo, la función de Green del sistema. Se supondrá que el chorro es infinito a ambos lados del punto de aplicación de la estimulación. Durante la caracterización de la función de Green surgen de manera natural los modos espaciales asociados a los chorros capilares. Aunque los capilares son los que dominan el comportamiento del sistema, la base de modos no había sido completada ni comprendida en su totalidad. Se hará necesario completar la base de los modos para poder construir la función de

Green del sistema. Para el caso en que la estimulación esté aplicada en la salida del chorro, como ocurre con la estimulación piezoeléctrica, dando lugar a que el perfil de velocidades del chorro no sea plano, la función de Green que aquí se obtendrá no será válida, aunque previsiblemente el espectro de modos coincida con el del problema que aquí se resuelve. Este problema aún no está resuelto. En realidad, físicamente nunca se va a encontrar con un chorro infinito en ambos sentidos, siempre tendrá un inicio, un orificio de salida. Aquí se trabajará bajo la hipótesis de que los modos que se encuentran aguas arriba no van a interactuar con el orificio, ya que como se verá a lo largo de este capítulo, todos los modos situados aguas arriba son modos que decaen.

2.4.1. La función de Green

El objetivo del problema fluidomecánico es resolver el conjunto de ecuaciones (2.21) a (2.23), (2.26), y (2.27).

La situación habitual es una estimulación armónica, así que se considerará este tipo de dependencia para las dos componentes de los esfuerzos $T_n(z)e^{i\omega t}$ y $T_t(z)e^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia adimensional impuesta (se han mantenido los símbolos T_n y T_t como funciones sólo de z porque no hay ambigüedad). Cualquier otro tipo de estimulación puede considerarse como la superposición de estimulaciones armónicas de distinta frecuencia. Se asumirá que la función $\mathbf{Q}(r, z, t) \equiv \{p(r, z, t), u(r, z, t), w(r, z, t), f(z, t)\}$ es también armónica,

$$\mathbf{Q}(r, z, t) = \text{Re}[\mathbf{q}(r, z)e^{i\omega t}], \quad (2.29)$$

donde \mathbf{q} es una función compleja. Se define la transformada de Fourier en la coordenada axial como

$$\tilde{\mathbf{q}}(r, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(r, z)e^{-ikz} dz, \quad (2.30)$$

con $k = k_r + ik_i$ compleja en general. Las ecuaciones de volumen (2.21) y (2.22) sujetas a las condiciones de regularidad en el eje $r = 0$ han sido formalmente resueltas por Rayleigh (1882b) (véase también Chandrasekhar (1961) y García (1998)) dando las magnitudes transformadas,

$$\tilde{p}(k, r) = -\mathcal{A} \frac{i(\omega - \beta k)I_0(kr)}{kI_1(k)}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{u}(k, r) = \mathcal{A} \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} - \mathcal{B} \frac{I_1(k_v r)}{I_1(k_v)}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{w}(k, r) = \mathcal{A} \frac{iI_0(kr)}{I_1(k)} - \mathcal{B} \frac{ik_v I_0(k_v r)}{kI_1(k_v)}, \quad (2.33)$$

donde se ha usado la notación usual para las funciones de Bessel modificadas, y \mathcal{A} y \mathcal{B} son constantes a determinar a partir de las restantes condiciones de contorno. Se define $k_v^2 \equiv k^2 - i(\omega - \beta k)/C$. También se puede presentar introduciendo un nuevo parámetro, $k_{\text{temp}} \equiv \omega/\beta$, que permite reescribir su expresión como $k_v^2 \equiv k^2 - iRe(k_{\text{temp}} - k)$. El parámetro k_{temp} puede interpretarse como un número de onda (real) en la formulación temporal, lo cual tiene más significado que la frecuencia a la hora de determinar cuándo se vuelve inestable el chorro.

Sustituyendo (2.31)–(2.33) en las ecuaciones (2.23), (2.26), (2.27) se obtiene en forma matricial,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T} \quad (2.34)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_n \\ \tilde{T}_t \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -i(\omega - \beta k) & -1 & 1 \\ -1 + k^2 & -i\frac{\omega - \beta k}{k} \frac{I_0(k)}{I_1(k)} + 2kC \frac{I_1'(k)}{I_1(k)} & -2k_v C \frac{I_1'(k_v)}{I_1(k_v)} \\ 0 & 2ikC & -iC \frac{k_v^2 + k^2}{k} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Las primas indican derivadas con respecto al argumento y \tilde{T}_n y \tilde{T}_t son las transformadas de los respectivos esfuerzos. Dado que el sistema es lineal, se pueden tratar de forma independiente los efectos de los esfuerzos normales y tangenciales, obteniendo las soluciones haciendo $\tilde{T}_n = 0$ y $\tilde{T}_t = 0$ respectivamente. Sustituyendo la solución de (2.34) en (2.31)–(2.33), se puede expresar el resultado como sigue

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_n \tilde{T}_n + \tilde{\mathbf{q}}_t \tilde{T}_t, \quad (2.36)$$

siendo

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ \tilde{\mathbf{q}}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_n & \tilde{u}_n & \tilde{w}_n & \tilde{f}_n \\ \tilde{p}_t & \tilde{u}_t & \tilde{w}_t & \tilde{f}_t \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

con

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{p}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{22} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{23} \end{pmatrix} i(\omega - \beta k) \frac{I_0(kr)}{kI_1(k)}, \quad (2.38)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{22} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{23} \end{pmatrix} \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} + \begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{32} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{33} \end{pmatrix} \frac{I_1(k_v r)}{I_1(k_v)} \right], \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_n \\ \tilde{w}_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{22} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{23} \end{pmatrix} \frac{iI_0(kr)}{I_1(k)} + \begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{32} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{33} \end{pmatrix} \frac{ik_v I_0(k_v r)}{kI_1(k_v)} \right], \quad (2.40)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{f}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{12} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

donde $\{\mathbf{L}^{-1}\}_{ij}$ es el elemento ij de la inversa de la matriz \mathbf{L} . Estos elementos tienen un factor común $D(k, \omega)^{-1}$, siendo $D(k, \omega) = \det(\mathbf{L})$. La relación de dispersión, $D(k, \omega) = 0$ juega un papel fundamental en la estructura de la solución. Es importante darse cuenta que ninguna otra singularidad aparece en estas expresiones.

Usando el teorema de convolución es posible expresar la solución de la siguiente forma

$$\mathbf{q}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' [\mathbf{G}_n(r, z - z')T_n(z') + \mathbf{G}_t(r, z - z')T_t(z')] \quad (2.42)$$

donde se pueden identificar \mathbf{G}_n y \mathbf{G}_t como una función de Green vectorial asociada a la componente normal y tangencial de los esfuerzos respectivamente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_n(r, z) \\ \mathbf{G}_t(r, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikz} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n(r, k) \\ \tilde{\mathbf{q}}_t(r, k) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Estas funciones de Green son la respuesta del sistema, en términos de presión, velocidades radial y axial y deformación, a un pulso espacial tipo delta de Dirac con una dependencia temporal armónica actuando como esfuerzos normal y tangencial. Aunque la formulación resulta más compacta con los dos esfuerzos actuando de forma simultánea, tal y como se ha hecho, es más claro para el posterior análisis presentar los efectos de ambos esfuerzos de forma separada.

2.4.2. El caso no viscoso

Por claridad, y debido a la peculiaridad que presenta el formalismo visto anteriormente en el caso de líquidos no viscosos, presentamos a continuación explícitamente la función de Green para número de Ohnesorge cero. El límite de $C \rightarrow 0$ hace que la condición de contorno dada por la componente tangencial del equilibrio de esfuerzos pierda su sentido, es decir, (2.27) desaparecerá de acuerdo con la exigencia de que no hayan esfuerzos tangenciales en un líquido perfecto. Así, se restringe el problema a esfuerzos normales y la constante de integración \mathcal{B} se hace cero en las expresiones (2.32) y (2.33) y en las expresiones que se deriven de éstas. En lugar de (2.34) se tendrá esta otra más simple

$$\begin{pmatrix} -i(\omega - \beta k) & -1 \\ -1 + k^2 & -i\frac{\omega - \beta k}{k} \frac{I_0(k)}{I_1(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Las expresiones de las magnitudes transformadas quedan de la siguiente forma

$$\tilde{p}_n = \frac{(\omega - \beta k)^2 I_0(kr)}{D(k, \omega) k I_1(k)}, \quad (2.45)$$

$$\tilde{u}_n = \frac{-i(\omega - \beta k) I_1(kr)}{D(k, \omega) I_1(k)}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{w}_n = \frac{(\omega - \beta k) I_0(kr)}{D(k, \omega) k I_1(k)}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{D(k, \omega)}, \quad (2.48)$$

donde la relación de dispersión es

$$D(k, \omega) = (\omega - \beta k)^2 \frac{I_0(k)}{k I_1(k)} + (1 - k^2). \quad (2.49)$$

Ya se verá que esta última relación es muy útil en varios aspectos de este trabajo.

2.5. Modos espaciales

Una vez determinada la función de Green se puede establecer una conexión con los modos espaciales del sistema. En principio, la integración en la variable k se hará sobre el eje real del plano complejo k . Sin embargo, esta integración debe hacerse con cuidado teniendo en cuenta el origen de cada uno de los polos del integrando (2.43), es decir, los ceros de la relación de dispersión $D(k, \omega)$ presentes en el denominador de todas las componentes de la función de Green. De hecho, la formulación adoptada en la sección anterior es estrictamente no física, ya que estamos trabajando con una estimulación que presenta una dependencia temporal sinusoidal, a la cual no se le ha establecido un comienzo en un instante de tiempo determinado. Se puede hacer el símil con un circuito eléctrico en corriente alterna. La solución estacionaria del circuito, que normalmente se obtiene usando la notación de fasores, no presenta un comienzo temporal propiamente dicho, sino la misma dependencia temporal armónica que la fuente que alimenta al circuito. Si queremos encontrar una solución rigurosa debemos considerar que la fuente se ha conectado en un instante determinado (que podemos establecer como origen de tiempos), y en consecuencia añadir a la solución armónica un transitorio. La omisión de transitorios, que en sistemas estables es trivial si sólo nos interesa el comportamiento asintótico, resulta peligrosa en sistemas intrínsecamente inestables, como en el caso del chorro. La manera de formular correctamente este tipo de problemas está descrita en la literatura (Briggs, 1964;

Bers, 1983; Huerre & Monkewitz, 1990), y se conoce como “problema de la señal” (*signaling problem*). Así, mejor que considerar de entrada una dependencia temporal sinusoidal para la solución, se debería resolver el problema suponiendo que los esfuerzos empiezan a actuar en $t = 0$, proponiendo la dependencia temporal, $T_n = \text{Re}[T_n(z)H(t)e^{i\omega t}]$ y de forma análoga para T_t , siendo $H(t)$ la función de Heaviside o función escalón (cero para $t < 0$ y uno para $t > 0$). En lugar de admitir una dependencia temporal armónica para la solución, se aplicará la transformada de Fourier en la variable temporal (siendo ω' la variable transformada) como primer paso en la resolución del problema. El resultado será una combinación de un transitorio más una solución estacionaria (Huerre & Rossi, 1998).

$$G(z, t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kz - \omega'(k)t)}}{(\omega'(k) - \omega) \frac{\partial D}{\partial \omega'} \Big|_{(k, \omega'(k))}} dk}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{D(k, \omega)} dk}_{\text{estacionario}} \quad (2.50)$$

El estado estacionario es justo lo que se ha obtenido en la sección anterior, para el cual, el sistema estará caracterizado por la frecuencia forzadora ω . El término transitorio describe un proceso análogo al de la respuesta del sistema frente a un pulso temporal.

La formulación en términos de un problema de la señal presenta dos ventajas. La primera es que del comportamiento del estado transitorio se puede discutir si el sistema es absoluta o convectivamente inestable, de acuerdo al criterio de la coalescencia de modos (Briggs, 1964), cuya aplicación a los chorros capilares se verá en la sección 2.7. La segunda, si el problema de la señal tiene sentido, se puede aplicar el argumento de causalidad para determinar el contorno de integración para hacer la transformada inversa de Fourier en el plano complejo ω' y k . De acuerdo con este principio, el contorno de integración en el plano ω' debe ser una línea horizontal situada sobre todos los ceros de la relación de dispersión temporal (es decir, las soluciones de la relación de dispersión para k real); esta elección asegura que para $t < 0$ el sistema presenta la solución nula.

En el plano complejo k , el contorno de integración inicial es el eje real y los ceros de la relación de dispersión están divididos en dos grupos, uno en el semiplano inferior y otro en el superior, y aplicando el teorema de los residuos, se determina la función de Green para $z > 0$ y $z < 0$ respectivamente. Por continuación analítica, se puede deformar el contorno de integración en el plano complejo ω' haciendo la parte imaginaria de la frecuencia tender a cero y siguiendo el movimiento de los polos en el plano k . El contorno de integración en este plano debe deformarse simultáneamente de modo que los ceros se mantengan en su semiplano de

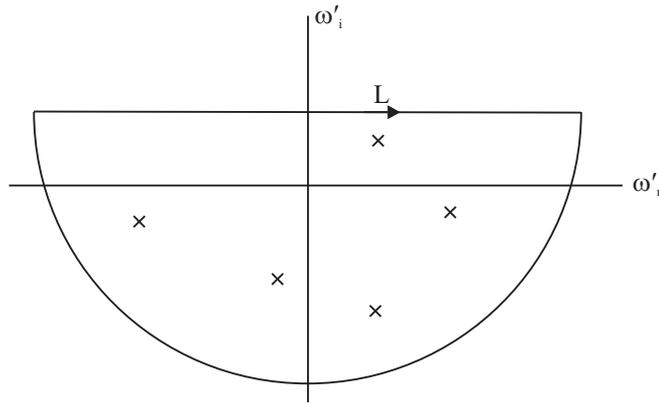


Figura 2.2: Contorno elegido para hacer la transformada inversa de Fourier en el plano complejo ω' . Cada polo es solución de la relación de dispersión $D(k, \omega'_i(k)) = 0$. El contorno debe estar por encima de todas las singularidades temporales.

origen, así se formarán “muescas” en el contorno inicial. Como la frecuencia se hace real al final del proceso, se obtendrán las soluciones espaciales de la relación de dispersión (figura 2.3). Si este proceso de deformación del contorno de integración no es posible continuarlo hasta el final porque se produzca la coalescencia de dos modos provenientes de semiplanos diferentes, se tendrá inestabilidad absoluta en el sistema y la respuesta debida al estado estacionario no será relevante ya que la respuesta del transitorio hace el sistema inestable en cada posición (figura 2.4).

Vamos a considerar por el momento un escenario sin inestabilidad absoluta. Los polos de la función de Green están divididos en dos grupos y la función de Green se construirá según se ha visto en el párrafo anterior para $z < 0$ y $z > 0$ como suma de los residuos asociados a los polos de cada conjunto. Se puede considerar cada término de cada suma de residuos como la contribución de un modo espacial al sistema cuando se está aplicando un forzamiento de frecuencia ω . La primera característica de estos modos viene de su localización en el plano complejo y de su asignación al semiplano inferior o superior. Respecto a la dirección de propagación, depende sólo del signo de $\text{Re}(k)$: si es positivo, el modo representa una onda que se propaga aguas abajo y, por el contrario, si el signo es negativo, será una onda que se propaga aguas arriba. Por otra parte, la estabilidad vendrá dada por el signo de $\text{Im}(k)$ y por la pertenencia del modo al semiplano superior o inferior: como ejemplo relevante para este trabajo, si $\text{Im}(k) < 0$ y el polo pertenece al semiplano inferior ($z < 0$), el modo decae cuando decrece z (será estable), pero si con la parte imaginaria de k negativa, el polo pertenece al semiplano superior ($z > 0$), el modo

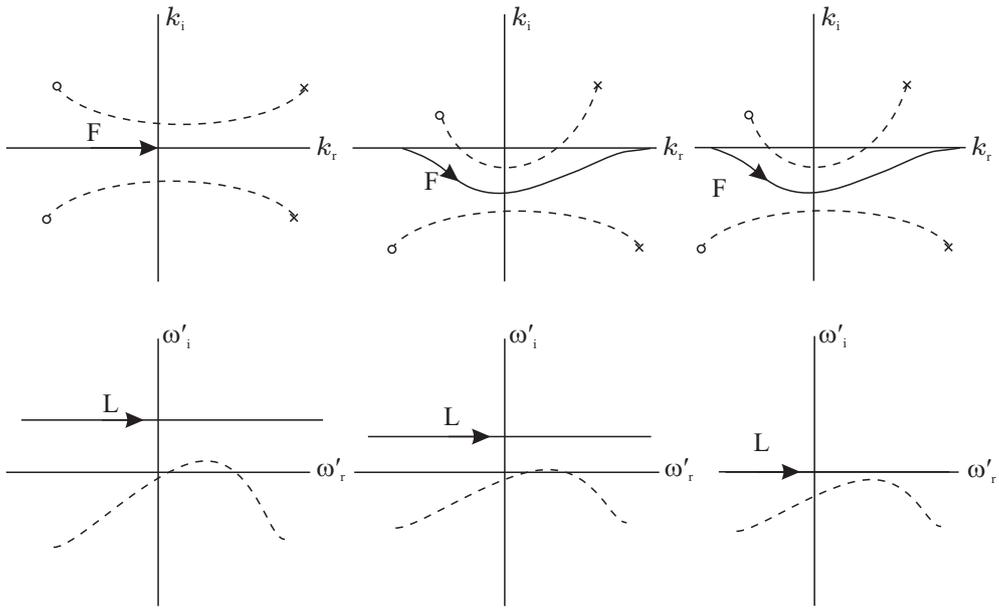


Figura 2.3: Deformación del contorno de Fourier F en el plano complejo k y el asociado L en el plano complejo ω' para ver la asignación de polos en cada semiplano.

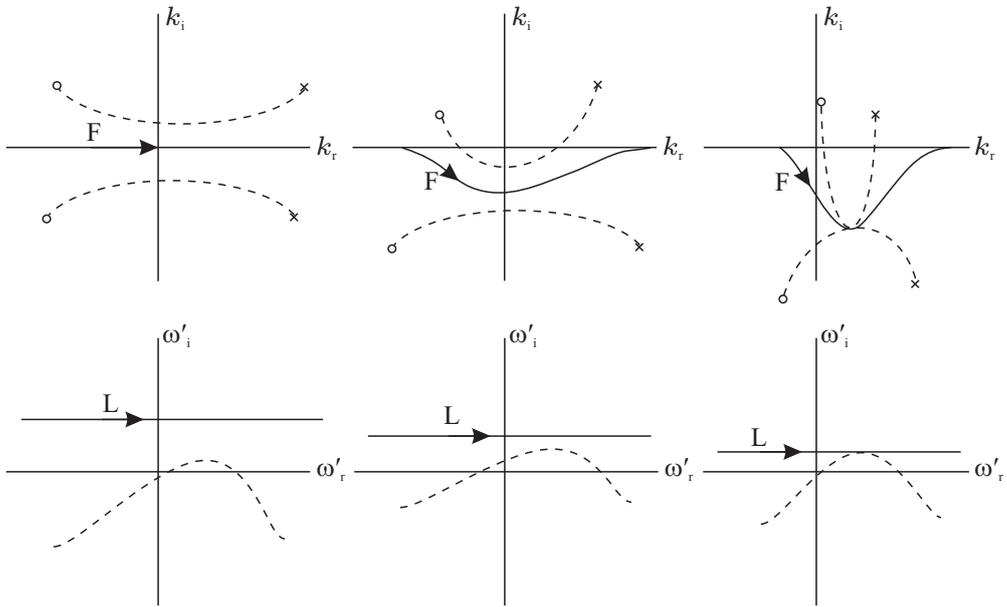


Figura 2.4: Deformación del contorno de Fourier F en el plano complejo k y el asociado L en el plano complejo ω' hasta llegar a una situación de inestabilidad absoluta.

crece cuando lo hace z y por tanto es inestable. Habrá pues ocho posibles casos (figura 2.5) describiendo la dirección de propagación, crecimiento o decrecimiento, y z positiva o negativa (Ashpis & Reshotko, 1990).

Aunque no se ha probado de forma rigurosa que se han obtenido todos los polos de la función de Green, se tienen argumentos plausibles para creerlo. Para esta tarea, se ha usado el principio del argumento aplicado a un contorno rectangular (Johnson & Tucker, 2009) para evaluar el número de ceros de una función analítica englobado en dicho contorno (ver García (1998) para una breve descripción del método con un contorno circular). La geometría rectangular facilita una búsqueda sistemática mediante un teselado en todo el dominio. El método también da la localización de cada cero. Debe tenerse cuidado de evitar los puntos rama de la relación de dispersión $D(k, \omega)$ definidos por la condición $k_v = 0$, la cual no es una verdadera rama de corte de la función de Green debido a la dependencia con esta variable en el integrando de (2.38)–(2.41). La ausencia de ramas de corte en la definición de la función de Green hace que el espectro de modos sea discreto. Este tipo de espectro es el que se encuentra cuando se trabaja con sistemas acotados en la dirección transversal al eje de propagación de las ondas en el sistema (Huerre & Monkewitz, 1985).

Aunque la función de Green obtenida en este trabajo es específica de una estimulación superficial, los modos espaciales que intervienen en la construcción de la función de Green son universales, en el sentido de que están presentes en cualquier otra configuración de chorros capilares, siempre que el flujo base sea el mismo (forma cilíndrica y perfil plano de velocidades). Por tanto, problemas del tipo un chorro saliendo de un orificio, pueden ser formulados de la forma aquí descrita en términos de una combinación adecuada de modos que verifique las condiciones de contorno a la salida del chorro. Esto es muy importante en relación con la formulación de condiciones de contorno del chorro infinito, para el cual hay cierta discusión en la literatura (Bogy, 1978; Eggers, 1997). Los distintos criterios usados para descartar algunos modos basándose en su comportamiento no físico no son necesarios una vez que estos modos se asignan a la región a la que pertenecen ($z > 0$ o $z < 0$). Esto se verá más adelante cuando analicemos los distintos modos espaciales que surgen de nuestra formulación.

2.5.1. Localización de los polos y campos de velocidades

En la figura 2.8 se muestra un ejemplo de la distribución de polos en el plano complejo k para unos valores fijados de C , β y ω , con las muescas

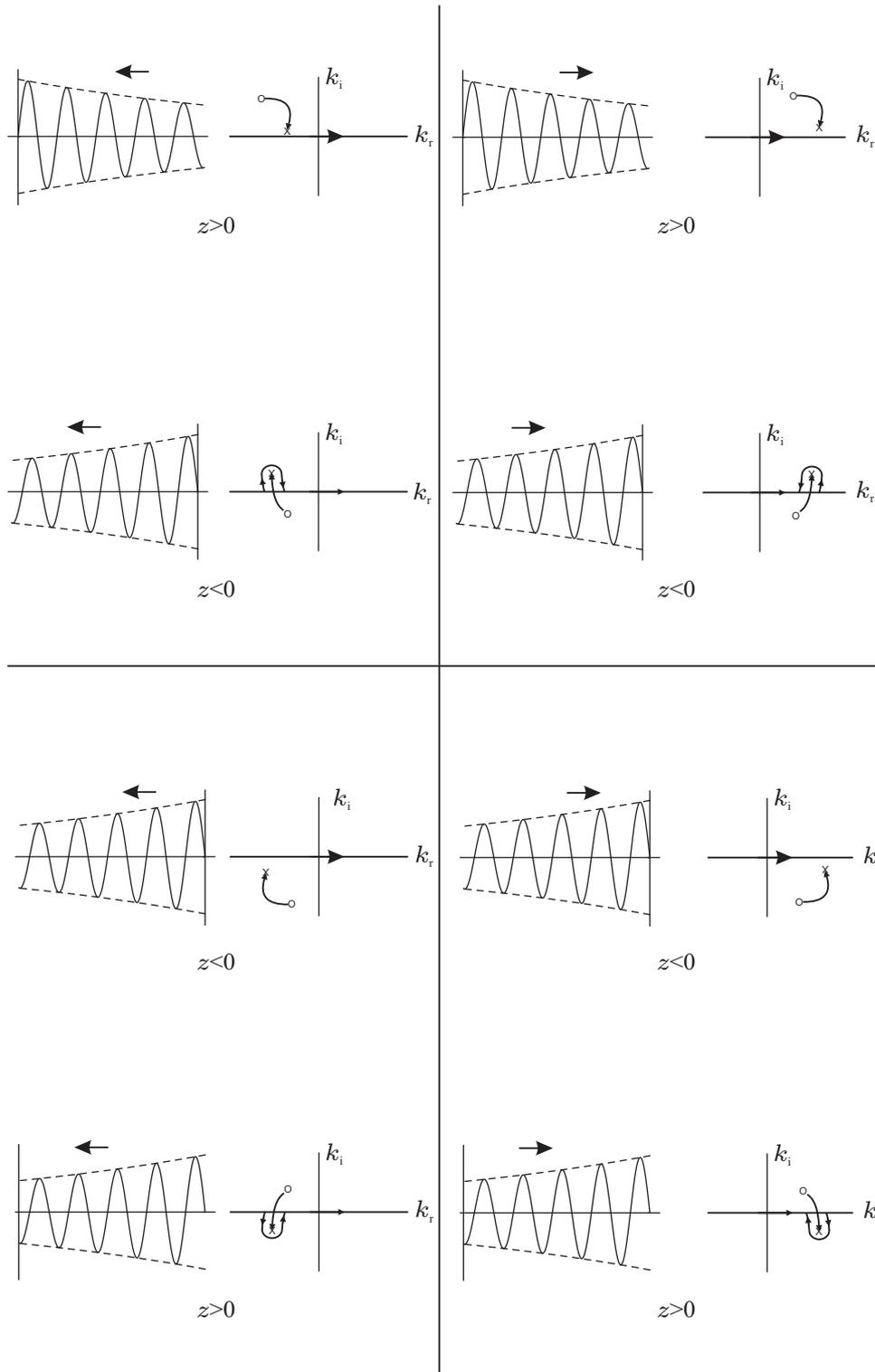


Figura 2.5: Efecto de la localización de los polos en el plano complejo k y su correspondiente dirección de propagación (Ashpis & Reshotko, 1990).

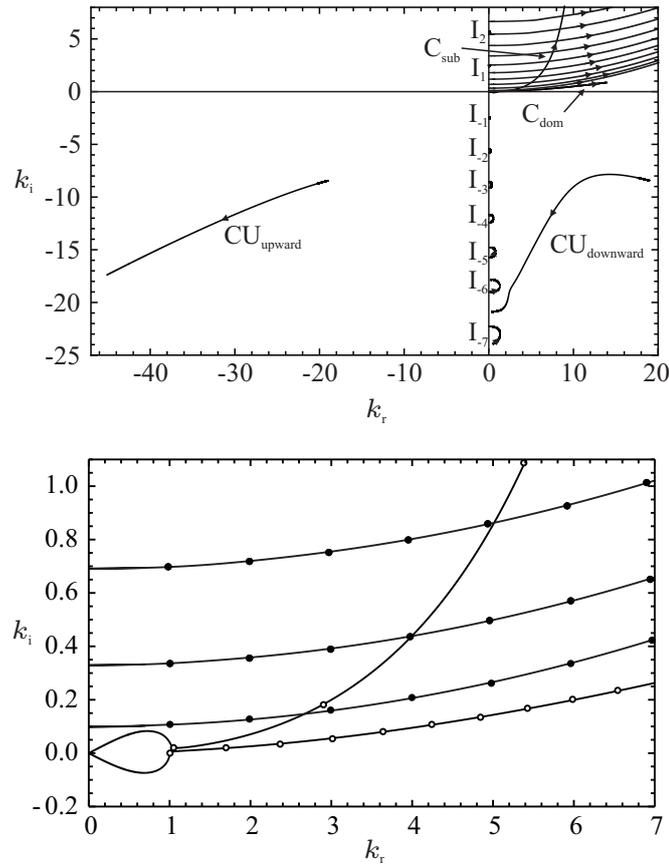


Figura 2.6: (a) Ramas espaciales correspondientes a los modos más representativos obtenidos para los parámetros $\beta = 4.47$, $C = 0.03$ y variando la frecuencia ω . (b) Detalles de las ramas cerca del origen. En cada rama, los círculos indican valores de k obtenidos para valores enteros de ω/β , representando el valor uno el círculo que se encuentra más a la izquierda. Se observa que no hay intersección entre la rama capilar subdominante y la primera hidrodinámica.

apropiadas en el contorno de integración para la correcta asignación de los polos a la región a la que corresponden: aguas arriba o aguas abajo. Se pueden observar distintos conjuntos o familias de modos, para los cuales se ha introducido una nomenclatura que se explicará en las siguientes secciones.

