Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Algunos métodos del Cálculo de Variaciones

Lilian Nadine Schläpfer

Tutor:

Manuel Luna Laynez

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Agradecimientos

A mis amigos y amigas de la Facultad de Matemáticas, a mi familia, y sobre todo, a mi tutor, Manuel Luna Laynez, por su paciencia, apoyo y dedicación en todo momento durante el proceso de elaboración de este trabajo.

Abstract

The aim of this work is to introduce the Calculus of Variations, showing some of its fundamental methods and techniques. In the first part, our focus will be on regular solutions, and we will study the classical methods that lead to the Euler-Lagrange equations as optimality conditions. We will examine different formulations of these equations, particularly the Hamiltonian formulation, which is connected to the Hamilton-Jacobi system of partial differential equations. By utilizing field theories, we will establish conditions under which the Euler-Lagrange equations are not only necessary but also sufficient conditions. In the second part, we will proof some existence results for weak solutions in Sobolev spaces and provide a brief overview of the vectorial case of these problems and the relaxation theory. Finally we will see some regularity results which will guarantee that solutions which in principle are weak actually are regular solutions.

Resumen

Esta memoria pretende ser una introducción al Cálculo de Variaciones, mostrando algunos de sus métodos y técnicas fundamentales. En su primera parte nos interesamos por soluciones regulares a los problemas planteados, y mostramos métodos clásicos que conducen a las condiciones de optimalidad conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange. Damos varias formulaciones de dichas condiciones, en particular la formulación Hamiltoniana (o ecuaciones canónicas de Euler-Lagrange), cuyas soluciones están relacionadas con el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi. Mediante la Teoría de Campos proporcionamos condiciones que hacen que las ecuaciones de Euler-Lagrange no sólo sean condiciones necesarias sino también suficientes de optimalidad. En la segunda parte probamos resultados de existencia de solución débil en los espacios de Sobolev, y hacemos una breve incursión en los problemas vectoriales y en la teoría de la relajación. Finalmente, vemos resultados de regularidad que permiten asegurar que soluciones, que en principio son sólo débiles, son en realidad fuertes (regulares).

Índice

Introducción

En este trabajo se extienden los resultados de Cálculo de Variaciones estudiados en la asignatura de Modelización Matemática, asignatura obligatoria de tercer curso del Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Aunque sus orígenes son más antiguos, el Cálculo de Variaciones comenzó a ser considerado como una rama propia de la Matemática, con métodos característicos, en torno al año 1696. Fue precisamente en junio de ese año, cuando se publicó en la revista Acta Eruditorum el artículo "Problema novum ad cujus solutionem Mathematice invitantur", con el que Johann Bernoulli retaba a la comunidad matemática a que resolvieran el problema de la braquistócrona (o curva de descanso más rápido). El reto atrajo la atención de las mentes más destacadas del momento: Gottfried Leibniz, Isaac Newton, Jakob Bernoulli, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, Guillaume de l' Hôpital... Desde entonces el Cálculo de Variaciones se ha desarrollado enormemente, estrechando lazos no sólo con otros campos de la Matemática, como con la Geometría o las Ecuaciones Diferenciales, sino que hoy en día es de gran aplicación en otras disciplinas, como por ejemplo en Física, Ingeniería o Economía.

A lo largo de la memoria consideramos principalmente el siguiente problema modelo

$$(P) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \ : \ u \in \mathcal{C}^1([a,b])^N,\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \right\},$$

donde $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f = f(x, u, \xi)$, $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Su estudio nos permite introducir diversos métodos y técnicas características del Cálculo de Variaciones. Comenzamos utilizando métodos clásicos que nos llevan a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones constituyen condiciones necesarias para que una función u de $\mathcal{C}^1([a,b])^N$ sea una solución de (P), y bajo condiciones adicionales de convexidad, también resultan suficientes. A continuación consideramos métodos directos que nos conducen a resultados de existencia de solución débil, de solución u en $W^{1,p}(a,b)^N$. Complementamos los resultados de existencia con resultados de regularidad, probando que si f es regular, entonces las soluciones u, que en principio sólo están en el espacio de Sobolev $W^{1,p}$, son también regulares. Para dar un tratamiento a los casos en los que nuestro problema (P) no esté en las condiciones de los resultados de existencia, introducimos la noción de relajación. También consideramos el caso vectorial, es decir cuando las funciones u que intervienen en el problema están definidos sobre un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$.

La memoria está organizada como sigue. El Capítulo 1 está dedicado a recordar o presentar algunos resultados técnicos que serán necesarios más adelante para la demostración de los resultados.

En el Capítulo 2 deducimos y estudiamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (la condición de punto crítico del funcional I) que deben verificar todas las soluciones de (P). Proporcionamos varias formulaciones de estas ecuaciones, en particular la formulación Hamiltoniana (o ecuaciones de Euler-Lagrange canónicas), cuyas soluciones están relacionadas con las de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, conocidas como ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Terminamos el capítulo con una breve introducción a la teoría de campos, desarrollada por Weierstrass y Hilbert, que permite caracterizar algunas situaciones en las que las ecuaciones de Euler-Lagrange son también condiciones suficientes de optimalidad.

En el Capítulo 3 consideramos la siguiente versión más general de nuestro problema: Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, una función $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, y un elemento u_0 perteneciente a $W^{1,p}(\Omega)$, consideramos el problema

$$(P_w) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \, : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Con ayuda del método directo del Cálculo de Variaciones, asumiendo ciertas condiciones de crecimiento y convexidad sobre f, probamos un resultado bastante general de existencia cuando $n = 1$. Cuando n es mayor que uno (y N también) el problema (P_w) se vuelve mucho más complejo, y nos limitamos a mostrar un resultado un poco particular, que sirve para destacar las principales dificultades y algunas direcciones para solventarlas. Terminamos este capítulo dando un tratamiento al problema cuando f no satisface la condición de convexidad del resultado de existencia, introduciendo para ello un problema relajado así como el concepto de solución generalizada.

En el Capítulo 4 estudiamos resultados de regularidad para las soluciones del problema (P_w). En el caso unidimensional $n = 1$, con ayuda de la formulación Hamiltoniana introducida en el Capítulo 2, probamos que si la función f es de $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 2$, entonces las soluciones de (P_w) son también de $\mathcal{C}^k$. En el caso de dimensión arbitraria damos un resultado que liga la regularidad de las soluciones de (P_w) con la de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales con coeficientes medibles. La demostración de este último resultado escapa de los objetivos de la memoria.

Capítulo 1

Resultados auxiliares

En este capítulo vamos a dar algunas definiciones y resultados que serán utilizados como herramientas a lo largo de esta memoria. Las demostraciones que no aparecen pueden consultarse por ejemplo en [3], [4] y [6].

Lema fundamental del Cálculo de Variaciones
Comenzamos recordando un lema de gran importancia para deducir las condiciones de optimalidad, permitiendo pasar de igualdades integrales a igualdades punto a punto (o en casi todo punto).

Lema 1.1 (Lema fundamental del Cálculo de Variaciones)**.** *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Entonces $u(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

Algunas resultados de compacidad en los espacios L^p

Lema 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se tiene*

1. *Si $1 \le p < \infty$ y $u_\nu \rightharpoonup u$ en $L^p(\Omega)$ entonces existe una constante $\gamma > 0$ tal que $||u_\nu||_{L^p} \le \gamma$. Además,*
$$||u_\nu||_{L^p} \le \liminf_{\nu\to\infty} ||u_\nu||_{L^p}.$$
2. *Si $1 < p < \infty$ y existe una constante $\gamma > 0$ tal que $||u_\nu||_{L^p} \le \gamma$ entonces existen una subsucesión $\{u_{\nu_i}\}$ y $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_{\nu_i} \rightharpoonup u$ en L^p.*

El siguiente resultado se usa en la Sección 3.4.

Lema 1.3. *1. Sea $1 \le p < \infty$. Si*

$$\left.\begin{array}{r} u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } L^p \\ v_\nu \longrightarrow v \text{ en } (L^p)' \end{array}\right\} \quad \text{entonces } u_\nu\, v_\nu \rightharpoonup u\, v \text{ en } L^1.$$

2. *Si*

$$\left.\begin{aligned} u_\nu &\rightharpoonup u \ \text{en } L^2 \\ u_\nu^2 &\rightharpoonup v \ \text{en } L^1 \end{aligned}\right\} \qquad \textit{entonces } u_\nu \longrightarrow u \ \textit{en } L^2.$$

Demostración. 1. Queremos probar que para cada $\varphi \in L^\infty$ se tiene

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} \int_\Omega (u_\nu v_\nu - uv)\varphi = 0.$$

Reescribmos esta integral:

$$\int_\Omega (u_\nu v_\nu - uv)\varphi = \int_\Omega u_\nu (v_\nu - v)\varphi + \int_\Omega (u_\nu - u) v\varphi.$$

Como $(v_\nu - v) \longrightarrow 0$ en $(L^p)'$ y $\|u_\nu\|_{L^p} \leq K$, deducimos de la desigualdad de Hölder que la primera itegral tiende a cero. Pero la segunda también tiende a cero gracias a que $(u_\nu - u) \rightharpoonup 0$ en L^p y $v\varphi \in (L^p)'$. Luego hemos demostrado lo que queríamos en este primer apartado.

2. Queremos probar que $\|u_\nu - u\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Para ello escribimos

$$\int_\Omega |u_\nu - u|^2 = \int_\Omega u_\nu^2 - 2\int_\Omega u\, u_\nu + \int_\Omega u^2.$$

Para la primera integral tomamos $\varphi \equiv 1 \in L^\infty$ para ver que tiende a $\int_\Omega u^2$ pues $u \rightharpoonup u_\nu$ en L^1. Por el mismo razonamiento tenemos que la segunda integral tiende a $-2\int_\Omega u^2$. Luego,

$$\int_\Omega |u_\nu - u|^2 \longrightarrow 0.$$

□

Algunas propiedades de las funciones convexas

La siguiente caracterización de función convexa y estrictamente convexa se empleará para demostrar el carácter en algunos casos, no sólo necesario, sino también suficiente de la ecuación de Euler-Lagrange.

Teorema 1.4. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. *Entonces:*

1. f *es convexa si y sólo si* $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, *donde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto escalar en* $\mathbb{R}^n$

2. *Si* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *entonces* f *es convexa si y sólo si su matriz Hessiana,* $\nabla^2 f$, *es semidefinida positiva.*

También nos será útil la conocida desigualdad de Jensen.

Teorema 1.5 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y acotado,* $u \in L^1(\Omega)$ *y* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexa. Entonces:*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x))dx.$$

Espacio de funciones Hölder continuas

Definición 1.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $0 < \alpha \leq 1$. Definimos*

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} \right\}.$$

Definición 1.7. *Definimos el espacio $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ como el conjunto de las $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ tales que $[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$, dotado de la norma*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}^{0}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev constituirán el marco funcional adecuado para demostrar los resultados de existencia.

Definición 1.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y sea $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \exists\, g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} g_i \varphi,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)\, \forall\, i = 1, \ldots, N\}.$$

La función g_i, con $1 \leq i \leq N$, que aparece en la definición anterior se conoce como la derivada débil de u respecto a x_i. Por abuso de notación la función g_i se denota por $\partial u / \partial x_i$ o u_{x_i}, y el vector $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ se denota por ∇u.
El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ se dota de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}.$$

Definición 1.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y sea $1 \leq p < \infty$. Definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Lema 1.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ dotado de su norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$ y reflexivo si $1 < p < \infty$.*

2. *El espacio $W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x)\, dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle\, dx.$$

3. *Las funciones $W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ son densas en $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Además si Ω es un dominio acotado con frontera de Lipschitz entonces $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ también es denso en $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.11 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado en alguna dirección y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una constante $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O equivalentemente,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como consecuencia inmediata del Lema 1.2 tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de Lipschitz, $1 < p < \infty$. Si existe una constante $\gamma > 0$ tal que $||u_\nu||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma$, entonces existen una subsucesión $\{u_{\nu_i}\}$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{\nu_i} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

El siguiente teorema de compacidad es fundamental al tratar con los espacios de Sobolev. Su demostración es mucho más compleja.

Teorema 1.13 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de Lipschitz.*

Caso 1. *Si $1 \leq p < n$ entonces la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, p^*)$. Esto significa que cualquier conjunto acotado de $W^{1,p}(\Omega)$ es precompacto (es decir, su clausura es compacta) en $L^q(\Omega)$ para cada $1 \leq q < p^* = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

Caso 2. *Si $p = n$ entonces la aplicación inyección de $W^{1,n}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty)$.*

Caso 3. *Si $p > n$ entonces la aplicación inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ es compacta para cada $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$.*

En particular en todos los casos (i.e. para $1 \leq p \leq \infty$) la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ es compacta.

Capítulo 2

Métodos clásicos

2.1. Introducción

En este capítulo nos centraremos en estudiar el problema

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) := \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \;:\; u \in \mathcal{C}^1([a,b])^N,\, u(a)=\alpha,\, u(b)=\beta \right\},$$

donde $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Destacar un punto que diferenciará este capítulo del siguiente: las funciones admisible u en (P), y por tanto sus posibles soluciones, son funciones regulares en $\mathcal{C}^1([a,b])^N$. Es esta la regularidad usual con la que se formulan inicialmente muchos de los problemas clásicos del Cálculo de Variaciones. Sin embargo, hoy en día sabemos que los espacios de funciones regulares no constituyen en ocaciones el mejor marco de trabajo para probar resultados de existencia de solución. Para llegar a tales resultados es necesario trabajar con soluciones en espacios de Sobolev, espacios que disftrutan de mejores propiedades. Estos últimos espacios constituirán nuestro entorno de trabajo en el Capítulo 3. Aquí nos tendremos pues que centrar en el análisis de condiciones necesarias de optimalidad para (P). Entenderemos por métodos clásicos aquellos que consisten en caracterizar, analizar o calcular las soluciones de (P) como puntos críticos (ceros de la primera variación) del funcional I.

El contenido del capítulo se organiza como sigue. En las Secciones 2.2, 2.3 y 2.4 deducimos y estudiamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (la condición de punto crítico) que deben verificar todas las soluciones de (P). En la Sección 2.5 introducimos la Hamiltoniana, definida como la transformada de Legendre de la función f, que nos permite reformular las ecuaciones de Euler-Lagrange de una forma conocida como formulación Hamiltoniana (o ecuaciones de Euler-Lagrange canónicas). Las soluciones de esta nueva formulación están relacionadas con las de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, conocidas como ecuaciones de Hamilton-Jacobi, que se presentan en la Sección 2.6. Finalmente, en la Sección 2.7 realizamos una breve introducción a la teoría de campos, desarrollada por Weierstrass y Hilbert, que nos permite afirmar en determinadas situaciones, que una solución de Euler-Lagrange es también una solución de (P).

2.2. Ecuación de Euler-Lagrange (I)

Vamos a comenzar esta sección con un teorema fundamental que, con una formulación similar, ya ha sido tratado en la asignatura de Modelización Matemática. Posteriormente veremos otra versión mejorada, con unas hipótesis menos restrictivas.

Teorema 2.1. *Sean $N \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, y $f = f(x, u, \xi) \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Consideremos el problema*

$$(P) \;\; \inf \left\{ I(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \; : \; u \in X \right\},$$

donde

$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([a, b])^N \; : \; u(a) = \alpha, \; u(b) = \beta \right\}.$$

1. *Si (P) admite solución $\overline{u} \in X \cap \mathcal{C}^2([a, b])^N$ entonces necesariamente $\overline{u}$ satisface*

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))] = f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)), \quad \forall x \in (a, b) \tag{E}$$

2. *Por otro lado, si $\overline{u} \in X$ satisface (E) y para todo $x \in (a, b)$ la función $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa, entonces $\overline{u}$ es solución de (P).*

3. *Si además para todo $x \in (a, b)$ la función $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estictamente convexa, entonces si (P) tiene solución necesariamente ésta es única.*

Demostración.

1. Supongamos que $\overline{u} \in X$ es solución de (P), es decir, que minimiza el funcional I entre todos los elementos de X. Entonces

$$I(\overline{u}) \leq I(\overline{u} + hv) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}, \forall\, v \in \mathcal{C}^1([a, b])^N \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$$

Es decir, si definimos $\Phi(h) = I(\overline{u} + hv)$, se tiene que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\Phi(0) \leq \Phi(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Por tanto $\Phi(0)' = \frac{d}{dh} I(\overline{u} + hv)\Big|_{h=0} = 0$. Veamos cómo podemos reescribir esta última condición. Por definición

$$I(\overline{u} + hv) = \int_a^b f(x, \overline{u} + hv, \overline{u}' + hv')dx \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Derivando respecto de h (estamos bajo las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral)

$$\frac{d}{dh} I(\overline{u} + hv) = \int_a^b \Big(f_u(x, \overline{u} + hv, \overline{u}' + hv') \cdot v + f_\xi(x, \overline{u} + hv, \overline{u}' + hv') \cdot v' \Big) dx,$$

evaluando en $h = 0$ e igualando a cero, obtenemos

$$\int_a^b \Big(f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot v + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot v' \Big) dx = 0. \tag{2.1}$$

Integramos por partes el segundo sumando de la última integral

$$\int_a^b f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot v' dx = \big[v(x) \cdot f(x, \overline{u}, \overline{u}') \big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx} [f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')] \cdot v \, dx.$$

Sustituyendo en (2.1), y teniendo en cuenta que $v(a) = v(b) = 0$, obtenemos

$$\int_a^b f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot v + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot v' \, dx = \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \right] \cdot v \, dx = 0,$$

para toda $v \in \mathcal{C}^1([a, b])^N$ con $v(a) = v(b) = 0$. Ahora basta aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones para, como queríamos, llegar a $\bar{u}$ satisface la ecucación de Euler-Lagrange (E).

2. Sea $\overline{u}$ solución de (E) con $\overline{u}(a) = \alpha$ y $\overline{u}(b) = \beta$. Como $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$, gracias al Teorema 1.4 tenemos que

$$f(x, u, u') \geq f(x, \overline{u}, \overline{u}') + f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot (u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot (u' - \overline{u}), \quad \forall \, u \in X$$

Integrando en (a, b), deducimos

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_a^b \big[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot (u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \cdot (u' - \overline{u}') \big] \, dx, \quad \forall \, u \in X$$

Tendiendo en cuenta que $u, \overline{u} \in X$, y por tanto $u(a) - \overline{u}(a) = u(b) - \overline{u}(b) = 0$, integrando por partes el segundo sumando de la ecuación anterior, obtenemos:

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \right] \cdot (u - \overline{u}) \, dx$$

Pero por (E), sabemos que el integrando anterior es nulo, y por tanto concluimos que $I(u) \geq I(\overline{u})$, para todo $u \in X$, lo que prueba que $\bar{u}$ es solución de (P).

