



TESIS

MODELO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL DE SÓLIDOS TRANSVERSALMENTE ISÓTROPOS Y PIEZOELÉCTRICOS FISURADOS

presentada por: Mario Solís Muñiz
Ingeniero Industrial

dirigida por: José Domínguez Abascal
Dr. Ingeniero Industrial

para la obtención del título de
Doctor por la Universidad de Sevilla

Departamento de Mecánica de Medios Continuos,
Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno
Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Sevilla, marzo de 2007

*A los que piensan,
A los que sienten,
A los que aman,
A los que hacen crítica
y autocrítica,
A los que Viven su Vida
y se apasionan con la de los demás.
A los que enseñan
a hacer todo eso a la vez:
A mis Padres.*

Agradecimientos

Una tesis es un largo trabajo en el que de una u otra manera intervienen un número de personas difícil de determinar. La tesis no es solo la presentación del trabajo de investigación realizado durante varios años. Están los cursos de doctorado, la formación como investigador, la asistencia a congresos, la elaboración de artículos, la programación informática, los 'atascos',..., pero además hay muchos otros factores adicionales que condicionan su desarrollo: los compañeros de trabajo, el mundo académico, la docencia, otros proyectos profesionales, la familia, la vida social, los compromisos personales....

Los que de una u otra manera han contribuido durante estos años a mi formación como investigador, profesor o simplemente como Individuo, han influido de una u otra manera en cómo se ha desarrollado esta tesis, cómo se ha abordado y enfocado, y la valoración personal que a uno le merece. Todo esto se refleja irremediamente en el trabajo que aquí se presenta. No quiero olvidarme de nadie, así que a todos los que se sientan identificados en estas líneas, mi más profundo agradecimiento.

No obstante, deseo que aparezcan en esta sección los nombres de algunas personas que han marcado especialmente el desarrollo de esta tesis y a los que quiero transmitir mi gratitud.

En primer lugar, es un privilegio contar con el profesor José Domínguez como director de tesis. A él le debo el haberme dado el aliento para llevar a cabo mi andadura como doctorando, pero además le debo el convertirse en un referente en muchos aspectos. Gracias por todo lo aprendido.

Debo agradecer también a Pilar Ariza el ser la autora de todo el trabajo previo del que parte esta tesis y que ha sido aprovechado en su desarrollo: códigos, mallas, apuntes, técnicas, consejos...y su disposición.

Finalmente, para la última parte de la tesis dedicada a los materiales piezoeléctricos he contado con la colaboración de José Antonio Sanz. Su ayuda ha sido fundamental en el desarrollo de la formulación.

Y a Bea, por estar siempre ahí, siempre.

Resumen

En esta tesis se aborda la resolución de problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura en materiales transversalmente isótropos y piezoeléctricos. Para ello se ha desarrollado e implementado una formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno.

Esta formulación consiste en el empleo de la Ecuación Integral de Contorno en Desplazamientos (formulación clásica del método) y en Tracciones (formulación hipersingular). De esta forma tan solo es necesario discretizar la superficie de la grieta y el contorno externo, prescindiendo de la técnica de subregiones. La discretización se realiza con elementos cuadráticos de 9 nodos (cuadriláteros) o de 6 nodos (triangulares), siendo del tipo a un cuarto los situados en el frente de grieta. A partir de los desplazamientos de apertura de grieta de los nodos a un cuarto se obtienen directamente los Factores de Intensidad de Tensiones, que caracterizan la solución del problema.

La ecuación en Tracciones plantea una serie de dificultades numéricas en su implementación, que son resueltas aplicando una serie de técnicas propuestas en trabajos anteriores para materiales isótropos y transversalmente isótropos (regularización analítica de términos fuertemente singulares e hipersingulares y técnica de multicolocación). En esta tesis se presentan además algunos avances desde un punto de vista computacional, que permiten disponer finalmente de una herramienta numérica más robusta, precisa y fiable.

La formulación es aplicada a la resolución de problemas de grietas contenidas en materiales transversalmente isótropos. En este caso, además de considerar situaciones con carga estática, la formulación se extiende también al caso dinámico armónico.

Finalmente, se desarrolla por primera vez una formulación de este tipo para materiales piezoeléctricos, análoga a la correspondiente al caso elástico. A partir de la solución fundamental en desplazamientos, se han obtenido sus primeras y segundas derivadas, que han sido convenientemente combinadas para obtener los términos en tracciones y los núcleos de la ecuación hipersingular. Estos términos han sido regularizados analíticamente mediante un procedimiento similar al caso no piezoeléctrico. Con esta nueva formulación se analizan una serie de problemas estáticos de sólidos piezoeléctricos con grietas en su interior.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Organización del documento. Objetivos de la tesis	14
2. Formulación mixta del MEC para problemas 3D de Mecánica de la Fractura Elástica y Lineal	17
2.1. Ecuación Integral de Contorno en Desplazamientos	18
2.2. Ecuación Integral de Contorno en Tracciones	23
2.2.1. Método de Colocación Múltiple (MCM)	25
2.2.2. Regularización	26
2.3. Implementación de la EIC en tracciones	28
2.4. Elementos empleados para la discretización.	29
2.5. Mecánica de la Fractura: campo asintótico de desplazamientos y tensiones	30
2.5.1. Evaluación de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT)	35
2.6. Construcción y organización del sistema de ecuaciones	37
3. Avances en el tratamiento numérico de la EIC en tracciones	45
3.1. Introducción	45
3.2. Evaluación de integrales cuasi-singulares	46
3.3. Número de puntos de integración y posición de puntos de colocación	53
3.4. Análisis sobre ejemplos numéricos	62
3.4.1. Grieta elíptica en medio infinito isótropo	62
3.4.2. Barra prismática isótropa con grieta de borde sometida a tracción uniforme	64

4. Materiales transversalmente isótropos. Problemas estáticos y dinámicos	69
4.1. Introducción	69
4.2. Comportamiento de materiales transversalmente isótropos	70
4.3. Formulación	72
4.3.1. Generación de base de datos para la evaluación de parte dinámica de la solución fundamental	79
4.4. Obtención de Factores de Intensidad de Tensiones (FIT)	85
4.5. Análisis de un problema de referencia y ajuste de parámetros de la formulación . .	90
4.6. Resultados numéricos	97
4.6.1. Propiedades de los materiales	97
4.6.2. Problemas estáticos	98
4.6.2.1. Prisma con grieta recta	98
4.6.2.1.1. Prisma con grieta recta de borde.	101
4.6.2.1.2. Prisma con grieta recta central.	104
4.6.2.1.3. Doble grieta recta de borde.	107
4.6.2.1.4. Conclusiones.	111
4.6.2.2. Prisma con grieta de esquina en forma de cuarto de círculo	112
4.6.3. Problemas dinámicos	114
4.6.3.1. Grieta circular en medio infinito bajo un frente de ondas incidente normal a su superficie	116
4.6.3.2. Prisma con grieta circular en su interior	118
4.6.3.3. Placa con grieta elíptica centrada en su interior	124
4.6.3.4. Prisma con grieta elíptica no centrada en su interior	125
5. Materiales piezoeléctricos	131
5.1. Introducción	131
5.2. El problema piezoeléctrico	132
5.2.1. Ecuaciones que gobiernan el problema	132
5.2.2. Condiciones de contorno	136
5.3. Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos	147
5.4. Formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos	150
5.5. Ejemplos numéricos	154

5.5.1. Generalidades	154
5.5.2. Grieta circular en medio infinito bajo carga mecánica y eléctrica	155
5.5.3. Grieta elíptica en medio infinito sometida a carga eléctrica o mecánica	160
5.5.4. Grieta circular en cilindro	164
5.5.5. Prisma con grieta recta	167
5.5.5.1. Grieta recta central	168
5.5.5.2. Doble grieta recta de borde	174
5.5.5.3. Grieta de borde	175
5.5.5.4. Conclusiones	179
5.5.6. Barra prismática con grieta de esquina en forma de un cuarto de círculo	181
6. Conclusiones y desarrollos futuros	185
6.1. Desarrollos futuros	187
A. Solución fundamental de Dunn y Wienecke. Expresiones originales y derivadas	191
A.1. Primeras derivadas de la solución fundamental en desplazamientos	194
A.2. Segundas derivadas de la solución fundamental en desplazamientos	195
B. Expresiones de los términos I_{MJ} y J_{MhJ}	199
B.1. Términos I_{MJ}	199
B.2. Términos J_{MhJ}	201
Referencias	205

Capítulo 1

Introducción

*“La ignorancia afirma o niega rotundamente,
la ciencia duda.”*

F.M. Voltaire (1694–1778)

1.1. Antecedentes

La preocupación del hombre por las propiedades resistentes de materiales, utensilios y construcciones, así como su integridad estructural, data de la más remota antigüedad. Aunque pueda parecer sorprendente, resulta habitual, sobre todo en lo referente a las técnicas desarrolladas para satisfacer las necesidades básicas del hombre, que este conocimiento técnico se desarrolle muy anteriormente a los desarrollos teóricos y matemáticos que justifiquen desde un punto de vista científico la validez de la técnica ya establecida.

La formulación matemática de la Mecánica de Sólidos no tiene lugar hasta el siglo XIX, donde caben destacar ilustres nombres como los de Cauchy, Navier, Poisson o Green. Es entonces cuando aparecen los conceptos de tensión, deformación, la ley de comportamiento en forma de ley de Hooke generalizada, y del comportamiento elástico lineal se pasará posteriormente a analizar el comportamiento no lineal y la plasticidad. Se puede decir que el estudio del proceso resistente del material se cierra con la Mecánica de la Fractura, que trata de analizar el comportamiento del material cuando existen grietas, discontinuidades o defectos en su interior, intentando predecir su capacidad resistente en función de la geometría o estado de cargas, analizando la tendencia a

la propagación de la grieta y realizando predicciones sobre la vida útil del material. La Mecánica de la Fractura comienza a desarrollarse fundamentalmente a partir del trabajo de Griffith (años 20) y posteriormente los de Irwin, Westergaard, Dugdale, Paris o Sih, de forma que se establece como disciplina de gran interés tecnológico desde mediados del siglo XX.

Es evidente sin embargo que hasta entonces el hombre, sin disponer de conocimientos teóricos, había sido capaz de progresar enormemente en la fabricación de utensilios, maquinaria, edificación, etc., gracias al conocimiento empírico adquirido y perfeccionado a partir de la intuición, algunas teorías primitivas pero admirables (Vitrubio, Galileo, Hooke) y, como no, mediante el método de prueba y error. No se disponía de ningún tipo de conocimiento sobre Mecánica de la Fractura, aunque cualquier tipo de proceso, herramienta, elemento estructural, etc. estuviese condicionado por el posible fallo de los materiales, y se encaminasen los esfuerzos a evitar de una u otra manera ese fallo, en función además de la gravedad de sus consecuencias y la probabilidad de ocurrir. No es necesario remontarse a la antigüedad para encontrar ejemplos que ilustren este tipo de situación, ya que incluso disponiendo de conocimiento científico, la técnica puede ignorar a éste y seguir su camino de forma más o menos independiente. Así por ejemplo, Paris (1998) admite haber desconfiado a lo largo de su vida del nivel de seguridad ofrecido por los aviones comerciales, precisamente por haber sido uno de los autores pioneros y más destacados en el comportamiento a fatiga de los materiales y conocedor por tanto de los posibles riesgos existentes en el funcionamiento de estos aparatos, que seguían siendo diseñados ignorando los conocimientos sobre fatiga de que ya disponía la comunidad científica.

Aunque parece claro por tanto que el desarrollo tecnológico no requiere necesariamente de un conocimiento científico previo, resulta también evidente el hecho de la importancia que tiene disponer de dicho conocimiento científico para que la tecnología progrese a mayor velocidad, con mayor firmeza, con más seguridad y de forma más rentable. En ese sentido, la Mecánica de la Fractura sigue jugando hoy día un papel fundamental en el diseño y análisis del comportamiento de nuevos materiales, métodos de unión, procesos constructivos, nuevos dispositivos, etc. Por este motivo, hay un gran número de investigadores que participan en proyectos financiados por entidades públicas o privadas con el objetivo de profundizar en el comportamiento de los materiales con grietas en su interior.

Los primeros trabajos teóricos sobre Mecánica de la Fractura fueron encaminados al estudio de la modificación que puede producir una grieta en el estado tensional del material. Bajo la hipótesis de comportamiento elástico y lineal, se encontró que el campo de tensiones en las pro-

ximidades del frente de grieta presenta una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$, siendo r la distancia al vértice de la grieta. Este comportamiento singular, junto con la definición del campo de tensiones en dicha zona en función de unos factores conocidos como Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) asociados a tres modos desacoplados de apertura de grieta (modos I, II y III) son los resultados fundamentales de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Este comportamiento resulta del todo inadmisibles desde un punto de vista físico, debido al carácter singular del campo de tensiones, que llevaría inmediatamente al agotamiento de la capacidad resistente del material, la propagación de la grieta y el fallo definitivo. En la realidad, el material siempre exhibirá cierto comportamiento plástico, por lo que existirá una zona plástica alrededor de frente de grieta que absorbe la energía necesaria para mantener el estado tensional en unos niveles acotados y admisibles para el material. Bajo ciertos niveles de carga, la energía se invertirá en aumentar la superficie de la grieta y ésta se propagará, pudiendo ser esta propagación estable o inestable.

En función del tamaño de la zona plástica alrededor del frente de grieta, serán más o menos aproximadas las predicciones que se puedan realizar bajo el punto de vista de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. En materiales que exhiben poca deformación plástica y comportamiento frágil, los resultados obtenidos bajo la hipótesis de comportamiento Elástico Lineal pueden ser lo suficientemente aproximadas desde un punto de vista práctico. Desde este enfoque, las investigaciones suelen ir encaminadas a caracterizar el estado tensional mediante la obtención de los FIT o la tasa de liberación de energía asociada al crecimiento de la grieta, para posteriormente comparar estos parámetros con otros asociados a una propiedad conocida como Tenacidad a la Fractura y así poder predecir la tendencia a la propagación de la grieta. La Tenacidad a la Fractura es una propiedad que depende del material, pero también de la geometría y de las condiciones de contorno, y para su evaluación resulta fundamental la experimentación.

Desde sus inicios, la Mecánica de la Fractura ha progresado significativamente gracias a las contribuciones de la comunidad investigadora. De forma simplificada se puede decir que hay dos aspectos o líneas de trabajo fundamentales en los que se pueden dividir los avances realizados. Por un lado, se ha avanzado en el conocimiento sobre el comportamiento del material en presencia de una grieta, considerando adecuadamente la zona plástica, estableciendo criterios de propagación, considerando efectos dinámicos y el comportamiento a fatiga, caracterizando el comportamiento de distintos materiales mediante la obtención de parámetros asociados a la Tenacidad a la Fractura, normalizando los procedimientos de caracterización, etc.

Por otro lado, se ha extendido la aplicación de la Mecánica de la Fractura a materiales con

un comportamiento cada vez más complejo y que resultan de interés para las aplicaciones tecnológicas más avanzadas. Así, se estudia el comportamiento en presencia de grietas de materiales anisótropos, materiales no homogéneos, materiales compuestos, materiales o situaciones en las que se acoplan el comportamiento elástico con otros fenómenos de naturaleza térmica, eléctrica o magnética, etc. El trabajo desarrollado en esta tesis se enmarca fundamentalmente dentro de esta línea de progreso en el conocimiento acerca del comportamiento de nuevos materiales, presentándose una serie de herramientas y resultados numéricos para el análisis del comportamiento de materiales transversalmente isótropos y piezoeléctricos.

Para abordar problemas de Mecánica de la Fractura se pueden emplear métodos analíticos, numéricos o experimentales. La principal dificultad de este tipo de problemas radica en el hecho de existir elevados gradientes de tensión en torno a la grieta, que hace necesario desarrollar técnicas específicas según la metodología empleada. Como en cualquier otra rama de la ingeniería, cualquiera de estos métodos presenta una serie de ventajas, inconvenientes y limitaciones, y los resultados que ofrecen habrán de ser siempre valorados en su justa medida.

Los métodos analíticos han permitido resolver de manera exacta (según las hipótesis de cálculo) algunos problemas concretos y han servido tradicionalmente para clarificar aspectos relativos al comportamiento del material en presencia de grietas. Sin embargo, solo se pueden obtener soluciones analíticas para problemas relativamente sencillos y no se puede plantear una metodología analítica que permita abordar con carácter general cualquier tipo de problema.

Los siempre necesarios métodos experimentales merecen una valoración similar a los métodos analíticos en cuanto a sus aportaciones y limitaciones. Estos métodos permiten tan solo la obtención de resultados sobre algunos parámetros y situaciones concretas, pero presentan la gran virtud de ofrecer resultados realistas, no sujetos a hipótesis o simplificaciones de cálculo. La realización de ensayos experimentales resulta fundamental para la caracterización del materiales, validación de métodos o hipótesis de cálculo y la obtención de resultados previos a la aplicación práctica.

Finalmente, los métodos numéricos constituyen hoy día la herramienta más empleada para el estudio de problemas de Mecánica de la Fractura, por su versatilidad, flexibilidad y economía, y debido también al acelerado crecimiento de la capacidad de cálculo experimentado gracias al imparable desarrollo de la informática en los últimos años. Sin embargo, los métodos numéricos conllevan una limitación inherente y frecuentemente olvidada, y es que constituyen tan solo una forma de obtener una solución aproximada para un modelo de cálculo simplificado mediante una

serie de hipótesis de comportamiento.

Entre los métodos numéricos caben destacar los de Diferencias Finitas, el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Sin lugar a dudas, el método más versátil y más extendido en la Mecánica de los Medios Continuos es el de los elementos finitos. El MEF es un método computacionalmente muy eficiente que permite obtener la solución sobre todo el dominio del problema. Existen un gran número de programas comerciales basados en este método y que permiten abordar problemas de diversas disciplinas, incluida la Mecánica de la Fractura.

Frente al MEF, el Método de los Elementos de Contorno ofrece una serie de ventajas para algunos problemas concretos. Esto hace que no esté tan extendido su empleo a un nivel comercial, pero se trata sin embargo de un método ampliamente difundido en diversos campos de investigación, como es el caso de la Mecánica de la Fractura. El MEC es un método que permite reducir el problema al contorno, es decir, el conocimiento de la solución en el contorno permite conocer la solución en cualquier punto del dominio. Este hecho ofrece automáticamente una serie de ventajas. En primer lugar, se reduce en un orden la dimensión del problema, ya que en un problema 2D habrá que hallar la solución tan solo sobre las líneas que delimitan el contorno del problema, y si se trata de un problema 3D será sobre la superficie del contorno. Este hecho reduce significativamente el número de ecuaciones y de incógnitas del problema, así como el esfuerzo en la discretización e interpretación de resultados, especialmente en problemas 3D. Los aspectos fundamentales del método pueden encontrarse en los libros de Brebbia y Domínguez (1992) y Domínguez (1993).

