

LBS 1003509

043
104

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECC. DE VAYA GENERAL

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 43 número 43 del libro
correspondiente.

Deposited in *Dpto. Estadística e*
Fa. de Matemáticas
de esta Universidad desde el día *28/4*
16/6/93
17 de Junio

Sevilla, _____

El Jefe del Negociado de Tesia.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

ANALISIS ESTADISTICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE VIDA BASADO EN LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO

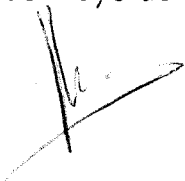
Memoria dirigida por:
Prof. Dr. D. Rafael Infante Macías
Prof. Dr. D. José Muñoz Pérez

Memoria presentada por:
José María Fdez. Ponce

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS

ANALISIS ESTADISTICO DE LAS DISTRIBUCIONES
DE VIDA BASADO EN LA FUNCION DE
ESPARCIMIENTO

Visado en Sevilla a
12 de Mayo de 1.993




Memoria dirigida por:
Prof. Dr. D. Rafael Infante Macías
Prof. Dr. D. José Muñoz Pérez



Memoria presentada para optar
al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas.

Sevilla, Mayo de 1.993



Fdo. José María Fdez. Ponce

A mi Madre, a mi Hermana y en memoria de mi Padre.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más enorme gratitud a mis directores de tesis, Prof. Dr. Rafael Infante Macías y Prof. Dr. José Muñoz Pérez, por la confianza, apoyo y amistad que depositaron en mí desde el primer día. A ellos le debo no sólo el haber podido completar mi formación científica sino también el espíritu universitario que me han transmitido.

Asímismo, quiero hacer llegar mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla porque durante todos estos años de duro trabajo ellos fueron "mi otra familia". Especialmente al Prof. Manuel Muñoz Márquez, ya que sin su colaboración en los aspectos informáticos, la finalización de esta memoria se habría retrasado bastante.

También quiero expresar mi más sincera gratitud a la Fundación "Octavio Comes" por la ayuda que me ofrecieron para poder realizar mis estudios de Doctorado. En especial al que fue su Presidente, Sr. D. Rafael Montes (q.p.d.).

Sevilla, Mayo de 1.993

ÍNDICE

RESUMEN	1
1 INTRODUCCION.	2
1.1 RESEÑAS HISTORICAS.	2
2 LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO.	8
2.1 INTRODUCCION.	8
2.2 LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO.	9
2.3 INSEGADUZ ASINTOTICA PARA $S_n^+(u)$	12
2.4 NORMALIDAD ASINTOTICA DE $S_n^+(u)$	26

2.5	FUNCION DE INFLUENCIA DE $T_u(F)$	32
2.6	PROPIEDADES DE LA CONSISTENCIA DE $S_n^+(u)$	34
3	DISTRIBUCIONES Y ESPARCIMIENTO.	44
3.1	INTRODUCCION.	44
3.2	CARACTERIZACION DE LAS DISTRIBUCIONES DE VIDA .	45
3.3	ORDENES Y ESPARCIMIENTO.	58
4	TESTS PARA DMRL Y NBUE.	67
4.1	INTRODUCCION.	67
4.2	UN TEST PARA ALTERNATIVAS DMRL.	69
4.3	UN TEST PARA ALTERNATIVAS NBUE.	81
4.4	UN TEST DE BONDAD DE AJUSTE.	89
4.4.1	Introducción.	89

4.4.2	Test de Bondad de ajuste.	89
4.4.3	Apéndice.	99
5	ESPARCIMIENTO MULTIVARIANTE.	102
5.1	INTRODUCCION.	102
5.2	ESPARCIMIENTO MULTIVARIANTE.	103
5.3	FIABILIDAD MULTIVARIANTE.	108
	CONCLUSIONES	125
	ANEXO	129
	BIBLIOGRAFIA	133

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es la caracterización de las distribuciones de vida mediante la función de esparcimiento. Para ello se estudian diferentes órdenes parciales entre funciones de distribución así como tests de hipótesis no paramétricos. Lo hemos estructurado en cinco capítulos. En el primero se hace una breve reseña histórica, planteando el origen de la Teoría de la Fiabilidad hasta el problema que en la actualidad nos planteamos.

En el segundo capítulo se define lo que hemos llamado función de esparcimiento de una variable aleatoria positiva absolutamente continua y de media finita. Proponemos un estimador natural de esta función comprobando que es asintóticamente insesgado, asintóticamente normal y robusto frente a observaciones atípicas (outliers). Por último, en este capítulo se considera su vinculación con el campo de la economía, en particular la relación que tiene con la Curva de Lorenz y el índice de Gini.

En el tercer capítulo se estudia la caracterización de distribuciones de vida mediante la función de esparcimiento. Estas caracterizaciones son muy útiles desde el punto de vista de una visualización gráfica de dicha función de esparcimiento.

En el cuarto capítulo se construyen test de hipótesis para contrastar exponencialidad frente a alternativas DMRL y NBUE. Debido a la dificultad de poder calcular la distribución exacta de los estadísticos dicho estudio lo hemos realizado empleando técnicas de simulación.

Por último, en el quinto capítulo hemos extendido en la medida de lo posible el concepto de función de esparcimiento al caso multivariante dando algunas características similares a las realizadas en el segundo bloque.

CAPITULO 1

INTRODUCCION.

1.1 RESEÑAS HISTORICAS.

En 1.953, Epstein y Sobel publicaron un artículo en la J.A.S.A. dando origen a un nuevo campo dentro de la Estadística: la Teoría de la Fiabilidad. El problema que se plantearon fue: supongamos que una máquina fabrica piezas, si tomamos n piezas y le observamos una característica como puede ser el diámetro de su base, sería muy extraño que la primera pieza observada tuviera el diámetro más pequeño, la segunda pieza el segundo diámetro más pequeño y así sucesivamente hasta la n -ésima. Sin embargo, existen muchas situaciones reales tales como las pruebas de vida y otras situaciones de tipo destructiva donde los datos sí son observados de una forma "ordenada".

Supongamos en términos generales, que comprobamos n piezas elegidas al azar de una población y los datos originados son valores ordenados. Supongamos que nosotros podemos elegir el momento de dejar de observar piezas cuando se hayan producido r fallos. ¿Qué ventajas lleva asociada la posibilidad de esa

decisión ?.

Epstein y Sobel observaron como la distribución exponencial negativa se ajustaba mejor que una distribución normal para explicar el tiempo de vida de ciertas componentes eléctricas. Su objetivo estaba claro: hacer estimaciones del parámetro de la exponencial basándose en los datos muestrales ordenados. Proponen estimadores de máxima verosimilitud utilizando los estadísticos de orden de la muestra.

A raíz de los estudios de Epstein y Sobel la literatura sobre Fiabilidad se hace muy numerosa y variada. En esta memoria nos vamos a centrar fundamentalmente en el estudio de diferentes clases de distribuciones de vida basadas en nociones de edad.

En 1.966, Bessler y Veinot establecieron algunos órdenes parciales entre funciones distribución. Según se recoge en su artículo, se definen X y Z como variables aleatorias con función de distribución F y G respectivamente, ambas continuas por la derecha. Sea $F^{-1}(\alpha) = \inf \{t : F(t) \geq \alpha\}$, , $0 < \alpha < 1$ el percentil 100α -ésimo de F . Análogamente para $G^{-1}(\alpha)$.

DEFINICION 1.1 X es estocásticamente más pequeña que Z , $X \stackrel{s}{\prec} Z$ si

$$Pr \{X > t\} \leq Pr \{Z > t\}, , \quad \forall t$$

o equivalentemente $G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha) \geq 0$ para $0 < \alpha < 1$.

DEFINICION 1.2 X es estocásticamente más pequeña en media que Z ,

$$X \stackrel{m}{\prec} Z \text{ si } E(X - t)^+ \leq E(Z - t)^+ \quad \forall t.$$

DEFINICION 1.3 X está menos esparcida que Z , $X \prec Z$, si

$$(X - F^{-1}(u))^+ \stackrel{s}{\prec} (Z - G^{-1}(u))^+ \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

También

DEFINICION 1.4 X está menos esparcida en media que Z , $X \overset{m}{\subset} Z$, si tienen esperanzas finitas y $(X - EX)^+ \overset{m}{\prec} (Z - EZ)^+$

Resultados importantes de este artículo son:

COROLARIO 1.1 Si X y Z son v.a. con $X \prec Z$, entonces $X \overset{m}{\subset} Z$.

TEOREMA 1.2 Si $X = (X_i)$ y $Z = (Z_i)$ son n vectores aleatorios de componentes independientes y $EX_i^- > -\infty$ y $EZ_i^- > -\infty \quad \forall i$, entonces son equivalentes:

1. $X_i \overset{m}{\subset} Z_i, i = 1, \dots, n$.
2. $Eq(X) \leq Eq(Z)$ para toda función q convexa no decreciente.

LEMA 1.3 Si X y Z son variables aleatorias valoradas enteras con

$$E(X - t)^+ \leq E(Z - t)^+$$

para todo entero t , entonces $X \overset{m}{\subset} Z$

En 1.987, Kochar y Wiens publican un artículo en la Naval Research Quarterly Logistics definiendo propiedades de edad para funciones de distribuciones de vida. También dan criterios para ordenar estas distribuciones según sus características de edad. Sea X una v.a. que representa el tiempo de vida de un

sistema y F la f.d. de X , $\bar{F} = 1 - F$ la función de supervivencia y μ_F el tiempo de vida media. Supongamos también que todas las distribuciones consideradas tienen media finita y que son estrictamente crecientes sobre sus soportes. En suma, si F es absolutamente continua, con densidad f , la tasa o intensidad de fallo se define como

$$r_F(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad 0 \leq x \leq F^{-1}(0).$$

Entonces, la función de vida media residual se define como:

$$\mu_F(x) = E\{X - x | X > x\}$$

Entre los criterios de edad más importantes mencionados en el citado artículo podemos destacar:

1. Diremos que F es del tipo de tasa de fallo creciente (IFR) si $-\log \bar{F}(x)$ es convexa.
2. F es DMRL si $\mu_F(x)$ es no creciente.
3. F es NBUE si $\mu_F(x) \leq \mu_F(0)$

Se puede demostrar las siguientes implicaciones:

$$IFR \implies DMRL \implies NBUE$$

También se definen determinados órdenes parciales entre funciones de distribución de vida según sus propiedades de edad:

1. Diremos que F tiene mayor tasa de fallo creciente que G ($F \prec^{IFR} G$) si
- $$G^{-1} \circ F(x)$$

es convexa.

2. Diremos que F tiene mayor promedio de tasa de fallo creciente (IFRA) que G ($F \prec^{IFRA} G$) si

$$G^{-1}F(\alpha x) \leq \alpha G^{-1}F(x),, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,, \quad x \geq 0$$

3. Diremos que F es del tipo " Nueva Mejor que Usada " que G ($F \prec^{NBU} G$) si

$$G^{-1}F(x + y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y)$$

Al igual que antes, se puede demostrar:

$$F \prec^{IFR} G \implies F \prec^{IFRA} G \implies F \prec^{NBU} G$$

También caracterizan el orden DMRL y NBUE como::

$$F \prec^{DMRL} G \text{ si } \frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} \text{ es no creciente en } u \in [0, 1]$$

$$F \prec^{NBUE} G \text{ si } \frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} \leq \frac{\mu_F}{\mu_G} \quad u \in [0, 1]$$

En 1.975 Barlow y Proschan definen el concepto de tiempo total de prueba:

$$H_F^{-1}(t) = \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du$$

de este artículo debemos resaltar el siguiente resultado:

TEOREMA 1.4 *F es IFR si y sólo si H_F^{-1} es cóncava.*

Klesfjo (1.980 y 1.983) demuestra caracterizaciones para las distribuciones de vida basándose en el tiempo total de prueba. Realiza un contraste de hipótesis, basándose en la hipótesis nula de exponencialidad frente a alternativas que no son exponenciales pero poseen una determinada característica de edad.

Entre todos los tests de hipótesis de este tipo tenemos que destacar los trabajos realizados por Hollander y Proschan (1.975) para alternativas DMRL y NBUE así como el construido por Gail y Gastwirth en 1.978 basado en la Curva de Lorenz y en el índice de Gini.

Haciendo referencia a este último test es importante resaltar como estudios realizados por Klesfjo y Bo Bergman en 1.984 demuestran y analizan la relación que existe entre fiabilidad y economía. La idea es enlazar el concepto de tiempo total de prueba con el estadístico de Gini y la curva de Lorenz.

Podemos encontrar diferentes tests de hipótesis para contrastar alternativas con propiedades de edad en las tesis doctorales de Zalkikar (1.988) y de Bandyopadyay (1.989). Toda esta problemática resuelta para el caso univariante en la actualidad se está intentado resolver para distribuciones multivariantes. Podemos destacar los trabajos de Buchanan y Singpurwalla (1.977), Block y Savits (1.977), Marshall y Olkin (1.967) y Puri y Rubin (1.974).

CAPITULO 2

LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO: DEFINICION Y PROPIEDADES.

2.1 INTRODUCCION.

En este capítulo vamos a estudiar una función asociada a las variables aleatorias no negativas absolutamente continuas de media finita (es decir, distribuciones de vida). Durante la década de los setenta Bickel y Lehman estudiaron las medidas de dispersión y de diseminación para modelos no paramétricos. En dicho estudio se analiza la eficiencia de este tipo de medidas. Bartoszewicz y Kochar, entre otros, estudian el concepto de transformación TTT (Total Time on Test Transformation) para caracterizar determinados órdenes parciales entre diferentes distribuciones de vida y sus aplicaciones directa a tests de bondad de ajuste para una exponencial (ver, Gail y Gaswirth 1.978). La función de esparcimiento que estudiamos en este

capítulo es al mismo tiempo una medida de diseminación y está relacionada con el concepto de transformación TTT, dándonos propiedades más interesantes a la hora de intentar comparar dos variables aleatorias de distribuciones de vida.

Este capítulo lo podemos dividir en dos grandes bloques. En el primero damos la definición de función de esparcimiento y un segundo bloque que trataría de las propiedades de insesgadez y robustez del estimador empírico de la función de esparcimiento. Al final del capítulo se analiza un orden parcial entre las distribuciones de vida basado en esta función.

2.2 LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO.

DEFINICION 2.1 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$, se define la función de esparcimiento de esta variable como la función:*

$$S_X^+ : [0, 1] \longrightarrow R$$

de tal forma que,

$$S_X^+(u) = E\{(X - Q(u))^+\}$$

donde se ha llamado,

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad Q(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$

PROPOSICION 2.1 *La función de esparcimiento es no creciente.*

PROPOSICION 2.2 *Sea X una variable aleatoria con distribución de vida $F(\cdot)$, se verifica*

$$\lim_{u \downarrow 0} S_X^+(u) = \mu_X$$

Veamos ahora como la función de esparcimiento se puede descomponer en el producto de un L-funcional generalizado por una función lineal.

Siguiendo la línea de Serfling (1984), sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución absolutamente continua $F(\cdot)$. Sea h una función de R^m en R (no necesariamente simétrica) y notamos por H_F la función de distribución de $h(X_1, \dots, X_n)$. Un número de parámetros de interés se pueden expresar como $T(H_F)$, donde $T(\cdot)$ es un funcional de forma general:

$$T(G) = \int_0^1 q(T_t(G)) dK(t) \quad (2.1)$$

Aquí G es una función de distribución, q es una función real valorada de una variable real, K es una función de distribución en $[0, 1]$, y para cada t en el soporte S de K , $T_t(\cdot)$ es un funcional de la forma:

$$T_t(G) = \int_0^1 G^{-1}(s) dM_t(s) \quad (2.2)$$

donde $G^{-1}(s) = \inf\{x : G(x) \geq s\}$ y M_t es una medida signada en $[0, 1]$. La forma general (2.1) son los denominados L-funcionales generalizados.

Si partimos de la definición de función de esparcimiento tenemos que:

$$S_X^+(u) = \int_{Q(u)}^{\infty} (t - Q(u)) dF(t)$$

Como X es una variable absolutamente continua se tiene que:

$$S_X^+(u) = \int_u^1 (Q(t) - Q(u)) dt$$

dividiendo a ambos miembros por $1 - u$ para $u \neq 1$:

$$\frac{S_X^+(u)}{1-u} = \frac{1}{1-u} \int_u^1 (Q(t) - Q(u)) dt$$

$$\frac{S_X^+(u)}{1-u} = \int_0^1 (Q(t) - Q(u)) dK(t) \quad K(t) \rightsquigarrow U[u, 1]$$

Veamos ahora como esta expresión corresponde a un L-funcional generalizado. Partiendo de la definición dada anteriormente, tomemos:

1. $q(x) = x$
2. $K(t) \rightsquigarrow U[u, 1]$ con $u \neq 1$
3. Construiremos la medida signada $M_{t,u}$ de la siguiente manera: sea el espacio medible $([0, 1], A_B)$, donde (A_B) es el σ -álgebra de Borel inducido en $[0, 1]$, entonces $\forall A \in A_B$,

$$M_{t,u}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A, u \notin A \\ -1 & \text{si } t \notin A, u \in A \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Tendremos por tanto,

$$T_u(F) = \int_0^1 q(T_{t,u}(F)) dK(t), \quad T_{t,u}(F) = \int_0^1 Q(s) dM_{t,u}(s)$$

$$T_u(F) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 T_{t,u}(F) dt, \quad T_{t,u}(F) = Q(t) - Q(u)$$

Luego,

$$T_u(F) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 (Q(t) - Q(u)) dt = \frac{S^+(u)}{1-u}$$

Partiendo de esta construcción el objetivo está bastante claro: estimar la función de esparcimiento. Parece sensato tomar el estimador:

$$\hat{S}^+(u) = (1-u)T_u(F_n)$$

Obteniéndose así

$$\hat{S}^+(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^n (n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)}) \quad \frac{i-1}{n} < u \leq \frac{i}{n}$$

2.3 INSESGADEZ ASINTOTICA PARA $S_n^+(u)$.

Veamos previamente una interesante propiedad del momento de primer orden para estadísticos ordenados cuya función de densidad cumpla determinados requisitos.

Supongamos que tenemos una variable aleatoria absolutamente continua no negativa con función de densidad de probabilidad $f(t)$. Sean $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ los estadísticos de orden de n variables aleatorias independientes con f.d.p. $f(t)$. Sean X_1, \dots, X_n las variables definidas por las ecuaciones:

$$F(X_r) = \frac{r}{n+1} \quad (r = 1, \dots, n)$$

Entonces, formalmente podemos desarrollar $X_{(r)}$ sobre X_r por una serie de Taylor inversa, obteniendo:

$$X_{(r)} = X_r + X_r' h(X_{(r)}) + \frac{1}{2} X_r'' h^2(X_{(r)}) + \dots$$

donde ,

$$h(X_{(r)}) = F(X_{(r)}) - F(X_r) = F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}$$

siendo,

$$X_r' = \frac{dX_r}{dF} = \frac{dX}{dF} \Big|_{X=X_r}, \quad X_r'' = \frac{d^2 X_r}{dF^2} = \frac{d^2 X}{dF^2} \Big|_{X=X_r}$$

No siempre es bueno realizar este desarrollo. En concreto, si n es grande y r está próximo a 0 ó a n , la convergencia puede ser lenta o incluso no existir.

LEMA 2.3 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua no negativa de media finita, con función cuantil con derivada acotada al menos hasta la de orden tres. Entonces, se verifica:*

$$E \{X_{(r)}\} \approx Q \left(\frac{r}{n+1} \right) + o \left(\frac{1}{n} \right) \quad (2.3)$$

Supuesto que n no es grande al mismo tiempo que r está próximo a 1 o a n .

Demostración.