3. Supongamos que $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa. Supongamos también que existen dos $u, v \in X$ que son soluciones de (P), y con ello funciones donde se alcanza el valor mínimo del funcional I en X, al que denotamos por m, i.e.

$$m := \min_{z \in X} I(z).$$

Definimos $w := (u + v)/2$, que es un elemento de X. Además, gracias a la convexidad de la función $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$, para todo $x \in (a, b)$, se tiene

$$\frac{1}{2} f(x, u, u') + \frac{1}{2} f(x, v, v') \geq f(x, \frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2}) = f(x, w, w') \quad \text{en } [a, b].$$

Integrando la expresión anterior (a, b), y teniendo en cuenta la definición del funcional I y la definición de m, se sigue

$$m = \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) \geq I(w) \geq m.$$

Por tanto, tenemos

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') - f(x, \frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2})\right] dx = 0.$$

Gracias a la convexidad de f el integrando en la ecuación anterior es no negativo, luego deducimos

$$\frac{1}{2}f(x, u(x), u'(x)) + \frac{1}{2}f(x, v(x), v'(x)) - f(x, \frac{u(x)}{2} + \frac{v(x)}{2}, \frac{u'(x)}{2} + \frac{v'(x)}{2}) \quad \forall x \in [a, b].$$

Ahora bien, como f es estrictamente convexa, la igualdad anterior se tiene únicamente si $u(x) = v(x)$ y $u'(x) = v'(x)$, para todo x en $[a, b]$. Entonces necesariamente $u = v$.

□

Observación 2.2. 1. *La ecuación (E) en el Teorema 2.1 se conoce como ecuación de Euler-Lagrange. Algunos autores llaman a la condición (2.1) la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange. Sin la hipótesis de convexidad de las funciones $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$, para todo $x \in (a, b)$, una función $\bar{u} \in X$ que satisfaga (E) no es necesariamente una solución de (P), es decir, un mínimo absoluto de I en X. Podría ser un máximo absoluto, un mínimo o un máximo local de I, o ninguna de estas opciones. Las soluciones de (E) se denominan puntos estacionarios de I.*

2. *En el apartado 1 del Teorema 2.1 se exige a la solución $\bar{u}$ de (P) pertenecer, no sólo a X, sino a $X \cap \mathcal{C}^2([a, b])^N$. Esta es una regularidad que en general no podemos esperar cumpla una solución de (P) (ver ejemplo 2.15). La hipótesis $\bar{u} \in \mathcal{C}^2([a, b])^N$ junto a $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ aseguran que la función $f_\xi(\cdot, \bar{u}(\cdot), \bar{u}'(\cdot))$ pertenezca a $\mathcal{C}^1([a, b])^N$, y que así podamos integrar por partes en la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange (2.1) para concluir (E). Como veremos en la próxima sección, el resultado sigue siendo cierto sin pedir regularidad adicional a $\bar{u} \in X$, incluso con f sólo en $\mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, porque en esas condiciones siempre tendremos que $f_\xi(\cdot, \bar{u}(\cdot), \bar{u}'(\cdot))$ pertenece a $\mathcal{C}^1([a, b])^N$.*

Ahora procedemos a estudiar algunos casos particulares en dimensión $N = 1$.

2.2.1. Caso 1: $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \xi) = \mathrm{f}(\xi)$

Como en este caso f no depende de u su derivada respecto de u es nula y por tanto la ecucación de Euler-Lagrange (E) queda

$$\frac{d}{dx}[f'(u')] = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad f'(u') = \text{ constante }. \tag{2.2}$$

Observamos que

$$\overline{u}(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha \tag{2.3}$$

es solución de la ecuación (2.2), satisface las condiciones de contorno, $\overline{u}(a) = \alpha$ y $\overline{u}(b) = \beta$, y al ser una recta es claramente una función $\mathcal{C}^1$. Por tanto, $\overline{u} \in X$ es un punto estacionario de I. Sin embargo, como mostramos en algunos ejemplos a continuación, no siempre es la solución de (P). Veamos diferentes situaciones según las propiedades de f.

- **Si f es convexa,** entonces la función $\bar{u}$ dada por (2.3) es solución de (P) gracias al Teorema (2.1). En este caso concreto también podemos comprobar esta afirmación de manera más sencilla usando la desigualdad de *Jensen*.

  Sea $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Como $\overline{u}' = (\beta - \alpha)/(b - a)$ para todo x en $[a, b]$, se tiene

  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u'(x))dx \geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)dx\right) = f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right) =$$
  $$= f\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) = f(\overline{u}'(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\overline{u}'(x))\,dx.$$

  lo cual prueba que $\bar{u}$ es solución de (P).

- **Si f no es convexa,** la solución (2.3) de la ecuación de Euler-Lagrange, no tiene por qué ser un mínimo de (P). De hecho, vamos a ver un ejemplo donde es un máximo.

Ejemplo 2.3 (Un máximo absoluto). *Consideramos $f(\xi) = e^{-\xi^2}$ y el siguiente problema*

$$(P_{nc}) \quad \text{ínf}\left\{I(u) := \int_0^1 f(u'(x))\,dx \;:\; u \in X\right\}, \tag{2.4}$$

donde

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Denotemos

$$m := \inf_{u \in X} I(u).$$

En esta situación, la expresión (2.3) da $\overline{u} \equiv 0$ en $[0, 1]$. Como ya hemos visto, esta función $\overline{u}$ es solución de la ecuación de Euler-Lagrange (E). Sin embargo, $\overline{u} \equiv 0$ es un máximo de I en X. Basta observar que $0 = -\bar{u}'(x)^2 \leq -u'(x)^2$, para todo $x \in [0, 1]$ y para toda $u \in X$, luego

$$I(\bar{u}) = \int_a^b e^0\,dx \geq \int_a^b e^{-(u')^2}\,dx = I(u) \quad \forall\, u \in X.$$

Ejemplo 2.4 (Problema sin solución). *Continuamos con el estudio del problema (P_{nc}) del ejemplo anterior. Vamos a demostrar que dicho problema no tiene solución. Para ello basta probar que $m = 0$, pues en ese caso, como ninguna función $u \in X$ puede satisfacer*

$$I(u) = \int_a^b e^{-(u')^2}\,dx = 0,$$

se seguiría que (P_{nc}) *no tiene solución. Como* $I(u) > 0$, *para toda* $u \in X$, *para probar que* $m = 0$, *basta construir una sucesión* u_n *en* X *tal que* $I(u_n)$ *converja a cero:*
Sea $n \in \mathbf{N}$ *y definamos* $u_n(x) = n(x-1/2)^2 - \frac{n}{4}$. *Como* u_n *es un polinomio de grado dos,* $u_n(0) = u_n(1) = 0$, *tenemos que* $u_n \in X$. *Además*

$$I(u_n) = \int_0^1 e^{-4n^2(x-1/2)^2}\,dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Haciendo el cambio de variable afín $y = 2n(x-1/2)$, *que transforma el intervalo* $(0,1)$ *en el intervalo* $(-n,n)$, *se obtiene*

$$I(u_n) = \int_0^1 e^{-4n^2(x-1/2)^2}\,dx = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Luego m=0 como queríamos demostrar.

Observación 2.5. *Una sucesión* u_n *como la construida en el ejemplo anterior, que satisface que*

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = \inf_{u\in X} I(u),$$

es lo que se conoce como una sucesión minimizante para el funcional I *en* X. *Como veremos en el Capítulo 3 de la presente memoria, el método fundamental del Cálculo de Variaciones para probar la existencia de una solución consiste en considerar una sucesión minimizante y probar que converge a un cierto* $\bar{u}$ *en* X, *para posteriormente comprobar que este límite* $\bar{u}$ *es una solución de* (P). *La sucesión minimizante del Ejemplo 2.4 satisface que* $u_n(1/2) = -n/4$, *por tanto la sucesión* u_n *no es convergente en los espacios de funciones usuales. En el próximo ejemplo nos encontramos nuevamente con una sucesión minimizante, que aunque esta vez sí convergerá, su límite no será de* $\mathcal{C}^1$, *y por consiguiente el argumento del método fundamental tampoco será válido para probar la existencia de solución.*

Ejemplo 2.6 (**"Soluciones"de $\mathcal{C}^1$ a trozos).** *A continuación mostraremos otro ejemplo que carece de solución, pero de naturaleza distinta al anterior. En esta ocasión la función "candidata",* $\hat{u}$, *a ser nuestra solución, no lo es por falta de regularidad: no será una función de* C^1 *en* $[a,b]$, *sino que sólo será* C^1 *a trozos. Este ejemplo pone en evidencia la necesidad en ocasiones de ampliar el concepto de solución.*

Consideramos el problema

$$(P) \qquad \inf\left\{ I(u) := \int_0^1 f(u'(x))\,dx \;:\; u \in X \right\} =: m, \tag{2.5}$$

con $f(\xi) = (\xi^2-1)^2$ *y*

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Relacionado con él, consideramos también el problema

$$(P_{piec}) \qquad \inf\left\{ I(u) := \int_0^1 f(u'(x))\,dx \;:\; u \in X_{piec} \right\} =: m_{piec},$$

con

$$X_{piec} = \{u \in \mathcal{C}^1_{piec}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\},$$

siendo $\mathcal{C}^1_{piec}([0,1])$ *el espacio de las funciones* $\mathcal{C}^1$ *a trozos. Observamos que la siguiente función*

$$v(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0,1/2] \\ 1-x & si\ x \in (1/2,1], \end{cases} \tag{2.6}$$

satisface que es $\mathcal{C}^1$ *a trozos, verifica que* $v(0) = v(1) = 0$ *(luego* $v \in X_{piec}$*) y además* $f'(v') \equiv 0$*. Luego* $I(v) = 0$*, y como* $I(u) \geq 0$ *para toda* $u \in X_{piec}$*, resulta* v *es solución de* (P_{piec}) *y* $m_{piec} = 0$*.*

Observar que si tuvieramos que $m = 0$*, entonces* (P) *no tendría solución. En efecto,* $I(u) = 0$ *implica que* $\int_0^1 ((u'(x))^2 - 1)^2 dx = 0 \implies |u'| = 1$ *cpt* x*. Pero esta propiedad no la puede satisfacer ninguna función de* X *por la continuidad de la derivada. Necesitaríamos tener que* $u' \equiv 1$ *ó* $u' \equiv -1$ *en* $(0,1)$*, lo cual es incompatible con las condiciones de contorno. Queda entonces probar que* $m = 0$ *para poder afirmar que* (P) *no tiene solución. Para ello, consideremos la sucesión:*

$$u_n(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0,1/2-1/n] \\ -2n^2(x-1/2)^3 - 4n(x-1/2)^2 - x + 1 & si\ x \in (1/2-1/n,1/2] \\ 1-x & si\ x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Está claro que $u_n(x) \in X$*, pues* $u_n(0) = u_n(1) = 0$ *y* $u_n \in \mathcal{C}^1$*. Además,*

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_0^1 f(u_n'(x))\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} f(1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f(-6n^2(x-\frac{1}{2})^2 - 8n(x-\frac{1}{2}) - 1))\,dx \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-1)\,dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} ((-6n^2(x-\frac{1}{2})^2 - 8n(x-\frac{1}{2}) - 2)^2 - 1)^2\,dx \leq \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Luego, como $I(u) \geq 0$ *para todo* $u \in X$*, y la sucesión* u_n *en* X *es tal que* $I(u_n)$ *tiende a cero cuando* n *tiende a infinito, tenemos que* $m = 0$*.*

Para terminar, observamos que en este ejemplo la ecuación de Euler-Lagrange (E) *se escribe*

$$\frac{d}{dx}[u'((u')^2 - 1)] = 0.$$

Obviamente $\overline{u} = 0$ *es solución. Sin embargo, como* $m = 0$*, dicha solución no es un mínimo, pues* $I(\overline{u}) = I(0) = 1$*.*

2.2.2. Caso 2: $\mathrm{f(x,u,\xi) = f(x,\xi)}$

En este caso la ecuación (E) queda:

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x,u')] = 0 \iff f_\xi(x,u') = C \text{ para alguna constante } C.$$

Esta ecuación en general no es tan fácil de resolver como la del Caso 1, y puede ser difícil encontrar una solución particular. A continuación veremos un ejemplo de interés, de un problema sin solución, debido a Weierstraß.

Ejemplo 2.7 (Weierstraß). *Sea $f(x,\xi) = x\xi^2$. Observemos que la aplicación $\xi \mapsto f(x,\xi)$ es convexa para todo $x \in [0,1]$ y estictamente convexa para todo $x \in (0,1]$. Consideremos el problema*

$$(P_2) \quad \inf\left\{I(u) = \int_0^1 f(x,u'(x))\,dx \;:\; u \in X\right\} =: m, \tag{2.7}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. La ecuación de Euler-Lagrange da

$$(xu')' = 0 \iff u'(x) = \frac{c}{x} \implies u(x) = clog(x) + d$$

para $x \in (0,1)$, con c y d constantes. Sin embargo, ninguna función de la forma $u(x) = c\log(x) + d$ puede satisfacer las condiciones de contorno $u(0) = 1$ y $u(1) = 0$, pues

$$u(1) = c\log(1) + d = d = 0 \qquad u(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} c\log(x) = \infty \neq 1.$$

Luego la solución obtenida de la ecuación de Euler-Lagrange no pertenece al espacio X donde estamos buscando la solución para (P_2).

Definimos ahora el problema asociado a (P_2)

$$(P_{piec}) \quad \inf\left\{I(u) = \int_0^1 f(x,u'(x))\,dx \;:\; u \in X_{piec}\right\} \tag{2.8}$$

donde $X_{piec} = \{u \in \mathcal{C}^1_{piec}([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. Veamos ahora que ni (P_2) ni (P_{piec}) tiene solución que minimice la integral.

Supongamos que $m_{piec} = m = 0$ lo cual probaremos después. Por reducción al absurdo, si existiera una función v tal que $I(v) = 0$ entonces

$$I(v) = \int_0^1 xv'(x)\,dx = 0 \implies v'(x) = 0 \text{ pct } x \in (0,1).$$

Como $v \in X_{piec}$, debería de ser continua y cumplir que $v(1) = 0$, luego $v \equiv 0$. Por tanto no verificaría la otra condición de contorno $v(0) = 1$.

Probemos ahora que $m_{piec} = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0,1/n] \\ \frac{-log(x)}{log(n)} & si\ x \in (1/n,1]. \end{cases}$$

Los términos u_n de esta sucesión son de $\mathcal{C}^1$ a trozos y $u_n(0) = 1$, $u_n(1) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_0^1 f(x,u_n'(x))\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cdot 0\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 x\cdot\left(\frac{-1}{xlog(n)}\right)^2 dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x(log(n))^2}\,dx = \frac{1}{(log(n))^2}\left[log(x)\right|_{x=1/n}^1 = \frac{-log(n)^{-1}}{(log(n))^2} = \frac{1}{log(n)} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

luego $m_{piec} = 0$. Veamos que $m = 0$.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{-n^2}{log(n)}x^2 + \frac{n}{log(n)}x + 1 & si\ x \in [0,1/n] \\ \frac{-log(x)}{log(n)} & si\ x \in (1/n,1]. \end{cases}$$

Estas funciones son de $\mathcal{C}^1$ y satisfacen $u_n(0) = 1$, $u_n(1) = 0$. Además,

$$u_n'(x) = \begin{cases} \frac{n}{log(n)}(1 - 2nx) & si\ x \in [0, 1/n] \\ \frac{-1}{xlog(n)} & si\ x \in (1/n, 1], \end{cases}$$

de donde deducimos que

$$0 \leq I(u_n) = \frac{n^2}{Log^2 n} \int_0^{\frac{1}{n}} x(1 - 2nx)\, dx + \frac{1}{log^2 n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\, dx \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

y por tanto que $m = 0$.

2.2.3. Caso 3: $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \xi) = \mathrm{f}(\mathrm{u}, \xi)$

Este caso es mucho más difícil que los anteriores, pero por el contrario está mucho más presente en las aplicaciones. La ecuación (E) queda:

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u(x), u'(x))] = f_u(u(x), u'(x)) \quad \forall x \in (a, b). \tag{2.9}$$

Por un resultado que veremos más adelante (Teorema 2.16) tenemos que una integral primera de la ecuación anterior viene dada por

$$f(u(x), u'(x)) - u'(x) f_\xi(u(x), u'(x)) = C,\ \forall\, x \in (a, b) \quad \text{con } C \text{ una constante.} \tag{2.10}$$

Veamos algunos ejemplos de problemas de mínimos que corresponden con este caso.

Ejemplo 2.8 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger). *A lo largo de la memoria iremos analizando esta desigualdad, aplicando en cada momento los resultados introducidos. Probaremos que para cada u de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $u(a) = u(b) = 0$ se tiene*

$$\int_a^b (u')^2\, dx \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2\, dx$$

Haciendo un cambio de variable conveniente bastará probar el caso de $a = 0$ y $b = 1$.

Empezamos a plantear el problema y para eso definimos $f_\lambda(u, \xi) = \frac{\xi^2 - \lambda^2 u^2}{2}$ para $\lambda \geq 0$. Sea el problema

$$(P_\lambda) \quad \inf \left\{ I_\lambda(u) = \int_0^1 f_\lambda(u(x), u'(x))\, dx\ :\ u \in X \right\} := m_\lambda \tag{2.11}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Observamos que $\xi \mapsto f_\lambda(u, \xi)$ es convexa mientras que $u \mapsto f_\lambda(u, \xi)$ no lo es. La ecuación de Euler-Lagrange para nuestro problema se escribe

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \tag{2.12}$$

Una integral primera para esta ecuación es (se puede deducir a partir del Teorema 1.5*)*

$$(u'(x))^2 + \lambda^2 (u(x))^2 = C, \qquad \text{con } C \text{ una constante.} \tag{2.13}$$

Las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange son de la forma $u(x) = \alpha \cos(\lambda x) + \beta \operatorname{sen}(\lambda x)$, con α y β constantes. Imponiendo las condiciones de contorno $u(0) = u(1) = 0$, llegamos a que $\alpha = 0$ y $\beta \operatorname{sen}(\lambda) = 0$, con $\lambda \geq 0$ fijo y $\beta \in \mathbb{R}$ cualquiera.