Por otro lado, al modelar la presencia de una grieta con el MEC, no se hace necesario discretizar la parte del dominio cercana a la grieta, en la que existirán grandes gradientes de tensiones, que serán en principio difíciles de modelar matemáticamente y podrán introducir errores importantes. Tal y como se explicará con detalle en el capítulo 2 de esta tesis, esto es del todo cierto cuando se emplea la formulación hipersingular del MEC (basada en una Ecuación Integral de Contorno en Tracciones), y lo es tan solo en parte cuando se emplea la formulación clásica (basada en una Ecuación Integral de Contorno en Desplazamientos). En este segundo caso, se recurre normalmente en el MEC a la aplicación de la técnica de subregiones, consistente en dividir el dominio en dos o más subregiones por medio de una superficie que contenga a la grieta, para posteriormente resolver el problema en cada subregión imponiendo entre ellas condiciones de equilibrio y compatibilidad en la superficie que las separa. Esta técnica se simplifica en aquellos

casos en que la grieta esté contenida en un plano de simetría.

Aún cuando no se utilice la formulación hipersingular del MEC, este método es ventajoso con respecto al MEF en cuanto a la representación del campo de tensiones en las cercanías del frente de grieta. En primer lugar, tan solo es necesario discretizar una superficie adyacente a dicho frente, y no todo el dominio como ocurre en el MEF. En segundo lugar, las incógnitas en el MEC son los desplazamientos y tracciones en el contorno, pudiendo estar ambos aproximados por las mismas o por distintas funciones de forma. Esto es una gran ventaja frente al MEF, en el que las tensiones se obtienen por derivación del campo de desplazamientos obtenido como solución, con la gran imprecisión que esto puede conllevar cuando existen grandes gradientes de tensión. Como contrapartida, el MEC necesita para su implementación del conocimiento de lo que se conoce como solución fundamental, que es la solución a una carga puntual aplicada en un medio infinito. Por otro lado, plantea una serie de dificultades computacionales que hay que solventar, como son la integración de núcleos singulares ($O \sim r$), fuertemente singulares ($O \sim r^2$) e incluso hipersingulares ($O \sim r^3$) en la formulación que lleva ese nombre.

Las ventajas que ofrece el MEC hace que sea un método de reconocida eficacia y extendida aplicación para el tratamiento de problemas en los que se hace necesario modelar un medio infinito o tratar problemas con elevados gradientes en el interior del dominio. En Mecánica de la Fractura se ha aplicado con éxito a la resolución de problemas en 2D y 3D en materiales isótropos y anisótropos, tanto en casos estáticos como dinámicos en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Su aplicación se restringe normalmente al enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, ya que la consideración en torno al frente de grieta de una zona plástica, cuyo tamaño es a priori desconocido, hace que el método pierda eficiencia. Por tanto, su aplicación será más valiosa en materiales que exhiban un comportamiento frágil.

Hace aproximadamente 15 años, la formulación hipersingular del método recibió especial atención por parte de la comunidad científica especializada en la Mecánica de la Fractura y el MEC, por lo atractivas que resultan las ventajas que ofrece. Así, han surgido diversas técnicas para tratar la integración de núcleos fuertemente singulares e hipersingulares, así como para respetar los requerimientos de continuidad en los puntos de colocación.

A modo de revisión sobre la aplicación del MEC a la Mecánica de la Fractura en medios elásticos, se pueden consultar los trabajos de Krishnasamy et al. (1992), Tanaka et al. (1994), Aliabadi (1997), Martin et al. (1998), Chen y Hong (1999) y Ariza (2002).

El empleo sobre un mismo problema de las Ecuaciones Integrales de Contorno en Desplaza-

mientos (formulación clásica) y en Tracciones (formulación hipersingular) da lugar a lo que se conoce como formulación mixta del MEC, también denominada formulación dual por algunos autores.

En esta tesis se analiza el comportamiento de materiales transversalmente isótropos y piezoeléctricos mediante una formulación mixta del MEC que sigue las pautas marcadas por el trabajo previo de Ariza (2002), abarcando además el análisis dinámico en el dominio de la frecuencia para materiales transversalmente isótropos.

El tratamiento de los núcleos fuertemente singulares e hipersingulares se realiza de la siguiente manera. En primer lugar, se realiza una elemental transformación mediante un desarrollo en serie (Guiggiani et al., 1992, Mantic, 1994), y posteriormente los términos de la ecuación resultante se regularizan analíticamente dando lugar a una serie de integrales que son a lo sumo débilmente singulares y pueden integrarse numéricamente sin dificultad. Los requerimientos de continuidad en el punto de colocación, asociados a la Ecuación Integral de Contorno (EIC) en tracciones, se consigue empleando una técnica denominada Método de Colocación Múltiple, que se basa en la idea desarrollada por Gallego y Domínguez (1996) en 2D. Todas estas transformaciones se desarrollan de forma analítica y previamente a cualquier discretización, por lo que el resultado final es una nueva expresión de la EIC en tracciones, de carácter general, que habrá que implementar en un código de elementos de contorno.

En la formulación mixta desarrollada, se combinan la formulación clásica del método con la formulación hipersingular regularizada, de forma que se aprovechan todas las ventajas que ofrece el MEC y se consigue abordar cualquier tipo de problema de grietas planas inmersas en los tipos de materiales a considerar en esta tesis, cuyas características más importantes se resumen a continuación.

Los materiales transversalmente isótropos son aquellos que presentan comportamiento isótropo en todos los planos perpendiculares a una dirección fija conocida como eje de simetría del material. Su comportamiento elástico viene definido por 5 constantes elásticas independientes (véase, por ejemplo, Christensen, 1979). Su comportamiento dinámico viene caracterizado por la existencia de tres velocidades de fase asociadas a cada dirección del espacio, y que se corresponden a ondas planas cuasi-longitudinales, cuasi-transversales y puramente transversales. Para el estudio de la propagación de ondas en estos materiales se pueden consultar los trabajos de Musgrave (1970), Payton (1983) o Sáez (1997).

Existen materiales en la naturaleza que exhiben este tipo de comportamiento y son de in-

terés en algunas aplicaciones ingenieriles, como son el hielo, algunos terrenos arcillosos o materiales cristalinos con estructura hexagonal. Pero sin duda son de mayor interés los materiales compuestos formados por fibras de gran resistencia mecánica (fibra de carbono, de vidrio, etc.) alineadas en una misma dirección y embebidas en una matriz que las mantiene unidas y que normalmente es de naturaleza polimérica (por ejemplo resina de epoxy). Desde un punto de vista macromecánico, este tipo de material compuesto o composite puede ser considerado como un material homogéneo con comportamiento transversalmente isótropo, con su eje de simetría elástica orientado según la dirección de las fibras. Las grietas contenidas en su interior se podrán considerar inmersas en un material homogéneo siempre y cuando su tamaño característico sea mucho mayor que el diámetro de las fibras. En el caso de analizar su comportamiento dinámico, se deberá cumplir además que las longitudes de onda asociadas al problema sean mucho mayores que dicho diámetro.

Estos materiales presentan un comportamiento frágil, por lo que los resultados obtenidos mediante un enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal resultarán de interés práctico. Se trata además de materiales cuyo empleo se ha extendido notablemente en los últimos 15 años, empleándose cada vez en situaciones de mayor responsabilidad. Su excelente relación resistencia-peso, la posibilidad de diseñar sus propiedades resistentes mediante el control de la dirección de las fibras y la proporción fibra-matriz, así como su capacidad para poder conformar geometrías complejas, han hecho que estos materiales resultan de gran interés en aplicaciones muy competitivas y de gran innovación tecnológica. Así por ejemplo, se emplean en materiales deportivos (tenis, esquí, vela, automovilismo, etc), construcciones náuticas y aeronáuticas, y también se emplean incluso como material de refuerzo externo en edificación. En la mayoría de estas aplicaciones los márgenes de seguridad que se manejan son muy pequeños o se trata de aplicaciones de gran responsabilidad. Esta circunstancia, unida al hecho de su comportamiento frágil, hace que sea preciso avanzar en el conocimiento acerca de cómo se comportan estos materiales cuando aparece una grieta en su interior, y así mejorar la seguridad y calidad de sus aplicaciones.

Kassir y Sih (1968) y (1975) obtuvieron las expresiones del campo de desplazamientos y tensiones en las inmediaciones del frente de grieta en un material transversalmente isótropo. Con ello demostraron que el campo de tensiones en estos materiales presenta el mismo tipo de singularidad $1/\sqrt{r}$ que en materiales isótropos, y se pueden definir el mismo tipo de Factores de Intensidad de Tensiones asociados a los distintos modos de apertura y que caracterizan el estado tensional en torno a la grieta. Así pues, el tipo de elemento a un cuarto empleado en materiales

isótropos por Martínez y Domínguez (1998) en 2D y Ariza et al. (1997) en 3D para la obtención de los FIT, también puede ser empleado en materiales transversalmente isótropos.

Existen pocos trabajos en los que se resuelvan problemas de Mecánica de la Fractura en 3D en estos materiales. En el caso estático, el caso de una grieta circular en un medio infinito fue abordado originalmente por Chen y Soni (1964) y Chen (1966), mientras que el de una grieta elíptica fue abordado por Shield (1951) y Chen (1966). Estos trabajos fueron incluso anteriores al estudio analítico de Kassir y Sih (1968) y (1975). El comportamiento de una grieta elíptica en un medio infinito fue también abordado analíticamente por Rajiyah y Atluri (1991), quienes obtuvieron una solución para estados de carga arbitrarios. Para problemas en medios finitos el autor solo conoce los resultados obtenidos por Ariza (2002) y Ariza y Domínguez (2004).

En el caso dinámico, tan solo ha sido analizado el caso de una grieta circular en un medio infinito por Tsai (1988), Tsai (1989), Kundu y Boström (1991) y Sáez y Domínguez (1999) en el dominio de la frecuencia, y por Embley y Sih (1971), Sih y Embley (1972) y Rizza y Nair (1999) en el dominio del tiempo, bajo cargas de impacto. Además del caso de una grieta circular, Ariza (2002) y Ariza y Domínguez (2004b) han obtenido también por primera vez resultados para una grieta elíptica.

En el contexto del MEC, son muy escasas las formulaciones desarrolladas para materiales no isótropos en 3D. Para problemas estáticos, Ishikawa (1990) y Sáez et al. (1997) han presentado una formulación basada en la formulación clásica del MEC. La formulación hipersingular 3D ha sido desarrollada independientemente por Pan y Yuan (2000) y Ariza (2002), empleando en ambos casos la solución fundamental de Pan y Chou (1976), aunque en el primer caso la aplicación de la formulación se limita a la resolución de problemas en medios infinitos.

Para problemas dinámicos, tan solo son conocidas la formulación clásica del MEC de Sáez y Domínguez (1999) y la formulación hipersingular de Ariza y Domínguez (2004b). En ambos casos, se utiliza la solución fundamental armónica de Wang y Achenbach (1995).

Muchos de los materiales transversalmente isótropos que se encuentran en la naturaleza son, además, piezoeléctricos (el cuarzo, la turmalina o la sal Rochelle son algunos ejemplos). Los materiales piezoeléctricos son aquellos que presentan un acoplamiento entre la deformación elástica y el campo eléctrico en su interior. Esto es debido a que son materiales de estructura cristalina en los que la distribución de cargas positivas y negativas no es simétrica, lo que equivale a la existencia de un dipolo eléctrico en cada celda de la red cristalina. Si estos dipolos se encuentran alineados, la red cristalina, y por tanto también el material, se deformarán bajo la acción

de un campo eléctrico. De forma inversa, bajo una acción mecánica, la deformación de la red cristalina conllevará la aparición de un campo eléctrico. En materiales piezoeléctricos naturales, este acoplamiento entre el fenómeno elástico y eléctrico es muy bajo. Para poder aprovechar el fenómeno piezoeléctrico para aplicaciones prácticas, es necesario que este acoplamiento sea más significativo, por lo que desde hace aproximadamente 60 años se fabrican cerámicas artificiales en las que este acoplamiento es unas 100 veces mayor que en materiales naturales. La obtención de estas propiedades pasa por un proceso de polarización en el que el material es sometido a un campo eléctrico de gran magnitud. Esto hace que el propio proceso de fabricación de los materiales piezoeléctricos comerciales sea precisamente la primera causa de existencia de grietas en su interior.

Las *piezocerámicas* artificiales de uso más extendido son de la familia de los titanatos de bario y los plomo circonato titanato (conocidos como PZT). Desde hace algunos años, se persigue obtener mejores prestaciones en algunas aplicaciones mediante la combinación de estos materiales dando lugar a *piezocompuestos*. También se están combinando con resinas poliméricas, del mismo modo que se fabrican composites, y dando lugar a lo que se suele denominar como *piezopolímeros*. Ambos tipos de materiales de materiales compuestos quedan fuera del alcance de esta tesis.

El fenómeno de la piezoelectricidad fue originalmente descubierto por Curie y Curie (1884), quienes observaron experimentalmente la aparición de cargas eléctricas sobre la superficie de algunos tipos de cristales cuando estos eran sometidos a esfuerzos mecánicos, y viceversa. Estos científicos ya propusieron incluso algunos usos prácticos de este tipo de materiales, como es su empleo para la fabricación de sensores o transductores y actuadores. Efectivamente, estos materiales son ampliamente utilizados para detectar aceleraciones, fuerzas, ondas de presión (sonidos y ultrasonidos, por ejemplo), etc., que producirán en el interior del material un campo eléctrico y una densidad de carga eléctrica sobre su superficie que podrá ser fácilmente detectada e interpretada mediante el correspondiente sistema de instrumentación y adquisición de datos. El fenómeno inverso puede servir para su empleo como actuadores: un sistema de control emitirá una señal eléctrica que servirá para excitar convenientemente al material piezoeléctrico, que se deformará y producirá el efecto mecánico deseado. Los materiales piezoeléctricos pueden formar parte también de lo que se conoce como estructuras inteligentes, en las que se pretende conseguir una adaptatividad autónoma de la estructura a sus condiciones de uso.

Se trata en definitiva de un tipo de materiales con multitud de aplicaciones prácticas, muchas de las cuales están aún en desarrollo, despertando un creciente interés entre empresas y centros

de investigación. Es deseable y necesario por tanto que, una vez más, las aportaciones realizadas desde la Mecánica de la Fractura sirvan para fomentar el desarrollo tecnológico.

Se debe tener en cuenta además que en la mayoría de casos prácticos, más que preservar la integridad estructural del material piezoeléctrico, será más importante en muchas ocasiones preservar el carácter funcional del elemento. Es decir, generalmente los materiales piezoeléctricos se emplearán en dispositivos de medición, control, etc., y no tanto como parte de elementos resistentes de una estructura. En la mayoría de los casos el interés radicará por tanto en predecir como podrá afectar la presencia de una grieta, con una determinada forma y ubicación, al funcionamiento del dispositivo piezoeléctrico en cuestión, y evaluar el riesgo de que éste quede inservible, en función de la gravedad de las consecuencias derivadas de su mal funcionamiento.

Para mejorar las prestaciones y conocer mejor el comportamiento de elementos fabricados con materiales piezoeléctricos se han llevado a cabo numerosos trabajos relacionados con la Mecánica de la Fractura desde un enfoque Elástico y Lineal, justificado por el hecho de que se trata de materiales cerámicos que exhiben un comportamiento frágil. Entre los primeros trabajos dedicados a esta materia y que han sentado las bases de este área de conocimiento se pueden destacar los de Barnett y Lothe (1975), Parton (1976), Deeg (1980), Pak (1990), Suo et al (1992) y Sosa (1992).

Los modelos matemáticos para abordar la Mecánica de la Fractura en estos materiales resultan complejos por varias razones. Por un lado, se trata de un problema en el que las variables elásticas se acoplan con otras eléctricas, a lo que se suma el inherente carácter anisótropo de estos materiales debido al desequilibrio en su estructura cristalina necesario para que exista el comportamiento piezoeléctrico. No obstante, esta anisotropía se reduce en la mayoría de los casos a un comportamiento transversalmente isótropo.

Un gran número de autores han tratado de resolver y desarrollar formulaciones matemáticas que sirvan para resolver analítica o numéricamente problemas de grietas inmersas en un medio piezoeléctrico. Así, Pak (1992) aplica un método de dislocaciones y dipolos eléctricos distribuidos; Chen et al (2000) han aplicado la teoría de potencial desarrollada por Fabrikant (1989); Lin et al (2003) utilizan la transformada de Hankel sobre ecuaciones integrales basadas en la aproximación de los campos de desplazamientos y potencial por medio de funciones de Bessel; Kuna (1998) y Shang et al (2003) han aplicado el método de los elementos finitos; y finalmente hay que destacar la extendida aplicación de distintas formulaciones del MEC, siendo una de ellas la que se presenta en esta tesis.

Es de destacar también el escaso número de trabajos dedicados a la experimentación en este

campo y publicados hasta la fecha, necesarios para arrojar luz sobre algunos aspectos asociados al comportamiento de grietas en materiales piezoeléctricos y validar los modelos numéricos desarrollados. Se pueden destacar en esta línea los artículos de Kuna (1998), Heyer et al (1998), McMeeking (1999), Shindo et al (2001) y Jelitto et al (2005).

En el contexto de los materiales piezoeléctricos, se han formulado diversas soluciones fundamentales para el caso de comportamiento anisótropo y transversalmente isótropo, tanto para problemas 2D como 3D, y para el caso estático o dinámico. Una revisión de los trabajos realizados en esta línea puede encontrarse en los artículos de Ding et al. (2004) y García-Sánchez et al. (2005). Resulta llamativo que el número de artículos dedicados a la obtención de expresiones para distintas soluciones fundamentales es superior al dedicado a la implementación en un código de elementos de contorno y obtención de resultados sobre problemas concretos.

Para el caso 3D estático que se considera en esta tesis, la solución fundamental propuesta por Deeg (1980) es probablemente la más conocida, mientras que la obtenida por Dunn y Wienecke (1996) sea posiblemente la más sencilla. La solución fundamental de Deeg es más general en el sentido de que es válida para materiales anisótropos mientras que la de Dunn y Wienecke se limita al caso transversalmente isótropo. Sin embargo, esta limitación no resulta demasiado restrictiva para su utilización dado que la mayoría de cerámicas piezoeléctricas artificiales presentan este tipo de comportamiento, que es el considerado por la mayoría de autores, especialmente en 3D.

Además, la solución fundamental de Deeg presenta un gran inconveniente desde un punto de vista numérico y computacional, y es que no está expresada en forma explícita, sino que queda en función de una integral. Esto obliga a evaluar esta integral para cada punto de integración, lo cual es muy costoso computacionalmente, o bien optar por la generación de una base de datos en la cual después habrá que interpolar para cada punto de integración (Sanz et al, 2005). Esta situación es similar a la planteada en esta tesis para el caso dinámico transversalmente isótropo, que resulta mucho más complicada por existir un integrando de carácter oscilatorio en el que aparece el vector posición del punto de observación.