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor inversa de $X_{(r)}$ sobre y las hipótesis de partida tendremos que :

$$X_{(r)} = Q\left(\frac{r}{n+1}\right) + \frac{1}{fQ(r/n+1)} \left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right) - \frac{1}{2} \frac{f' [Q(r/n+1)]}{f^3 [Q(r/n+1)]} \left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right)^2 \\ + \frac{1}{6} \frac{d^3 Q(t)}{dt^3} \Big|_{t=Z} \left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right)^3$$

con $Z = x$ si $F(X_{(k)}) = u_k$

$$x \in \left(u_k, \frac{k}{n+1}\right) \quad u_k < \frac{k}{n+1}$$

$$x \in \left(\frac{k}{n+1}, u_k\right) \quad u_k > \frac{k}{n+1}$$

Si llamamos E_n al término resto, se verifica:

$$E \{E_n\} \leq o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Luego podemos considerar aceptable la aproximación:

$$X_{(r)} \approx Q\left(\frac{r}{n+1}\right) + \frac{1}{fQ(r/n+1)} \left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right) - \frac{1}{2} \frac{f' [Q(r/n+1)]}{f^3 [Q(r/n+1)]} \left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right)^2$$

Tomando esperanzas,

$$E\{X_{(r)}\} \approx Q\left(\frac{r}{n+1}\right) - \frac{1}{2} \frac{f'[Q(r/n+1)]}{f^3[Q(r/n+1)]} E\left\{\left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right)^2\right\}$$

Ahora bien,

$$E\left\{\left(F(X_{(r)}) - \frac{r}{n+1}\right)^2\right\} = E\left\{\left(F(X_{(r)})\right)^2\right\} + E\left(\left(\frac{r}{n+1}\right)^2\right) - 2\frac{r}{n+1}E\left(F(X_{(r)})\right)$$

De David (1.954) sabemos que se verifica,

$$EF_r^l = \frac{n!}{(n+l)!} \frac{(r+l-1)!}{(r-1)!}$$

En concreto, nos será de utilidad:

$$EF_r^2 = \frac{r(r+1)}{(n+2)(n+1)} \quad EF_r^1 = \frac{r}{n+1}$$

Luego,

$$E\{X_{(r)}\} \approx Q\left(\frac{r}{n+1}\right) + o\left(\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\right)$$

Obteniéndose por tanto que,

$$E\{X_{(r)}\} \approx Q\left(\frac{r}{n+1}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

□

TEOREMA 2.4 *Sea X una variable aleatoria que verifica:*

1. *Es absolutamente continua no negativa con media finita.*
2. *Su función cuantil es diferenciable acotada en $(0, 1)$.*

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{S_n^+(u)\} = S^+(u)$$

uniformemente en $[0, 1]$.

Demostración.

Supogamos que $\frac{j-1}{n} < u \leq \frac{j}{n}$, entonces

$$\begin{aligned} E\{S_n^+(u)\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \{E(X_{(i)}) - E(X_{(j)})\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left(Q\left(\frac{i}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) + \frac{n-j}{n} o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

Demostremos para ello que se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left(Q\left(\frac{i}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) - S^+(u) \right| = 0$$

Como partimos de la hipótesis que la función cuantil es diferenciable acotada en $(0, 1)$, tendremos que:

$$Q\left(\frac{i}{n+1}\right) = Q\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{i}{n(n+1)} Q'(\xi_i) \quad \xi_i \in \left(\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left(Q\left(\frac{i}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{j}{n(n+1)} Q'(\xi_j) - \frac{i}{n(n+1)} Q'(\xi_i) \right) \\ & \quad + \frac{1}{n} \left(Q\left(\frac{n}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \max_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left(Q\left(\frac{i}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) - S^+(u) \right| \leq \\ & \leq \max_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right) - S^+(u) \right| + \end{aligned}$$

$$\max_{u \in [0,1]} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{jQ'(\xi_j)}{n(n+1)} - \frac{iQ'(\xi_i)}{n(n+1)} \right| + \max_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} Q\left(\frac{n}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right|$$

Por la definición de función de esparcimiento, sabemos:

$$S^+(u) = \int_u^{\frac{j}{n}} (Q(t) - Q(u)) dt + \sum_{i=j}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (Q(t) - Q(u)) dt, \quad \frac{j-1}{n} < u \leq \frac{j}{n}$$

Por tanto se verifica,

$$S^+(u) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right)$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_n \leq & \max_{1 \leq j \leq n-1} \left(S^+\left(\frac{j-1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right) \right) + \\ & + \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{M}{n^2(n+2)} \left| (n-j) \left(\frac{j-n-1}{2} \right) \right| + \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{1}{n} \left(Q\left(\frac{n}{n+1}\right) - Q\left(\frac{j}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente como los dos últimos sumandos son infinitésimos de orden n^{-1} .

$$\epsilon_n \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \left(S^+\left(\frac{j-1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\epsilon_n \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{n} \left(Q\left(\frac{k}{n}\right) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n-1} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{j}{n}\right) \right) + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left(Q(t) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) dt + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$\epsilon_n \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \left\{ \frac{1}{n} \left(Q\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{n-j}{n} Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) + \frac{n-j-1}{n} Q\left(\frac{j}{n}\right) + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left(Q(t) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) dt \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\epsilon_n \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \left\{ \frac{n-j}{n} \left(Q\left(\frac{j}{n}\right) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left(Q(t) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) dt \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\epsilon_n \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{M(n-j)}{n^2} + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 (Q(t)) dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Luego,

$$\epsilon_n \leq \frac{M(n-1)}{n^2} + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 (Q(t)) dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Es evidente que se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0.$$

□

TEOREMA 2.5 *Sea X una variable aleatoria no negativa absolutamente continua que verifica las hipótesis del lema anterior y cuya función cuantil es diferenciable acotada hasta orden 3 en cualquier subintervalo cerrado del intervalo $(0, 1)$. Entonces,*

$$\text{Var} \{S_n^+(u)\} \approx o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Demostración.

$$\text{Var} \{S_n^+(u)\} = E \left\{ \left(S_n^+(u) - ES_n^+(u) \right)^2 \right\} =$$

$$E \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n (X_{(i)} - X_{(j)}) - \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n (EX_{(i)} - EX_{(j)}) \right)^2 \right\} =$$

$$\frac{1}{n^2} E \left\{ \left(\sum_{i=j+1}^n (X_{(i)} - EX_{(i)}) - (n-j)(X_{(j)} - EX_{(j)}) \right)^2 \right\} =$$

$$\frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=j+1}^n E(X_{(i)} - EX_{(i)})^2 + \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j+1}^n E \left((X_{(i)} - EX_{(i)})(X_{(j)} - EX_{(j)}) \right) + \right.$$

$$\left. (n-j)^2 E \left((X_{(j)} - EX_{(j)})^2 \right) - 2(n-j) \sum_{i=j+1}^n E \left\{ (X_{(i)} - EX_{(i)})(X_{(j)} - EX_{(j)}) \right\} \right\}$$

para $u \in (\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$.

Utilizando resultados del lema 2.3. y los siguientes de David (1.954):

$$\begin{aligned}
 Var \{X_{(r)}\} &= \frac{p_r q_r}{n+2} \left(Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) \right)^2 + \\
 &\frac{p_r q_r}{(n+2)^2} \left\{ 2(q_r - p_r) Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) Q'' \left(\frac{r}{n+1} \right) + p_r q_r \left(Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) Q^{III} \left(\frac{r}{n+1} \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{1}{2} (Q^{II} \left(\frac{r}{n+1} \right))^2 \right) \right\} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
 COV(X_{(r)}, X_{(s)}) &= \frac{p_r q_s}{n+2} Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) Q' \left(\frac{s}{n+1} \right) + \\
 &\frac{p_r q_s}{(n+2)^2} \left\{ \left((q_r - p_r) Q'' \left(\frac{r}{n+1} \right) Q' \left(\frac{s}{n+1} \right) + (q_s - p_s) Q'' \left(\frac{s}{n+1} \right) Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) \right) + \right. \\
 &\left. \frac{1}{2} p_r q_r Q' \left(\frac{s}{n+1} \right) Q^{III} \left(\frac{r}{n+1} \right) + \frac{1}{2} p_s q_s Q^{III} \left(\frac{s}{n+1} \right) Q' \left(\frac{r}{n+1} \right) + \right. \\
 &\left. \frac{1}{2} p_r q_s Q'' \left(\frac{r}{n+1} \right) Q'' \left(\frac{s}{n+1} \right) \right\} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
 \end{aligned}$$

Siendo,

$$p_r = \frac{r}{n+1} \quad q_r = 1 - p_r$$

Sustituyendo estas dos igualdades en la expresión anteriormente obtenida llegamos a:

$$\text{Var} \{S_n^+(u)\} \approx o\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

TEOREMA 2.6 *Sea X una variable aleatoria no negativa absolutamente continua que verifica las hipótesis del lema 2.3. Entonces,*

$$E \int |S_n^+ - ES_n^+| \approx o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} S_n^+(u) &= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left(Q\left(\frac{i}{n+1}\right) + (U_{(i)} - \frac{i}{n+1}) \frac{1}{fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)} - \right. \end{aligned}$$

$$\left(U_{(i)} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \frac{J\left(\frac{i}{n+1}\right)}{2 \left(fQ\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)^2} + g(U_{(i)}) \right)$$

$$- \frac{n-j}{n} \left(Q\left(\frac{j}{n+1}\right) + \left(U_{(j)} - \frac{j}{n+1} \right) \frac{1}{fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)} - \right.$$

$$\left. \left(U_{(j)} - \frac{j}{n+1} \right)^2 \frac{J\left(\frac{j}{n+1}\right)}{2 \left(fQ\left(\frac{j}{n+1}\right) \right)^2} \right) + g(U_{(j)})$$

donde se ha llamado:

$$J(u) = -\frac{f'Q(u)}{fQ(u)}, \quad u \in [0, 1]$$

y también,

$$g(U_{(k)}) = \frac{1}{3!} \left(U_{(k)} - \frac{k}{n+1} \right)^3 Q^{III}(Z_{(k)}) \quad \text{con}$$

$$Z_{(k)} = \zeta_{u_k} \quad \text{si } U_{(k)} = u_{(k)}$$

$$\zeta_{u_k} \in \left(u_k, \frac{k}{n+1}\right) \quad u_k < \frac{k}{n+1}$$

$$\zeta_{u_k} \in \left(\frac{k}{n+1}, u_k\right) \quad u_k > \frac{k}{n+1}$$

Sabiendo que $EX_{(r)} = Q\left(\frac{r}{n+1}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (Muñoz, 1.987) Ahora

bien,

$$S_n^+(u) - ES_n^+(u)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^n \left\{ \left(U_{(i)} - \frac{i}{n+1}\right) \frac{1}{fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)} - \left(U_{(i)} - \frac{i}{n+1}\right)^2 \frac{J\left(\frac{i}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2} + g(U_{(i)}) \right\}$$

$$- \frac{n-j}{n} \left(\left(U_{(j)} - \frac{j}{n+1}\right) \frac{1}{fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)} - \left(U_{(j)} - \frac{j}{n+1}\right)^2 \frac{J\left(\frac{j}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^2} + g(U_{(j)}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

Por tanto, se tendrá:

$$\int |S_n^+ - ES_n^+|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=j+1}^n \left(\left| U_{(i)} - \frac{i}{n+1} \right| \frac{1}{fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)} + \left| U_{(i)} - \frac{i}{n+1} \right|^2 \frac{J\left(\frac{i}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2} + |g(U_{(i)})| \right) \\
&+ \frac{n-j}{n^2} \left| U_{(j)} - \frac{j}{n+1} \right| \frac{1}{fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)} + \frac{n-j}{n^2} \left| U_{(j)} - \frac{j}{n+1} \right|^2 \frac{J\left(\frac{j}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^2} + \frac{n-j}{n^2} |g(U_{(j)})| \\
&+ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Verificándose así:

$$\begin{aligned}
&E \int |S_n^+ - ES_n^+| \\
&\leq \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=j+1}^n \left(\frac{i(n-i+1)}{n+2} \right)^{1/2} \frac{1}{fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)} + \left(\frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)} \right)^{1/2} \frac{J\left(\frac{i}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2} \right\} + \\
&+ \frac{n-j}{n^2} \left(\left(\frac{j(n-j+1)}{n+2} \right)^{1/2} \frac{1}{fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)} + \left(\frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)} \right)^{1/2} \frac{J\left(\frac{j}{n+1}\right)}{2\left(fQ\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

□

2.4 NORMALIDAD ASINTOTICA DE $S_n^+(u)$.

Vamos a estudiar la normalidad asintótica del estimador empírico de la función de esparcimiento. Para ello sigamos la línea de Serfling 1984 b).

Aproximemos $T_u(F_n) - T_u(F)$ por:

$$T_u(F; F_n - F) = \frac{d}{d\lambda} T_u(F + \lambda(F_n - F)) \Big|_{\lambda=0+}$$

$$T_u(F; F_n - F) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 T_{t,u}((F; F_n - F)) dt$$

Ahora bien,

$$T_{t,u}(F; F_n - F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{t,u}(x_i)$$

donde se verifica,

$$A_{t,u}(x) = \int_0^1 \frac{s - I[x \leq Q(s)]}{fQ(s)} dM_{t,u}(s) = \frac{t - I[x \leq Q(t)]}{fQ(t)} - \frac{u - I[x \leq Q(u)]}{fQ(u)}$$

Es evidente que $T_{t,u}(F; F_n - F)$ es un U-estadístico debido a la estructura de U-estadístico de $F_n(y)$, y por tanto $T_{t,u}(F; F_n - F)$ se puede representar como un estadístico:

$$T_{t,u}(F; F_n - F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(x_i) \quad (2.4)$$

donde se ha llamado,

$$G(x) = \int_0^1 q'(T_{t,u}(F)) A_{t,u}(x) dK(t)$$

Consecuentemente, fijándonos en que $E(G(X)) = 0$ definimos,

$$G_1(x) = G(X), \quad \sigma^2(T, F) = \text{var}(G_1(x))$$

Si se verifica que $E(G^2(X)) < \infty$ entonces $\sigma^2(T, F) < \infty$

Tendremos por el teorema Central del límite para los U-estadísticos:

$$n^{1/2}(T_u(F; F_n - F)) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2(T, F)) \quad (2.5)$$

Por tanto, un teorema similar se puede aplicar a $n^{1/2}(T_u(F_n) - T_u(F))$ si el término resto:

$$\Delta_{n,u} = T_u(F_n) - T_u(F) - T_u(F; F_n - F)$$

satisface:

$$\Delta_{n,u} = O_p(n^{-1/2}) \quad (2.6)$$

De Serfling (1.984) siguen un conjunto de condiciones suficientes para la última igualdad:

1.

$$\eta_1 = \int_0^1 |q'(T_t(H_F))| dK(t) < \infty$$

2.

$$\eta_2 = \int_0^1 |q''(T_t(H_F))| dK(t) < \infty$$

3.

$$\sup_{t \in S} |T_t(H_n) - T_t(H_F) - T_t(H_F; H_n - H_F)| = O_p(n^{-1/2})$$

4.

$$\sup_{t \in S} \{T_t(H_n) - T_t(H_F)\}^2 = O_p(n^{-1/2})$$

donde S denota el soporte de K .

En nuestro caso por ser $q(x) = x$ se van a verificar las condiciones i), ii) y iv). Para demostrar la condición iii) se debe verificar que:

$$\sup_{u \leq t < 1} |T_{t,u}(F_n) - T_{t,u}(F) - T_{t,u}(F; F_n - F)| = O_p(n^{-1/2})$$

Basándonos en los lemas 4.1 a 4.3 de Serfling (1.984) esta condición se va a verificar si para algún $\epsilon > 0$ la función de densidad f está acotada por 0 y es continua Lipschitz en $A_\epsilon = (Q_1(u) - \epsilon, \alpha)$. Por tanto para poder aplicar el teorema anterior nos falta por comprobar que $\sigma^2(T, F) < \infty$.

$$\sigma^2(T, F) = E \{G^2(X)\}$$

$$G_u(x) = \int_0^1 A_{t,u}(x) dK(t) =$$

$$\frac{1}{1-u} \int_u^1 \left(\frac{t - I(F(x) \leq t)}{fQ(t)} - \frac{u - I(F(x) \leq u)}{fQ(u)} \right) dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-u} \left(\int_{F(x)}^1 \frac{t-1}{fQ(t)} dt + \int_u^{F(x)} \frac{t}{fQ(t)} dt - \frac{u}{fQ(u)} \right) & \text{si } F(x) \geq u \\ \frac{1}{1-u} \left(\int_u^1 \frac{t-1}{fQ(t)} dt - \frac{u-1}{fQ(u)} \right) & \text{si } F(x) < u \end{cases}$$

Fijémonos en que:

$$\int_u^1 \frac{t-1}{fQ(t)} dt = \int_{Q(u)}^\infty \frac{F(p)-1}{f(p)} dF(p) =$$

$$- \int_{Q(u)}^\infty (1-F(p)) dp = -S_X^+(u)$$

$$\int_u^v \frac{t}{fQ(t)} dt = \int_{Q(u)}^{Q(v)} \frac{F(m)}{f(m)} dF(m) = -S_X^+(u) + Q(v) - Q(u)$$

Por tanto,

$$G_u(x) = \begin{cases} \frac{-S_X^+(u) + x - Q(u)}{1-u} - \frac{u}{fQ(u)} & \text{si } F(x) \geq u \\ \frac{-S_X^+(u)}{1-u} + \frac{1-u}{fQ(u)} & \text{si } F(x) < u \end{cases}$$

Obteniéndose ,

$$E \{G_u^2(X)\} = (1-u) \left\{ \frac{S_X^+(u) + Q(u)}{1-u} + \frac{u}{fQ(u)} \right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{(1-u)^2} \int_u^1 Q^2(v) dv - 2 \left\{ \frac{S_X^+(u) + Q(u)}{1-u} + \frac{u}{fQ(u)} \right\} \int_u^1 Q(v) dv + u \left\{ \frac{1-u}{fQ(u)} - \frac{S_X^+(u)}{1-u} \right\}$$

Como se verifica,

$$\int_u^1 Q^2(v) dv = \int_{Q(u)}^\infty x^2 dF(x) \leq \text{Var} \{X\} + \mu_X^2$$

$$\int_u^1 Q(v) dv = S^+(u) + (1-u)Q(u)$$

Resulta,

$$\begin{aligned} \sigma^2(T, F) = & \left\{ \frac{S_X^+(u) + Q(u)}{1-u} + \frac{u}{fQ(u)} \right\} \left\{ (1-u) \left(\frac{-S_X^+(u) + Q(u)}{1-u} + \frac{u}{fQ(u)} \right) \right. \\ & \left. - 2 \left(S_X^+(u) + Q(u)(1-u) \right) \right\} + \\ & + u \left(\frac{1-u}{fQ(u)} - \frac{S^+(u)}{1-u} \right) + \frac{1}{(1-u)^2} \int_{Q(u)}^{\infty} x^2 dF(x) \end{aligned}$$

Por tanto aplicando el teorema anterior, deducimos que si X es un variable aleatoria no negativa que verifica:

1. Momentos de primer y segundo orden finitos.
2. $f(x) > 0 \quad \forall x \in R$
3. La función de densidad está acotada por cero, es decir, $fQ(M) > M > 0$ y es continua Lipschitz en $A_\epsilon = [Q_1(u) - \epsilon, \infty)$ para algún $\epsilon > 0$.

Entonces,

$$n^{1/2} \{T_u(F_n) - T_u(F)\} \rightsquigarrow N(0; \sigma_u^2(T, F))$$

A partir de este resultado se puede obtener una ley asintótica para la estimación de la función de esparcimiento.

2.5 FUNCION DE INFLUENCIA DE $T_u(F)$.

Estudiamos la función de influencia de este funcional estadístico. Sea :

$$T_u(F) = \int_0^1 T_{t,u}(F) dK(t)$$

$$IC(x; T_u, F) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 T_{t,u}(F; \delta_x - F) dt$$

con,

$$T_{t,u}(F; \delta_x - F) = \frac{d}{d\lambda} T_{t,u}(F + \lambda(\delta_x - F)) |_{\lambda=0^+}$$

Pero sabemos que,

$$T_{t,u}(G) = \int_0^1 G^{-1}(s) dM_{t,u}(s) = G^{-1}(t) - G^{-1}(s)$$

$$H_x(y) = F(y) + \lambda(\delta_x(y) - F(y)) = \begin{cases} (1-\lambda)F(y) + \lambda & \text{si } y \geq x \\ (1-\lambda)F(y) & \text{si } y < x \end{cases}$$

Luego se calcula fácilmente :

$$H_x^{-1}(u) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{u-\lambda}{1-\lambda}\right) & \text{si } u \geq (1-\lambda)F(x) + \lambda \\ x & \text{si } (1-\lambda)F(x) + \lambda > u \geq (1-\lambda)F(x) \\ F^{-1}\left(\frac{u}{1-\lambda}\right) & \text{si } (1-\lambda)F(x) > u \end{cases}$$

Por tanto se tendría que:

$$T_{t,u}(F; \delta_x - F) = \begin{cases} \frac{t-1}{f(t)} - \frac{u-1}{f(u)} & \text{si } t, u \geq F(x) \\ \frac{t-1}{f(t)} - \frac{u}{f(u)} & \text{si } t \geq F(x), F(x) > u \\ \frac{t}{f(t)} - \frac{u}{f(u)} & \text{si } F(x) > t, u. \end{cases}$$

La curva de influencia será:

$$IC(x; T_u, F) = \begin{cases} \frac{1}{1-u} \int_u^1 \frac{t-1}{f(t)} dt + \frac{1-u}{f(u)} & \text{si } x \leq Q(u) \\ \frac{1}{1-u} \int_u^{F(x)} \frac{t}{f(t)} dt - \frac{u}{f(u)} + \frac{1}{1-u} \int_{F(x)}^1 \frac{t-1}{f(t)} dt & \text{si } x > Q(u). \end{cases}$$

Suponiendo que la función de densidad no se anula en el intervalo $(0, 1)$ deducimos la continuidad del integrando $\frac{t}{f(t)}$ o $\frac{t-1}{f(t)}$ y por tanto la curva de influencia está acotada resultando así que el coeficiente llamado por Hampel (1.974) el error grosero de sensibilidad es finito, siendo esta una propiedad importante de la robustez del estimador.