- *Si* $\lambda \notin \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$ *entonces la única manera de que se cumplan las condiciones de contorno es que* $\beta = 0$*. Por tanto, la solución es* $u \equiv 0$ *y entonces* $m_\lambda = 0$*. En particular estamos en este caso si* $\lambda < \pi$*.*

- *Si* $\lambda \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$*, es decir,* $\lambda = k\pi$ *con* $k \in \mathbb{N}$*, entonces se verifica la condición de* $\beta \operatorname{sen}(\lambda) = \beta \operatorname{sen}(k\pi) = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *y las infinitas soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange son de la forma* $u(x) = \beta \operatorname{sen}(k\pi x)$*.*

  En particular para $\lambda = \pi$ *existen infinitas soluciones de la forma* $u(x) = \beta \operatorname{sen}(k\pi x)$ *y tales que* $m_\lambda = 0$*.*

  Ahora, si $\lambda > \pi$*, entonces* (P_λ) *no tiene solución pues* $m_\lambda = -\infty$*. En efecto, si tomamos* $u(x) = \beta \operatorname{sen}(\pi x)$*, con* $\beta \in \mathbb{R}$*, esta* u *pertenece a* X *y verifica*

$$I_\lambda(u) = \beta^2 \int_0^1 [\pi^2 \cos^2(\pi x) - \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\pi x)]\, dx \longrightarrow -\infty \text{ cuando } \beta \longrightarrow \infty.$$

Ejemplo 2.9 (Braquistócrona). *Queremos minimizar el tiempo de ir de un punto* A *a otro punto* B *y para eso consideramos la función*

$$f(u, \xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{u}} \tag{2.14}$$

y el problema

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_0^b f(u(x), u'(x))\, dx \ :\ u \in X \right\} \tag{2.15}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta \text{ y } u(x) > 0\ \forall x \in (0,b], \beta > 0\}$*. La ecuación de Euler-Lagrange tiene la forma*

$$\left[\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} \right]' = \frac{-\sqrt{1+(u')^2}}{2\sqrt{u^3}},$$

y una integral primera asociada viene dada por

$$\frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}} - u' \left[\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}} \right] = C,$$

con C *una constante. De esta última expresión se deduce*

$$u(1+(u')^2) = 2\mu, \qquad \text{para una constante } \mu > 0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, consideramos una curva (x, y) *la cual queremos expresar de la forma* $(x, -u(x))$*, más concretamente* $(x(t), y(t))$*. Hacemos el siguiente cambio de variables:*

$$u' = \frac{du}{dx} = \operatorname{cotg}(t) \implies u = \frac{2\mu}{1+(u')^2} = 2\mu \operatorname{sen}^2(t) \tag{2.16}$$

Luego ya tenemos que $y = -2\mu \operatorname{sen}^2(t)$*. Para obtener una expresión para la coordenada* x *tenemos en cuenta el mismo cambio y obtenemos:*

$$dx = \frac{du}{u'} = \frac{2\mu \cdot 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt}{\operatorname{cotg}(t)} = 4\mu \operatorname{sen}^2(t) dt. \tag{2.17}$$

Integrando esta última expresión:

$$x = 4\mu \int \operatorname{sen}^2(t)dt = 4\mu \int \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \mu[2t - \operatorname{sen}(2t)] + C \tag{2.18}$$

Tomando $2t = \theta$ *y* $\mu = R$ *y teniendo en cuenta de nuevo el signo negativo de la segunda componente de la curva resumimos entonces las coordenadas de la curva, que es una cicloide:*

$$\begin{cases} x &= R(\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \\ y &= -R(1-\cos(\theta)) \end{cases}$$

Hemos eliminado la constante de integración C *porque es nula, la cicloide pasa por el punto* $(0,0)$.

Ejemplo 2.10 (Superficies de revolución mínimas). *Consdieramos la función* $f(u,\xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ *y el problema*

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x))\, dx \ : \ u \in X \right\} \tag{2.19}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \text{ y } u(x) > 0\}$ *y* $\alpha, \beta > 0$.

Por (E) y el Teorema 2.16 tenemos

$$\left.\begin{array}{r} \left[\dfrac{u'u}{\sqrt{1+(u')^2}}\right]' = \sqrt{1+(u')^2} \iff u''u = 1 + (u')^2 \\ \\ u\sqrt{1+(u')^2} - u'\dfrac{u'u}{\sqrt{1+(u')^2}} = \lambda = \ cte \end{array}\right\} \implies (u')^2 = \frac{u^2}{\lambda^2} - 1$$

Procedemos a resolver esta última ecuación diferencial de primer orden. Hacemos un primer cambio de variables:

$$p = u' = \sqrt{\frac{u^2}{\lambda^2} - 1}, \tag{2.20}$$

y ahora tenemos que resolver la siguiente integral

$$\lambda \int \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}} = \int dx = x + C. \tag{2.21}$$

Hacemos dos cambios de variables más: en primer lugar $p = tg(r)$ *y en segundo lugar* $tg(r/2) = t$ *con lo que finalmente, tras deshacer estos últimos dos cambios, llegamos a:*

$$x + C = \lambda \log(|\sqrt{p^2+1} + p|). \tag{2.22}$$

Ahora tomamos la exponencial y llamamos $M := e^{C/\lambda}$. *Deshacemos ahora el primer cambio y despejamos:*

$$\frac{Me^{x/\lambda} + \frac{1}{M}e^{-x/\lambda}}{2} = \frac{u}{\lambda}. \tag{2.23}$$

Definimos $\mu = ln(M)$ $(e^{\mu} = M)$ *y por la propia definición del coseno hiperbólico concluimos que:*

$$u(x) = \lambda \cosh(\frac{x}{\lambda} + \mu). \tag{2.24}$$

Concluimos con un problema en el que la función f depende de todas las variables, es decir, $f = f(x, u, \xi)$.

Ejemplo 2.11 (**Principio de Fermat**). *La función que consideramos aquí es* $f(x, u, \xi) = g(x, u)\sqrt{1+\xi^2}$ *y el problema es:*

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \; : \; u \in X \right\} \tag{2.25}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. *Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:*

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u, u, u')\right] = f_u(x, u, u')g_u(x, u) \iff \left(\frac{g(x, u) \cdot \xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)' = \sqrt{1+\xi^2} \iff$$
$$\iff \frac{d}{dx}\left[g(x, u)\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right] = \sqrt{1+(u')^2}g_u(x, u) \iff$$
$$\iff \frac{d}{dx}g(x, u)\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} + g(x, u)\left[\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right]' = \sqrt{1+(u')^2}\, g_u(x, u).$$

Teniendo en cuenta que

$$\left[\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right]' = \frac{u''\sqrt{1+(u')^2} - \frac{u'\, u' \cdot u''}{\sqrt{1+(u')^2}}}{1+(u')^2} = \frac{u''}{(1+(u')^2)^{3/2}},$$

llegamos a que

$$g_x(x, u)\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} + g(x, u)\frac{u''}{(1+(u')^2)^{3/2}} = \sqrt{1+(u')^2}g_u(x, u) \iff$$
$$\iff \frac{g(x, u)u''}{(\sqrt{1+(u')^2})^3} + \frac{g_x(x, u)u'}{\sqrt{1+(u')^2}} - \sqrt{1+(u')^2}g_u(x, u) = 0.$$

Por tanto, toda solución de nuestro problema debe satisfacer

$$g(x, u)u'' + [g_x(x, u)u' - g_u(x, u)](1+(u')^2) = 0.$$

2.3. Ecuación de Euler-Lagrange (II)

En esta sección mostraremos que el Teorema 2.1 puede ser mejorado, eliminando algunas hipótesis que exigen una mayor regularidad de la que en un principio cabría esperar. Más concretamente en el enunciado de dicho teorema se pide que f sea de clase $\mathcal{C}^2$, y la solución $\overline{u}$ que pertenezca a $\mathcal{C}^1$. Sin embargo, el resultado sigue siendo cierto en la siguiente forma:

Teorema 2.12. *Sean* $N \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *con* $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, *y* $f = f(x, u, \xi) \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. *Consideremos el problema*

$$(P) \;\; \text{ínf}\left\{ I(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \; : \; u \in X \right\},$$

donde

$$X = \left\{u \in \mathcal{C}^1([a, b])^N \; : \; u(a) = \alpha, \; u(b) = \beta\right\}.$$

1. *Si* (P) *admite solución* $\overline{u} \in X$ *entonces necesariamente* $\overline{u}$ *satisface*

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))] = f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)), \quad \forall x \in (a, b) \tag{E}$$

2. *Por otro lado, si* $\overline{u} \in X$ *satisface* (E) *y para todo* $x \in (a, b)$ *la función* $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es convexa, entonces* $\overline{u}$ *es solución de* (P).

3. *Si además para todo* $x \in (a, b)$ *la función* $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es estictamente convexa, entonces si* (P) *tiene solución, necesariamente ésta es única.*

La hipótesis $\overline{u} \in \mathcal{C}^2([a, b])^N$ junto a $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ se usan para poder asegurar que la función

$$x \mapsto f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)), \quad x \in [a, b], \tag{2.26}$$

es de $\mathcal{C}^1([a, b])^N$, y así poder integrar por partes en (2.1) para posteriormente, con ayuda del lema fundamental del Cálculo de Variaciones, obtener (E). Sin embargo, en las condiciones menos exigentes del Teorema 2.12 se puede demostrar que para toda solución $\bar{u}$ de (P), la función (2.26) es de $\mathcal{C}^1$. Esta propiedad de regularidad se deduce inmediatamente de los siguientes resultados, entre los que se encuentra el lema de DuBois-Reymond.

En lo que resta de la sección, denotaremos por W el espacio

$$W = \{w \in \mathcal{C}^1([a, b]) : w(a) = w(b) = 0\}.$$

Lema 2.13. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)w'(x)\, dx = 0 \quad \forall\, w \in W.$$

Entonces f *es una función constante.*

Demostración. Por el Lema fundamental del Cálculo de Variacional (Ver Lema 1.1) sabemos que si

$$\int_a^b g(x)w(x) \ = 0 \quad \forall\, w \in W,$$

entonces $g \equiv 0$. Tomamos $\eta \in W$ tal que $\int_a^b \eta(x)\, dx = 0$. Fijamos ahora $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ tal que $\int_a^b \Phi(x)\, dx = 1$. Definimos además

$$\lambda(x) = \eta(x) - \int_a^b \eta(s)\, ds\, \Phi(x) \in W.$$

Por su definición, λ tiene media nula. Definamos ahora $w(x) = \displaystyle\int_a^x \lambda(s)\, ds \in W$. Luego, $\forall\, \eta \in W$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x)w'(x)\, dx = \int_a^b f(x)\lambda(x)\, dx \int_a^b f(x)\left[\eta(x) - \int_a^b \eta(s)\, ds\Phi(x)\right] dx \\ &= \int_a^b f(x)\eta(x)\, dx - \int_a^b \eta(x)\left(\int_a^b f(s)\Phi(s)\, ds\right) dx = \int_a^b \left[f(x) - \int_a^b f(s)\Phi(s)\, ds\right]\eta(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x) = \displaystyle\int_a^b f(s)\Phi(s)\, ds \quad \forall\, x \in [a, b]$, o sea, f es constante. □

Lema 2.14. *Sean* $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *tales que*

$$\int_a^b (fw' + gw)\,dx = 0 \quad \forall\, w \in W.$$

Entonces $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *y* $f' = g$.

Demostración. Definimos $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(s)\,ds \in \mathcal{C}^1([a,b])$, i.e., $G'(x) = g(x)$. Luego integrando por partes llegamos a que

$$\int_a^b g(x)w(x)\,dx = \int_a^b G'(x)w(x)\,dx = -\int_a^b G(x)w'(x)\,dx.$$

Por tanto

$$\int_a^b (fw' + gw)\,dx = \int_a^b (f(x) - G(x))w'(x)\,dx = 0 \quad \forall\, w \in W.$$

Concluimos entonces que $f(x) - G(x) = C$ con C una constante. Es más, la constante C no es cualquiera pues como

$$f(x) = C + G(x) = C + \int_a^x g(s)\,ds \in \mathcal{C}^1,$$

la constante tiene que ser $C = f(a)$. Luego $f \in \mathcal{C}^1$ y $f'(x) = g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. □

Basta ahora aplicar el Lema 2.14 en la igualdad (2.1), para poder concluir que el Teorema 2.12 sigue siendo cierto. Es importante destacar que, en las condiciones del Teorema 2.12, se tiene que la función (2.26) es de $\mathcal{C}^1$, sin embargo, esto no implica que las soluciones $\bar{u}$ de (P) tengan una regularidad adicional. Esta afirmación se pone en evidencia en el próximo ejemplo.

Ejemplo 2.15. *Sea* $f(x,u,\xi) = u^2(2x-\xi)^2 \in \mathcal{C}^\infty([-1,1] \times \mathbb{R}^2)$. *Nos planteamos el problema correspondiente*

$$(P)\ \min\left\{ I(u) = \int_{-1}^1 u^2(2x-u')^2\,dx \ :\ u \in X \right\},$$

con X *dado por*

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}.$$

Como probaremos a continuación, la solución de este problema es

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [-1,0] \\ x^2 & si\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.27}$$

Observamos que $\bar{u} \notin \mathcal{C}^2$, *por lo que no estaríamos en las condiciones del Teorema 2.1. Sin embargo sí tenemos que* $f(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ *pues*

$$f(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) = \bar{u}^2(x)(2x-\bar{u}'(x))^2 = \begin{cases} (2x)^2 & si\ x \in [-1,0] \\ 0 & si\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.28}$$

Veamos que efectivamente $\bar{u}$ es solución del problema. Observamos por un lado que $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X$, pero por otro lado que $I(\bar{u}) = 0$. Luego $\bar{u}$ es solución. Falta ver que es única. Por reducción al absurdo, supongamos que $u \in X$ es otra solución de (P). Entonces necesariamente

$$F(u) = \int_{-1}^{1} u^2(2x - u')^2 \, dx = 0.$$

Es decir, donde $u \neq 0$ necesitamos que $u' = 2x$ y por tanto $u(x) = x^2 + c$ con c alguna constante. En particular si $c = 0$,

$$u(x) = 1 + \int_{1}^{x} (2\xi) \, d\xi = x^2 \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Suponiendo que existe un x_0 con $-1 < x_0 < 0$ para el que $u(x_0) \neq 0$, entonces existe un intervalo maximal (a, b) con $-1 \leq a < x_0 < b \leq 1$ tal que podemos tomar en particular

$$u(x) = u(x_0) + x^2 - x_0^2 \neq 0 \qquad \text{para } a < x < b.$$

Pero sabemos que $u(a) = u(b) = 0$. Luego $a^2 = b^2 = x_0^2 - u(x_0)$, lo cual es absurdo pues habíamos supuesto que $a < b$. Por tanto no existe ningún punto $x_0 \in (-1, 0)$ tal que $u(x_0) \neq 0$. Concluimos entonces que $u \equiv 0$ y con esto la unicidad de solución de nuestro problema.

2.4. Segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange

Esta sección está dedicada a probar el siguiente teorema, que proporciona una formulación alternativa de la ecuación de Euler-Lagrange. Dicha formulación resultará especialmente útil cuando la función f que aparece en (P) no depende de la variable x (ver el Corolario 2.18).

Teorema 2.16. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ y sea $f = f(x, u, \xi)$ una función de $\mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Consideremos el problema*

$$(P) \qquad \inf \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx \ : \ u \in X \right\} \tag{2.29}$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b])^N : u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta\}$.

Sea $u \in X \cap \mathcal{C}^2([a, b])^N$ una solución de (P). Entonces se tiene

$$\frac{d}{dx}[f(x, u(x), u'(x)) - f_\xi(x, u(x), u'(x)) \cdot u'(x)] = f_x(x, u(x), u'(x)), \quad \forall \, x \in [a, b]. \tag{2.30}$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{C}^2([a, b])^N$ arbitraria. Un simple cálculo demuestra:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[f(x, u(x), u'(x)) - f_\xi(x, u(x), u'(x)) \cdot u'(x)] = \\
&f_x(x, u, u') + f_u(x, u, u') \cdot u' + f_\xi(x, u, u') \cdot u'' - u'' \cdot f_\xi(x, u, u') - u' \cdot \left[\frac{d}{dx}[f_\xi(x, u(x), u'(x)] \right] \\
&= f_x(x, u, u') + u' \cdot [f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, u(x), u'(x))], \quad \forall \, x \in [a, b]
\end{aligned}$$

Si además suponemos que u es solución de (P), por el Teorema 2.1 sabemos que u satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx} f_\xi(x,u(x),u'(x)) = 0, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

De las dos últimas ecuaciones se concluye (2.30). □

Observación 2.17. *En la demostración del Teorema 2.16 hemos probado que toda solución de (E) es solución de (2.30). Sin embargo el recíproco no es en general cierto como veremos en el Ejemplo 2.20. Antes, un corolario que recoge una versión de (2.30) de gran interés en las aplicaciones.*

Corolario 2.18. *En las condiciones del Teorema 2.16, si la función f no depende de la variable x, entonces para toda $u \in X \cap \mathcal{C}^2([a,b])^N$ solución de (P) existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x,u(x),u'(x)) - f_\xi(x,u(x),u'(x)) \cdot u'(x) = C, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.31}$$

Observación 2.19. *La ecuación (2.31) se conoce como la identidad de Beltrami.*

Ejemplo 2.20 (Solución de Beltrami que no satisface la ecuación de Euler-Lagrange)**.** *Consideramos el problema (P) con f definida por*

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - u$$

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es

$$f_u(x,u,u') - \frac{d}{dx}[f_\xi(x,u,u')] = -1 - \frac{d}{dx}[u'] = -1 - u'' = 0$$

en $[a,b]$, mientras que la identidad de Beltrami se escribe

$$f(x,u,u') - f_\xi(x,u,u')u' = \frac{1}{2}(u')^2 - u - (u')^2 = -u - \frac{1}{2}(u')^2 = C$$

en $[a,b]$ para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Obsérvese que $u \equiv 1$ satisface la última igualdad con $C = -1$, pero no satisface la ecuación de Euler-Lagrange.

2.5. Formulación Hamiltoniana: Ecuaciones canónicas

Hasta ahora hemos visto condiciones necesarias y incluso la equivalencia de solución entre el problema de mínimos (P) y la ecucación de Euler-Lagrange (E) para una solución u suficientemente regular. El objetivo de esta sección es ver que en algunos casos resolver (E) es equivalente a encontrar un punto estacionario de cierto funcional dado por

$$J(u,v) = \int_a^b [u'(x)v(x) - H(x,u(x),v(x))]\, dx \tag{2.32}$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$(H)\begin{cases} v'(x) &= -H_u(x,u,v) \\ u'(x) &= H_v(x,u,v). \end{cases} \tag{2.33}$$

La función H es conocida como la Hamiltoniana asociada al problema (P), y se define como la transformada de Legendre de la función f (ver Definición 2.21). El sistema de ecuaciones (H) se conoce como la forma canónica de la ecuación de Euler-Lagrange de (P).