Una vez que se han localizado los polos de la función de Green, se completará la caracterización de los modos espaciales examinando sus correspondientes campos de velocidades y su deformación. Los polos son los valores $k_j(\omega)$ de la variable k para las cuales, la matriz \mathbf{L} es singular. Los modos espaciales están determinados excepto en una amplitud

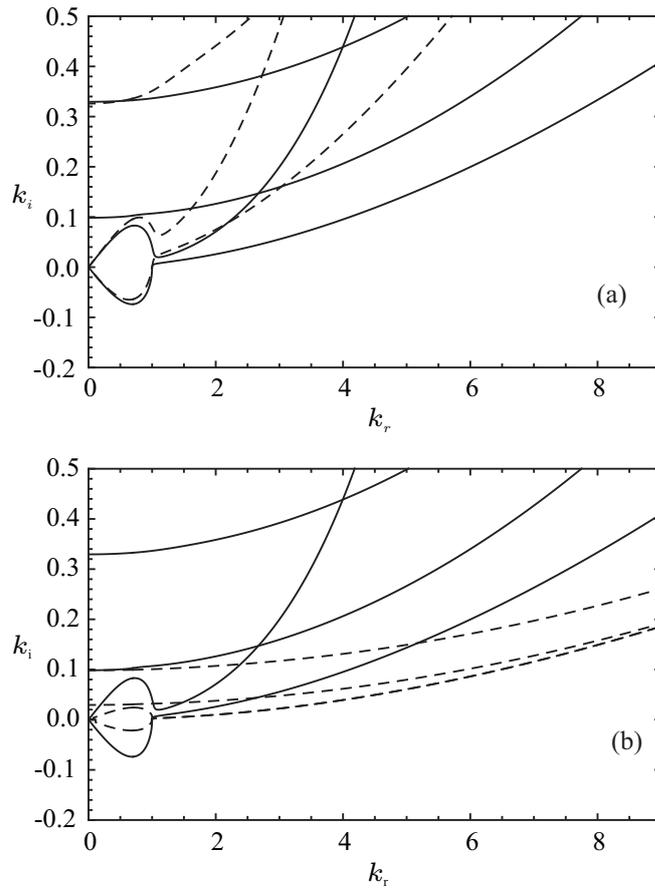


Figura 2.7: Ramas espaciales correspondientes a los modos capilares y los dos primeros hidrodinámicos obtenidos para variando la frecuencia ω con los parámetros (a) $\beta = 4.47$, $C = 0.03$ (línea continua) y $C = 0.1$ (línea discontinua), (b) $C = 0.03$, $\beta = 4.47$ (línea continua) y $\beta = 15$ (línea discontinua)

arbitraria, por el núcleo de esta matriz, llegando a una relación entre las constantes \mathcal{A} y \mathcal{B} , y la transformada de la deformación \tilde{f} . Se elegirá pues una normalización basada en la amplitud de la deformación por razones que se discutirán más adelante. Asumiendo $\tilde{f} = 1$, las ecuaciones (2.38)–(2.41) dan las funciones p , u , w y f con una estructura que se podría resumir como

$$\mathbf{Q}_j(r, z, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{q}}_j(k_j, r) e^{i(\omega t - k_j(\omega)z)}]. \quad (2.51)$$

Se describirán las características más significativas del campo de velocidades asociado a cada modo espacial, lo cual ayudará a entender su comportamiento y su origen físico. Las figuras 2.10 a 2.18 muestran estos campos a lo largo de una longitud de onda, con la correspondiente

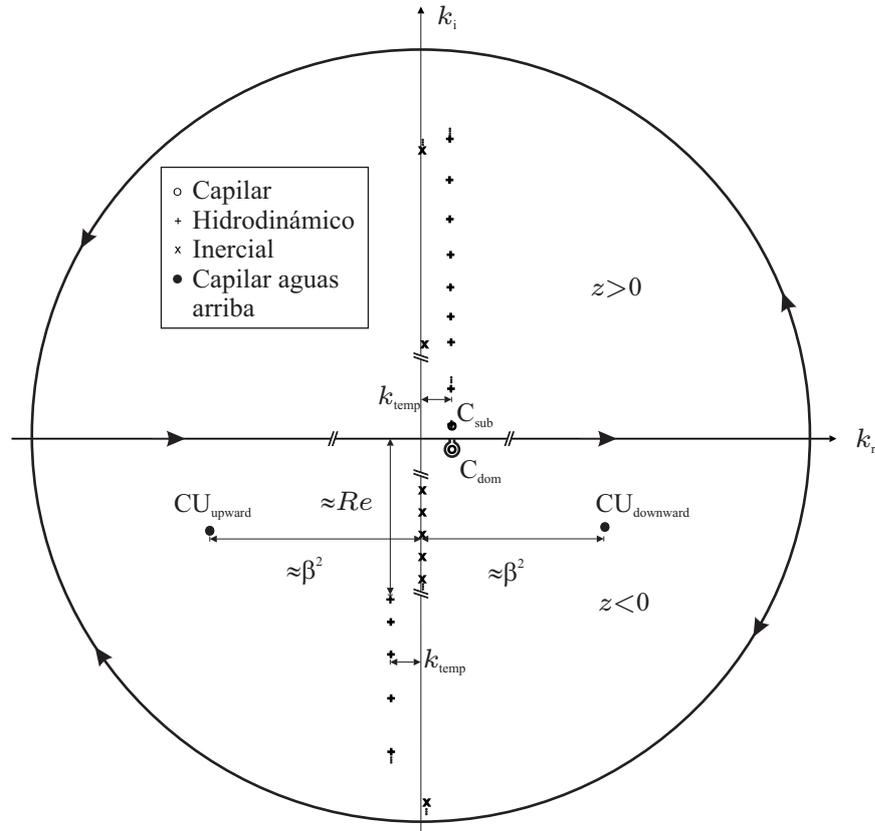


Figura 2.8: Esquema de los polos de la función de Green para valores de C y β que llevan a una situación de inestabilidad convectiva. Además se ha elegido una frecuencia en el rango inestable ($k_{temp} < 1$). La región correspondiente a aguas arriba ($z < 0$) y aguas abajo ($z > 0$) relativas al punto donde se ha aplicado la estimulación están englobadas por sus correspondientes contornos de integración. En la leyenda se muestran los diferentes símbolos usados para describir a cada familia de modos. La posición aproximada de cada modo también se muestra en el esquema.

deformación de la superficie (sinusoide creciente o decreciente) y además la distribución de las coordenadas del campo de velocidades en la dirección radial, para una frecuencia en el rango inestable, $k_{temp} = 0.7$. En el caso de modos con un fuerte decaimiento, se ha eliminado el término $\exp(-k_i z)$ para mayor claridad de la presentación, pero la interpretación de estas figuras será diferente.

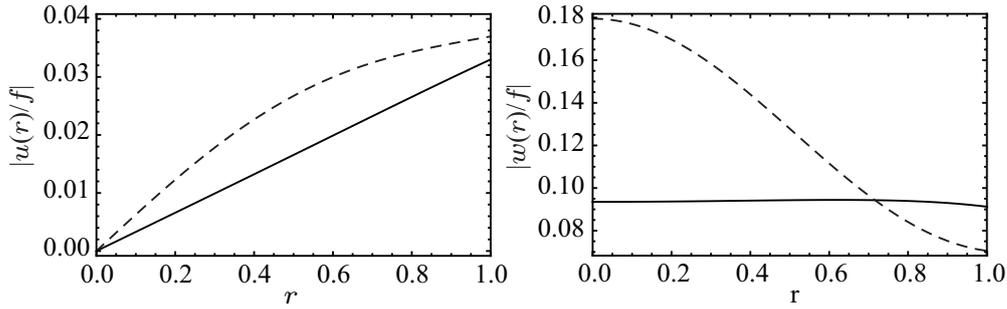


Figura 2.9: Distribución de velocidades de los modos capilares dominante (línea continua) y subdominante (línea discontinua). Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

2.5.2. Modos capilares

Los modos capilares son dos y están localizados en el semiplano superior ($z > 0$). El esquema de la figura 2.8 los muestra para $k_{\text{temp}} < 1$, pero su localización sufre cambios cualitativos cuando la frecuencia ω varía. En la figura 2.6 se muestran sus ramas en el plano complejo k debidas a la variación de la frecuencia en un amplio rango de valores junto con ramas correspondientes a otros modos. A los modos capilares se les ha llamado capilar dominante (C_{dom}) y subdominante (C_{sub}) debido a que uno siempre tiene un valor de k_i más pequeño que el otro, determinando así el comportamiento asintótico del chorro. El modo capilar dominante es el responsable de la inestabilidad capilar ($k_i < 0$), que ocurre para $k_{\text{temp}} < 1$, mientras que el modo capilar subdominante siempre decae aguas abajo por ser $k_i > 0$ (Keller *et al.*, 1973; Leib & Goldstein, 1986b). Para $k_{\text{temp}} > 1$ ambos modos decaen debido a la viscosidad o son neutros en el caso no viscoso. Ambos se propagan aguas abajo y tienen un número de onda adimensional que verifica $k_r \simeq k_{\text{temp}}$. Se puede estimar su localización para $C \ll 1$ y tomar ese valor como semilla para calcular su posición cuando crece C hasta un valor dado. Para este fin, se considerará el caso no viscoso calculado por Keller *et al.* (1973) para el caso axisimétrico, $D(k, \omega) = 0$ con la relación de dispersión dada por (2.49). Si se supone k pequeña, $I_0(k)/I_1(k) \simeq 2/k$, y la relación de dispersión se convierte en un polinomio cuártico en la variable k . Sólo dos soluciones serán consistentes con la aproximación impuesta, y darán una estimación para los modos capilares. Las otras dos, con $|k| > 1$ serán descartadas.

El campo de velocidades para estos modos es significativo en todo el perfil radial (figura 2.9), tienen un flujo neto no nulo y están claramente relacionados con la deformación de la superficie del chorro. Para el modo dominante, f y u están esencialmente en fase, lo cual implica un trans-

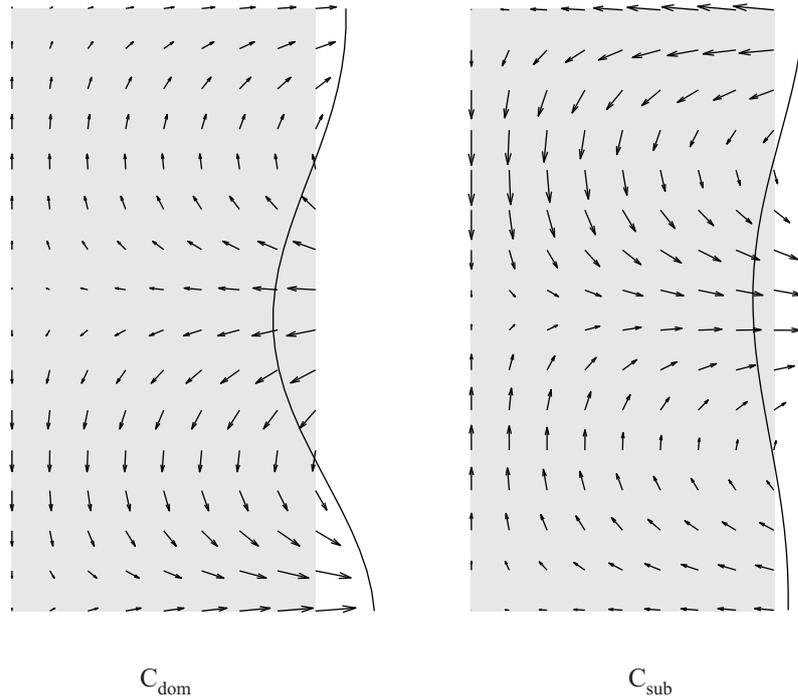


Figura 2.10: Campo de velocidades para los modos capilar dominante y subdominante. La coordenada axial está escalada con la longitud de onda. Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

porte neto de fluido desde los valles hasta las crestas de la deformación. Por el contrario, para el modo subdominante, f y u están en oposición de fase, por lo que el fluido se mueve de las crestas hacia los valles. Todas estas características aparecen en la figura 2.10. Para $k_{\text{temp}} > 1$ el modo capilar dominante se vuelve estable. Cuando se incrementa la frecuencia hacia el límite de Plateau, $k_{\text{temp}} = 1$, se produce una transición continua de igualdad de fase a oposición de fase entre la deformación y la velocidad radial (figura 2.11).

Los modos capilares son los que mejor se conocen, tanto en el análisis temporal como en el espacial. En el trabajo de Keller *et al.* (1973) para chorros sin viscosidad se establece que el análisis temporal es un límite del análisis espacial a velocidades altas. En el régimen oscilatorio, el número de onda para ambos modos puede expresarse de forma aproximada como $k_1 \simeq (\omega + \omega_R)/\beta$ y $k_2 \simeq (\omega - \omega_R)/\beta$, siendo ω_R la frecuencia de la relación de dispersión temporal de Rayleigh. Esto se puede interpretar como el resultado de un corrimiento debido a un efecto Doppler aplicado sobre dos ondas que viajan en sentidos opuestos, cuando se cambia del sistema laboratorio a uno que se mueve con la velocidad del chorro. Por otro lado, la velocidad de grupo de estas ondas es positivo, lo que es

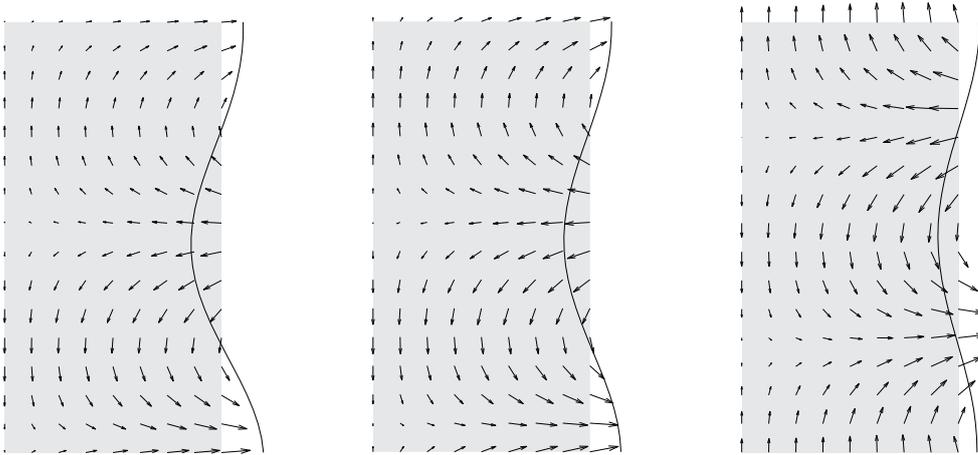


Figura 2.11: Campo de velocidades para el modo capilar dominante para diferentes frecuencias $k_{\text{temp}} = 0.7, 0.9, \text{ y } 1.2$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

consistente con que ambos modos pertenezcan al semiplano superior del plano complejo. En la región paramétrica de $k_{\text{temp}} < 1$, estos modos son interpretados desde el punto de vista del chorro en reposo como puramente creciente uno y decreciente el otro al igual que en el análisis temporal. Además, la viscosidad no va a cambiar este comportamiento. Así, se puede concluir que los modos capilares, en el límite de velocidades altas, son consecuencia de una transformación galileana aplicada a los modos temporales, y por tanto, los campos de velocidades descritos en esta tesis pueden compararse con los mostrados por García & González (2008).

Otros cambios se esperan cuando se produzcan grandes variaciones en la posición en el plano complejo k , entre ellos la coalescencia de modos. La inestabilidad absoluta del chorro tiene lugar cuando ocurre este fenómeno, involucrando otro modo definido aguas arriba, lo cual será estudiado en la sección 2.7.

2.5.3. Modos capilares aguas arriba

Los modos que denominaremos capilares aguas arriba son dos y están localizados en el semiplano inferior, como muestra la figura 2.8, afectando así sólo a los puntos con $z < 0$. Ambos modos decaen pero se propagan en distintos sentidos, $\text{CU}_{\text{downward}}$ aguas abajo ($k_r > 0$) y $\text{CU}_{\text{upward}}$ aguas arriba ($k_r < 0$). Los dos presentan una longitud de onda pequeña, del orden de β^{-2} . El modo que se propaga aguas abajo fue descrito por Busker & Lamers (1989) mientras que el modo que se propaga aguas arriba no aparece en la literatura. La localización de estos modos puede estimarse

considerando $|k| \gg 1$ y sustituyendo $I_0(k)/I_1(k) \simeq \text{sgn}(k_r)$ en (2.49). El resultado es una ecuación algebraica de cuarto orden, de cuyas cuatro soluciones, sólo dos serán consistentes con la aproximación de pequeña longitud de onda que hemos propuesto. Las ramas que se obtienen al variar la frecuencia se muestran en la figura 2.6, donde se puede observar como estos polos tienen el mismo k_i y el mismo k_r pero con distinto signo para $\omega = 0$, pero para $\omega \neq 0$ sus valores de k no presentan relación. Las consecuencias de esto se verán en la sección 2.6.

Para estos modos, el campo de velocidades sólo es significativo cerca de la superficie libre, con un fuerte decaimiento hacia el eje del chorro, como muestran las figuras 2.12 y 2.13. Hay un flujo neto no nulo a través de cualquier sección del chorro. Se ve que f y u presentan un desfase cercano a $\pi/2$.

Los modos capilares aguas arriba resultan, al igual que los modos capilares, del balance entre la inercia y la capilaridad. Sin embargo hay una diferencia importante. En el análisis espacial hay un término adicional de inercia respecto al análisis temporal, la inercia debida a la advección. Para los modos capilares aguas arriba, los términos relevantes en este balance son la capilaridad y la inercia advectiva. Esta es la razón por la cual estos modos existen incluso para $\omega = 0$. Este origen advectivo es la causa por la que estos modos no aparecen en el análisis temporal. Fueron Busker & Lamers (1989) los primeros que mencionaron la existencia de uno de ellos y dieron una expresión asintótica en términos del número de Weber (β^2 en este trabajo), a saber

$$k_{\pm} = \pm\beta^2 + \frac{1}{2} - 2\omega \pm \left(\frac{9}{8} + \omega - 3\omega^2 \right) \frac{1}{\beta^2} + O(\beta^{-4}). \quad (2.52)$$

De estas dos soluciones, Busker sólo mencionó k_+ . Desafortunadamente, tuvieron un lapsus, ya que asignaron a este modo una longitud de onda muy larga y descartaron encontrarlo experimentalmente y por eso seguramente no le dieron ningún tipo de interpretación. Le Dizès (1997) lo tuvo en cuenta para construir los modos globales de chorros capilares no estimulados.

Los modos capilares aguas arriba no son esencialmente diferentes de las ondas superficiales que surgen en la interfase plana entre dos fluidos inmiscibles. Estos modos presentan un número de onda grande $k_r \gg 1$ y por tanto, la fuerza capilar asociada a la curvatura del chorro es despreciable frente a una perturbación, que es lo que ocurre en geometría plana en el problema clásico del *fishing line*, donde se describen ondas capilares estáticas delante de un obstáculo situado en la superficie de la corriente (Lamb, 1931). Además, cualquiera puede obtener evidencias de la existencia de estos modos en chorros sin más que poner un dedo bajo

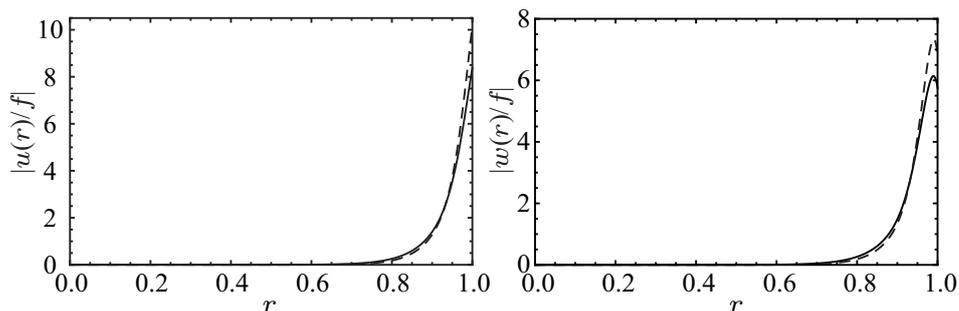


Figura 2.12: Distribución de velocidades de los modos capilares aguas arriba (el que se propaga aguas abajo en línea continua y el que se propaga aguas arriba en línea discontinua). Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

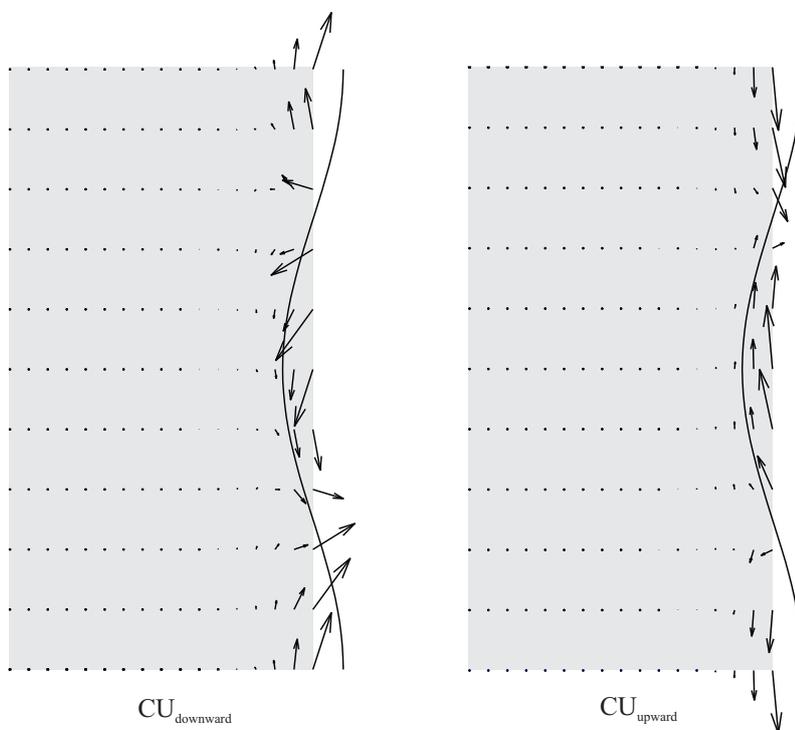


Figura 2.13: Campo de velocidades para los modos capilares aguas arriba. La coordenada axial está escalada con la longitud de onda. Se ha omitido el amortiguamiento espacial dividiendo las componentes de la velocidad y la deformación por $e^{-k_i z}$. Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

un chorro que salga de un grifo en régimen laminar y con velocidad baja; se observan ondulaciones estáticas de varias longitudes de onda aguas

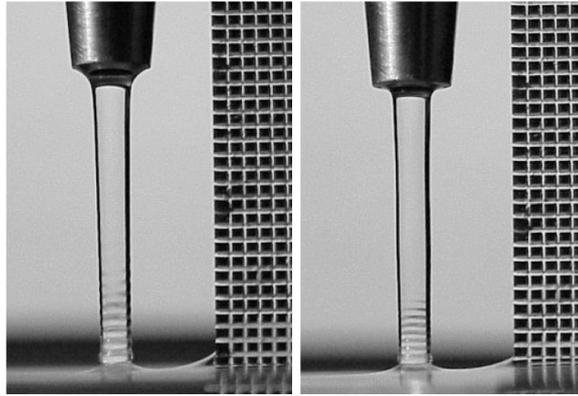


Figura 2.14: Chorros de agua impactando en un depósito con agua pura cuando (a) $Q = 3.2 \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$, (b) $Q = 4.6 \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$. Las divisiones de la rejilla son milimétricas (Hancock & Bush, 2002).

arriba. Este mismo fenómeno se ha presentado en chorros que caen sobre una superficie líquida horizontal (Awati & Howes, 1996; Hancock & Bush, 2002). Como estos modos tienen el mismo número de onda k_r con distinto signo y k_i para $\omega = 0$, esto permite la construcción de ondas estáticas con una fase inicial arbitraria. En este sentido se puede ver claramente la necesidad de la existencia de un segundo modo capilar aguas arriba para que la deformación en $z = 0$ verifique las condiciones impuestas por la perturbación. Ninguna otra onda estacionaria es posible para $\omega \neq 0$ a la vista de la asimetría en la posición de los modos (figura 2.8).

Estos trabajos encuentran un acuerdo entre la longitud de onda medida y la que surge de igualar la velocidad del chorro con la velocidad de fase obtenida por Rayleigh. En vista de lo dicho en este apartado estamos en condiciones de interpretar esa igualdad como la relación de dispersión del caso no viscoso, ecuación (2.49), para frecuencia cero, y que los modos que se observan son los modos capilares aguas arriba.

2.5.4. Modos inerciales

Los modos inerciales constituyen dos conjuntos infinitos de modos, uno definido aguas abajo ($z > 0$) y otro aguas arriba ($z < 0$). Se les ha asignado los símbolos I_i , con índices positivos para el semiplano superior y negativos para el inferior. Se pueden localizar aproximadamente para $\beta \gg 1$ a partir de los ceros de la función $I_0(k)$ según (2.49). Su posición muy cercana al eje imaginario del plano complejo es bastante insensible a la variación de los distintos parámetros, como se ve en la figura 2.6a variando la frecuencia. Por consiguiente, estos modos son evanescentes, o lo que es lo mismo, prácticamente no presentan carácter propagatorio

ya que k_r es muy pequeño. Este constreñimiento en su localización se relaja si se consideran modos de mayor orden, como se ve en la figura 2.6a. También se observa en esa figura que es posible una interacción de los modos inerciales con el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo, aunque ello no ocasiona cambios cualitativos, por ser modos pertenecientes a una misma región. Por otra parte, el valor absoluto de la parte imaginaria de k nunca se hace pequeño, incrementándose éste con el orden del cero asociado, teniendo así, cada vez un factor de decaimiento mayor.

Los campos de velocidades de los modos I_1 e I_2 están representados en la figuras 2.15 y 2.16, en la primera los perfiles de ambas componentes de la velocidad, y en la segunda, un diagrama de flechas. La familia del semiplano inferior tiene el mismo comportamiento, por eso no será incluida ninguna figura para ilustrarlo. Para la correcta interpretación de estas figuras se debe tener en cuenta que (i) la superficie libre y la velocidad están representadas quitando el enorme amortiguamiento que presentan, y que hace a estos modos prácticamente evanescentes y (ii) la coordenada axial recorre una longitud de onda muy larga. Consecuentemente, la utilidad de estas figuras está en interpretarlas, mejor que como una representación espacial, como la evolución temporal en un punto fijado. Para ello debemos tener en mente la relación entre los valores de la coordenada espacial y el tiempo, tales que mantienen una fase constante, es decir, $z = (\omega/k_r)t$ (ω/k_r es la velocidad de fase).

El movimiento del fluido está ordenado radialmente en regiones alternadas cada una con sentidos opuestos; el número de estas regiones coincide con el número que define el orden del cero de la función de Bessel asociada a cada modo. La velocidad radial cerca de la superficie está en oposición de fase con la deformación. En las figuras 2.16, se ha eliminado el amortiguamiento. A estos modos se les ha llamado inerciales porque para ellos, la capilaridad y la viscosidad son despreciables.

Los modos inerciales ilustran muy bien la superioridad de un análisis de estabilidad mediante la función de Green. Sus características intrigaron a Keller y a otros autores, ya que su análisis, basado exclusivamente en la relación de dispersión, no podía establecer que la familia con aparente crecimiento tenía que ser asignada aguas arriba, siendo así una familia de modos que decaen.

2.5.5. Modos hidrodinámicos

Se encuentran dos familias infinitas, una en el semiplano superior y otra en el inferior (ver figura 2.8). Están simbolizados por H_i , donde el índice significará lo mismo que para los modos inerciales. La parte real de k tendrá un valor cercano a $\pm k_{temp}$ (positivo para la familia de la región

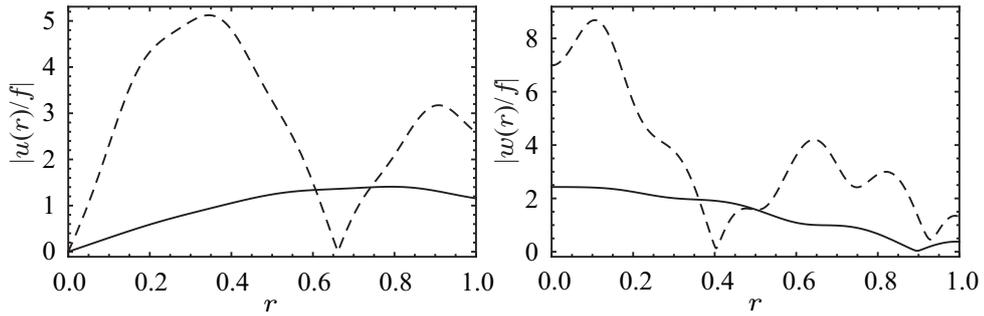


Figura 2.15: Distribución de velocidades de los dos primeros modos inerciales (el primero en línea continua y el segundo en línea discontinua). Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

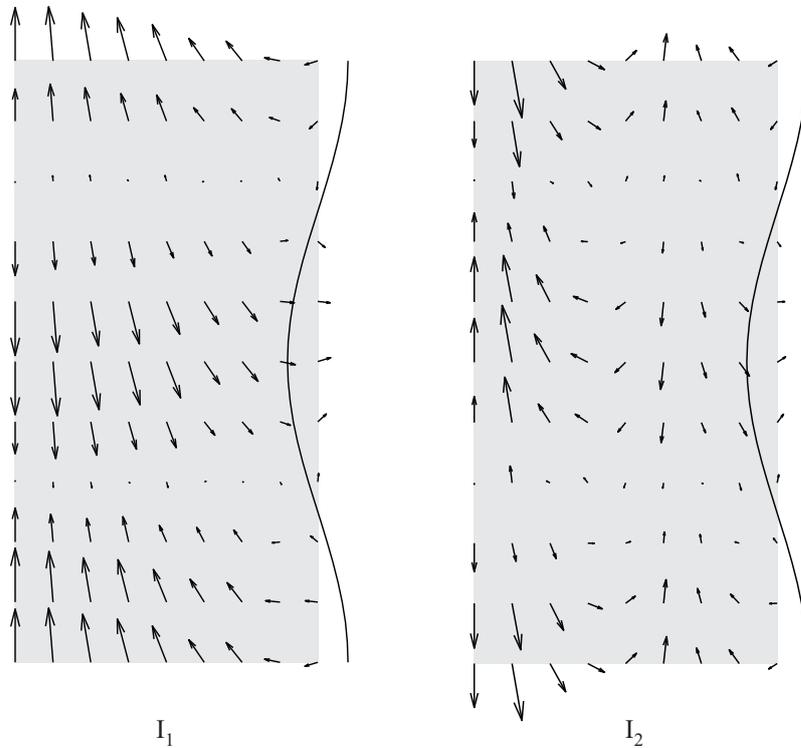


Figura 2.16: Campo de velocidades para los dos primeros modos inerciales. La coordenada axial no está escalada con la longitud de onda. Se ha omitido el amortiguamiento espacial dividiendo las componentes de la velocidad y la deformación por $e^{-k_i z}$. Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

de arriba y negativo para la de abajo). Su localización se estimará a partir de los ceros de la función $I_1(k_v)$, ya que esta función aparece en

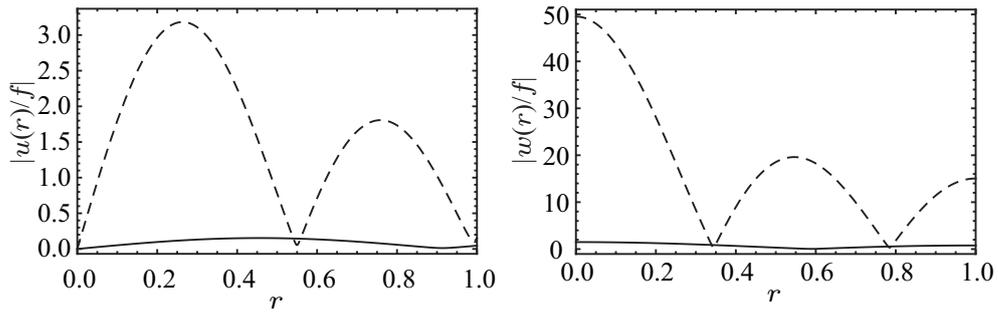


Figura 2.17: Distribución de velocidades de los dos primeros modos hidrodinámicos (el primero en línea continua y el segundo en línea discontinua). Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$. En el segundo modo se observan sendos puntos de anulación del valor absoluto, que indica una inversión en el sentido de esa componente.

el denominador de algunos de los términos viscosos de la relación de dispersión, produciendo así grandes variaciones cerca de estos ceros y haciendo así posible un balance con los restantes términos. Como $k_v = k^2 - iRe(k_{\text{temp}} - k)$, haciendo $k_v = ix_{1n}$, donde x_{1n} es el n -ésimo cero de la función de Bessel $J_1(x)$, se tendrán dos raíces cercanas a $k_n = (k_{\text{temp}} + ix_{1n}^2/Re)$. Esto implica que estos modos serán modos amortiguados que se propagan aguas abajo y que están definidos para $z > 0$. La estimación para la familia del semiplano inferior (definida para $z < 0$) dará una k_i aproximada por $-Re - x_{1n}^2/Re$, lo que indica que decaerán rápidamente para altos números de Reynolds.

Las dos familias de modos hidrodinámicos, aunque son muy diferentes, tienen en común una longitud de onda adimensional cercana a $2\pi/k_{\text{temp}}$. Sin embargo, sus factores de decaimiento son muy distintos según acabamos de ver. Los modos hidrodinámicos que están definidos en la región $z > 0$ pueden ser interpretados, al igual que los modos capilares, como una transformación galileana de los modos existentes en el análisis temporal (García & González, 2008). La razón es que $k_r \simeq k_{\text{temp}}$ para estas dos familias mientras que k_i es bastante cercano al factor de crecimiento temporal de los modos hidrodinámicos. Por el contrario, la familia del semiplano inferior (que no ha sido representada en una figura) presenta un amortiguamiento muy fuerte, con un factor de amortiguamiento del orden del número de Reynolds, y no tienen conexión alguna con los modos temporales.