2.6 PROPIEDADES DE LA CONSISTENCIA DE $S_n^+(u)$.

En primer lugar vamos a fijar el nivel de significación correspondiente a un intervalo de confianza para la función de esparcimiento de una variable aleatoria que cumpla determinados requisitos. Para ello utilizaremos un conocido resultado de Serfling (1.980) sobre la función cuantil.

TEOREMA. *Serfling, (1.980)* Sea $0 < u < 1$. Si $Q(u)$ es la única solución para x de $F(x^-) \leq u \leq F(x)$, entonces $\forall \epsilon > 0$,

$$Pr [|Q_n(u) - Q(u)| > \epsilon] \leq 2 \exp(-2n\delta_\epsilon^2) \quad n \geq 1.$$

donde se verifica,

$$\delta_\epsilon = \min \{F(Q(u) + \epsilon) - u, u - F(Q(u) - \epsilon)\}$$

TEOREMA 2.7 *Sea $0 < u < 1$. Si X es una variable aleatoria absolutamente continua no negativa de media finita cuya función de densidad tiene una cota inferior distinta de cero. Entonces, $\forall \epsilon > 0$*

$$Pr \left\{ |S_n^+(u) - S^+(u)| > \epsilon \right\} \leq 2(n-j+1) \exp \left\{ -\frac{n^3 M^2 \epsilon^2}{2(n-j+1)^2} \right\}$$

siendo $\frac{j-1}{n} < u \leq \frac{j}{n}$ y también $f(x) \geq M > 0 \quad \forall x \in R^+$

Demostración.

Sabemos que

$$S_n^+(u) - S^+(u) = \int_u^1 \{(Q_n(t) - Q(t)) - (Q_n(u) - Q(u))\} dt$$

Luego,

$$|S_n^+(u) - S^+(u)| \leq \int_u^1 |Q_n(t) - Q(t)| dt + (1-u)|Q_n(u) - Q(u)|$$

Si calculamos las probabilidades de ambos sucesos aleatorios, tendremos

$$\begin{aligned} Pr \left\{ \omega \in \Omega, |S_n^+(u) - S^+(u)| > \epsilon \right\} &\leq Pr \left\{ \omega \in \Omega, \int_u^1 |Q_n(t) - Q(t)| dt > \frac{\epsilon}{2} \right\} \\ &\quad + Pr \left\{ \omega \in \Omega, |Q_n(u) - Q(u)| > \frac{\epsilon}{2(1-u)} \right\} \\ &\leq Pr \left\{ \omega \in \Omega, \int_u^{\frac{j}{n}} |Q_n(t) - Q(t)| dt > \frac{\epsilon}{2(n-j+1)} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=j}^{n-1} Pr \left\{ \omega \in \Omega, \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |Q_n(t) - Q(t)| dt > \frac{\epsilon}{2(n-j+1)} \right\} \\ &\quad + Pr \left\{ \omega \in \Omega, |Q_n(u) - Q(u)| > \frac{\epsilon}{2(1-u)} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en cada uno de los intervalos de integración la función integrando es continua, podemos expresar:

$$\begin{aligned} &\leq Pr \left\{ \omega \in \Omega, \frac{1}{n} |Q_n(\xi_1) - Q(\xi_1)| dt > \frac{\epsilon}{2(n-j+1)} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=j}^{n-1} Pr \left\{ \omega \in \Omega, \frac{1}{n} |Q_n(\xi_i) - Q(\xi_i)| dt > \frac{\epsilon}{2(n-j+1)} \right\} \\ &\quad + Pr \left\{ \omega \in \Omega, |Q_n(u) - Q(u)| > \frac{\epsilon}{2(1-u)} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando ahora el teorema de Serfling y por tratarse de una variable aleatoria absolutamente continua, se tendrá

$$F(Q(\xi_i) + \epsilon_i) - FQ(\xi_i) = \epsilon_i f(\eta_i) \quad \eta_i \in (Q(\xi_i), Q(\xi_i) + \epsilon_i)$$

$$FQ(\xi_i) - F(Q(\xi_i) - \epsilon_i) = \epsilon_i f(\eta'_i) \quad \eta'_i \in (Q(\xi_i) - \epsilon_i, Q(\xi_i))$$

Verificándose por tanto, $\delta_{\epsilon_i} \geq \epsilon_i M$. Sustituyendo estas inecuaciones en la desigualdad anterior se llega al resultado:

$$Pr \left\{ \left| S_n^+(u) - S^+(u) \right| > \epsilon \right\} \leq 2(n-j+1) \exp \left\{ -\frac{n^3 M^2 \epsilon^2}{2(n-j+1)^2} \right\}$$

Como queríamos demostrar.

□

TEOREMA 2.8 *Si X es una variable aleatoria absolutamente continua no negativa con media finita, entonces:*

$$S_n^+(u) \xrightarrow{c.s.} S^+(u).$$

Demostración.

Es evidente que se verifica:

$$\begin{aligned}
|S_n^+(u) - S^+(u)| &= \left| \int_u^1 \{[Q_n(t) - Q_n(u)] - [Q(t) - Q(u)]\} dt \right| \leq \\
&\leq \int_u^1 |Q_n(t) - Q(t)| dt + |Q_n(u) - Q(u)|
\end{aligned}$$

Nuestro objetivo será demostrar:

$$Pr \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n^+(u) - S^+(u)| > 0 \right\} = 0$$

Sabemos que se verifica la siguiente relación entre sucesos aleatorios:

$$\left\{ \omega \in \Omega, , \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n^+(u) - S^+(u)| > 0 \right\}$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega, , \lim_{n \rightarrow \infty} \int_u^1 |Q_n(t) - Q(t)| dt > 0 \right\} \cup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(u) - Q(u)| > 0 \right\}$$

Luego teniendo en cuenta la convergencia casi segura de la función cuantil empírica a la teórica, tenemos:

$$Pr \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n^+(u) - S^+(u)| > 0 \right\} \leq Pr \left\{ \omega \in \Omega, , \lim_{n \rightarrow \infty} \int_u^1 |Q_n(t) - Q(t)| dt > 0 \right\}$$

Por ser $|Q_n(t) - Q(t)|$ una función integrable y positiva se tiene:

$$\left\{ \omega \in \Omega \lim \int_u^1 |Q_n^+(t) - Q^+(t)| dt > 0 \right\} \subseteq \left\{ \bigcup_{t \in [u,1]} \{ \omega \in \Omega \lim |Q_n(t) - Q(t)| dt > 0 \} \right\}$$

Aplicando probabilidades resulta:

$$Pr \left\{ \omega \in \Omega, \lim \int_u^1 |Q_n^+(t) - Q^+(t)| dt > 0 \right\} \leq Pr \left\{ \bigcup_{t \in [u,1]} \{ \omega \in \Omega, \lim |Q_n(t) - Q(t)| dt > 0 \} \right\}$$

Demostremos que se verifica:

$$Pr \left\{ \bigcup_{t \in [0,1]} \{ \omega \in \Omega, \lim |Q_n(t) - Q(t)| > 0 \} \right\} = 0$$

definamos el siguiente suceso:

$$B_m = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \omega \in \Omega, \lim \left| Q_n \left(\frac{ju}{m} + \frac{m-j}{m} \right) - Q \left(\frac{ju}{m} + \frac{m-j}{m} \right) \right| > 0 \right\}$$

Se verifica que:

$$\limsup B_k = B$$

Luego,

$$Pr\{B\}$$

$$\leq Pr\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} \bigcup_{j=1}^k \left\{\omega \in \Omega, \lim_r \left|Q_r\left(\frac{ju}{k} + \frac{k-j}{k} - Q\left(\frac{ju}{k} - \frac{k-j}{k}\right)\right)\right| > 0\right\}\right\}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^k Pr\left\{\omega \in \Omega, \lim_r \left|Q_r\left(\frac{ju}{k} + \frac{k-j}{k} - Q\left(\frac{ju}{k} - \frac{k-j}{k}\right)\right)\right| > 0\right\}$$

$$= 0$$

Por tanto,

$$S_n^+(u) \xrightarrow{c.s.} S^+(u).$$

□

2.7 RELACION DE LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO CON EL INDICE DE GINI.

Un concepto muy importante en el análisis de datos de tiempos de vida es el "Tiempo Total de Prueba" estudiado por primera vez en 1.953 por Epstein y Sobel. Versiones del tiempo total de prueba han aparecido en la literatura en contextos diferentes y con otros nombres. Por ejemplo, Barlow y Doksum (1.972) estudiaron un test para la exponencialidad basado en el estadístico TTT. En un artículo, Langberg y Proschan (1.978) caracterizan este estadístico de forma elegante. Nuestro objetivo es estudiar la relación que existe entre la función de esparcimiento y el "Tiempo Total de Prueba", y asimismo estudiar la relación que existe entre el Índice de Gini y el esparcimiento.

Sea X una variable aleatoria no negativa con función de distribución F y media $\mu < \infty$. Se definen los siguientes conceptos:
El Tiempo Total de prueba al fallo i -ésimo es:

$$T_n(X_{(i)}) = \sum_{j=1}^i (n - j + 1)(X_{(j)} - X_{(j-1)})$$

Su valor relativo es el Tiempo Total relativo de la prueba:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) \stackrel{def}{=} \frac{T_n(X_{(i)})}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}}$$

También tenemos el Tiempo Total Acumulativo de Prueba :

$$V_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} W_n\left(\frac{i}{n}\right)$$

Las definiciones teóricas análogas serán:

La transformación Tiempo Total de Prueba:

$$H_F^{-1}(t) \stackrel{def}{=} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du \quad 0 \leq t \leq 1$$

La transformación Tiempo Total relativo de prueba:

$$W_F(t) \stackrel{def}{=} \frac{H_F^{-1}(t)}{H_F^{-1}(1)} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Y la transformación Tiempo Total Acumulativo de Prueba:

$$V_F \stackrel{def}{=} \int_0^1 W_F(t) dt = \frac{1}{\mu} \int_0^1 H_F^{-1}(t) dt$$

Dos conceptos de aplicación en economía y que nos resultan de interés son: La curva de Lorenz muestral:

$$L_n(p) \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{i=1}^{[np]} X_{(i)}}{\sum_{i=1}^n X_{(i)}}$$

y el estadístico de Gini:

$$G_n \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) (X_{(i+1)} - X_{(i)})}{(n-1) \sum_{i=1}^n X_{(i)}}$$

TEOREMA 2.9 *Sea X una variable aleatoria continua no negativa con media finita, se verifica:*

1. $T_n(X_{(i)}) = n\bar{x} - S_n^+(\frac{i}{n})$
2. $W_n(\frac{i}{n}) = 1 - \frac{S_n^+(i/n)}{nx}$
3. $V_n = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_n^+(\frac{i}{n})}{nx}$
4. $L_F(p) = \frac{\mu - S^+(p) + (1-p)Q(p)}{\mu}$
5. $GI = \frac{1}{\mu} \int_0^1 S^+(u) du$
6. $H_F^{-1}(t) = \mu - S^+(t)$
7. $W_F(t) = 1 - \frac{S^+(t)}{\mu}$
8. $CL_F = 1 - GI + \int_0^1 (1-u)Q(u) du$

Demostración.

Los apartados 1,2,3,4,6,7 y 8 son triviales. Para demostrar (5) bastará con utilizar la definición de índice de Gini dada por Klefsjo (1984)

$$GI = \int_0^1 (1 - W(u)) du$$

Sustituyendo $W(u) = 1 - \frac{s^+(u)}{\mu}$.

De este teorema se le puede dar una nueva interpretación geométrica al índice de Gini, que sería el área que hay por debajo de la función de esparcimiento dividido entre el valor de μ .

CAPITULO 3

CARACTERIZACION DE DISTRIBUCIONES DE VIDA MEDIANTE LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO.

3.1 INTRODUCCION.

Por vejez de una unidad mecánica, componente o algún otro sistema físico o biológico, entendemos el fenómeno para el cual un sistema más viejo tiene un tiempo de vida residual más corto, en un sentido estocástico, que uno es más nuevo o más joven. Se han desarrollado muchos criterios de vejez en la literatura. Se puede ver por ejemplo, Bryson y Siddiqui, Barlow y Proschan, Klefsjo y Hollander y Proschan.

Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un sistema.

Sea F la función de distribución acumulativa de X , $\bar{F} = 1 - F$ la función de supervivencia y μ_F el tiempo de vida medio. Supongamos a lo largo de este capítulo que todas las distribuciones que vamos a considerar tienen media finita y son estrictamente crecientes sobre sus sopertes. En suma, si F es absolutamente continua, con función de densidad f , entonces la tasa de fallo se define como:

$$r_F(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq \bar{F}^{-1}(0)$$

La función de vida residual media es:

$$\mu_F(x) = E\{X - x/X > x\} = \int_x^\infty \frac{\bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)}$$

con $\mu_F(0) = \mu_F$

Siendo X_t la vida residual del sistema de edad t con función de distribución $F_t(x)$ y función de supervivencia:

$$\bar{F}_t(x) = P\{X - t > x/X > t\} = \begin{cases} \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, & \text{si } \bar{F}(t) > 0 \\ 0, & \text{si } \bar{F}(t) = 0 \end{cases}$$

3.2 CARACTERIZACION DE LAS DISTRIBUCIONES DE VIDA .

Definíamos en el capítulo anterior la función de esparcimiento de una variable aleatoria absolutamente continua de media finita como la función:

$$S_X^+(u) = E\{(X - Q(u))^+\} = \int_{Q(u)}^\infty (1 - F(t))dt, \quad \forall u \in (0, 1)$$

donde $(X - Q(u))^+ = \max\{X - Q(u), 0\}$ y $Q(u)$ la función cuantil de X . Fijémonos que la función de esparcimiento es la vida residual media después de $Q(u)$.

DEFINICION 3.1 Se dice que una variable aleatoria X con distribución de vida F es del tipo "la Nueva Mejor que Usada en Esperanza" (NBUE) si

$$\mu_F(x) \leq \mu_F(0), \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{donde } \mu_F(x) = E\{X - x / X > x\} = \int_x^\infty \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt$$

con $\mu_F(0) = \mu_F$.

TEOREMA 3.1 La variable aleatoria X es NBUE si y sólo si

$$S_X^+(u) \leq (1 - u)\mu_F$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mu_F(Q(u)) &= \int_{Q(u)}^\infty \frac{(1 - F(t))}{1 - u} dt \\ &= \frac{S_X^+(u)}{1 - u}, \quad \forall u \in (0, 1) \end{aligned}$$

y $\mu_F(Q(u)) \leq \mu_F \quad \forall u \in (0, 1)$ sii $\mu_F(x) \leq \mu_F, \quad \forall x \geq 0.$ □

EJEMPLO 3.1 Si Y es una variable aleatoria exponencial negativa de media λ entonces,

$$S_Y^+(u) = \lambda(1 - u)$$

es decir, su función de esparcimiento es lineal y además es NBUE.

DEFINICION 3.2 Diremos que una variable aleatoria X está al menos tan esparcida por la derecha que Y ($X \succeq^{S^+} Y$), en el sentido de la función de esparcimiento, si

$$S_X^+(u) \geq S_Y^+(u), \quad \forall u \in (0, 1)$$

Este orden es invariante escalar, transitivo, reflexivo y antisimétrico en la clases de todas las distribuciones en $[0, \infty)$.

TEOREMA 3.2 Una variable aleatoria X es NBUE si y sólo si,

$$X \prec^{S^+} Z$$

donde se ha considerado que Z es una variable aleatoria exponencial negativa de media μ_F .

Demostración.

Trivial, partiendo del teorema anterior. □

DEFINICION 3.3 Una variable aleatoria con distribución de vida F se dice que es del tipo "vida residual media decreciente" (DMRL) si $\mu_F(x)$ es no creciente.

TEOREMA 3.3 *Una variable aleatoria X es DMRL si y sólo si,*

$$\frac{S_X^+(u)}{1-u},$$

es decreciente en u .

Demostración.

Es una consecuencia inmediata de (3.1) y de que $Q(u)$ es monótona. \square

TEOREMA 3.4 *Una variable aleatoria X es DMRL si y sólo si*

$$\frac{S_X^+(u)}{S_Z^+(u)}$$

es decreciente en u , donde Z es la exponencial negativa de parámetro 1.

DEFINICION 3.4 *Diremos que una distribución de vida F está ordenada en el sentido convexo respecto a otra distribución de vida G si y sólo si,*

$$G^{-1}F(x)$$

es convexa.

DEFINICION 3.5 *Se dice que F es del tipo "Nueva Mejor que la Usada en el sentido del Orden Convexo" (NBUC) si y sólo si X_t es más pequeña que X para cualquier $t \geq 0$ en el sentido del orden convexo. Es decir,*

$$\int_x^\infty \bar{F}(t+y)dy \leq \bar{F}(t) \int_x^\infty \bar{F}(y)dy, \quad \forall x, t \geq 0$$

TEOREMA 3.5 Una variable aleatoria X es NBUC si y sólo si ,

$$S_X^+(\lambda u + 1 - \lambda) \leq (1 - \omega)S_X^+(u)$$

$$\forall u \in (0, 1), \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad Q(1 - \omega) = Q(\lambda u + 1 - \lambda) - Q(u)$$

Demostración.

Los resultados siguen de (3.1). □

DEFINICION 3.6 Se dice que una variable aleatoria X es del tipo " la Nueva Harmónica Mejor que la Usada en Esperanza " (HNBUE), si

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \mu_F \exp\left(-\frac{x}{\mu_F}\right), \quad x \geq 0.$$

TEOREMA 3.6 Una variable aleatoria X es HNBUE si y sólo si,

$$S_X^+(u) \leq \mu_F \exp\left(-\frac{Q(u)}{\mu_F}\right), \quad \forall u \in (0, 1)$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las definiciones. □

DEFINICION 3.7 Si F es absolutamente continua, con tasa de fallo $r_F(x)$, diremos que F es del tipo " Nueva Mejor que la Usada en Tasa de Fallo " (NBUFR) si,

$$r_F(x) \geq r_F(0), \quad x \geq 0.$$

TEOREMA 3.7 Una variable aleatoria X es *NBUFR* si y sólo si,

$$\frac{dS_X^+(u)}{du} \geq \lim_{u \downarrow 0} \frac{dS_X^+(u)}{du}, \quad \forall u > 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} r_F(Q(u)) &= \frac{f(Q(u))}{1 - F(Q(u))} \\ &= \frac{1}{q(u)(1 - u)} = - \left\{ \frac{dS_X^+(u)}{du} \right\}^{-1}, \quad \forall u \in (0, 1). \end{aligned}$$

y se obtiene el resultado. □

DEFINICION 3.8 Diremos que la distribución de vida es de tasa de fallo creciente (*IFR*) si

$$-\log \bar{F}(x)$$

es una función cóncava.

TEOREMA 3.8 Una distribución de vida es *IFR* si y sólo si,

$$S_X^+(u)$$

es una función cóncava en u .

Demostración.

Se tiene que,

$$R_F(Q(u)) = - \left\{ \frac{dS_X^+(u)}{du} \right\}^{-1}, \quad \forall u \in (0, 1).$$

$r_F \circ Q$ es una función no decreciente y por tanto

$$\frac{dS_X^+(u)}{du}$$

es no creciente en u . Entonces, S^+ es una función convexa. □

DEFINICION 3.9 *La distribución de vida F se dice que es del tipo " la Nueva Mejor que Alguna Usada en Esperanza " (NBSUE) si existe un x_0 tal que:*

$$\int_{x_0}^{\infty} \bar{F}(u) du < \mu_F \bar{F}(x_0)$$

TEOREMA 3.9 *Una distribución de vida F es NBSUE si y sólo si existe por lo menos un $t_0 \in (0, 1)$ tal que:*

$$S_X^+(t_0) < \mu_F(1 - t_0)$$

Demostración.