Por buscar la claridad en la exposición, en lo que sigue consideraremos el problema (P) con $N = 1$, pero todos los resultados se extienden de manera similar al caso $N > 1$.

Definición 2.21. *Definimos el Hamiltoniano asociado al problema (P) como la función H dada por:*

$$H(x,u,v) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\{v\xi - f(x,u,\xi)\}, \quad \forall\,(x,u,v)\in[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Para probar la relación entre las soluciones de Euler-Lagrange y su forma canónica (H), nos será de utilidad el siguiente lema:

Lema 2.22. *Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f = f(x,u,\xi)$ tal que*

$$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0 \text{ para todo } (x,u,\xi)\in[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{2.35}$$

$$\lim_{|\xi|\longrightarrow\infty}\frac{f(x,u,\xi)}{|\xi|} = +\infty \text{ para todo } (x,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Entonces el Hamiltoniano H definido por (2.21) satisface que $H \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

$$H_x(x,u,v) = -f_x(x,u,H_v(x,u,v)) \tag{2.37}$$

$$H_u(x,u,v) = -f_u(x,u,H_v(x,u,v)) \tag{2.38}$$

$$H(x,u,v) = vH_v(x,u,v) - f(x,u,H_v(x,u,v)) \tag{2.39}$$

$$v = f_\xi(x,u,\xi) \iff \xi = H_v(x,u,v). \tag{2.40}$$

Demostración. Vamos a realizar la demostración en varios pasos.

Paso 1: Sea $(x,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}$ fijo. Gracias a la hipótesis (2.36) existe un cierto $\xi = \xi(x,u,v)$ para el que

$$H(x,u,v) = v\xi - f(x,u,\xi). \tag{2.41}$$

Además, por la regularidad de f, este ξ debe ser solución de $\nabla_\xi(v\xi - f(x,u,\xi)) = 0$, luego

$$v = f_\xi(x,u,\xi). \tag{2.42}$$

Paso 2: En este segundo paso probaremos que la función $\xi = \xi(x,u,v)$ pertenece a $\mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Sea $R > 0$ fijo. Por (2.36) podemos encontrar un $R_1 > 0$ tal que

$$|\xi(x,u,v)| \leq R_1, \quad \forall\, x \in [a,b],\ |u| \leq R,\ |v| \leq R. \tag{2.43}$$

Como f_ξ es de clase $\mathcal{C}^1$, podemos aplicar el teorema del valor medio y deducir la existencia de un $\gamma_1 > 0$ tal que

$$|f_\xi(x,u,\xi) - f_\xi(x',u',\xi')| \leq \gamma_1(|x-x'| + |u-u'| + |\xi-\xi'|), \tag{2.44}$$

para todo $x, x' \in [a,b]$ y para $|u|, |u'| \leq R,\ |\xi|, |\xi'| \leq R_1$. Ahora por (2.35) existirá un $\gamma_2 > 0$ tal que

$$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) \geq \gamma_2, \quad \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, |u| \leq R,\ |\xi| \leq R_1. \tag{2.45}$$

Luego, de nuevo por el teorema del valor medio,

$$|f_\xi(x,u,\xi) - f_\xi(x,u,\xi')| \geq \gamma_2|\xi-\xi'|, \quad \forall\, x \in [a,b],\ |u| \leq R,\ |\xi|, |\xi'| \leq R_1. \tag{2.46}$$

Sean ahora $x, x' \in [a,b]$, $|u|, |u'| \leq R$ y $|v|, |v'| \leq R$. Por definición de $\xi(x,u,v)$ (ver Paso 1) sabemos que entonces

$$f_\xi(x,u,\xi(x,u,v)) = v \quad \text{ y } \quad f_\xi(x',u',\xi(x',u',v')) = v'.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & f_\xi(x,u,\xi(x',u',v')) - f_\xi(x,u,\xi(x,u,v)) && (2.47)\\ & = f_\xi(x,u,\xi(x',u',v')) - f_\xi(x',u',\xi(x',u',v')) + v' - v. && (2.48) \end{aligned}$$

Combinando ahora (2.44) y (2.46) con esto último llegamos a

$$\gamma_2|\xi(x,u,v) - \xi(x',u',v')| \leq \gamma_1(|x-x'| + |u-u'|) + |v-v'|. \tag{2.49}$$

Con lo que hemos llegado a la continuidad de $\xi = \xi(x,u,v)$.

Para ver que $\xi = \xi(x,u,v)$ es de $\mathcal{C}^1$ empleamos el Teorema de la Función Implícita. Basta tener en cuenta que satisface la ecuación

$$g(x,u,v,\xi) := v - f_\xi(x,u,\xi) = 0, \tag{2.50}$$

que f es de $\mathcal{C}^2$ (por tanto g es de $\mathcal{C}^1$) y satisface (2.35) (luego $|g_\xi| > 0$)). Entonces la función ξ pertenece a $\mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, y derivando en (2.50) deducimos que sus derivadas satisfacen

$$\begin{cases} f_{x\xi}(x,u,\xi) + f_{\xi\xi}(x,u,\xi)\xi_x = 0 \\ f_{u\xi}(x,u,\xi) + f_{\xi\xi}(x,u,\xi)\xi_u = 0 \\ f_{\xi\xi}(x,u,\xi)\xi_v = 1. \end{cases}$$

Paso 3: Demostraremos que H es de $\mathcal{C}^2$ y se verifican (2.37) − (2.40).

Es inmediato ver que H es de clase $\mathcal{C}^1$ por ser composición de funciones de $\mathcal{C}^1$. En efecto,

$$H(x,u,v) = v\xi(x,u,v) - f(x,u,\xi(x,u,v)), \tag{2.51}$$

con, por hipótesis, $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y, por el Paso 2, $\xi \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Derivando (2.51) y usando (2.42) se deduce

$$\begin{cases} H_x(x,u,v) = v\xi_x - f_x - f_\xi \xi_x = (v - f_\xi)\xi_x - f_x = -f_x \\ H_u(x,u,v) = v\xi_u - f_u - f_\xi \xi_u = (v - f_\xi)\xi_u - f_u = -f_u \\ H_v(x,u,v) = \xi + v\xi_v - f_\xi \xi_v = (v - f_\xi)\xi_v + \xi = \xi. \end{cases} \tag{2.52}$$

Como las funciones

$$(x,u,v) \mapsto \xi(x,u,v), \;\; f_x(x,u,\xi(x,u,v)), \;\; f_u(x,u,\xi(x,u,v)), \tag{2.53}$$

son de clase $\mathcal{C}^1$, de (2.52) se deduce que en realidad $H \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ Además, sustituyendo el valor de ξ dado por la tercera ecuación de (2.52), en la primera y en la segunda ecuación de (2.52) y en (2.41), se obtiene tambíen (2.37), (2.38) y (2.39).

Sabemos que, fijado (x,u,v), el valor $\xi = \xi(x,u,v)$ es solución de la ecuación (2.42). Ahora bien, gracias a (2.35) tenemos que $f_\xi(x,u,\cdot)$ es una función estrictamente creciente, por tanto la solución de (2.42) es única. Por otra parte, también sabemos que ξ satisface la tercera ecuación de (2.52). De todo esto se deduce la ecuación (2.40), y se termina la demostración del lema.

$\square$

Procedemos a enunciar el resultado más importante de esta sección:

Teorema 2.23. *Sea f en las condiciones del Lema 2.22 y sea H el Hamiltoniano definido por (2.21). Si $(u,v) \in \mathcal{C}^2([a,b])^2 \times \mathcal{C}^2([a,b])$ y satisface*

$$\begin{cases} v'(x) &= -H_u(x,u,v) \\ u'(x) &= H_v(x,u,v), \end{cases} \tag{2.54}$$

entonces u es solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}[f_\xi(x,u(x),u'(x))] = f_u(x,u(x),u'(x)), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Recíprocamente, si $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ satisface (E), entonces (u,v), con v definida por

$$v(x) = f_\xi(x,u(x),u'(x)), \quad \forall\, x \in [a,b],$$

es solución de (2.54).

Demostración. Primero sea (u,v) solución de (2.54). Por (2.40) y (2.38), se tiene

$$u' = H_v(x,u,v) \iff v = f_\xi(x,u,u')$$
$$v' = -H_u(x,u,v) = f_u(x,u,H_v(x,u,v)) = f_u(x,u,u'),$$

y por tanto u satisface (E). Por otro lado, por (2.40) y por definición de v, tenemos que $u' = H_v(x,u,v)$. Además al u satisfacer (E) y gracias a (2.38) se cumple

$$v' = \frac{d}{d}[v] = \frac{d}{dx}[f_\xi(x,u,\xi)] = f_u(x,u,u') = -H_u(x,u,v). \tag{2.55}$$

□

Veamos algunos ejemplos donde obtenemos el Hamiltoniano.

Ejemplo 2.24. *Este ejemplo proviene de la Mecánica Clásica. Sean $m > 0$, $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y consideramos la siguiente función*

$$f(x,u,\xi) = \frac{m}{2}\xi^2 - g(x)u. \tag{2.56}$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema (P) es entonces

$$u''(x) = \frac{-g(x)}{m}, \ x \in (a,b). \tag{2.57}$$

El Hamiltoniano dado por $H(x,u,v) = v\xi - f(x,u,\xi)$ con ξ satisfaciendo

$$v = f_\xi(x,u,\xi) = m\xi, \quad i.e., \quad \xi = \frac{v}{m}.$$

Luego

$$H(x,u,v) = \frac{v^2}{m} - \frac{V^2}{2m} + g(x)u = \frac{v^2}{2m} + g(x)u.$$

El sistema Hamiltoniano asociado (o ecuaciones canónicas) es

$$\begin{cases} v'(x) & = -g(x)) \\ u'(x) & = \dfrac{v(x)}{m}. \end{cases}$$

Ejemplo 2.25. *Vamos a generalizar el ejemplo anterior. Sea $p > 1$ y $p' = \frac{p}{1-p}$. Definimos*

$$f(x,u,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p - g(x,u). \tag{2.58}$$

Un cálculo simple demuestra que el Hamiltoniano es

$$H(x,u,v) = \frac{1}{p'}|v|^{p'} + g(x,u). \tag{2.59}$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema (P) es

$$\frac{d}{dx}[\,|u'|^{p-2}u'\,] = -g_u(x,u), \tag{2.60}$$

mientras que el sistema Hamiltoniano viene dado por

$$\begin{cases} v'(x) & = -H_u(x,u,v) = -g_u(x,u) \\ u'(x) & = H_v(x,u,v) = |v|^{p'-2}v. \end{cases}$$

Ejemplo 2.26. *Consideramos el caso más simple donde $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ tal que*

$$f_{\xi\xi} > 0 \quad y \quad \lim_{|\xi|\longrightarrow\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = +\infty. \tag{2.61}$$

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema (P) es

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u')] = f_u(\xi) = 0 \implies f_\xi(\xi) = f'(u') = \lambda = C, \quad \textit{con } C \textit{ una constante.}$$

En esta situación el Hamiltoniano es

$$H(x,u,v) = H(v) = \sup_\xi \{v\xi - f(\xi)\},$$

y entonces el sistema Hamiltoniano viene dado por:

$$\begin{cases} u' &= H'(v) \\ v' &= 0. \end{cases}$$

Por el Teorema 2.23 se tiene además que $v(x) = f_\xi(x,u,u') = f'(u') = \lambda$ y por tanto

$$u(x) = H'(\lambda)x + \mu \quad \textit{para } \mu, \lambda \textit{ constantes.} \tag{2.62}$$

Ejemplo 2.27. *Este ejemplo es para el caso de $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$ Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es*

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x,\xi)] = 0 \implies f_\xi(x,\xi) = f'(u') = \lambda = C, \quad \textit{con } C \textit{ una constante,}$$

y el Hamiltoniano

$$H(x,v) = \sup_\xi \{v\xi - f(x,\xi)\},$$

mientras que el sistema Hamiltoniano viene dado por:

$$\begin{cases} u' &= H_v(x,v) \\ v' &= -H_u(x,v) = 0. \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, $v = f_\xi = \lambda$, y por tanto:

$$u'(x) = H_v(x,\lambda). \tag{2.63}$$

Ejemplo 2.28. *Finalmente consideramos una función de la forma $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$. Por un lado tenemos por la ecuación de Euler-Lagrange que*

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_\xi(u,u')] = f_u(u,u'). \tag{2.64}$$

Por otro lado, gracias al Teorema 2.16 tenemos que

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u,u') - u'f_\xi(u,u')] = 0. \tag{2.65}$$

Luego podemos concluir que $f(u,u') - u' f_\xi(u,u') = \lambda = C$, *con* C *una constante.*

El sistema Hamiltoniano viene dado por:

$$\begin{cases} u' & = H_v(u,v) \\ v' & = -H_u(u,v). \end{cases}$$

En este sistema multiplicamos la primera ecuación por H_u *y la segunda por* H_v *y luego sumamos las dos expresiones, obteniendo de forma general que:*

$$u' H_u(x,u,u') + v' \cdot H_v(x,u,u') = 0. \tag{2.66}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}[H(x,u(x),v(x))] = H_x(x,u,v) + H_u(x,u,v) \cdot u' + H_v(x,u,v) \cdot v' = H_x(x,u,v) \tag{2.67}$$

Ahora bien, como en nuestro ejemplo el Hamiltoniano no depende de x *tenemos que:*

$$\frac{d}{dx}[H(u(x),v(x))] = 0 \implies H(u,v) = \mu = C \ \text{ con } C \text{ una constante.} \tag{2.68}$$

Más adelante, en el capítulo de regularidad, se hará uso de las definiciones y los resultados vistos en esta sección.

2.6. La ecuación de Hamilton-Jacobi

En las secciones precedentes hemos visto que toda solución de nuestro problema del Cálculo de Variaciones (P) es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma normal o en su forma canónica (asociadad a la formulación Hamiltoniana). A continuación estudiaremos la relación que existe entre las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las soluciones de un problema en derivadas parciales de primer orden, conocido como ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Por simplificar la exposición nos limitaremos a considerar el problema (P) con $N = 1$.

Teorema 2.29. *Sea* $H = H(x,u,v) \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. *Supongamos la existencia de una solución* $S = S(x,u)$, $S \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R})$ *de la ecucación*

$$S_x + H(x,u,S_u) = 0, \quad \forall\, (x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}, \tag{2.69}$$

conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi. Supongamos también la existencia de una solución $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *de*

$$u'(x) = H_v(x,u(x),S_u(x,u(x))), \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.70}$$

Si definimos

$$v(x) = S_u(x,u(x)) \tag{2.71}$$

entonces $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b])$ *es solución del siguiente sistema:*

$$\begin{cases} u'(x) &= H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) &= -H_u(x, u(x), v(x)). \end{cases} \tag{2.72}$$

Además, si existe una familia monoparamétrica $S = S(x, u, \alpha)$, $S \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *que satisface* (2.69) *para cada* $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, entonces toda solución de* (2.70) *satisface*

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0, \quad \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}. \tag{2.73}$$

Demostración. **Paso 1:** Derivamos (2.71) y (2.69) (ésta última respecto de u), obteniendo

$$v'(x) = S_{ux}(x, u(x)) + S_{uu}(x, u(x))u'(x), \quad \forall\, x \in [a, b]$$

$$S_{ux}(x, u) + H_u(x, u, S_u(x, u)) + H_v(x, u, S_u(x, u)) \cdot S_{uu}(x, u) = 0, \quad \forall\, (x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}.$$

Combinando estas dos expresiones con (2.70) tenemos:

$$v'(x) = S_{xu}(x, u(x)) + S_{uu}(x, u(x))u'(x) = -H_u(x, u(x), v(x)).$$

Luego hemos demostrado (2.72).

Paso 2: Por hipótesis S es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Vamos a derivarla respecto de α:

$$\frac{d}{d\alpha}[S_x(x, u, \alpha) + H(x, u, S_u(x, u, \alpha))] = S_{x\alpha}(x, u, \alpha) + H_v(x, u, S_u(x, u, \alpha))S_{u\alpha}(x, u, \alpha) = 0$$

para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particular se tendrá para el u que satisface (2.70) por lo que

$$S_{x\alpha}(x, u(x), \alpha) + u'(x)S_{u\alpha}(x, u(x), \alpha) = 0,\ \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R},$$

y esta expresión precisamente es

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0,\ \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}.$$

□

El teorema anterior admite un recíproco:

Teorema 2.30 (Teorema de Jacobi)**.** *Sea* $H = H(x, u, v)$, $H \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *y* $S = S(x, u), S \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R})$ *solución de la ecucación de Hamilton-Jacobi*

$$S_x + H(x, u, S_u) = 0, \quad \forall\, (x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}. \tag{2.74}$$

Supongamos que

$$S_{u\alpha}(x, u, \alpha) \neq 0, \quad \forall\, (x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.75}$$

y que $u = u(x)$ *satisface*

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0, \quad \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}. \tag{2.76}$$

Entonces u *necesariamente verifica*

$$u'(x) = H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)), \quad \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}.$$

Luego si $v(x) = S_u(x, u(x), \alpha)$, *entonces* $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b])$ *es solución de*

$$\begin{cases} u'(x) & = H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) & = -H_u(x, u(x), v(x)). \end{cases} \tag{2.77}$$

Demostración. Por (2.76) tenemos

$$0 = S_{xa}(x, u, \alpha) + S_{u\alpha}(x, u, \alpha)u', \ \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}. \tag{2.78}$$

Por (2.74) tenemos para cada $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$0 = \frac{d}{d\alpha}[S_x(x, u, \alpha) + H(x, u, S_u(x, u, \alpha))] = S_{x\alpha}(x, u, \alpha) + H_v(x, u, S_u(x, u, \alpha))S_{u\alpha}(x, u, \alpha).$$

Combinando estas dos expresiones con (2.75) llegamos a

$$u'(x) = H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)), \quad \forall\, (x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}, \tag{2.79}$$

y ya hemos probado la primera igualdad de (2.77). Falta ver que $v' = -H_u$. Para probar la segunda, derivamos la expresión de v.

$$\begin{aligned} v'(x) &= S_{uu}(x, u(x), \alpha)u'(x) + S_{ux}(x, u(x), \alpha) \\ &= S_{uu}(x, u(x), \alpha)H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)) + S_{ux}(x, u(x), \alpha), \end{aligned}$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Usando nuevamente (2.74) obtenemos para cada $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\frac{d}{du}[S_x + H(x, u, S_u)] = S_{xu}(x, u, \alpha) + H_u(x, u, S_u(x, u, \alpha)) + H_v(x, u, S_u(x, u, \alpha))S_{uu}(x, u, \alpha).$$

Combinando estas últimas expresiones llegamos finalmente a lo que nos faltaba por probar.

$$v'(x) = -H_u(x, u, S_u(x, u, \alpha)) = -H_u(x, u(x), v(x)).$$

□

Si el Hamiltoniano no depende explícitamente de x entonces toda solución $S^*(u, \alpha)$ de

$$H(u, S_u^*) = \alpha, \quad \forall\, (u, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.80}$$

nos lleva a inmediatamente a una solución de (2.74) donde

$$S(x,u,\alpha) = S^*(u,\alpha) - \alpha x. \tag{2.81}$$

Ejemplo.