Por el contrario, la solución de Dunn y Wienecke presenta una forma explícita que facilita su tratamiento numérico. La obtención de esta solución fundamental se realiza mediante un proceso análogo al utilizado por Pan y Chou (1976) para medios transversalmente isótropos. Este proceso consiste en la representación de los desplazamientos y potencial eléctrico en función de un potencial, lo que da lugar finalmente a la obtención de una ecuación armónica cuya resolución permite obtener la solución fundamental buscada. Las expresiones obtenidas por Dunn y

Wienecke presentan finalmente una forma compacta y muy similar a la solución de Pan y Chou, aunque naturalmente algo más compleja.

La solución fundamental de Deeg ha sido empleada, entre otros, por Hill y Farris (1998), aunque estos autores se limitan a considerar un medio piezoeléctrico sin grietas en su interior, y Sanz et al (2005), que desarrollan una formulación clásica y general del MEC en Mecánica de la Fractura.

En general, existen pocas formulaciones matemáticas en medios piezoeléctricos en 3D, y gran parte de ellas se encuentran basadas en el MEC, aunque la mayoría no ofrecen un método simple y robusto que sirva para afrontar con generalidad problemas de grietas contenidas en medios piezoeléctricos. Chen y Lin (1995) presentaron una compleja y limitada formulación del MEC; Zhao et al (1997) desarrollaron una solución fundamental para una discontinuidad unidad en desplazamientos y potencial eléctrico que después emplearon para abordar el problema de una grieta plana inmersa en un medio infinito (Zhao et al, 1997b); Qin y Noda (2004) se limitan a presentar una formulación basada en ecuaciones integrales hipersingulares; Ding y Liang (1999) y Ding et al. (2004) presentan una formulación del MEC basada en la solución fundamental obtenida por los mismos autores, cuyas expresiones guardan cierta similitud con las de Dunn y Wienecke (1996); Chen (2003) y Chen (2005) han presentado formulaciones basadas en ecuaciones integrales hipersingulares con las que ha obtenido resultados para algunos problemas concretos.

En esta tesis se presenta por primera vez una formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos, sencilla y robusta, análoga a la desarrollada anteriormente por Domínguez et al. (2000) y Ariza y Domínguez (2004) en materiales isótropos y transversalmente isótropos, respectivamente. Así, las integrales con núcleos hipersingulares y fuertemente singulares son regularizadas aplicando el teorema de Stokes, siendo reducidas a integrales de línea o de superficie que son a lo sumo débilmente singulares. La solución fundamental empleada es la de Dunn y Wienecke (1996), cuyas primeras y segundas derivadas han sido convenientemente obtenidas y combinadas para obtener las expresiones de la solución fundamental en tracciones y los núcleos hipersingulares. Estas expresiones, junto con las regularizadas, han sido implementadas en un código de elementos de contorno que permite resolver cualquier problema de grietas planas contenidas en un plano perpendicular al eje de simetría del material piezoeléctrico transversalmente isótropo, e inmersas en un medio infinito o finito, internas o intersectando el contorno externo.

1.2. Organización del documento. Objetivos de la tesis

Aparte de este primer capítulo introductorio, este documento se divide en cinco grandes capítulos, además de algunos apéndices donde se incluyen fundamentalmente desarrollos y expresiones matemáticas de interés. Los capítulos se corresponden con cada uno de los pasos que se han ido dando a lo largo del desarrollo de la tesis, por lo que el documento guarda en gran medida un orden cronológico de la actividad desarrollada. Se ha pretendido que cada bloque sea autocontenido en la medida de lo posible, con el objetivo de facilitar la tarea de aquellas personas interesadas en su lectura o estudio.

En el capítulo 2 se presenta la formulación mixta del MEC sobre la que se basa esta tesis. En ella se presentan sus aspectos fundamentales, independientemente del material o el tipo de problema sobre el que se aplique. Este capítulo constituye en gran medida un resumen del trabajo previo llevado a cabo en la tesis de Ariza (2002). En él se explica a grandes rasgos el proceso de obtención de la Ecuación Integral de Contorno (EIC) en tracciones (formulación hipersingular) a partir de la EIC en desplazamientos, así como las técnicas fundamentales desarrolladas para su implementación (proceso de regularización y Método de Colocación Múltiple). También se presentan el tipo de elementos que se emplearán en la discretización del contorno y los elementos a un cuarto empleados junto al frente de grieta para evaluar los Factores de Intensidad de Tensiones. Finalmente en este capítulo se incluye un apartado relativo a la implementación de la formulación mixta, que puede resultar de especial interés para los usuarios del código desarrollado en esta tesis o para aquellos que necesiten desarrollar un código similar. En este apartado se detallan aspectos relativos a la construcción del sistema de ecuaciones, simplificaciones prácticas, normalización del sistema, etc.

En el capítulo 3 se presenta la primera aportación significativa de esta tesis, consistente en una mejora en la implementación de la EIC en tracciones. Desarrollando una extensión a 3D de la transformación de coordenadas propuesta por Telles (1987) y realizando una serie de estudios numéricos sobre el número de puntos de integración necesario en cada caso y la ubicación óptima de los puntos de colocación sobre cada elemento, se pretende mejorar la formulación desde un punto computacional, haciéndola más robusta y eficiente.

En el capítulo 4 se aplica la formulación mixta a materiales transversalmente isótropos. Se aprovechan los resultados obtenidos del estudio realizado en el capítulo anterior para perfeccionar la formulación previa desarrollada por Ariza (2002) y obtener nuevos resultados para pro-

blemas estáticos. En este tipo de problemas se analizan ciertas analogías entre el comportamiento de materiales isótropos y transversalmente isótropos sobre diversas geometrías.

La formulación es extendida además al caso dinámico en el dominio de la frecuencia, con el objetivo de obtener resultados en casos en los que la grieta se encuentra inmersa en un medio finito, para los que no hay resultados previos conocidos por el autor. En este capítulo se explican las dificultades derivadas de la costosa evaluación de la solución fundamental de Wang y Achenbach (1995), y como se solventan estas dificultades mediante la construcción de una base de datos de una manera eficiente.

En el capítulo 5 se presenta por primera vez una formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos. Como introducción, se introducen las ecuaciones e hipótesis que gobiernan el problema piezoeléctrico, introduciendo la notación extendida de Barnett y Lothe (1975) y Deeg (1980), y prestando especial atención a algunos aspectos sobre los que existe cierta controversia entre los distintos autores, como son el tipo de condición de contorno a aplicar sobre las superficies de la grieta. Posteriormente se introduce la formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos. Se explica el proceso de obtención de las distintas ecuaciones integrales, su regularización e implementación, partiendo de la solución fundamental de Dunn y Wienecke (1996) para materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos. A continuación, se abordan aspectos fundamentales de la Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos, definiendo lo que se conoce como Factores de Intensidad de Tensiones Extendidos (FITEs), que son similares a los FIT en materiales elásticos pero incluyen un factor asociado a la singularidad en el desplazamiento eléctrico. También se explica la metodología específica desarrollada para la evaluación de los FITEs en este tipo de materiales, basada en una extensión a 3D del formalismo de Stroh (1962) y de la metodología aplicada en 2D por García-Sánchez (2005). Finalmente, se presentan resultados para diversas geometrías y condiciones de contorno. La formulación es validada mediante comparación con resultados previos existentes en la literatura, y se obtiene también la solución para varios problemas de interés para los que el autor no conoce la existencia de resultados anteriores. También se realiza un estudio análogo al llevado a cabo con materiales transversalmente isótropos, analizando posibles analogías con materiales no piezoeléctricos.

El documento finaliza con un capítulo dedicado a resumir las conclusiones más relevantes y plantear una serie de posibles desarrollos futuros para las líneas de trabajo seguidas en esta tesis.

Capítulo 2

Formulación mixta del MEC para problemas 3D de Mecánica de la Fractura Elástica y Lineal

Tal y como ya se ha comentado, el Método de los Elementos de Contorno (MEC) es una herramienta numérica especialmente adecuada para resolver problemas de Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal. Esta virtud radica en dos hechos: en su gran capacidad de representar altos gradientes de tensión y en el hecho de que tan solo es necesario discretizar el contorno del problema. En un problema de Mecánica de la Fractura, en el que consideremos una pieza que contenga una grieta, solo tendríamos que discretizar la superficie del contorno de la pieza y la superficie de la grieta. Esto conlleva una gran ventaja frente a otros métodos numéricos de dominio: no se ha de discretizar la zona en el frente de grieta en la que existe una concentración de tensiones con una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$. Además, si se considera una grieta en un medio infinito, tan solo sería necesario discretizar la grieta, sin necesidad de simplificar el medio infinito.

Esto es totalmente cierto cuando se usa la formulación mixta del MEC, y lo es parcialmente cuando se usa la formulación clásica, debido a que cuando se usa la Ecuación Integral de Contorno (EIC) en desplazamientos (formulación clásica), la degeneración geométrica que suponen los labios de la grieta (dos superficies coincidentes pero con distintos grados de libertad) se traduce en una imposibilidad de montar un sistema de ecuaciones independientes para dichos gra-

dos de libertad. El uso de un tipo de ecuación adicional (Ecuación Integral de Contorno en Tracciones) da lugar a la formulación mixta del MEC y solventa este inconveniente.

En los siguientes apartados se realiza un repaso a la formulación de ambas ecuaciones, y se tratan algunos aspectos fundamentales sobre su implementación en un código de elementos de contorno.

2.1. Ecuación Integral de Contorno en Desplazamientos

La EIC en desplazamientos en un problema elastostático con fuerzas de volumen nulas, para un punto interno y y de un cuerpo Ω , cuyo contorno es Γ y su normal externa es $\mathbf{n}(x)$, tiene la siguiente forma

$$u_l(y) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(x, y) u_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(x, y) p_k(x) d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

para $l, k = 1, 2, 3$, donde u_k y p_k son las componentes k de los desplazamientos y las tracciones, respectivamente, en el punto x del contorno, respectivamente, y u_{lk}^* , p_{lk}^* son los tensores de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental.

Se debe aclarar en este punto que de aquí en adelante se hablará de tracciones al referirse a la proyección del tensor de tensiones sobre la normal unitaria externa al contorno.

La solución fundamental se puede definir como sigue:

- u_{lk}^* es el desplazamiento en dirección k y en el punto x cuando se aplica una carga unidad en el punto y en dirección l .
- p_{lk}^* es la tracción en dirección k en el punto x (componente k de la proyección del tensor de tensiones sobre la normal unitaria externa en el punto x) cuando se aplica una carga unidad en el punto y en dirección l .

El punto y se conoce como "punto de colocación" y el punto x como punto de observación o de integración.

Las expresiones de la solución fundamental dependerán de la ley de comportamiento del material (isótropo, transversalmente isótropo o anisótropo) y de si el problema es estático o dinámico (en el dominio del tiempo o de la frecuencia).

La ecuación (2.1) es la base del MEC, ya que permite afirmar que si conocemos las tracciones y desplazamientos en el contorno del problema, podremos obtener los desplazamientos

en cualquier punto del dominio mediante dicha ecuación.

El MEC consiste por tanto en discretizar el contorno del problema con nodos y elementos, de forma que a través de las variables nodales y las funciones de forma de los elementos se obtenga una representación de los desplazamientos y las tracciones en el contorno. Las incógnitas serán las tracciones y desplazamientos en los nodos, de las cuales serán conocidas a priori unas u otras según las condiciones de contorno.

La formación del sistema de ecuaciones necesario para hallar estas incógnitas pasa por realizar un paso al límite en el contorno de la ecuación (2.1), de forma que el punto de colocación pertenezca al contorno. Para tener tantas ecuaciones como incógnitas, esta ecuación se plantea en tantos puntos de colocación y para tantos grados de libertad como nodos tenga la discretización. En principio, lo más práctico y sencillo es que los puntos de colocación sean los propios nodos del contorno, de forma que en el término libre de la ecuación aparezca un desplazamiento nodal.

El paso al límite en el contorno se realiza considerando un punto de colocación sobre el contorno Γ . Para un punto del contorno suave, este paso se realiza considerando un contorno modificado tal y como se representa en la fig. 2.1. Esta modificación consiste en hacer que el punto de colocación quede en el centro de una semiesfera cuyo radio, ε , se hace tender a cero para obtener la ecuación deseada (ec. 2.2).

$$u_l(\mathbf{y}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right. \\ \left. + \int_{\Gamma - e_\varepsilon} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma - e_\varepsilon} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} = 0 \quad (2.2)$$

Los detalles sobre este proceso de paso al límite se pueden encontrar en la extensa bibliografía dedicada al MEC, como por ejemplo los libros de Brebbia y Domínguez (1992) y Domínguez (1993).

El primer término integral de la ec. (2.2) da lugar a un nuevo término acotado que se suma al término libre, la segunda integral de la ecuación resulta nula al hacer el paso al límite, y las dos últimas se escribirán a partir de ahora como integrales sobre todo el contorno, aunque realmente lo sean en el sentido del valor principal de Cauchy, lo cual no afecta a efectos numéricos y prácticos.

Así pues, la ec. (2.2) se puede reescribir de la siguiente manera

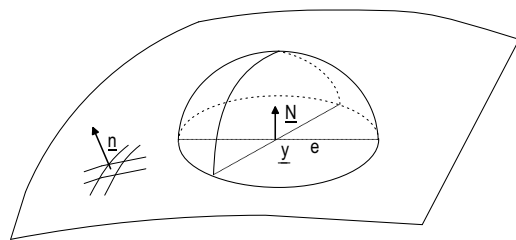


Figura 2.1: Geometría del contorno modificado alrededor del punto de colocación.

$$u_l - \frac{1}{2}u_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_k(\mathbf{x})d\Gamma = 0 \quad (2.3)$$

En general, para un punto cualquiera del contorno, la ecuación anterior se puede escribir como

$$c_{lk}u_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_k(\mathbf{x})d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

donde el coeficiente c_{lk} que acompaña al término libre depende de la forma de la superficie del contorno en el punto de colocación. Para un punto suave del contorno su valor será $1/2$ para $l = k$ y 0 para $l \neq k$.

Las integrales sobre el contorno que aparecen en cada una de estas ecuaciones se realizan descomponiéndolas en integrales sobre cada uno de los elementos que discretizan el contorno, y sobre los cuales a su vez se interpolan los campos de desplazamientos y tracciones a través de funciones de forma de pequeño soporte asociadas a cada uno de los nodos del elemento, de forma similar a como se hace en otros métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos. La ec. (2.4) discretizada en elementos de contorno se puede escribir como

$$c_{lk}u_l^i + \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} p_{lk}^*(x, x^i) \sum_{n=1}^{nne} \phi^n u_k^n d\Gamma_e - \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} u_{lk}^*(x, x^i) \sum_{n=1}^{nne} \phi^n p_k^n d\Gamma_e \quad (2.5)$$

donde el nodo i es el punto de colocación, NE es el número de elementos de contorno en la discretización, nne , Γ_e es el contorno representado por cada elemento, es el número de nodos del elemento y ϕ^n es la función de forma asociada a cada nodo.

Escribiendo la ecuación anterior para cada grado de libertad de cada nodo, y reorganizando los términos en forma matricial, se llega finalmente al típico sistema de ecuaciones del MEC, que se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{t} son vectores de $m \cdot n$ elementos que contienen los desplazamientos y tracciones nodales respectivamente, siendo n el número de nodos y m el número de grados de libertad de cada nodo, que será 3 en un problema elástico 3D y 4 en el caso piezoeléctrico 3D, tal y como se verá en el capítulo 5. Obviamente, del conjunto de variables nodales, la mitad serán conocidas por condición de contorno.

Más detalles sobre todo el proceso de formulación de las ecuaciones y su discretización se pueden encontrar por ejemplo en el libro de Brebbia y Domínguez (1992) y Domínguez (1993).

Consideremos el caso en que se construya este sistema para un problema de Mecánica de la Fractura en el que se haya discretizado el contorno externo del problema y las superficies de ambos labios de la grieta. Estas últimas las consideramos discretizadas de forma idéntica la una de la otra, solo que con normal externa opuesta.

Si se analizan las expresiones de la solución fundamental para un caso isótropo estático (ecs. 2.7 y 2.8), que es el más sencillo, se pueden deducir fácilmente las relaciones (2.9) y (2.10)

$$u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}] \quad (2.7)$$

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (2.8)$$

$$u_{ik}^*(y^+) = u_{ik}^*(y^-) \quad (2.9)$$

$$p_{ik}^*(y^+) = -p_{ik}^*(y^-) \quad (2.10)$$

donde y^+ e y^- son puntos coincidentes de una y otra cara de la grieta. Es decir, u_{ik}^* adopta los mismos valores para una y otra cara de la grieta, mientras que p_{ik}^* adopta el mismo valor pero de signo contrario (esta conclusión es evidente atendiendo al sentido físico de la solución fundamental y dado que ambas caras de la grieta tienen su normal externa con orientaciones opuestas). Para otro tipo de medio no isótropo, con otra solución fundamental, ocurrirá exactamente lo mismo. Así pues, se tendrá que los coeficientes correspondientes a las variables nodales de la grieta serán los mismos para ambas caras en la matriz \mathbf{G} y de distinto signo en la matriz \mathbf{H} . Este hecho

habrá de ser tenido en cuenta para el desarrollo de la formulación mixta del MEC, tal y como se recoge en el apartado 2.6.

Por otro lado, cuando se plantea la ecuación para un punto de colocación de la grieta, se tendrá una ecuación en la que en el término libre aparecerán los desplazamientos de una y otra cara de la grieta, ya que el punto de colocación pertenece realmente a ambas caras y en el paso al límite se generará una semiesfera Γ_ε para cada cara de la grieta, con lo que se obtiene la ecuación (2.11):

$$u_l^+ - \frac{1}{2}u_l^+ + u_l^- - \frac{1}{2}u_l^-(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_k(\mathbf{x})d\Gamma = 0 \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.11) u_l^+ y u_l^- representan los desplazamientos de una y otra cara de la grieta.

Así pues, la ecuación anterior será la misma si el punto de colocación es un nodo de una u otra cara de la grieta, ya que de hecho no es posible establecer que el punto de colocación pertenezca a una u otra cara. Por tanto, no será posible obtener un número suficiente de ecuaciones linealmente independientes para resolver el problema.

Este inconveniente se ha solventado tradicionalmente mediante la técnica de subdominios. Ésta consiste en dividir el dominio por medio de una superficie que contenga a la grieta y discretizar y formular el sistema de ecuaciones para ambas partes del dominio por separado. El problema completo quedaba resuelto mediante la imposición de ecuaciones de compatibilidad entre los nodos de la superficie que ha servido para dividir dominio.

Este proceso se simplifica en muchos casos por la presencia de un plano de simetría que contiene a la grieta, de forma que de manera natural era inmediato el planteamiento del problema mediante la aplicación de condiciones de simetría.