Trivial. □

DEFINICION 3.10 *La distribución de vida F se dice que es del tipo " la Nueva Mejor que la Vieja en Esperanza " (NBOE), si existe un x_0 tal que:*

$$\int_x^{\infty} \bar{F}(u) du \leq \mu_F \bar{F}(x) \quad x \geq x_0$$

con desigualdad estricta para algún x .

TEOREMA 3.10 Una distribución de vida F es NBOE si y sólo si,

$$S_X^+(t) \leq \mu_F(1-t)$$

para $t \geq t_0$ y con desigualdad estricta para al menos un valor de t .

Demostración.

Trivial, partiendo de las definiciones. □

DEFINICION 3.11 Se dice que una distribución de vida F tiene la media de tasa de fallo creciente (IFRA) si $-\log(\bar{F}(x))$ es una función star-shaped, es decir,

$$-\log(\bar{F}(\lambda x)) \leq -\lambda \log \bar{F}(x)$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$ y $x \geq 0$. Cuando la tasa de fallo exista, esto es equivalente a decir,

$$\frac{1}{x} \int_0^x r_F(t) dt$$

es no decreciente.

TEOREMA 3.11 Barlow y Proschan (1981). Una distribución es IFRA (DFRA) si y sólo si para todo $\lambda > 0$, $\bar{F}(t) - e^{-\lambda t}$ tiene a lo sumo un cambio de signo, y si se verifica ocurre de $+ a -$ (de $- a +$).

PROPOSICION 3.12 Sea F una distribución absolutamente continua IFRA. Entonces, para todo $\lambda > 0$ se verifica al menos una de las tres propiedades siguientes:

1. $S_X^+(u) \geq S_{e(\lambda)}^+(u) \quad \forall u \in [0, 1]$
2. $S_X^+(u) \leq S_{e(\lambda)}^+(u) \quad \forall u \in [0, 1]$
3. *la función $S_X^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(F(t_0))$ tiene a lo sumo un cambio de signo, si se verifica es de + a -. Cumpliéndose que $\bar{F}(t_0) = e^{-\lambda t_0}$*

Demostración.

Por ser F IFRA se verifica el teorema de Barlow y Proschan, luego $\bar{F} - e^{-\lambda t}$ tiene a lo sumo un cambio de signo de + a -. Estudiemos los tres casos posibles.

1. PRIMER CASO: $\bar{F}(t) \geq e^{-\lambda t} \quad \forall \lambda > 0 \text{ y } \forall t \geq 0$

Luego, por tanto, también se verificará que $Q_X(u) \leq Q_{e(\lambda)}(u)$, donde hemos notado:

$S_{e(\lambda)}^+ ::$ Función de esparcimiento de la exponencial de parámetro λ

$Q_{e(\lambda)} ::$ Función cuantil de la exponencial de parámetro λ .

Luego,

$$S_X^+(u) = \int_{Q_X(u)}^{\infty} \bar{F}(t) dt \geq$$

$$\int_{Q_X(u)}^{\infty} e^{-\lambda t} dt \geq \int_{Q_{e(\lambda)}}^{\infty} e^{-\lambda t} dt = S_{e(\lambda)}^+(u)$$

cumpliéndose así la propiedad a).

2. SEGUNDO CASO: $\bar{F}(t) \leq e^{-\lambda t}, \quad \forall \lambda > 0 \text{ y } \forall t \geq 0$

De forma similar al caso anterior, se tiene que:

$$Q_X(u) \geq Q_{e(\lambda)}(u) \quad \forall u$$

Luego;

$$\begin{aligned} \int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{\infty} e^{-\lambda t} dt &\geq \int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{\infty} \bar{F}(t) dt \\ &\geq \int_{Q_X(u)}^{\infty} \bar{F}(t) dt = S_X^+(u) \end{aligned}$$

Cumpléndose así la propiedad b).

3. TERCER CASO: Se produce un cambio de signo de + a - en $\bar{F}(t) - e^{-\lambda t}$. Supongamos que se verifica $\bar{F}(t_0) = e^{-\lambda t_0}$. Es decir:

$$\bar{F}(t) \geq e^{-\lambda t} \text{ para } 0 \leq t \leq t_0$$

$$\bar{F}(t) \leq e^{-\lambda t} \text{ para } t \geq t_0$$

Es evidente que si $u \geq F_X(t_0)$ se verifica

$$S_X^+(u) \leq S_{e(\lambda)}^+(u),$$

luego,

$$S_X^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(F(t_0)) \leq 0$$

Supongamos ahora que $u \leq F_X(t_0)$ tendríamos dos casos a estudiar:

- (a) $Q_{e(\lambda)(u)} \geq t_0$, verificándose por tanto:

$$S_X^+(u) \geq S_{e(\lambda)}^+(u) \geq S_{e(\lambda)}^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(F(t_0))$$

- (b) $Q_{e(\lambda)(u)} \leq t_0$, siendo en este caso,

$$\begin{aligned} S_X^+(u) &\geq \int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{\infty} \bar{F}(t) dt \geq \\ &\int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{t_0} \bar{F}(t) dt \geq \int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{t_0} e^{-\lambda t} dt = \\ &= \int_{Q_{e(\lambda)(u)}}^{\infty} e^{-\lambda t} dt - \int_{t_0}^{Q_X(u)} e^{-\lambda t} dt = \\ &S_{e(\lambda)}^+(u) - S_{e(\lambda)}^+(F(t_0)) \end{aligned}$$

□

TEOREMA 3.13 Una variable aleatoria con distribución F es IFRA si y sólo si la función $\Psi : [0, 1] \rightarrow R$ definida por:

$$\Psi(u) = f(Q_X(u)) \frac{dS_X^+(u)}{du} + \lambda^2 \exp(-\lambda Q_X(u))$$

tiene a lo sumo un cambio de signo, y si se verifica es de - a +.

Demostración.

Utilizaremos para ello el teorema de Barlow (1981). Sabemos que:

$$\left. \frac{dS_X^+(t)}{dQ_X(t)} \right|_{t=u} = -\bar{F}(Q_X(u))$$

Por tanto,

$$\left\{ \frac{dS_{e(\lambda)}^+(t)}{dQ_{e(\lambda)}(t)} \right\} \Big|_{t=x} = -e^{-\lambda Q_{e(\lambda)}(x)}$$

Tomemos ahora un valor de x que verifique:

$$Q_e(x) = Q_X(u) \iff x = 1 - e^{(-\lambda Q_X(u))}$$

Luego aplicando ahora Barlow (1981), la función:

$$\Psi(u) = \frac{dS_{e(\lambda)}^+(t)}{dQ_{e(\lambda)}(t)} \Big|_{t=(1-\lambda)Q_X(u)} - \frac{dS_X^+(t)}{d(t)} \Big|_{t=u}$$

Tiene a lo sumo un cambio de signo de + a - si y sólo si F es IFRA.

Aplicando sencillas propiedades de la derivada de una función mediante diferenciales y teniendo en cuenta cuál es la función de densidad cuantil de la exponencial así como su función de esparcimiento, obtenemos la expresión deseada. \square

Intentemos caracterizar ahora a las funciones de distribución NBU. Sabemos que F es NBU si y sólo si se verifica,

$$\bar{F}_{X_t}(y) \leq \bar{F}_X(y) \quad \forall t, y \geq 0.$$

TEOREMA 3.14 *Sea F una función absolutamente continua NBU. Entonces $\forall t > 0$,*

$$\bar{F}_X(t)S_{X_t}^+(u) \geq S_X^+(u\bar{F}_X(t) + F_X(t))$$

Demostración.

Es fácil demostrar que se verifica:

$$\begin{aligned} Q_{X_t}(u) &= Q_X(u\bar{F}_X(t) + F_X(t)) - t \\ \bar{F}_X(t)S_{X_t}^+(u) &= S_X^+(u\bar{F}_X(t) + F_X(t)) \end{aligned}$$

Llamando $v = u\bar{F}_X(t) + F_X(t)$ como F es NBU sii se verifica que $\bar{F}_{X_t}(t) \leq \bar{F}_X(t)$ luego,

$$u\bar{F}_X(t) + F_X(t) \leq u\bar{F}_{X_t}(t) + F_{X_t}(t)$$

por tanto,

$$S_X^+(u\bar{F}_X(t) + F_X(t)) \geq S_{X_t}^+(u\bar{F}_{X_t}(t) + F_{X_t}(t))$$

□

Caracterizemos ahora a las funciones de distribución NBUFRA. Sabemos que F es NBFURA si y sólo si se verifica:

$$r_F(0) \leq \frac{1}{x} \int_0^x r_F(t) dt \quad \forall x \geq 0. \quad (3.3)$$

TEOREMA 3.15 *Una distribución de vida F es NBUFRA si y sólo si,*

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{dS_X^+(u)}{du} \leq \frac{Q_X(u)}{\text{Ln}(1-u)} \quad \forall u \in [0, 1).$$

Demostración.

Sabemos por teoremas anteriores que,

$$r_F(0) = \lim_{u \downarrow 0} \left(-\frac{du}{dS_X^+(u)} \right)$$

Hagamos un cambio de variable en el segundo miembro de la desigualdad (3.3) : sea $t = Q(m)$ siendo $x = Q(u)$, luego,

$$\frac{1}{x} \int_0^x r_F(t) dt = \frac{1}{Q(u)} \int_0^{Q(u)} -\frac{dm}{dS_X^+(m)} dQ(m)$$

$$\frac{1}{Q(u)} \int_0^u -\frac{dQ(m)}{dS_X^+(m)} dm = \frac{1}{Q(u)} \int_0^u -\frac{1}{1-m} dm$$

$$= -\frac{\text{Ln}(1-u)}{Q(u)} \quad \forall u \in [0, 1)$$

Luego se tendrá:

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{dS_X^+(u)}{du} \leq \frac{Q_X(u)}{\ln(1-u)} \quad \forall u \in [0, 1).$$

□

3.3 ORDENES Y ESPARCIMIENTO.

En la literatura de la Teoría de la Fiabilidad muchos autores han definido diferentes órdenes parciales entre las variables aleatorias con vistas a poder realizar tests de hipótesis no paramétricos. El más estudiado es el orden dispersivo, tratado en profundidad por Bartoszewicz. En esta sección definiremos los más importantes y veremos como mediante las funciones de esparcimiento podemos caracterizar a dichos órdenes y reconocer cuando una distribución de vida está ordenada respecto a otra tan sólo mediante la visualización gráfica de sus funciones de esparcimiento. Son también conocidos los siguientes resultados:

TEOREMA 3.16 *Una distribución de vida F diremos que está más dispersa que la distribución de vida G ($F \stackrel{disp}{<} G$) si y sólo si,*

$$G^{-1}F(x) - x \quad \text{es} \quad \text{creciente}$$

TEOREMA 3.17 *Una distribución de vida F diremos que es más star-shaped que la distribución de vida G ($F \stackrel{*}{<} G$) si y sólo si, $G^{-1}F(x)$ es starshaped, es decir,*

$$\frac{G^{-1}F(x)}{x} \quad \text{es} \quad \text{creciente.}$$

DEFINICION 3.12 Una distribución de vida F se dice que está ordenada en el sentido superaditivo respecto a G ($F \stackrel{su}{<} G$) si y sólo si, $G^{-1}F(x)$ es superaditiva, es decir,

$$G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y), \quad \forall x, y \geq 0.$$

Se demuestra fácilmente las siguientes implicaciones,

$$F \stackrel{c}{<} G \longrightarrow F \stackrel{*}{<} G \longrightarrow F \stackrel{su}{<} G$$

En Bartoszewicz (1.987) también podemos ver las siguientes igualdades:

$$G^{-1}F(x) = R_G^{-1}K^{-1}KR_F(x) = R_G^{-1}R_F(x), \quad x \geq 0$$

donde se ha llamado,

$$K(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad y \quad R_F(x) = \int_0^x r_F(t)dt$$

TEOREMA 3.18

$$Y \stackrel{disp}{\preceq} X \iff \frac{d}{du} S_X^+(u) \leq \frac{d}{du} S_Y^+(u) \quad \forall u \in (0, 1)$$

Demostración.

Si se verifica, $Y \stackrel{disp}{<} X$ entonces,

$$\frac{Q_X(u+h) - Q_X(u)}{h} \geq \frac{Q_Y(u+h) - Q_Y(u)}{h}, \quad \forall u \in (0,1)$$

y por tanto,

$$q_X(u) \geq q_Y(u), \quad \forall u \in (0,1). \quad (3.4)$$

donde $q(\cdot)$ es la función de densidad cuantil.

Como $\frac{d}{du}S_X^+(u) = -q_X(u)(1-u)$, $\forall u \in (0,1)$, se sigue el resultado deseado.

Recíprocamente, supongamos que $\frac{d}{du}S_X^+(u) \leq \frac{d}{du}S_Y^+(u) \quad \forall u \in (0,1)$
Entonces,

$$q_X(u) \geq q_Y(u), \quad \forall u \in (0,1).$$

y,

$$\frac{d}{du}D(u) = q_X(u) - q_Y(u) \geq 0, \quad \forall u \in (0,1),$$

donde $D(u) = Q_X(u) - Q_Y(u)$. Por tanto, $D(u)$ es una función no decreciente y,

$$Q_X(u_2) - Q_Y(u_2) \geq Q_X(u_1) - Q_Y(u_1), \quad u_2 \geq u_1$$

□

TEOREMA 3.19

$$Y \stackrel{IFR}{\preceq} X \iff \frac{\frac{d}{du}S_X^+(u)}{\frac{d}{du}S_Y^+(u)}$$

es no decreciente en u .

Demostración.

Tenemos que,

$$r_X(Q_X(u)) = \frac{f_X(Q_X(u))}{1 - F_X(Q_X(u))}$$

$$= \frac{1}{\frac{q_X(u)}{1-u}} = \frac{1}{\frac{d}{du} S_X^+(u)} \quad \forall u \in (0, 1).$$

llegándose al resultado. □

TEOREMA 3.20

$$Y \stackrel{DMRL}{\preceq} X \iff \frac{S_Y^+(u)}{S_X^+(u)}$$

es no creciente en u .

Demostración.

Tenemos que,

$$\mu_X(Q_X(u)) = \frac{\int_{Q_X(u)}^{\infty} (1 - F_X(t)) dt}{1 - F_X(Q_X(u))}$$

$$= \frac{S_X^+(u)}{(1-u)}$$

y por tanto,

$$\frac{\mu_Y(Q_Y(u))}{\mu_X(Q_X(u))} = \frac{S_Y^+(u)}{S_X^+(u)}, \quad \forall u \in (0, 1). \quad (3.5)$$

Obteniéndose así el resultado.

TEOREMA 3.21

$$Y \stackrel{NBUE}{\preceq} X \iff \frac{S_Y^+(u)}{S_X^+(u)} \leq \frac{\mu_Y}{\mu_X}, \quad u \in (0, 1).$$

Demostración.

Trivial, partiendo de Kochar (1987), tenemos que:

$$Y \stackrel{NBUE}{\preceq} X \iff \frac{\mu_Y(Q_Y(u))}{\mu_X(Q_X(u))} \leq \frac{\mu_Y}{\mu_X}$$

□

TEOREMA 3.22 *Supongamos que $Y \stackrel{NBUE}{\preceq} X$ y $\mu_Y \leq \mu_X$. Entonces, $Y \preceq^{S^+} X$.*

Demostración.

Para $u \in (0, 1)$, tenemos que,

$$1 \geq \frac{\mu_Y}{\mu_X} \geq \frac{\mu_Y(Q_Y(u))}{\mu_X(Q_X(u))} = \frac{S_Y^+(u)}{S_X^+(u)}.$$

□

TEOREMA 3.23

$$Y \stackrel{IFRA}{\preceq} X \iff \frac{1}{Q_X(u)} \frac{d}{du} S_X^+(u) \leq \frac{1}{Q_Y(u)} \frac{d}{du} S_Y^+(u)$$

Demostración.

Nos basaremos en el hecho de que:

$$Y \stackrel{IFRA}{\preceq} X, \text{ sii } G \stackrel{*}{\preceq} F, \text{ sii } \frac{F^{-1}G(x)}{x} \text{ es creciente.}$$

Por ser F y G funciones de distribución absolutamente continuas,

$$Y \stackrel{IFRA}{\preceq} X, \text{ sii } \frac{d}{dx} R_F^{-1} R_G(x) \geq \frac{R_F^{-1} R_G(x)}{x}$$

Haciendo el cambio $R_G(x) = t$ y teniendo en cuenta que $R_F(x) = -\ln \bar{F}(x)$ y que

$$\frac{dR_F^{-1}(t)}{dt} = -\frac{dS_X^+(1 - e^{-t})}{d(1 - e^{-t})} \frac{1}{e^{-t}}$$

Se obtiene el resultado de forma inmediata. □

DEFINICION 3.13 Sean X e Y dos variables aleatorias, se dice que $X \preceq^{NBU} Y$ si F está ordenada superaditivamente respecto de G , ($F \preceq^{su} G$), siendo F y G las funciones de distribución respectivas de X e Y .

Esta definición implicaría que

$$F \preceq^{su} G \quad \text{sii} \quad G^{-1}F(x) \quad \text{es} \quad \text{superaditiva.}$$

TEOREMA 3.24 Sean X e Y dos variables aleatorias no negativas absolutamente continuas con f.d. F y G respectivamente que verifican:

1. $Q_X(u) \leq Q_Y(u) \quad \forall u \in [0, 1]$
2. $q_X(0) \geq q_Y(0)$

Entonces,

$$X \preceq^{NBUC} Y \quad \text{sii} \quad \{S_X^{+'}(0)\} \{S_Y^{+'}(u)\} \geq \{S_Y^{+'}(0)\} \{S_X^{+'}(u)\} \quad \forall u \in [0, 1]$$

Demostración.

Supongamos que $X \preceq^{NBUC} Y$ entonces se verifica que $X \preceq^{su} Y$, es decir, $G^{-1}F(x)$ es superaditiva:

$$R_G^{-1}R_F(x+y) \geq R_G^{-1}R_F(x) + R_G^{-1}R_F(y) \quad \forall x, y$$

También se verifica:

$$\frac{R_G^{-1}R_F(x+y) - R_G^{-1}R_F(x)}{R_F(x+y) - R_F(x)} \frac{R_F(x+y) - R_F(x)}{y} \geq$$

$$\frac{R_G^{-1}R_F(y) - R_G^{-1}R_F(0)}{R_F(y) - R_F(0)} \frac{R_F(y) - R_F(x)}{y}$$

Tomando límites en esta desigualdad cuando $y \downarrow 0$ y teniendo en cuenta que: $\frac{dR(t)}{dt} = r(t)$ se obtiene que,

$$\left\{ \frac{dS_X^+(u)}{du} \Big|_{u=F(0)} \right\} \left\{ \frac{dS_Y^+(u)}{du} \Big|_{u=GR_G^{-1}R_F(x)} \right\} \geq \left\{ \frac{dS_Y^+(u)}{du} \Big|_{u=GR_G^{-1}R_F(0)} \right\} \left\{ \frac{dS_X^+(u)}{du} \Big|_{u=F(x)} \right\}$$

Como sabemos que $G^{-1}F(x) = R_G^{-1}R_F(x)$, llegamos a la desigualdad buscada.

Recíprocamente, sea la función $\varphi(u) = q_X(0)Q_Y(u) - q_Y(0)Q_X(u)$ teniendo en cuenta que $\frac{dS_X^+(u)}{du} = -q(u)(1-u)$, la desigualdad entre las derivadas nos dice que la función $\varphi(u)$ es creciente. Partiendo de la hipótesis ii) deducimos que $X \preceq^{disp} Y$ lo cual implica,

$$\frac{dS_Y^+(u)}{du} \leq \frac{dS_X^+(u)}{du}$$

basándonos en la hipótesis i) y en el anterior teorema, tenemos que $X \preceq^{IFRA} Y$, luego

$$X \preceq^{NBU} Y$$

□

TEOREMA 3.25 Si $X \preceq^{disp} Y$ entonces, $\hat{S}_X^+(u) \preceq^{st} \hat{S}_Y^+(u) \quad \forall u \in [0, 1]$

Demostración. Utilizando el lema (3.c.) de Bartoszewicz (1986), el resultado es inmediato.

CAPITULO 4

TESTS PARA DISTRIBUCIONES DE VIDA D.M.R.L. Y N.B.U.E.