Sea $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con $g(u) \geq g_0 > 0$. Consideramos $f(u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(u)$ cuyo hamiltoniano asociado es

$$H(u,v) = \frac{1}{2}v^2 - g(u).$$

Su ecucación de Hamilton-Jacobi y su forma reducida vienen dadas por

$$S_x + H(x,u,S_u) = S_x + \frac{1}{2}(S_u)^2 - g(u) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(S_u^*)^2 = g(u).$$

Por tanto una solución viene dada por

$$S = S(x,u) = S(u) = \int_0^u \sqrt{2g(s)}\,ds.$$

Resolvemos ahora

$$u'(x) = H_v(u(x), S_u(u(x))) = S_u(u(x)) = \sqrt{2g(u(x))}$$

cuya solución implícita viene dada por

$$\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{ds}{\sqrt{2g(s)}} = x.$$

Si $v(x) = S_u(u(x))$ entonces hemos encontrado una solución del sistema Hamiltoniano es

$$\begin{cases} u'(x) &= H_v(u(x),v(x)) = v(x) \\ v'(x) &= -H_u(u(x),v(x)) = g'(u(x)). \end{cases} \tag{2.82}$$

Observamos también que u de esa forma resuelve

$$u''(x) = g'(u(x))$$

que precisamente es la ecucación de Euler-Lagrange asociada a f.

2.7. Teoría de campos

Recordemos el problema que estamos considerando

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \ : \ u \in X \right\} \tag{2.83}$$

donde

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{2.84}$$

Hemos probado que toda solución de (P) es solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))] = f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)), \quad \forall\, x \in (a, b). \tag{2.85}$$

Sin embargo, sabemos que en general una solución de (2.85) no tiene que ser necesariamente una solución de (P). Hemos visto en el Teorema 2.1 que cuando $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$ sí es el caso. A continuación usaremos la teoría de campos para mejorar este resultado. Probaremos que para que (2.85) sea una condición suficiente de optimaliadad para (P) basta que la función $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ sea convexa, para todo $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Para presentar de manera más clara dicha teoría, vamos a empezar con un caso particular.

Teorema 2.31. *Sea $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Si existe $\Phi \in \mathcal{C}^3([a, b] \times \mathbb{R})$ con $\Phi(a, \alpha) = \Phi(b, \beta)$ tal que*

$$(u, \xi) \mapsto \tilde{f}(x, u, \xi) \text{ es convexa para cada } x \in [a, b], \tag{2.86}$$

donde

$$\tilde{f}(x, u, \xi) = f(x, u, \xi) + \Phi_u(x, u)\xi + \Phi_x(x, u), \tag{2.87}$$

entonces cualquier solución $\bar{u}$ de (2.85) es un mínimo del problema (P).

Demostración. Definimos $\varphi(x, u, \xi) = \Phi_u(x, u)\xi + \Phi_x(x, u)$. Gracias a las hipótesis sobre Φ tenemos que

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\big[\Phi(x, u(x))\big]\, dx = \Phi(a, \alpha) - \Phi(b, \beta) = 0, \quad \forall\, u \in X, \tag{2.88}$$

con X definido por (2.84). Por otra parte tenemos que

$$\frac{d}{dx}[\varphi_\xi(x, u, u')] = \Phi_{xu}(x, u) + \Phi_{uu}(x, u)u' = \varphi_u(x, u, u'). \tag{2.89}$$

para todo $x \in [a, b]$ y para todo u en el conjunto X. Gracias a (2.88), y a que

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x, u(x))] = \Phi_x(x, u(x)) + \Phi_u(x, u(x))u'(x),\ \forall\, x \in [a, b],\ \forall\, u \in X, \tag{2.90}$$

se tiene

$$I(u) = \int_a^b \tilde{f}(x, u(x), u'(x))\, dx = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx. \tag{2.91}$$

Por tanto el problema (P) es equivalente a

$$\text{ínf}\left\{ \tilde{I}(u) := \int_a^b \tilde{f}(x, u, u') \ :\ u \in X \right\} \tag{2.92}$$

teniendo en cuenta que $\tilde{f}(x, u, \xi) = f(x, u, \xi) + \varphi(x, u, \xi)$, de (2.89) se deduce que

$$\frac{d}{dx}[\tilde{f}_\xi(x, u(x), u'(x))] - \tilde{f}_u(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx}[f_\xi(x, u(x), u'(x))] - f_u(x, u(x), u'(x)) \tag{2.93}$$

para todo $x \in [a, b]$ y para todo $u \in X$. Luego los puntos críticos de I y de $\tilde{I}$ son los mismos. Ahora bien, por la hipótesis (2.86) todo punto crítico de $\tilde{I}$ es solución (2.92). De todo lo anterior se deduce que todo punto crítico de I es solución de (P).

□

Ejemplo 2.32 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger). *Sean $\lambda \geq 0$ y $f_\lambda(u,\xi) = \dfrac{\xi^2 - \lambda^2 u^2}{2}$. Consideramos el problema*

$$(P_\lambda) \quad \text{ínf} \left\{ I_\lambda(u) = \int_0^1 f_\lambda(u(x), u'(x))\, dx \ : \ u \in X \right\}$$

donde

$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Observamos que $(x,\xi) \mapsto f_\lambda(u,\xi)$ no es convexa pero $\xi \mapsto f_\lambda(u,\xi)$ sí lo es.

La ecuación de Euler-Lagrange en este caso es

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \qquad \text{para } x \in (0,1) \tag{E_λ}$$

La función $u_0 \equiv 0$ es solución de (E_λ). Para $\lambda < \pi$ definimos:

$$\Phi(x,u) = \frac{\lambda}{2} u^2 \operatorname{tg}\left[\lambda(x - \frac{1}{2})\right] \quad \text{para } (x,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}. \tag{2.94}$$

Esta Φ está en las condiciones del Teorema 2.31. En este caso la función $\tilde{f}$ sería

$$\tilde{f}(x,u,\xi) = f(x,u,\xi) + \Phi_u(x,u)\xi + \Phi_x(x,u) = \frac{1}{2}\xi^2 + \lambda \operatorname{tg}\left[\lambda(x - \frac{1}{2})\right] u\xi + \frac{\lambda^2}{2} u^2 \operatorname{tg}^2\left[\lambda(x - \frac{1}{2})\right].$$

La aplicación $(u,\xi) \longrightarrow \tilde{f}(x,u,\xi)$ es convexa y por tanto, por el Teorema 2.31, para cada $0 \leq \lambda < \pi$ tenemos que

$$I_\lambda(u) = \int_0^1 \frac{(u')^2 - \lambda^2 u^2}{2}\, dx \geq I_\lambda(0), \quad \forall\, u \in X.$$

Luego tomando límite cuando $\lambda \longrightarrow \pi$ llegamos a la desigualdad de Poincaré-Wirtinger:

$$\int_0^1 (u'(x))^2\, dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2(x)\, dx.$$

La idea tras las demostración del Teorema 2.31 es muy simple, y por ello no se puede aplicar en general. Se necesita desarrollar una teoría más fina para poder extender el resultado.

Definición 2.33. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Decimos que $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi = \Phi(x,u)$ es un campo exacto de f para D si exsite una función $S \in \mathcal{C}^1(D)$ tal que*

$$\begin{aligned} S_u(x,u) &= f_\xi(x,u,\Phi(x,u)) =: p(x,u) \\ S_x(x,u) &= f(x,u,\Phi(x,u)) - p(x,u)\Phi(x,u) =: h(x,u). \end{aligned}$$

Observación 2.34. *Si f es de $\mathcal{C}^2$, una condición necesaria para que Φ sea exacta es $p_x = h_u$ para que $S_{xu} = S_{ux}$. Recíprocamente, si D es simplemente conexo y $p_x = h_u$, entonces una S como en la Definición 2.33 existe.*

El siguiente resultado elemental justifica la definición anterior.

Proposición 2.35. *Sea* $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$*,* $f = f(x,u,\xi)$*. Sea también* $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $\Phi = \Phi(x,u)$ *un campo exacto de* f *para* D *de clase* $\mathcal{C}^1$*, con* $[a,b] \times \mathbb{R} \subset D$*. Entonces toda solución* $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *de*

$$u'(x) = \Phi(x, u(x)) \tag{2.95}$$

es solución de la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema (P)

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x,u(x),u'(x))] = f_u(x,u(x),u'(x)), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Demostración. Por la Definición 2.33, y para las funciones p y h que en ella aparecen, se tiene

$$\begin{aligned} h_u(x,u) &= f_u(x,u,\Phi(x,u)) - p_u(x,u)\Phi(x,u) \\ &= f_u(x,u,\Phi(x,u)) + f_\xi(x,u,\Phi(x,u))\Phi_u(x,u) - p_u(x,u)\Phi(x,u) - p(x,u)\Phi_u(x,u) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $p(x,u) = f_\xi(x,u,\Phi(x,u))$. Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f_\xi(x,u,u')] - f_u(x,u,u') &= \frac{d}{dx}[p(x,u)] - h_u(x,u) - p_u(x,u)\Phi(x,u) = \\ &= p_x(x,u) + p_u(x,u)u' - h_u(x,u) - p_u(x,u)\Phi(x,u) \\ &= p_x(x,u) - h_u(x,u) = S_{ux}(x,u) - S_{xu}(x,u) = 0. \end{aligned}$$

□

Ya estamos en condiciones para probar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 2.36 (Teorema de Hilbert)**.** *Sea* $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *con* $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ *convexa para cada* $(x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}$*. Sea* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio y* $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $\Phi = \Phi(x,u)$*, un campo exacto de* f *para* D*. Supongamos que existe un* $u_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *tal que* $(x, u_0(x)) \in D$ *para todo* $x \in [a,b]$ *y*

$$u_0'(x) = \Phi(x, u_0(x)), \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.96}$$

Entonces u_0 *es una solución del problema*

$$\text{ínf}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx \ : \ u \in X_D \right\}$$

donde $X_D = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = u_0(a)\ ,\ u(b) = u_0(b)\ ,\ (x,u(x)) \in D\ ,\ \forall\, x \in [a,b]\}$*.*

Demostración. Definimos la función de Weierstrass

$$E(x,u,\eta,\xi) = f(x,u,\xi) - f(x,u,\eta) - f_\xi(x,u,\eta)(\xi - \eta),$$

de forma que

$$f(x,u,\xi) = E(x,u,\eta,\xi) + f(x,u,\eta) + f_\xi(x,u,\eta)(\xi - \eta).$$

Como $\xi \longrightarrow f(x,u,\xi)$ es convexa, entonces E es no negativa siempre. Gracias a la hipótesis (2.96) tenemos que

$$E(x, u_0(x), \Phi(x, u_0(x)), u_0'(x)) = 0, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.97}$$

Usando ahora la definición del campo exacto de f para D obtenemos

$$f(x,u,\Phi(x,u)) + f_\xi(x,u,\Phi(x,u))(u'(x) - \Phi(x,u(x))) = f(x,u,\Phi) + p(x,u)u'(x) + p(x,u)\Phi(x,u)$$
$$= S_x + S_u u' = \frac{d}{dx}[S(x,u(x))].$$

Combinando estas expresiones, y teniendo en cuenta que $u(a) = u_0(a)$ y $u(b) = u_0(b)$ por definición de X_D, llegamos a que $I(u) \geq I(u_0)$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_a^b f(x,u,u')\,dx = \int_a^b \left\{E(x,u(x),\Phi(x,u(x)),u'(x)) + \frac{\partial}{\partial x}\big[S(x,u(x))\big]\right\} dx \\ &\geq \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\big[S(x,u(x))\big]\,dx = S(b,u(b)) - S(a,u(a)) = S(b,u_0(b)) - S(a,u_0(a)) \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}\big[S(x,u_0(x))\big]\,dx = I(u_0). \end{aligned}$$

□

Observación 2.37. *El Teorema 2.36 nos dice que de alguna manera u_0 es un mínimo local para nuestro problema (P). Se trataría de un mínimo absoluto si tuviesemos $[a,b]\times\mathbb{R} \subset D$. La construcción de un campo exacto no es simple, y menos si queremos que el conjunto D sea grande. Se puede demostrar que existe una relación entre los campos exactos y las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi.*

Capítulo 3

Métodos Directos

3.1. Introducción

En la mayoría de los resultados del Capítulo 2 hemos asumido la existencia de una solución regular de nuestro problema del Cálculo de Variaciones, y entonces hemos probado que dicha solución satisface cierta condición de optimalidad, conocida como ecuación de Euler-Lagrange. Dar un resultado de existencia de una solución así no es fácil. Esto de debe a que los argumentos usuales de compacidad fallan, ya que en ciertas topologías el límite de una sucesión de funciones regulares no es necesariamente regular.

En el presente capítulo vamos a suavizar nuestro concepto de solución, que ya no será necesariamente $\mathcal{C}^1$ sino que pertenecerá al espacio de Sobolev $W^{1,p}$. Más concretamente, trabajaremos con la siguiente formulación de nuestro problema: Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, una función $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, y un elemento u_0 perteneciente a $W^{1,p}(\Omega)$, consideramos el problema

$$(P) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \ : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

La condición $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ significa que $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, es decir, de alguna manera, que $u = u_0$ sobre $\partial\Omega$. En la Sección 3.2 probaremos un resultado de existencia para (P), cuya demostración descansa en el método directo del Cálculo de Variaciones. Veremos en la Sección 3.3 que sus soluciones, incluso cuando no sean de $\mathcal{C}^1$, siguen satisfaciendo unas ecuaciones de Euler-Lagrange. El problema (P) se complica enormemente en el caso vectorial (con funciones u en $W^{1,p}(\Omega)^N$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $N, n > 1$), y en la Sección 3.4 probamos algunos resultados que muestran direcciones en las que trabajar. Finalmente, en la Sección 3.5 se dan estrategias sobre como proceder cuando (P) no se encuentra en las condiciones de nuestro resultado de existencia de la Sección 3.2.

3.2. Un teorema de existencia general

A continuación probamos un resultado de existencia de solución para el problema (P). Como se verá en los ejemplos que siguen, las hipótesis que se exigen son casi óptimas.

Teorema 3.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado con frontera de Lipschitz. Sea* $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $f = f(x,u,\xi)$ *satisfaciendo*

$(H1)$ $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ *es convexa para cada* $(x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

$(H2)$ *Existen* $p > q \geq 1$ *y* $\alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_2|u|^q + \alpha_3, \quad \forall (x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Consideramos el problema

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) := \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx \;:\; u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\},$$

donde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $I(u_0) < +\infty$.

Entonces existe $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ *un mínimo de* (P).

Además, si $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ *es estrictamente convexa para cada* $x \in \overline{\Omega}$ *entonces dicho mínimo es único.*

Demostración. No haremos la prueba en el caso general sino en un caso particular donde las hipótesis son un poco más fuertes. Para una demostración en las condiciones del enunciado ver [4] (Theorem 3.4.1).

En lo que sigue supondremos que $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ y que satisface las siguientes hipótesis

$(H1+)$ $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para cada $x \in \overline{\Omega}$

$(H2+)$ Existen $p > 1$ y $\alpha_1 > 0, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_3, \; \forall (x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

$(H3)$ Existe una constante $\beta \geq 0$ tal que para cada $(x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se tiene

$$|f_u(x,u,\xi)|, |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \beta\big(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big).$$

La demostración del teorema está dividida en 4 pasos.

Paso 1: Compacidad. Gracias a la hipótesis (H2+) y como $u_0 \in W^{1,p}$ tenemos que

$$-\infty < m \leq I(u_0) < \infty.$$

Sea ahora $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante de (P) es decir tal que

$$I(u_\nu) \longrightarrow m := \inf\{I(u) \;:\; u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\} \quad \text{cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

De nuevo por la hipótesis (H2+), para un ν suficientemente grande tenemos que

$$m + 1 \geq I(u_\nu) \geq \alpha_1||\nabla u_\nu||^p_{L^p(\Omega)} - |\alpha_3|\mu(\Omega),$$

donde $\mu(\Omega)$ denota la medida de Ω. Luego existe un α_4 tal que $||\nabla u_\nu||_{L^p}(\Omega) \leq \alpha_4$.

Por otro lado queremos acotar la sucesión minimizante u_ν en $W^{1,p}(\Omega)$. Usando la desigualdad de Poincaré, existe una constante C_1 tal que

$$\begin{aligned} ||u_\nu||_{W^{1,p}} = ||u_\nu - u_0 + u_0||_{W^{1,p}} &\leq ||u_\nu - u_0||_{W^{1,p}} + ||u_0||_{W^{1,p}} \leq C_1||\nabla(u_\nu - u_0)||_{L^p} + ||u_0||_{W^{1,p}} \\ &\leq C_1||\nabla u_\nu||_{L^p} + C_1||\nabla u_0||_{L^p} + ||u_0||_{W^{1,p}} \leq C_1||\nabla u_\nu||_{L^p} + (C_1+1)||u_0||_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Despejando y tomando $\alpha_5 = \frac{1}{C1}$ y $\alpha_6 = \frac{1+C_1}{C_1}$ llegamos a que

$$\alpha_4 \geq ||\nabla u_\nu||_{L^p} \geq \alpha_5||u_\nu||_{W^{1,p}} - \alpha_6||u_0||_{W^{1,p}}.$$

Además de esta última cadena de desigualdades llegamos entonces a que existe otra constante más, vamos a llamarla α_7, tal que

$$||u_\nu||_{W^{1,p}} \leq \alpha_7.$$

De aquí deducimos (ver Lemas 1.2 y 1.12) que efectivamente existe $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ y una subsucensión que seguiremos denotando u_ν tal que

$$u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega) \text{ cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

Paso 2: Semicontinuidad inferior del funcional I. Queremos probar la siguiente implicación

$$u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \text{ en } W^{1,p}(\Omega) \implies \liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \leq I(\overline{u}).$$

Por la convexidad de la función f, y por haber impuesto que f es $\mathcal{C}^1$, tenemos que

$$f(x,u_\nu,\nabla u_\nu) \geq f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_\nu - \overline{u}) + \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_\nu - \nabla\overline{u}\rangle. \tag{3.1}$$

Observamos ahora que como $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ y por (H3)

$$f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{y} \quad f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Teniendo en cuenta esto último y usando la desigualdad de Hölder para $u_\nu \in W^{1,p}(\Omega)$ tenemos que

$$f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_\nu - \overline{u})\ ,\ \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_\nu - \nabla\overline{u}\rangle \in L^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Integrando la expresión (3.1) obtenemos

$$I(u_\nu) \geq I(\overline{u}) + \int_\Omega f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_\nu - \overline{u})\,dx + \int_\Omega \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_\nu - \nabla\overline{u}\rangle\,dx. \tag{3.4}$$

Como $u_\nu \rightharpoonup \overline{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y gracias a (3.2) deducimos que:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u_\nu - \overline{u})\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), \nabla u_\nu - \nabla\overline{u}\rangle\,dx = 0.$$

Luego,

$$\lim_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\overline{u}).$$

Paso 3: Existencia de solución. Veamos que la función $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenida en el Paso 1 como límite débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$ de una sucesión minimizante es solución de (P).