La familia de la región superior (figuras 2.17 y 2.18) tiene una velocidad importante en todo el perfil radial, pero una deformación prácticamente despreciable. El campo de velocidades está organizado en rollos, y habrá tantos rollos como indique el índice del cero asociado. Entre las

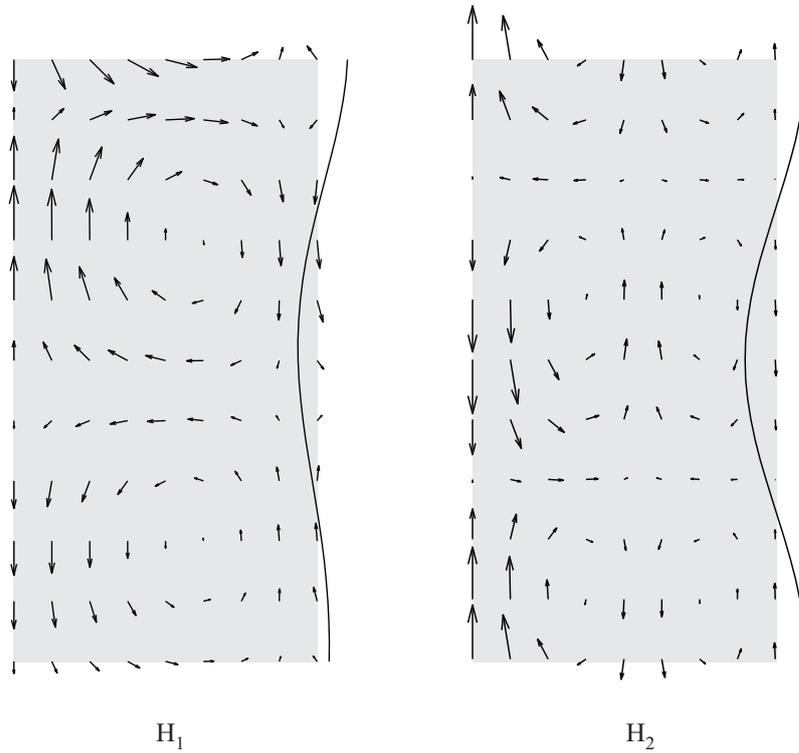


Figura 2.18: Campo de velocidades para los dos primeros modos hidrodinámicos. La coordenada axial está escalada con la longitud de onda. En el segundo modo se ha omitido el amortiguamiento espacial dividiendo las componentes de la velocidad y la deformación por $e^{-k_i z}$. Los parámetros usados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

características más destacadas de estos modos se encuentran que el factor de amortiguamiento que presentan tiene origen viscoso, que la deformación que generan es despreciable y que presentan un campo de velocidades recirculatorio. Los cambios más llamativos que aparecen cuando se comparan los modos espaciales con los temporales (García & González, 2008) son: (i) que los modos espaciales presentan una velocidad media no nula, aunque pequeña comparada con el valor máximo del campo de velocidades, y (ii) que desaparece la interacción entre estos modos y el modo capilar subdominante descrita en ese mismo trabajo.

2.6. Aplicación a la estimulación superficial

El formalismo desarrollado en la sección 2.4.1 da las herramientas necesarias para analizar la respuesta del chorro a cualquier estimulación localizada. La localidad es necesaria para garantizar el desacoplamiento entre las magnitudes dinámicas del fluido y la estimulación, puesto que si se extendiera a una porción muy extensa del chorro, la amplitud de deformación crecería hasta hacer el cálculo del campo eléctrico y sus esfuerzos asociados dependientes de la forma de la interfaz. Retomaremos esta cuestión en el capítulo 4.

La función de Green nos dice cómo una estimulación tipo delta repercute en el campo de velocidades y en la deformación del chorro. Los modos definidos para $z < 0$ no serán de interés para el problema de la estimulación. Para $z > 0$, la diferencia en la evolución de cada uno de ellos determinará cuáles interesa tener en cuenta desde un punto de vista práctico. La figura 2.19 muestra la amplitud de la deformación, como función de z , para unos esfuerzos normales y tangenciales aplicados en $z = 0$. En ambos casos se encuentra una respuesta no trivial cerca del origen y una amplitud que crece exponencialmente para valores grandes de la coordenada axial, como resultado de la estimulación del modo capilar dominante. La amplitud del modo capilar dominante es la principal información que puede extraerse de la función de Green, aunque hay otros modos que decaen lentamente y persisten durante una considerable porción del chorro.

Estos modos son el capilar subdominante y el primer modo hidrodinámico. Si se centra la atención en la comparación mostrada en la figura 2.19 entre ambos tipos de estimulación, se observa que el esfuerzo tangencial es más eficiente que el normal en términos de la deformación obtenida, para este caso particular a viscosidad pequeña ($C = 0.03$). Más adelante se analizará el papel de la viscosidad para un amplio rango de valores.

Para describir mejor la evolución espacial del chorro, se ha representado en la figura 2.20 el módulo de las componentes de la velocidad como función de la coordenada radial r para tres secciones del chorro, definidas en $z = 0.1$, en $z = 1$ y en $z = 5$. En esa figura se comparan los efectos de los esfuerzos normal y tangencial. Tanto la gráfica de la deformación, como las de las componentes de la velocidad se han obtenido combinando un número finito de modos. Se han truncado las familias inercial e hidrodinámica de manera que el añadir uno más de estos modos supone un cambio inferior al 1%. Los dos modos capilares siempre son necesarios. El número de modos tenidos en cuenta varía del caso $z = 0.1$ al $z = 1$ como

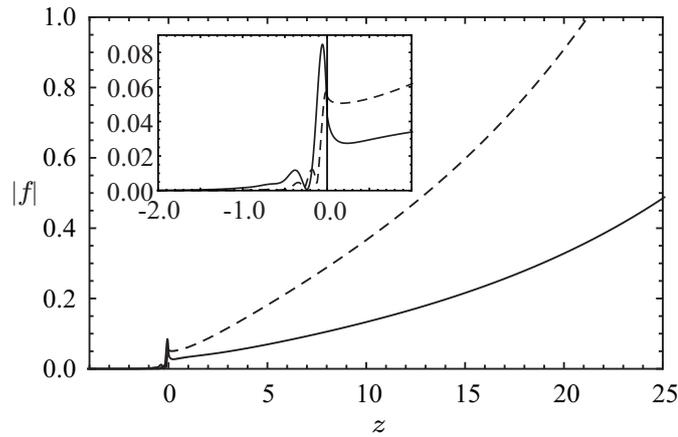


Figura 2.19: Amplitud de la deformación $|f|$ como función de la coordenada axial z , correspondiente a la función de Green para un esfuerzo normal (línea continua) y tangencial (línea discontinua). Los parámetros usados son $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

sigue: para un esfuerzo normal, la velocidad radial requiere 9 inerciales y 23 hidrodinámicos para $z = 0.1$ y ningún inercial y un hidrodinámico; para la velocidad axial se pasa de 15 inerciales y 31 hidrodinámicos a un inercial y 6 hidrodinámicos; para el esfuerzo tangencial, la velocidad radial pasa de 19 inerciales y 35 hidrodinámicos a un inercial y 7 hidrodinámicos; la velocidad axial pasa de 9 inerciales y 22 hidrodinámicos a ningún inercial y 4 hidrodinámicos. Se ve pues que la convergencia no es uniforme. Sin embargo, como el factor de amortiguamiento es diferente para cada modo estable, las amplitudes del modo inestable y de los que decaen más lentamente definirán la evolución espacial aguas abajo. En este sentido, los pobres resultados que ofrece la combinación de modos en el origen (punto donde está aplicada la estimulación), debidos a la convergencia no uniforme de la solución, no serán un serio inconveniente.

La diferencia en la eficiencia de la estimulación es evidente en el caso de la velocidad también. Los perfiles de velocidad se van suavizando aguas abajo y tienden al perfil de velocidad generado por el modo capilar dominante: uniforme para la velocidad axial y lineal para la radial, con un valor nulo en el eje.

Para ilustrar el cambio en la eficiencia en ambos tipos de estimulación al variar el número de Ohnesorge, se presenta en la figura 2.21 los perfiles radiales de las componentes de la velocidad para un caso más viscoso ($C = 0.5$ y manteniendo los mismos parámetros que en la figura 2.20). Ahora la estimulación debida a los esfuerzos tangenciales es ligeramente más eficiente que la debida a los esfuerzos normales. Obviamente, la comparación de los perfiles radiales para dos rodajas del chorro muestra

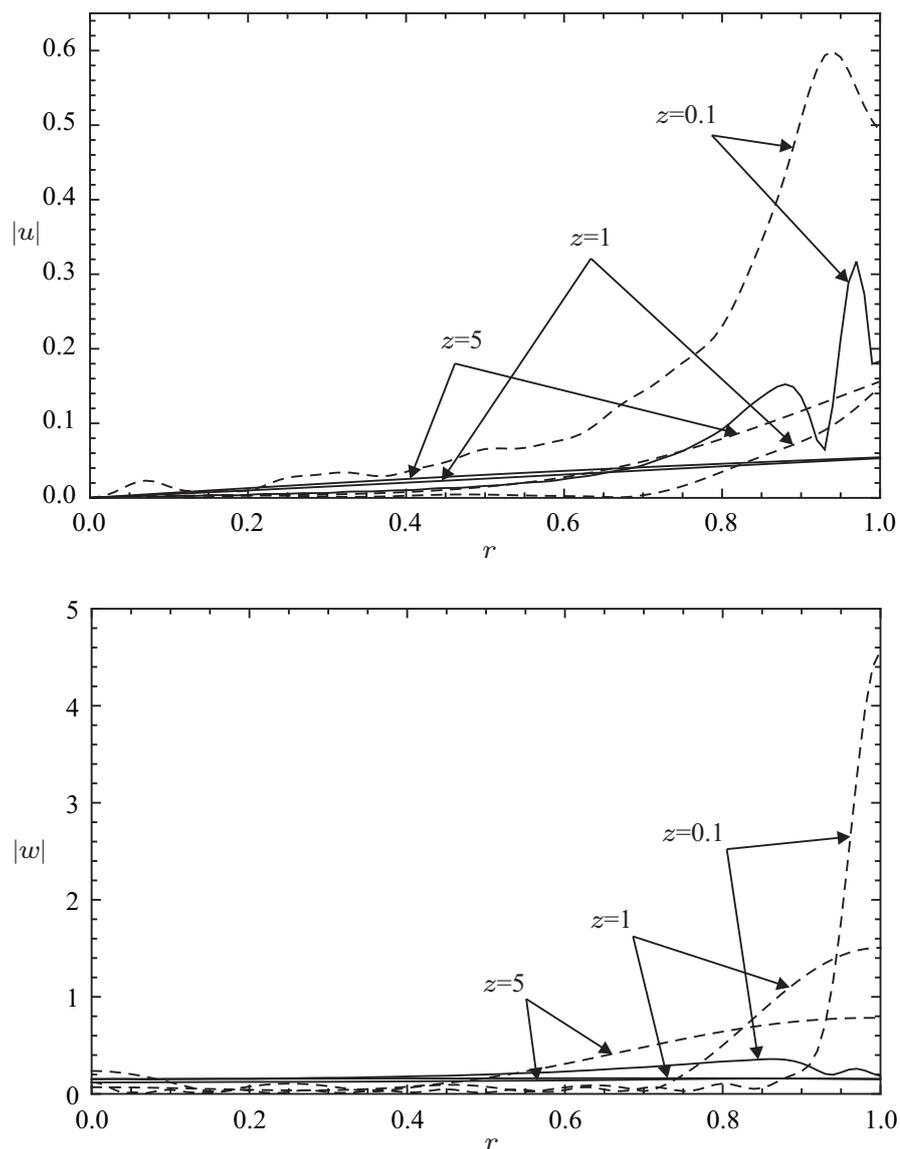


Figura 2.20: Perfiles radiales para el módulo de las componentes axial, w , y radial, u de la velocidad asociados a los dos tipos de función de Green para las posiciones axiales $z = 0.1$, $z = 1$ y $z = 5$. La línea continua se corresponde al esfuerzo normal mientras que la discontinua lo hace al tangencial. Los parámetros usados son $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$.

la tendencia hacia el perfil asociado al modo capilar dominante, puesto que éste crece mientras que los otros modos decrecen.

Una evaluación cuantitativa de la importancia de cada modo en las dos funciones de Green se obtiene a partir de sus amplitudes, de acuerdo con la normalización basada en la deformación,

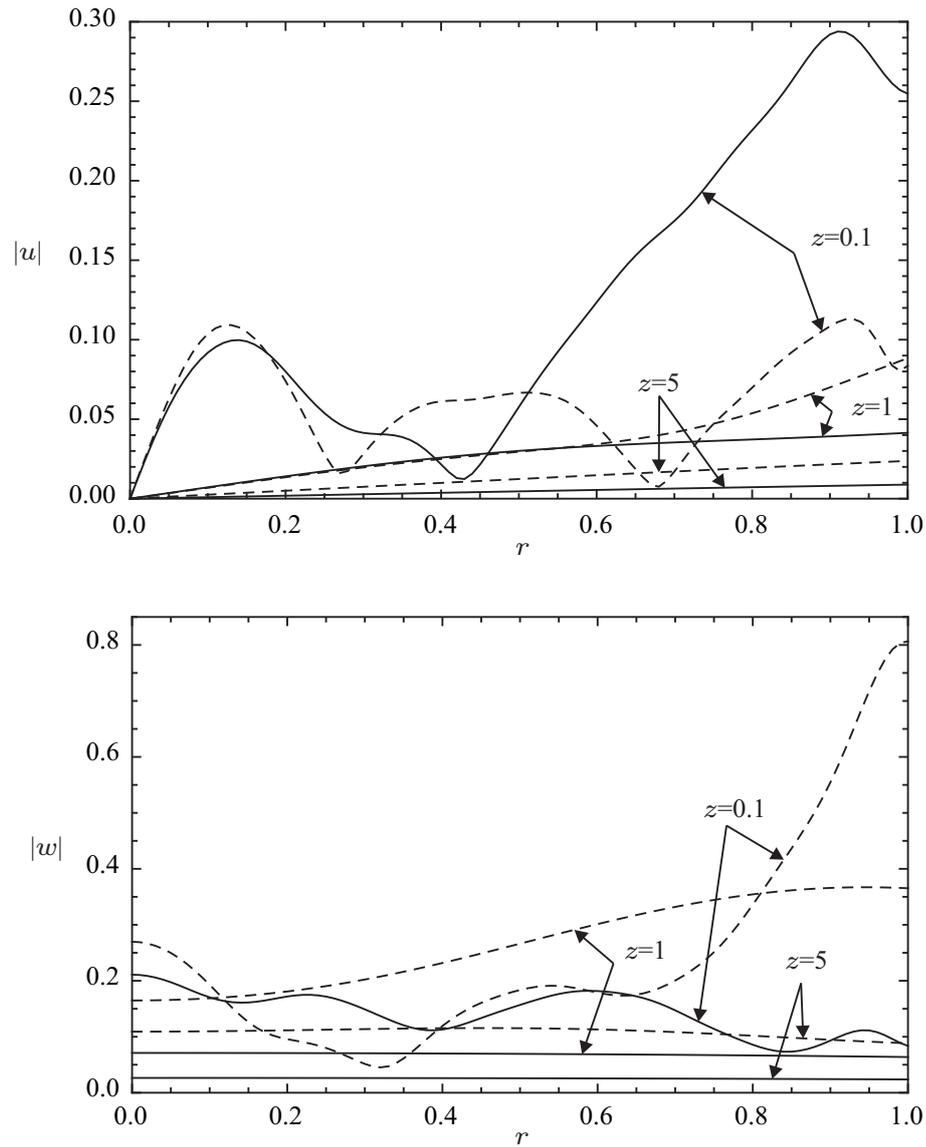


Figura 2.21: Perfiles radiales para el módulo de las componentes axial, w , y radial, u de la velocidad asociados a los dos tipos de función de Green para las posiciones axiales $z = 0.1$, $z = 1$ y $z = 5$. La línea continua se corresponde al esfuerzo normal mientras que la discontinua lo hace al tangencial. Los parámetros usados son $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.5$ y $\beta = 4.47$.

$$\begin{pmatrix} f_{n,j} \\ f_{t,j} \end{pmatrix} = Res_{k \rightarrow k_j} \begin{pmatrix} \{\mathbf{L}^{-1}\}_{32} \\ \{\mathbf{L}^{-1}\}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Para ilustrar la importancia relativa en términos de la deformación de cada modo para ambos tipos de estimulación, se presenta en la tabla

2.1 las amplitudes obtenidas a través de la ecuación (2.53) para unos valores fijados de los parámetros: $\beta = 4.47$, $C = 0.03$ y $k_{\text{temp}} = 0.7$, los mismos que se han utilizado en las figuras 2.19 y 2.20. Se debe distinguir entre aguas abajo ($z > 0$) y aguas arriba ($z < 0$). Aguas abajo, los modos capilares son los de mayor amplitud. Son más importantes para los esfuerzos tangenciales que para los normales. Con respecto a los modos hidrodinámicos, el primero presenta una amplitud del mismo orden que los capilares cuando se actúa con un esfuerzo tangencial. A medida que aumenta el orden de estos modos, su amplitud se va haciendo más y más pequeña. Para los esfuerzos normales, ni siquiera el primer modo hidrodinámico es comparable con los capilares. Aunque los modos hidrodinámicos dan una contribución modesta a la construcción de la deformación para estos valores particulares de los parámetros, no hay que olvidar que su contribución al campo de velocidades sí es importante. Los modos inerciales presentan una amplitud mayor que la de los modos hidrodinámicos cuando la estimulación la ejerce un esfuerzo normal, mientras que para un esfuerzo tangencial, la contribución hidrodinámica es superior a la inercial. Aguas arriba, los modos capilares aguas arriba juegan el papel de los modos capilares y los modos hidrodinámicos prácticamente se vuelven irrelevantes.

Consideraremos ahora la amplitud del modo capilar dominante, $f_{C_{\text{dom}}}$. La figura 2.22 muestra su módulo y fase para ambos tipos de estimulación y diferentes valores de los parámetros. Se muestran dos estudios, uno para analizar el papel de la viscosidad y otro para los cambios en la velocidad del chorro. Se ve que los esfuerzos tangenciales son más eficientes que los normales, aunque el concepto de eficiencia es relativo a la formulación propuesta, que mide la importancia de los dos tipos de estimulación (normal y tangencial) a partir de la amplitud de los esfuerzos. No entramos así en ninguna consideración energética, tal como la potencia mecánica suministrada en cada tipo de estimulación.

Con carácter general podemos decir que la respuesta del modo en función de la frecuencia presenta un pico más o menos pronunciado en $k_{\text{temp}} = 1$ para chorros no viscosos y que se desplaza a valores mayores de k_{temp} cuando se aumenta la viscosidad. La amplitud de estos picos decrece con la viscosidad.

La posición y el valor del máximo están determinados por la mínima distancia entre los dos polos capilares en el plano complejo k , como se observa en la figura 2.6(b). En el caso sin viscosidad, los dos polos coalescen y se encuentra una amplitud infinita. La superioridad de la estimulación tangencial resulta más evidente a bajas frecuencias de estimulación. El caso $\omega = 0$ da una amplitud no trivial para la estimulación debida a los esfuerzos normales, pero si se calcula esa misma amplitud para el modo

Modo	Esf. Normal		Esf. Tangencial	
	Módulo	Fase	Módulo	Fase
$z > 0$				
C_{dom}	0.078031	1.38251	0.21565	1.49315
C_{sub}	0.07382	-1.36113	0.14081	-1.59479
H_1	0.00450	-0.73230	0.07557	-1.12441
H_2	0.00003	1.06889	0.00303	-0.23520
H_3	0.00001	3.02601	0.00135	0.74217
I_1	0.01760	-2.03957	0.00574	-1.82033
I_2	0.00700	-1.77400	0.00353	-1.22685
I_3	0.00390	-1.67669	0.00234	-1.11187
$z < 0$				
CU_{downward}	0.05696	0.07403	0.03912	0.67876
CU_{upward}	0.04450	-3.14119	0.02994	-0.62410
I_{-1}	0.01975	-1.08667	0.00275	0.20926
I_{-2}	0.00916	-1.38398	0.00104	-0.29875
I_{-3}	0.00560	-1.49103	0.00037	-1.15982
I_{-4}	0.00365	-1.55363	0.00041	-2.44503
I_{-5}	0.00241	-1.59362	0.00057	-2.82490
I_{-6}	0.01584	-1.61838	0.00063	-2.96618

Tabla 2.1: Módulo y fase de la amplitud de los modos más relevantes bajo un esfuerzo normal y tangencial. La fase, medida en radianes es relativa a la fase de la estimulación. Los parámetros son los habituales.

capilar subdominante, se obtiene la misma amplitud pero en oposición de fase, evitándose así un resultado no realista que implicaría un cambio en el radio de todo el chorro.

Si se quiere estudiar el efecto del aumento de la velocidad del chorro en la eficiencia de la estimulación, hay que tener en cuenta que cuando se aumenta la velocidad, también disminuye el tiempo durante el cual la estimulación está actuando sobre una longitud de onda fijada. Por tanto, se esperará que $f_{C_{\text{dom}}}$ disminuya cuando la velocidad del chorro β aumente. Esta es la razón por la cual en la figura 2.22b se representa $\beta f_{C_{\text{dom}}}$, lo cual tiene más sentido que representar sólo la amplitud cuando se varía β . Como era de esperar, $\beta f_{C_{\text{dom}}}$ depende muy débilmente de β para valores de k_{temp} lejanos al pico. Cerca del pico se observa un crecimiento monótono de esta función de acuerdo con la menor distancia entre los polos capilares. En el límite de velocidad infinita, el pico se volverá infinitamente grande y estrecho.

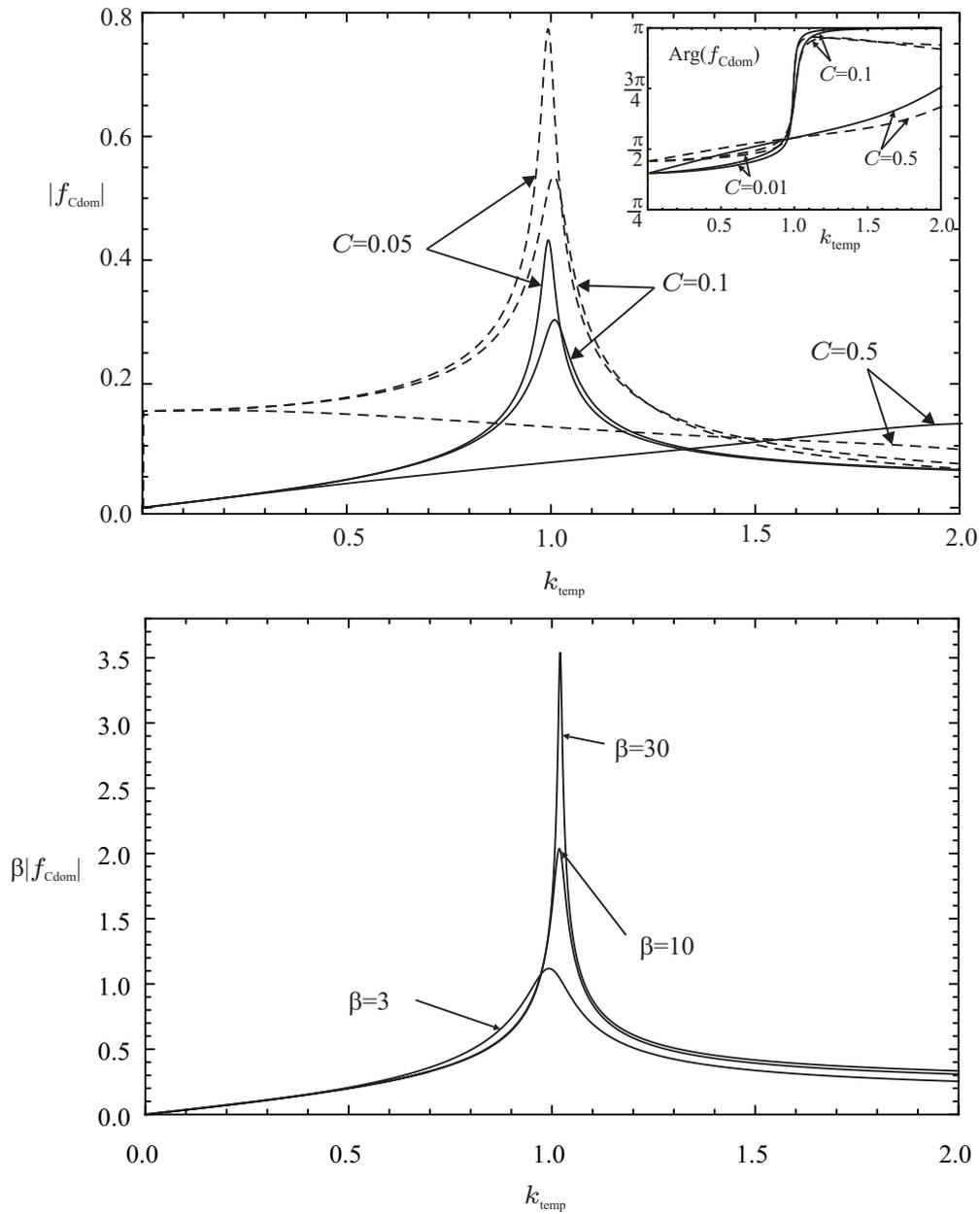


Figura 2.22: Módulo de la amplitud del modo capilar dominante como función de la frecuencia forzadora ω , para un esfuerzo normal (línea continua) y tangencial (línea discontinua). (a) Comportamiento con el número de Ohnesorge: $\beta = 4.47$, $C = 0.05, 0.1, 0.5$. (b) Comportamiento con la velocidad del chorro para un esfuerzo normal: $C = 0.1$, $\beta = 3, 10, 30$.

2.7. Revisión de la inestabilidad absoluta

Todo lo visto hasta ahora presupone la existencia de un chorro que surge como tal de un orificio y manifiesta inestabilidad convectiva aguas

abajo. A continuación consideramos una situación en la que el chorro es inestable desde la propia salida (inestabilidad absoluta) y en particular qué aporta a su comprensión nuestro análisis de los modos espaciales.

Es bien conocido que para cada valor del número de Reynolds se tiene un valor crítico del número de Weber $We_c(Re)$ por debajo del cual el sistema se vuelva absolutamente inestable (Leib & Goldstein, 1986b). La curva crítica se reproduce en la figura 2.23(a), en términos de los números adimensionales β y C . Justo en el valor crítico de estos números se tiene una inestabilidad absoluta marginal, caracterizada por un modo con una frecuencia real $\omega_c(C)$ y número de onda complejo $k_c(C)$. Estas magnitudes están representadas en la figura 2.23(b). Por debajo de ese valor crítico, ya no se puede llamar espaciales a estos modos sino más bien espacio-temporales. El esquema de la figura 2.8 corresponde a frecuencias por debajo de la unidad y velocidades del chorro mayores que el valor crítico para esta viscosidad, es decir, está en una situación de inestabilidad convectiva. Cambios en la velocidad del chorro pueden producir cambios en las posiciones de los modos en el plano complejo. Si dado un C y $\beta > \beta_c(C)$, se selecciona una frecuencia $\omega_c(C)$, todos los polos serán simples, excepto dos de ellos que tenderán a la coalescencia (a $k_c(C)$) cuando $\beta \rightarrow \beta_c(C)$. Este proceso, representado en la figura 2.24, determina qué modos espaciales son los responsables de la inestabilidad absoluta en los chorros capilares. Se identifican los modos capilar dominante y capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo como los modos que coalescen. Los dos tienen velocidad de fase positiva. El campo de velocidades es el mismo para los dos cuando se convierten en un único polo doble, como se ve en la figura 2.24. Hay que hacer notar que este campo de velocidades difiere de los obtenidos para el modo capilar dominante y el capilar aguas arriba representados en las figuras 2.10 y 2.13 respectivamente: el modo capilar dominante cambia la fase de la velocidad radial relativa a la deformación de la superficie más o menos en $\pi/2$, mientras que el modo capilar aguas arriba gana en extensión radial, afectando ahora a toda la sección del chorro. Puede decirse, por tanto, que cada modo pierde alguna de sus peculiaridades para parecerse entre ellos.

Sorprende que hasta ahora, ninguno de los autores que ha tocado el tema de la inestabilidad absoluta se haya preocupado por identificar los modos que coalescen. Leib & Goldstein (1986b) establecieron la existencia de un punto de silla (figura 2.25) en la relación de dispersión generada por ceros que provenían de diferentes semiplanos. Yakubenko (1997) asoció la estructura de isolíneas de valores complejos de ω' cerca del punto de coalescencia en el plano complejo con un modo que ahora se reconoce como el primer modo inercial, I_{-1} . Por último Le Dizès (1997), también

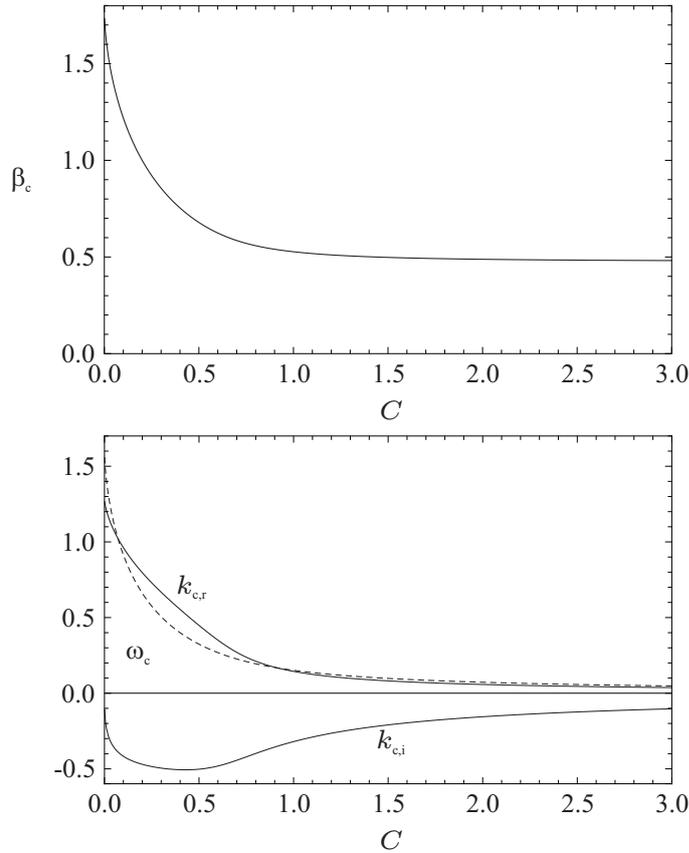


Figura 2.23: (a) Velocidad crítica del chorro como función del número de Ohnesorge. Esta curva separa la zona de inestabilidad convectiva (arriba) de la absoluta (abajo) y es equivalente a la obtenida por Leib & Goldstein (1986b) en términos de los números de Weber y Reynolds. Para los valores de estos números que definen la curva se obtiene una inestabilidad marginal. (b) Curvas de frecuencia ω_c (real), número de onda $k_{c,r}$ y factor de crecimiento espacial $k_{c,i}$ para las condiciones de inestabilidad absoluta marginal.

para el caso no viscoso, describió que en la transición de *jetting* a *dripping* intervenían tres modos globales. De estas tres ramas, dos eran los modos capilares y la tercera, el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo. Sin embargo, la conclusión que extrajo fue que la transición era un fenómeno de inestabilidad global y no debido a la inestabilidad absoluta (local).

La determinación de los modos espaciales que dan lugar a la inestabilidad absoluta puede ayudar a entender la física subyacente. Las claves son:

(i) La inestabilidad puede ser vista como una resonancia que surge entre

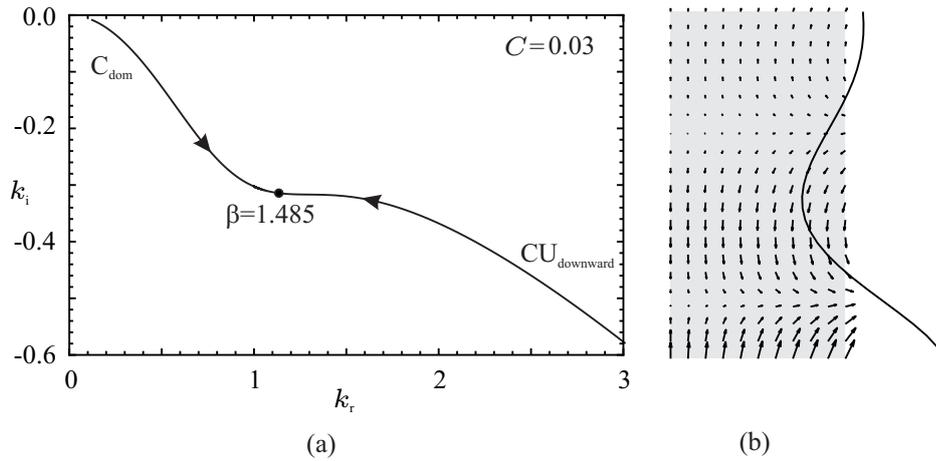


Figura 2.24: Proceso de coalescencia de los modos capilar dominante con el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo cuando se disminuye la velocidad del chorro hasta su valor crítico β_c fijada una frecuencia $\omega = \omega_c = 1.2398$ correspondiente al estado marginal.