Hay que hacer notar que al resolver el problema mediante subregiones, la superficie del dominio cercana al frente de grieta debe de recoger el comportamiento singular del campo de tensiones en esa zona. Para ello se han ideado algunos elementos especiales, como el elemento singular a 1/4 propuesto por Martínez y Domínguez (1998) en 2D y Ariza et al. (1997) en 3D.

Mediante esta técnica se han obtenido tradicionalmente buenos resultados para un gran número de problemas de Mecánica de la Fractura. Sin embargo, es evidente que la principal virtud de el MEC, consistente en la necesidad de discretizar tan solo el contorno del problema, se aprovecha solo en parte.

2.2. Ecuación Integral de Contorno en Tracciones

La formulación mixta del MEC consiste en plantear una ecuación distinta sobre una de las superficies de la grieta: la EIC en tracciones. Ésta se obtiene por derivación de la EIC en desplazamientos en el punto de colocación, combinación lineal de las nuevas ecuaciones siguiendo la ley de comportamiento del material y proyección sobre la normal externa unitaria en dicho punto de colocación, de forma que en el término libre de la ecuación aparece una componente de las tracciones en dicho punto. Así, para un punto de colocación perteneciente a la grieta tendremos la siguiente expresión

$$p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (2.12)$$

donde d_{lmk}^* y s_{lmk}^* son combinaciones lineales de las derivadas en el punto de colocación de u_{lk}^* y p_{lk}^* respectivamente, y $\mathbf{N}(\mathbf{y})$ es la normal externa unitaria en ese punto. La existencia de un límite en el contorno de esta ecuación requiere que el campo u en el punto de colocación sea continuo del tipo $C^{1,\alpha}$. Este requerimiento fue puesto de manifiesto por Martin y Rizzo (1996) y Martin et al. (1998).

Las expresiones de los núcleos d_{lmk}^* y s_{lmk}^* para el caso isótropo y estático son las siguientes

$$d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,l} - \delta_{lm}r_{,k}) + 3r_{,lr,m}r_{,r,k} \} \quad (2.13)$$

$$s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lm}r_{,k} + \nu(\delta_{kl}r_{,m} - \delta_{km}r_{,l}) - 5r_{,lr,m}r_{,r,k}] + 3\nu(n_l r_{,mr,k} + n_m r_{,lr,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,lr,m} + n_m \delta_{lk} + n_l \delta_{mk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{lm} \right\} \quad (2.14)$$

Nótese que el término libre de (4.5) se ha escrito con un coeficiente $c_{lk}=1$ para $l = k$. Esto es porque, suponiendo que la superficie de la grieta es suave y realizando el mismo tipo de paso al límite de la EIC en desplazamientos, se tendría el siguiente término libre

$$\sigma_{lm}(y^+) N_m(y^+) - \frac{1}{2} \sigma_{lm}(y^+) N_m(y^+) + \sigma_{lm}(y^-) N_m(y^+) - \frac{1}{2} \sigma_{lm}(y^-) N_m(y^+) \quad (2.15)$$

siendo y^+ e y^- puntos coincidentes pero pertenecientes a un labio y a otro de la grieta, σ_{lm} son las tensiones y $N_m(y^+)$ es la normal en el punto de colocación. Si suponemos que la grieta

está autoequilibrada, es decir, que la distribución de tracciones es la misma en uno y otro labio pero de distinto signo, se tendrá que

$$p_l(y^+) = -p_l(y^-) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{lm}(y^+) = \sigma_{lm}(y^-) \quad (2.17)$$

Por tanto, el término libre se puede poner como

$$p_l(y^+) - \frac{1}{2}p_l(y^-) + p_l(y^+) - \frac{1}{2}p_l(y^+) = p_l(y^+) \quad (2.18)$$

La hipótesis anterior simplifica la ecuación y no es en absoluto restrictiva, ya que se cumple en la inmensa mayoría de problemas de interés en Mecánica de la Fractura, siendo lo más frecuente que se den tracciones nulas en las superficies de la grieta.

Así pues, con la formulación mixta del MEC se puede plantear la EIC en desplazamientos en los puntos de colocación del contorno externo y de una de las superficies de la grieta, mientras que en los de la otra superficie se escribe la EIC en tracciones. De esta forma queda solventado el problema de la degeneración del sistema de ecuaciones que supone la presencia de la grieta, y se tiene un sistema de ecuaciones que permite hallar todas las incógnitas nodales. Se consigue así que tan solo sea necesario discretizar el contorno externo y la superficie de la grieta, evitando la división en subdominios.

Análogamente a lo que ocurre con u_{ik}^* y p_{ik}^* , si se analizan las expresiones (2.13) y (2.14) se puede observar que:

$$d_{lmk}^*(y^+) = d_{lmk}^*(y^-) \quad (2.19)$$

$$s_{lmk}^*(y^+) = -s_{lmk}^*(y^-) \quad (2.20)$$

siendo de nuevo y^+ e y^- puntos coincidentes pero pertenecientes a un labio y a otro de la grieta.

La primera de las expresiones anteriores indica que tendrán el mismo valor aquellos términos de la matriz \mathbf{G} del sistema correspondientes a nodos coincidentes pero pertenecientes a distintas caras de la grieta. En el caso de grietas autoequilibradas que se citaba anteriormente, esto supone que todos los términos de esta matriz, al multiplicarlos por las tracciones en la grieta, darán lugar a términos nulos, salvo los correspondientes a la diagonal, que engloban al término libre. Este hecho evita en la mayoría de los casos prácticos la integración sobre los elementos de la grieta para la evaluación de los términos de \mathbf{G} .

La segunda igualdad indica justo lo contrario y tiene una mayor relevancia. Al igual que ocurría con la EIC en desplazamientos, los desplazamientos de estos nodos coincidentes van multiplicados por coeficientes iguales pero de distinto signo, lo cual quiere decir que podríamos sacar factor común y trabajar con una variable que sería la diferencia entre estos desplazamientos.

$$u(y^+) - u(y^-) = DAG$$

Esta nueva variable es el Desplazamiento de Apertura de Grieta (DAG), que es suficiente para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Este Factor caracteriza el campo tensional en el frente de grieta y es lo que generalmente se pretende hallar en un problema de Mecánica de la Fractura.

Así pues, para resolver un problema de este tipo bastaría con discretizar tan solo una de las superficies de la grieta y trabajar con el DAG como incógnita nodal. Esto simplifica la discretización, el proceso de obtención de las ecuaciones del sistema y la resolución del mismo. En el apartado 2.6 se tratará con más detalle el esquema de integración, discretización y construcción del sistema de ecuaciones con la formulación mixta del MEC desarrollada.

Hasta ahora solo se han enumerado las ventajas de la EIC en tracciones pero es cierto que como contrapartida se deben solventar algunas dificultades numéricas en su implementación, como se comenta en los dos siguientes apartados.

2.2.1. Método de Colocación Múltiple (MCM)

La primera dificultad en la implementación de la EIC en tracciones radica en el requerimiento de continuidad $C^{1,\alpha}$ en el punto de colocación, como se mencionó anteriormente. Esta condición ha sido objeto de discusión por parte de diversos autores. Algunos de ellos, han defendido que basta con satisfacer algunas condiciones relajadas de continuidad. Cruse y sus colaboradores (Huang y Cruse, 1994, Cruse y Richardson, 1996, Richardson et al., 1997) han mantenido esa postura y han obtenido buenos resultados en diversos problemas, aunque no ha sido demostrado que estas condiciones relajadas de continuidad sean teóricamente suficientes. En cualquier caso, diversos trabajos muestran la necesidad de que el campo de desplazamientos cumpla el requerimiento de continuidad $C^{1,\alpha}$ para la existencia analítica de un límite en el contorno (Krishnasamy et al., 1990, Tanaka et al., 1994, Martin y Rizzo, 1996, Martin et al., 1998).

Para cumplir rigurosamente este requerimiento de continuidad, diversos autores han aplicado

distintas técnicas. Una de ellas es el empleo de elementos especiales que garanticen este tipo de continuidad entre unos elementos y otros, como propusieron Sladek et al. (1992) y Young (1996). El inconveniente que ofrece esta técnica es que la implementación de este tipo de elementos en un código de elementos de contorno es complicada. Otra posibilidad es el empleo de elementos discontinuos, como hicieron Portela et al. (1992) y Mi y Aliabadi (1992), pero ello supone un aumento del número de ecuaciones e incógnitas del sistema, con la complicación que ello conlleva.

En este trabajo se respeta el requerimiento de continuidad de una forma más sencilla. Se trata de una extensión de la idea de Gallego y Domínguez (1996) para dos dimensiones, y que Domínguez et al. (2000) extendieron a tres dimensiones, como queda recogido en la tesis de Ariza (2002).

Esta técnica consiste en desplazar los puntos de colocación hacia dentro del elemento, en lugar de situarlos en las posiciones nodales. De esta forma, si se trabaja con elementos cuadráticos, se respeta automáticamente el requerimiento de continuidad en los puntos de colocación, al igual que ocurre con elementos discontinuos. La diferencia con este tipo de elementos estriba en que los desplazamientos y tracciones en el punto de colocación son referidos a las variables nodales a través de las funciones de forma, de manera que las incógnitas siguen siendo dichas variables, sin incorporar nuevas incógnitas. Por tanto, los elementos siguen siendo continuos.

Para cada nodo se consideran tantos puntos de colocación como elementos contengan al nodo y así se obtendrán otras tantas ecuaciones para cada grado de libertad nodal. Las ecuaciones finalmente se suman ponderadamente para dar lugar a una sola ecuación por grado de libertad. La utilización de varios puntos de colocación por nodo ralentiza en parte el proceso de obtención del sistema de ecuaciones, pero se obtienen matrices con mayor grado de simetría y más equilibradas, lo que mejora el posterior proceso de resolución del sistema.

La distribución de los puntos de colocación en los elementos empleados se representa en la figura 2.2, mientras que en el apartado 3.3 se justifica numéricamente la posición más adecuada para estos puntos.

2.2.2. Regularización

La segunda dificultad con la que hay que enfrentarse al trabajar con la EIC en tracciones es la necesidad de integrar los núcleos hipersingulares ($\mathcal{O} \sim r^{-3}$), que aparecen en los términos s_{lmk}^* , y fuertemente singulares ($\mathcal{O} \sim r^{-2}$), que aparecen en los términos d_{lmk}^* . Para ello se aplica en

este trabajo el proceso de regularización propuesto por Domínguez et al. (2000) para problemas de potencial y elasticidad en materiales isótropos, y Ariza y Domínguez (2004) para materiales transversalmente isótropos.

En este apartado se describe a grandes rasgos este proceso, prescindiendo del rigor matemático necesario para llevarlo a cabo. Para una revisión en profundidad se remite a los trabajos anteriormente citados y a la tesis de Ariza (2002).

El proceso de regularización planteado pasa por considerar un desarrollo en serie de Taylor en el punto de colocación de dos términos para el campo de desplazamientos y de un término para el de las tracciones.

$$u_k(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{y}) + u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h) + O(r^{1+\alpha}) \quad (2.21)$$

$$p_k(\mathbf{x}) = \sigma_{kh}(\mathbf{x})n_h(\mathbf{x}) = \sigma_{kh}(\mathbf{y})n_h(\mathbf{x}) + O(r^\alpha) \quad (2.22)$$

Estos términos se sustraen del campo de desplazamientos y tracciones de la EIC en tracciones, y dan lugar por otro lado a nuevos términos en la ecuación, tal y como aparece en la ec. (2.23).

$$\begin{aligned} p_l(y) + \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - d_{lmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma \\ + u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} s_{lmk}^* N_m d\Gamma + u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} s_{lmk}^* N_m (x_h - y_h) d\Gamma - p_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} d_{lmk}^* N_m d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sobre esta nueva ecuación será sobre la que se realice el paso al límite en el contorno, según se detalla en las referencias citadas anteriormente.

Las integrales en las que aparece la diferencia entre los campos de desplazamientos y tracciones y sus desarrollos en serie son evaluables numéricamente sin dificultad, ya que son de orden débilmente singular. Para ello se emplea una técnica tradicional en elementos de contorno (Lachat y Watson, 1976) consistente en dividir la integración sobre el elemento en regiones triangulares, realizando una transformación de coordenadas cuyo jacobiano cancela la singularidad del integrando.

Los nuevos términos que aparecen en la EIC en tracciones son regularizados mediante la aplicación fundamentalmente del teorema de Stokes, y dan lugar a integrales de superficie y de línea sobre el contorno Γ . Estas integrales son regulares o débilmente singulares, con lo que pueden ser evaluadas sin dificultad. En la ec. (2.24) quedan recogidas en los términos I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} . Sus

expresiones para materiales isótropos y transversalmente isótropos pueden ser consultadas en los trabajos de Ariza y Domínguez citados anteriormente.

$$\begin{aligned}
p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \{s_{lmk}N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \\
d_{lmk}N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma + \\
[u_k(\mathbf{y})I_{lk} + u_{k,h}(\mathbf{y})J_{lhk} + p_k(\mathbf{y})K_{lk}] +
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Hay que hacer notar que este proceso de regularización se realiza de forma analítica y previamente a cualquier discretización. Esto quiere decir que, una vez realizado el esfuerzo analítico para obtener la expresión anterior, solo quedará discretizarla en elementos de contorno, en la forma en que se detalla en los apartados 2.3 y 2.6.

El proceso de regularización se tratará con mayor profundidad cuando se presente la formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos desarrollada en esta tesis (capítulo 5).

2.3. Implementación de la EIC en tracciones

La discretización de la EIC en tracciones regularizada (ec. 2.24) se realiza de forma análoga a la de la EIC en desplazamientos. Sin embargo, el proceso de regularización que se ha de aplicar a la primera hace recomendable la aplicación de dicha regularización a tan solo una zona cercana al punto de colocación, que es donde se dan los problemas de integración de núcleos hipersingulares y fuertemente singulares, y en el resto de la discretización aplicar la ecuación sin regularizar.

Así pues, la ecuación que se implementa finalmente en el código de elementos de contorno es la siguiente

$$\begin{aligned}
p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_0} \{s_{lmk}N_m [u_k(\mathbf{x},) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \\
d_{lmk}N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma + [u_k(\mathbf{y})I_{lk}^0 + u_{k,h}(\mathbf{y})J_{lhk}^0 + p_k(\mathbf{y})K_{lk}^0] + \\
\int_{\Gamma - \Gamma_0} \{s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})N_m(\mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) - d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})N_m(\mathbf{y})p_k(\mathbf{x})\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde Γ_0 es la región sobre la que se aplica el proceso de regularización. En este trabajo se ha mantenido el criterio adoptado en la tesis de Ariza (2002), consistente en considerar esta región como el elemento que contiene al punto de colocación.

Esta estrategia simplifica el proceso de regularización, pero obliga a evaluar integrales cuasi singulares de orden de hasta r^{-3} en los elementos próximos al punto de colocación. La evaluación de este tipo de integrales se discutirá en el capítulo siguiente.

2.4. Elementos empleados para la discretización.

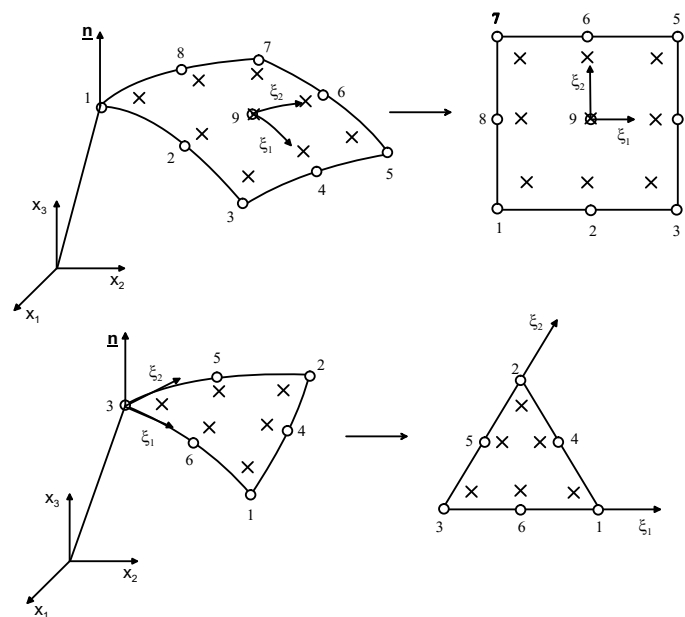


Figura 2.2: Elementos cuadráticos curvos empleados en la discretización del contorno, en coordenadas cartesianas y naturales. Se representan los nodos (o) y los puntos de colocación (x) cuando se aplica el Método de Colocación Múltiple.

Para discretizar tanto el contorno externo (cuando éste existe) y la superficie de la grieta se emplean elementos cuadráticos, lagrangianos e isoparámetros, triangulares (de 6 nodos) o cuadriláteros (de 9 nodos). En la fig. 2.2 se presentan estos elementos en su forma generalizada en coordenadas cartesianas y en coordenadas naturales. Marcados con una X se encuentran los puntos de colocación considerados sobre cada elemento cuando se aplica la técnica de multicolocación al plantear la EIC en tracciones.

2.5. Mecánica de la Fractura: campo asintótico de desplazamientos y tensiones

En problemas de Mecánica de la Fractura se estará interesado en caracterizar el campo de tensiones y desplazamientos que tiene lugar en presencia de una grieta. El análisis de estos campos en las cercanías del frente de grieta dará la información necesaria acerca de la tendencia de la grieta a propagarse y su modo de propagación.

Dentro del enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, Irwin (1957) obtuvo las expresiones del campo asintótico de tensiones y desplazamientos en un problema plano y para un material isótropo, mientras que las expresiones de los campos tridimensionales fueron obtenidas por Kassir y Sih (1966). Estas últimas se recogen en las expresiones (2.26) y (2.27), en las que las componentes de desplazamientos y tensiones y sus expresiones vienen referidas a las coordenadas locales que aparecen en la fig. 2.3. Estas expresiones son válidas para valores de r mucho menores que la dimensión de la grieta en sentido normal al frente de grieta, es decir, en ellas se recogen los términos dominantes del campo asintótico de desplazamientos y tensiones.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{zz} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{tt} &= 2\nu \left[\frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{nz} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{nt} &= \frac{-K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_{zt} &= \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

y

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[K_I(s) \cos \frac{\theta}{2} \left((1-2\nu) + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. K_{II}(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2(1-\nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 u_z &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[K_I(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2(1-\nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. K_{II}(s) \cos \frac{\theta}{2} \left((1-2\nu) - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 u_t &= 2 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{III}(s) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

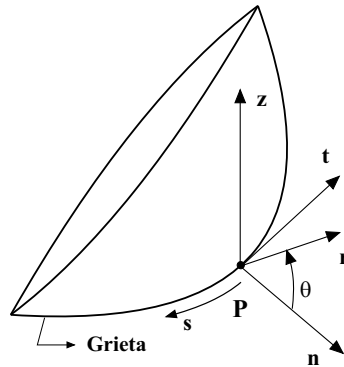


Figura 2.3: Coordenadas locales en el frente de grieta referidas a los distintos modos de apertura. Las direcciones n y t se encuentran en el plano tangente a la superficie de la grieta, siendo n normal al frente de grieta y t tangencial al mismo. La dirección z es perpendicular a dicho plano. El sistema polar r - θ se encuentra en el plano n - z , mientras que la coordenada s recorre el frente de grieta.