Por un lado, por ser m el ínfimo de I en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$I(\overline{u}) \geq m.$$

Por otro lado, gracias a la semicontinuidad inferior de I, y por ser u_ν una sucesión minimizante, tenemos

$$I(\overline{u}) \leq \lim_{\nu} I(u_\nu) = m.$$

Hemos probado pues que

$$I(\overline{u}) = m = \inf\{I(u) \ : \ u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

es decir, que $\overline{u}$ es solución de (P).

Paso 4: Unicidad de solución. Supongamos que existen dos mínimos $\overline{u}$ y $\overline{v}$ en $u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que $I(\overline{u}) = I(\overline{v}) = m$ y veamos que $\overline{u} = \overline{v}$. Sea $\overline{w} = \dfrac{\overline{u}+\overline{v}}{2} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Al ser convexa la función $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$, $\overline{w}$ también es un mínimo de (P) y

$$m \leq I(\overline{w}) = \frac{1}{2}I(\overline{u}) + \frac{1}{2}I(\overline{v}) = m.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + \frac{1}{2}f(x,\overline{v},\nabla\overline{v}) - f\left(x, \frac{\overline{u}+\overline{v}}{2}, \frac{\nabla\overline{u}+\nabla\overline{v}}{2}\right)\right] dx = 0.$$

De nuevo por la convexidad de $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$, el integrando es no negativo mientras que la integral es nula. Luego

$$\frac{1}{2}f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + \frac{1}{2}f(x,\overline{v},\nabla\overline{v}) - f\left(x, \frac{\overline{u}+\overline{v}}{2}, \frac{\nabla\overline{u}+\nabla\overline{v}}{2}\right) = 0 \text{ cpd en } \Omega.$$

Como $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa, $\overline{u} = \overline{v}$ y $\nabla\overline{u} = \nabla\overline{v}$ cpd en Ω, como queríamos probar.

$\square$

A continuación veremos varios ejemplos, algunos de ellos servirán para destacar la importancia de las hipótesis del teorema.

Ejemplo 3.2. *Un caso modelo de importancia viene dado por la función $f(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$, que satisface las hipótesis para $p = 2$. En este caso el problema (P) se escribe*

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \ : \ u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)\right\}.$$

Una generalización de esta función sería $f(x, u, \xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p + g(x, u)$ con $p > 1$ y g una función continua no negativa. Más adelante analizaremos un poco más el ejemplo de $f(x, u, \xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$.

Ejemplo 3.3. *El problema de mínima superficie viene dado por la función* $f(x,u,\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$. *Esta* f *satisface todas las hipótesis del teorema salvo (H2) pues esta sólo se satisfaría para* $p = 1$, *un caso que no estamos considerando según las hipótesis. La razón por la que este caso queda excluido de (H2) es que el espacio* $W^{1,1}$ *no es un espacio de Sobolev reflexivo.*

Ejemplo 3.4. *Este ejemplo es del mismo tipo que el anterior pero más fácil. También se satisfacen todas las hipótesis salvo (H2) que volvería a tenerse para* $p = 1$. *Veamos qué ocurre si no se satisface (H2) con este contraejemplo.*

Sean $n = 1$, $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \sqrt{u^2+\xi^2}$ *y consideramos el problema correspondiente:*

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 f(u(x),u'(x))\,dx \,:\, u \in X \right\} =: m,$$

donde $X = \{x \in W^{1,1}(0,1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$. *Veamos que* (P) *no tiene solución. Primero vamos a probar que* $m = 1$. *Por un lado*

$$I(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2+\xi^2}\,dx \geq \int_0^1 |u'(x)|\,dx \geq \int_0^1 u'(x)\,dx = u(1) - u(0) = 1.$$

Luego $m \geq 1$. *Sea ahora una subsucesión minimizante* $u_\nu \in X$ *con* ν *en* $\mathbf{Z}$ *dada por*

$$u_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1-1/\nu] \\ 1+\nu(x-1) & \text{si } x \in (1/\nu, 1]. \end{cases}$$

Por tanto,

$$1 \leq I(u_\nu) = \int_{1-1/\nu}^1 \sqrt{(1+\nu(x-1))^2+\nu^2}\,dx \leq \frac{1}{\nu}\sqrt{1+\nu^2} \longrightarrow 1 \text{ cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

Concluimos entonces que $m = 1$. *Por reducción al absurdo supongamos ahora que existe un* $\overline{u} \in X$ *que sea mínimo de* (P) *donde se alcance dicho* m. *Entonces tendríamos que*

$$1 = I(\overline{u}) = \int_0^1 \sqrt{\overline{u}^2 + (\overline{u}'(x))^2}\,dx \geq \int_0^1 |\overline{u}'|\,dx \geq \int_0^1 \overline{u}'\,dx = \overline{u}(1) - \overline{u}(0) = 1.$$

Luego $\overline{u} = 0$ *cpd en* $(0,1)$ *con lo cual hemos llegado a una contradicción pues los elementos de* X *son continuos y* $\overline{u}(1) = 1$. *Por tanto, en esta situación* (P) *no tiene solución.*

Ejemplo 3.5 (Weierstraß). *Este ejemplo ya lo hemos visto antes tras el Teorema 2.1 de la ecucación de Euler-Lagrange.*

Sean $n = 1$ *y* $f(x,u,\xi) = f(x,\xi) = x\xi^2$ *y consideramos el problema*

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 f(x,u'(x))\,dx \,:\, u \in X \right\} = m_X,$$

donde $X = \{x \in W^{1,2}(0,1) : u(1) = 0, u(0) = 1\}$. *Observamos que se satisfacen todas las hipótesis del teorema salvo (H2), pues sólo se satisfaría cuando* $\alpha_1 = 0$ *y este caso no lo considera el teorema. Que no se satisfaga esta hipótesis hace que el problema de este ejemplo no tiene solución en* X. *Probemos esto último.*

En primer lugar, probaremos que $m_X = 0$*. Para ello consideremos los conjuntos* $Y := X \cap \mathcal{C}^1([0,1])$ *y*

$$X_{piec} = \{v \in \mathcal{C}^1_{piec}([0,1]) : v(0) = 1, v(1) = 0\},$$

donde $\mathcal{C}^1_{piec}$ *es el conjunto de las funciones* $\mathcal{C}^1$ *a trozos. En relación con el Teorema 2.1 (ver Ejemplo 2.7) hemos probado que*

$$\text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 xu'(x)^2\,dx \;:\; u \in X_{piec} \right\} = 0.$$

Probemos ahora que

$$m_Y := \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 f(x, u'(x))\,dx \;:\; u \in Y \right\}$$

satisface $m_Y = 0$*. Observemos que para cada* $\varepsilon > 0$ *y* $u \in X_{piec}$ *podemos encontrar* $v \in X$ *tal que*

$$||u - v||_{W^{1,2}} \leq \varepsilon.$$

A partir de esta desigualdad, y teniendo en cuenta la definición de $I(u)$*, podemos encontrar una constante* K*, independiente de* ε*, tal que*

$$0 \leq I(v) \leq I(u) + K\varepsilon.$$

Por tanto, $0 \leq m \leq I(v) \leq I(u) + K\varepsilon = K\varepsilon$ *y como podemos tomar* ε *arbitrariamente pequeño, resulta* $m_Y = 0$*. Ahora bien, como* Y *es un espacio más pequeño que* X *es trivial que* $0 \leq m_X \leq m_Y$*. Entonces* $m_X = 0$*.*

A continuación razonamos por reducción al absurdo para probar que (P) *no tiene solución. Supongamos que* (P) *sí tiene una solución* $\overline{u} \in X$*. Entonces tendríamos que* $I(\overline{u}) = 0$*. Pero como el integrando* $f(x,\xi) = x\xi^2$ *para* $x \in (0,1)$ *es no negativo deducimos que* $\overline{u}' = 0$ *cpd en* $(0,1)$*. Como los elementos de* X *son continuos tendríamos que* $\overline{u}$ *es constante lo cual es incompatible con las condiciones de contorno. Por tanto,* (P) *no tiene solución.*

Ejemplo 3.6. *En este ejemplo volvemos a la desigualdad de Poincaré-Wirtinger que nos servirá para comprobar que en la hipótesis (H2) no podemos tomar* $p = q$*. Sean* $n = 1, \lambda > \pi$ *y*

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2 u^2).$$

En el Ejemplo 2.8 tomando $u_\alpha(x) = \alpha \operatorname{sen} \pi x$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$I_\lambda(u_\alpha) = \alpha^2 \int_0^1 \left[\pi^2 \cos^2 \pi x - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \pi x\right] dx \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Luego en esta situación (P) *no tiene solución.*

Ejemplo 3.7 (Bolza). *Aquí vemos la importancia de (H1) y qué ocurre si no la tenemos.*

Sea ahora $n = 1$ *y tomamos*

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = (\xi^2 - 1)^2 + u^4.$$

Consideramos el problema

$$(P) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_0^1 f(x, u'(x))\, dx \,:\, u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\} =: m.$$

Vamos a asumir de momento que $m = 0$ *y probemos que entonces* (P) *no tiene solución. Por reducción al absurdo, supongamos que existe* $\overline{u} \in W_0^{1,4}(0,1)$ *mínimo de* (P)*, es decir, tal que* $I(\overline{u}) = 0$*. Entonces,*

$$0 = I(\overline{u}) = \int_0^1 \left[((\overline{u}')^2 - 1)^2 + \overline{u}^4 \right] dx.$$

Esto implica necesariamente que $\overline{u} = 0$ *y que* $|\overline{u}'| = 1$ *cpd en* $(0,1)$*. Por tanto, como los elementos de* $W^{1,4}$ *son continuos, se tendría* $\overline{u} \equiv 0$*,y entonces* $\overline{u} \equiv 0$*, lo cual es contradictorio con* $|\overline{u}'| = 1$ *cpd en* $(0,1)$*.*

Falta por probar que $m = 0$*. Definimos una sucesión minimizante* $u_\nu \in W_0^{1,4}(0,1)$ *para* $\nu \geq 2$ *entero por:*

$$u_\nu(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{\nu} & \text{si } x \in [\frac{2k}{2\nu}, \frac{2k+1}{2\nu}] \\ -x + \frac{k+1}{\nu} & \text{si } x \in (\frac{2k+1}{2\nu}, \frac{2k+2}{2\nu}]. \end{cases}$$

Observamos que $|u_\nu'| = 1$ *cpd en* $(0,1)$ *y* $|u_\nu| \leq \frac{1}{2\nu}$ *por lo que*

$$0 \leq I(u_\nu) \leq \frac{1}{(2\nu)^4} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

3.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange (y III)

Procedemos a demostrar las ecuaciones de Euler-Lagrange para el problema (P), bajo las hipótesis más débiles de este capítulo. El procedimiento es muy parecido al anterior pero aquí hay que ser más cuidadoso ya que ahora estamos trabajando con el espacio de Sobolev $W^{1,p}$ y por tanto las soluciones $\overline{u}$ en general ya no son $\mathcal{C}^2$.

Teorema 3.8. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado con frontera Lipschitz. Sea* $p \geq 1$ *y* $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$*,* $f = f(x, u, \xi)$ *satisfaciendo:*

(H3) Existe $\beta \geq 0$ *tal que para cada* $(x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$|f_u(x, u, \xi)|, |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}).$$

Sea $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ *un mínimo de*

$$(P) \qquad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \,:\, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} =: m, \tag{3.5}$$

para $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *dado. Entonces* $\overline{u}$ *satisface la versión débil de la ecuación de Euler-Lagrange:*

$$(E_w) \qquad \int_\Omega [f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})\varphi + \langle f_\xi(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}), \nabla \varphi \rangle]\, dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

Ademas si $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ y $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces $\overline{u}$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$(E) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[f_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})] = f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3.7}$$

Recíprocamente, si $(u, \xi) \longrightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para cada $x \in \overline{\Omega}$ y si $\overline{u}$ es una solución o bien de (E_w) o bien de (E), entonces es un mínimo de (P).

Demostración. Dividimos la demostración en 4 pasos.

Paso 1: Observaciones previas. Está claro que

$$f(x, u, \xi) = f(x, 0, 0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(x, tu, t\xi)]\, dt, \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Por (H3), podemos encontrar una constante $\gamma_1 > 0$ tal que

$$|f(x, u, \xi)| \leq \gamma_1(1 + |u|^p + |\xi|^p), \quad \forall\, (X, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

En particular deducimos que

$$|I(u)| \leq \int_\Omega |f(x, u, \xi)|\, dx \leq \gamma_1 \int_\Omega (1 + |u|^p + |\xi|^p)\, dx < \infty.$$

Paso 2: Derivada de I. Veamos ahora que para cada $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ y para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{I(u + \varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega [f_u(x, u, \nabla u)\varphi + \langle f_\xi(x, u, \nabla u), \nabla\varphi\rangle]\, dx. \tag{3.9}$$

Para eso sea $g(x, \varepsilon) = f(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), \nabla u(x) + \varepsilon\nabla\varphi(x))$ de manera que

$$I(u + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega g(x, \varepsilon)\, dx.$$

Como f es $\mathcal{C}^1$ tenemos que para casi todo x de Ω, que la función $\varepsilon \mapsto g(x, \varepsilon)$ es $\mathcal{C}^1$ y por tanto existe un $\theta \in [-|\varepsilon|, |\varepsilon|]$, $\theta = \theta(x)$ tal que

$$g(x, \varepsilon) - g(x, 0) = g_\varepsilon(x, \theta)\, \varepsilon.$$

con $g_\varepsilon(x, \theta) = f_u(x, u(x) + \theta\varphi, \nabla u + \theta\nabla\varphi)\varphi + \langle f_\xi(x, u + \theta\varphi, \nabla u + \theta\nabla\varphi); \nabla\varphi\rangle$.

Ahora gracias a (H3) podemos encontrar una constante $\gamma_2 > 0$ tal que para cada $\theta \in [-1, 1]$

$$\left|\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon}\right| = |g_\varepsilon(x, \theta)| \leq \gamma_2(1 + |u|^p + |\varphi|^p + |\nabla u|^p + |\nabla\varphi|^p) \equiv G(x).$$

Observamos que como $\varphi, u \in W^{1,p}(\Omega)$ tenemos que $G \in L^1(\Omega)$. Además por (3.8) las aplicaciones $x \mapsto g(x, 0)$ y $x \mapsto g(x, \varepsilon)$ están ambas en $L^1(\Omega)$.

Resumiendo, hemos llegado a que

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \in L^1(\Omega)\\
&\left|\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon}\right| \leq G(x) \text{ con } G \in L^1(\Omega)\\
&\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \longrightarrow g_\varepsilon(x, 0) \text{ cpd en } \Omega.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para la sucesión (en ε) de funciones integrables $\frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}$ llegamos a la expresión (3.9).

Paso 3: Derivación de (E_w) y (E). Como $\overline{u}$ es un mínimo de (P), para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tenemos $I(\overline{u}+\varepsilon\varphi) \geq I(\overline{u})$. Por tanto

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{I(\overline{u}+\varepsilon\varphi) - I(\overline{u})}{\varepsilon} = 0.$$

Combinando esto último con (3.9) llegamos a la expresión de (E_w).

Para llegar a (E) integramos por partes la segunda integral de (E_w), deduciendo

$$\int_\Omega [f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) - \operatorname{div} f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u})]\varphi\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Por el lema fundamental del cálculo variacional llegamos entonces a (E).

Paso 4: Recíproco. Sea ahora $\overline{u}$ una solución de (E_w) (tomamos una solución de (E_w) porque cualquier solución de (E) necesariamente también es solución de (E_w)). Como f es convexa deducimos que para cada $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos

$$f(x,u,\nabla u) \geq f(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) + f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u}) + \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), (\nabla u - \nabla\overline{u})\rangle.$$

Ahora integramos, usamos la expresión de (E_w) y el hecho de que $u - \overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\, dx + \int_\Omega f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u})\, dx \\ &+ \int_\Omega \langle f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u}), (\nabla u - \nabla\overline{u})\rangle\, dx = \int_\Omega f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\, dx + \int_\Omega f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u})\, dx \\ &- \int_\Omega \operatorname{div} f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u})\, dx = I(\overline{u}). \end{aligned}$$

Luego $I(u) \geq I(\overline{u})$ para todo $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, como queríamos probar. $\square$

Una vez demostrado el teorema vamos a hacer algunos comentarios interesantes. En primer lugar observamos que la hipótesis (H3) es importante para que esté bien definida la formulación débil de la Ecuación de Euler-Lagrange pues necesitamos que $f_u\varphi, \langle f_\xi, \nabla\varphi\rangle \in L^1$ lo cual se tiene con dicha hipótesis. En cuanto a la segunda parte del resultado, está claro que una solución de (E) es también solución de (E_w). Lo recíproco se tiene con la suficiente regularidad de $\overline{u}$. Finalmente observamos que si en (E_w) quisiéramos tener funciones test en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en vez de $W_0^{1,p}$, entonces podríamos imponer una hipótesis menos fuerte que (H3), bastaría por ejemplo suponer

(H3') Existen $p \geq 1$ y $\beta \geq 0$ tal que para cada $(x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se tiene

$$|f_u(x,u,\xi)|, |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \beta(1 + |u|^p + |\xi|^p).$$

Así la regularidad de la función test "compensa" de alguna forma la de f para que aún así tenga sentido la formulación débil de le ecuación de Euler-Lagrange.

Veamos ahora algunos ejemplos donde mostraremos la importancia de las hipótesis del teorema demostrado.

Ejemplo 3.9. *Para $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \frac{1}{2}|\xi^2|$ se satisface (H3). La ecuacion (E_w) sería en este caso*

$$\int_\Omega 0 \cdot \varphi + \langle \frac{2}{2} \nabla \overline{u}(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = \int_\Omega \langle \nabla \overline{u}(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = 0, \quad \forall \, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mientras que (E) es $\Delta \overline{u} = 0$ en Ω (ecuación de Laplace).