4.1 INTRODUCCION.

En 1.975 Hollander y Proschan fueron los primeros en estudiar test de hipótesis para distribuciones de vida DMRL y NBUE. En un artículo publicado en la Biométrica proponen tests para alternativas con estas características siendo la hipótesis nula la exponencial. El estadístico estudiado para probar las DMRL es:

$$V^* = \frac{V}{\bar{X}} \quad \text{con } V = n^{-4} \sum_{i=1}^n c_{in} X_{(i)}$$

Aplicando ciertos teoremas de Stigler (1.974) demostraron la normalidad asintótica de este estadístico. De igual forma estudiaron las funciones de vida NBUE mediante el estadístico:

$$K^* = \frac{K}{\bar{X}}, \quad K = n^{-2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3n}{2} - 2i + \frac{1}{2} \right) X_{(i)}$$

Ambos estadísticos están originados por la construcción de una distancia o medida de desviación de la hipótesis inicial (F es exponencial) hacia la hipótesis alternativa (F es DMRL pero no exponencial, en el primer caso, y F es NBUE pero no exponencial, en el segundo.)

$$\Delta(F) = \int \int_{s < t} \bar{F}(s) \bar{F}(t) \{ \epsilon_F(s) - \epsilon_F(t) \} dF(s) dF(t)$$

$$\text{con} \quad \epsilon_F(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{F}(u) du}{\bar{F}(x)} \quad (\text{para DMRL})$$

$$\gamma(F) = \int_0^\infty \bar{F}(t) \{ \epsilon_F(0) - \epsilon_F(t) \} dF(t) \quad (\text{para NBUE})$$

Asímismo en dicho artículo estudian la consistencia y la eficiencia relativa de ambos estadísticos.

Más tarde Gail y Gastwirth (1.978) proponen un test de Bondad de Ajuste libre de escala para la distribución exponencial basado en el estadístico de Gini. Calculan la distribución exacta de dicho estadístico bajo la hipótesis de exponencialidad y estudian su potencia para la normalidad asintótica.

En este capítulo presentamos una caracterización de las funciones de vida DMRL y NBUE mediante las funciones de esparcimiento y construimos estadísticos para probar la hipótesis de exponencialidad. Adjuntamos las tablas de p-valúes para ambos estadísticos, así como el correspondiente estudio de la potencia basado en el método de Monte Carlo para diferentes funciones de distribución de vida.

4.2 UN TEST PARA ALTERNATIVAS DMRL.

DEFINICION 4.1 *Sea f una función definida en un conjunto convexo $C \subset R^n$. Diremos que f es convexa respecto al punto $x_0 \in C$ si se verifica:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0) \quad \forall x \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

TEOREMA 4.1 PRIMER TEOREMA DE CARACTERIZACION. *Una distribución de vida F es DMRL si y sólo si su función de esparcimiento es una función convexa respecto al punto $u = 1$.*

Demostración.

Se ha demostrado anteriormente que F es DMRL si y sólo si :

$$\frac{S^+(u)}{1 - u} \text{ es decreciente en } u$$

Si $S^+(u)$ es convexa con respecto al punto $u = 1$, entonces

$$\lambda S^+(u) \geq S^+(\lambda u + (1 - \lambda)) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Tomando $u = u_1$ y $\lambda = \frac{1 - u_2}{1 - u_1}$ con $u_1 \leq u_2$ resulta,

$$S^+(u_2) \leq \frac{1 - u_2}{1 - u_1} S^+(u_1)$$

Es decir, $\frac{S^+(u)}{1 - u}$ es decreciente en u .

Recíprocamente, si $\frac{S^+(u)}{1 - u}$ es decreciente en u , entonces,

$$S^+(u_2) \leq \frac{1 - u_2}{1 - u_1} S^+(u_1) \quad \text{para } u_1 \leq u_2.$$

Tomando $u = u_1$ y $\frac{1 - u_2}{1 - u_1}$ varía de 0 a 1 conforme u_2 varía de 1 a u_1 . Fijado λ y u , tomando $u_2 = \lambda u + (1 - \lambda)1$ se tiene que:

$$S^+(\lambda u + (1 - \lambda)1) \leq \lambda S^+(u).$$

□

DEFINICION 4.2 Sean f y g dos funciones reales continuas, positivas no nulas y no crecientes en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que f es más combada que g en A si la función $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es no creciente. Lo notaremos por $f \overset{C(A)}{\succ} g$

TEOREMA 4.2 Sean f y g dos funciones reales continuas, positivas no nulas y no crecientes en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, $f \overset{C(A)}{\succ} g$ si y sólo si los segmentos originados por las secantes a f en A sobre el eje OX son de menor o igual longitud que los respectivos a g .

Demostración.

$$f \overset{C(A)}{\succ} g \text{ si y sólo si } \phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ es no creciente en } A,$$

$$\iff \frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x < x' \in A$$

$$\iff \frac{g(x) - g(x')}{g(x)} \leq \frac{f(x) - f(x')}{f(x)} \quad \forall x < x' \in A$$

$$\iff \frac{1}{g(x)} \frac{g(x) - g(x')}{x' - x} \leq \frac{1}{f(x)} \frac{f(x) - f(x')}{x' - x} \quad \forall x < x' \in A$$

$$\iff gL(x, x') \geq fL(x, x') \quad \forall x \leq x' \in A$$

donde se ha llamado, $gL(x, x')$ al segmento sobre el eje OX desde el punto x hasta el corte en el eje OX de la secante a g en los puntos x y x' . \square

TEOREMA 4.3 SEGUNDO TEOREMA DE CARACTERIZACION. Sean X e Y dos variables aleatorias positivas absolutamente continuas y comparables en el sentido DMRL. Entonces,

$$Y \stackrel{DMRL}{\leq} X \iff S_Y^+(u) \stackrel{C[0,1]}{\succ} S_X^+(u)$$

Demostración.

Se ha demostrado anteriormente que:

$$Y \stackrel{DMRL}{\leq} X \iff \frac{S_Y^+(u)}{S_X^+(u)} \text{ es no creciente en } u$$

Se ve claramente como las funciones de esparcimiento de X e Y verifican las hipótesis del teorema anterior, luego

$$S_Y^+(u) \stackrel{C[0,1]}{\succ} S_X^+(u)$$

\square

Este teorema es muy interesante porque nos permite comparar en el sentido DMRL dos variables aleatorias positivas mediante una visualización de sus respectivas funciones de esparcimiento.

Consideremos ahora el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\} \quad (t \geq 0, \lambda > 0) \quad \lambda \text{ desconocido}$$

frente a

$$H_1 : F \stackrel{DMRL}{\prec} \exp(\lambda) \text{ y no es exponencial}$$

basándonos en una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución de fallo F .

Nuestro test viene motivado por considerar a la siguiente integral como una medida de desviación, para un F dado, de H_0 hacia H_1 . Sea:

$$\Delta(F) = \int \int_{u < u_1} [(1 - u) - L_{u_1}(S_X^+(u))] du_1 du$$

donde hemos llamado:

$L_{u_1}(S_X^+(u))$, longitud del segmento formado en el eje OX al trazar la secante a $S_X^+(u)$ desde el punto u_1 al punto u . Fijémonos en que si X es la exponencial de parámetro λ se verifica:

$$L_{u_1}(S_X^+(u)) = 1 - u$$

Si hacemos el cambio:

$$F_X(s) = u, \quad F_X(t) = u_1$$

obtenemos la siguiente expresión para $\Delta(F)$:

$$\Delta(F) = \int \int_{s < t} [1 - F(s) - L_{F(t)}(S_X^+(F(s)))] dF(t)dF(s)$$

El parámetro $\Delta(F)$ se puede interpretar como sigue: definimos:

$$D(s, t) = 1 - F(s) - L_{F(t)}(S_X^+(F(s)))$$

Ahora bien,

$$D(s, t) = 0 \quad \forall s < t \iff H_0 \text{ es verdad}$$

Para demostrar esta afirmación será suficiente con basarnos en el segundo teorema de caracterización. Podemos observar que:

$$\Delta(F) = E_F \left\{ I(S < T) \left(1 - F(S) - L_{F(T)}(S_X^+(F(S))) \right) \right\}$$

donde S y T son variables aleatorias independientes con distribución de fallo F. Así $\Delta(F)$ es un valor medio de la desviación de H_0 hacia H_1 . Cuánto más próximo a cero esté $\Delta(F)$ estaremos en favor de aceptar H_0 . Fijémonos en que:

$$\Delta(F) \geq 0 \quad \forall F \in H_0 \cup H_1$$

Obtengamos el parámetro muestral análogo a $\Delta(F)$. Para ello sean

X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución de fallo F , y partiendo de:

1. La función de distribución empírica definida como:

$$F_n(t) = \frac{i-1}{n}, \quad X_{(i-1)} \leq t < X_{(i)} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

2. La función de dispersión empírica por la derecha, definida como:

$$D_n^+(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n (X_{(k)} - x) \quad \text{para } \frac{i-1}{n} < x \leq \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se obtiene claramente que:

$$\Delta(F_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left\{ \frac{j-i \sum_{k=i+1}^n (n-k+1)(X_{(k)} - X_{(k-1)})}{n \sum_{k=i+1}^j (n-k+1)(X_{(k)} - X_{(k-1)})} \right\}$$

Sabemos por Bickel y Doksum (1.969) que si $X_{(i)}$ es una muestra ordenada de una exponencial de parámetros α y β , los espacios normalizados $Z_{(i)}$, definidos como:

$$Z_{(i)} = (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{con } X_{(0)} = 0$$

son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una exponencial de parámetros 0 y β . Por tanto tendremos que las variables aleatorias:

$$T_{(i)} = \frac{Z_{(i)}}{\beta},, \quad i = 1, \dots, n$$

son independientes e idénticamente distribuidas como una exponencial de parámetros 0 y 1.

Con estos resultados podemos expresar $\Delta(F_n)$ bajo H_0 como suma de variables aleatorias no independientes pero libres del parámetro λ . Aunque desde el punto de vista del análisis, calcular la distribución exacta de este estadístico es impracticable si podemos obtener sus correspondientes p-values por simulación así como las potencias para diferentes alternativas DMRL. Las distribuciones utilizadas en el estudio de la potencia por el Método de Monte Carlo son:

<i>NOMBRE</i>	<i>EXPRESION</i>
<i>WEIBULL</i>	$F(x; \alpha, \beta) = 1 - EXP[-(\frac{x}{\alpha})^\beta] \quad x \geq 0$
<i>UNIFORME</i>	$f(x) = 0.5 \quad x \in [0, 2]$
<i>GAMMA</i>	$f(x; \alpha) = \frac{\beta^{-\alpha}(x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} exp(-x/\beta),, \quad x \geq 0$

A continuación estimamos los percentiles para dicho estadístico por el método de Monte Carlo. Para realizar la estimación se han tomado 500 muestras de tamaño n de la exponencial negativa de parámetro 1.

β'	0.99	0.975	0.95	0.90
n				
3	.184	.184	.183	.180
4	.170	.166	.162	.153
5	.156	.149	.143	.134
6	.144	.136	.124	.113
7	.130	.120	.107	.087
8	.113	.106	.098	.085
9	.110	.099	.086	.071
10	.112	.103	.081	.063
11	.101	.089	.072	.057
12	.090	.084	.067	.051
13	.090	.075	.063	.043
14	.080	.068	.052	.033
15	.075	.061	.046	.028
16	.075	.056	.041	.021
17	.065	.056	.040	.019
18	.058	.045	.035	.023
19	.064	.048	.038	.024
20	.066	.052	.035	.018
25	.049	.034	.024	.012
30	.047	.038	.019	.006
35	.037	.028	.015	.004

De igual forma estimamos las potencias para diferentes alternativas.

Potencias para la Gamma $q_1 = 0.05, q_2 = 20$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras. En este caso q_1 y q_2 son dos parámetros que define a la distribución gamma en el lenguaje SIMSCRIPT, verificándose $q_1 = \alpha\beta$ y q_2 un número real.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.018	.039	.077	.156
4	.016	.053	.120	.239
5	.038	.089	.130	.221
6	.037	.090	.173	.276
7	.077	.143	.220	.370
8	.153	.184	.247	.340
9	.128	.207	.316	.400
10	.074	.120	.261	.407
11	.101	.194	.318	.409
12	.177	.220	.335	.438
13	.160	.258	.375	.500
14	.226	.310	.428	.539
15	.219	.345	.466	.572
16	.219	.391	.490	.629
17	.302	.364	.483	.625
18	.361	.465	.536	.599
19	.286	.435	.516	.610
20	.261	.404	.523	.647
25	.433	.559	.645	.718
30	.467	.552	.708	.776
35	.586	.666	.762	.804

Potencias para la Weibull $\alpha = 2, \beta = 0.5$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.011	.042	.081	.152
4	.022	.047	.101	.201
5	.029	.072	.114	.198
6	.035	.068	.154	.236
7	.052	.119	.208	.352
8	.092	.135	.198	.275
9	.081	.149	.247	.364
10	.041	.083	.222	.354
11	.082	.155	.287	.388
12	.119	.160	.274	.403
13	.114	.211	.313	.455
14	.171	.259	.368	.498
15	.162	.277	.405	.520
16	.174	.320	.432	.561
17	.241	.306	.437	.581
18	.278	.398	.472	.542
19	.207	.355	.430	.528
20	.176	.329	.475	.589
25	.339	.490	.564	.648
30	.391	.488	.654	.756
35	.512	.619	.712	.766

Potencias para la Uniforme $a = 0, b = 2$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.019	.048	.096	.190
4	.035	.063	.127	.255
5	.044	.111	.180	.285
6	.063	.117	.235	.335
7	.100	.179	.265	.440
8	.168	.217	.297	.393
9	.182	.285	.377	.468
10	.125	.191	.364	.502
11	.182	.289	.415	.527
12	.249	.307	.455	.562
13	.252	.370	.474	.595
14	.351	.442	.544	.649
15	.367	.486	.591	.675
16	.382	.541	.633	.715
17	.446	.518	.639	.746
18	.522	.619	.667	.721
19	.440	.576	.645	.709
20	.441	.566	.670	.747
25	.635	.731	.770	.810
30	.664	.726	.806	.850
35	.760	.804	.852	.877

Podemos añadir como comentario a estas tablas el hecho clarividente de que a mayor tamaño muestral se consigue mejorar la potencia del test, sospechándose que tiende a 1. Es más, el comportamiento de la potencia es más regular cuando tomamos un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ ó $\alpha = 0.1$.

4.3 UN TEST PARA ALTERNATIVAS NBUE.

DEFINICION 4.3 Sean f y g dos funciones reales continuas, positivas no nulas y no crecientes en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que f es más combada que g por la derecha de $x_0 \in A$ si se verifica:

$$\frac{f(x')}{f(x_0)} \leq \frac{g(x')}{g(x_0)} \quad \forall x' > x_0, x' \in A.$$

Lo notaremos por $f \stackrel{D(x_0)}{>} g$.

TEOREMA 4.4 Sean f y g dos funciones reales continuas, positivas no nulas y no crecientes en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. $f \stackrel{D(x_0)}{>} g$ si y sólo si los segmentos sobre el eje OX originados por las secantes a f desde el punto x_0 hasta el punto x' son de longitud menor o igual que los correspondientes a g .

Demostración.

$$f \stackrel{D(x_0)}{>} g \iff \frac{f(x')}{f(x_0)} \leq \frac{g(x')}{g(x_0)} \quad \forall x' > x_0, x' \in A.$$

$$\iff \frac{g(x_0) - g(x')}{g(x_0)} \leq \frac{f(x_0) - f(x')}{f(x_0)} \quad \forall x' > x_0, x' \in A.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x')}{x' - x_0} \leq \frac{1}{f(x_0)} \frac{f(x_0) - f(x')}{x' - x_0} \quad \forall x' > x_0, x' \in A.$$

$$\Leftrightarrow fL_{x'}(x_0) \leq gL_{x'}(x_0) \quad \forall x' > x_0, x' \in A$$

donde se ha llamado, $fL_{x'}(x_0)$, longitud del segmento sobre el eje OX desde el punto x_0 hasta el corte de la secante a f por los puntos $g(x_0)$ y $g(x')$ con el eje OX. \square

TEOREMA 4.5 TERCER TEOREMA DE CARACATERIZACION. Sean X e Y dos variables aleatorias no negativas y comparables en el sentido NBUE. Entonces:

$$Y \stackrel{NBUE}{\leq} X \Leftrightarrow S_Y^+(u) \stackrel{D(0)}{\succ} S_X^+(u)$$

Demostración.

Por un resultado anterior sabemos que:

$$Y \stackrel{NBUE}{\leq} X \Leftrightarrow \frac{S_Y^+(u)}{\mu_Y} \leq \frac{S_X^+(u)}{\mu_X}$$

Y como se verifica $\mu = S^+(0)$, se obtiene de forma inmediata el resultado. \square

Consideremos ahora el problema de probar:

$$H_0 : F(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0 \quad \lambda > 0 \quad \lambda \text{ desconocido}$$

frente a:

$$H_1 : F \text{ es no exponencial y } F \stackrel{NBUE}{\prec} \exp(\lambda)$$

basándonos en una muestra aleatoria de n observaciones independientes de F .

Con un razonamiento análogo al utilizado en el test anterior y empleando el Tercer Teorema de Caracterización, tendremos la siguiente medida de desviación de H_0 hacia H_1 :

$$\Psi(F) = \int_0^1 \{1 - L_X(u)\} du.$$

con $L_X(u)$, longitud del segmento formado en eje de abcisas al cortarlo la secante a $S_X^+(u)$ desde el punto $U = 0$ hasta el punto $U = u$. Haciendo el cambio $u = F_X(t)$ tendremos

$$\Psi(F) = \int \{1 - L_X(F(t))\} dF(t)$$

Al igual que en el apartado anterior, se va a verificar:

$$\{1 - L_X(F(t))\} = 0 \quad \forall t \in R \iff H_0 \text{ es cierta}$$

Un estimador natural para $\Psi(F)$ será:

$$\Psi(F_n(t)) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{i}{n} \left(\frac{\sum_{k=1}^n (n-k+1)(X_{(k)} - X_{(k-1)})}{\sum_{k=1}^i (n-k+1)(X_{(k)} - X_{(k-1)})} \right) \right\}$$

donde se supone que $X_{(0)} = 0$

Al igual que antes adjuntamos las tablas de percentiles para este estadístico así como las diferentes potencias para determinadas alternativas NBUE.

A continuación estimamos los percentiles para dicho estadístico por el método de Monte Carlo. Para realizar la estimación se han tomado 500 muestras de tamaño n de la exponencial negativa de parámetro 1.

β	0.99	0.975	0.95	0.90
n				
3	.629	.615	.605	.574
4	.580	.543	.521	.475
5	.521	.516	.484	.439
6	.490	.463	.434	.380
7	.477	.447	.405	.353
8	.444	.407	.380	.321
9	.436	.381	.341	.292
10	.410	.391	.369	.310
11	.382	.355	.331	.276
12	.377	.344	.298	.256
13	.371	.336	.292	.249
14	.385	.347	.301	.233
15	.356	.311	.276	.233
16	.333	.308	.270	.221
17	.327	.311	.266	.213
18	.334	.286	.261	.202
19	.318	.274	.247	.200
20	.297	.278	.252	.198
25	.279	.259	.207	.168
30	.278	.241	.204	.154
35	.238	.211	.183	.149

De igual forma estimamos las potencias para diferentes alternativas.