Como se aprecia en (2.26), el campo singular de tensiones (singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$) viene caracterizado por los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) K_I , K_{II} , y K_{III} , asociados los distintos modos fundamentales de apertura de una grieta (fig. 2.4). Los FIT definen por tanto la solución de un problema de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, como es el caso que nos ocupa.

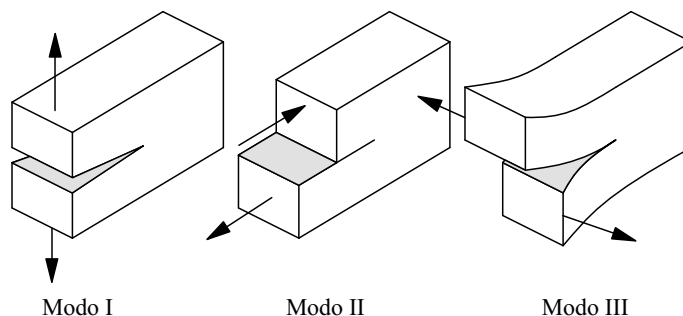


Figura 2.4: Posibles modos de apertura de una grieta.

Los FIT se pueden definir de forma genérica, y para cualquier tipo de comportamiento del material, según (2.28).

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{zz}|_{\theta=0} \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{nz}|_{\theta=0} \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{tz}|_{\theta=0}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Hay que tener en cuenta sin embargo que hay situaciones en las que las expresiones (2.26) y (2.27) del campo asintótico en las cercanías del frente de grieta no son correctas, como es el caso en que el frente de grieta intersecta con un borde libre del contorno. En este caso el frente de grieta no es continuo, violándose así una de las hipótesis bajo las que se obtienen las expresiones del campo asintótico. Esta es una situación compleja que ha sido abordada por muy diversos autores desde distintos puntos de vista. Quizá sea Folias (1975) el primer autor en abordar esta cuestión desde un punto de vista tridimensional y advertir un cambio en el orden de la singularidad del campo de tensiones en torno al punto de intersección del frente de grieta con el contorno o borde libre (también denominado *esquina* de aquí en adelante), así como la influencia del módulo de Poisson. Bazant et al. (1979), basándose en criterios energéticos, analizaron la influencia del ángulo de incidencia del frente de grieta con el borde libre sobre el grado de singularidad del campo de tensiones, y llegaron a la conclusión de que una grieta en propagación tiende a formar con el borde libre un ángulo crítico para el que se mantiene la singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$. Este ángulo crítico es diferente para los modos I y los modos II y III, siendo también distinto el grado de la

singularidad del campo de tensiones en función del ángulo para los distintos modos (Benthem, 1980, Bazant et al., 1979). Si esta singularidad es del tipo $1/r^\lambda$, el parámetro λ será un indicador de este grado de singularidad, y lo habitual será que $\lambda = 0,5$. En el entorno de la *esquina*, para un ángulo recto de intersección, se tendrá para el modo I que $\lambda < 0,5$ mientras que en los modos II y III $\lambda > 0,5$. Esto lleva a que cuando se hallan numéricamente los FIT en esa zona, manteniendo la definición dada en (2.28), se tiene que teóricamente K_I tenderá a cero mientras que K_{II} y K_{III} tenderán a infinito.

Un trabajo muy ilustrativo y práctico sobre este fenómeno es el desarrollado por Nakamura y Parks (1988) para modo I y por los mismos autores (Nakamura y Parks, 1989) para modos II y III. Mediante un análisis por elementos finitos de una placa delgada con una grieta pasante, analizan el grado de singularidad del campo de tensiones, las zonas de aplicación aproximada de las hipótesis de tensión o deformación plana, la zona donde el efecto de la *esquina* es significativo, el efecto del módulo de Poisson y el acoplamiento de los modos II y III (bajo una carga antisimétrica en el plano asociada a modo II aparecen por efecto Poisson tensiones correspondientes a modo III).

Nakamura y Parks concluyen que para $r \geq 1,5t$ (siendo r la distancia al frente de grieta y t el espesor de la placa) se cumplen las hipótesis de tensión plana, que se supone generalmente de aplicación en una placa delgada. Ya en zonas más cercanas al frente de grieta ($r \leq 0,5t$) se observan variaciones del campo de tensiones a lo largo del espesor, y en la zona muy cercana al frente de grieta ($r \leq 0,005t$) predomina un estado de deformación plana. Finalmente, el efecto de la esquina es apreciable para $r \leq 0,03t$ ($r \leq 0,008a$ según predice Agrawal y Kishore, 2001 a partir de un análisis numérico aplicando el MEC sobre un espécimen con una grieta recta central de tamaño $2a$). Los tamaños de estas zonas de transición son iguales para carga simétrica (modo I) o antisimétrica (modos II y III), y resultan prácticamente independientes del módulo de Poisson. En cuanto a la aparición de modo III acoplado con el modo II, el factor K_{III} resulta creciente desde el centro de la placa hacia el exterior, y aunque K_{II} y K_{III} tiendan a infinito en el borde libre, la relación K_{III}/K_{II} se encuentra acotada y depende del módulo de Poisson y del ángulo que forman el frente de grieta y la superficie libre (Nakamura y Parks, 1989, Benthem, 1980).

El tamaño de las zonas de transición, especialmente la zona de influencia de la esquina, es demasiado pequeño como para ser captado claramente su efecto con las discretizaciones que normalmente se emplean en el análisis numérico de este tipo de problemas (Nakamura y Parks, 1989, Kacianauskas et al., 2005, Agrawal y Kishore, 2001)). Además, y tal y como advierten también

Nakamura y Parks (1988,1989), estos resultados serán matizados en la realidad por la presencia de una zona plástica en torno al frente de grieta, y su consideración práctica dependerá de la influencia de dicha zona. No obstante, estos estudios resultarán de interés para analizar la propagación de grietas en estas situaciones, especialmente en materiales frágiles.

El hecho de que K_{II} , bajo su definición habitual, tienda a infinito en el borde libre llevaría a pensar que bajo modo mixto o carga antisimétrica la grieta empezaría a propagarse en el borde libre (lo cual parece ser coherente con los resultados experimentales obtenidos por Aoki et al. (1990)). Esta forma de propagación llevaría a una forma convexa del frente de grieta, contraria a la forma habitual que presenta cuando se propaga en modo I. Determinado comportamiento del suelo en planos de deslizamiento de fallas puede ser un ejemplo de esta situación (Nakamura y Parks, 1989), si bien es cierto que normalmente la grieta cambiará precisamente de dirección para propagarse en modo I y este fenómeno no sea apreciable.

Por otro lado, Murakami y Natsume (2002) consideran paradójico que K_{III} se haga infinito en el borde libre cuando debiera ser nulo por condición de contorno en el borde libre. Según estos autores, K_{III} se hace singular en una zona infinitesimal, concluyendo que el efecto de la esquina puede ser despreciado, en contraposición a las observaciones de Jin y Noda (1994), que advierten de la importancia de la consideración del modo III en placas que no sean "muy delgadas". Murakami y Natsume (2002) comprueban también que se obtiene una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ para los modos II y III a lo largo de todo el frente de grieta cuando la grieta forma con el borde libre el ángulo crítico predicho por Bazant et al. (1979) y Pook (1994).

Este último autor presenta unos interesantes resultados acerca de la influencia del módulo de Poisson y el grado formado por el frente de grieta y la superficie libre sobre el grado de singularidad del campo de tensiones. En base a este estudio concluye que el efecto de la *esquina* tiene poca importancia desde un punto de vista práctico para modo I, mientras que sugiere un modelo de grieta con forma de porción de elipse, y no semielipse, para el estudio de crecimiento de grietas por fatiga en modo II, de forma que el frente de grieta forme con la superficie libre el ángulo crítico correspondiente.

A la vista de todos estos resultados y conclusiones teóricas, analíticas o numéricas, en parte contradictorias entre sí, resulta necesario obtener alguna evidencia experimental sobre la influencia de la *esquina* en el campo de tensiones y la propagación de la grieta, especialmente en modos II y III. Para ello se podría llevar a cabo un estudio similar al llevado a cabo por Heyder et al. (2005) para modo I, en el que se comprueba que efectivamente la grieta se propaga formando o

tendiendo a formar siempre el ángulo crítico para el que se recupera la singularidad $1/\sqrt{r}$, tal y como predecían Bazant et al. (1979).

Aunque no sea el objetivo principal de esta tesis, el efecto de la *esquina* será tenido en cuenta en el análisis de algunos de los problemas que se aborden. En los casos transversalmente isótropo y piezoeléctrico los campos asintóticos en torno al frente de grieta son del mismo tipo que en el caso isótropo, y el concepto de los FIT sigue siendo de aplicación. En el caso piezoeléctrico aparece además una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ en torno al frente de grieta en el campo de inducción o desplazamiento eléctrico. Esto da lugar a la definición de un Factor de Intensidad de Desplazamiento Eléctrico. En cuanto al efecto de la *esquina*, el autor no conoce estudios previos sobre su efecto en estos materiales no isótropos, aunque es de esperar que el efecto sea similar. En cualquier caso, los resultados obtenidos serán estudiados con más detalle en los capítulos correspondientes.

2.5.1. Evaluación de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT)

Para evaluar los FIT, tal y como se definieron en (2.28), se emplean elementos a 1/4 tridimensionales. Estos elementos reproducen el comportamiento del tipo \sqrt{r} de los desplazamientos en el frente de grieta. Se utilizan elementos de este tipo a lo largo de dicho frente y a partir del DAG de los nodos a 1/4 (nodos 4, 8 y 9 en la fig. 2.5) se puede obtener la evolución del FIT a lo largo del frente de grieta. Para que este tipo de elementos funcionen correctamente, se han de construir con las líneas 1-8-7, 2-9-6 y 3-4-5 normales al frente de grieta. También han de ser planos, aunque Ariza (2002) llegó a obtener buenos resultados para grietas no planas con elementos a 1/4 con curvatura pequeña.

De esta forma, y gracias a la ubicación de los nodos a 1/4, se puede comprobar que se cumple la siguiente relación

$$\xi_2 = 2\sqrt{(r/L)} - 1$$

siendo r la coordenada natural correspondiente a un sistema de coordenadas polar contenido en un plano perpendicular al frente de grieta y con su origen situado en el frente de grieta, y L la longitud del elemento a 1/4 en sentido normal al frente de grieta.

Del desarrollo de las funciones de interpolación a lo largo de las líneas del elemento normales al frente de grieta, sustituyendo ξ_2 por su relación con r , se tiene que

$$u = u^1 + (-3u^1 - u^7 + 4u^8)\sqrt{\frac{r}{L}} + (2u^1 + 2u^7 - 4u^8)\frac{r}{L} \quad (2.29)$$

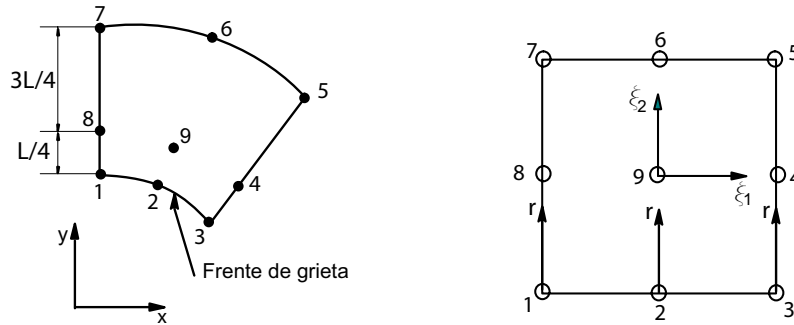


Figura 2.5: Elemento a 1/4 tridimensional en coordenadas cartesianas en su forma más general y en coordenadas naturales

La expresión (2.29) es válida para línea recta formada por los nodos 1-8-7. Para las líneas formadas por los nodos 2-9-6 y 3-4-5 las expresiones serían análogas.

Para $r=L/4$ el desplazamiento obtenido será el del nodo a 1/4 (u_8 en la expresión 2.29), que se puede igualar al valor del desplazamiento según (2.27) particularizada para $r = L/4$ y de ahí obtener la expresión que permite obtener los FIT a partir de los desplazamientos de los nodos a 1/4 para materiales isótropos.

Aunque las expresiones (2.27) vienen en función del campo de desplazamientos, es más práctico trabajar con el campo del DAG, que es el que realmente caracteriza la apertura de la grieta y resulta independiente del origen del sistema de coordenadas. Atendiendo a la simetría de las expresiones (2.27), éstas se podrían poner en función del DAG sin más que tener en cuenta que $DAG=2u$. De esta forma, se puede escribir finalmente la relación entre los DAG de los nodos a 1/4 y los FIT para los distintos modos de apertura de grieta en un material isótropo según (2.30).

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_z \\
 K_{II} &= \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_n \\
 K_{III} &= \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_t
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal del material, ν el módulo de Poisson, Δu_i el DAG del nodo a un cuarto (según las direcciones representadas en la fig. 2.3) y L la longitud del elemento en la dirección normal al borde de la grieta.

En general, el campo asintótico de desplazamientos, o más convenientemente, del DAG, se puede escribir de forma genérica y simbólica como

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K} \cdot f(\theta) \sqrt{r} \quad (2.31)$$

donde K son los FIT y f es una función de la coordenada polar θ y las constantes elásticas del material C_{ij} . Particularizando esta expresión para $r = L/4$, $\theta = 0$, e igualándola con los desplazamientos de los nodos a 1/4 se obtienen los FIT a partir de estas incógnitas nodales.

Los casos particulares de materiales transversalmente isótropos y piezoeléctricos se tratarán en sus capítulos correspondientes.

2.6. Construcción y organización del sistema de ecuaciones

En este apartado se pretende dar una visión general acerca de cómo se plantea la formulación mixta del MEC desarrollada, pretendiendo servir de explicación práctica e incluso de guía básica para su implementación en un código de elementos de contorno. Para ello se presentará un esquema sobre el proceso de construcción del sistema de ecuaciones necesario para resolver problemas de Mecánica de la Fractura, distinguiendo entre distintas configuraciones posibles del medio que contiene a la grieta: grieta inmersa en un medio infinito, grieta inmersa en el interior de un medio finito, y grieta que intersecta con el contorno externo del problema (lo que se denominará de aquí en adelante como *grieta de borde*).

Como ya se ha adelantado anteriormente, la formulación mixta del MEC (denominada también formulación dual por otros autores) debe su nombre al empleo tanto de la EIC en desplazamientos (formulación clásica) como la EIC en tracciones (formulación hipersingular). Mediante el empleo de ambas ecuaciones se pretende generar una formulación lo más robusta, eficiente y versátil posible, aprovechando al máximo las ventajas que ofrece el MEC frente a otros métodos numéricos.

En los siguientes esquemas, para el sistema de ecuaciones clásico $\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t}$ se distinguirá entre tres tipos de subcontornos:

- e: contorno externo
- c^+ y c^- : una y otra cara de la grieta

Los indicadores (e , c^+ y c^-) se utilizarán simbólicamente como subíndices de submatrices

de \mathbf{G} y \mathbf{H} y de los vectores \mathbf{t} y \mathbf{u} . El primer subíndice de las submatrices indicará que se trata de ecuaciones construidas con puntos de colocación sobre nodos pertenecientes al subcontorno indicado, mientras que el segundo subíndice indica el subcontorno sobre el que se integra la solución fundamental que corresponda. Los subíndices de los vectores indicarán el subcontorno al que pertenecen las variables nodales.

A continuación se describe la forma en que obtiene el sistema de ecuaciones a resolver para las distintas configuraciones de grieta.

Grieta en medio infinito

En este caso tan solo es necesario discretizar la superficie de la grieta, quedando definido así exactamente que la grieta se encuentra inmersa en un medio infinito. No es preciso por tanto discretizar el medio o un subdominio hasta una distancia suficientemente lejana a la grieta, como ocurre con otros métodos de dominio (por ejemplo el Método de los Elementos Finitos) o en la formulación clásica del MEC, con los que se obtiene tan solo un modelo aproximado del medio infinito, además de resultar más compleja la discretización.

Haciendo uso de la formulación hipersingular, considérese tan solo las ecuaciones que se obtienen con puntos de colocación sobre una de las superficies de la grieta (ec. 2.32)

$$\begin{pmatrix} H_{c^+c^+} & H_{c^+c^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c^+} \\ u_{c^-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{c^+c^+} & G_{c^+c^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{c^+} \\ t_{c^-} \end{pmatrix} - (t^+) \quad (2.32)$$

El último término que aparece en la ec. (2.32) corresponde al término libre en tracciones de la formulación hipersingular. Teniendo en cuenta las relaciones (2.19) y (2.20) se tendrá que:

$$H_{c^+c^+} = -H_{c^+c^-}$$

$$G_{c^+c^+} = G_{c^+c^-}$$

Definiendo el DAG como $\Delta u = u_{c^+} - u_{c^-}$, y considerando que la grieta se encuentra autoequilibrada, que es lo más habitual ($t_{c^+} = -t_{c^-}$), se tiene que el sistema con el que se trabaja finalmente será

$$\mathbf{H}_{c^+c^+} \cdot \Delta u = \mathbf{t}_{c^+} \quad (2.33)$$

La EIC que se implementará (escrita de forma simbólica por simplicidad) será por tanto la siguiente:

$$\int_{\Gamma_{c+}} s^* \cdot N \cdot \Delta u = -t_{c+} \quad (2.34)$$

Hay que recalcar que aunque se discretice tan solo una de las superficies de la grieta, realmente se está modelando con ello la existencia de una grieta con sus dos superficies coincidentes. La condición de contorno más habitual en estos casos es la existencia de una presión interna en la grieta (tracciones conocidas), y se obtendrá como solución del problema el DAG en la grieta. Imponer una presión interna en la grieta supone resolver el mismo problema clásico en el que la grieta es sometida a tracción en el infinito.