Ejemplo 3.10. *Consideremos la generalización del ejemplo anterior. Sea $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$. La ecuación (E_w) se conoce como la ecuación del p-Laplaciano (porque cuando $p = 2$ se corresponde con la ecuación de Laplace) y viene dada por*

$$div[\,|\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u}\,] = 0 \ \text{ en } \Omega.$$

Ejemplo 3.11. *En el problema de superficies mínimas el integrando viene dado por*

$$f(x,u,\xi) = f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

y satisface (H3) para $p = 1$ pues

$$|f_\xi(\xi)| = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \right|^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

La ecuación (E) es la llamada ecuación de superficies mínimas

$$div \frac{\nabla \overline{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \overline{u}|^2}} = 0 \ \text{ en } \Omega$$

y puede reescribirse de la forma

$$\left(1 + |\nabla \overline{u}|^2\right) \Delta \overline{u} - \sum_{i,j=1}^n \overline{u}_{x_i} \overline{u}_{x_j} \overline{u}_{x_i x_j} = 0 \ \text{ en } \Omega.$$

Ejemplo 3.12. *Sea $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = g(u)|\xi|^2$ con $0 \leq g(u), |g'(u)| \leq g_0$ (estamos en el caso de $p = 2$). Entonces tenemos*

$$|f_u(u,\xi)| = |g'(u)||\xi|^2, \ |f_\xi(u,\xi)| = 2|g(u)||\xi| \leq 2g_0|\xi|.$$

Luego si $g'(u) \neq 0$, entonces f no satisface (H3). En este caso f satisface la siguiente condición más débil que (H3):

(H3') Existen $p \geq 1$ y $\beta \geq 0$ tal que para cada $(x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se tiene

$$|f_u(x,u,\xi)|, |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \beta(1 + |u|^p + |\xi|^p).$$

Repitiendo casi de manera idéntica la demostración del Teorema 3.8 se llega a que bajo la hipótesis (H3'), la función $\overline{u}$ sólo satisface

$$\int_\Omega \left[f_u(\overline{u}, \nabla \overline{u})\varphi + \langle f_\xi(\overline{u}, \nabla \overline{u}), \nabla \varphi \rangle \right] dx = 0, \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Más generalmente la ecuación se tendría para cualquier $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 3.13. ***(Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)*** *Sea $\lambda > \pi$, $n = 1$ y $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2 u^2)$. Consideremos*

$$(P) \qquad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x))\, dx \,:\, u \in W_0^{1,2}(0,1) \right\} =: m.$$

Sabemos que $\xi \longrightarrow f(u,\xi)$ es convexa pero el problema es que $(u,\xi) \longrightarrow f(u,\xi)$ no lo es. Hemos visto que para este caso de $\lambda > \pi$, se tiene $m = -\infty$, luego (P) no tiene solución. Sin embargo, la ecuación de Euler-Lagrange, $u'' + \lambda^2 u = 0$ en $[0,1]$ sí tiene solución: $u \equiv 0$. Luego acabamos de comprobar que el recíproco del Teorema 3.8 no se tiene cuando $(u,\xi) \longrightarrow f(u,\xi)$ no es convexa.

Ejemplo 3.14. *Sean $n = 1$ y $f(x,u,\xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$, que no es convexa y consideramos*

$$(P) \qquad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 f(u'(x))\, dx \,:\, u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\} =: m.$$

Sabemos que $m = 0$ (ver Ejemplo 2.6). La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{u}'((\overline{u}')^2 - 1) \right] = 0. \tag{E}$$

Observemos que f satisface (H3) pues

$$f_u = 0 \qquad y \qquad |f_\xi| = 4\,(\xi^3 - \xi) \leq 4\,|\xi|\,(|\xi|^2 + 1).$$

La versión débil de la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\int_0^1 \overline{u}'((\overline{u}')^2 - 1)\, \varphi'\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,4}(0,1). \tag{E_w}$$

Es obvio que $\overline{u} \equiv 0$ es solución de (E) y (E_w) pero no es un mínimo de (P) pues $m = 0$ e $I(0) = 1$.

Este ejemplo tiene otro interés. La función

$$v(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & si\ x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

es un mínimo de (P) pues $m = I(v) = 0$ y no es $\mathcal{C}^1$. Esta v satisface (E_w) pero no satisface (E).

3.4. El caso vectorial

En esta sección consideramos el problema

$$(P) \qquad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \,:\, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\} =: m,$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, para $N > 1$ y $n > 1$ (hasta el momento en el capítulo hemos trabajado en el caso $N = 1$). Usaremos la siguiente notación

- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R},\ f = f(x, u, \xi)$.
- $u = (u^1, \dots, u^N) \in \mathbb{R}^N, \xi = \left(\xi_i^j\right)_{1\le i\le n}^{1\le j\le N} \in \mathbb{R}^{N\times n}$ y $\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le n}^{1\le j\le N}$.
- $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ significa que si $u^j, u_0^j \in W^{1,p}(\Omega), j = 1, \dots, N$ y $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Los resultados de las secciones anteriores se pueden extender al caso vectorial, pero mientras que cuando $N = 1$ algunos de dichos resultados son casi óptimos, cuando $N > 1$ están lejos de serlo. El caso vectorial es en general más complejo. Por ejemplo, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este (P) ya no son ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Presentaremos una generalización del Teorema 3.1 no será el mejor resultado posible pero sí nos puede dar una idea de lo que se podría llegar a hacer. Por simplicidad consideramos sobre todo el caso de $N = n = 2$ pero se podría hacer en dimensiones más grandes.

Primero vamos a ver algunos lemas auxiliares que serán clave para probar el resultado fundamental de esta sección.

Lema 3.15. *Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ con $p \ge 2$. Entonces existe un $\alpha > 0$ que sólo depende de p y tal que*

$$\|\det \nabla u - \det \nabla v\|_{L^{p/2}} \le \alpha(\|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{L^p})\, \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p}.$$

Demostración. Es fácil probar que existe una constante $\alpha > 0$ para la que:

$$|\det A - \det B| \le \alpha(|A| + |B|)\, |A - B|, \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

De ella deducimos entonces que

$$|\det \nabla u - \det \nabla v|^{p/2} \le \alpha^{p/2}(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p/2} |\nabla u - \nabla v|^{p/2}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder llegamos a

$$\int\int_\Omega |\det \nabla u - \det \nabla v|^{p/2}\, dxdy \le \alpha^{p/2}\left(\int\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\, dxdy\right)^{1/2}\left(\int\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\, dxdy\right)^{1/2}.$$

Elevamos a $2/p$ en ambos lados

$$\begin{aligned}\|\det \nabla u - \det \nabla v\|_{L^{p/2}} &= \left(\int\int_\Omega |\det \nabla u - \det \nabla v|^{p/2}\right)^{2/p} \\ &\le \alpha\left(\int\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\, dxdy\right)^{1/p}\left(\int\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\, dxdy\right)^{1/p},\end{aligned}$$

y a partir de aquí se deduce inmediatamente el resultado.

□

Lema 3.16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado con frontera Lipschitz, $p > 2$ y*

$$u^\nu = (\varphi^\nu, \psi^\nu) \rightharpoonup u = (\varphi, \psi) \text{ en } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2).$$

Entonces $\det \nabla u^\nu \rightharpoonup \det \nabla u$ *en* $L^{p/2}(\Omega)$.

Demostración. El objetivo es probar que para cada $v \in (L^{p/2})' = L^{\frac{p}{p-2}}$ tenemos

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\int_\Omega \det \nabla u^\nu(x,y)\, v(x,y)\, dxdy = \int\int_\Omega \det \nabla u(x,y)\, v(x,y)\, dxdy. \tag{3.10}$$

Vamos a ver la prueba en 3 pasos. Conceptualmente importante es sobre todo el primer paso mientras que los otros dos son más técnicos.

Paso 1: Probemos la igualdad (3.10) pero bajo hipótesis más fuertes: Supongamos que $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $u^\nu, u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. Primero vamos a probar un resultado previo:

Sean $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$, $w = w(\varphi, \psi)$. Entonces siempre se tiene

$$\int\int_\Omega \det \nabla w v\, dxdy = -\int\int_\Omega [\varphi\psi_y v_x - \varphi\psi_x v_y]\, dxdy. \tag{3.11}$$

En efecto, usando que $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2$ obtenemos $\det \nabla$w$= \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = (\varphi\psi_y)_x - (\varphi\psi_x)_y$. Entonces gracias a que $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes la expresión

$$\int\int_\Omega \det \nabla w v\, dxdy = \int\int_\Omega [(\varphi\psi_y)_x - (\varphi\psi_x)_y v]\, dxdy,$$

llegamos a (3.11).

Ahora por el teorema de *Rellich*, como además $\varphi^\nu \rightharpoonup \varphi$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y $p > 2$, tenemos que $\varphi^\nu \longrightarrow \varphi$ en L^∞. Combinando esto con el hecho de que

$$\psi_x^\nu, \psi_y^\nu \rightharpoonup \psi_x, \psi_y \text{ en } L^p,$$

por el Lema 1.3 deducimos que

$$\varphi^\nu\, \psi_x^\nu, \varphi^\nu\, \psi_y^\nu \rightharpoonup \varphi\, \psi_x, \varphi\, \psi_y \text{ en } L^p. \tag{3.12}$$

Como v_x y v_y están en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$, al aplicar (3.11) a $w = u^\nu$ y teniendo en cuenta (3.12) deducimos que

$$\lim_{\nu\longrightarrow\infty} \int\int_\Omega \det \nabla u^\nu v\, dxdy = -\int\int_\Omega [\varphi\psi_y v_x - \varphi\psi_x v_y]\, dxdy.$$

Usando de nuevo (3.11) para $w = u$ llegamos a (3.10).

Paso 2: Veamos ahora que (3.10) también se tiene bajo hipótesis más generales: $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ pero u^ν, u en $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. De hecho, (3.11) se sigue verificando bajo hipótesis más débiles. Concretamente para $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, lo cual probaremos un poco más adelante. Mientras tanto observamos que si tenemos que $w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ entonces con exactamente el mismo argumento que en el paso anterior, obtenemos (3.10) bajo las hipótesis de que $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $u^\nu, u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Probemos lo que ha quedado pendiente. Empecemos regularizando $w \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una función $w^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\|w - w^\varepsilon\|_{W^{1,p}} \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|w - w^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

Como $p \geq 2$ por el Lema 3.15 podemos encontrar una constante α_1 independiente de ε tal que

$$\|\det \nabla w - \det \nabla w^\varepsilon\|_{L^{p/2}} \leq \alpha_1 \varepsilon. \tag{3.13}$$

Es fácil ver que también podemos encontrar una constante α_2 tal que

$$\|\varphi\psi_y - \varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\|_{L^p} \leq \alpha_2 \varepsilon \quad \text{y} \quad \|\varphi\psi_x - \varphi^\varepsilon\psi_x^\varepsilon\|_{L^p} \leq \alpha_2 \varepsilon. \tag{3.14}$$

Por ejemplo la primera desigualdad se tiene efectivamente de

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi_y - \varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\|_{L^p} &= \|\varphi\psi_y - \varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon + \varphi\psi_y^\varepsilon - \varphi\psi_y^\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\varphi\psi_y - \varphi\psi_y^\varepsilon\|_{L^p} + \|\varphi\psi_y^\varepsilon - \varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\|_{L^p} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi_y - \psi_y^\varepsilon\|_{L^p} + \|\psi_y^\varepsilon\|_{L^p}\|\varphi - \varphi^\varepsilon\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

De manera similar se razonaría para la segunda igualdad.

Volvemos ahora a (3.11). Se tiene

$$\begin{aligned}&\int\int_\Omega \det \nabla w v\, dxdy + \int\int_\Omega [\varphi\psi_y v_x - \varphi\psi_x v_y]\, dxdy = \\ &\int\int_\Omega \det \nabla w^\varepsilon v\, dxdy + \int\int_\Omega [\varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon v_x - \varphi^\varepsilon\psi_x^\varepsilon v_y]\, dxdy + \int\int_\Omega (\det \nabla w - \det \nabla w^\varepsilon) v\, dxdy + \\ &\int\int_\Omega [(\varphi\psi_y - \varphi^\varepsilon\psi_y^\varepsilon)v_x - (\varphi\psi_x - \varphi^\varepsilon\psi_x^\varepsilon)v_y]\, dxdy.\end{aligned}$$

A partir de aquí, teniendo en cuenta que habíamos probado (3.11) para $w^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in \mathcal{C}^2$, aplicando la desigualdad de Hölder en (3.13) y en (3.14), podemos concluir que existe una constante α_3, independiente de ε, tal que:

$$\begin{aligned}&\left|\int\int_\Omega \det \nabla w v\, dxdy + \int\int_\Omega [\varphi\psi_y v_x - \varphi\psi_x v_y]\, dxdy\right| \leq \\ &\left|\int\int_\Omega (\det \nabla w - \det w^\varphi) v\, dxdy\right| + \left|\int\int_\Omega (\varphi\psi_y - \varphi^\varepsilon\psi_y) v_x\, dxdy\right| + \left|\int\int_\Omega (\varphi\psi_x - \varphi^\varepsilon\psi_y\, dxdy\right| \leq \\ &\leq \alpha_3\varepsilon(\|v\|_{L^{p/2}} + \|v_x\|_{L^{p'}} + \|v_y\|_{L^{p'}}).\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, ya tenemos que 3.11 es cierto incluso para $w \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$.

Paso 3: Procedemos a probar el lema finalmente obviando la hipótesis de que $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Queremos llegar a (3.10) para $v \in L^{\frac{p}{p-2}}$. Nos apoyamos en un proceso de regularización, considerando para cada $\epsilon > 0$ y $v \in L^{\frac{p}{p-2}}$ una un $v^\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|v - v^\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{p-2}}} \leq \varepsilon. \tag{3.15}$$

Además tenemos

$$\int\int_\Omega \det \nabla u^\nu v\, dxdy = \int\int_\Omega \det \nabla u^\nu (v - v^\varepsilon)\, dxdy + \int\int_\Omega \det \nabla u^\nu v^\varepsilon\, dxdy.$$

Usando otra vez la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left| \int \int_{\Omega} (\det \nabla u^{\nu} - \det \nabla u) v \, dxdy \right| \\
=&\left| \int \int_{\Omega} \left[(\det \nabla u^{\nu} - \det \nabla u)(v - v^{\varepsilon}) + (\det \nabla u^{\nu} - \det \nabla u) v^{\varepsilon} \right] dxdy \right| \\
\leq& \|v - v^{\varepsilon}\|_{L^{\frac{p}{p-2}}} \| \det u^{\nu} - \det \nabla u\|_{L^{p/2}} + \left| \int \int_{\Omega} (\det \nabla u^{\nabla} - \det \nabla u) v^{\varepsilon} \, dxdy \right|.
\end{aligned}$$

En el paso anterior hemos visto que

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} \left| \int \int_{\Omega} (\det \nabla u^{\nu} - \det \nabla u) v^{\varepsilon} \right| = 0,$$

mientras que por (3.15), por el hecho de que $u^{\nu} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}$ y el Lema 3.15 tenemos que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|v - v^{\varepsilon}\|_{L^{\frac{p}{p-2}}} \cdot \| \det \nabla u^{\nu} - \det \nabla u\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \gamma \, \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario efectivamente hemos llegado a (3.10) para $v \in L^{\frac{p}{p-2}}$ y para $u^{\nu} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}$. □

Observación 3.17. *El lema anterior se debe a Morrey y a Reshetnyak. A simple vista puede parecer sorprendente porque afirma que podemos pasar al límite en el determinante, lo cual conlleva, de alguna manera, pasar al límite en producto de términos que sólo convergen débilmente. Este resultado proporciona un ejemplo de una función no lineal que es débilmente continua.*

El que sigue es el resultado más importante de la sección.

Teorema 3.18. *Sean $N = n = 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado con frontera Lipschitz. Sean $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, y $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = F(x, u, \xi, \delta)$, continuas y tales que:*

$$f(x, u, \xi) = F(x, u, \xi, det\ \xi), \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{3.16}$$

Asumimos además también las hipótesis

$(H1_{vect})$ $(\xi, \delta) \longrightarrow F(x, u, \xi, \delta)$ es convexa para cada $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$.

$(H2_{vect})$ Existen $p > \max\{q, 2\}$ y $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(x, u, \xi, \delta) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3, \quad \forall\, (x, u, \xi, \delta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}.$$

Sea $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ tal que $I(u_0) < \infty$. Entonces (P) tiene al menos una solución.

Demostración. Para una prueba general véase el Teorema 4.2.10 de [4]. Aquí vamos a probar el teorema bajo las siguientes hipótesis:

Suponemos que f es de la forma

$$f(x, u, \xi) = g(x, u, \xi) + h(x, \det \xi)$$

donde g satisface (H1) y (H2), con $p > 2$, del Teorema 3.1 y con h de clase $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tal que $h \geq 0$ y la aplicación $\delta \longrightarrow h(x, \delta)$ es convexa para cada $x \in \overline{\Omega}$. Supongamos además que existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$|h_\delta(x, \delta)| \leq \gamma \left(1 + |\delta|^{\frac{p-2}{p}}\right). \tag{3.17}$$

La prueba es idéntica a la del Teorema 3.1 salvo el segundo paso (la semicontinuidad inferior), el cual vemos ahora. Tenemos que probar que

$$u^\nu \rightharpoonup \overline{u} \text{ en } W^{1,p} \implies \liminf_{\nu \longrightarrow \infty} I(u_\nu) \geq I(\overline{u}) \tag{3.18}$$

donde $I(u) = G(u) + H(u)$ con

$$G(u) = \int_\Omega g(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \quad H(u) = \int_\Omega h(x, \det \nabla u(x))\, dx.$$

Ya hemos visto en el Teorema 3.1 que $\liminf_{\nu \longrightarrow \infty} G(u_\nu) \geq G(\overline{u})$ por lo que el resultado quedaría demostrado si probaramos que $\liminf_{\nu \longrightarrow \infty} H(u_\nu) \geq H(\overline{u})$. Como h es convexa y $\mathcal{C}^1$ tenemos

$$h(x, \det \nabla u_\nu) \geq h(x, \det \nabla \overline{u}) + h_\delta(x, \det \nabla \overline{u})\, (\det \nabla u_\nu - \det \nabla \overline{u}). \tag{3.19}$$

Sabemos que $\overline{u}$ pertenece a $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, lo cual implica que $\det \nabla \overline{u}$ pertenece a $L^{p/2}(\Omega)$, y usando entonces (3.17) deducimos que

$$h_\delta(x, \det \nabla \overline{u}) \in L^{\frac{p}{p-2}} = L^{(p/2)'}, \tag{3.20}$$

pues podemos encontrar una constante $\gamma_1 > 0$ tal que

$$|h_\delta(x, \det \nabla \overline{u})|^{\frac{p}{p-2}} \leq [\gamma(1 + |\det \nabla \overline{u}|^{\frac{p-2}{p}})]^{\frac{p}{p-2}} \leq \gamma_1(1 + |\det \nabla \overline{u}|^{p/2}).$$

Volviendo a (3.19) e integrando llegamos a

$$H(u_\nu) \geq H(\overline{u}) + \int_\Omega h_\delta(x, \det \nabla \overline{u})(\det \nabla u_\nu - \det \nabla \overline{u})\, dx.$$

Como $u_\nu - \overline{u} \rightharpoonup 0$ en $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, tenemos por el Lema 3.16 que $\det \nabla u_\nu - \det \nabla \overline{u} \rightharpoonup 0$ en $L^{p/2}$ lo cual, combinado con (3.20) y la definición de convergencia débil en $L^{p/2}$ nos lleva a

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} \int_\Omega h_\delta(x, \det \nabla \overline{u})(\det \nabla u_\nu - \det \nabla \overline{u})\, dx = 0.$$

Por tanto, llegamos a $\liminf_{\nu \longrightarrow \infty} H(u_\nu) \geq H(\overline{u})$ y con esto terminamos la prueba. □

Observación 3.19. *Una función f que puede escribirse como (3.16) en términos de una función convexa F se denomina policonvexa.*

Ejemplo 3.20. *Sean $n = N = 2$, $p > 2$ y*

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p + h(\det \xi)$$

donde $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es no negativa y convexa (como por ejemplo $h(\det \xi) = (\det \xi)^2$).