Potencias para la Gamma $q_1 = 0.5, q_2 = 2$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras. En este caso q_1 y q_2 son dos parámetros que define a la distribución gamma en el lenguaje SIMSCRIPT, verificándose $q_1 = \alpha\beta$ y q_2 un número real.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.063	.092	.123	.223
4	.037	.133	.196	.336
5	.059	.071	.165	.314
6	.073	.137	.223	.412
7	.063	.124	.280	.443
8	.087	.207	.320	.501
9	.086	.265	.436	.588
10	.122	.202	.289	.512
11	.212	.323	.424	.627
12	.203	.346	.525	.685
13	.205	.354	.544	.692
14	.146	.290	.537	.771
15	.235	.459	.615	.744
16	.352	.474	.622	.792
17	.366	.454	.666	.812
18	.304	.558	.661	.845
19	.367	.583	.716	.842
20	.548	.640	.738	.877
25	.565	.662	.868	.926
30	.578	.778	.882	.963
35	.808	.896	.942	.981

Potencias para la Weibull $\alpha = 2, \beta = 0.5$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.114	.171	.220	.364
4	.089	.242	.333	.538
5	.194	.219	.389	.571
6	.236	.383	.501	.718
7	.206	.370	.588	.757
8	.325	.534	.665	.834
9	.332	.632	.798	.905
10	.465	.579	.696	.876
11	.629	.746	.829	.924
12	.632	.784	.891	.946
13	.641	.817	.917	.961
14	.567	.771	.909	.979
15	.733	.896	.941	.974
16	.841	.898	.956	.981
17	.836	.890	.969	.987
18	.837	.948	.968	.994
19	.890	.970	.985	.996
20	.944	.968	.982	.997
25	.976	.988	.995	.999
30	.989	.997	1	1
35	.998	1	1	1

Potencias para la Uniforme $a = 0, b = 2$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

α	0.01	0.025	0.05	0.1
n				
3	.091	.136	.176	.261
4	.064	.171	.230	.359
5	.117	.135	.234	.342
6	.126	.186	.275	.419
7	.099	.202	.311	.447
8	.159	.267	.338	.481
9	.163	.323	.413	.521
10	.222	.276	.348	.497
11	.284	.359	.424	.557
12	.272	.378	.485	.585
13	.274	.375	.497	.589
14	.216	.326	.483	.634
15	.305	.445	.540	.621
16	.365	.451	.554	.646
17	.381	.426	.555	.669
18	.344	.511	.573	.701
19	.413	.555	.622	.707
20	.468	.525	.605	.708
25	.536	.589	.729	.792
30	.541	.644	.737	.829
35	.693	.760	.813	.845

4.4 UN TEST DE BONDAD DE AJUSTE.

4.4.1 Introducción.

El contraste de la hipótesis de que los datos proceden de una distribución exponencial ha sido ampliamente estudiado. En la literatura aparecen muchos trabajos donde se proponen pruebas para contrastar dicha hipótesis. Además, si se transforman los datos muestrales de una distribución uniforme en $(0, 1)$, según la función $x_i = -\lambda \ln(1 - u_i)$, mediante estas pruebas se puede contrastar también la uniformidad de los datos.

Entre las pruebas propuestas para contrastar la exponencialidad destacamos los trabajos de Bartholomew (1.975), Durbin (1.975), Epstein (1.960), Gail (1.978), Lilliefors (1.969), Margolin and Mauren (1.976) y Shorack (1.972).

En el apartado 2, desarrollamos el test propuesto para contrastar la hipótesis de que los datos proceden de una distribución exponencial con media desconocida (libre de escala).

4.4.2 Test de Bondad de ajuste.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y función cuantil:

$$Q(u) = \inf \{x : F(x) \geq u\}$$

Muñoz (1.990) ha definido la función de esparcimiento de X , que representaremos por $S^+(u)$, como:

$$\begin{aligned} S^+(u) &= E[(X - Q(u))^+] = \int_{Q(u)}^{\infty} (x - Q(u)) dF(x) \\ &= \int_u^{\infty} (Q(t) - Q(u)) dt, \quad \forall u \in [0, 1] \end{aligned}$$

Esta función caracteriza a la función de distribución F y está muy relacionada con la transformación TTT (Total Time on Test transformation) introducida por Barlow y Campo (1.975) como vimos en el capítulo 2.

El estimador muestral de $S^+(\cdot)$ viene definido por:

$$S_n^+(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^n (n - j + 1) (X_{(j)} - X_{(j-1)})$$

para $\frac{i-1}{n} < u \leq \frac{i}{n}$.

También se demostró en el capítulo 2 como esta estimación de la función de esparcimiento era asintóticamente insesgada y que converge de forma casi segura a $S^+(\cdot)$

Por otra parte, la función de esparcimiento de una distribución exponencial de media λ es

$$S^+(u) = \lambda(1 - u), \quad u \in [0, 1]$$

Asimismo, sabemos que una variable aleatoria es NBUE si y sólo si,

$$S^+(u) \leq (1 - u)\mu, \quad \forall u \in [0, 1]$$

donde μ es la media de X , según el capítulo 3.

Vamos a probar la hipótesis de que la distribución de vida es exponencial negativa frente a la hipótesis alternativa de que la distribución es NBUE y no exponencial. Es decir:

$$H_0 : F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0, \lambda > 0 \quad (\lambda \text{ desconocida}).$$

$$H_1 : F \text{ es NBUE y no es exponencial.}$$

Para ello utilizaremos la función de esparcimiento. Se trata de encontrar una buena medida de discriminación de H_0 frente a H_1 . Definimos la función:

$$J(F) = \int_0^1 \left((1 - u) - \frac{S^+(u)}{\lambda} \right)^+ du$$

Puede comprobarse que,

$$0 \leq J(F) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall F \in H_0 \cup H_1,$$

y además $J(F) = 0$ si y sólo si $F \in H_0$. Por lo tanto, $J(F)$ es una buena medida de discriminación de H_0 frente a H_1 .

Parece razonable utilizar,

$$J_n(F) = \int_0^1 \left((1-u) - \frac{S_n^+(u)}{\bar{x}} \right)^+ du$$

como un test estadístico natural, donde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, para contrastar la hipótesis anterior.

El test basado en el estadístico anterior rechazará la hipótesis H_0 cuando $J_n(F)$ sea " demasiado grande."

Para $\frac{i-1}{n} < u \leq \frac{i}{n}$, tenemos:

$$\frac{S_n^+(u)}{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=i+1}^n (n-j+1) (X_{(j)} - X_{(j-1)})}{\bar{x}} = Z_{n-i}$$

y por la proposición 4 del apéndice, Z_{n-i} es el $(n-i)$ -ésimo estadístico de orden de una muestra de tamaño $n-1$ de una distribución uniforme en $(0, 1)$. Por lo tanto,

$$J_n(F) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (1-u - Z_{n-i})^+ du + \frac{1}{2n^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{n} \left[\left(1 - Z_{n-i}\right) - \frac{n-i}{n} - \frac{1}{2n} \right] I_{\left(0, \frac{n-i-1}{n}\right)}(Z_{n-i}) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(1 - Z_{n-i} - \frac{n-i}{n}\right)^2 \right] I_{\left(\frac{n-i-1}{n}, \frac{n-i}{n}\right)}(Z_{n-i}) \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\left(1 - Z_{n-i} - \frac{n-i}{n}\right)^+ + \left(1 - Z_{n-i} - \frac{n-i-1}{n}\right)^+ \right] \min \left\{ \frac{1}{n}, \left(1 - Z_{n-i} - \frac{n-i}{n}\right)^+ \right\}
\end{aligned}$$

De esta expresión se deduce que,

$$J_n(F) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{i}{n} - Z_{n-i}\right)^+ + \left(\frac{i+1}{n} - Z_{n-i}\right)^+ \right] \frac{1}{n}$$

y bajo la hipótesis H_0 resulta:

$$E[J_n(F)] \leq o(1/n^2), \text{ pues } E\left(\frac{i}{n} - Z_{n-i}\right)^+ \leq o(1/n)$$

El test que se propone se basa en el estadístico $J(F_n)$, donde F_n es la función de distribución empírica. Se tiene que,

$$J'(F_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \max \left\{ \frac{n-i}{n} - \frac{\sum_{j=i+1}^n (n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)})}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}}, 0 \right\}$$

donde $X_{(0)} = 0$ y también $J'(F_n) = 2J(F_n)$

Como $\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)(X_{(j+1)} - X_{(j)}) = \sum_{k=1}^n X_k$ y además las variables aleatorias,

$$Y_1 = nX_{(1)}, Y_2 = (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}), \dots, Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$$

son independientes e idénticamente distribuidas según una ley exponencial, bajo la hipótesis H_0 , la variable aleatoria Z_{n-i} tiene la misma distribución que el $(n-i)$ -ésimo estadístico de orden de una muestra de tamaño $n-1$ con una distribución uniforme en $(0, 1)$. Es decir sigue una distribución Beta de parámetros $p = n - i$ y $q = i$.

Utilizando los teoremas dados en el apéndice podemos simular las potencias correspondientes a este test estadístico para distintas alternativas. Al igual que hemos hecho en las dos últimas secciones de este capítulo.

A continuación estimamos los percentiles para dicho estadístico por el método de Monte Carlo. Para realizar la estimación se han tomado 500 muestras de tamaño n de la exponencial negativa de parámetro 1.

β	0.99	0.975	0.95	0.90
n				
3	0.530	0.465	0.430	0.356
4	0.552	0.450	0.397	0.306
5	0.510	0.469	0.395	0.313
6	0.475	0.396	0.342	0.263
7	0.493	0.408	0.338	0.259
8	0.430	0.347	0.322	0.259
9	0.437	0.347	0.281	0.228
10	0.431	0.367	0.313	0.258
11	0.386	0.321	0.278	0.227
12	0.362	0.325	0.272	0.204
13	0.362	0.312	0.249	0.199
14	0.365	0.321	0.261	0.184
15	0.362	0.283	0.234	0.190
20	0.311	0.258	0.222	0.175
25	0.237	0.215	0.187	0.146
30	0.247	0.207	0.180	0.145
35	0.199	0.173	0.154	0.124

Potencias para la Gamma $q_1 = 2, q_2 = 0.5$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

n	α	0.01	0.025	0.05	0.1
3		0.042	0.096	0.139	0.223
4		0.031	0.099	0.158	0.303
5		0.049	0.082	0.151	0.278
6		0.065	0.163	0.238	0.403
7		0.042	0.130	0.236	0.408
8		0.086	0.225	0.273	0.429
9		0.065	0.202	0.365	0.529
10		0.074	0.164	0.282	0.439
11		0.122	0.277	0.387	0.549
12		0.162	0.258	0.405	0.611
13		0.159	0.297	0.488	0.643
14		0.148	0.259	0.446	0.692
15		0.155	0.362	0.526	0.672
20		0.263	0.442	0.574	0.734
25		0.522	0.617	0.724	0.848
30		0.473	0.652	0.765	0.868
35		0.704	0.802	0.868	0.932

Potencias para la Weibull $\alpha = 2, \beta = 1$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

n	α	0.01	0.025	0.05	0.1
3		0.079	0.167	0.223	0.346
4		0.087	0.226	0.326	0.507
5		0.140	0.194	0.327	0.537
6		0.191	0.375	0.525	0.706
7		0.173	0.352	0.539	0.763
8		0.314	0.545	0.633	0.795
9		0.288	0.582	0.763	0.865
10		0.302	0.515	0.675	0.822
11		0.458	0.671	0.795	0.890
12		0.556	0.692	0.828	0.932
13		0.568	0.736	0.890	0.953
14		0.545	0.714	0.890	0.974
15		0.577	0.834	0.924	0.965
20		0.809	0.928	0.972	0.993
25		0.977	0.987	0.997	0.999
30		0.972	0.993	0.999	0.999
35		0.999	0.999	0.999	1

Potencias para la Uniforme $a = 0, b = 2$.

Tomándose 1.000 veces las correspondientes muestras.

n	α	0.01	0.025	0.05	0.1
3		0.083	0.136	0.164	0.255
4		0.063	0.151	0.210	0.340
5		0.077	0.122	0.212	0.381
6		0.119	0.241	0.323	0.508
7		0.092	0.207	0.357	0.537
8		0.178	0.329	0.392	0.533
9		0.157	0.324	0.493	0.646
10		0.163	0.289	0.400	0.578
11		0.237	0.413	0.535	0.685
12		0.306	0.419	0.566	0.756
13		0.311	0.457	0.635	0.785
14		0.304	0.441	0.650	0.838
15		0.329	0.580	0.729	0.837
20		0.495	0.686	0.808	0.906
25		0.789	0.861	0.920	0.967
30		0.806	0.918	0.956	0.984
35		0.953	0.981	0.991	0.996

4.4.3 Apéndice.

PROPOSICION 4.6 Sean $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ los estadísticos de orden de una distribución exponencial negativa con media λ . Entonces, las variables aleatorias $Z_i = (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$, $i = 1, \dots, n$, son independientes y además siguen también una distribución exponencial negativa de media λ

COROLARIO 4.7 (Renyi, 1.953) Los estadísticos de orden de una distribución exponencial negativa forman una cadena Markov aditiva.

PROPOSICION 4.8 Si las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas según una distribución absolutamente continua, y si las variables aleatorias

$$Y_j = X_{(j)} - X_{(j-1)}, \quad j = 1, \dots, n$$

son independientes, entonces las variables aleatorias X_i tienen una distribución exponencial negativa.

PROPOSICION 4.9 Si las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas según una distribución absolutamente continua, y si la variable aleatoria,

$$Y_1 = nX_{(1)},$$

sigue una distribución exponencial negativa de media λ entonces las variables aleatorias X_1, \dots, X_n siguen también una distribución exponencial de media λ

Demostración.

$$\Pr(nX_{(1)} > x) = \left(\Pr(X_{(1)} > \frac{x}{n}) \right)^n = [1 - F(x/n)]^n$$

Como $nX_{(1)}$ sigue una distribución exponencial negativa de media λ ,

$$e^{-x/n} = [1 - F(x/n)]^n \text{ y así } F(x/n) = 1 - e^{-x/n\lambda}.$$

□

PROPOSICION 4.10 *Si las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas según una distribución exponencial negativa, entonces:*

1. *La variable aleatoria $X_1 + \dots + X_n$ es independiente de las variables aleatorias:*

$$Y_1 = nX_{(1)}, Y_2 = (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}), \dots, Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}.$$

2. *Las variables aleatorias,*

$$Y_j = \frac{(n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)})}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

$j = 1, \dots, n$ tienen la distribución de Dirichlet.

3. *La variable aleatoria,*

$$Y_i = \frac{\sum_{j=1}^i (n - j + 1)(X_{(j)} - X_{(j-1)})}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

se distribuye como el i -ésimo estadístico de orden de una distribución uniforme en $[0, 1]$.

CAPITULO 5

LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO MULTIVARIANTE.

5.1 INTRODUCCION.

La utilidad de la función multivariante de esparcimiento en la fiabilidad multivariante consiste en caracterizar las distribuciones de vida multivariantes. Aunque el concepto es mucho más general que en el caso univariante, trae consigo una complicación desde el punto de vista del análisis. No sólo ya por tener que manejar funciones multivariantes sino por la necesidad de definir una función cuantil multivariante teniendo en cuenta el orden parcial establecido en R^n . Se salva este problema definiendo una función cuantil multivariante que sólo caracteriza a las variables aleatoria n -dimensionales de componentes independientes pero nos resulta útil para nuestros objetivos.

5.2 ESPARCIMIENTO MULTIVARIANTE.

Sea X una variable aleatoria n -dimensional absolutamente continua con función de distribución $F_X(\cdot)$. Supongamos que en R^n se ha establecido el orden parcial usual:

$$\vec{u} \preceq \vec{v} \quad \text{sii} \quad u_i \leq v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

DEFINICION 5.1 *Se define función cuantil multivariante de la variable aleatoria X a aquella función:*

$$Q_X : [0, 1]^n \longrightarrow R^n$$

tal que verifica:

$$Q_X(u_1, \dots, u_n) = (Q_1(u_1), \dots, Q_n(u_n))$$

donde Q_i sería la función cuantil marginal de la componente i -ésima.

PROPOSICION 5.1 *$Q(\vec{u})$ es una función no decreciente y continua a la izquierda.*

Demostración.

Es evidente, pues $\vec{u} \preceq \vec{v}$ si y sólo si $u_i \preceq v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ lo cual implica que $Q_i(u_i) \leq Q_i(v_i)$ y por tanto es decreciente en cada una de sus componentes.

También es continua por la izquierda puesto que lo son cada una de sus componentes. \square

PROPOSICION 5.2 Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variable aleatoria n -dimensional absolutamente continua de componentes independientes. Sea $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ una variable aleatoria uniforme n -dimensional de componentes independientes, entonces $Q_X(\vec{u})$ y X tienen la misma distribución.

Demostración.

$$\begin{aligned} Pr \{Q(\vec{u}) \preceq \vec{x}\} &= Pr \{Q_1(u_1) \leq x_1, \dots, Q_n(u_n) \leq x_n\} \\ &= Pr \{u_1 \leq F_1(x_1), \dots, u_n \leq F_n(x_n)\} = \prod_{i=1}^n F_i(x_i) \end{aligned}$$

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = Pr \{X \preceq \vec{x}\}$$

□

DEFINICION 5.2 Sea X una variable aleatoria absolutamente continua no negativa y con marginales de media finita, se define media multivariante de X al parámetro poblacional:

$$\bar{\mu}_X = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty Pr \{X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n\} dt_1 \dots dt_n$$

Está claro que en el caso unidimensional coinciden la esperanza matemática de una variable aleatoria con su media univariante.

PROPOSICION 5.3 Si las componentes X_i son independientes se verifica:

$$\bar{\mu}_X = \prod_{i=1}^n \mu_{X_i}$$

DEFINICION 5.3 Sea X una variable aleatoria absolutamente continua no negativa y con media multivariante finita. Se define la función de esparcimiento multivariante de X como:

$$S_X^+ : [0, 1]^n \longrightarrow R$$

tal que verifica:

$$S_X^+(u_1, \dots, u_n) = \int_{Q_1(u_1)}^{\infty} \cdots \int_{Q_n(u_n)}^{\infty} \bar{F}(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n$$

donde $\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = Pr \{X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n\}$.

PROPOSICION 5.4 La función de esparcimiento multivariante es no creciente en cada componente.

Demostración.

$$S_X^+(u_1 + h, \dots, u_n) = \int_{Q_1(u_1+h)}^{\infty} \cdots \int_{Q_n(u_n)}^{\infty} \bar{F}(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n$$

Como se verifica $Q_1(u_1 + h) \geq Q_1(u_1) \quad h \geq 0$

Tendremos que:

$$S_X^+(u_1 + h, \dots, u_n) \leq \int_{Q_1(u_1)}^{\infty} \cdots \int_{Q_n(u_n)}^{\infty} \bar{F}(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n = S_X^+(u_1, \dots, u_n)$$

□

PROPOSICION 5.5

$$\forall \vec{u} \in R^n \quad \text{se verifica} \quad 0 \leq S_X^+(\vec{u}) \leq \bar{\mu}_X$$

Demostración.

Teniendo en cuenta que cuando $\vec{u} \downarrow \vec{0}$ entonces $Q(\vec{u}) \downarrow \vec{0}$ y por tanto

$$S_X^+(\vec{u}) \uparrow \bar{\mu}_X.$$

De igual forma se ve que cuando $\vec{u} \uparrow \vec{1}$ entonces $Q(\vec{u}) \uparrow \vec{\alpha}$ y por tanto

$$S_X^+(\vec{u}) \downarrow 0.$$

□

PROPOSICION 5.6 *La función de esparcimiento multivariante es no creciente.*

Demostración.

Sean $u_1, u_2 \in [0, 1]^n$ con $u_1 \preceq u_2$ es evidente que se verifica:

Pero por ser la función cuantil multivariante no decreciente según la proposición 5.1.

$$S^+(u_1) \geq S^+(u_2),$$

□

PROPOSICION 5.7 *Si las variables X_i son independientes, entonces se verifica:*

$$S^+(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n S_{X_i}^+(u_i)$$

Demostración.

Trivial partiendo de la definición.

PROPOSICION 5.8

$$\frac{\delta S_X^+(u_1, u_2)}{\delta u_2} \Big|_{u_2=0} = -S_X^+(u_1)$$

PROPOSICION 5.9

$$\frac{\delta^{(n-1)} S_X^+(u_1, \dots, u_n)}{\delta u_1, \dots, \delta u_{n-1}} \Big|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = (-1)^{n-1} S_{X_n}^+(u_n)$$

5.3 FIABILIDAD MULTIVARIANTE.

DEFINICION 5.4 Sean $f : R^m \rightarrow R$ y $g : R^m \rightarrow R$ dos funciones de variable real m -dimensional continuas al menos por la izquierda, decrecientes y sea ϕ una biyección entre los dominios de definición de f y de g . Diremos que f tiene un decrecimiento relativo mayor que g según la biyección ϕ si

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R^m \quad \text{con} \quad \vec{x}_1 \preceq \vec{x}_2$$

$$\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in R^m \quad \text{con} \quad \vec{y}_1 \preceq \vec{y}_2$$

siendo $\vec{y}_1 = \phi(\vec{x}_1)$ $\vec{y}_2 = \phi(\vec{x}_2)$, entonces se verifica:

$$\frac{f(\vec{x}_2)}{f(\vec{x}_1)} \leq \frac{g(\vec{y}_2)}{g(\vec{y}_1)}$$

DEFINICION 5.5 Para, $\bar{F}_m > 0$, una distribución multivariante F_m definida en el octante positivo es de tasa de fallo creciente multivariante de tipo muy fuerte, (MIFR-VS) si:

$$\frac{\bar{F}(\vec{x} + \vec{t})}{\bar{F}(\vec{x})} \downarrow \vec{x} \quad \forall \vec{t}, \vec{x} \geq 0$$

TEOREMA 5.10 Si una función de distribución multivariante es MIFR-VS, entonces la función de esparcimiento multivariante tiene un decrecimiento relativo mayor que la función de supervivencia de dicha variable aleatoria n -dimensional.