Grieta en medio finito

En el caso en que se tenga una grieta en un medio finito, será necesario discretizar el contorno externo además del de la grieta. Si consideramos las ecuaciones construidas a partir de puntos de colocación en una de las caras de la grieta (EIC en tracciones) y en el contorno externo (EIC en desplazamientos) se tendrá el siguiente sistema simbólico de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} H_{c+c+} & H_{c+c-} & H_{c+e} \\ H_{ec+} & H_{ec-} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c+} \\ u_{c-} \\ u_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \cdot u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{c+c+} & G_{c+c-} & G_{c+e} \\ G_{ec+} & G_{ec-} & G_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{c+} \\ t_{c-} \\ t_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

En el primer miembro de la ec. (2.35) se ha introducido un vector con el término libre de la EIC en desplazamientos, afectado por el coeficiente c que depende de la geometría del contorno y que para un punto del contorno suave adopta el valor de $1/2$. Estos coeficientes se pueden hallar a partir de consideraciones geométricas, pero es más sencillo hallarlo a partir del resto de coeficientes de la matriz H mediante la condición de que un movimiento de sólido rígido no produce tensiones ni por tanto tracciones (véase por ejemplo el libro de Domínguez, 1993). Atendiendo de nuevo a las relaciones (2.19) y (2.20), y sus análogas para la formulación clásica (2.9) y (2.10) se tendrá que

$$\begin{aligned} H_{c+c+} &= -H_{c+c-} & H_{ec+} &= -H_{ec-} \\ G_{c+c+} &= G_{c+c-} & G_{ec+} &= G_{ec-} \end{aligned}$$

Considerando de nuevo el caso más habitual de grieta autoequilibrada, que incluye el caso más frecuente en que las tracciones en la grieta sean nulas, se llega finalmente al sistema (2.36)

$$\begin{pmatrix} H_{c^+c^+} & H_{c^+e} \\ H_{ec^+} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ u_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \cdot u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{c^+e} \\ G_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Las variables nodales del problema serán el DAG y tracciones (autoequilibradas) en la superficie de la grieta, y desplazamientos y tracciones en los nodos del contorno externo.

Las EIC a utilizar serán las que aparecen simbólicamente escritas en (2.37).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{c^+}} s^* \cdot N \cdot \Delta u + \int_{\Gamma_e} s^* \cdot N \cdot u_e &= \int_{\Gamma_e} d^* \cdot N \cdot t_e - t_{c^+} && \text{si pto. coloc.} \in \Gamma_{c^+} \\ c \cdot u_e + \int_{\Gamma_{c^+}} p^* \cdot \Delta u + \int_{\Gamma_e} p^* \cdot u_e &= \int_{\Gamma_e} u^* \cdot t_e && \text{si pto. coloc.} \in \Gamma_e \end{aligned} \quad (2.37)$$

Grieta de borde

En esta configuración se tendrá una grieta que intersecta con el contorno externo del problema. El esquema seguido en los casos anteriores, en los que solo se discretiza una cara de la grieta, sobre cuyos puntos de colocación se escribe la EIC en tracciones y se trabaja con el DAG como incógnita nodal, se podría mantener en este caso pero sería necesario hacer algún cambio en el esquema de colocación o el tipo de elementos a emplear.

Para escribir la EIC en tracciones es necesario que la geometría del contorno en el punto de colocación sea suave para que las tracciones estén unívocamente definidas, y además se ha de cumplir el requerimiento de continuidad $C^{1,\alpha}$ en dicho punto. Estas condiciones no se dan precisamente en la intersección de la grieta con el contorno externo, donde se produce además una discontinuidad en el campo de desplazamientos. Para solventar estas dificultades, una opción sería el empleo de elementos discontinuos o al menos semidiscontinuos, siguiendo un esquema similar al utilizado por García et al. (2004) en 2D, aunque en 3D resultaría bastante más complejo.

En la formulación mixta que aquí se presenta, y que ya fue desarrollada así por Ariza (2002), se opta por discretizar ambas caras de la grieta, escribiendo en una de ellas la EIC en desplazamientos y en otra la EIC en tracciones. De esta forma los elementos pueden seguir siendo continuos y se obtienen además resultados cuya visualización e interpretación resulta más sencilla.

De esta forma, el sistema de ecuaciones que se construye es el que aparece en (2.38).

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} H_{c^+c^+} & H_{c^+c^-} & H_{c^+e} \\ H_{c^-c^+} & H_{c^-c^-} & H_{c^-e} \\ H_{ec^+} & H_{ec^-} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c^+} \\ u_{c^-} \\ u_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2u_{c^+} + 1/2u_{c^-} \\ c \cdot u_e \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} G_{c^+c^+} & G_{c^+c^-} & G_{c^+e} \\ G_{c^-c^+} & G_{c^-c^-} & G_{c^-e} \\ G_{ec^+} & G_{ec^-} & G_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{c^+} \\ t_{c^-} \\ t_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

En este sistema aparecen los desplazamientos de una y otra cara de la grieta en el término libre de la EIC en desplazamientos escrita sobre la grieta, lo que impide que se pueda trabajar con el DAG a partir de la EIC en desplazamientos, tal y como se explicó anteriormente (ec. 2.11). Al mantener como incógnitas nodales los desplazamientos en una y otra cara de la grieta, el primer miembro de (2.38) no se puede simplificar. En el segundo miembro se pueden seguir haciendo las mismas consideraciones sobre grieta autoequilibrada e igualdad de términos asociados a la integración sobre una y otra cara de la grieta, por lo que se cancelan los términos que multiplican a las tracciones nodales en la grieta, salvo el término libre de la EIC en tracciones.

De esta forma queda el sistema simplificado que se recoge en (2.39).

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} H_{c^+c^+} & H_{c^+c^-} & H_{c^+e} \\ H_{c^-c^+} & H_{c^-c^-} & H_{c^-e} \\ H_{ec^+} & H_{ec^-} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c^+} \\ u_{c^-} \\ u_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2u_{c^+} + 1/2u_{c^-} \\ c \cdot u_e \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} G_{c^+e} \\ G_{c^-e} \\ G_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Las EIC que habrá que utilizar se pueden escribir simbólicamente como se recoge en (2.40).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_{c+}} s^* \cdot N \cdot u_{c+} + \int_{\Gamma_{c-}} s^* \cdot N \cdot u_{c-} + \int_{\Gamma_e} s^* \cdot N \cdot u_e = -t_{c+} + \int_{\Gamma_e} d^* \cdot N \cdot t_e, \text{ si pto. coloc. } \in \Gamma_{c+} \\
& \frac{1}{2}(u_{c+} + u_{c-}) + \int_{\Gamma_{c+}} p^* \cdot u_{c+} + \int_{\Gamma_{c-}} p^* \cdot u_{c-} + \int_{\Gamma_e} p^* \cdot u_e = \int_{\Gamma_e} u^* \cdot t_e, \text{ si pto. coloc. } \in \Gamma_{c-} \\
& c \cdot u_e + \int_{\Gamma_{c+}} p^* \cdot u_{c+} + \int_{\Gamma_{c-}} p^* \cdot u_{c-} + \int_{\Gamma_e} p^* \cdot u_e = \int_{\Gamma_e} u^* \cdot t_e, \text{ si pto. coloc. } \in \Gamma_e \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Normalización del sistema

El sistema de ecuaciones $\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t}$ considerado hasta ahora, ha de ser reorganizado para constituir un sistema del tipo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde en el vector \mathbf{x} estarán las incógnitas nodales y el vector \mathbf{b} se construirá a partir de las variables nodales conocidas por condición de contorno, multiplicadas por los términos de \mathbf{H} o \mathbf{G} , según corresponda.

Para que este sistema de ecuaciones sea resuelto de una forma más eficiente y el método resulte más robusto, es conveniente que los coeficientes de la matriz \mathbf{A} sean de un orden parecido. Del mismo modo es deseable que los términos del vector \mathbf{b} y del vector solución \mathbf{x} sean también de un orden similar. La forma de conseguir ésto en la medida de lo posible es lo que se entiende aquí por normalización del sistema.

En este sentido, hay que tener en cuenta que tanto los términos de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{t} , como los de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} son de un orden distinto. Si atendemos a la expresión de la solución fundamental, hay que tener en cuenta que la solución en tracciones se obtiene por derivación de la solución en desplazamientos y combinación según la ley de comportamiento del material. Si se trabaja en unidades del sistema internacional, se tendrá que las constantes elásticas son del orden de 10^{11} , lo cual quiere decir que los términos de u_{lk}^* son del orden de 10^{11} veces menores que los de p_{lk}^* . Cuando se obtienen los términos de la solución fundamental hipersingular se vuelve a aplicar derivación y combinación según la ley de comportamiento, lo cual da lugar a que los términos d_{lmk}^* sean del mismo orden que los de p_{lk}^* , mientras que los términos de s_{lmk}^* son del orden de 10^{11} veces superiores. En cuanto a las incógnitas nodales, los valores de los desplazamientos serán también normalmente del orden de 10^{11} veces menores que las tracciones.

Para conseguir que el sistema de ecuaciones sea finalmente más o menos homogéneo lo que se hace es multiplicar o dividir términos de \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{u} o \mathbf{t} , por un factor que sea del orden de las constantes elásticas del material. En materiales isótropos, el factor elegido es el módulo de elasticidad

transversal del material (μ), mientras que en materiales transversalmente isótropos se considerará el factor C_{44} de la ley de comportamiento, que es el módulo de elasticidad transversal en el plano de isotropía (definido en el capítulo 4).

En la ec. (2.41) se presenta un esquema de la forma en que se construye el sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ normalizado por medio de el factor μ . El subíndice c indica que se trata de EIC en desplazamientos (ecuación clásica), mientras que el subíndice H indica que se trata de EIC en tracciones (ecuación hipersingular). Ambos tipos de ecuaciones dan lugar a términos de \mathbf{H} y \mathbf{G} que pasan a formar parte de la matriz \mathbf{A} cuando multiplican a incógnitas del problema, mientras que el vector \mathbf{b} se construye a partir de estas matrices cuando multiplican a los valores de \mathbf{u} o \mathbf{t} conocidos por condición de contorno (escritos como \bar{u} o \bar{t}).

$$\begin{array}{rcl}
 \overbrace{G_c \cdot \mu}^{\mathbf{A}} \cdot \overbrace{t_c / \mu}^{\mathbf{x}} & = & \overbrace{H_c \cdot \bar{u}_c}^{\mathbf{b}} \\
 G_h \cdot t_h / \mu & = & H_h / \mu \cdot \bar{u}_h \\
 H_c \cdot u_c & = & G_c \cdot \bar{t}_c \\
 H_h / \mu \cdot u_h & = & G_h / \mu \cdot \bar{t}_h
 \end{array} \tag{2.41}$$

Según este esquema las tracciones que se obtengan como incógnitas del sistema deberán ser multiplicadas posteriormente por el factor de normalización para obtener su verdadero valor.

Para el caso piezoeléctrico, la normalización del sistema se hace más complicada por intervenir en la ley de comportamiento constantes de valores muy dispares. En el capítulo 5 se explicará como se realiza de forma muy sencilla el proceso de normalización para ese tipo de materiales.

Capítulo 3

Avances en el tratamiento numérico de la EIC en tracciones

3.1. Introducción

En este capítulo se tratan aspectos numéricos relativos a la implementación de la EIC en tracciones en el código de elementos de contorno desarrollado. Este análisis pretende servir como justificación de la validez del método desarrollado, así como mejorar en la medida de lo posible la eficiencia del mismo.

Para ello se seguirán considerando problemas estáticos, ya que los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares, a los cuales se debe la dificultad en la implementación de esta ecuación, están presentes tan solo en la parte estática de la solución fundamental, y no en la parte dinámica. Esto es así tanto para materiales isótropos como transversalmente isótropos y piezoeléctricos, por lo que en la mayor parte del capítulo se considerarán materiales del primer tipo, ya que el código sobre el que hay que trabajar es más sencillo y las conclusiones a las que se llegue serán aplicables del mismo modo en otros tipos de materiales. No obstante, en estos casos se puede requerir un mayor nivel de exigencia en la eficiencia numérica en algunos tipos de problemas, por lo que en los capítulos posteriores se presentarán aplicaciones y estudios numéricos sobre algunos casos concretos en materiales no isótropos.

3.2. Evaluación de integrales cuasi-singulares

Como ya se comentó en el capítulo anterior, la EIC en tracciones es regularizada tan solo sobre el elemento que contiene al punto de colocación. Esto obliga a integrar directamente los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares sobre los elementos próximos al punto de colocación.

En teoría, estas integrales son no singulares y por tanto se pueden integrar numéricamente de forma directa, mediante una cuadratura simple de Gauss, por ejemplo. Sin embargo, es bien sabido que la evaluación de este tipo de integrales puede ser delicada desde un punto de vista numérico por su carácter cuasi-singular, y su evaluación ha de ser precisa debido al hecho de que su peso en la construcción de los términos de las matrices **G** y **H** es muy significativo, especialmente cuando se trabaja con núcleos hipersingulares. Una evaluación imprecisa de este tipo de integrales puede llevar por tanto a resultados finales erróneos.

Con el objeto de evaluar este tipo de integrales correctamente se puede pensar en principio en la necesidad de considerar un número suficiente de puntos de integración, de forma que el error que se cometa sea aceptable. Esta opción es válida siempre y cuando se tenga en cuenta que este número dependerá del grado de proximidad del punto de colocación al elemento sobre el que se integre. En caso contrario, si en el código de elementos de contorno se considera el mismo número de puntos de integración en todas las situaciones, éste resultará ineficiente y el tiempo de computación puede resultar excesivo si se utiliza un número elevado, mientras que será impreciso si se utiliza un número demasiado pequeño.

El hecho de que el carácter singular de los núcleos a integrar aumenta con la aproximación del punto de colocación al elemento sobre el que se integre, y que por tanto se requiere distinto número de puntos de integración en función de la distancia relativa del punto de colocación al elemento, hace que sea frecuente la programación de lo que se conoce como métodos adaptativos de integración. Un estudio empírico sobre número de puntos de integración, posición del punto de colocación respecto del elemento de integración y errores cometidos fue realizado por Bu y Davies (1995) para núcleos del tipo $1/r$ y $1/r^2$.

En la implementación de estos métodos hay que tener presente que un mayor grado de adaptación supone un mayor esfuerzo de programación y complejidad en el código, además de un coste computacional que debe en todo caso ser rentable, por lo que se debe llegar a una solución de compromiso.

El método adaptativo más sencillo e inmediato consiste en evaluar la distancia relativa del

punto de colocación al elemento de integración y utilizar un mayor o menor número de puntos de integración en función de dicha distancia relativa. En función del número de intervalos considerados en la distancia relativa y posibilidades de número de puntos de integración a considerar el método será “adaptativo” en mayor o menor medida.

Una alternativa que permite fácilmente un alto grado de adaptación y resulta incluso más sencilla de implementar es aplicar la técnica de subdivisiones. Esta técnica consiste en realizar una serie de divisiones sobre el elemento de integración y en cada una de ellas realizar una cuadratura con los puntos de integración que se consideren oportunos. Esto equivale a dividir la integración en partes, pudiendo aumentar significativamente y con poco esfuerzo el número total de puntos de integración utilizados, en la medida en que se realicen más o menos divisiones en el elemento. Esta técnica fue utilizada por Watson (1979) y es la que también emplearon Ariza (2002) y Ariza y Domínguez (2004) en el trabajo previo al que aquí se presenta.

La técnica de subdivisiones puede ser mejorada si en vez de realizar una subdivisión uniforme del elemento se realiza una subdivisión no uniforme en función de la distancia y posición relativa entre el punto de colocación y el elemento, de forma que las subdivisiones serán de menor tamaño en las zonas más próximas al punto de colocación. Además, pueden emplearse distinto número de puntos de integración en las distintas subdivisiones. Lachat y Watson (1976), Jun et al. (1985) y Bu y Davies (1995) son algunos de los autores que han propuesto esquemas de integración de este tipo.

Otra opción alternativa a la técnica de subdivisiones es realizar una transformación de coordenadas sobre el dominio de integración, de forma que se introduce un jacobiano en la integración que tienda a cancelar el carácter cuasi-singular del núcleo a integrar. Este tipo de transformaciones conllevan además una redistribución de los puntos de integración sobre el elemento, concentrándose en las proximidades del punto de colocación. El carácter adaptativo de este tipo de transformaciones proviene precisamente de esta redistribución de los puntos de integración, además del hecho de que su efecto es más acusado en la medida en que el punto de colocación se encuentre más cerca del elemento. Entre este tipo de técnicas la más conocida y de más extendida aplicación en el MEC es la transformación polinómica propuesta por Telles (1987). Otras transformaciones son las propuestas por Takahashi y Nori (1973) a través de una doble exponencial, Johnston (1999) utilizando una función sigmoïdal o por Johnston y Elliott (2005) por medio de una función seno hiperbólico.

Tal y como señala Telles (1987), la aplicación de una transformación de coordenadas ofrece una

ventaja importante frente a la técnica de subdivisiones. Esta ventaja radica en el hecho de que con esta última el mayor grado del polinomio que se puede integrar exactamente sobre el elemento vendrá dado por el menor número de puntos de integración que se emplee en las subdivisiones, mientras que este grado será significativamente mayor cuando solo se haga una transformación de coordenadas, ya que en este caso el número de puntos de integración que se distribuyan sobre todo el elemento será mayor que el que se utilice en cada una de las subdivisiones. Por tanto, aplicando una transformación de coordenadas se podrá integrar con exactitud una función de mayor orden aun cuando el número total de puntos de integración sea mucho menor.

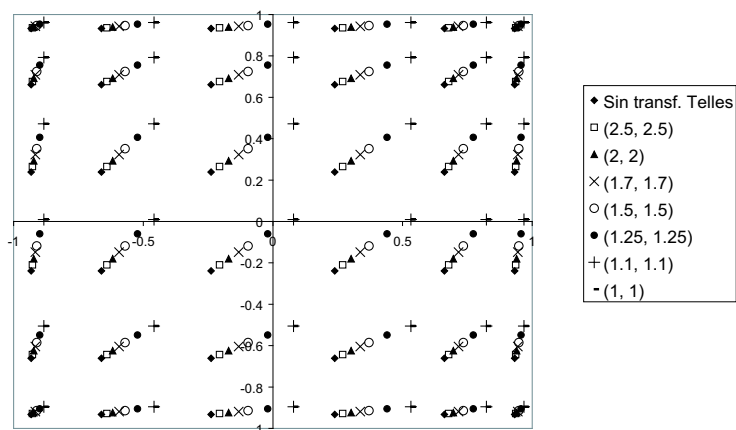
Otras técnicas más complejas para la evaluación de integrales cuasi-singulares consisten en la manipulación de los núcleos de integración. Por ejemplo, Granados y Gallego (2001) proponen una descomposición o regularización en el plano complejo de los núcleos para problemas en 2D, y Niu et al. (2005) proponen una integración por partes y una posterior transformación de los residuos cuasi-singulares en integrales de línea.

Como se ha señalado anteriormente, en el trabajo previo a esta tesis realizado por Ariza (2002) y Ariza y Domínguez (2004) se aplicaron subdivisiones uniformes para la evaluación de integrales cuasi-singulares. Con el objeto de mejorar la robustez y fiabilidad de la formulación, así como poder afrontar con garantías problemas cada vez más complejos, se ha considerado oportuno la mejora del proceso de evaluación de integrales cuasi-singulares. Para ello se ha decidido implementar la transformación de Telles.