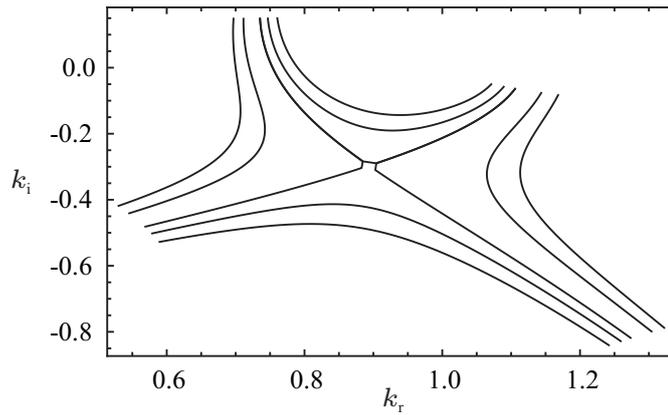


Figura 2.25: Punto de silla de la relación de dispersión para unas condiciones de inestabilidad absoluta: $\beta = 1$ y $C = 0.03$, los valores críticos son $k = 0.89374 - 0.2968i$, $\omega = 0.753683 + 0.153198i$.

dos modos que pertenecen a semiespacios distintos, que alcanzan la misma longitud de onda para las condiciones críticas. La figura 2.22 puede entenderse en este sentido.

(ii) Las coalescencia de dos modos con velocidades de grupo con signo opuesto conlleva la emisión de energía desde el punto de estimulación, ya que estas velocidades se hacen cero en las condiciones críticas.

(iii) De los dos modos que interactúan, uno de ellos es inestable, incluso desde el punto de vista del análisis temporal y el otro modo está asocia-

do a la advección, que es una característica genuina del análisis espacial. Parece pues natural que la interacción sea entre un modo que es inestable en cualquier sistema de referencia con otro que proviene de la inercia axial del flujo, y por tanto, determinado por un sistema de referencia laboratorio.

Capítulo 3

Análisis modal de la función de Green a partir de los modelos unidimensionales

3.1. Modelos unidimensionales

Los problemas de interfaz libre son en general de resolución costosa desde el punto de vista computacional. En el caso particular de los chorros capilares, los modelos unidimensionales han surgido como planteamiento alternativo más simple, aunque aproximado, para describir flujos axisimétricos. Estos modelos surgen de imponer como restricción que la columna debe ser esbelta. La esbeltez de la columna sugiere que las variables fluidomecánicas presentarán una dependencia radial suave, lo que permitirá desarrollarlas en serie de Taylor alrededor de $r = 0$ (García & Castellanos, 1994; García, 1998), de acuerdo con el esquema

$$W(r, z, t) = W_0 + \frac{1}{2}r^2W_2 + \dots, \quad (3.1)$$

$$U(r, z, t) = -\frac{1}{2}rW_{0z} - \frac{1}{8}r^3W_{2z} - \dots, \quad (3.2)$$

$$P(r, z, t) = P_0 + \frac{1}{2}r^2P_2 + \dots, \quad (3.3)$$

donde W y U son las componentes axial y radial de la velocidad y P es la presión. Estas series convergerán rápidamente siempre que la coordenada radial sea mucho menor que una longitud axial típica. Dependiendo del orden en que se trunquen estos desarrollos, se obtendrán unos modelos más o menos refinados.

El modelo de Lee viscoso se obtiene al truncar el desarrollo en serie en el primer orden, quedando así la velocidad axial y la presión uniformes

en una rodaja. Luego, se sustituyen los coeficientes W_0 y la presión en la interfase por la velocidad axial media en una rodaja y por un desarrollo de la presión del mismo orden de aproximación del modelo, P_0 respectivamente. Las ecuaciones de este modelo quedarán pues

$$P_0 = \nabla \cdot \mathbf{e}_n - C\overline{W}_z + T_n, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} F_z P_0 = & F_z \nabla \cdot \mathbf{e}_n + \frac{C}{2} ((F\overline{W})_{zz} + 4F_z \overline{W}_z) \\ & - \frac{F}{2} (\overline{W}_t + \overline{W} \overline{W}_z + P_{0z}) + T_t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y la condición cinemática

$$(F^2)_t + (F^2 \overline{W})_z = 0, \quad (3.6)$$

donde los subíndices z y r indican derivadas parciales con respecto a la coordenada axial y radial respectivamente.

La componente normal de la ecuación de Navier–Stokes permanece desacoplada

$$-\frac{1}{2}\overline{W}_z^2 + \overline{W} \overline{W}_{zz} = 2P_2 + (\overline{W} \overline{W}_z)_z + P_{0zz}, \quad (3.7)$$

lo que supone despreciar la inercia radial en el modelo.

Un modelo de segundo orden es el modelo parabólico, donde la velocidad axial y la presión presentan una dependencia radial cuadrática. Estas son sus ecuaciones:

$$W_{0t} + W_0 W_{0z} = -P_{0z} + C(W_{0zz} + 2W_2), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} P_0 + \frac{F^2}{4} \left(W_{0zt} - \frac{1}{2} W_{0z}^2 + W_0 W_{0zz} \right) = & \nabla \cdot \mathbf{e}_n \\ & + C \left[-W_{0z} + \frac{1}{2} F F_z W_{0zz} - F F_z W_2 - \frac{F^2}{4} (-W_{0zzz} + W_{2z}) \right] + T_n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} F_z \left[P_0 + \frac{F^2}{4} \left(W_{0zt} - \frac{1}{2} W_{0z}^2 + W_0 W_{0zz} \right) \right] \\ & + \frac{F^3}{8} \left[W_{2t} + W_0 W_{2z} + \frac{1}{2} (W_{0zzt} - W_{0z} + (W_0 W_{0zz})_z) \right] \\ = & F_z \nabla \cdot \mathbf{e}_n + T_t + C \left(\frac{1}{2} F W_{0zz} + 2F_z W_{0z} - F W_2 \right. \\ & \left. + \frac{F^2 F_z}{4} (W_{0zzz} + 6W_{2z}) + \frac{F^3}{16} (W_{0zzzz} + 2W_{2zz}) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

y la condición cinemática,

$$F_t + \frac{1}{2}FW_{0z} + F_zW_0 + \frac{1}{8}F^3W_{2z} + \frac{1}{2}F^2F_zW_2 = 0. \quad (3.11)$$

Este conjunto de ecuaciones se completa con esta última, que está desacoplada y sirve de definición de W_4 :

$$W_{2t} + W_0W_{2z} = -P_{2z} + C \left(W_{2zz} + \frac{4}{3}W_4 \right). \quad (3.12)$$

El modelo de Cosserat presenta las mismas variables que el modelo de Lee (\bar{W} , F y P_0) y se obtiene a partir de las ecuaciones del modelo parabólico que se acaban de enumerar. Para ello, basta con calcular la velocidad axial media en una rodaja, y retener los términos de segundo orden. Para terminar de definir el problema hay que eliminar los términos viscosos que contienen a la variable W_2 .

$$\begin{aligned} & \frac{F}{2} (\bar{W}_t + \bar{W}\bar{W}_z + P_{0z}) + F_z \left[P_0 + \frac{F^2}{4} \left(\bar{W}_{zt} - \frac{1}{2}\bar{W}_z^2 + \bar{W}\bar{W}_{zz} \right) \right] \\ & + \frac{F^3}{16} (\bar{W}_{zzt} - \bar{W}_z + (\bar{W}\bar{W}_{zz})_z) \\ & = F_z \nabla \cdot \mathbf{e}_n + C \left(F\bar{W}_{zz} + 2F_z\bar{W}_z + \frac{F_zF^2}{4}\bar{W}_{zzz} + \frac{F^3}{16}\bar{W}_{zzzz} \right) + T_t, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & P_0 + \frac{F^2}{4} \left(\bar{W}_{zt} - \frac{1}{2}\bar{W}_z^2 + \bar{W}\bar{W}_{zz} \right) = \nabla \cdot \mathbf{e}_n \\ & + C(-\bar{W}_z + \frac{1}{2}FF_z\bar{W}_{zz} + \frac{F^2}{4}\bar{W}_{zzz}) + T_n, \end{aligned} \quad (3.14)$$

y la condición cinemática, que será la misma obtenida en el modelo de Lee

$$(F^2)_t + (F^2\bar{W})_z = 0. \quad (3.15)$$

El modelo promediado es una versión mejorada del modelo de Cosserat en la que se estimarán adecuadamente los términos viscosos que se han despreciado en este último,

$$\begin{aligned} & \frac{F}{2} (\bar{W}_t + \bar{W}\bar{W}_z + P_{0z}) + F_z \left[P_0 + \frac{F^2}{4} \left(\bar{W}_{zt} - \frac{1}{2}\bar{W}_z^2 + \bar{W}\bar{W}_{zz} \right) \right] \\ & + \frac{F^3}{16} (\bar{W}_{zzt} - \bar{W}_z + (\bar{W}\bar{W}_{zz})_z) \\ & = F_z \nabla \cdot \mathbf{e}_n + C \left(F\bar{W}_{zz} + 2F_z\bar{W}_z + \frac{F_zF^2}{4}\bar{W}_{zzz} + \frac{F^3}{16}\bar{W}_{zzzz} \right) + T_t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
P_0 + \frac{F^2}{4} \left(W_{zt} - \frac{1}{2} \overline{W}_z^2 + \overline{W} \overline{W}_{zz} \right) &= \nabla \cdot \mathbf{e}_n \\
+ C \left(-\overline{W}_z + \frac{1}{2} F F_z \overline{W}_{zz} - 3 F_z^2 \overline{W}_z + \frac{1}{2} F F_z \overline{W}_{zz} + \frac{F^2}{4} \overline{W}_{zzz} \right) &+ T_n,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$(F^2)_t + (F^2 \overline{W})_z = 0. \tag{3.18}$$

La única novedad de todas estas ecuaciones, tal y como se presentan en esta tesis, es que se ha mantenido la variable presión mientras que en la literatura se elimina (Eggers & Dupont, 1994; García & Castellanos, 1994; García, 1998). Esto permite añadir como términos forzadores los esfuerzos normal y tangencial. Resolver los modelos con esta formulación permitirá la comparación de resultados con el caso 3D.

3.2. Ecuaciones lineales y relaciones de dispersión

En esta sección se obtendrán las ecuaciones linealizadas y la función de Green para cada uno de los modelos unidimensionales. Para los modelos de velocidad media (aquellos que tienen como variables f , p y \overline{w}), Lee, Cosserat y promediado, desarrollamos perturbativamente todas las magnitudes hasta primer orden escribiendo

$$\overline{W} = \beta + \overline{w}, \tag{3.19}$$

$$P_0 = 1 + p, \tag{3.20}$$

$$F = 1 + f, \tag{3.21}$$

donde β es la velocidad adimensional del chorro y \overline{w} , p , f y son pequeñas perturbaciones de la velocidad axial media, la presión a orden cero y la forma de la interfaz, respectivamente.

La introducción de la solución perturbada en las ecuaciones y condiciones de contorno, despreciando términos de orden superior, conduce a un problema lineal que puede resolverse analíticamente. Para los modelos de velocidad media, las ecuaciones que describen su evolución son la condición cinemática y las componentes normal y tangencial del equilibrio de esfuerzos:

$$f_t + \beta f_z + \frac{1}{2} \overline{w}_z = 0 \tag{3.22}$$

$$-p - C \left(\overline{w}_z + \frac{1}{4} m \overline{w}_{zzz} \right) - \frac{1}{4} s (\overline{w}_{tz} + \beta \overline{w}_{zz}) - (f - f_{zz}) = T_n \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(p_z + \bar{w}_t + \beta\bar{w}_z) + C\bar{w}_{zz} + \frac{1}{16}s(\bar{w}_{tzz} + \beta\bar{w}_{zzz}) \\
- \frac{1}{16}m\bar{w}_{zzzz} = T_t
\end{aligned} \tag{3.24}$$

de donde se obtienen las ecuaciones del modelo de Lee haciendo $s = 0$ y $m = 0$, las del promediado $s = 1$ y $m = 0$ y las del de Cosserat, $s = 1$ y $m = 1$.

Al igual que se hizo en el caso 3D, aplicando la transformada de Fourier espacio-temporal, se llega a un sistema de ecuaciones algebraico para las variables transformadas (\tilde{p} , \tilde{w} y \tilde{f}):

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T}, \tag{3.25}$$

donde para los modelos de velocidad media se tiene que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{w} \\ \tilde{f} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_n \\ \tilde{T}_t \end{pmatrix};$$

y los coeficientes de la matriz \mathbf{M} son

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 0, \\
M_{12} &= ik, \\
M_{13} &= 2i(-\omega + k\beta), \\
M_{21} &= -1, \\
M_{22} &= -ikC + s(-k\omega/4 + \beta k^2/4) - miCk^3/4, \\
M_{23} &= -i(-\omega + k\beta)/2 - Ck^2 + s(-i\omega k^2/16 + i\beta k^3/16) + mCk^4/16, \\
M_{31} &= 2i(-\omega + k\beta), \\
M_{32} &= -(1 - k^2), \\
M_{33} &= 0;
\end{aligned}$$

El mismo tratamiento se realiza para el modelo parabólico. Al desarrollo perturbativo visto para los modelos de velocidad media hay que añadirle estos nuevos términos

$$W_2 = w_2, \tag{3.26}$$

$$P_2 = p_2. \tag{3.27}$$

Así, las ecuaciones del modelo parabólico quedan

$$f_t + \beta f_z + \frac{1}{2}w_{0z} + \frac{1}{8}w_{2z} = 0, \tag{3.28}$$

$$p_z + w_{0t} + \beta w_{0z} - C(w_{0zz} + 2w_2) = 0, \tag{3.29}$$

$$-p - (f - f_{zz}) - \frac{1}{4}(w_{0tz} + \beta w_{0zz}) + \frac{1}{4}C(w_{0zzz} - 4w_{0z} - w_{2z}) = T_n, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(w_{0tzz} + \beta w_{0zzz}) + \frac{1}{8}(w_{2t} + \beta w_{2z}) \\ & - C\left(w_{0zz} + \frac{1}{6}w_{0zzz} - w_2 + \frac{3}{8}w_{2zz}\right) = T_t, \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para el modelo parabólico el sistema de ecuaciones presentará cuatro variables

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{f} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{T}_n \\ \tilde{T}_t \end{pmatrix};$$

y los coeficientes de la matriz \mathbf{M} son

$$\begin{aligned} M_{11} &= ik, \\ M_{12} &= i(-\omega + k\beta) + Ck^2, \\ M_{13} &= -2C, \\ M_{14} &= 0, \\ M_{21} &= 0, \\ M_{22} &= ik/2, \\ M_{23} &= ik/8, \\ M_{24} &= i(-\omega + k\beta), \\ M_{31} &= -1 \\ M_{32} &= -\omega k/4 + \beta k^2/4 - ikC(k^2/4 + 1), \\ M_{33} &= -ikC/4, \\ M_{34} &= -(1 - k^2), \\ M_{41} &= 0, \\ M_{42} &= k^2C/2 + ik^2\omega/16 - i\beta k^3/16 - k^4C/16, \\ M_{43} &= i(-\omega + k\beta)/8 + C(1 + 3k^2/8), \\ M_{44} &= 0; \end{aligned}$$

Al igual que en el caso 3D, al ser el problema lineal se pueden tratar separadamente el efecto de los esfuerzos normales y tangenciales, obteniendo las soluciones haciendo $T_n = 0$ y $T_t = 0$ respectivamente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{p}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{M}^{-1}\}_{12} \\ \{\mathbf{M}^{-1}\}_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_n \\ \tilde{w}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{M}^{-1}\}_{22} \\ \{\mathbf{M}^{-1}\}_{23} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{f}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{M}^{-1}\}_{32} \\ \{\mathbf{M}^{-1}\}_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

La anulaci3n del determinante de estas matrices \mathbf{M} dar3 lugar a las relaciones de dispersi3n de cada uno de los modelos:

Lee,

$$k^4 + 6iC\beta k^3 - k^2(1 + 2\beta^2 + 6iC\omega) + 4k\beta\omega - 2\omega^2 = 0; \quad (3.35)$$

Cosserat,

$$\begin{aligned} iCk^5\beta - k^4(-4 + \beta^2 + iC\omega) + 2k^3\beta(12iC + \omega) \\ - k^2(4 + 8\beta^2 + 24iC\omega + \omega^2) + 16k\beta\omega - 8\omega^2 = 0; \end{aligned} \quad (3.36)$$

Promediado,

$$\begin{aligned} -k^4(-4 + \beta^2) + 2k^3\beta(8iC + \omega) - k^2(4 + 8\beta^2 + 16iC\omega + \omega^2) \\ + 8iCk^2(k\beta - \omega) + 16k\beta\omega - 8\omega^2 = 0; \end{aligned} \quad (3.37)$$

Parab3lico,

$$\begin{aligned} k^7\beta + k^5(7\beta - 4\beta^3) + 2C^2k^2(192 + 48k^2 + 7k^4)(k\beta - \omega) - k^6\omega \\ + k^4(-7 + 12\beta^2)\omega - 48k\beta\omega^2 + 16\omega^3 + 4k^2\omega(2 + 12\beta^2 + \omega^2) \\ - 4k^3\beta(2 + 4\beta^2 + 3\omega^2) - iC[k^8 - 3k^6(-5 + 6\beta^2) + 256k\beta\omega \\ + 192k^3\beta\omega + 36k^5\beta\omega - 128\omega^2 - 32k^2(2 + 4\beta^2 + 3\omega^2) \\ - 6k^4(-8 + 16\beta^2 + 3\omega^2)] = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

El an3lisis espacial de estos modelos presenta como novedad los t3rminos que contienen β respecto al an3lisis temporal. La hip3tesis que justifica la precisi3n de los modelos 1D es la gran esbeltez de la columna l3quida. Es de esperar pues que sus relaciones de dispersi3n den resultados aceptables en el l3mite de longitud de onda larga ($k_r \ll 1$).

3.3. Modos espaciales

El estudio de los modos espaciales que aparecen en cada modelo unidimensional es mucho m3s f3cil que en el caso 3D, ya que, al presentar relaciones de dispersi3n polin3micas, se sabe con certeza el n3mero de modos descritos en cada modelo. El n3mero de modos y su localizaci3n en cada modelo son:

- Modelo de Lee: aguas abajo ($z > 0$) presenta los dos modos capilares (dominante y subdominante) y aguas arriba ($z < 0$) presenta otros dos modos, que se identificar3n con los capilares aguas arriba. M3s adelante entraremos en m3s detalle sobre estos 3ltimos modos.

- Modelo de Cosserat: presenta cinco modos, tres aguas abajo, los dos capilares y el primer inercial, y otros dos aguas arriba, uno inercial y uno de los capilares aguas arriba (el que se propaga aguas arriba).
- Modelo promediado: presenta cuatro modos, tres aguas abajo, igual que el modelo de Cosserat (los dos capilares y el primer inercial) y uno inercial, aguas arriba.
- Modelo parabólico: son ocho los modos que captura este modelo. En la región aguas abajo se encuentran los dos modos capilares, el primer inercial y el primer hidrodinámico. Aguas arriba se encuentran los dos modos capilares aguas arriba, el primer inercial y el primer hidrodinámico.

Aquí, al igual que se vio en el caso 3D, es necesaria la construcción de la función de Green para la correcta adscripción de los modos a las soluciones aguas arriba ($z < 0$) o abajo ($z > 0$).

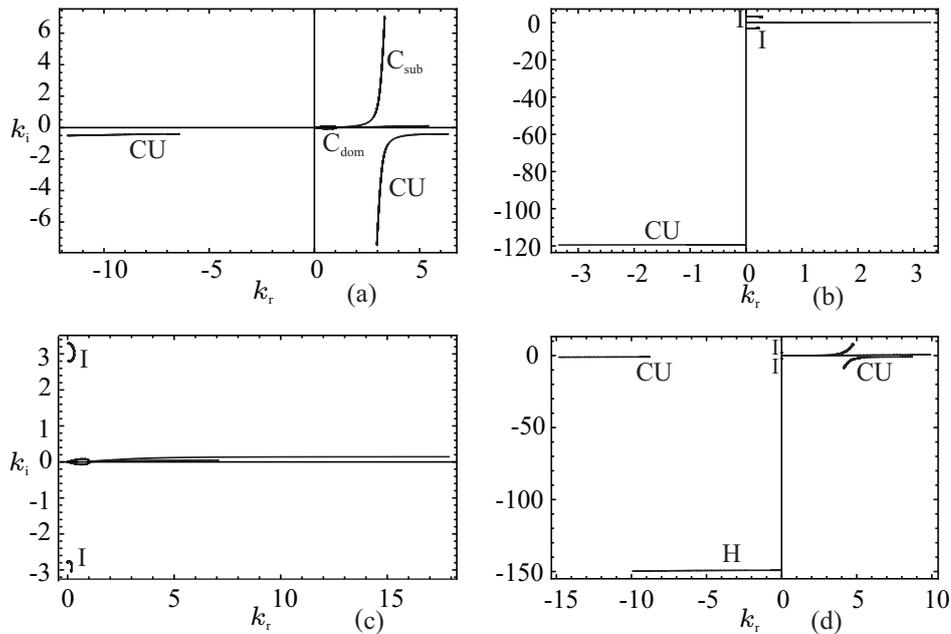


Figura 3.1: Evolución de los modos en el plano complejo k , cuando se varía el número de onda $0 < k_{temp} < 10$ y se fija $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$; (a) Lee, (b) Cosserat, (c) promediado, (d) parabólico.

En la figura 3.1 se muestra el comportamiento de los modos con la frecuencia. Los modos capilares son encontrados en todos los modelos unidimensionales. Para estos modos (figura 3.2) no se observan grandes diferencias con el caso 3D en la región inestable ($0 < k_{temp} < 1$) mientras

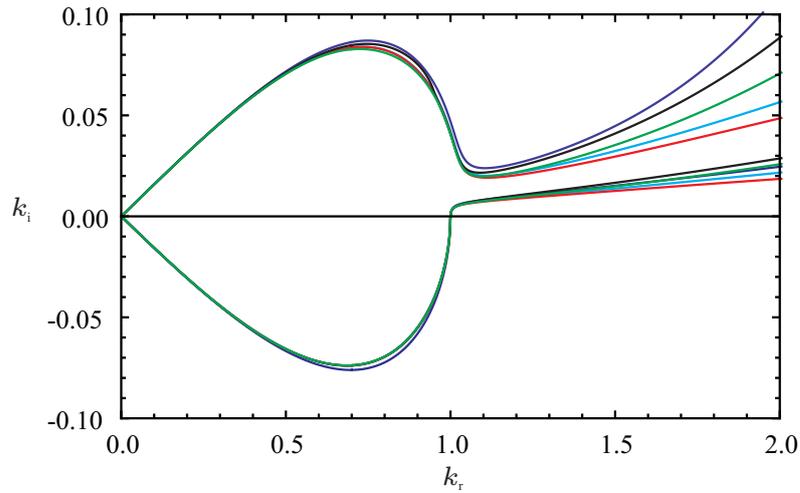


Figura 3.2: Evolución de los modos capilares en el plano complejo k , cuando se varía la frecuencia $0 < k_{\text{temp}} < 10$ y se fija $C = 0.03$ y $\beta = 4.47$ para los modelos de Lee (azul), Cosserat (azul claro), promediado (rojo), parabólico (negro) y 3D (verde).

que en la estable, las diferencias aumentan. Estas diferencias se deben a que la región $k_r > 1$ se aleja de la hipótesis de longitud de onda larga en la que se basan estos modelos. A pesar de las diferencias que surgen respecto al caso tridimensional, las características de los modos capilares vistas en el capítulo 2 se mantienen aquí: el modo capilar dominante es el único que muestra un carácter inestable en $0 < k_{\text{temp}} < 1$, mientras que el modo capilar subdominante siempre es estable.

El primer modo inercial, tanto aguas arriba como aguas abajo, es capturado por los modelos de segundo orden. En vista de que el modelo de Lee no incluía el término de inercia radial, parece lógico pensar que este modelo no encuentre este tipo de modos. Al igual que el caso 3D, estos modos se encuentran cerca del eje y con un factor de amortiguamiento cercano a los ceros de $I_0(k)$.

Como se vio en la sección 2, una de las principales características de los modos hidrodinámicos es su perfil de velocidades recirculatorio. Los modelos de velocidad media tienen dificultad en reproducir este tipo de modos, ya que por construcción, presentan un perfil de velocidades plano. Es sólo el modelo parabólico, con una dependencia radial de la velocidad menos simplista, el que captura el primer modo hidrodinámico en las regiones $z > 0$ y $z < 0$.

A la vista de la figura 3.1 puede surgir la cuestión de por qué algunos modelos incluyen los modos capilares aguas arriba. La posición en el plano complejo de estos modos verifica que $k_r \gg 1$, por lo que se está lejos de

la condición de longitud de onda larga. Por otro lado, si se compara la posición de estos modos con los calculados en el caso 3D, vemos que hay diferencias de más de un orden de magnitud en el valor de k_i . Por tanto, lo que recogen los modelos unidimensionales son unos modos que están en el mismo cuadrante que los modos capilares aguas arriba en el caso 3D, y que, como se verá más adelante, ejercen el mismo papel de manera cualitativa.

3.4. Inestabilidad absoluta

Ya se ha visto el concepto de inestabilidad absoluta como la coalescencia de dos modos que provienen de semiespacios diferentes. Es de esperar pues que, si los modelos unidimensionales reproducen estos dos modos, el capilar dominante y el capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo, predigan también esta inestabilidad. En principio, sólo los modelos de Lee y parabólico recogerían la inestabilidad. En cambio, se verá que también el de Cosserat y el promediado la reproducen. Para ello, estudiaremos el comportamiento de los modos con la velocidad del chorro.

En la figura 3.3 se ve que algunos modos cambian su comportamiento cuando la velocidad tiende a la velocidad crítica:

- (i) En el modelo de Lee, los modos no cambian de naturaleza con la velocidad del chorro.
- (ii) En el modelo de Cosserat el modo inercial de aguas arriba se comporta como inercial para velocidad alta mientras que para velocidad cercana a la crítica se comporta como el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo, dando así lugar a la coalescencia. El inercial de aguas abajo, se transforma en hidrodinámico para velocidades cercanas a la velocidad crítica.
- (iii) Los modos inerciales del modelo promediado se comportan igual que los del modelo de Cosserat.
- (iv) En el modelo parabólico, al igual que ocurría en el de Lee, los modos conservan su naturaleza.

De todo esto se deduce que el carácter de un modo no viene dado por el nombre que le asignemos fijados unos valores de los parámetros, sino que es su posición y origen en el plano complejo lo que marcará su carácter. Este aparente cambio de naturaleza de los modos se debe a que los modelos unidimensionales sólo funcionan bien para longitudes de onda larga. Para velocidades altas, algunos de los modos no están bien reproducidos, como ya se vio que pasaba con los modos capilares aguas arriba. Cuando la velocidad se va acercando a la velocidad crítica, estos modos vuelven a la región $k_r < 1$, por lo que vuelven a ser capturados y se comportan

como se predijo en el caso 3D.

Una vez visto que estos modelos capturan la inestabilidad, se verá el aspecto cuantitativo reproduciendo la curva de Leib & Goldstein (1986b) de velocidad crítica frente a viscosidad. En la figura 3.4 se muestra la desviación relativa de la velocidad crítica en función de la viscosidad. Para números de Ohnesorge pequeños, el modelo de Lee es el que presenta peores resultados, ya que toma el valor $\beta_c = 2$ para $C = 0$, que se aleja bastante del valor dado por Leib y Goldstein $\beta_c = 1.733$. En concreto, las desviaciones relativas respecto del modelo 3D para viscosidad nula son: Lee, 13.07 %, Cosserat, 0.86 %, promediado, 0.79 %, parabólico, 1.70 %. En cambio, para número de Ohnesorge alto, o lo que es lo mismo, para viscosidad alta, todos los modelos funcionan mejor aunque los términos viscosos de las relaciones de dispersión sean diferentes. La solución crítica para viscosidad alta tiende a $k_c = 0$ y $\omega_c = 0$, solución que es reproducida por todos los modelos. Lo que ocurre es que para el caso muy viscoso, la longitud de onda de las gotas que se forman se hace más larga, y los modelos unidimensionales funcionan mejor, ya que están basados en la hipótesis de longitud de onda larga.

3.5. Resultados de la estimulación

En esta sección se pretende comprobar la bondad de los resultados obtenidos del análisis lineal de estos modelos. Para ello, se repetirán todos los cálculos hechos en el caso 3D y se compararán. Los resultados obtenidos se resumen en la tabla 3.1.

El formalismo de la función de Green descrito en las secciones anteriores nos da las herramientas necesarias para obtener la respuesta del chorro sometido a una estimulación superficial. Se resolverá el mismo problema que en el caso 3D: unos esfuerzos tangenciales y normales aplicados en $z = 0$. Lo que se pretende estudiar es la transferencia de la estimulación a la deformación y velocidad del chorro. Para ello compararemos el módulo de la deformación como función de la coordenada axial para una estimulación normal y tangencial (figura 3.6).

Bajo las mismas condiciones que en el caso 3D ($k_{\text{temp}} = 0.7$, $\beta = 4.47$ y $C = 0.03$) se obtienen resultados similares: (i) en las cercanías de $z = 0$ la respuesta no es trivial tanto para la estimulación normal como para la tangencial. (ii) Para $z > 0$, la amplitud crece exponencialmente como resultado de la evolución del modo capilar dominante. (iii) Los esfuerzos axiales son más eficientes que los radiales en términos de la deformación obtenida.