Demostración.

Supongamos que $\vec{x}_1 \preceq \vec{x}_2$ luego deben existir $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in [0, 1]^n$ que verifiquen:

$$\vec{u}_1 \preceq \vec{u}_2 \quad Q(u_i) = x_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Como partimos de la hipótesis de que X es MIFR-VS, se tendrá que:

$$\bar{F}(\vec{x}_1)\bar{F}(\vec{x}_2 + \vec{t}) \leq \bar{F}(\vec{x}_2)\bar{F}(\vec{x}_1 + \vec{t}) \quad \forall \vec{t} \geq 0$$

Si integramos ambos miembros de la desigualdad en todo el campo de definición de \vec{t} , obtendremos:

$$\bar{F}(\vec{x}_1) \int_0^\infty \bar{F}(\vec{x}_2 + \vec{t}) d\vec{t} \leq \bar{F}(\vec{x}_2) \int_0^\infty \bar{F}(\vec{x}_1 + \vec{t}) d\vec{t}$$

$$\bar{F}(\vec{x}_1) \int_{\vec{x}_2}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \leq \bar{F}(\vec{x}_2) \int_{\vec{x}_1}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}$$

$$\bar{F}(\vec{x}_1) \int_{Q(\vec{u}_2)}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \leq \bar{F}(\vec{x}_2) \int_{Q(\vec{u}_1)}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}$$

$$\bar{F}(\vec{x}_1)S^+(\vec{u}_2) \leq \bar{F}(\vec{x}_2)S^+(\vec{u}_1)$$

Como la función de esparcimiento multivariante y la función de supervivencia son decrecientes, la desigualdad anterior prueba lo buscado. \square

DEFINICION 5.6 Para, $\bar{F}_m > 0$, una distribución multivariante F_m definida en el octante positivo es de tasa de fallo creciente multivariante de tipo fuerte, (MIFR-S) si:

$$\frac{\bar{F}(\vec{x} + \vec{t})}{\bar{F}(\vec{x})} \downarrow \vec{x} \quad \forall t, \vec{x} \succeq 0$$

PROPOSICION 5.11 Si X es una variable aleatoria n -dimensional MIFR-S, entonces la variable aleatoria n -dimensional $\bar{X} - \vec{x}$ también es MIFR-S con $\vec{x} \geq 0$

Demostración.

$$Pr \{X - \vec{x} \succ \vec{y} + \Delta |_{X - \vec{x} \succ \vec{y}}\} = Pr \{X \succ \vec{y} + \vec{x} + \Delta |_{X \succ \vec{y} + \vec{x}}\}$$

Tomemos ahora un $\vec{y} \preceq \vec{y}'$ como partimos de la hipótesis de que X es MIFR-S, se verifica:

$$Pr \{X \succ \vec{y} + \vec{x} + \Delta |_{X \succ \vec{y} + \vec{x}}\} \geq Pr \{X \succ \vec{y}' + \vec{x} + \Delta |_{X \succ \vec{y}' + \vec{x}}\} =$$

$$Pr \{X - \vec{x} \succ \vec{y}' + \Delta |_{X - \vec{x} \succ \vec{y}'}\}$$

\square

TEOREMA 5.12 Si X es MIFR-S, entonces $\forall \vec{x}_2 \preceq \vec{x}_1$ se tiene que:

$$\bar{F}(\vec{x}_2)\bar{\mu}_Y(\vec{x}_1) \leq \bar{F}(\vec{x}_1)\bar{\mu}_Y(\vec{x}_2)$$

donde se ha llamado,

$$Y(\vec{x}) = \min \{X_i - x_i : i = 1, \dots, n.\}$$

Demostración.

Por ser X MIFR-S se tiene que:

$$\bar{F}(\vec{x}_1 + t)\bar{F}(\vec{x}_2) \leq \bar{F}(\vec{x}_2 + t)\bar{F}(\vec{x}_1)$$

$$Pr \{X \succ (\vec{x}_1 + t)\} \bar{F}(\vec{x}_2) \leq Pr \{X \succ (\vec{x}_2 + t)\} \bar{F}(\vec{x}_1)$$

$$Pr \{X - \vec{x}_1 \succ t\} \bar{F}(\vec{x}_2) \leq Pr \{X - \vec{x}_2 \succ t\} \bar{F}(\vec{x}_1)$$

$$Pr \{\min X_i - \vec{x}_{1i} \succ t\} \bar{F}(\vec{x}_2) \leq Pr \{\min X_i - \vec{x}_{2i} \succ t\} \bar{F}(\vec{x}_1)$$

$$\bar{F}(\vec{x}_2) \int_0^\infty \{Pr \{\min \{X_i - \vec{x}_{1i} \succ t\}\} dt \leq \bar{F}(\vec{x}_1) \int_0^\infty \{Pr \{\min X_i - \vec{x}_{2i} \succ t\}\} dt$$

Llegándose así al resultado deseado. □

DEFINICION 5.7 Sea X una variable aleatoria n -dimensional con f.d. definida en el octante positivo, se dice que X es del tipo "la Nueva Mejor que la Usada en Esperanza Multivariante Muy Fuerte", (MNBUE-VS), si se verifica:

$$\int_0^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \geq \frac{\int_0^\infty \bar{F}(\vec{x} + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x})} \quad \forall \vec{x} \geq 0$$

TEOREMA 5.13 X es MNBUE-VS si y sólo si $S^+(\vec{u}) \leq \bar{\mu}_X \bar{F}(Q(\vec{u}))$

Demostración.

Sean:

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}}^\infty \frac{\bar{F}(\vec{t})}{\bar{F}(\vec{x})} d\vec{t} \quad \phi(\vec{0}) = \int_{\vec{0}}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}$$

$$\phi(Q(\vec{u})) = \int_{Q(\vec{u})}^\infty \frac{\bar{F}(\vec{t})}{\bar{F}(Q(\vec{u}))} d\vec{t} =$$

$$= \frac{S^+(\vec{u})}{\bar{F}(Q(\vec{u}))} d\vec{t}$$

Entonces como:

$$\phi(Q(\vec{u})) \leq \phi(Q(\vec{0})) \quad \text{sii} \quad \phi(\vec{x}) \leq \phi(\vec{0}) \quad \forall \vec{x} \geq 0$$

Resulta que :

$$S^+(\vec{u}) \leq \bar{\mu}_X \bar{F}(Q(\vec{u}))$$

□

PROPOSICION 5.14 *Si las X_i son independientes entonces, X es MNBUE-VS sii $S^+(\vec{x}) \leq \bar{\mu}_X \prod_{i=1}^n (1 - u_i)$*

DEFINICION 5.8 *Sea X una variable aleatoria n -dimensional con f.d. F definida en el octante positivo, se dice que X es del tipo "Decreciente en Vida Residual Multivariante Muy Fuerte", (MDMRL-VS), si se verifica,*

$$\frac{\int_0^\infty \bar{F}(\vec{x} + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x})} \downarrow \vec{x} \quad \forall \vec{x} \geq 0$$

TEOREMA 5.15 *X es MDMRL-VS sii $\frac{S^+(\cdot)}{(\bar{F} \circ Q)}$ es no creciente.*

Demostración.

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R^n$ tales que $\vec{x}_1 \preceq \vec{x}_2$

$$\frac{\int_0^\infty \bar{F}(\vec{x}_2 + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x}_2)} \geq \frac{\int_0^\infty \bar{F}(\vec{x}_1 + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x}_1)} \quad \text{sii}$$

$$\frac{\int_{\vec{x}_2}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x}_2)} \geq \frac{\int_{\vec{x}_1}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(\vec{x}_1)}$$

Supongamos ahora que se verifica:

$$\vec{x}_i = (Q_1(u_1^{(i)}), \dots, Q_n(U_n^{(i)})) \quad i = 1, 2$$

Entonces se tiene que, $u^{(1)} \preceq u^{(2)}$. Por tanto,

$$\frac{S_X^+(u^{(2)})}{\bar{F}_m(\vec{x}_2)} \leq \frac{S_X^+(u^{(1)})}{\bar{F}_m(\vec{x}_1)} \quad \text{sii}$$

$$\frac{S_X^+(u^{(2)})}{(\bar{F} \circ Q)(u^{(2)})} \leq \frac{S_X^+(u^{(1)})}{(\bar{F} \circ Q)(u^{(1)})}$$

Es decir, si y sólo si es no creciente la siguiente función:

$$\frac{S^+(\cdot)}{(\bar{F} \circ Q)(\cdot)}$$

□

DEFINICION 5.9 La variable aleatoria $X = (X_1, \dots, X_n)$ es del tipo "Creciente por el conjunto de la esquina derecha" (RCSI) si $P[X \succ x' | X \succ x]$ es creciente en x para cada x' fijo.

DEFINICION 5.10 Una variable aleatoria n -dimensional con f.d. F definida en el octante positivo es de tasa de fallo multivariante creciente (MIHR) si:

1. $F(x_1, \dots, x_n)$ es IFR.
2. X_1, \dots, X_n son RCSI.

Partiendo de estas dos definiciones y de algunos teoremas dados por Brindsley (1.972), obtenemos las siguientes propiedades.

PROPOSICION 5.16 Si (X_1, \dots, X_n) son RCSI, entonces $S^+(\vec{u}) \geq \prod_{i=1}^n S_i^+(u_i)$

Demostración. Basándonos en el teorema 3.3. de Brindsley 1.972, tenemos que si \vec{X} son RCSI entonces,

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$$

Luego se tendrá que:

$$\int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \geq \prod_{i=1}^n \int_{Q_i(u_i)}^{\infty} F_i(t_i) dt_i$$

Es decir $S^+(\vec{u}) \geq \prod_{i=1}^n S_i^+(u_i)$

PROPOSICION 5.17 *Si \bar{X} es MIHR y $Q(\vec{u}) \preceq \mu$ entonces se verifica,*

$$S^+(\vec{u}) \geq \prod_{i=1}^n \mu_i \left(e^{\frac{Q(u_i)}{\mu_i}} - e \right).$$

Demostración.

Aplicando el corolario de Brindsley que establece que si X es MIHR entonces,

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) \geq \begin{cases} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\mu_i} \right] & \text{si } x_i < \mu_i \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se deduce fácilmente la proposición. □

PROPOSICION 5.18 *Si X es MIHR, entonces se verifica:*

$$S^+(\bar{u}) \geq \prod_{j \neq k}^n \left\{ \frac{1}{\alpha_j} \left[e^{-\alpha_j q_j(u_j)} - e^{\alpha_j q_j(u_j)} \right] \right\} (1 - \bar{u})$$

donde se ha llamado,

$$\bar{u} = \max \{u_i : i = 1, \dots, n\} = u_k$$

$$\text{y también } \alpha_j = -\frac{\log(1 - F_j Q_j(u_j))}{Q_j(u_j)} \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq k$$

Demostración.

Es una consecuencia inmediata del corolario de Brindsley que acota la función de supervivencia de v.a. MHIR.

DEFINICION 5.11 Sea \vec{X} una variable aleatoria no negativa con función de distribución F . Se dice que \vec{X} es MIFRA -Promedio de la razón de fallo multivariante creciente - si y sólo si,

$$E[h(T_1, \dots, T_n)] \leq e^{1/\alpha} \left[h^\alpha \left(\frac{T_1}{\alpha}, \dots, \frac{T_n}{\alpha} \right) \right]$$

para toda función h no decreciente no negativa y continua y $\forall 0 < \alpha \leq 1$.

Aplicaremos el lema 3.2. del mismo autor,

LEMA 5.19 *Sea D cualquier conjunto superior medible Borel en R^n . Entonces si \vec{T} es MIFRA, se verifica,*

$$Pr \{ \vec{T} \in D \} \leq Pr^{1/\alpha} \{ \vec{T} \in \alpha D \} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Donde un subconjunto $D \subset R^n$ se dice que es un subconjunto superior si cuandoquiera que $x \in D, y \succeq x$ implica $y \in D$.

PROPOSICION 5.20 *Si la variable aleatoria no negativa \vec{X} es MIFRA, entonces se verifica,*

$$S_{\vec{X}}^+(\vec{u}) \leq S_{1/\alpha X}^+(\vec{u}) \quad \forall 0 < \alpha \leq 1$$

Demostración.

Sabemos por el lema anterior que por ser X MIFRA se verifica,

$$Pr \{ \vec{T} \in D \} \leq Pr^{1/\alpha} \{ \vec{T} \in \alpha D \} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

donde D es un conjunto superior, luego:

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) \leq \bar{F}^{1/\alpha}(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)$$

Por tanto, también se verificará:

$$\int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \leq \int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}^{1/\alpha}(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n) d\vec{t}$$

$$\int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \leq \int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n) d\vec{t}$$

$$\int_{Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \leq \int_{\alpha Q(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n) d\vec{t}$$

Ahora bien, aplicando las propiedades de la función cuantil univariante sabemos que:

$$\alpha Q_X(u) = Q_{1/\alpha}(u)$$

y también que

$$\bar{F}_X(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n) = Pr \{X \succ \alpha \vec{t}\} = Pr \left\{ \frac{1}{\alpha} X \succ \vec{t} \right\} = \bar{F}_{1/\alpha}(\vec{t})$$

Nos queda que:

$$\int_{Q_X(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}_X(\vec{t}) d\vec{t} \leq \int_{Q_{1/\alpha}(\vec{u})}^{\infty} \bar{F}_{1/\alpha}(\vec{t}) d\vec{t}$$

Es decir, $S_X^+(\vec{u}) \leq S_{1/\alpha}^+(\vec{u}) \quad \forall 0 < \alpha \leq 1$

DEFINICION 5.12 Sea \vec{X} una variable aleatoria n -dimensional definida en el octante positivo, se dice que es del tipo "Decreciente en Vida Residual Media Multivariante de tipo débil (MDMRL-W) si :

$$\frac{\int_0^\infty \bar{F}(x + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(x)} \downarrow x \quad x \geq 0$$

TEOREMA 5.21 Sea \vec{X} una variable aleatoria n -dimensional. \vec{X} es MDMRL-W si y sólo si la función de esparcimiento multivariante tiene un decrecimiento relativo mayor que la función de supervivencia sobre los puntos del hiperplano bisectriz del octante positivo según la función cuantil multivariante.

Demostración.

Si \vec{X} es MDMRL-W entonces por definición:

$$\frac{\int_0^\infty \bar{F}(x_1 + \vec{t}) d\vec{t}}{\int_0^\infty \bar{F}(x_2 + \vec{t}) d\vec{t}} \geq \frac{\bar{F}(x_1)}{\bar{F}(x_2)} \quad \forall x_1 \leq x_2$$

Luego se verifica,

$$\frac{\int_{x_1}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}}{\int_{x_2}^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t}} \geq \frac{\bar{F}(x_1)}{\bar{F}(x_2)} \quad \forall x_1 \leq x_2$$

Anotemos por \bar{u}_i los puntos del plano R^n tal que: $Q(u_i) = (x_i, \dots, x_i)$. Por tanto, se tendrá que:

$$\frac{S^+(\bar{u}_1)}{S^+(\bar{u}_2)} \geq \frac{\bar{F}(x_1)}{\bar{F}(x_2)}$$

Quedando así demostrada la proposición. \square

DEFINICION 5.13 Sean A y B dos subconjuntos de R^n . Supongamos que existe una biyección ϕ entre A y B . Sean f y g dos funciones continuas al menos por la izquierda y decrecientes. Diremos que f posee un decrecimiento relativo mayor que g respecto al punto $x_0 \in A$ según ϕ si:

$$\frac{g(x_1)}{g(x_0)} \geq \frac{f[\phi(x_1)]}{f[\phi(x_0)]} \quad \forall x_1 \succeq x_0$$

DEFINICION 5.14 Sea \vec{X} una variable aleatoria n -dimensional definida en el octante positivo, diremos que \vec{X} es del tipo "Multivariante Nueva Mejor que la Usada en Esperanza" de tipo débil (MNBUE-W) si se verifica:

$$\int_0^\infty \bar{F}(\vec{t}) d\vec{t} \geq \frac{\int_0^\infty \bar{F}(x + \vec{t}) d\vec{t}}{\bar{F}(x)} \quad \forall x \geq 0$$

TEOREMA 5.22 Sea \vec{X} una variable aleatoria n -dimensional. Esta variable aleatoria es MNBUE-W si y sólo si su función de esparcimiento posee un decrecimiento relativo mayor que la función de supervivencia respecto del origen sobre

los puntos del hiperplano bisectriz del octante positivo según la función cuantil multivariante de \vec{X} .

Demostración. Trivial utilizando las definiciones y basándonos en el hecho de que $\bar{F}(0) = 1$

□

TEOREMA 5.23 Si la función de esparcimiento multivariante es convexa desde el punto $\vec{1}$ entonces, \vec{X} es MDMRL-VS.

Demostración.

Como $S^+(\cdot)$ es convexa desde el punto $\vec{1}$ se verifica:

$$S^+(\lambda\vec{u} + 1 - \lambda) \leq \lambda S^+(\vec{u}) \quad \vec{u} \in [0, 1]^n, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

$$\forall \lambda \in (0, 1) \quad \exists \vec{u}^* \in [0, 1] \quad \text{con} \quad \vec{u} \preceq \vec{u}^* \quad \text{verificando}$$

$$\lambda = \frac{\bar{F}Q(\vec{u}^*)}{\bar{F}Q(\vec{u})} \quad \text{por tanto}$$

$$\frac{S^+(\lambda\vec{u} + 1 - \lambda)}{\bar{F}Q(\vec{u}^*)} \leq \frac{S^+(\vec{u})}{\bar{F}Q(\vec{u})}$$

También sabemos que si $\vec{u} \preceq \vec{u}^*$, entonces

$$\frac{(\vec{u} - \vec{1})}{\bar{F}Q(\vec{u})} \preceq \frac{(\vec{u}^* - \vec{1})}{\bar{F}Q(\vec{u}^*)}$$

es decir,

$$\frac{\bar{F}Q(\vec{u}^*)}{\bar{F}Q(\vec{u})} \vec{u} + \vec{1} - \frac{\bar{F}Q(\vec{u}^*)}{\bar{F}Q(\vec{u})} \preceq \vec{u}^*$$

Y como sabemos que la función de esparcimiento es no creciente, se tiene que:

$$\frac{S^+(\vec{u}^*)}{\bar{F}Q(\vec{u}^*)} \leq \frac{S^+(\vec{u})}{\bar{F}Q(\vec{u})}$$

Y por el teorema 3.2. se deduce que la variable aleatoria \vec{X} es MDMRL-VS. \square

TEOREMA 5.24 *Si \vec{X} es MDMRL-VS y $\bar{F} \circ Q$ convexa desde el punto $\vec{1}$, entonces la función de esparcimiento multivariante es convexa desde el punto $\vec{1}$.*

Demostración. Si \vec{X} es MDMRL-VS entonces, $\frac{S^+(\cdot)}{\bar{F}Q(\cdot)}$ es no creciente. Luego $\forall \vec{u} \preceq \vec{u}^*$ se verifica:

$$\frac{S^+(\vec{u}^*)}{\bar{F}Q(\vec{u}^*)} \leq \frac{S^+(\vec{u})}{\bar{F}Q(\vec{u})}$$

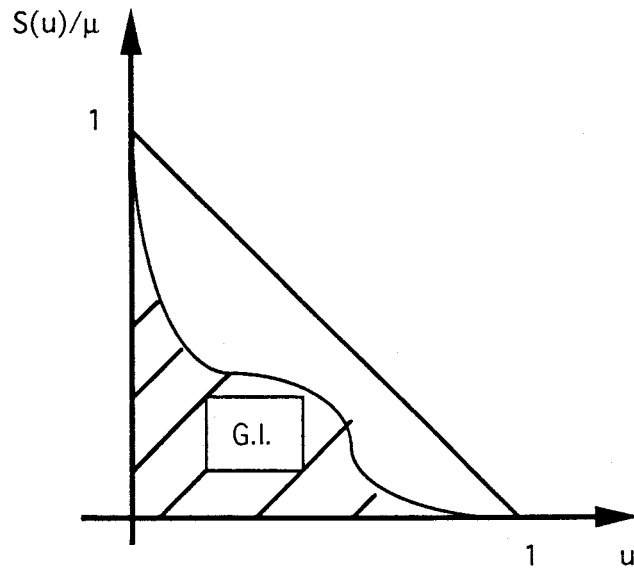
$$\exists \lambda \in (0, 1): \quad \vec{u}^* = \lambda \vec{u} + 1 - \lambda$$

$$S^+(\lambda \vec{u} + 1 - \lambda) \leq \frac{\bar{F}Q(\lambda \vec{u} + 1 - \lambda)}{\bar{F}Q(\vec{u})} S^+(\vec{u}) \leq \lambda S^+(\vec{u})$$

CONCLUSIONES.