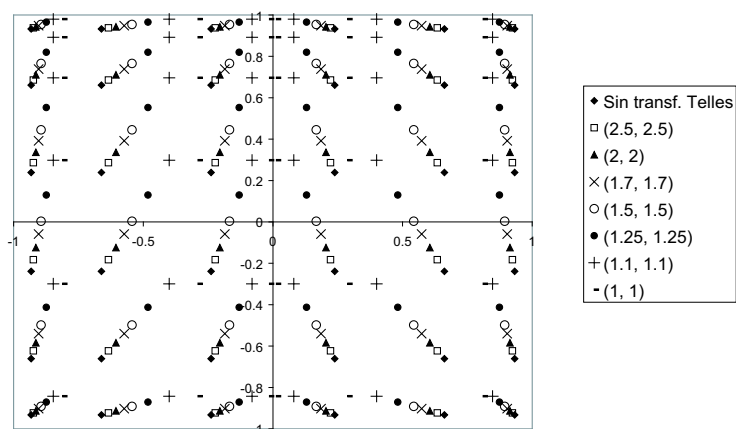
Esta transformación consiste en realizar una redistribución de puntos de Gauss mediante una transformación polinómica de coordenadas. Los puntos tienden así a concentrarse en las cercanías del punto de colocación, y de esta forma se puede evaluar mejor el comportamiento singular de los núcleos a integrar. Esta redistribución es tanto más acusada cuanto más próximo esté el punto de colocación al elemento de integración. Además, el jacobiano asociado a la transformación de coordenadas tiende a cancelar dicho comportamiento singular.

La redistribución de los puntos de Gauss se ilustra en la fig. 3.1. En esta figura se representan las posiciones de 6x6 puntos de Gauss distribuidos sobre un elemento normalizado de 2x2 para distintas posiciones del punto de colocación. En la fig. 3.1a se consideran puntos de colocación cercanos al nodo de de la esquina superior derecha y en la fig. 3.1b son cercanos al nodo central del lado superior. En la leyenda se indican las coordenadas del punto de colocación en cada caso.

La transformación aplicada, tal y como se propone en el artículo de Telles (1987), está definida por unos parámetros optimizados para integrandos con singularidad del tipo $1/r$ y $1/r^2$. En nue-



a)



b)

Figura 3.1: Redistribución de 6x6 puntos de integración de Gauss al aplicar la transformación de Telles para distintas coordenadas del punto de colocación: cercanas al nodo de esquina superior derecha (a) y al nodo central del lado superior(b).

stro caso, la singularidad llega a ser de orden $1/r^3$, pero la optimización de los parámetros para este caso no diferiría mucho de los valores propuestos, al menos para los niveles de proximidad del punto de colocación al elemento que se van a considerar.

La transformación de Telles, si bien mejora los resultados de las integrales a evaluar, supone sin embargo un pequeño esfuerzo computacional para llevarla a cabo. Este esfuerzo debe ser minimizado para que la transformación sea computacionalmente rentable.

La transformación propuesta por Telles está formulada en principio para problemas en dos dimensiones. Su aplicación pasa por hallar el punto del elemento más cercano al punto de colocación, y la distancia entre ambos. A partir de estos dos parámetros se hallan los cuatro coeficientes del polinomio de tercer grado de la transformación, según las expresiones que aparecen en el artículo original.

La extensión a tres dimensiones que se realiza en este trabajo es una simplificación de la que realmente debiera hacerse en este tipo de problemas. Sin embargo, el propio Telles aconseja realizarla de esta manera por ser más simple y no suponer apenas pérdida de precisión en los resultados.

Esta forma simplificada consiste en realizar la transformación para las dos coordenadas naturales ξ_1 y ξ_2 de manera independiente. Esto lleva a una redistribución de los puntos de integración según patrones rectilíneos paralelos a los ejes ξ_1 y ξ_2 (como aparece en la fig. 3.1), cuando lo ideal sería una redistribución de forma radial con el origen en el punto de colocación.

Desde un punto de vista computacional, el proceso crítico en este proceso es localizar el punto del elemento más cercano al punto de colocación, ya que un algoritmo ineficaz ralentizaría mucho el proceso de integración. Además, se ha de tener en cuenta que la transformación se hace menos perceptible, además de innecesaria, cuanto más lejos está el punto de colocación del elemento.

Así pues, lo primero que debe hacerse es establecer una distancia relativa mínima entre el punto de colocación y el elemento a partir de la cual no se llevará a cabo la transformación. La forma más rápida y sencilla de aplicar este criterio es hallar la distancia del punto de colocación a cada uno de los nodos del elemento, y si la menor de estas distancias es mayor que la distancia crítica establecida, entonces puede concluirse que la transformación no es necesaria y la integración sobre el elemento puede hacerse mediante simple cuadratura de Gauss.

En este trabajo, se ha considerado esta distancia crítica como una frontera entre lo que llamaremos "cerca" o "lejos" del elemento. Cuando el punto de colocación se encuentre "cerca" del elemento se llevará a cabo la transformación de Telles y se utilizará un número de puntos

de integración que será mayor que el que se use cuando el punto de colocación esté “lejos” del elemento.

Se ha comprobado, mediante la resolución de distintos problemas con distintos valores de distancia crítica y distintos números de puntos de integración según se encuentre el punto de colocación cerca o lejos del elemento, que el valor adecuado para la distancia crítica suele estar entre 2 y 3 veces el tamaño característico del elemento. Este tamaño característico se toma según cada una de las dos coordenadas naturales por separado, ya que la transformación se aplica a cada una por separado. El tamaño característico en cada dirección (L_1 y L_2) será

$$L_1 = \|x(1, \bar{\xi}_2) - x(-1, \bar{\xi}_2)\|$$

$$L_2 = \|x(\bar{\xi}_1, 1) - x(\bar{\xi}_1, -1)\|$$

donde $\|\cdot\|$ indica la distancia entre dos puntos en el espacio cartesiano, y $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ son las coordenadas naturales del punto del elemento más cercano al punto de colocación.

En el caso de que la distancia del punto de colocación al nodo más cercano sea menor que la distancia crítica establecida, se pasará a hallar con mayor precisión el punto más cercano. Este proceso es necesario en la mayoría de métodos adaptativos de integración, y resulta crítico su realización, por lo que ha de llevarse a cabo de manera eficiente, sencilla y suficientemente aproximada. Existen técnicas para ello desarrolladas por algunos autores (Bialecki et al., 1993), pero pueden resultar excesivamente complejas para los objetivos que habitualmente se persiguen.

En este trabajo, el proceso ideado para realizar esta operación se basa en la hipótesis de que el punto más cercano siempre estará en el contorno del elemento. Esta hipótesis será aplicable en los problemas que se van a considerar aquí, en los que se considerarán grietas planas y perpendiculares a alguna de las superficies de la pieza que las contenga, que estará compuesta por superficies perpendiculares entre sí (prisma, cilindro). Se supone además que las superficies de este contorno externo paralelas a la superficie de la grieta, para las cuales podría ser falsa la hipótesis anterior, estarán lo suficientemente lejos de la grieta como para que no sea necesario la transformación de Telles.

El proceso iterativo desarrollado para encontrar el punto más cercano se resume de la siguiente manera. Una vez localizado el nodo más cercano al punto de colocación, se consideran los nodos del contorno adyacentes a uno y otro lado del primero, y un punto en posiciones interme-

días entre cada par de nodos. Se tiene así un conjunto de 5 puntos en los que la posición central es el nodo más cercano y las posiciones extremas son también nodos del elemento.

De este nuevo conjunto se vuelve a tomar de nuevo el punto más cercano al punto de colocación (solo será necesario evaluar la distancia de los dos nuevos puntos considerados). Sobre este punto se realiza la operación análoga a la anterior: se consideran los dos puntos del conjunto anterior adyacentes al más cercano y se considera un punto adicional en posición intermedia entre cada pareja. De esta forma se tiene un nuevo conjunto de 5 puntos sobre el que se puede repetir la operación anterior.

Repitiendo el proceso un número finito de veces, se puede obtener con suficiente precisión el punto del elemento más cercano al punto de colocación. En este trabajo se ha comprobado que con 5 iteraciones se consiguen excelentes resultados, teniendo en cuenta además que en muchos casos el punto más cercano coincide con el nodo más cercano.

En el caso de problemas con geometrías más complicadas, en las que el punto más cercano pudiera estar en el interior del elemento, se podría desarrollar un método con la misma filosofía que el aquí planteado, aunque obviamente sería algo más complejo.

Hasta ahora, se han considerado tan solo las integrales cuasi-singulares que hay que evaluar sobre los elementos cercanos al punto de colocación, pero también sobre el propio elemento hay que evaluar una serie de integrales de línea sobre el contorno del elemento cuyos integrandos son incluso fuertemente singulares. Estas integrales son en realidad cuasi-singulares ya que el punto de colocación se encuentra a una cierta distancia del contorno del elemento.

Para evaluar estas integrales también se aplica la transformación de Telles. En este caso, al ser una integral de línea que se descompone en la suma de la integral a lo largo de cada uno de los lados del elemento, se puede aplicar la transformación tal y como aparece en el trabajo de Telles para elementos de contorno en problemas bidimensionales. En este caso, una forma simple y bastante aproximada de encontrar el punto del lado del elemento en cuestión más cercano al punto de colocación, es suponer que éste será el que tenga el mismo valor de la coordenada natural perpendicular a dicho lado que el punto de colocación.

3.3. Número de puntos de integración y posición de puntos de colocación

Para evaluar las integrales cuasi-singulares de manera eficiente, se hace necesario hacer un estudio numérico del proceso de integración para decidir la cantidad de puntos de integración que se deben emplear y la posición más adecuada para los puntos de colocación al aplicar el Método de Colocación Múltiple. En principio, interesará por un lado utilizar el menor número de puntos de integración posible para reducir el tiempo computacional, y por otro lado que los puntos de colocación estén lo más cerca posible del nodo en que se plantea la ecuación, para que la matriz del sistema sea de diagonal dominante en la medida de lo posible. Sin embargo, ambos objetivos han de alcanzarse sin comprometer la fiabilidad y robustez de la formulación desarrollada. En este apartado se resumen las conclusiones a las que se llegó tras realizar este estudio.

Para analizar las integrales cuasi-singulares sobre un elemento que no contiene al punto de colocación, se evaluaron las integrales que aparecen en las expresiones (3.1) para distintos números de puntos de Gauss y distintas posiciones del punto de colocación respecto al elemento.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} s_{lmk}^* d\Gamma \\ \int_{\Gamma_0} d_{lmk}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

siendo s_{lmk}^* y d_{lmk}^* los términos de los núcleos de la solución fundamental hipersingular, y Γ_0 un elemento de contorno normalizado (superficie cuadrada de 2×2 , del tipo representado en la fig. 3.1).

En el código de elementos de contorno completo estas integrales vienen afectadas por las funciones de forma del elemento y la normal en el punto de colocación. Para este estudio, por simplicidad, se ha considerado tan solo la expresión de los núcleos s_{lmk}^* y d_{lmk}^* , ya que las funciones de forma son suaves y regulares. Se ha tomado además las expresiones de estos núcleos para el caso isótropo, ya que son más sencillas que las del caso transversalmente isótropo y piezoeléctrico, mientras que el carácter singular es el mismo en todos los casos.

Se han considerado distintas posiciones del punto de colocación a lo largo del eje Y (perpendicular a uno de los lados), de la diagonal y de la normal del elemento. A lo largo de estas direcciones

se obtuvieron resultados para 6x6, 7x7, 8x8, 12x12 y 20x20 puntos de Gauss. A modo de ejemplo, en las figuras 3.2 y 3.3 se muestran una serie de gráficos con los resultados obtenidos para uno de los términos s_{lmk}^* (concretamente el término s_{333}^*), que sirven como ilustración de los resultados obtenidos.

En la fig. 3.2a aparece el resultado de integrar el término s_{333}^* (eje de ordenadas) para distintos puntos de colocación con coordenadas $(0,Y,0)$, representándose la coordenada Y en el eje de abscisas. La leyenda indica el número de puntos de Gauss al que corresponde cada curva de resultados y si se ha aplicado la transformación de Telles (CT) o no (ST).

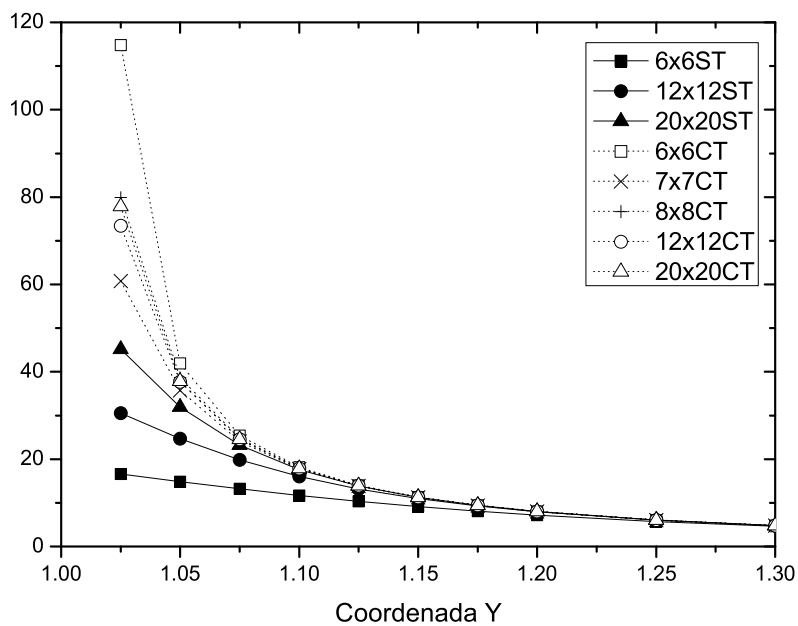
En la fig. 3.2b aparece una estimación de los errores cometidos en cada caso. Esta estimación se realiza calculando el tanto por ciento de diferencia entre el valor obtenido y el que se obtiene con 20x20 puntos de Gauss y la transformación de Telles. Esta estimación es válida para llegar a las conclusiones que se buscan, ya que se observó en todos los casos una mayor convergencia de los resultados cuando se aplica la transformación de Telles y cuanto mayor es el número de puntos de Gauss.

En las figs. 3.3a y 3.3b se presentan el mismo tipo de resultados para puntos de colocación $(0,1,Z)$, localizados sobre el nodo intermedio de un lado del elemento. Los valores de la coordenada Z se representan en el eje de abscisas. En la representación de los errores estimados se puede observar que para la mayoría de series de resultados se obtienen valores que quedan fuera del margen de error representado.

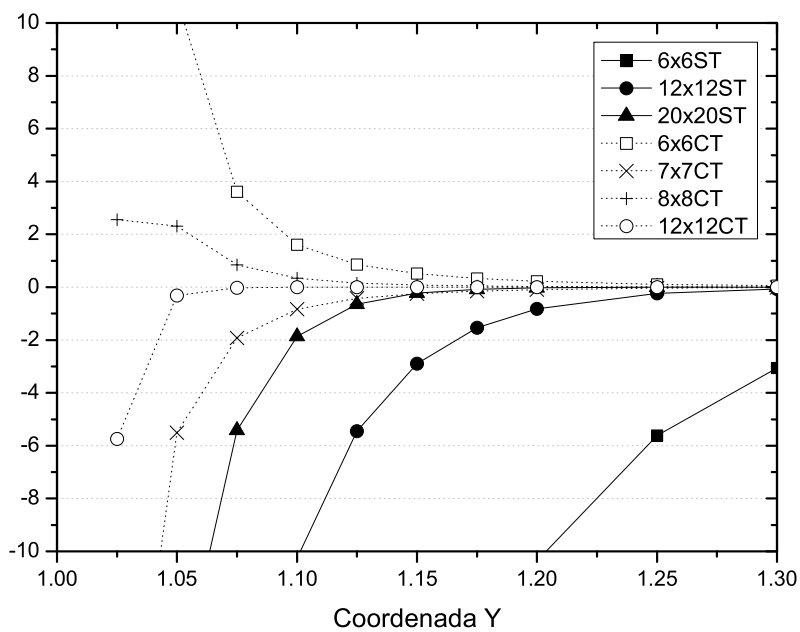
De estas dos representaciones se puede concluir que en el caso de aproximación del punto de colocación según el eje Y se obtienen buenos resultados con 12x12 puntos de Gauss y hasta una aproximación relativa al elemento de 0.1. Sin embargo, cuando el punto de colocación se acerca según la dirección Z, no parece razonable situar el punto de colocación más allá de una distancia relativa de 0.15 al elemento.

Hay que aclarar que estas distancias de aproximación se referirán, en el desarrollo del código de elementos de contorno completo, a las coordenadas naturales del punto de colocación sobre el elemento al que pertenezca. Es decir, al hablar de una aproximación relativa de 0.15 se quiere decir que el punto de colocación tendrá unas coordenadas naturales en el elemento sobre el que se ubique que adoptarán los valores $\xi_1, \xi_2 = 0 \pm 0.85$, según el nodo de que se trate.

También se debe señalar que las conclusiones anteriores serán válidas siempre que el tamaño del elemento sobre el que se ubique el punto de colocación sea similar al tamaño del elemento sobre el que se realiza la integración. Esta condición se cumplirá siempre en discretizaciones bien

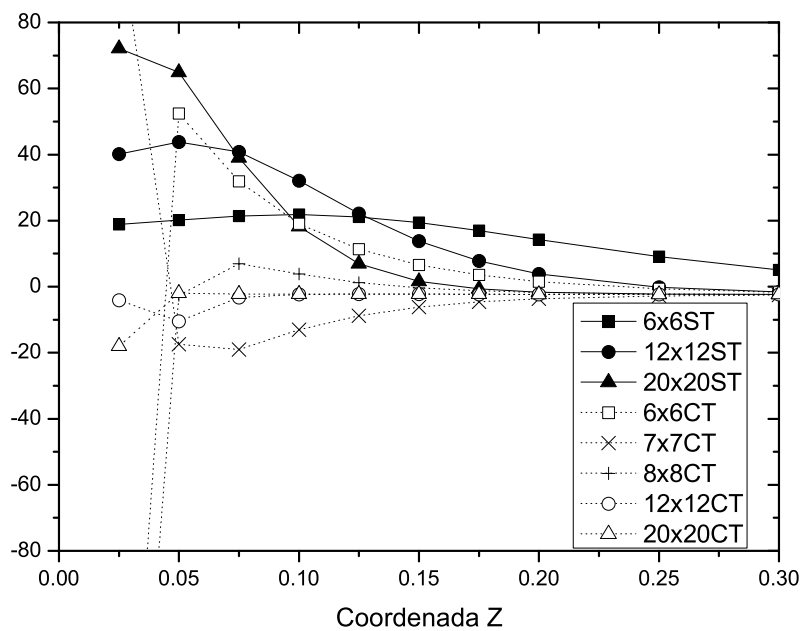


(a)

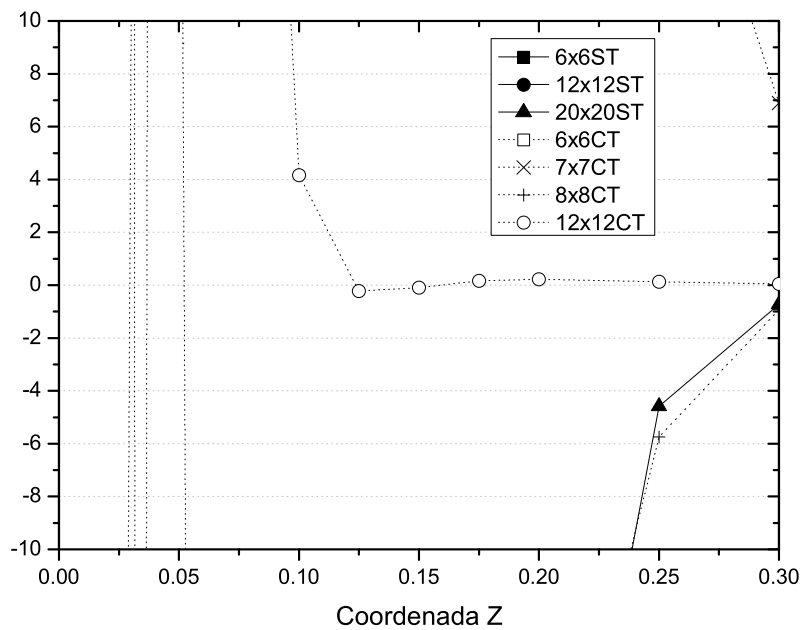


(b)

Figura 3.2: a) Valores de integración del término s_{333}^* para distintos puntos de colocación a lo largo del eje Y del elemento. b) Estimación de errores cometidos (en tanto por ciento).