No cabe esperar que el cálculo de la función de Green dé resultados fiables en las cercanías de $z = 0$, puesto que como hemos visto, no todos

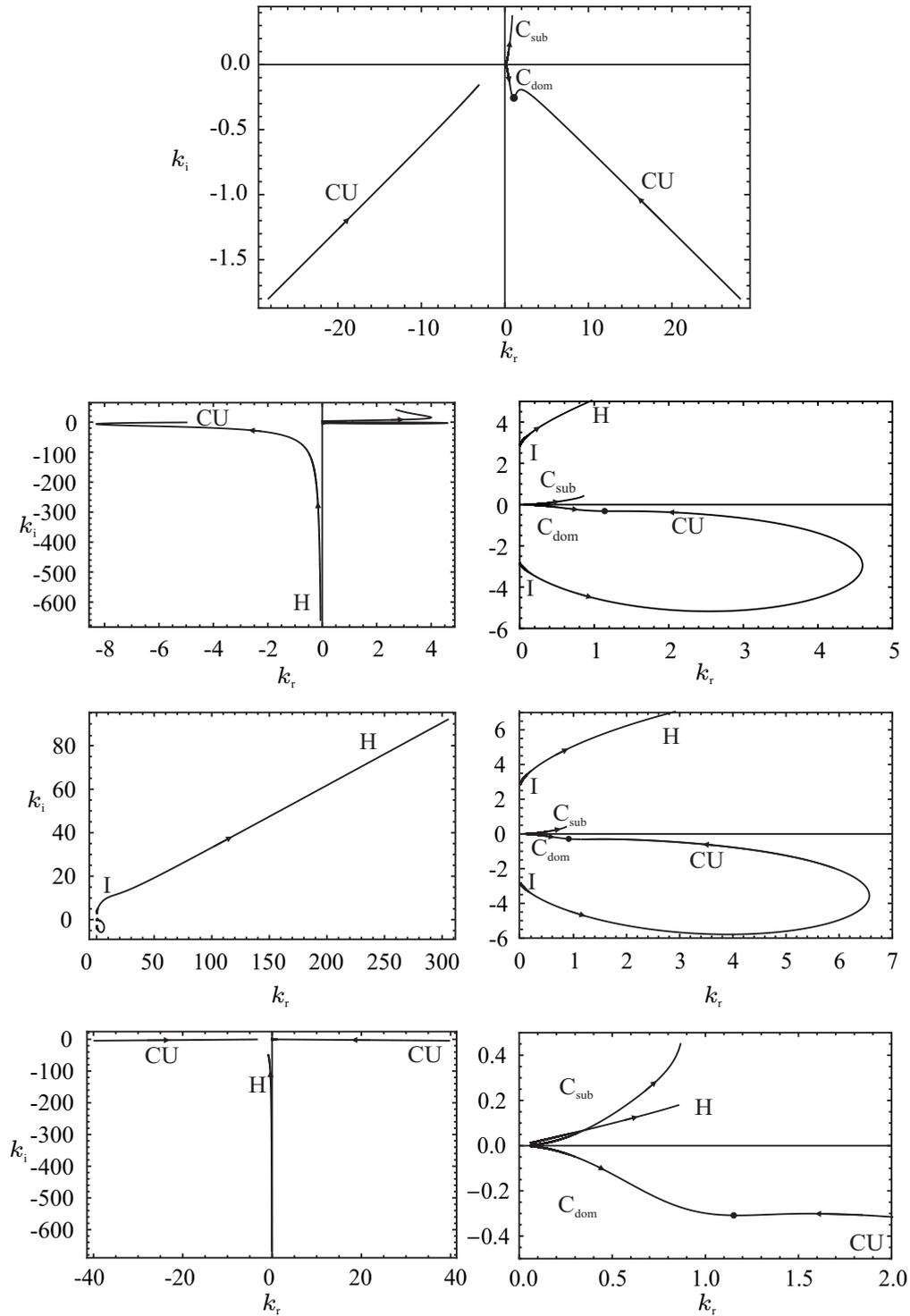


Figura 3.3: Evolución de los modos en el plano complejo k , cuando se varía la velocidad $\beta_c < \beta < 20$ ($\beta = 20 \rightarrow \beta_c$) y se fijan $C = 0.03$ y la frecuencia crítica de cada modelo: (a) Lee ($\omega_c = 1.4028$), (b) Cosserat ($\omega_c = 1.2386$), (c) promediado ($\omega_c = 1.2479$), (d) parabólico ($\omega_c = 1.2454$).

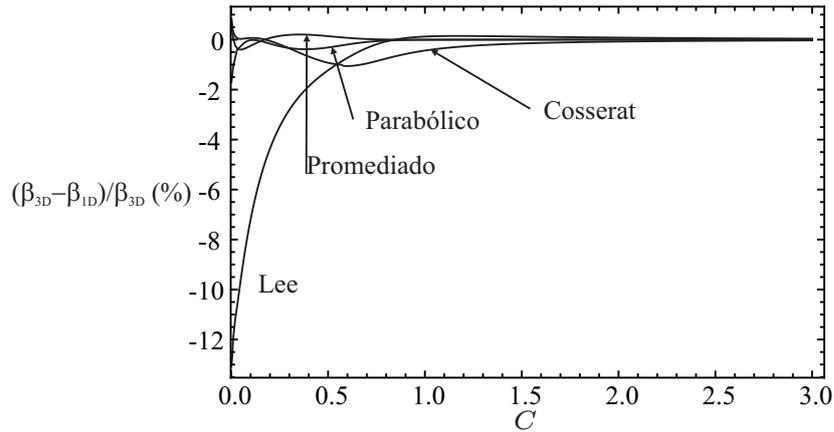


Figura 3.4: Desviación relativa de la velocidad crítica respecto al caso 3D frente a la viscosidad, $(\delta\beta_c = (\beta_{3D} - \beta_{1D})/\beta_{3D})$.

los polos que surgen de los modelos unidimensionales se ajustan a la localización exacta dada por el modelo tridimensional. Sólo es previsible que el comportamiento asintótico aguas abajo sea descrito correctamente puesto que depende exclusivamente del modo capilar dominante. Esto es así excepto para el modelo de Lee, que converge más lentamente.

La divergencia entre soluciones es menor para la deformación debida a un esfuerzo normal. Esto es así presumiblemente porque los modelos de velocidad media presentan un perfil de velocidad plano y con esta configuración resulta más sencillo reproducir los efectos que produce un esfuerzo normal. Según el tratamiento aproximado descrito en el capítulo 1, los esfuerzos normales se sufren en toda la sección mientras que los tangenciales actúan de manera no uniforme sobre el perfil de velocidades.

Si comparamos el módulo de la deformación, llama la atención que para los modelos de Lee y parabólico, la amplitud de la deformación en la región $z < 0$ presenta unas ondulaciones que tienen una longitud típica de amortiguación mayor que la que aparece en el caso 3D. Esta diferencia se debe a que los autovalores de modos capilares aguas arriba, como ya se ha comentado anteriormente, no están bien descritos por los modelos unidimensionales de forma correcta en cierto rango de velocidades y frecuencias. En el caso de los modelos unidimensionales, los modos capilares aguas arriba presentan un k_i un orden de magnitud menor que el tridimensional. Estas ondas capilares estacionarias que aparecen aguas arriba sólo aparecen en estos dos modelos, ya que son los modelos de Lee y parabólico los únicos que reproducen los dos modos capilares aguas arriba. Para los modelos promediado y de Cosserat, en esta región sólo se computan un modo inercial y un modo inercial y uno capilar aguas arriba (el que se propaga aguas arriba), respectivamente. Para los dos casos, lo

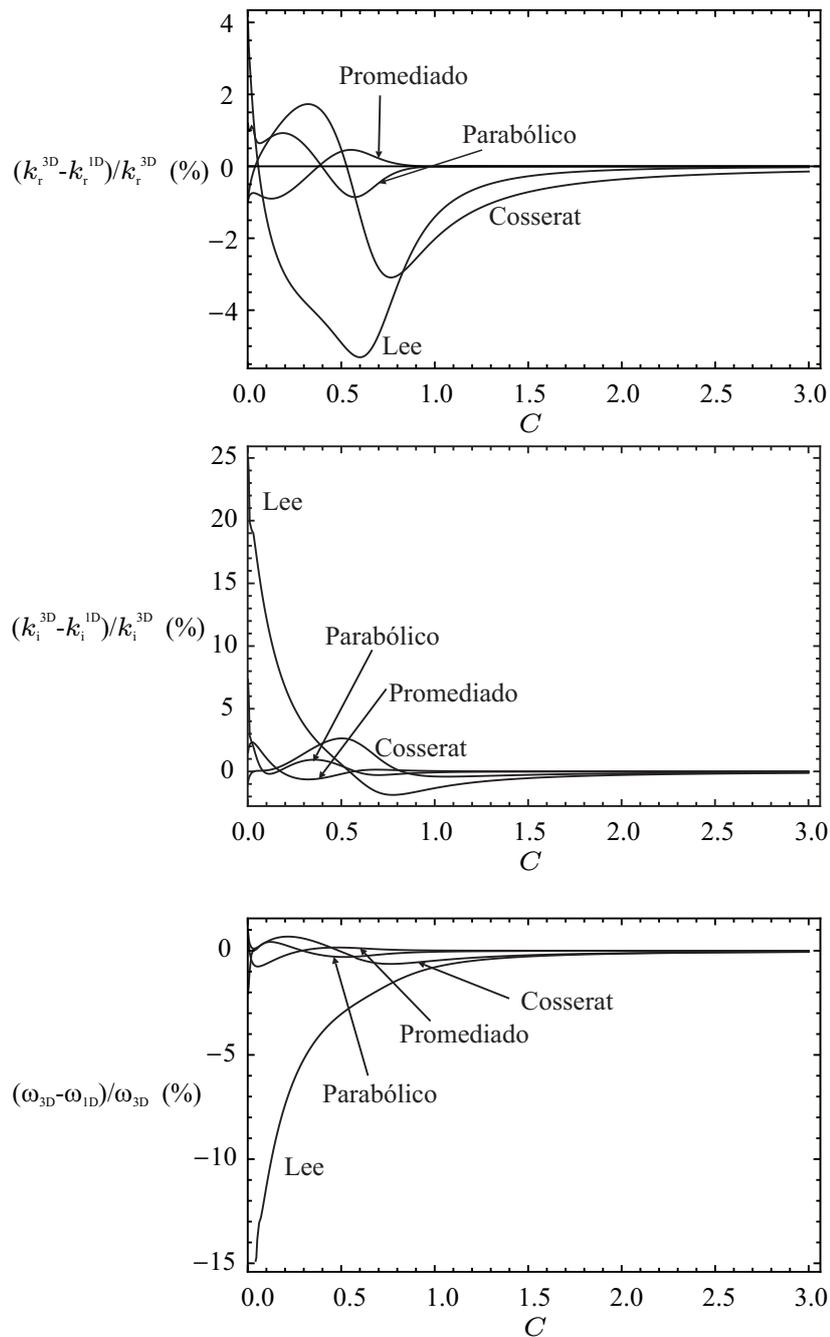


Figura 3.5: Desviación relativa del número de onda y frecuencia crítica respecto al caso 3D como función del número de Ohnesorge.

que vamos a encontrar es una solución que decae exponencialmente más como un modo inercial que como un modo capilar aguas arriba.

Para terminar esta comparación, pasaremos a estudiar el módulo de

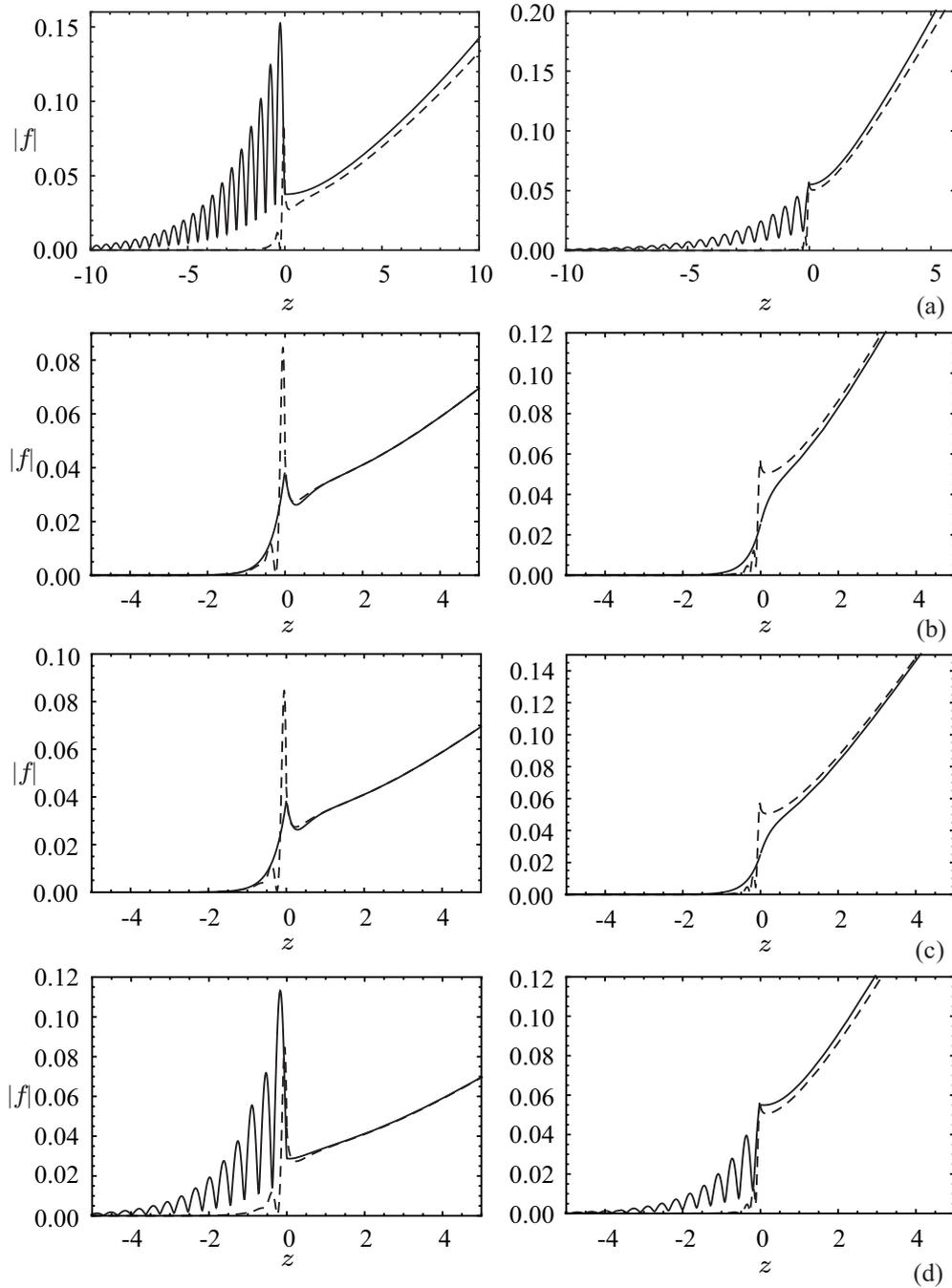


Figura 3.6: Módulo de la deformación $|f|$ como función de la coordenada axial z correspondiente a la función de Green para un esfuerzo normal (izquierda) y tangencial (derecha) para los modelos unidimensionales (línea sólida) y el caso 3D (línea discontinua). (a) Lee, (b) Cosserat, (c) promediado, (d) parabólico. Los parámetros usados son $C=0.03$, $\beta=4.47$, $k_{temp}=0.7$.

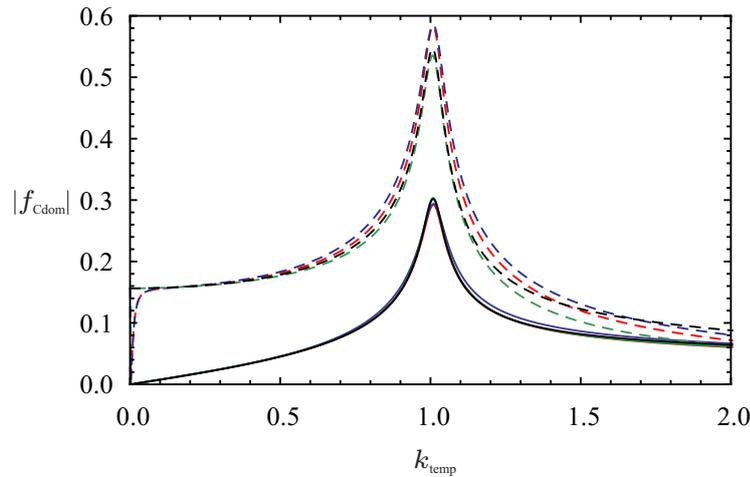


Figura 3.7: Módulo de la deformación debida al modo capilar dominante debido a un esfuerzo normal (línea continua) y a un esfuerzo tangencial (línea discontinua) para los modelos de Lee (azul), promediado (rojo), parabólico (negro) y tridimensional (verde). Los parámetros usados son $C = 0.1$, $\beta = 4.47$.

la amplitud del modo capilar dominante en función de la frecuencia. La respuesta presenta un pico en $k_{\text{temp}} = 1$, y su amplitud decae con la viscosidad. La posición de este pico viene determinada por la mínima distancia entre los dos polos capilares. Todos los modelos unidimensionales que se han usado en este trabajo reproducen bien la posición de los modos capilares (en la región $k_{\text{temp}} < 1$), por lo que es lógico que estos modelos reproduzcan los resultados que se obtuvieron en el caso 3D. De forma general, se puede destacar, como ya se comentó anteriormente, que las diferencias son menores cuando la estimulación es radial, y también son mayores en la región de $k_{\text{temp}} > 1$, ya que es ahí donde deja de cumplirse la hipótesis de longitud de onda larga. En este caso, es fácil observar cómo es el modelo de Lee el que presenta peores resultados aunque capta toda la topología del comportamiento. El modelo parabólico el que presenta menor divergencia con el caso 3D.

	3D	Lee	Cosserat	Promediado	Parabólico
$z > 0$	2 cap Infinitos hid Infinitos iner	2 cap	2 cap 1 iner→1 hid	2 cap 1 iner→1 hid	2 cap 1 hid 1 iner
$z < 0$	2 CU Infinitos hid. Infinitos iner	2 CU	CU _{upward} 1 iner→ CU _{downward}	CU _{downward} 1 iner→ CU _{downward}	2 CU 1 hid 1 iner
Inest. abs. ($C = 0.03, \beta = 1$) (k, ω)	0.927 + 0.233i 0.799 - 0.211i	0.912 + 0.219i 0.799 - 0.244i	0.922 + 0.246i 0.793 - 0.218i	0.920 + 0.248i 0.792 - 0.218i	0.929 + 0.244i 0.803 - 0.222i
$\beta_c (C = 3)$	0.481	0.481	0.482	0.481	0.481
$\beta_c (C = 0.001)$	1.733	1.959	1.718	1.719	1.763
Máx(f_{Cdom}^N) ($C = 0.1, \beta = 4.47$)	0.303	0.294	0.287	0.293	0.302
Máx(f_{Cdom}^T) ($C = 0.1, \beta = 4.47$)	0.536	0.585	0.571	0.583	0.546

Tabla 3.1: Resumen de las principales características de los modelos y su comparación con el caso 3D (CU_{downward} indica el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo, CU_{upward} indica el modo capilar aguas arriba que se propaga aguas arriba).

Capítulo 4

Aplicación de la estimulación EHD a chorros capilares

4.1. Introducción

En los capítulos anteriores se ha tratado con el problema fluido-mecánico. En éste se trabajará sobre el problema eléctrico, diseñando un dispositivo de estimulación. El diseño propuesto para el dispositivo consta de tres placas metálicas paralelas con un medio dieléctrico entre ellas. Este dispositivo tipo sándwich presenta un orificio por el se hace pasar el chorro capilar (figura 2.1). Las placas exteriores están conectadas a tierra para apantallar los efectos del campo mientras que la central es el terminal activo. El objetivo de este capítulo será pues determinar los parámetros geométricos para que el dispositivo estimule el chorro de la forma más eficiente, así como estudiar la respuesta del chorro a esta estimulación.

4.2. Problema eléctrico

4.2.1. Ecuaciones eléctricas

El campo electromagnético está gobernado con carácter general por las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, en sistemas como el que nos interesa los efectos magnéticos pueden ser omitidos y el campo eléctrico verifica las ecuaciones de la cuasi-electrostática. La condición que se ha de cumplir es una comparación entre las energías magnética y eléctrica, en la forma (Castellanos, 1998)

$$\frac{1/2\mu H^2}{1/2\epsilon E^2} \ll 1 \quad (4.1)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio. El campo magnético estará producido por los aportes de las corrientes de conducción y convección. Si domina la corriente de conducción, como ocurre en este trabajo, la intensidad del campo magnético se puede estimar a partir de la ley de Ampère como $H \sim \sigma El$, siendo l una distancia característica del sistema y σ la conductividad del medio. Para soluciones salinas con conductividad $\sigma < 0.1$ S/m y longitudes inferiores a $l < 1$ mm, se tiene

$$\frac{\mu\sigma^2 l^2}{\epsilon} < 10^{-5}, \quad (4.2)$$

donde ϵ es la permitividad del medio.

Por tanto se está bajo las premisas que permiten usar las ecuaciones de Maxwell en el caso cuasi-electrostático: el campo es irrotacional,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0, \quad (4.3)$$

y cumplirá la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = q. \quad (4.4)$$

donde q es la densidad de carga volumétrica.

Por último, la ecuación de continuidad establece la conservación de la carga en volumen,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.5)$$

Para un electrolito con dos especies simétricas, la densidad de corriente vendrá dada por

$$\mathbf{J} = e(n_+ + n_-)\mu_e \mathbf{E} - eD\nabla(n_+ - n_-) + e(n_+ - n_-)\mathbf{v}, \quad (4.6)$$

donde e es el valor absoluto de la carga del electrón, μ_e es la movilidad, D es el coeficiente de difusión, \mathbf{v} es la velocidad, y n_+ y n_- son las densidades de iones positivos y negativos.

La ley de Gauss sugiere que las soluciones salinas son electroneutras a la escala del micrómetro (Saville, 1997). En efecto, la diferencia relativa en densidades iónicas está dada por el cociente

$$\Lambda = \frac{n_+ - n_-}{n_0} = \frac{\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E})}{en_0} \sim \frac{\epsilon E}{en_0 l}, \quad (4.7)$$

donde n_0 es la densidad iónica sin perturbar, $n_0 \simeq 10^{23}$ m⁻³, $E \sim 10^5$ V/m, $l \sim 10$ μ m, y $\Lambda \simeq 10^{-4}$, luego el líquido es electroneutro.

También es importante ver la importancia de los términos de difusión. Si se comparan con la convección

$$\frac{eD\nabla(n_+ - n_-)}{\epsilon(n_+ + n_-)\mu_e E} \sim \frac{D\epsilon E/l^2}{2en_0\mu_e E} = \left(\frac{\lambda_D}{l}\right)^2 = 10^{-4}. \quad (4.8)$$

usando que la $\lambda_D \sim 1 \mu\text{m}$ para el agua. Luego los términos de difusión pueden ser despreciados.

Definiendo $\sigma = 2en_0\mu_e$ se compara la corriente de conducción, $\sigma\mathbf{E}$ con la de convección $\rho\mathbf{v}$ en soluciones salinas:

$$\frac{|\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E})\mathbf{v}|}{|\sigma\mathbf{E}|} \sim \frac{\epsilon/v}{l/v} \quad (4.9)$$

La combinación de parámetros $\epsilon v/(l\sigma)$ es lo que se conoce como número de Reynolds eléctrico (Saville, 1997). Para valores pequeños de este número las ecuaciones eléctricas estarán desacopladas de las mecánicas. Consideraremos como ejemplos dos situaciones muy diferentes: para un líquido dieléctrico, (por ejemplo, el agua pura, con $\sigma = 10^{-6}$ S/m), el valor de número de Reynolds eléctrico es 10^2 , mientras que para un líquido conductor (agua corriente, $\sigma = 10^{-2}$ S/m), el valor que se obtiene es, 0.01. En este último caso se está en condiciones de despreciar el término de convección y podemos escribir

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad (4.10)$$

y junto con las ecuaciones (4.3)-(4.5) se llega a

$$\left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4.11)$$

A partir de las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.10) se puede comprobar que si inicialmente no hay carga en volumen, no se generará carga a no ser que haya inhomogeneidades en el medio, tales como gradientes de permitividad o conductividad:

$$\frac{Dq^f}{Dt} = \frac{\sigma}{\epsilon} q^f - \sigma\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\nabla\sigma}{\sigma} - \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon}\right) \quad (4.12)$$

donde D/Dt es la derivada sustancial. Si los dos gradientes son nulos la solución es

$$q^f = q^f(0)e^{-t\sigma/\epsilon}. \quad (4.13)$$

Al no haber carga en volumen ni gradientes de permitividad podemos admitir que no hay fuerzas eléctricas en volumen, \mathbf{f}_E (Panofsky & Phillips, 1977):

$$\mathbf{f}_E = q\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\epsilon + \nabla\left(\frac{1}{2}\epsilon\zeta E^2\right), \quad (4.14)$$

donde la fuerza coulombiana ($q\mathbf{E}$) es nula porque no hay carga en volumen, la fuerza dieléctrica ($-E^2/2\nabla\epsilon$) también lo es porque no hay inhomogeneidades en la permitividad del medio. En cuanto a la fuerza electrostrictiva, es conservativa y conviene tratarla como un término de presión, lo que permitirá demostrar que la dinámica del sistema no se ve afectada por el fenómeno de electrostricción (Castellanos & González, 1998).

Aunque las ecuaciones de volumen fluidomecánicas y eléctricas no están acopladas, el problema lo estará a través de las condiciones de contorno.

4.3. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que se aplicarán en la superficie del chorro son (Castellanos & González, 1998):

- La presencia de carga eléctrica en la superficie del chorro provoca un salto en la componente normal del vector desplazamiento que se expresa de la forma,

$$\mathbf{e}_n \cdot \|\epsilon\mathbf{E}\| = \epsilon_0 E_r^{\text{out}} - \epsilon E_r^{\text{in}} = q_s. \quad (4.15)$$

donde la notación *in* y *out* indica las componentes del campo eléctrico dentro y fuera del chorro, respectivamente y q_s es la densidad superficial de carga libre.

- La continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico al pasar de un lado a otro de una superficie se escribe,

$$\mathbf{e}_n \wedge \|\mathbf{E}\| = 0. \quad (4.16)$$

- Por último, la carga en la superficie debe conservarse

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + V\mathbf{e}_n \cdot \nabla q_s + V(\nabla \cdot \mathbf{e}_n)q_s + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s + \mathbf{e}_n \cdot \|\mathbf{J}\| - V\|q\| = 0, \quad (4.17)$$

donde V es la velocidad normal a la superficie, \mathbf{K}_s , es la densidad superficial de corriente y ∇_s se entiende como el operador nabla menos su proyección en la dirección normal a la superficie ($\nabla_s = \nabla - \mathbf{e}_n(\mathbf{e}_n \cdot \nabla)$). La densidad superficial de corriente presenta la expresión general para líquidos electroneutros (Saville, 1997),

$$\mathbf{K}_s = \sigma_s \mathbf{E}_s + q_s \mathbf{v}_s - D_s \nabla q_s, \quad (4.18)$$

siendo \mathbf{E}_s el campo eléctrico tangencial a la superficie, σ_s la conductividad superficial, \mathbf{v}_s la componente tangencial del campo de velocidades y D_s el coeficiente de difusión superficial. Se trabajará bajo las siguientes simplificaciones:

(i) Como la corriente de difusión en volumen se ha despreciado, es consecuente despreciar también la corriente de difusión en la superficie.

(ii) Se despreciará la corriente de conducción superficial. Aunque esta simplificación no siempre está justificada, es suficiente para describir los fenómenos electrohidrodinámicos (Saville, 1997; Zeng & Korsmeyer, 2004). Burcham & Saville (2002) usaron el término de conductividad superficial como un parámetro ajustable para describir ciertos comportamientos experimentales de puentes líquidos dieléctricos sujetos a campos eléctricos. En chorros con líquidos de mayor conductividad, que son los candidatos a admitir una estimulación EHD eficaz, estos efectos no deben manifestarse.

Con todas estas consideraciones, la ecuación de conservación de la carga en la interfaz queda

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + V \mathbf{e}_n \cdot \nabla q_s + V(\nabla \cdot \mathbf{e}_n)q_s + \nabla_s \cdot (q_s \mathbf{v}_s) + \mathbf{e}_n \cdot \|\mathbf{J}\| = 0, \quad (4.19)$$

aunque posteriormente quedará aún más simplificada.

Pasamos a continuación a analizar las condiciones de contorno fluidomecánicas. El tensor eléctrico asociado a la estimulación presenta la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{T}_E = \chi \epsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_r^2 - E_z^2) & 0 & E_r E_z \\ 0 & -\frac{1}{2}(E_r^2 - E_z^2) & 0 \\ E_r E_z & 0 & -\frac{1}{2}(E_r^2 - E_z^2) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

donde χ es el número de Bond eléctrico, y viene dado por el cociente entre la presión eléctrica y la presión capilar, $\epsilon E^2 a / \gamma$. Las componentes radial y axial del tensor de esfuerzos eléctrico son:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\chi \epsilon}{K_n} (E_r^2 - E_z^2 - 2f_z E_r E_z), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\chi \epsilon}{K_n} [2E_r E_z + 2f_z (E_r^2 - E_z^2)], \quad (4.22)$$

donde $K_n = \sqrt{1 + F_z^2}$, como se vio en el capítulo 2.

La condición de contorno que acopla el problema fluidomecánico y el eléctrico es la condición de equilibrio de esfuerzos en la interfaz. Para linealizar esta condición de contorno se habrá de tener en cuenta que surgen varios tipos de términos:

- términos del desarrollo en serie de la interfaz ($F \simeq 1 + f$), quedando una ecuación de primer orden en la deformación f ;

- términos provenientes del desarrollo en serie del campo eléctrico ($\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}$), donde el orden cero dará cuenta del campo evaluado en la superficie del chorro, mientras que el de primer orden será la perturbación del campo debido al cambio en la geometría del chorro.
- Términos provenientes del orden cero del campo comentado en el ítem anterior, \mathbf{E}_0 , que habrá que desarrollarse también y dará un término de orden cero evaluado en la superficie del chorro sin perturbar más otro que será la perturbación del campo evaluada en la superficie perturbada del chorro ($r = 1 + f$).

Como la estimulación EHD es débil, sólo se mantendrán los términos de orden cero del desarrollo del campo. Esta hipótesis es la que desacopla el problema fluidomecánico del eléctrico. Las componentes normal y tangencial del balance de esfuerzos linealizadas quedan entonces como

$$p - f - f_{zz} - 2Cu_r + \frac{\chi}{2} \|\epsilon (E_r^2 - E_z^2)\| = 0, \quad (4.23)$$

$$-C(w_r + u_z) + \frac{\chi}{2} \|\epsilon (2E_r E_z)\| = 0. \quad (4.24)$$

Bajo las mismas aproximaciones la conservación de la carga en la superficie linealizada, ecuación (4.19), queda

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial q_s}{\partial z} + \mathbf{e}_r \cdot \|\sigma \mathbf{E}\| = 0. \quad (4.25)$$

Como conclusión, las expresiones de los esfuerzos eléctricos aplicados a la superficie del chorro son

$$T_n = \frac{1}{2} \chi \|\epsilon (E_r^2 - E_z^2)\|, \quad (4.26)$$

$$T_t = \chi \|\epsilon E_r\| E_z = \chi q_s E_z, \quad (4.27)$$

que son las magnitudes que definen la estimulación EHD en el formalismo desarrollado en los dos temas anteriores.

Para el cálculo de los esfuerzos eléctricos se utilizará el método de los elementos finitos a través del software comercial COMSOL Multiphysics.

4.4. Resolución del problema eléctrico

En esta sección se va a describir la resolución del problema eléctrico usando el software comercial COMSOL Multiphysics. Como se ha visto en la sección anterior, se resolverá el problema eléctrico bajo la hipótesis

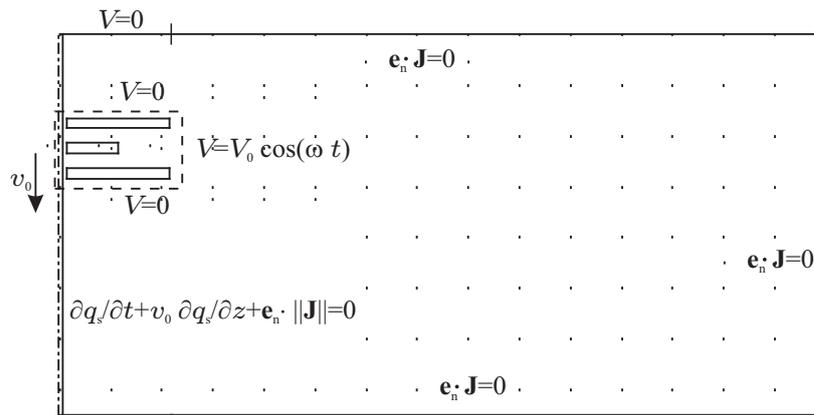


Figura 4.1: Esquema del problema a resolver en COMSOL incluyendo las condiciones de contorno.

de que el chorro se mantiene cilíndrico. En la figura 4.1 se presenta un esquema de la geometría usada, así como, las condiciones impuestas en cada contorno.

Se cerrará el dominio con paredes muy alejadas de los electrodos. Es de esperar que los resultados no dependan apreciablemente de las condiciones elegidas para estos contornos.