Del segundo capítulo podemos extraer los siguientes resultados :

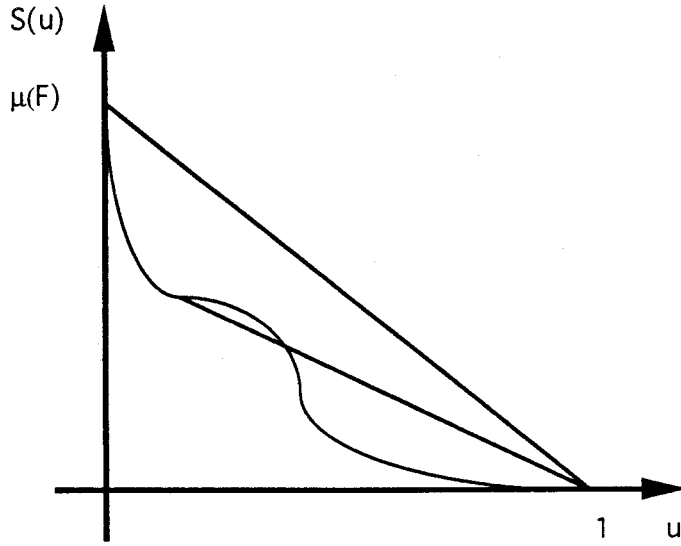
1. La función de esparcimiento se puede expresar como el producto de un L-funcional generalizado por un polinomio de grado 1.
2. La función de esparcimiento empírica es insesgada asintóticamente.
3. La función de esparcimiento empírica se distribuye asintóticamente según una normal, bajo ciertas condiciones de regularidad de la función de densidad.
4. La función de esparcimiento empírica converge casi seguro a la función de esparcimiento teórica.
5. La curva de influencia del L-funcional generalizado que caracteriza a la función de esparcimiento posee un error grosero de sensibilidad finito.
6. El área debajo de la función de esparcimiento es igual al producto de la media por el Índice de Gini de dicha variable aleatoria.



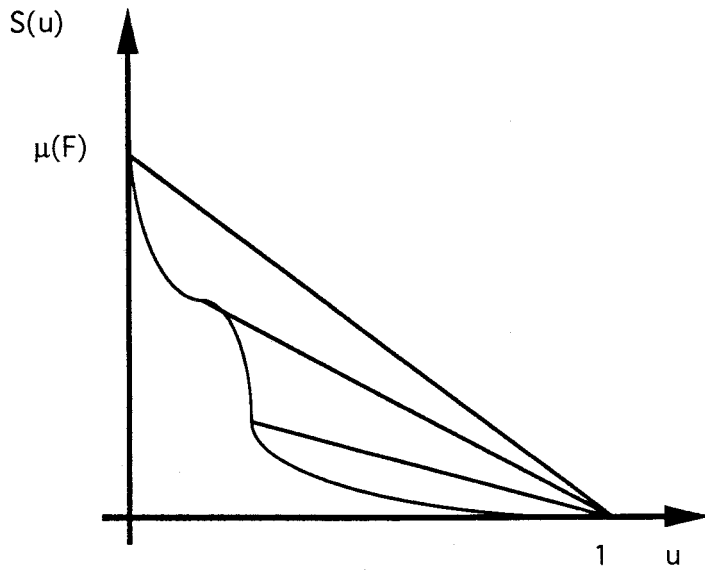
Indice de Gini.
Figura 1

Del tercer capítulo podemos sacar las siguientes conclusiones:

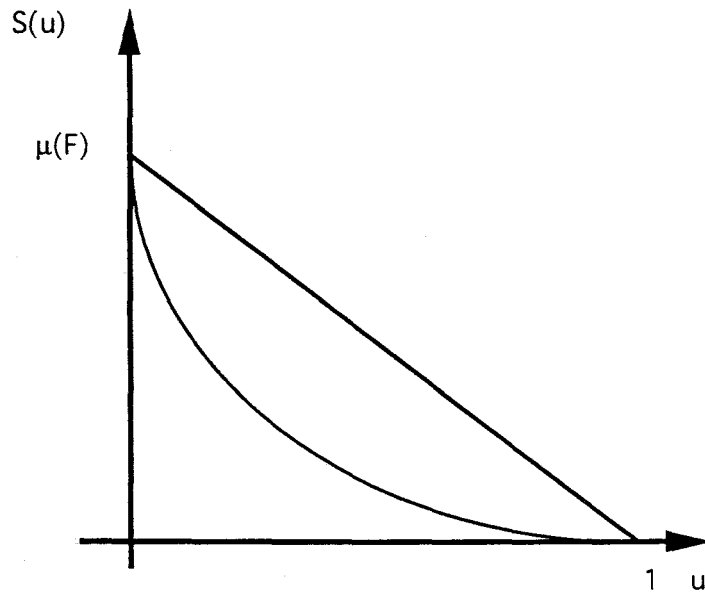
1. La función de espacimienta caracteriza a los diferentes tipos de distribuciones de vida. Estas caracterizaciones las podemos visualizar fácilmente. En la figura 2 tenemos la función de espacimienta correspondiente a una distribución de vida N.B.U.E., en la figura 3 tenemos una D.M.R.L. y en la figura 4 una I.F.R.
2. Mediante las funciones de espacimienta de dos distribuciones de vida podemos ordenarlas según los diferentes criterios.



NBUE
Figura 2



DMRL
Figura 3



IFR
Figura 4

Del cuarto capítulo la conclusión más importante es la elaboración de diferentes tests de hipótesis para distribuciones de vida DMRL y NBUE, dando muy buenos resultados para las alternativas estudiadas.

Del capítulo cinco el resultado más importante es la caracterización de algunas distribuciones multivariante de vida mediante la función de esparcimiento multivariante allí definida.

Anexo

El programa que ahora presentamos está escrito en lenguaje SIMSCRIPT para ordenadores VAX. Este programa nos da la potencia para determinados niveles de significación, en concreto para $\alpha = 0.01$. Los valores de entrada son los tamaños muestrales de la simulación, dando como salida el valor de la potencia correspondiente para el contraste DMRL. Para calcular la potencia, el experimento se ha realizado 1.000 veces. Los correspondientes percentiles del estadístico utilizado, bajo la hipótesis nula, se han calculado generando 500 valores aleatorios del mismo.

PREAMBLE

NORMALLY MODE IS UNDEFINED

DEFINE JJ,N,I,T,L,J,ITERACION AS A INTEGER VARIABLE

DEFINE RESULTADO,BSUM,CSUM AS A REAL VARIABLE

DEFINE PPT,PB,AS A TEAL 2-DIMENSIONAL VARIABLE

END

MAIN

RESERVE PPT(*,*) AS 18 BY 60

RESERVE BBB(*) AS 70

RESERVE CCC(*) AS 70

RESERVE PB(*,*) AS 1001 BY 70

RESERVE B(*) AS 1001

READ N

FOR ITERACION = 2 TO 501

DO


```

LET RESULTADO=0
FOR I=1 TO N
DO
LET BBB(I) = EXPONENTIAL.F(1,4)
LOOP
FOR I=1 TO N-1
DO
LET BSUM=0
FOR L=1 TO N
DO
LET BSUM=BSUM+BBB(L)
LOOP
LET CSUM=0
FOR L=1 TO I
DO
LET CSUM= CSUM + BBB(L)
LOOP
LET RESULTADO=RESULTADO+ ( (J-I/N)*(BSUM/CSUM))
LOOP
LET B(ITERACION)= 1/3- (1/N**2)*RESULTADO
LOOP
FOR I= 3 TO 501
DO
LET J=501
UNTIL J=I-1
DO
IF B(J) < B(J-1)
LET INTER=B(J)
LET B(J) = B(J-1)
LET B(J-1) = INTER
ALWAYS
JET J=J-1
LOOP
LOOP
LET PPT(16,N)=B(496)
FOR T= 2 TO 1001
DO
LET RESULTADO=0
FOR I= 2 TO N+1

```

```

DO
LET CCC(I) = GAMMA.F(2,0.5,2)
LOOP
LET CCC(1)=0
FOR I=3 TO N+1
DO
LET J=N+1
UNTIL J=I-1
DO
IF CCC(J) < CCC(J-1)
LET INTER=CCC(J)
LET CCC(J) =CCC(J-1)
LET CCC(J-1)=INTER
ALWAYS
LET J=J-1
LOOP
LOOP
FOR I=2 TO N
DO
LET BSUM=0
DOR L=2 TO N+1
DO
LET BSUM = BSUM + (N+L-2)*(CCC(L)-CCC(L-1))
LOOP
LET CSUM=0
FOR L=2 TO I
DO
LET CSUM=CSUM+ (N+L-2)*(CCC(L)-CCC(L-1))
LOOP
LET RESULTADO=RESULTADO + ( ((J-I)/N)*(BSUM/CSUM))
LOOP
LET PB(T,N) = 1/3- RESULTADO/(N**2)
LOOP
LET JJ=0
FOR T=2 TO 1001
DO
IF PB(T,N)>PPT(16,N)
LET JJ=JJ+1
ALWAYS

```

```
LOOP  
PRINT 1 LINES WITH JJ THUS  
P= ****.*****  
END
```

El correspondiente programa en SIMSCRIPT utilizado para el contraste de distribuciones de vida NBUE sería similar, tan sólo cambiando el estadístico correspondiente.

BIBLIOGRAFIA

CAP. 2

1. BARLOW , R.
Geometry of the total time on test transform.
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 26, 393-402. 1.979.
2. CLARK, C.E. Y WILLIAMS, G.T.
Distributions of the members of an ordered sample.
Ann. Math. Stat. Vol. 29, 862-870. 1.958
3. CHERNOFF, H. , GASTWIRTH, J.L. Y JOHNS, M.V.
Asymptotic distributions of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation.
Annals of Statistics. Vol. 38, 52-72. 1.967.
4. DAVID, F.N.
Order Statistics.
Wiley & Sons, 1.954.
5. DAVID, F.N. Y JOHNSON, N.L.
Statistical Treatment of censored data. Part I. Fundamental Formulae.
Biometrika, 41. 228-240. 1.954

6. FROSINI, B.V.
Concentration, Dispersion and Spread: an insight into their relationship.
STATISTICA, no. 3, anno XLIV, 1.984.
7. GRIFFITH, W.
Remarks on a univariate shock model with some bivariate generalizations.
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 29, No. 1, 63-74, Marzo 1.992.
8. HAMPEL, F.R.
The influence curve and its role in robust estimation.
JASA, Vol. 69, no. 346, 383-393. 1.974.
9. HOEFFDING, W.
A class of statistics with asymptotically normal distribution.
Ann. Math. Stat. Vol. 19, 293-325. 1.984.
10. JANSENN, SERFLING Y VEERABERBEKE
Asymptotic normality for a general class of statistical functions and applications to measures of spread.
The Annals of Statistics.. Vol. 12, No. 4, pp. 1369-1379. (1.984)
11. VON MISES, R.
On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions.
Ann. Math. Stat. Vol. 18, 309-348. 1.947.
12. MOORE, D.S.
An elementary proof of asymptotic normality of linear functions of order statistics.
Vol. 39, 263-265. 1.968.
13. MUÑOZ PEREZ, J. Y FDEZ. PALACIN, A.
Estimation the quantile function by Bernstein Polinomyals.
Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 5, 391-397. 1.987.

14. SAW, J.G.

A note on the error after a number of terms of the David-Johnson series for the expected values.

BIOMETRICA, Vol. 47, 79-86. 1.960.

15. SERFLING, R.J.

Generalized L-, M-, and R-Statistics.

The Annals of Statistics. Vol. 12, No. 1, 1.984. pp. 76-86.

16. SINGH, H.

On partial orderings of life distributions.

Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 36. 1.989. pp. 103-110.

17. STIGLER, S.

Linear Functions of order statistics with smooth weight functions.

Annals of Statistics. Vol. 2, 1.974. pp. 676-692.

CAP. 3

1. BARTOSZEWICZ, J.
Dispersing ordering and the total time on test transformation.
Stat. & Prob. Letters. Vol. 4, 1.986, pp. 285-288.
2. BARTOSZEWICZ, J.
A note on dispersive ordering defined by hazard functions
Stat. & Prob. Letters. Vol. 6, 1.987, pp. 13-16.
3. BESSLER, S.A. AND VEINOTT, A.F.
Optimal policy for a dynamic multi-echelon inventory model.
Naval Research Logistic Quarterly. Vol. 13, 1.966. pp.355-389.
4. BLOCK, H.W. AND SAVITS, T.H.
The IFRA clousure problem.
The Annals of Probability. Vol. 4, no. 6, 1.976. pp.1030-1032.
5. EPSTEIN, B. AND SOBEL, M.
Life Testing.
J.A.S.A. Vol. 48, 1.953. pp. 486-502.
6. GAIL, M.H. AND GASTWIRTH J.L.
A scale-free Goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic.
Journal Royal Stat. Soc. B. Vol. 40, no. 3, 1.978, pp. 350-357
7. KOCHAR, S.C. AND WIENS, D.P.
Testing for new better than used in expectation with incomplete data.
J.A.S.A. Vol. 74, no. 366, 1.979. pp. 375-378.
8. LANGBERG, N.A. , LEÓN, R.V. AND PROSCHAN, F.
Characterization of nonparametric classes of life distributions.
The Annals of Probability, Vol. 8, no. 6, 1.980, 1163-1170.

9. LAUNER, R.L.
Inequalities for NBUE and NWUE life distributions.
Operations Research, 1.984, Vol. 32, no. 3, 660-667.
10. LEHMANN, E.L.
Some concepts of dependence.
Ann. Math. Stat. Vol. 37, 1.966, 1137-1153.
11. MUÑOZ PÉREZ, J.
Dispersive ordering by the spread function.
Stat. & Prob. Letters, Vol. 10, 1.990, 407-410.
12. SHAKED, M.
On Mixtures from Exponential families. J.R. Stat. Soc. B. 1.980. Vol. 42,
no. 2, 192-198.
13. SINGH, H.
On partial orderings of life distributions.
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 36. 1.989. pp. 103-110.

CAP. 4

1. AHMAD, H. AND KOCHAR, C.
Testing for dispersive ordering.
Stat. and Prob. Letters. Vol. 7, no. 3, 1.989. 179-185.
2. BARTOSZEWICZ, J.
Dispersiving ordering and the total time on test transformation.
Stat. and Prob. Letters. Vol. 4, 1.986. 285-288.
3. BARTOSZEWICZ, J. AND BEDNARSKI, T.
On a test for dispersive ordering.
Stat. and Prob. Letters. Vol. 10, 1.990. 355-362.
4. BENGT KLEFSJO
On aging properties and total time on test Transforms.
Scand.,. J. Stat. Vol. 9. 37-41, 1.982.
5. BENGT KLEFSJO
Testing exponentiality against HNBUE
Scand. J. Stat. 10: 65-75, 1.983.
6. BENGT KLEFSJO
Reliability interpretations of some concepts from Economics.
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 31, 301-308, (1.984).
7. BO BERGMAN
On age replacement and the total time on test concept.
Scand. J. Stat. 6: 161-168, 1.979.
8. BO BERGMAN AND BENGT KLEFSJO
The total time on test concept and its use in reliability theory.
Operations Research. Vol. 32, no. 3, 596-606. (1.984)
9. BICKEL AND DOKSUM
Tests for monotone failure rate based on normalized spacings.
Ann. Math. Stat. Vol. 40, no. 4, 1216-1235. (1.969).

10. BURGER, H.U.
Dispersion orderings with applications to nonparametrics tests.
Stat. and Prob. Letters. Vol. 16, (1.993), 1-9.
11. CHANDRA, M. AND SINGPURWALLA, N.
Relationships between some notions which ar common to reliabilitytheory and economics. Math. Oper. Res. Vol. 6, no. 1, (1.981) 113-121.
12. GAIL, M. AND GASTWIRTH, J.L.
A Scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Lorenz Curve.
JASA. Vol. 73, no. 364, (1.978) 787-793.
13. GAIL, M. AND GASTWIRTH, J.L.
A Scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini Statistic.
J. R. Stat. Soc. B (1.978) Vol. 40, no. 3, 350-357.
14. HOLLANDER, M. AND PROSCHAN, F.
Tests for the mean residual life.
Biometrika,(1.975). Vol. 62, no. 3, 585-593.
15. KOUL, H.L. AND SUSARLA, V.
Testing for new netter than used in expectation with incomplete data. JASA.Vol. 75, no. 372, (1.980) 952-956.
16. WHITAKER, L.R. AND SAMANIEGO, F.J.
Estimationg a survival curve when new is better than used in expectation.
Naval Research Logistics, Vol. 36, 693-707, (1.989)

CAP. 5

1. ARNOLD, B.C.
A note on multivariate distributions with specified marginals.
J.A.S.A. Vol. 37, 1.966, pp. 816-825.
2. BLOCK, H.W. AND SAVITS, T.H.
The class of MIFRA lifetimes and its relation to other classes.
N.R.L.Q. Vol. 29, no. 1, 1.982. pp.55-61
3. BLOCK, H.W. AND SAVITS, T.H.
Multivariate increasing failure rate average distributions.
Ann. Prob. Vol. 8, 1.980, 793-801.
4. BRINDLEY, E.C. AND THOMPSON, JR.
Dependence and aging aspects of multivariate survival.
J.A.S.A. Vol. 67, 1.972, 822-830.
5. BRECKLING, J. AND RAY CHAMBERS
M-quantiles.
BIOMETRICA. Vol. 75, 1.988, 761-771.
6. BRYSON, M.C. AND SIDDIQUI, M.M.
Some criteria for aging.
J.A.S.A. Vol. 64, 1.969. 1472-1483.
7. CHRIS P. TSOKOS AND SHIMI, I.N.
The theory and applications of reliability. Vol 1
Academic Press, 1.977
8. ESARY, J.D. AND MASHALL, A.W.
Multivariate distributions with exponential minimums.
Annals Stat. Vol. 2 (1) , 1.974. 84-98
9. ESARY, J.D. AND MASHALL, A.W.
Multivariate distributions with increasing hazard rate average.
The Annals of Prob. Vol. 7, no. 2, 1.979. 359-370.

10. HARRIS, R.
A multivariate definition for increasing hazard rate distribution functions.
Ann. Math. Stat. Vol. 41, 1.970, 713-717.
11. JOHNSON, N.L. AND KOTZ, S.
A vector multivariate hazard rate.
Journal Multivariate Annals. Vol. 5, 1.975, 53-66.
12. MARSHALL, A.W. AND OLKIN, I.
A multivariate exponential distributions
J.A.S.A. march 1.967, 30-44.
13. PARZEN, E.
Nonparametric statistical data modeling.
J.A.S.A. Vo. 74, no. 365, 1.979, pp. 105-122.
14. PURI, P.S. AND RUBIN, H.
On a characterization of the family of distributions with constant multivariate failure rates.
Ann. Prob. Vol. 2, 1.974, 738-740.
15. SHANBHAG, D.N.
Some new approaches to multivariate probability distributions.
Journal of multivariate analysis. Vol. 22, 1.987. pp. 189-211.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal Integrado por los señores Circunstantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JOSE MARIA FERNANDEZ PONCE titulada ANALISIS ESTADISTICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE VIDA BASADO EN LA FUNCION DE ESPARCIMIENTO.

acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE por UNANIMIDAD.

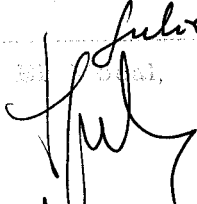
Sevilla, 1 de Julio de 1973

El Vocal,



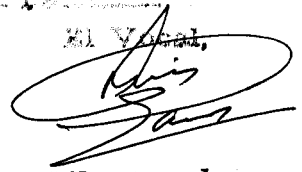
El Presidente

El Vocal,



El Secretario,

El Vocal,



El Doctorado,