Se satisfacen todas las hipótesis del teorema anterior. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas en el caso particular de $p = 2$ se escriben como

$$\begin{cases} \Delta u^1 + [h'(\det \nabla u) u_y^2]_x - [h'(\det \nabla u) u_x^2]_y = 0 \\ \Delta u^2 - [h'(\det \nabla u) u_y^1]_x + [h'(\det \nabla u) u_x^1]_y = 0. \end{cases}$$

Aquí estamos denotando $u = (u^1, u^2)$.

3.5. Formulación relajada

En esta sección seguimos trabajando con el problema

$$(P) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \, : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} =: m.$$

En el Teorema 3.1 hemos visto que la existencia de soluciones de (P) depende de las hipótesis (H1) y (H2). En esta sección mostramos como se puede proceder en el el caso en el que no se tenga (H1), es decir, cuando $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ ya no es convexa. La idea es definir una "solución generalizada"de (P). Estas nuevas soluciones serán en realidad soluciones de un nuevo "problema relajado" $(\overline{P})$, similar en cuanto forma al problema (P), pero donde la función f es sustituida por otra que sí satisface propiedades de convexidad. Para enunciar el resultado necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.21 (envolvente convexa)**.** *Sea $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$ una función continua. La envolvente convexa de f con respecto de la variable ξ, que será denotada por f^{**}, es la mayor función convexa respecto a la variable ξ que es menor que f. Es decir, f^{**} es una función convexa respecto a ξ que satisface*

$$g(x, u, \xi) \leq f^{**}(x, u, \xi) \leq f(x, u, \xi), \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{3.21}$$

para toda g función convexa respecto de la variable ξ con $g \leq f$.

Ahora vemos el teorema.

Teorema 3.22. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de Lipschitz, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ con $I(u_0) < \infty$ y f^{**} la envolvente convexa de f. Sea $p > 1$ y α_1 tal que*

$$0 \leq f(x, u, \xi) \leq \alpha_1 (1 + |u|^p + |\xi|^p), \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

y consideramos el problema

$$(\overline{P}) \quad \text{ínf} \left\{ \overline{I}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \, : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} =: \overline{m}. \tag{3.22}$$

Entonces

1. *$\overline{m} = m$.*

2. *Para cada* $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ *existe un* $u_\nu \in u_0 + W^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p} \quad y \quad I(u_\nu) \longrightarrow \overline{I}(u) \text{ cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

Si además existen $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_2 |\xi|^p + \alpha_3, \ \forall\, (x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

entonces $(\overline{P})$ *tiene al menos una solución* $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$.

La demostración no la vemos aquí ya que se escaparía del objetivo de este trabajo pero se puede consultar en las referencias bibliográficas [6] (Teorema 10.3.7.) y en [7] (Corolario 3.13).

En las condiciones del Teorema 3.22, se dice que el problema $(\overline{P})$ es una relajación del problema (P). Las soluciones $\overline{u}$ de $(\overline{P})$ se suelen referir como soluciones generalizadas de (P). Observar que si $\overline{u}$ es una solución generalizada, entonces

$$\overline{I}(\overline{u}) = \inf\{\, I(u) \ : \ u \in u_0 + W^{1,p}(\Omega)\}.$$

Ejemplo 3.23 (Bolza (ver Ejemplo 3.7)). *Consideremos* $n = 1$, f *dada por*

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = (\xi^2 - 1) + u^4$$

y el problema

$$(P) \qquad \inf\left\{ I(u) = \int_0^1 f(u(x),u'(x))\,dx \ : u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\} = m. \tag{3.23}$$

Hemos visto que $m = 0$ *y que* (P) *no tiene solución.*

Apliquemos el Teorema 3.22. La envolvente convexa de f *viene dada por*

$$f^{**} = \begin{cases} f(u,\xi) & si\ |\xi| \geq 1 \\ u^4 & si\ |\xi| < 1. \end{cases}$$

Consideramos el problema relajado

$$(\overline{P}) \qquad \inf\left\{ \overline{I}(u) = \int_0^1 f^{**}(u(x),u'(x))\,dx \ : u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\} =: \overline{m}. \tag{3.24}$$

Sabemos que $\overline{u} = 0$ *y por tanto* $\overline{u} \equiv 0$ *es solución de* $(\overline{P})$. *Además, la sucesión* $u_\nu \in W_0^{1,4}$ *(para* $\nu \geq 2$ *entero) dada por*

$$u_\nu(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{\nu} & si\ x \in [\frac{2k}{2\nu}, \frac{2k+1}{2\nu}] \\ -x + \frac{k+1}{\nu} & si\ x \in (\frac{2k+1}{2\nu}, \frac{2k+2}{2\nu}], \end{cases}$$

nos permite "recuperar" $\overline{u}$, *es decir, satisface*

$$u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \text{ en } W^{1,4} \quad y \ I(u_\nu) \longrightarrow \overline{I}(\overline{u}) = 0 \text{ cuando } \nu \longrightarrow \infty.$$

Capítulo 4

Resultados de Regularidad

4.1. Introducción

El objetivo de esta memoria es el estudio de un problema modelo del Cálculo de Variaciones que se formula como

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \;:\; u \in X \right\}.$$

En el planteamiento inicial que hicimos en el Capítulo 2 buscábamos soluciones $\overline{u}$ regulares, soluciones $\overline{u}$ regulares, es decir, tomábamos $X = \mathcal{C}^1$. Sin embargo, al tratar de probar resultados de existencia, para tener espacios funcionales con mejores propiedades, perseguimos nuestras soluciones en $X = W^{1,p}$. La cuestión que surge de manera natural es, ¿cuándo las soluciones $\overline{u}$, que en un principio están en $W^{1,p}$, pertenecen a $\mathcal{C}^1$? Este capítulo pretende dar una primera respuesta simple a esta pregunta.

En la Sección 4.2 consideramos el caso unidimensional. Con ayuda de la formulación Hamiltoniana probamos , bajo ciertas condiciones de convexidad y crecimiento, que si f es de $\mathcal{C}^k$, entonces $\overline{u}$ también es de $\mathcal{C}^k$, para todo $k \geq 2$. El caso de dimensión arbitraria es tratado en la Sección 4.3, donde se muestra un teorema cuya demostración, que no damos, descansa en resultados de regularidad de ecuaciones lineales elípticas en derivadas parciales con coeficientes medibles.

4.2. Regularidad de las soluciones en el caso unidimensional

En esta sección consideramos el problema unidimendionsal

$$(P) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \;:\; u \in X \right\} =: m,$$

donde $X = \{u \in W^{1,p}(a,b) : \; u(a) = \alpha, \; u(b) = \beta\}$ y $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \; f = f(x, u, \xi)$.

En el Teorema 3.1 probamos que bajo ciertas hipótesis de regularidad para f, existe un mínimo $\overline{u} \in W^{1,p}$ para (P). Más concretamente, hemos probado que si f satisface

$(H1)$ $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para cada $(x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}$.

$(H2)$ Existen $p > q \geq 1$ y $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_2|u|^q + \alpha_3,\ \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

entonces existe una solución $\overline{u} \in X$ para (P).

Si además $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y se tiene

(H3') Para cada $R > 0$ existe $\alpha_4 = \alpha_4(R)$ tal que

$$|f_u(x,u,\xi)|, |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \alpha_4(1 + |\xi|^p),\ \forall\,(x,u,\xi) \in [a,b] \times [-R,R] \times \mathbb{R},$$

entonces toda solución $\overline{u} \in X$ satisface la versión débil de la ecuación de Euler-Lagrange dada por

$$(E_w) \quad \int_a^b [f_u(x,\overline{u},\overline{u}')v + f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')v']\,dx = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b). \tag{4.1}$$

Aquí vamos a prestarle más atención a la regularidad de $\overline{u}$. Queremos ver bajo qué hipótesis más fuertes sobre f podemos asegurar que esa solución $\overline{u}$, que en un principio es débil, va a ser una función regular. Probaremos que si $f \in \mathcal{C}^k$ para algún $k \geq 2$, entonces $\overline{u} \in \mathcal{C}^k$ también. En particular, que si $f \in \mathcal{C}^\infty$, entonces $u \in \mathcal{C}^\infty$. Antes de dar el teorema principal, vamos a ver un lema técnico que nos será de utilidad.

Lema 4.1. *Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que satisface (H1), (H2) y (H3'). Entonces todo mínimo $\overline{u} \in W^{1,p}(a,b)$ de (P) está en $W^{1,\infty}(a,b)$ y satisface la ecuación de Euler-Lagrange en casi todo (a,b), es decir, se tiene*

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')] = f_u(x,\overline{u},\overline{u}') \ \ \textit{pct}\ x \in (a,b). \tag{4.2}$$

Demostración. Gracias al Teorema 3.8 (y las observaciones posteriores) sabemos que una solución $\overline{u}$ de (P) satisface

$$(E_w) \quad \int_a^b [f_u(x,\overline{u},\overline{u}')v + f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')v']\,dx = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b). \tag{4.3}$$

A partir de aquí dividimos la prueba en 2 pasos.

<u>Paso 1:</u> Definimos $\varphi(x) = f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')$ y $\psi(x) = f_u(x,\overline{u},\overline{u}')$. Observamos que $\varphi \in W^{1,1}(a,b)$ y que $\varphi'(x) = \psi(x)$ pct $x \in (a,b)$, lo que significa que

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')] = f_u(x,\overline{u},\overline{u}') \ \ \text{pct}\ x \in (a,b). \tag{4.4}$$

En efecto, como $\overline{u} \in W^{1,p}(a,b)$, y entonces $\overline{u} \in L^\infty(a,b)$, deducimos de (H3') que $\psi \in L^1(a,b)$. Además por (4.3) tenemos que

$$\int_a^b \psi(x)v(x) \ = -\int_a^b \varphi(x)v'(x)\,dx, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b). \tag{4.5}$$

Como $\varphi \in L^1(a,b)$ (por (H3')), se deduce por la definición de derivadas débiles que precisamente $\varphi \in W^{1,1}(a,b)$ y $\varphi' = \psi$ cpd.

Paso 2: Como $\varphi \in W^{1,1}(a,b)$ tenemos que $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b])$, que significa que existe una constante $\alpha_5 > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| = |f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')| \leq \alpha_5, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.6}$$

Como $\overline{u}$ es acotada, digamos $|\overline{u}(x)| \leq R$ para cada $x \in [a,b]$, tenemos de (H1) que

$$f(x,u,0) \geq f(x,u,\xi) - \xi f_\xi(x,u,\xi), \quad \forall\,(x,u,\xi) \in [a,b] \times [-R,R] \times \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Combinando esta desigualdad con (H2) podemos encontrar una constante $\alpha_6 \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $(x,u,\xi) \in [a,b] \times [-R,R] \times \mathbb{R}$,

$$\xi f_\xi(x,u,\xi) \geq f(x,u,\xi) - f(x,u,0) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_6. \tag{4.8}$$

Usando (4.3) y esta última desigualdad llegamos a

$$\alpha_1 |\overline{u}'|^p + \alpha_6 \leq \overline{u}' f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \leq |\overline{u}'||f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')| \leq \alpha_5 |\overline{u}'| \ \text{ pct } x \in (a,b) \tag{4.9}$$

por lo que, gracias a $p > 1$, deducimos $|\overline{u}'|$ es uniformemente acotada. Esto concluye la demostración del lema. □

Se tiene el siguiente teorema de regularidad para soluciones de (P).

Teorema 4.2. *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que satisface (H2),(H3') y*

$$(H1') \ f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0, \quad \forall\,(x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{4.10}$$

Entonces todo mínimo de (P) está en $\mathcal{C}^\infty([a,b])$. Más generalmente, si $f \in \mathcal{C}^k([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y satisface (H1), (H2) y (H3), entonces todo mínimo de (P) está en $\mathcal{C}^k([a,b])$.

Demostración. Realizamos la prueba en dos pasos.

Paso 1: Por el Lema 4.1 sabemos que la aplicación $x \mapsto \varphi(x) = f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))$ está en $W^{1,1}(a,b)$, luego es continua. Haciendo uso del Lema 2.22 sabemos que si

$$H(x,u,v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{ v\xi - f(x,u,\xi) \},$$

entonces $H \in \mathcal{C}^\infty([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y, para cada $x \in [a,b]$, tenemos que

$$\varphi(x) = f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \iff \overline{u}'(x) = H_v(x, \overline{u}(x), \varphi(x)).$$

Como $H_v, \overline{u}$ y φ son continuas, concluimos que $\overline{u}'$ también es continua y por tanto $\overline{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Luego la aplicación $x \mapsto f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))$ es continua. Combinando esto con el hecho de

$$\frac{d}{dx}[\varphi(x)] = f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \ \text{ pct } x \in (a,b),$$

(o equivalentemente, según el Lema 2.22, $\varphi'(x) = -H_u(x, \overline{u}, \varphi)$ se llega a que $\varphi' \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

Paso 2: Volvemos al sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \varphi'(x) & = -H_u(x, \overline{u}(x), \varphi(x)) \\ \overline{u}'(x) & = H_v(x, \overline{u}(x), \varphi(x)). \end{cases}$$

Como $H \in \mathcal{C}^\infty$ y $\overline{u}, \varphi \in \mathcal{C}^1$ deducimos del sistema que de hecho $\overline{u}, \varphi \in \mathcal{C}^2$. Volviendo al sitema de nuevo vemos que entonces $\overline{u}, \varphi \in \mathcal{C}^3$. Y así conseguimos finalmente que $\overline{u} \in \mathcal{C}^\infty$. □

4.3. Un resultado en el caso general

En esta sección volvemos a la versión n-dimensional de nuestro problema, es decir

$$(P) \qquad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \;:\; u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\} =: m. \qquad (4.11)$$

Demostrar en este marco un resultado análogo al probado en la Sección 4.2 para el caso $n = 1$ no es tarea fácil y escapa a los objetivos de esta memoria. Aquí nos limitaremos a enunciar, sin demostración, un resultado general de regularidad.

Teorema 4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \xi)$. Sea $f_x = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$, $f_\xi = (f_{\xi_1}, \ldots, f_{\xi_n})$. Supongamos que f satisface, para cada $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$(C) \begin{cases} \alpha_1 V^p - \alpha_2 \leq f(x, u, \xi) \leq \alpha_3 V^p \\ |f_\xi|, |f_{x\xi}|, |f_u|, |f_{xu}| \leq \alpha_3 V^{p-1}, \; |f_{u\xi}|, |f_{uu}| \leq \alpha_3 V^{p-2} \\ \alpha_4 V^{p-2}|\lambda|^2 \leq \displaystyle\sum_{i,j=1}^n f_{\xi_i, \xi_j}(x, u, \xi)\lambda_i\lambda_j \leq \alpha_5 V^{p-2}|\lambda|^2 \end{cases}$$

donde $p \geq 2$, $V^2 = 1 + u^2 + |\xi|^2$ y $\alpha_i > 0$, $\forall 1, \ldots, 5$, constantes.

Entonces cualquier mínimo del problema (P) está en $\mathcal{C}^\infty(D)$ para cada $D \subset \overline{D} \subset \Omega$.

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [8] (Teorema 1.10.4). En ella, se transforma la ecuación de Euler-Lagrange en una ecuación elíptica lineal con coeficientes medibles y acotados, a la que se le aplica el siguiente resultado de regularidad para sus soluciones.

Teorema 4.4. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $v \in W^{1,2}(\Omega)$ una solución de*

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega [a_{ij}(x)\, v_{x_i}(x)\, \varphi_{x_j}(x)]\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

donde $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, siendo γ una constante positiva, cumplen

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \gamma|\lambda|^2 \;\; \textit{cpd en } \Omega \textit{ y } \forall \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces existe $0 < \alpha < 1$ tal que $v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \quad \forall D \subset \overline{D} \subset \Omega$.

Una demostración de este resultado puede consultarse en [9].

Entre los dos últimos teoremas existe una relación que podemos ver por ejemplo en el caso de la función $f = f(x, u, \xi) = f(\xi)$. Los coeficientes $a_{ij}(x)$ y la función v del Teorema 4.4 son, respectivamente, $f_{\xi_i,\xi_j}(\nabla u(x))$ y u_{x_i} en el Teorema 4.3. Estos resultados no se pueden generalizar para el caso vectorial $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con $N, n > 1$ enteros.

Bibliografía

[1] Bernard Dacorogna, *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, 2004.

[2] Jürgen Jost & Xianqing Jost, *Calculus of Variations.* Cambridge University Press, 1998.

[3] Brézis H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] Dacorogna B., *Direct methods in the calculus of variations.* Springer, Berlin, 1989.

[5] Buttazzo, Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *One-dimensional variational problems: an introduction.* Clarendon Press, 1998.

[6] Ekeland I. and Témam R, *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, Paris, 1974.

[7] Marcellini P. and Sbordone C., *Semicontinuity problems in the calculus of variations, Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications 4.* 1980, 241-257.

[8] Morrey C.B., *Multiple integrals in the calculus of variations.* Springer, Berlin, 1966.

[9] Giaquinta M., *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Princeton University Press, Princeton, 1983.