Las condiciones de contorno usadas son: en los electrodos de guarda, y en la salida del chorro, conexión a tierra; en el eje del chorro, simetría axial; en las paredes lejanas y al final del chorro, aislamiento eléctrico; en el electrodo central, un potencial armónico; y por último, en la interfaz, se ha impuesto conservación de la carga en la superficie. Aunque la condición de flujo normal cero al final del chorro no está del todo justificada, ya que supone que cuando el chorro se rompa en gotas, éstas nunca estarán cargadas, el contorno estará suficientemente alejado para que esta condición no afecte a la solución en la región de estimulación. En un análisis global, donde se estudie la rotura del chorro, esta condición habrá de escogerse de forma cuidadosa (Atten & Oliveri, 1992).

Describimos a continuación brevemente el uso del software de elementos finitos en este problema. Los paquetes usados para la resolución han sido:

- El paquete *AC/DC Module 3.5* extiende el entorno de COMSOL Multiphysics a configuraciones propias de problemas de áreas como campos electrostáticos, magnetostáticos, así como campos con dependencia temporal armónica. La elección de este paquete se debe a que las condiciones de contorno están definidas sobre el vector densidad de corriente eléctrica, y por tanto son las que mejor se adecúan a la implementación de la conservación de la densidad de

carga superficial en la superficie del chorro.

- Para incluir el efecto de la advección fue necesario definir una variable auxiliar en la superficie del chorro, la densidad superficial de carga. Esto requirió el uso adicional del paquete *Weak form, boundary*.
- El dominio del problema se malló usando elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos, que son los que recomienda el software para este tipo de problemas. Por último, para la resolución del problema se utilizó el resolutor lineal UMFPACK (método multifrontal para matrices dispersas y no necesariamente simétricas).

De la simulación numérica se obtendrá el campo eléctrico en el dominio del problema. A partir de las expresiones (4.26) y (4.27) se obtendrán los esfuerzos eléctricos que actúan sobre la superficie del chorro, que son las funciones requeridas para la obtención de la solución.

4.5. Tiempos típicos del problema eléctrico

Para elegir los parámetros del sistema es conveniente tener en cuenta cuáles son las posibles escalas temporales del problema a resolver:

- El período de la estimulación, $T = 1/f$.
- El tiempo de paso de una partícula fluida por la zona de estimulación, $t_v = 2d/v_0$.
- El tiempo de relajación de la carga en volumen, $t_r = \epsilon/\sigma$.
- El tiempo de carga del chorro en su superficie, entendido como un circuito RC (Atten & Oliveri, 1992), $\tau = RC$.

El tiempo de vuelo dará cuenta de la importancia de la velocidad del chorro. El tiempo de relajación de la carga es el tiempo que tarda en difundirse la carga en volumen. Como en este caso no hay carga en volumen, porque se está bajo la hipótesis de electroneutralidad, este tiempo no entrará en juego en el problema. Sin embargo, en la superficie sí se acumulará carga, por lo que habrá un tiempo típico de difusión de la carga en la superficie. Para obtener este tiempo se hará una primera aproximación sencilla al problema. Atten & Oliveri (1992) proponen modelar la interacción chorro-electrodo a partir de una resistencia y un condensador. La resistencia daría cuenta de las pérdidas asociadas a que el chorro no es un

conductor perfecto ($R = l/(\sigma\pi a^2)$), mientras que el condensador daría cuenta del efecto debido a la diferencia de potencial entre el chorro y el electrodo (lo modela como un condensador cilíndrico, $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$, siendo b el radio del electrodo). Así llegan a que el tiempo de carga del circuito RC, τ , será el tiempo de relajación de la carga superficial. Adimensionalizando la ecuación de conservación de la carga superficial con este tiempo típico surgen dos números adimensionales,

$$\bar{\omega} = \omega\tau, \quad (4.28)$$

$$\bar{v} = \frac{v_0\tau}{d}. \quad (4.29)$$

El primero es una frecuencia adimensional y marcará el tránsito entre el comportamiento dieléctrico y el conductor. El segundo es una velocidad adimensional, que dará idea de cuándo los efectos advectivos son observables.

Para unos valores típicos $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $d = 1$ mm, $f = 1$ kHz y $v_0 = 10$ m/s estos números adimensionales toman los valores, $\bar{\omega} = 10^{-4}$ y $\bar{v} = 10^{-3}$.

A la hora de estudiar la respuesta del chorro ante una estimulación eléctrica, se encuentran tres regímenes de comportamiento en función del parámetro $\bar{\omega}$:

- Régimen de comportamiento de buen conductor. Se da cuando el chorro tiene una conductividad alta o está estimulado a baja frecuencia ($\bar{\omega} \ll 1$). En este caso, de manera aproximada, el campo en el interior del chorro es nulo y en el exterior es perpendicular a la superficie, lo que hace que los esfuerzos también sean normales.
- Régimen de comportamiento dieléctrico. Se da cuando el chorro presenta una conductividad baja o está estimulado a alta frecuencia ($\bar{\omega} \gg 1$). En este caso el chorro sentirá una perturbación debida a los efectos de borde de los condensadores que forman los electrodos. Los esfuerzos eléctricos son virtualmente normales a la superficie del chorro.
- Régimen intermedio entre los anteriores ($\bar{\omega} \sim 1$). Se tendrá una conductividad no muy alta, o una frecuencia no muy alta. El campo eléctrico presentará tanto componente normal como tangencial en la superficie del chorro.

En el problema fluido ya se ha visto que surge otra escala temporal, el tiempo capilar, t_c . En las secciones 4.8 y 4.9 se usará el tiempo capilar para adimensionalizar la frecuencia, tal y como se ha hecho en los capítulos

anteriores, mientras que en la próxima sección, donde se hará un estudio paramétrico de los esfuerzos eléctricos, se usará el tiempo τ para la adimensionalización.

4.6. Estimación de las magnitudes eléctricas

A partir de las ecuaciones y condiciones de contorno se puede estimar la amplitud de las diferentes componentes del campo eléctrico. Este tipo de estimación será de gran ayuda para tener una orientación sobre los resultados de la simulación numérica.

Para unas condiciones de frecuencia baja, y suponiendo que el líquido que se está usando es agua corriente ($\sigma = 10^{-2}$ S/m), tendrá comportamiento de buen conductor. En este caso se pueden estimar de forma sencilla la amplitud del campo en la superficie del chorro. La componente radial externa del campo se aproxima por el cociente entre la diferencia de potencial entre el chorro y el electrodo de estimulación, V_0 , y la distancia que los separa, h :

$$E_r^{\text{out}} \simeq \frac{V_0}{h}. \quad (4.30)$$

A partir de las condiciones de contorno se puede calcular una relación entre la componente radial externa y la componente axial del campo. Del salto de la componente normal del vector desplazamiento se obtiene una expresión para la densidad de carga superficial

$$\mathbf{e}_n \cdot \|\epsilon \mathbf{E}\| = \epsilon_0 E_r^{\text{out}} - \epsilon E_r^{\text{in}} = q_s \simeq \epsilon_0 E_r^{\text{out}}, \quad (4.31)$$

donde, al estar en el régimen de comportamiento conductor, el campo en el interior del chorro es prácticamente nulo. En ninguno de los otros regímenes se podría hacer esta aproximación.

De la ecuación de conservación de la carga en la superficie se consigue otra expresión para la densidad de carga superficial

$$\omega q_s \simeq \sigma E_r^{\text{in}}. \quad (4.32)$$

Combinando ambas expresiones se llega a la siguiente relación entre las componentes del campo

$$E_r^{\text{out}} \simeq \frac{\sigma a}{\omega d \epsilon_0} E_z. \quad (4.33)$$

Por último, a partir de la ley de Gauss para el volumen, se deriva una relación entre las componentes axial y radial interior del campo:

$$E_r^{\text{in}} = \frac{a}{d} E_z. \quad (4.34)$$

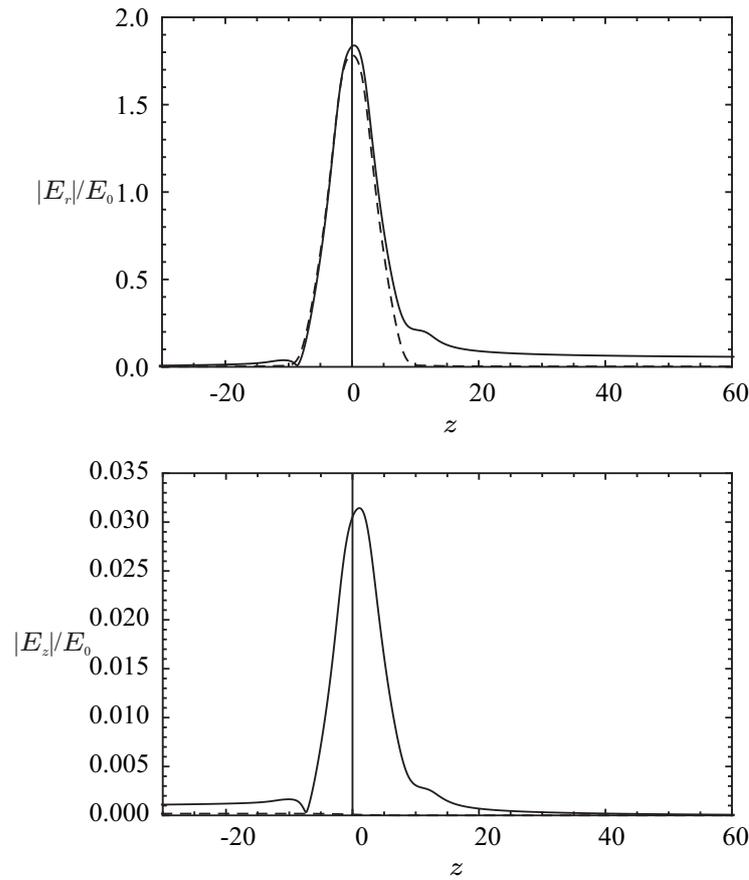


Figura 4.2: Módulo de las componentes del campo eléctrico como función de la coordenada axial fijados $E_0 = V_0/h = 5 \cdot 10^3$ V/m, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $f = 10^3$ Hz, $V_0 = 1$ V y $v_0 = 10$ m/s (línea discontinua) y $v_0 = 10^4$ m/s (línea continua).

Con (4.30), (4.33) y (4.34), se tiene una estimación de cada una de las componentes del campo eléctrico, que servirá de test a la hora de aceptar los resultados numéricos.

4.7. Estudio paramétrico de los esfuerzos eléctricos

En esta sección se hará un análisis de la amplitud y distribución de los esfuerzos eléctricos. Las variables que habrá que tener en cuenta serán la frecuencia de estimulación, ω , la conductividad, σ , la permitividad, ϵ y la velocidad del chorro, v_0 .

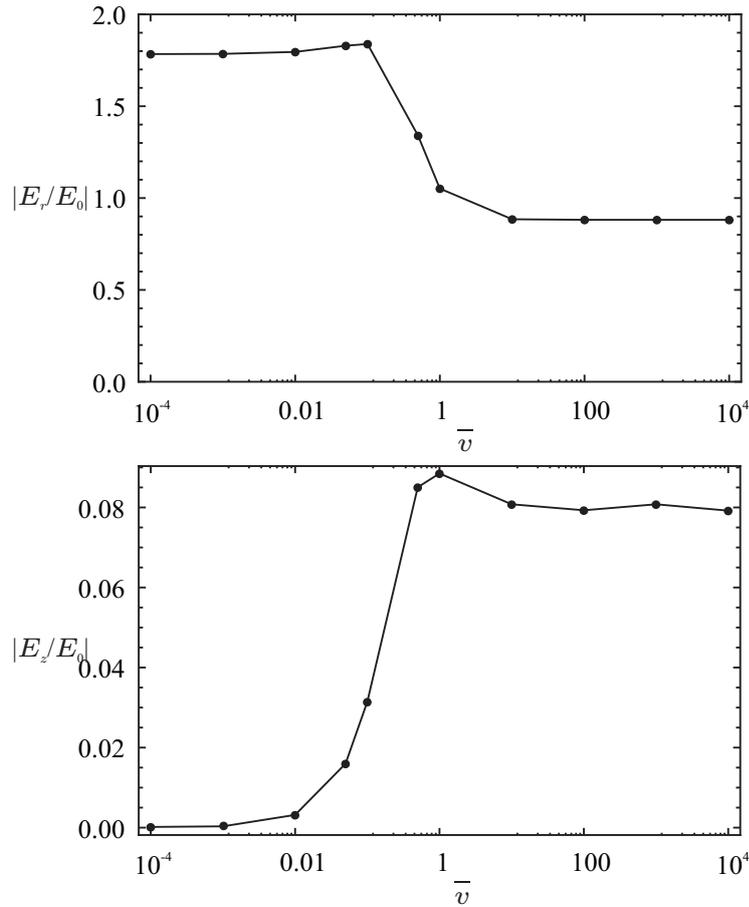


Figura 4.3: Módulo del máximo de las componentes del campo eléctrico como función de la velocidad adimensional fijados $E_0 = V_0/h = 5 \cdot 10^3$ V/m, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $V_0 = 1$ V y $f = 10^3$ Hz.

4.7.1. Efecto de la velocidad

Antes de ver cómo varían los esfuerzos eléctricos con los distintos parámetros, se confirmará que el efecto de la velocidad (figura 4.2) es despreciable para unas condiciones experimentales típicas (Atten & Oliveri, 1992). El efecto de la advección es extender el rango de acción del campo aguas abajo, formándose algo parecido a una cola de una longitud del orden $l \sim v_0\tau$. Como se vio en la sección 4.5, un valor típico de la velocidad adimensional es $\bar{v} = 10^{-3}$. Será pues necesario aumentar la velocidad al menos dos órdenes de magnitud para notar algún tipo de cambio en los valores del máximo de la amplitud de los campos (figura 4.3). Esos valores no son alcanzables en un experimento, luego se despreciará el efecto de la advección. No obstante, si el chorro tiene una conductividad baja este efecto puede no ser tan despreciable.

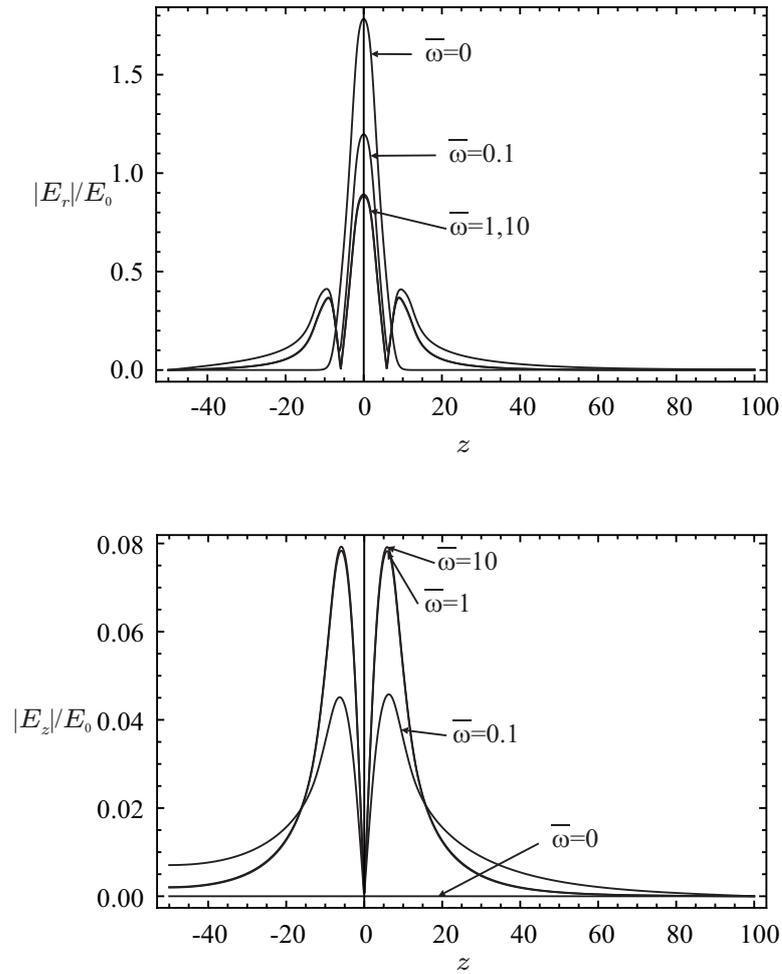


Figura 4.4: Módulo de las componentes del campo eléctrico como función de la coordenada axial fijados $E_0 = V_0/h = 5 \cdot 10^3$ V/m, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, y distintos valores de la frecuencia adimensional.

4.7.2. Efecto de la frecuencia

En la figura 4.4 se muestra la distribución axial de las componentes del campo para diferentes valores de la frecuencia adimensional despreciando los efectos de la advección. La componente radial presenta un máximo centrado en $z = 0$ y está confinada a la región de estimulación para frecuencia baja (figura 4.5). A medida que se aumenta la frecuencia, el campo se extiende a lo largo de la coordenada axial dejando de estar limitado a la región de estimulación. Este comportamiento se recoge en la figura 4.6. Teniendo en cuenta que las líneas de campo son perpendiculares a las equipotenciales dibujadas, vemos claramente que en esta última situación la influencia electrostática entre chorro y electrodos deja de ser

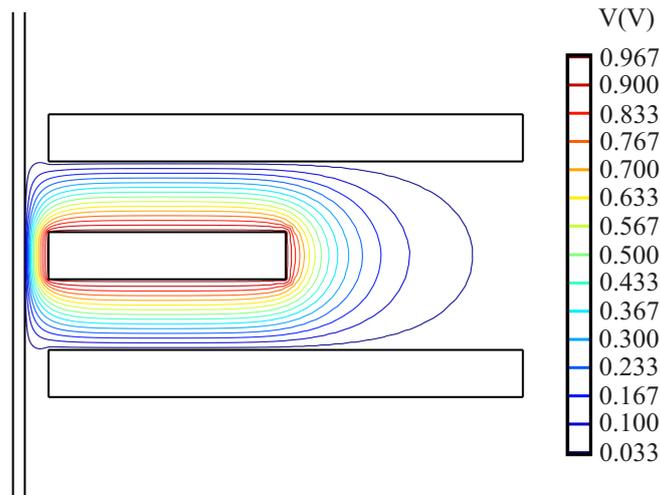


Figura 4.5: Líneas equipotenciales para una frecuencia $f = 10^3$ Hz ($\sigma = 10^{-2}$ S/m, $V_0 = 1$ V).

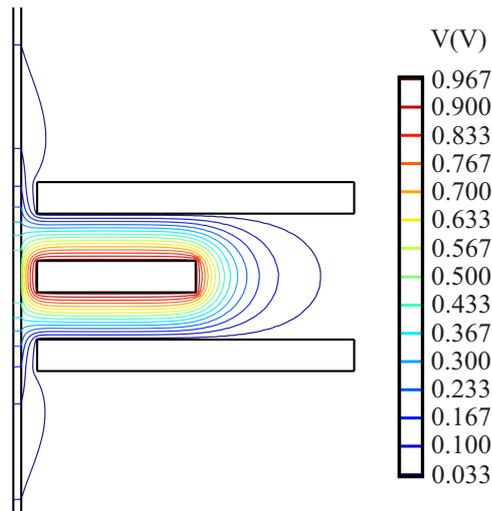


Figura 4.6: Líneas equipotenciales para una frecuencia $f = 10^8$ Hz ($\sigma = 10^{-2}$ S/m, $V_0 = 1$ V).

importante. Se empiezan a formar dos máximos secundarios centrados en los electrodos de guarda mientras que la amplitud del máximo principal decrece. Este decrecimiento se debe a la disminución de carga libre que se produce al ir aumentando la frecuencia.

Respecto a la componente axial, presenta dos máximos de igual amplitud, desplazados simétricamente de la posición $z = 0$. Si se representara la parte real en lugar del módulo, se vería cómo estos máximos presentan

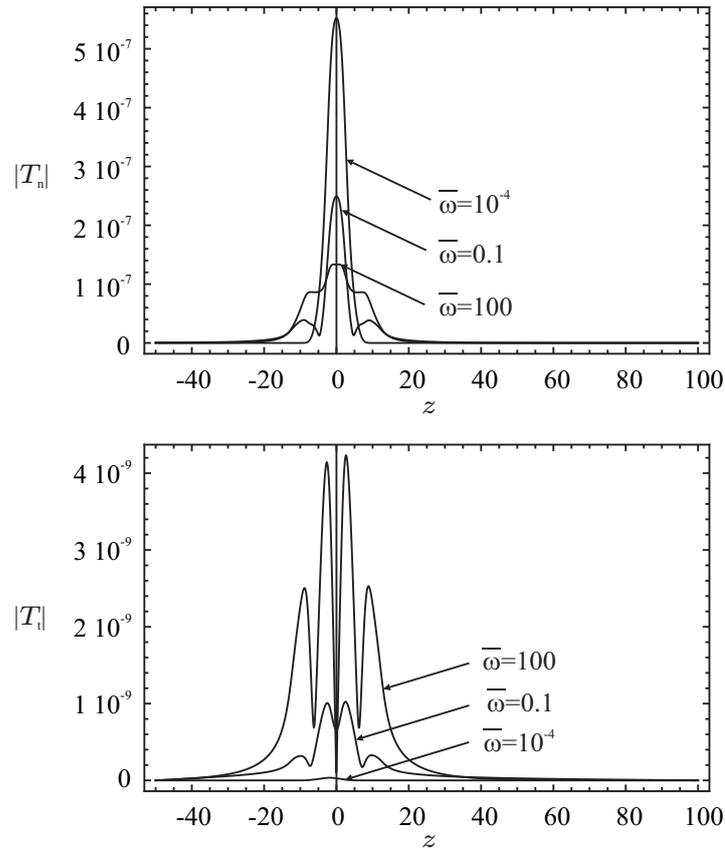


Figura 4.7: Módulo del máximo de las componentes del esfuerzo como función de la coordenada axial fijados $\sigma = 10^{-2}$ S/m, y distintos valores de la frecuencia adimensional.

amplitudes de distinto signo, ya que la componente axial del campo tiene sentido contrario para $z > 0$ y $z < 0$. La componente axial es prácticamente cero a frecuencias bajas, puesto que estamos en régimen de buen conductor. A medida que la frecuencia va aumentando, irá aumentando su amplitud hasta alcanzar asintóticamente un valor límite. En la figura 4.8 se presentan las componentes de los esfuerzos como función de la frecuencia adimensional. Para entender estas curvas es necesario tener presente la expresión que define a los esfuerzos, así como la dependencia axial de las componentes del campo: de (4.26) se deduce que el esfuerzo normal a la superficie va como el cuadrado de la componente radial del campo eléctrico. Así, todas las características que se observan en la figura 4.4a se reproducirán en la figura 4.7. La componente tangencial del esfuerzo eléctrico viene dada por la expresión (4.27), el producto de la densidad de carga superficial libre y la componente axial del campo eléctrico. Como la componente radial del campo es proporcional a la den-

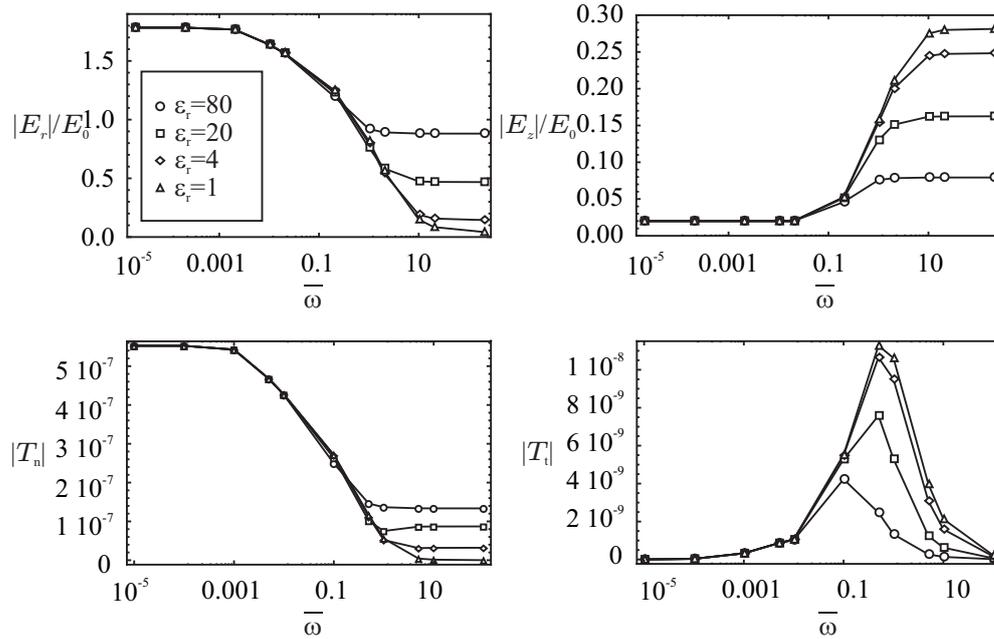


Figura 4.8: Módulo del valor máximo de las componentes normales del campo y del esfuerzo eléctrico como función de la frecuencia para varios valores de la permitividad del líquido. La conductividad está fijada, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $V_0 = 1$ V y $\bar{v} = 0$.

sidad de carga superficial, la figura 4.7 se entenderá como el producto de ésta por la componente tangencial del campo. Para frecuencias bajas, el campo es normal a la superficie, luego el esfuerzo tangencial tenderá a cero. A medida que aumenta la frecuencia, se aprecia la formación de cuatro picos. Aparecen dos en los electrodos de guarda, y otros dos, de mayor amplitud en $\pm d/2$. Para frecuencias altas, deja de haber carga libre, luego también tenderá a cero el esfuerzo tangencial.

La dependencia que presenta el esfuerzo normal es similar a la que tiene la componente radial del campo. Para frecuencias bajas, el esfuerzo está localizado en la zona de estimulación, y el máximo se alcanza en $z = 0$. A medida que aumenta la frecuencia, el esfuerzo empieza a extenderse fuera de la región de estimulación, formándose unos máximos secundarios a la altura de los electrodos de guarda, mientras que la amplitud del máximo disminuye.

4.7.3. Efecto de la permitividad del líquido

El siguiente parámetro objeto de estudio será la permitividad del líquido. En la figura 4.8 se representa el máximo de la componente nor-

mal de los esfuerzos en función de la frecuencia para distintos valores de la permitividad del líquido. Con esto se pretende ver la importancia de los efectos capacitivos dentro del chorro. Los efectos del cambio de permitividad sólo afectan a la zona de frecuencia alta. A frecuencia alta y permitividad baja, los esfuerzos normales tienden a cero. El efecto de la permitividad puede entenderse en términos de la carga de polarización: a mayor permitividad, mayor carga de polarización, que actuará como fuente del campo junto con la carga libre. Luego con mayor permitividad los efectos dieléctricos a frecuencia alta se suavizan.

4.7.4. Modelo circuital

El objetivo de diseñar un circuito para modelizar el problema eléctrico es doble: por un lado, sirve de ayuda para entender los resultados de la simulación numérica y por otro, para obtener expresiones simples de las componentes del campo eléctrico. Aunque para una descripción fina del problema se habrían de usar elementos distribuidos, lo que se pretende es utilizar un modelo simple que permita comprender la dependencia del campo eléctrico con los distintos parámetros que entran en juego.

Para la construcción del modelo, se tendrá en cuenta la interacción del chorro y los electrodos mediante la introducción de los condensadores apropiados, así como también en la interacción entre electrodos. Para obtener las capacidades del sistema se podría haber hecho uso de la matriz de capacidades (suponiendo para este cálculo que el chorro es un conductor perfecto). Eso lleva a un circuito equivalente con 15 condensadores que darían cuenta de todas las interacciones entre los conductores. Aunque en un análisis riguroso habría que tenerlas todas en cuenta, sólo se mantendrán las interacciones entre las superficies conductoras próximas, lo cual es una buena aproximación. El carácter resistivo del chorro se modelará como un conjunto de tres resistencias en serie (Atten & Oliveri, 1992), una por cada región que recibe influencia eléctrica principal de cada uno de los electrodos. Además, para incluir estas influencias eléctricas, a cada una de estas resistencias se les colocará un condensador en paralelo. Se identifican los elementos circuitales de la figura 4.9 como C_1 la capacidad que forman el electrodo de estimulación con los electrodos de guarda, C_2 la que forman el chorro y el electrodo de estimulación y C_3 y C_4 la que forman el chorro y cada uno de los electrodos de guarda. Las resistencias y condensadores (R_1, C_5) , (R_2, C_6) y (R_3, C_7) surgen de dividir el chorro en tres partes, de la salida al primer electrodo de guarda, la zona de estimulación entre los electrodos y por último, desde el segundo electrodo de guarda hasta el final del chorro. Se considerarán las capacidades C_3 y C_4 iguales a C_2 , despreciándose así los efectos capacitivos derivados del resto del chorro en influencia con los electrodos

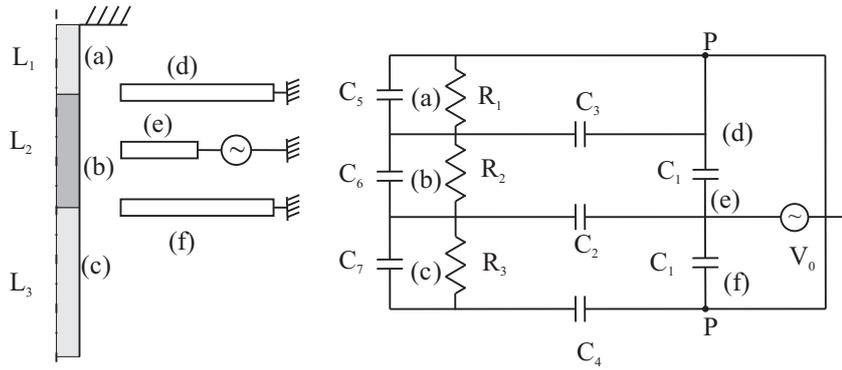


Figura 4.9: Modelo circuital incluyendo los efectos capacitivos del chorro.

de guarda.

Para terminar de definir el modelo habrá que estimar los valores de los distintos elementos circuitales. Las resistencias se obtendrán como las de un hilo de sección circular:

$$R_1 = \frac{L_1}{\sigma \pi a^2}; \quad R_2 = \frac{L_2}{\sigma \pi a^2}; \quad R_3 = \frac{L_3}{\sigma \pi a^2}, \quad (4.35)$$

siendo L_1 la distancia entre la salida y el primer electrodo de guarda, L_2 la distancia entre los dos electrodos de guarda, y L_3 la distancia entre el segundo electrodo de guarda y el final del chorro.

La capacidad de los condensadores formados por el electrodo de estimulación y un electrodo de guarda se puede estimar como la de un condensador de placas planas y paralelas,

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \pi (D^2 - (h + d)^2)}{d} \simeq \frac{\epsilon_0 \pi D^2}{d} \quad \text{si } h, d \ll D, \quad (4.36)$$

siendo D el diámetro exterior del electrodo de estimulación, h la distancia entre el chorro y el electrodo, d la separación entre los electrodos (figura 2.1).

No hay una forma sencilla de estimar la capacidad del condensador C_2 , ya que es prácticamente la capacidad de un cilindro frente a un plano. Por ello se calculará numéricamente a partir de los datos suministrados por COMSOL de la carga que se acumula en la cara del electrodo enfrentada al chorro, cuando éste se pone a potencial unidad y el resto se conectan a tierra.

Por último, las capacidades C_5 , C_6 y C_7 se calcularán como las formadas por dos rodajas de líquido separadas una longitud L_1 , L_2 y L_3 , respectivamente, considerando que en cada sección del chorro el potencial eléctrico es constante.

A partir del esquema circuital se comprueba el papel básico que juegan los electrodos de guarda. La función evidente de estos electrodos es hacer que los puntos marcados como P en el esquema (figura 4.9) estén a potencial cero. El efecto será un apantallamiento del campo consiguiéndose así que el campo esté localizado en la región entre electrodos de guarda.

El siguiente paso es obtener expresiones sencillas para las componentes del campo a partir de la resolución del modelo circuital. La componente radial del campo será proporcional a la carga que se acumule en el condensador C_2 mientras que la componente axial será proporcional a la corriente que recorre la resistencia R_2 . Como su magnitud en principio no es conocida, se ajustará la amplitud de estas componentes con el máximo de la amplitud obtenida numéricamente en función de la frecuencia de estimulación.

En la figura 4.10 se observa que el campo presenta el comportamiento esperado en todo el rango de frecuencias. A frecuencias bajas el líquido actuará como conductor. Así, la componente axial presentará su valor mínimo, ya que en el caso de conductor perfecto el campo es normal a la superficie. En cambio, a frecuencias altas, el comportamiento del líquido será el de un material dieléctrico, viéndose, así, como la componente axial del campo se hace máxima, mientras que la radial se hace mínima. Llama la atención que ese mínimo no sea cero. Esto es así debido a la alta permitividad del líquido, que genera un gran aporte de la carga de polarización. El efecto de la permitividad se vio en la figura 4.8. Este efecto se ha incluido en el modelo teniendo en cuenta los efectos capacitivos del chorro, (condensadores C_5 , C_6 y C_7). Aunque esto mejora los resultados, la conclusión que se extrae es que este modelo circuital no funciona cuando el chorro está en el régimen de comportamiento dieléctrico, ya que como puede observarse de la simulación numérica (figuras 4.6 y 4.5), las líneas de campo no son las típicamente formadas por un condensador.

A partir de la figura 4.10 se confirma cuál es el tiempo de tránsito del régimen de comportamiento conductor al régimen de comportamiento dieléctrico en este problema. Este tiempo está relacionado con el tiempo de carga del condensador principal:

$$f \simeq \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma \pi a^2}{L_2 C_2} \simeq 10^7 \text{ Hz}, \quad (4.37)$$

donde se han elegido la capacidad del condensador principal C_2 y la distancia L_2 para el cálculo del τ . La elección de la longitud L_2 se debe a que es en esa región donde, en su mayoría, estará confinado el campo eléctrico. Y la elección de un único condensador se basa en que esta interacción es la importante del sistema, siendo en este condensador donde se acumula la mayor parte de la carga generada. Las dimensiones con las que

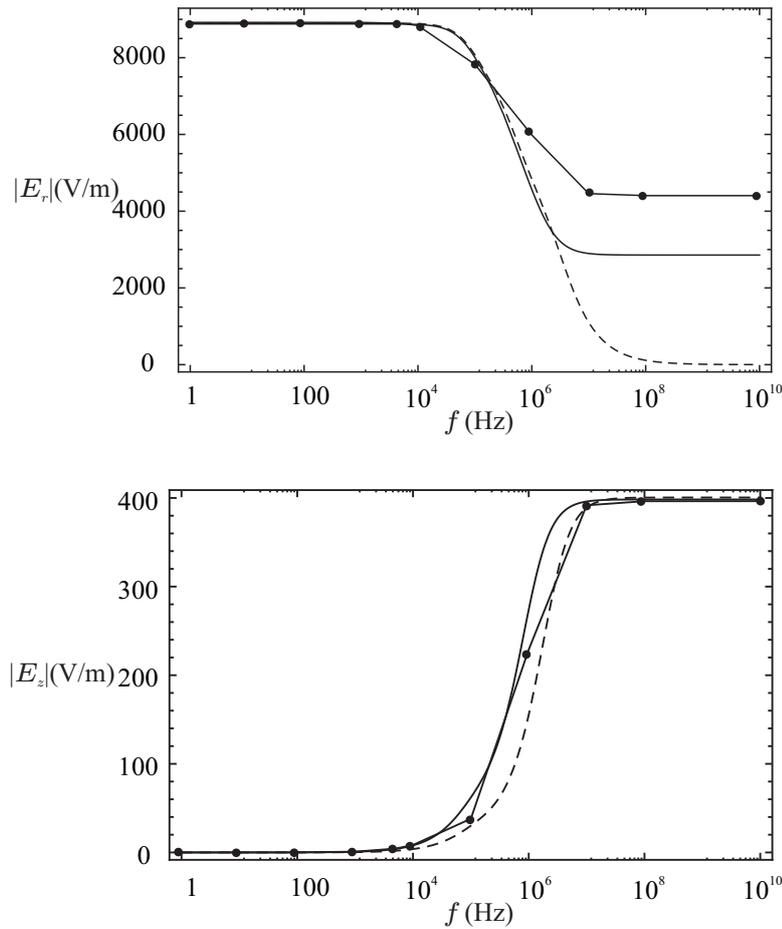


Figura 4.10: Comparación del módulo de las distintas componentes del campo eléctrico obtenidas mediante el modelo circuital y numéricamente (línea sólida con puntos) para una conductividad $\sigma = 0.01\text{S/m}$, una permitividad del líquido $\epsilon_r = 80$, y un potencial aplicado $V_0 = 1\text{V}$, incluyendo los efectos capacitivos del chorro. En línea discontinua se muestran los resultados obtenidos sin incluir los efectos capacitivos del chorro.

se ha trabajado son: $a = 100 \mu\text{m}$, $d = 1 \text{ mm}$, $e = 400 \mu\text{m}$, $h = 200 \mu\text{m}$, $L_1 = 4 \text{ mm}$, $L_2 = 2 \text{ mm}$, y $L_3 = 9 \text{ mm}$. Aunque no es lo habitual, para las dimensiones de este sistema, casualmente este tiempo es del mismo orden que el tiempo de relajación de la carga.

También se puede obtener la carga acumulada en cada uno de los electrodos de guarda como función de la frecuencia a partir del modelo circuital (figura 4.11). Será la carga asignada a los condensadores secundarios C_3 y C_4 . Existe una frecuencia óptima para la cual, la carga acumulada en estos electrodos es máxima. Ese máximo no ocurre a la misma frecuencia en los dos electrodos ya que el sistema no es simétrico

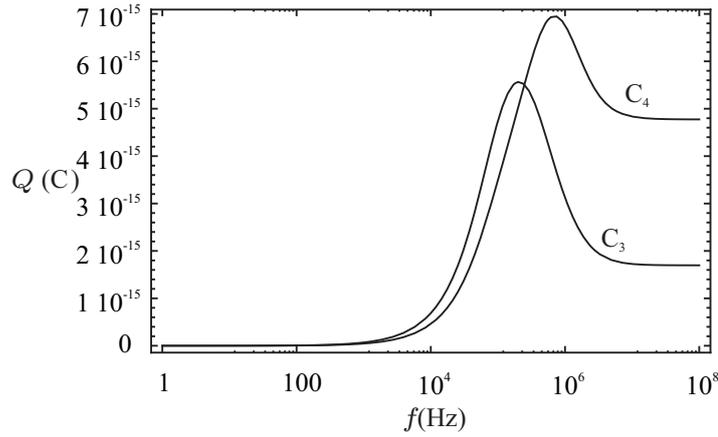


Figura 4.11: Evolución de la carga acumulada en los condensadores C_3 y C_4 como función de la frecuencia ($\sigma = 0.01$ S/m y $\epsilon_r = 80$, $V_0 = 1$ V).

respecto del centro del electrodo de estimulación. La falta de simetría se debe a que la salida del chorro está conectada a tierra mientras que su “final” está aislado. Esto hará que al poner el electrodo de estimulación a potencial, se genere una corriente proveniente de la tierra. Para frecuencia baja no se acumula carga, ya que se está en el rango de buen conductor. A medida que se aumenta la frecuencia, se empieza a acumular carga hasta alcanzar un máximo, para después seguir decayendo ya que, a mayor frecuencia, el chorro se empieza a comportar como un dieléctrico, y cada vez hay menos carga libre.

Esta acumulación de carga en los condensadores secundarios explica las protuberancias que se veían en las figuras 4.4 y 4.7 en la región de los electrodos de guarda.

4.8. Respuesta del chorro a la estimulación

Una vez resueltos tanto el problema fluidomecánico como el eléctrico, se está en condiciones de obtener la respuesta del chorro a la estimulación. Para ello sólo habrá que calcular la convolución de la función de Green con los esfuerzos eléctricos. Como se vio en el capítulo 2,

$$\mathbf{q}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' [\mathbf{G}_n(r, z - z')T_n(z') + \mathbf{G}_t(r, z - z')T_t(z')]. \quad (4.38)$$

Esta integral se resolverá de forma numérica únicamente aguas abajo de la estimulación. Se ha usado un método de paso constante (regla del trapecio), con un paso suficientemente fino para asegurar la convergencia de la integración.

En el caso de la estimulación EHD y para el líquido que estamos usando ($\sigma = 10^{-2}$ S/m), el esfuerzo normal es mucho más importante (casi tres órdenes de magnitud) que el esfuerzo tangencial. Será suficiente pues, obtener la respuesta a la salida de la estimulación debida a este tipo de esfuerzo para optimizar la geometría del dispositivo estimulador.

Como se hizo en el capítulo 2, se entenderá como efecto relevante de la estimulación la amplitud de la perturbación a la salida de la región de estimulación, debida al modo capilar dominante. Esto se hace así porque fuera de esta región, la evolución de la perturbación es conocida, y se podrá aproximar por

$$\mathbf{q}(r, z) = \mathbf{q}_{\text{Cdom}} e^{ik_{\text{Cdom}}z}. \quad (4.39)$$

Será pues la amplitud \mathbf{q}_{Cdom} el parámetro que se optimizará.

Los límites de integración de (4.38), en lugar de ser infinito, los marcará la extensión del campo eléctrico a lo largo de la coordenada axial definidos por valores z_i y z_f . Si el campo está muy extendido, la solución (la deformación y velocidad del chorro) evolucionará dentro de esta región de forma apreciable. Es decir, lo que se encontrará a la salida de la estimulación vendrá muy afectado por el crecimiento de la perturbación en la región de estimulación. Por tanto, una magnitud más relevante a la hora de comparar distintas situaciones será

$$\mathbf{q}_{\text{eq}} = \frac{\mathbf{q}_{\text{Cdom}}}{e^{-\text{Im}(k_{\text{Cdom}})z_f}}, \quad (4.40)$$

que podemos interpretar como la perturbación equivalente generada en $z = 0$ por un pulso tipo delta. La componente elegida de esta magnitud para su evaluación será la correspondiente a la deformación, f_{eq} , puesto que la norma elegida para las perturbaciones se basa en ella.

Otra consideración previa al estudio de la estimulación EHD que puede resultar útil en la interpretación de los resultados que vamos a ir obteniendo, es tener siempre en mente el modelo sencillo desarrollado en el capítulo introductorio. En relación con dicho modelo, es bastante revelador el cálculo de la perturbación de la velocidad mediante el modelo de Lee despreciando los términos capilares y viscosos de su formulación, cuando está sometido únicamente a un esfuerzo normal. Aproximando la distribución espacial del esfuerzo por una campana sencilla, tal y como se hizo en la introducción, se reproduce la expresión (1.10) para la perturbación de la velocidad obtenida mediante el cálculo del impulso que sufría una partícula fluida. Esto demuestra que el modelo sencillo predice unos resultados consistentes con el formalismo que hemos desarrollado en capítulos posteriores.

4.9. Diseño del dispositivo estimulador

A la hora de planificar el diseño se debe contar con los siguientes parámetros: (i) la geometría del sistema (distancia entre electrodos, distancia chorro-electrodos y espesor de las placas), (ii) la frecuencia impuesta, y (iii) la permitividad del medio dieléctrico situado entre las placas metálicas.

Se buscará optimizar la geometría para un valor de la frecuencia fijado. Lo habitual es fijarla en aquella que produce un máximo crecimiento espacial según la relación de dispersión o en valores próximos a él. Esta frecuencia vendrá determinada principalmente por el radio del chorro, además de la densidad y tensión superficial del líquido en cuestión. Una vez establecida la frecuencia, se plantea la cuestión de en qué orden se ha de organizar la optimización de los parámetros geométricos del estimulador. En vista de la cantidad de parámetros que debemos manejar, la idea será ir del más al menos influyente.

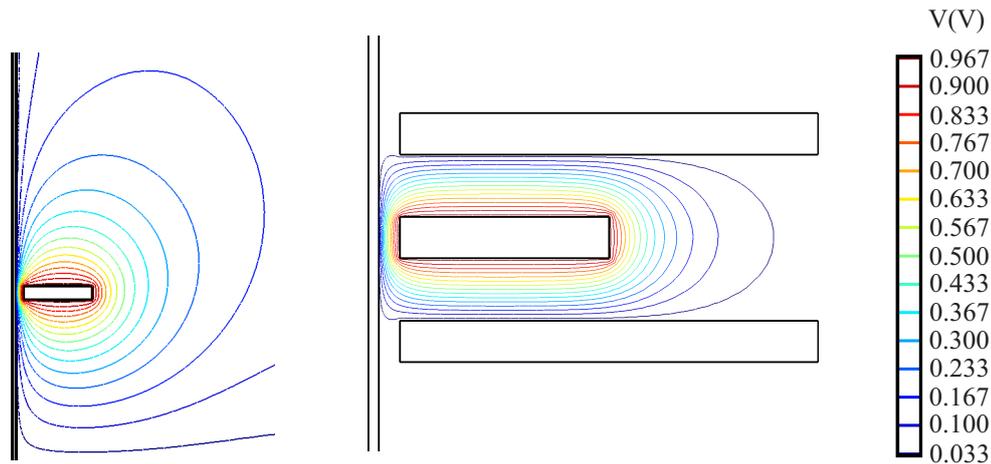


Figura 4.12: Efecto de los electrodos de guarda: líneas equipotenciales para una configuración con y sin electrodos de guarda ($\sigma = 10^{-2}\text{S/m}$, $V_0 = 1\text{V}$, $f = 10^3\text{Hz}$).

Como ilustración de la necesidad de incluir electrodos de guarda, representamos en la figura (figura 4.12) las equipotenciales de un estimulador sin y con estos electrodos. Vemos que en su ausencia el campo eléctrico se extiende a lo largo de un tramo apreciable del chorro. Aceptada su necesidad, el aspecto a discutir sería la disposición de estos electrodos. Los electrodos son coaxiales y tienen el mismo radio. Para mejorar la eficiencia de los electrodos de guarda cuando el electrodo de estimulación está muy alejado del chorro, se podrían situar éstos más cerca. La contrapartida a esta disposición es que se reduce la amplitud máxima del

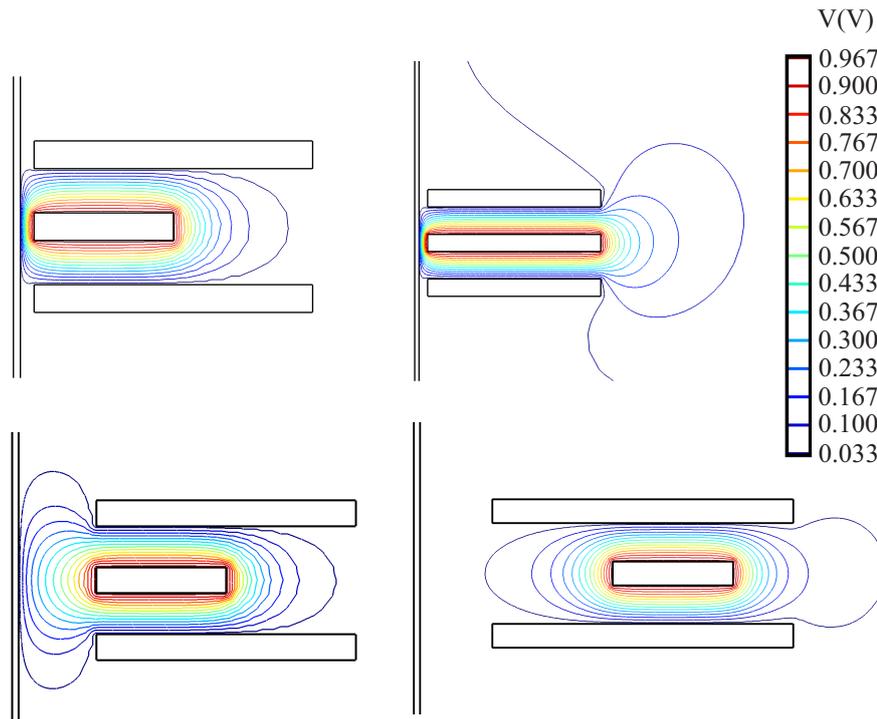


Figura 4.13: Distribución de líneas equipotenciales para distintas configuraciones de los electrodos ($\sigma = 0.01$ S/m, $V_0 = 1$ V, $f = 10^3$ Hz). La primera configuración muestra unos electrodos colocados muy cerca del chorro, siendo la longitud de los electrodos de guarda el doble que la del electrodo activo. En la segunda se observa la misma configuración pero con los tres electrodos con la misma longitud. En la tercera configuración se muestra el efecto de alejar los electrodos de la superficie del chorro. En la última configuración se pone de manifiesto el efecto de la posición relativa entre los electrodos de guarda y el electrodo activo.

campo eléctrico en la superficie del chorro (figura 4.13). Por tanto, nos restringiremos a configuraciones en las que los tres electrodos están a la misma distancia del chorro (se desestima la última configuración de la figura 4.13).

Otra cuestión a tratar será la extensión de los electrodos. El efecto de este parámetro está íntimamente relacionado con los electrodos de guarda, puesto que será el causante de la “cola” en el campo eléctrico, o extensión del campo eléctrico fuera de la región entre electrodos. La cola será irrelevante siempre que la extensión de los electrodos de guarda sea suficiente para apantallar los efectos del electrodo de estimulación. Tras varias pruebas numéricas se llega a que, para tener bien localizado el campo, los electrodos de guarda han de tener al menos un diámetro

mayor que la longitud del electrodo de estimulación en una distancia $2d$, siendo d la separación entre electrodos (figura 4.13).

El efecto de la permitividad del medio situado entre las placas no será muy importante. Sólo se verán pequeñas perturbaciones de las líneas de campo en una región de tamaño del orden de la distancia entre las placas y puede considerarse un efecto de borde. Así pues, si el estimulador está situado a una distancia del chorro mayor que la distancia entre las placas, el efecto de la permitividad del medio será despreciable. Normalmente se colocarán los electrodos lo más cerca posible del chorro, luego se estará dentro del rango donde estos efectos se notarán. La permitividad del medio actuará incrementando los esfuerzos. Si se colocan los electrodos a una distancia del chorro igual a la mitad de la distancia entre las placas, para las condiciones típicas de conductividad y frecuencia se verá un incremento de la amplitud de los esfuerzos de aproximadamente un 2% en la componente normal y de un 8% en la componente tangencial.

Como en todo diseño donde se manejan campos intensos, debemos tener cuidado con las esquinas de los electrodos. En las puntas es donde se alcanzan mayores valores del campo, por lo que al colocar los electrodos cerca del chorro, será en estos puntos donde se dé la mayor posibilidad de que se generen descargas eléctricas. Para evitarlo se redondearán los bordes.

El parámetro d , distancia entre electrodos, es el más influyente, ya que determinará la máxima distancia a la que se va a extender el campo eléctrico. Como ya se adelantó antes, este parámetro marcará, en principio, la extensión del campo siempre que los electrodos estén lo suficientemente cerca de la superficie del chorro. La forma de los esfuerzos con este parámetro se muestra en la figura 4.14. Para ambos tipos de estimulación, la amplitud del esfuerzo crece con d .

Hasta aquí nos hemos restringido en el proceso de optimización a argumentos relativos a la distribución de los campos y de los esfuerzos. En lo que sigue manejaremos ya amplitudes del modo inestable resultantes de la estimulación, de acuerdo con el criterio de amplitud efectiva desarrollado en la sección 4.8. En la figura 4.15 se ve la amplitud efectiva de la estimulación para varios valores de la distancia chorro-electrodo. Se aprecia un aumento inicial brusco hasta llegar a un máximo y luego una disminución suave hasta llegar a un valor asintótico. El máximo mostrado en la figura es la distancia óptima entre electrodos para que la estimulación sea eficiente. La zona inicial de crecimiento se debe a que para d pequeño la campana que forma el campo es muy estrecha y no se alcanza la distancia óptima, $\lambda/2$, entre los puntos de máxima pendiente, siendo λ la longitud de onda de la estimulación. El decrecimiento que se

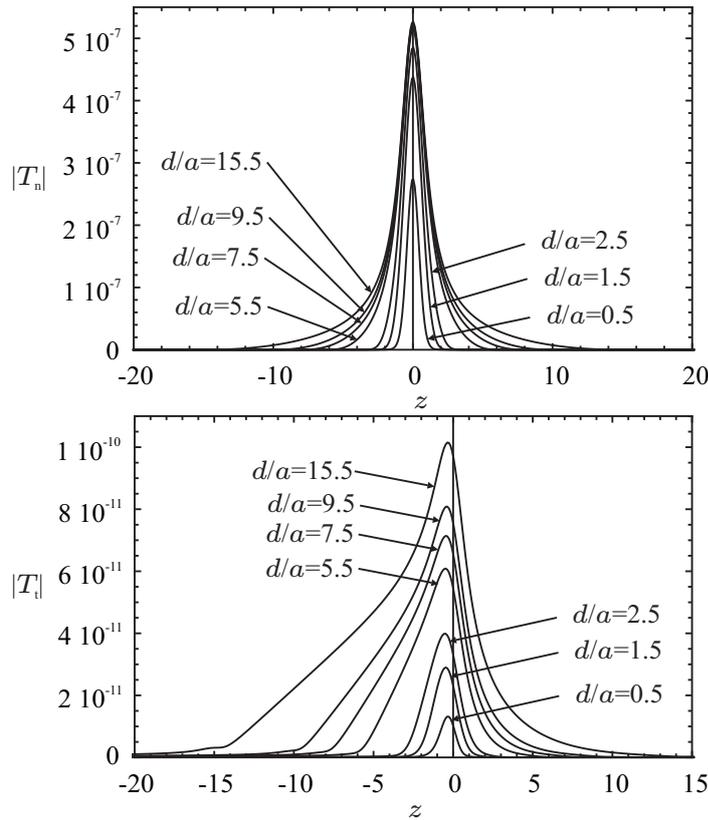


Figura 4.14: Módulo de las componentes del esfuerzo frente a la coordenada axial para varios valores de la distancia entre electrodos. El resto de parámetros fijados son: $k_{temp} = 0.7$, $h/a = 1$, $e/a = 0.5$.

observa después del máximo se debe a la influencia negativa de la “cola” del campo, tal y como se discutió en el capítulo 1. Hay que tener siempre presente que estos argumentos sólo son válidos para esfuerzos normales y condiciones iniciales de impulso puro, premisa esta última que se justificará más adelante. El valor asintótico que se alcanza se debe a que d es suficientemente grande como para encerrar la mayor parte de la campana de campo eléctrico apreciable, de forma que seguir aumentándolo no generará un mayor impulso ya que sólo se incluye en la integración una región donde el campo es prácticamente nulo.

El valor óptimo de la distancia entre electrodos, d_{max} , cumple la previsión del modelo sencillo de impulso que estamos empleando, formulado en la introducción, puesto que al variar la frecuencia de estimulación su valor resulta ser lineal con la longitud de onda asociada a cada frecuencia. Esto se muestra en la figura 4.16.

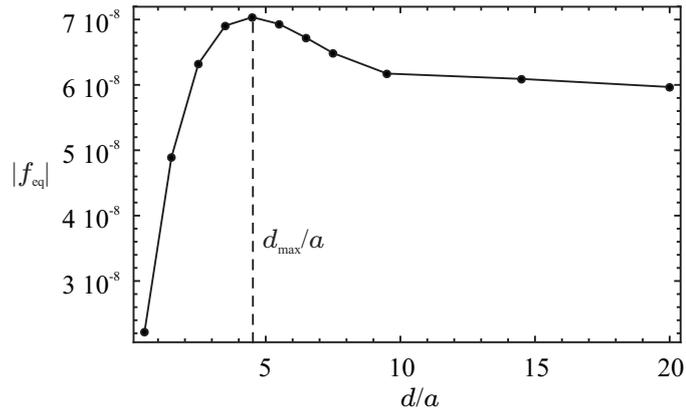


Figura 4.15: Módulo de la amplitud de la deformación computando sólo el modo capilar dominante asociado a un esfuerzo normal. Se ha eliminado de la amplitud un factor ($e^{-k_i z_f}$) para no tener en cuenta la evolución de la perturbación dentro del estimulador. El resto de parámetros fijados son: $k_{temp} = 0.7$, $C = 0.03$, $h/a = 1$, $e/a = 0.5$.

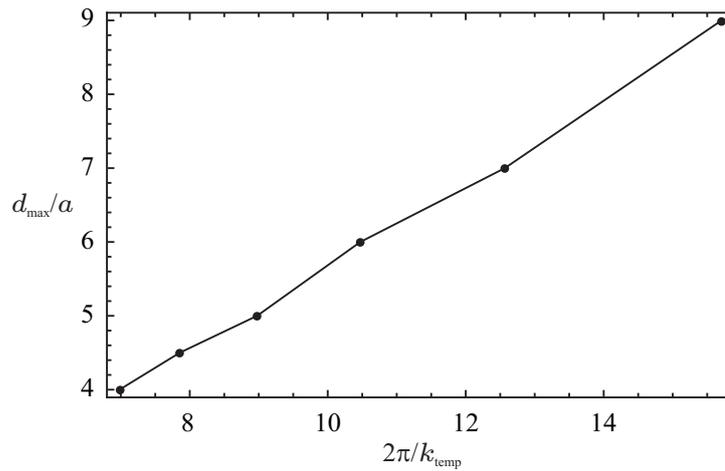


Figura 4.16: Valor de d_{max} para el cual se produce la máxima deformación en función de la frecuencia adimensional. El resto de parámetros fijados son: $h/a = 1$, $e/a = 0.5$.

El siguiente parámetro a estudiar será la distancia chorro-electrodo, h . Es obvio que al alejar el electrodo de la superficie del chorro, la amplitud del campo disminuirá. Así que para ver el efecto geométrico de esta distancia lo que se puede hacer es fijar el valor del campo en la superficie del chorro, de forma que la cantidad que se estudie sea $|f_{eq}|/\chi$. Con ello descontamos el efecto de h sobre la amplitud de la deformación y nos centramos en el efecto de h debido a la extensión del campo.

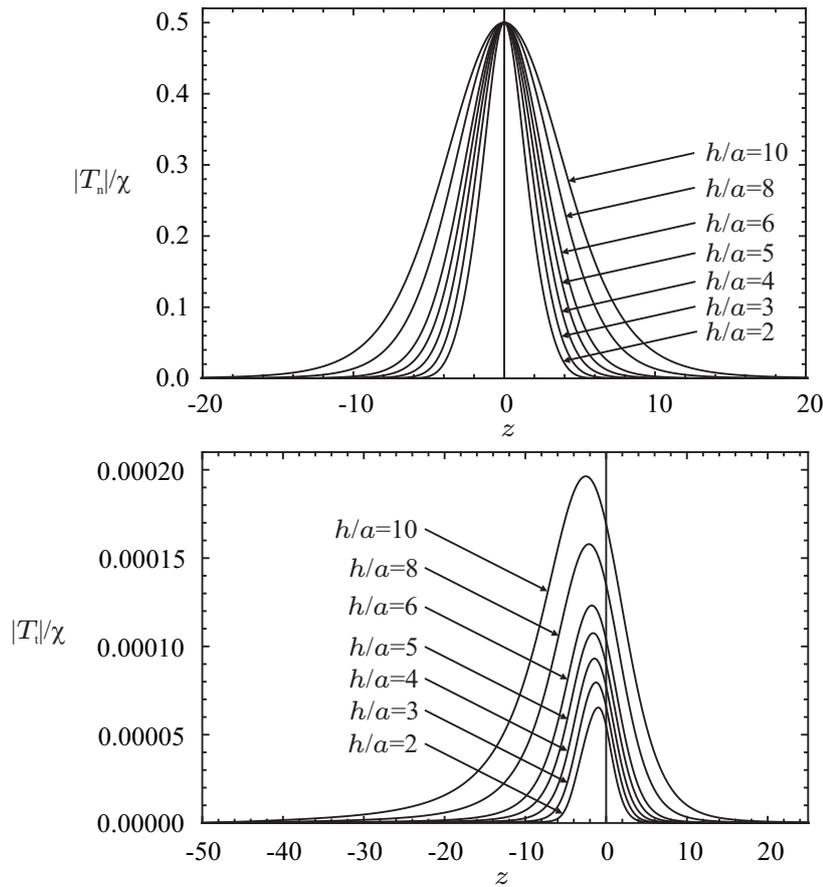


Figura 4.17: Módulo de las componentes del esfuerzo frente a la coordenada axial para varios valores de la distancia chorro-electrodos. El resto de parámetros fijados son: $k_{temp} = 0.7$, $d/a = 4.5$, $e/a = 0.5$

De la figura 4.17 se observa que, una vez fijado el valor del campo en la superficie del chorro, un aumento del parámetro h hace que el campo se extienda.

A partir de una distancia h del orden de d el efecto de los electrodos de guarda desaparece, extendiéndose el campo más allá de esta posición.

A esta optimización en la geometría se debe añadir como restricción sobre el parámetro h la posibilidad de descargas tipo corona (efecto Peek) si su valor es menor que cierto umbral. La dependencia con la frecuencia del valor óptimo es similar a la obtenida para el parámetro d . Tanto h como d juegan un papel similar en la determinación de la anchura de la campana del campo en la superficie del chorro. El parámetro h presentará pues la misma dependencia con la longitud de onda vista en la figura 4.16. Para h menores que el máximo, lo que ocurre es que la anchura de la campana es pequeña, y la distancia entre los puntos de máxima

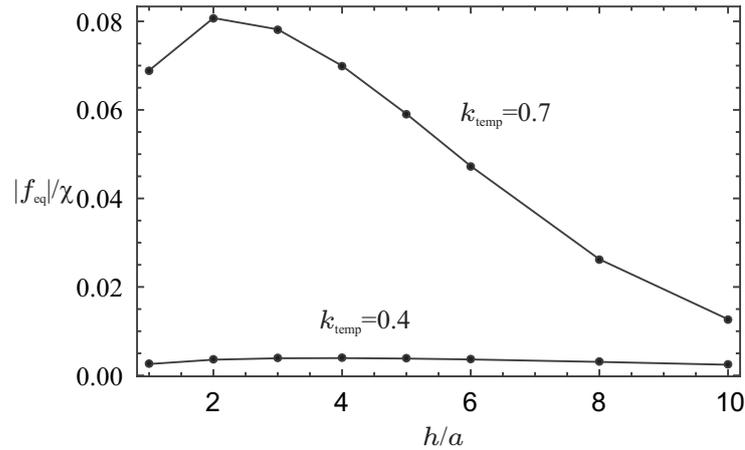


Figura 4.18: Módulo de la amplitud de la deformación dividido por el número de Bond eléctrico computando sólo el modo capilar dominante asociado a un esfuerzo normal. Se ha eliminado de la amplitud un factor ($e^{-k_i z_f}$) para no tener en cuenta la evolución de la perturbación dentro del estimulador. El resto de parámetros fijados son: $C = 0.03$, $d/a = 4.5$, $e/a = 0.5$.

pendiente es menor que la distancia óptima (media longitud de onda). Pasado el valor óptimo, la deformación que se obtiene va disminuyendo debido a los impulsos en sentido opuesto al principal, que se producen debido a la extensión del campo fuera los electrodos (figura 1.4).

El último parámetro a estudiar será el espesor de los electrodos. El efecto del espesor será aumentar la extensión de la zona de máximo del campo y su valor (figura 4.19). Una vez elegido el valor óptimo de d , el comportamiento con e será el de aumentar la deformación obtenida a medida que crece e (figura 4.20). Este parámetro no puede crecer indefinidamente ya que tiene la restricción de que las placas no pueden tocarse (aquí también habrá que calcular a qué distancia para esta configuración de electrodos planos hay descarga eléctrica). Así se ve que el valor máximo que puede obtener e será del orden de d . Para entender el papel de este parámetro será útil el esquema presentado en la figura 4.21. En esta figura están representados los puntos de máxima pendiente de la curva de la presión. Para el caso de los electrodos de mayor espesor, la pendiente es más pronunciada, luego será más eficiente a la hora de estimular.

Aunque en este estudio se ha supuesto que todos los electrodos tienen el mismo grosor, es sólo el espesor del electrodo de estimulación el responsable del comportamiento descrito más arriba.

Se puede concluir de este estudio que los parámetros que determinan la eficacia de la estimulación son la distancia entre los puntos de pen-

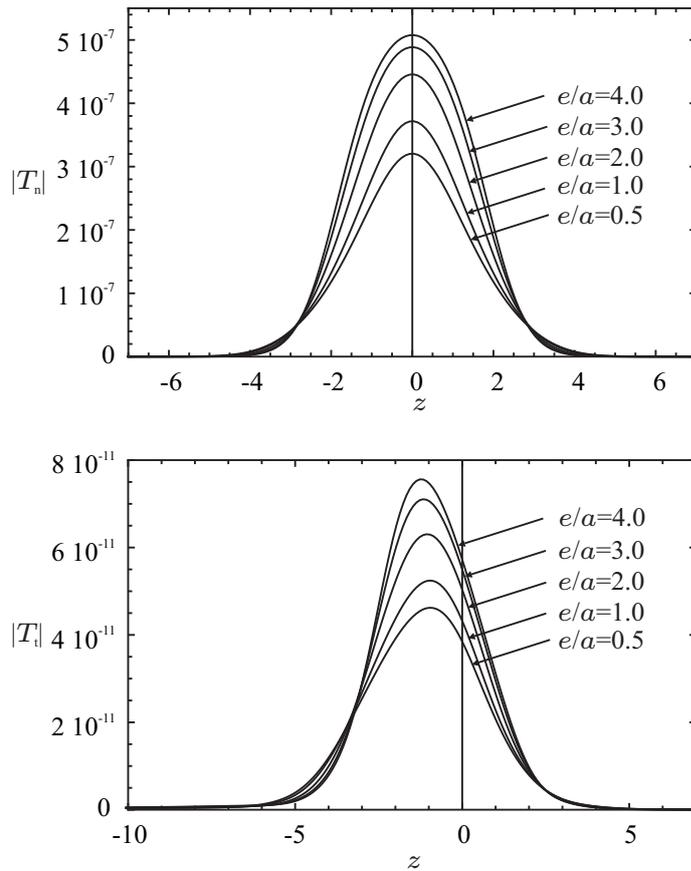


Figura 4.19: Módulo del esfuerzo normal y tangencial frente a la coordenada axial para varios valores del espesor de los electrodos. El resto de parámetros fijados son: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $d/a = 4.5$, $h/a = 2$.

diente máxima de la curva de presión del campo y la distancia entre los electrodos.

4.10. Respuesta modal a la estimulación EHD

Una vez diseñado el dispositivo estimulador, se verá cómo afecta la estimulación a cada uno de los modos espaciales del chorro. Para ello en la tabla 4.1 se ha estudiado el módulo de la deformación equivalente a la generada en $z = 0$, $|f_{\text{eq}}|$, para diferentes valores de la conductividad del líquido. De esta tabla pueden sacarse varias conclusiones:

- (i) Al igual que se vio en la función de Green, la amplitud del modo capilar dominante es la mayor para cualquier valor de la conductividad.
- (ii) Aunque la función de Green para el esfuerzo tangencial es aproximadamente tres veces que la debida al esfuerzo normal, se ve que para

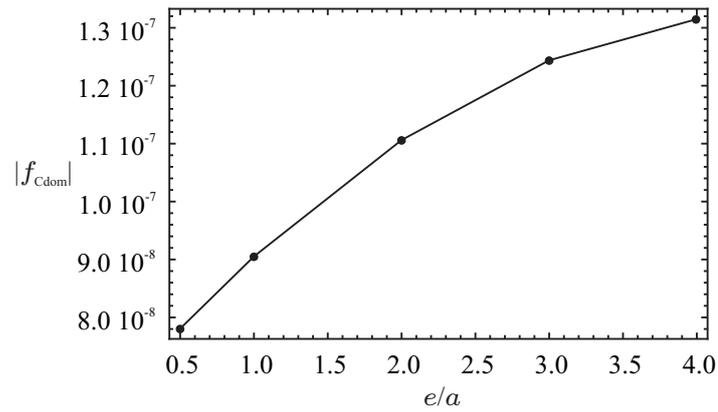


Figura 4.20: Módulo de la amplitud de la deformación computando sólo el modo capilar dominante asociado a un esfuerzo normal. El resto de parámetros fijados son: $k_{temp} = 0.7$, $C = 0.03$, $d/a = 4.5$, $h/a = 2$.

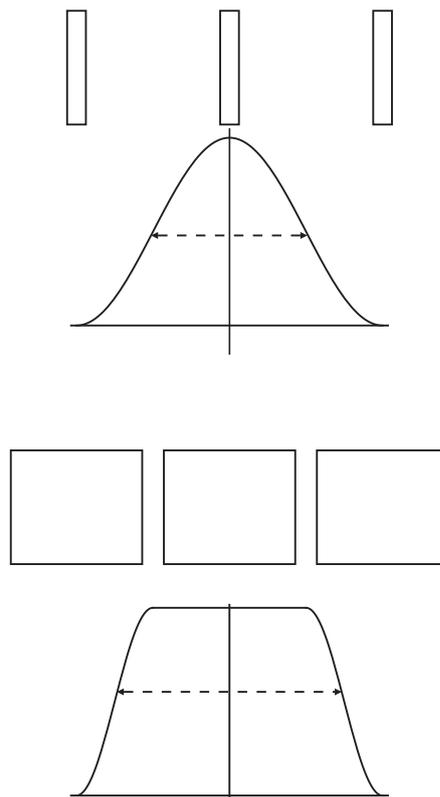


Figura 4.21: Diagrama explicativo sobre el efecto del espesor de los electrodos sobre la distribución de campo eléctrico.

conductividades bajas, la diferencia en la amplitud de los esfuerzos no es

Modo	$\sigma = 5\text{S/m}$	$\sigma = 10^{-2}\text{S/m}$	$\sigma = 10^{-6}\text{S/m}$
T_n			
C_{dom}	$6.84 \cdot 10^{-11}$	$6.81 \cdot 10^{-11}$	$9.66 \cdot 10^{-11}$
C_{sub}	$6.49 \cdot 10^{-11}$	$6.48 \cdot 10^{-11}$	$9.03 \cdot 10^{-12}$
H_1	$3.98 \cdot 10^{-12}$	$3.98 \cdot 10^{-12}$	$5.45 \cdot 10^{-13}$
H_2	$2.94 \cdot 10^{-14}$	$2.95 \cdot 10^{-14}$	$2.09 \cdot 10^{-14}$
T_t			
C_{dom}	$5.63 \cdot 10^{-17}$	$2.91 \cdot 10^{-14}$	$9.11 \cdot 10^{-14}$
C_{sub}	$3.15 \cdot 10^{-17}$	$1.68 \cdot 10^{-14}$	$6.04 \cdot 10^{-14}$
H_1	$1.67 \cdot 10^{-17}$	$8.90 \cdot 10^{-15}$	$3.32 \cdot 10^{-14}$
H_2	$5.94 \cdot 10^{-19}$	$3.32 \cdot 10^{-16}$	$6.91 \cdot 10^{-15}$

Tabla 4.1: Módulo de la amplitud, $|f_{\text{eq}}|$, de los modos más relevantes bajo un esfuerzo normal y tangencial. Los parámetros son los habituales: $k_{\text{temp}} = 0.7$, $C = 0.03$, $d/a = 4.5$, $h/a = 2$, $e/a = 4$.

suficiente para generar una deformación mayor que la obtenida por un esfuerzo normal.

Si se añadiera una columna más a la tabla 4.1 para una conductividad $\sigma = 10^{-8}$ S/m, se vería cómo la deformación causada por el esfuerzo tangencial ya no sigue aumentando, sino que disminuye, ya que estamos fuera de la región óptima del esfuerzo tangencial. Por tanto, en este rango de valores de la conductividad se puede concluir que la deformación causada por el esfuerzo tangencial siempre es menor que la causada por el esfuerzo normal.

4.11. Naturaleza de la estimulación EHD

Hemos discutido en el capítulo introductorio que la estimulación de chorros se puede realizar mediante mecanismos que producen esencialmente un cambio en la velocidad a la salida de la región de estimulación, o bien, produciendo su deformación. Es lo que se llamó entonces condiciones tipo impulso o tipo deformación, respectivamente. En este apartado pretendemos analizar qué tipo de estimulación es la electrohidrodinámica. Para construir un criterio adecuado, se seguirán los pasos dados por García & González (2008) en el caso del análisis temporal.

Cualquier perturbación periódica puede escribirse de manera simplificada como

$$f(z, t) = \text{Re} \left[e^{i\omega t} (f_d e^{ik_d z} + f_s e^{ik_s z}) \right], \quad (4.41)$$

para $z > 0$ y considerar sólo los modos capilares como una buena apro-

ximación para describir la perturbación del chorro. Aunque los primeros modos hidrodinámicos pueden decaer tan lentamente como el modo capilar subdominante, se han despreciado debido a su carácter recirculatorio, y a que presentan una deformación muy pequeña y una velocidad neta prácticamente nula (el primer modo hidrodinámico presenta una velocidad neta de aproximadamente 4% del valor máximo de la velocidad en todo el perfil radial para $\beta = 7.74$ y $C = 0.03$, y el segundo es aún más pequeño, 0.3%). Los modos inerciales, debido a su carácter evanescente, también se han despreciado.

Una deformación inicial no definirá de forma única las condiciones de contorno, la velocidad también ha de ser considerada. Se hará a través de la velocidad axial media en una rodaja \bar{w} , que estará ligada con la deformación a través de la condición de continuidad integrada en una rodaja (García & González, 2008). Para pequeñas perturbaciones su versión linealizada es la condición cinemática

$$f_t + \beta f_z = -\frac{1}{2}\bar{w}_z. \quad (4.42)$$

Usando la condición cinemática se puede escribir la velocidad axial media como

$$\bar{w}(z, t) = \text{Re} \left[2\omega e^{i\omega t} \left(\frac{f_d}{k_d} e^{ik_d z} + \frac{f_s}{k_s} e^{ik_s z} \right) \right] \quad (4.43)$$

Las condiciones de contorno del chorro pueden expresarse como

$$f(0, t) = \text{Re} [f_0 e^{i\omega t}], \quad (4.44)$$

$$\bar{w}(0, t) = \text{Re} [\bar{w}_0 e^{i\omega t}]. \quad (4.45)$$

Comparando las expresiones (4.44) y (4.45) con (4.41) y (4.43) evaluadas en $z = 0$ se llega a

$$f_0 = f_d + f_s, \quad (4.46)$$

$$\bar{w}_0 = \left(\frac{\omega}{k_d} - \beta \right) f_d + \left(\frac{\omega}{k_s} - \beta \right) f_s, \quad (4.47)$$

Resolviendo el sistema se obtienen las expresiones de f_d y f_s

$$f_d = -\frac{k_d}{\omega(k_d - k_s)} \left((k_s \beta - \omega) f_0 + k_s \frac{\bar{w}_0}{2} \right) \quad (4.48)$$

$$f_s = \frac{k_s}{\omega(k_d - k_s)} \left((k_d \beta - \omega) f_0 + k_d \frac{\bar{w}_0}{2} \right) \quad (4.49)$$

Bastará pues evaluar el cociente entre los dos aportes, $(k_s\beta - \omega)f_0$ y $k_d\bar{w}_0/2$, que denominaremos Ξ , para el modo capilar dominante para saber qué tipo de condiciones de contorno genera esta perturbación. Si Ξ es pequeño, las condiciones se acercan a las de impulso puro, mientras que si Ξ es muy grande se podrán catalogar como de deformación pura. Usando las relaciones (4.48) y (4.49) se llega a

$$\Xi = \left| \frac{(k_s\beta - \omega)(f_d + f_s)}{\frac{k_s}{2} \left[\left(\frac{\omega}{k_d} - \beta \right) f_d + \left(\frac{\omega}{k_s} - \beta \right) f_s \right]} \right|, \quad (4.50)$$

donde se ha eliminado de la amplitud de deformación, la contribución de la evolución sufrida a lo largo de la zona entre electrodos, al igual que se ha hecho en secciones anteriores.

En la tabla 4.2 se presentan los resultados tanto para la estimulación normal como para la tangencial

Parámetros	Ξ (esf. normal)	Ξ (esf. tangencial)
$\beta = 4.47, C = 0.03$	0.213	0.618
$\beta = 4.47, C = 0.5$	0.539	0.309
$\beta = 7.74, C = 0.03$	0.127	0.508
$\beta = 7.74, C = 0.5$	0.302	0.203

Tabla 4.2: Evaluación del tipo de condición de contorno generada por la estimulación EHD para varias combinaciones de parámetros del problema ($k_{\text{temp}} = 0.7$ y la configuración de diseño óptima).

Para los valores típicos ($k_{\text{temp}} = 0.7$, $\beta = 4.47$ y $C = 0.03$) y una configuración no óptima ($d/a = 7.5$, $h/a = 1$, $e/a = 0.5$) se catalogan las condiciones como de tipo impulso tanto para el esfuerzo normal ($\Xi = 0.195$) como para el tangencial ($\Xi = 0.630$).

Está claro que para el caso de velocidad alta y un esfuerzo normal, la condición de contorno generada es condición de tipo impulso. Lo mismo se puede decir para velocidades no tan altas. Este resultado justifica los razonamientos basados en una estimulación tipo impulso usados a lo largo de toda la tesis. En el caso del esfuerzo tangencial, siguen siendo unas condiciones de tipo impulso, pero hay un mayor aporte proveniente de la deformación.

Por último, queda estudiar el papel de la viscosidad. A la vista de los resultados, la viscosidad ayuda a generar condiciones de tipo impulso para el esfuerzo tangencial, mientras que para el esfuerzo normal, la presencia de la viscosidad hace que se incremente el aporte de la deformación.

Capítulo 5

Conclusiones y líneas de trabajo futuras

5.1. Conclusiones

1. Se ha desarrollado una herramienta matemática versátil que permite obtener la respuesta hidrodinámica de un chorro capilar ante una estimulación mediante esfuerzos localizados en su superficie, tanto normales como tangenciales.
2. Se ha aplicado esta herramienta al caso particular de la estimulación EHD, aunque igualmente se puede emplear para caracterizar la estimulación termocapilar, como otro ejemplo relevante.
3. El formalismo empleado ha sido el de una función de Green específica para esfuerzos aplicados en superficie, lo cual ha revelado una gran riqueza de modos espaciales.
4. Algunos de los modos espaciales encontrados se corresponden con los encontrados en la literatura, como los dos modos capilares y los inerciales, pero otros son nuevos, como los hidrodinámicos y uno de los dos modos capilares aguas arriba.
5. Se han caracterizado de manera exhaustiva los modos espaciales del chorro, analizando su localización en el plano complejo, su dominio de existencia (aguas arriba o aguas abajo), longitud de onda, carácter estable o inestable y campo de velocidades. Además se ha discutido su origen físico y su eventual conexión con modos temporales mediante una transformación galileana.
6. Se han identificado los modos que mediante su interacción producen la inestabilidad absoluta de los chorros capilares: el modo capilar dominante y el capilar aguas arriba que se propaga aguas abajo.

7. La principal fuente de información del análisis modal es la amplitud del modo capilar dominante, que es el único inestable y por tanto, el que gobernará la dinámica de la rotura en gotas.
8. Con carácter general, el esfuerzo tangencial es más eficiente que el normal a igualdad de amplitud de esfuerzos.
9. La simplicidad en el tratamiento matemático justifica la repetición de todo el cálculo anterior con los modelos unidimensionales (Lee, Cosserat, promediado y parabólico). Se encuentra, en general, muy buen acuerdo con el análisis tridimensional en relación a los modos con número de onda de valor absoluto no muy superior a la unidad, en consonancia con la hipótesis básica de estos modelos.
10. Los modelos de primer orden (Lee) reproducen cualitativamente los resultados obtenidos en el caso 3D (amplitud del modo dominante, velocidad crítica), con diferencias del orden del 10 %, mientras que los modelos de segundo orden (parabólico, promediado y Cosserat) presentan muy buen acuerdo.
11. Los modelos unidimensionales reproducen la inestabilidad absoluta.
12. Se han caracterizado numéricamente los esfuerzos eléctricos que actúan sobre la superficie del chorro en régimen óhmico. Se ha hecho un estudio paramétrico en conductividad (siempre relativa a la frecuencia), velocidad del chorro y permitividad. El diseño de un modelo circuital sencillo ha permitido comprender el comportamiento paramétrico de los esfuerzos.
13. Se ha diseñado un dispositivo estimulador. Para ello se han optimizado todas las variables geométricas implicadas en el diseño.
14. Se ha estudiado la respuesta del chorro a la estimulación EHD para los parámetros óptimos. Se encuentra que el esfuerzo normal es más eficiente que el esfuerzo tangencial, a pesar de que respecto de la respuesta hidrodinámica, la conclusión era la contraria.
15. Con carácter general, a la salida de la región de estimulación se puede considerar que las condiciones de contorno que se han generado son prácticamente de tipo impulso, puesto que la deformación generada produce un menor efecto.

5.2. Líneas futuras de investigación

- El trabajo presentado es de carácter fundamental (modos espaciales, respuesta hidrodinámica a la estimulación, etc.) y de diseño, y será necesario realizar un estudio experimental de todo los aspectos considerados: optimización de un estimulador EHD, análisis de la respuesta de dicho estimulador, evidencia de algunos modos espaciales detectables, etc. En este sentido durante el período de tesis se han realizado algunos experimentos y diseñado dispositivos, pero no se han obtenido todavía resultados que puedan ser incluidos en esta memoria.
- Como se ha comentado ya a lo largo de este texto, el formalismo desarrollado permitirá caracterizar la estimulación termocapilar, al igual que se ha hecho con la estimulación EHD.
- De la misma forma que se ha obtenido una función de Green para estimulación mediante esfuerzos en superficie, se puede abordar en el futuro la construcción de funciones de Green para estimulación a la salida del chorro, o mediante fuerzas definidas en volumen. Cada uno de estos problemas requerirá un tratamiento específico.
- Todo lo visto en este trabajo corresponde a chorros cuyo estado base es cilíndrico y con perfil plano de velocidades inmerso en un gas sin efectos aerodinámicos apreciables. El trabajo puede extenderse, aunque previsiblemente ya con un tratamiento no analítico sino numérico, a otras situaciones de interés: perfil de velocidades no plano, efectos del gas exterior, chorros con giros (*swirling jets*), etc.
- Aún cuando la teoría desarrollada es lineal, lo cual está justificado para los niveles típicos de la estimulación EHD, se puede emplear los paquetes comerciales de COMSOL para explorar posibles efectos no lineales asociados a estimulación más intensa. Para ello es conveniente implementar un programa de propósito general de evolución de chorros sujetos a campos eléctricos.
- Otro aspecto teórico que puede ser explorado en el futuro es el análisis de las consecuencias del carácter no-normal del operador asociado al problema fluidomecánico. Aunque de problemas similares descritos en la literatura se deduce que estas consecuencias no deben ser muy importantes, parece conveniente comprobarlo.

Bibliografía

- D. E. ASHPIS & E. RESHOTKO, 1990. The vibrating ribbon problem revisited. *J. Fluid Mech.*, **213**, 531–547.
- P. ATTEN & S. OLIVERI, 1992. Charging of drops formed by circular jet breakup. *J. Electrostat.*, **29**, 73–91.
- P. ATTEN, D. FRESSARD, B. BARBET & C. BARDEAU, 1995. Electrohydrodynamic induction of isolated drops in a jet. *9th Int. Conf. on Electrostatics*, **40**, 47–50.
- K. M. AWATI & T. HOWES, 1996. Stationary waves on a cylindrical fluid jets. *Am J. Phys.*, **64**, 808–811.
- B. BARBET, 1997. *Stimulations electrohydrodynamique et thermique de jets de liquide conducteur*. Tesis Doctoral, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, France.
- C. BARDEAU, D. FRESSARD, P. ATTEN & B. BARBET, 1994. Formation of isolated drops in a continuous jet. *IST 10th Int. Congress Adv. Non-impact Printing Tech.*, págs. 429–433.
- O. A. BASARAN, 2002. Small-scale free surface flows with breakup: drop formation and emerging applications. *AIChE J.*, **48**, 1842–1848.
- A. BERS, 1983. *Space time evolution of plasma instabilities*. 451517. North Holland.
- D. B. BOGY, 1978. Wave propagation and instability of a circular semi-infinite liquid jet harmonically forced at the nozzle. *Transactions of ASME, J. Appl. Mech.*, **45**, 469–474.
- D. B. BOGY, 1979. Drop formation in a circular liquid jet. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 207–228.
- D. W. BOUSFIELD, R. KEUNINGS, G. MARRUCCI & M. M. DENN, 1986. Nonlinear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **21**, 79–97.

- R. J. BRIGGS, 1964. *Electrom stream with plasmas*. MIT Press.
- C. L. BURCHAM & D. A. SAVILLE, 2002. Electrohydrodynamic stability: Taylor Melcher theory for a liquid bridge suspended in a dielectric gas. *J. Fluid Mech.*, **452**, 163–187.
- D. P. BUSKER & A. P. G. G. LAMERS, 1989. The non-linear breakup of an inviscid liquid jet. *Fluid Dyn. Res.*, **5**, 159–172.
- A. CASTELLANOS, 1998. *Electrohydrodynamics*. Springer-Verlag Wien New York.
- A. CASTELLANOS & A. GONZÁLEZ, 1998. Nonlinear electrohydrodynamics of free surfaces. *IEEE Trans. Dielec. Electr. Insul.*, **5** (3), 334–343.
- S. CHANDRASEKHAR, 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University, New York/London). Reprinted 1981 (Dover, New York).
- C. CLASEN, J. EGGERS, M. A. FONTELOS, J. LI & G. H. MCKINLEY, 2006. The beads-on-string structure of viscoelastic threads. *J. Fluid Mech.*, **556**, 283–308.
- M. CLOPEAU & B. PRUNET-FOCH, 1989. Electrostatic spraying of liquids in cone-jet mode. *J. Electrostat.*, **22**, 135–159.
- J. M. CROWLEY, 1981. Electrohydrodynamic (EHD) stimulation of jet breakup. *Proc. Second Int. Colloq on drops and bubbles*.
- J. M. CROWLEY, 1983. Electrohydrodynamic droplet generators. *J. Electrostat.*, **14**, 121–134.
- R. J. DONNELLY & W. GLABERSON, 1966. Experiments on the capillary instability of a liquid jet. *Proc. R. Soc. London*, **290**, 547.
- J. DOSHI & D. H. RENEKER, 1995. Electrospinning process and applications of electrospun fibers. *J. Electrostat.*, **35**, 151–160.
- J. EGGERS, 1997. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.*, **69** (3), 865–929.
- J. EGGERS & T. F. DUPONT, 1994. Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equations. *J. Fluid Mech.*, **262**, 202–221.
- J. EGGERS & E. VILLERMAUX, 2008. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 1–79.

- F. J. GARCÍA, 1998. *Aplicación de modelos unidimensionales a la dinámica de columnas líquidas con y sin campo eléctrico*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- F. J. GARCÍA & A. CASTELLANOS, 1994. One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets. *Phys. Fluids*, **6** (8).
- F. J. GARCÍA & H. GONZÁLEZ, 2008. Normal-mode linear analysis and initial conditions of capillary jets. *J. Fluid Mech.*, **602**, 81–117.
- K. F. GAUSS, 1828. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Comm. Soc. Göttingen.
- E. F. GOEDDE & M. C. YUEN, 1970a. Experiments on liquid jet instability. *J. Fluid Mech.*, **40**, 495–511.
- E. F. GOEDDE & M. C. YUEN, 1970b. Experiments on liquid jet instability. *J. Fluid Mech.*, **40**, 495–511.
- H. GONZÁLEZ & F. J. GARCÍA, 2009. The measurement of growth rates in capillary jets. *J. Fluid Mech.*, **619**, 179–212.
- H. GONZÁLEZ, F. J. GARCÍA & C. A., 2003. Stability analysis of conducting jets under ac radial electric fields for arbitrary viscosity. *Phys. Fluids*, **15** (2), 395–407.
- J. M. GORDILLO & M. PÉREZ-SABORID, 2005. Aerodynamics effects in the break-up of a liquid jets: on the first wind-induced break-up regime. *J. Fluid Mech.*, **541**, 1–20.
- A. E. GREEN, 1976. On the nonlinear behaviour of fluid jets. *Int. J. Eng. Sci.*, **14**, 49–63.
- A. HAENLEIN, 1931. *Forsch. Geb. Ingenieurwes*, **2**, 139.
- M. J. HANCOCK & J. W. M. BUSH, 2002. Fluid pipes. *J. Fluid Mech.*, **466**, 285–304.
- W. V. HOEVER, S. GLEKE, J. H. SNOEIJER, M. VERSLUIS, M. P. BRENNER & D. LOHSE, 2010. Breakup of diminutive Rayleigh jets. *Phys. Fluids*, **22**, 122003.
- D. W. HRDINA & J. M. CROWLEY, 1989. Drop-on-demand operation of continuous jets using ehd techniques. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, **25** (4), 705–710.
- P. HUERRE & P. A. MONKEWITZ, 1985. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, **59**, 151–168.

- P. HUERRE & P. A. MONKEWITZ, 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 473–537.
- P. HUERRE & M. ROSSI, 1998. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Cambridge University Press.
- S. N. JAYASINGHE, 2006. An advanced jet-based approach to processing nanotubes. *Phys. E: Low-dimensional Sys. Nanostruc.*, **31**, 17–26.
- T. JOHNSON & W. TUCKER, 2009. Enclosing all zeros of an analytic function: A rigorous approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**, 418–423.
- J. B. KELLER, S. I. RUBINOW & Y. O. TU, 1973. Spatial instability of a jet. *Phys. Fluids*, **16** (12), 2052–2055.
- H. LAMB, 1931. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 6th edition.
- P. S. LAPLACE, 1805. *Mécanique céleste*. Courcier, Paris.
- J. C. LASHERAS & E. J. HOPFINGER, 2000. Liquid jet instability and atomization in a coaxial gas stream. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 275–308.
- S. LE DIZÈS, 1997. Global modes in falling capillary jets. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **16** (6), 761–778.
- E. R. LEE, 2003. *Microdrop generation*. CRC Press LLC.
- H. C. LEE, 1974. Drop formation in a liquid jet. *IBM J. Res. Develop.*, **18**, 364–369.
- S. J. LEIB & M. E. GOLDSTEIN, 1986a. The generation of capillary instabilities on a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, **168**, 479–500.
- S. J. LEIB & M. E. GOLDSTEIN, 1986b. Convective and absolute instability of a viscous jet. *Phys. Fluids*, **29**, 952–954.
- S. P. LIN, 2003. *Breakup of liquid sheets and jets*. Cambridge University Press.
- J. M. LÓPEZ-HERRERA & A. M. GAÑÁN-CALVO, 2004. A note on charged capillary jet breakup of conducting liquids: Experimental validation of a viscous one-dimensional model. *J. Fluid Mech.*, **501**, 303–326.

- J. M. LÓPEZ-HERRERA, A. M. GAÑÁN-CALVO & M. PÉREZ-SABORID, 1999. One dimensional simulation of the breakup of capillary jets of conducting liquids. application to E.H.D. spraying. *J. Aerosol Sci.*, **30** (7), 895–912.
- J. M. LÓPEZ-HERRERA, P. RIESCO-CHUECA & A. M. GAÑÁN-CALVO, 2005. Linear stability analysis of axisymmetric perturbations in imperfectly conducting liquid jets. *Phys. Fluids*, **17**, 034106.
- E. MARIOTTE, 1686. *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*. Michallet, E., Paris.
- J. R. MELCHER, 1963. *Field-couple surface waves*. MIT Press.
- J. R. MELCHER & E. P. WARREN, 1971. Electrohydrodynamics of a current-carrying semi-insulating jet. *J. Fluid Mech.*, **47**, 127–143.
- A. J. MESTEL, 1994. Electrodynamic stability of slightly viscous jet. *J. Fluid Mech.*, **274**, 93–113.
- A. J. MESTEL, 1996. Electrodynamic stability of highly viscous jet. *J. Fluid Mech.*, **312**, 311–326.
- S. MIDDLEMAN, 1995. *Modeling axysymmetric flows. Dynamics of films, jets and drops*. Academic Press, San Diego.
- N. NAHAS & R. PANTON, 1990. Control of a surface tension flows: instability of a liquid jet. *J. Fluids Eng.*, **112**, 296–301.
- N. K. NAYYAR & G. S. MURTY, 1960. The stability of a dielectric liquid jet in the presence of a longitudinal electric field. *Proc. Phys. Soc. London*, **75**, 369–373.
- J. A. NICOLÁS & J. M. VEGA, 2000. Linear oscillations of axisymmetric viscous liquid bridges. *Z. Angew. Math. Phys.*, **51**, 701–731.
- W. K. H. PANOFSKY & M. PHILLIPS, 1977. *Classical electricity and magnetism*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, segunda edición.
- W. T. PIMBLEY, 1976. Drop formation from a liquid jet: a linear one-dimensional analysis considered as a boundary value problem. *IBM J. Res. Develop.*, **20** (2), 148–156.
- J. A. F. PLATEAU, 1846. *Acad. Sci. Bruxelles Mém.*, **23**, 5.
- J. A. F. PLATEAU, 1863. Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity. *Ann. Rep. Smithsonian Institution*.

- J. A. F. PLATEAU, 1873. *Statique expérimentales et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. tomo 2. Gauthier Villars, Paris.
- L. RAYLEIGH, 1878. On the stability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **10**, 4–13.
- L. RAYLEIGH, 1879. *Proc. R. Soc. London*, **29**, 94.
- L. RAYLEIGH, 1882a. Further observations upon liquid jets. *Proc. R. Soc. London*, **34**, 130–145.
- L. RAYLEIGH, 1882b. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary forces. *Philos. Mag.*, **34** (207), 145–154.
- L. RAYLEIGH, 1891. *Nature (London)*.
- L. RAYLEIGH, 1945. *The theory of sound*. Dover, second edition.
- R. REITZ & F. BRACCO, 1986. Mechanisms of breakup of round liquid jets. *Encyclopedia of Fluid Mechanics, N. J.*, **3**, 233.
- F. SAVART, 1833. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Annal. Chim.*, **53**, 337.
- D. A. SAVILLE, 1971. Stability of electrically charged viscous cylinders. *Phys. Fluids*, **14**, 1095.
- D. A. SAVILLE, 1997. Electrohydrodynamics: the Taylor–Melcher leaky dielectric model. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **29**, 27–64.
- A. SEVILLA, 2011. The effect of viscous relaxation on the spatiotemporal stability of capillary jets. *Submitted to J. Fluid Mech.*
- H. M. SHAPIRO, 2003. *Practical flow cytometry*. 4th edn. Wiley–Lis, Hoboken.
- A. SPOHN & P. ATTEN, 1993. Ehd multi-electrode stimulation of a conducting capillary jet. *Industry Applications Society Annual Meeting*, **3**, 1960–1965.
- A. M. STERLING & C. A. SLEICHER, 1975. The instability of capillary jets. *J. Fluid Mech.*, **68**, 477–495.
- S. TOMOTIKA, 1935. On the stability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proc. R. Soc. London*, **150**, 322.

C. WEBER, 1931. Zum Zerfall Eines Flüssigkeitsstrahles. *Z. Angew. Math. Mech*, **11**, 136–154.

P. A. YAKUBENKO, 1997. Capillary instability of an ideal jet of large but finite length. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **16** (1), 39–47.

T. YOUNG, 1805. Essay on the cohesion of fluids. *Phylos. Trans. R. Soc. London*, **95**, 65.

J. ZENG & T. KORSMEYER, 2004. Principles of droplet electrohydrodynamics for lab-on-a-chip. *Lab Chip*, **4**, 265–277.