(a)



(b)

Figura 3.3: a) Valores de integración del término s_{333}^* para distintos puntos de colocación a lo largo de la dirección $(0,1,Z)$ del elemento. b) Estimación de errores cometidos (en tanto por ciento).

construidas.

Analizando las integrales de línea sobre el elemento regularizado se obtienen conclusiones similares en cuanto al número de puntos de Gauss necesario y la situación de los puntos de colocación.

Para llegar a esta conclusión se obtuvieron las contribuciones de este tipo de integrales a los términos de las matrices **H** y **G**. Se trabajó con un elemento normalizado como el considerado anteriormente y distintas posiciones del punto de colocación, cercanas a un nodo de esquina y a un nodo en el medio de un lado del elemento.

A modo de ejemplo, en la fig. 3.4a se muestra la contribución al término (3,15) de la matriz **H** de dimensión 3×27 asociada a la integración sobre el propio elemento, para distintas posiciones $(X, X, 0)$ del punto de colocación, en la dirección de la diagonal y próximas al nodo 5 del elemento (el término representado sería por tanto la contribución a un término de la diagonal de la matriz **H** del sistema). En la fig. 3.4b se muestra la estimación del error cometido, en esta ocasión estimado con respecto al resultado obtenido con 30 puntos de Gauss para la integración en cada lado del elemento.

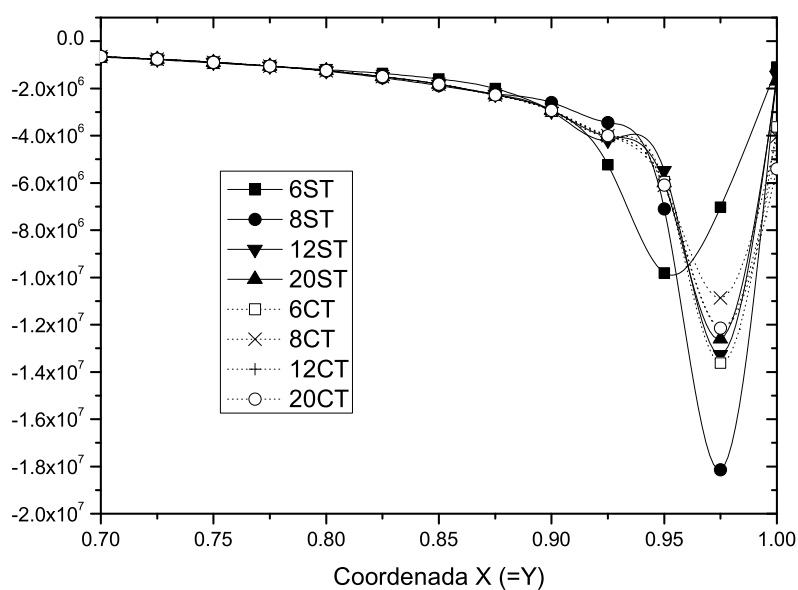
En la fig. 3.5 se realiza la misma representación pero para el nodo 4 del elemento y el término (3,12) de la matriz, que se encuentra en el medio de un lado del elemento.

En ambas representaciones se puede observar que parecería también razonable utilizar la transformación de Telles para poder situar los puntos de colocación a una distancia de 0.1 o 0.15 del nodo, y utilizar 12 puntos de Gauss en la integración sobre cada uno de los lados del elemento.

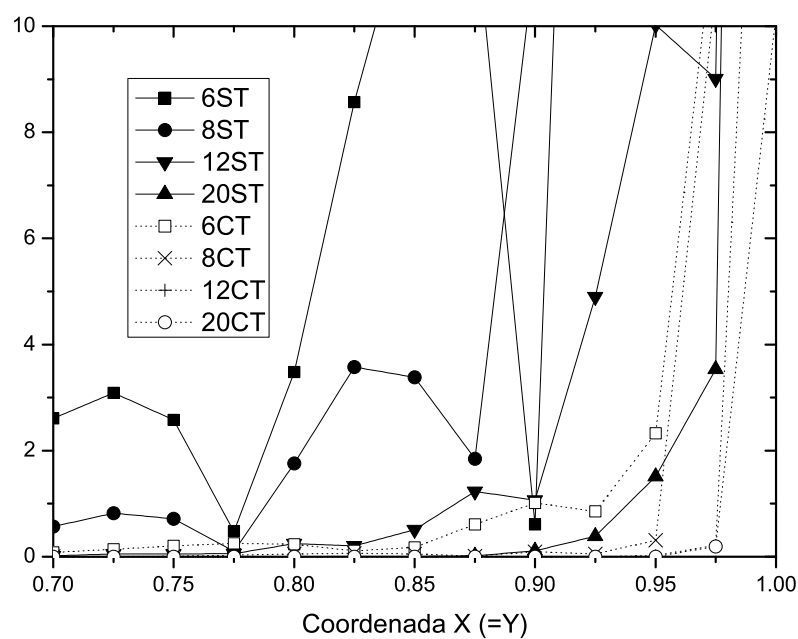
Las conclusiones a las que se llega tras analizar la evaluación de integrales cuasi-singulares desde fuera del elemento y las integrales de línea al integrar sobre el propio elemento coinciden entre sí.

Sin embargo, la conclusión final se ve modificada por el análisis de las integrales de superficie débilmente singulares que hay que realizar sobre el propio elemento. Estas integrales se evalúan mediante la técnica tradicional de división del elemento en cuatro triángulos sobre los que se realiza la integración (Lachat y Watson, 1976). Cada uno de estos triángulos se transforma en un dominio cuadrado sobre el que se distribuyen los puntos de integración en la forma habitual. La transformación del triángulo en cuadrado conlleva un jacobiano que tiende a cancelar el comportamiento débilmente singular del integrando.

Para ilustrar la influencia de este tipo de integrales, en la fig. 3.6 se representa la contribución de las integrales de superficie sobre el propio elemento al término (3,12) de la matriz **H**, para

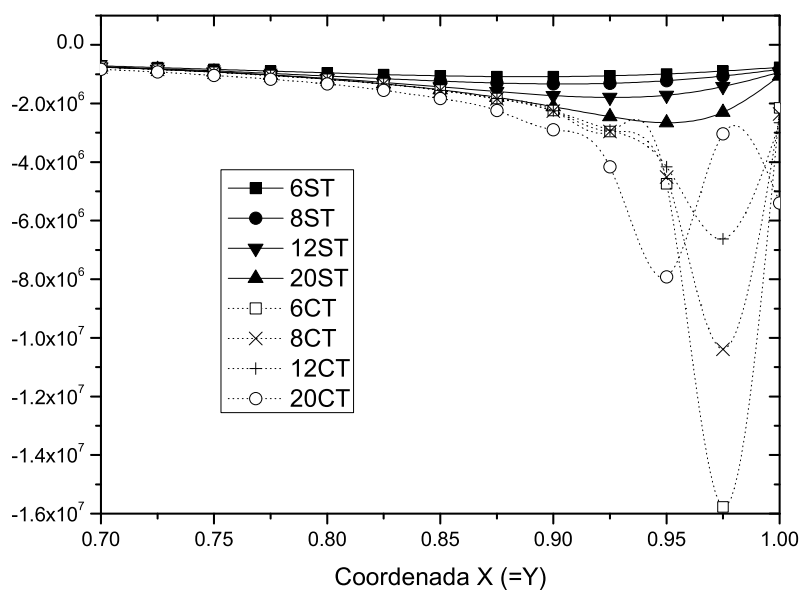


(a)

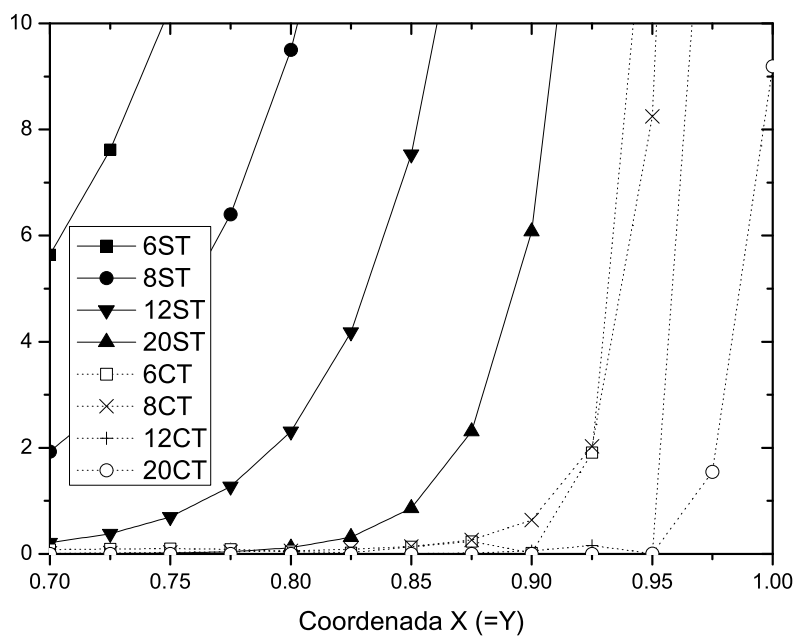


(b)

Figura 3.4: a) Contribución de integrales de línea sobre el propio elemento al término (3,15) de la matriz H, para distintas posiciones del punto de colocación a lo largo de la diagonal ($X=Y$) del elemento. b) Estimación de errores cometidos (en tanto por ciento).



(a)



(b)

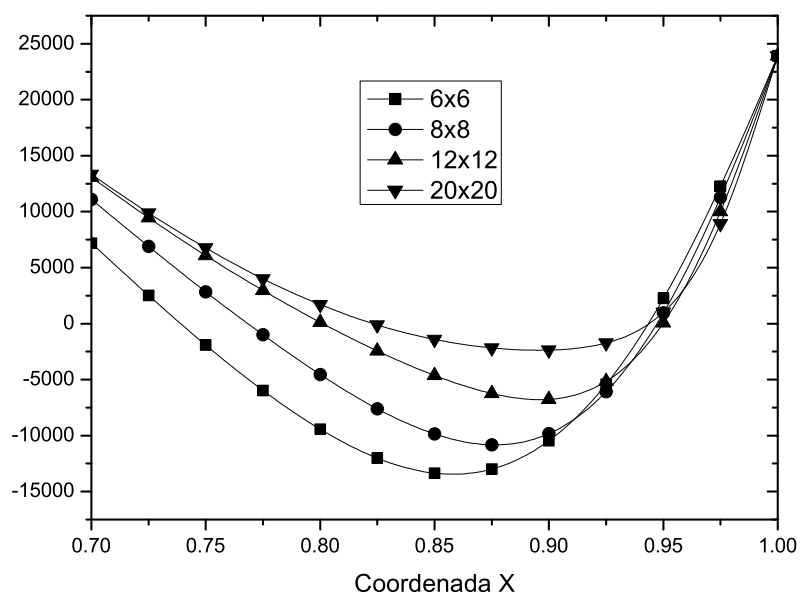
Figura 3.5: a) Contribución de integrales de línea sobre el propio elemento al término (3,12) de la matriz H, para distintas posiciones del punto de colocación a lo largo de la dirección X del elemento. b) Estimación de errores cometidos (en tanto por ciento).

distintos puntos de colocación de coordenadas $(X,0,0)$ cercanas al nodo 4 del elemento. Se observa como la diferencia en los resultados obtenidos para distinto número de puntos de Gauss es mucho mayor que en el otro tipo de integrales consideradas. Además, estas diferencias se hacen mayores y los resultados son más inestables cuanto más próximo se encuentra el punto de colocación al nodo. Esto se aprecia aún más claramente en la fig. 3.6b, donde se representa la estimación del error cometido en cada caso (el error se estima con respecto al valor obtenido con 30x30 puntos de Gauss).

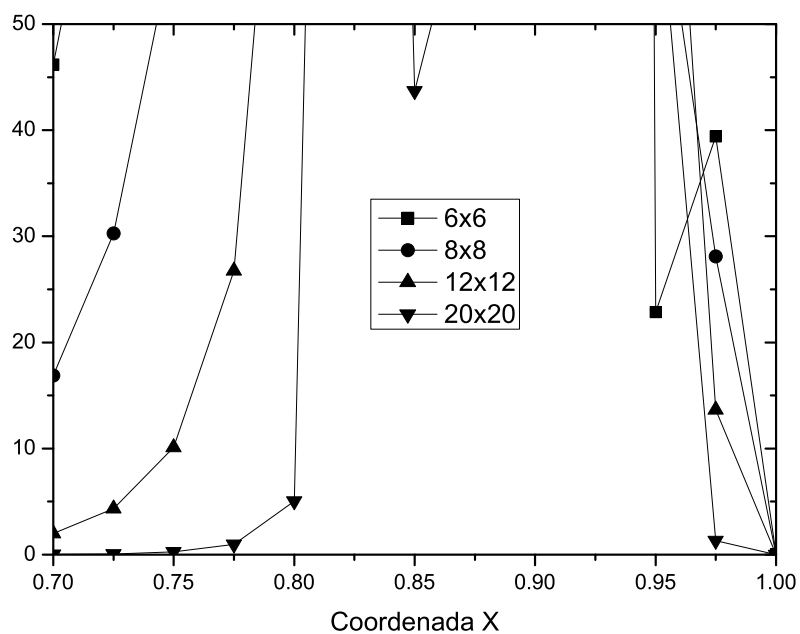
La razón más plausible para el comportamiento indeseable de este tipo de integrales es la degeneración de algunos de los triángulos en que se divide el elemento cuando el punto de colocación se va aproximando al nodo. Esto concuerda además con el hecho de que cuando el punto de colocación coincide con el nodo ($X=1$ en la fig. 3.6), se obtiene un buen resultado con cualquier número de puntos de Gauss. En esta situación el elemento se divide en tres triángulos bien proporcionados, en vez de en cuatro con dos de ellos muy deformes.

Hay que señalar aquí que se comprobó numéricamente que la evaluación de estas integrales no se ve modificada por la inclusión de la transformación de Telles. Ésta se aplicó sobre el dominio cuadrado resultante de la transformación de los triángulos en que se divide el elemento para evaluar este tipo de integrales, obteniéndose idénticos resultados que cuando no se introduce la transformación de Telles. Esto es debido al hecho de que, mediante la técnica de división del elemento en triángulos, los integrandos pierden su carácter singular y la transformación de Telles carece de sentido.

A la vista de la fig. 3.6 y de otras del mismo tipo que no se muestran aquí por simplicidad, se concluye que para evaluar estas integrales parece recomendable por tanto el empleo de 20x20 puntos de Gauss y situar los puntos de colocación a una distancia de 0.25 de las posiciones nodales. Esto modifica la distancia que se recomendaba a partir del análisis de las integrales cuasi-singulares, que permitía una posición más favorable de los puntos de colocación, en cuanto al objetivo de lograr en la medida de lo posible matrices del sistema con diagonal dominante. Para conseguir esto sería necesario plantear un método alternativo para la evaluación de integrales de superficie sobre el elemento que contiene al punto de colocación. Esta labor se plantea como un desarrollo futuro del trabajo que aquí presentado.



(a)



(b)

Figura 3.6: a) Contribución de integrales de superficie sobre el propio elemento al término (3,12) de la matriz H, para distintas osiciones del punto de colocación a lo largo de la dirección X del elemento. b) Estimación de errores cometidos (en tanto por ciento).

3.4. Análisis sobre ejemplos numéricos

En este apartado se van a mostrar una serie de ejemplos numéricos sobre problemas concretos obtenidos con la formulación mixta de elementos de contorno mejorada. Con esta serie de resultados se pretende demostrar la robustez de la formulación, y el resultado de las mejoras desde un punto de vista numérico desarrolladas en el presente trabajo. Esto se hará a continuación con ejemplos numéricos en materiales isótropos, mientras que en los capítulos siguientes se hará con materiales transversalmente isótropos y piezoeléctricos.

3.4.1. Grieta elíptica en medio infinito isótropo

Un problema clásico y de gran interés en Mecánica de la Fractura es el de una grieta de forma elíptica en un medio isótropo infinito sometida a tracción uniforme (o presión interna) en ambas caras. Para este problema existen soluciones analíticas (Irwin, 1962, Kassir y Sih, 1966).

Este ejemplo servirá como primera muestra de las mejoras obtenidas mediante la aplicación de la transformación de Telles. Para ello se ha considerado un material isótropo (módulo de cizalladura $\mu = 10^6$ Pa, módulo de Poisson $\nu = 0,3$) y se ha resuelto el problema para las distintas discretizaciones de la grieta que se muestran en la fig. 3.7. La diferencia fundamental radica en el tamaño (L) de los elementos a $1/4$ en la dirección perpendicular al frente de grieta. Esta diferencia es importante ya que el FIT lo vamos a extraer del campo de desplazamientos en estos elementos, según la metodología presentada en el capítulo 2 (apartado 2.5.1).

Este tamaño es mayor en la malla a ($L = 1$) que en la b ($L = 0,5$), mientras que la malla c ($L = 0,75$) es un caso intermedio. Esto hace que la malla a presenta elementos a $1/4$ con peor relación de aspecto para $\phi = 0^\circ$, mientras que esto ocurre en el caso b para $\phi = 90^\circ$, siendo ϕ el ángulo polar definido en la figura 3.8.

En la figura 3.9 se representan los resultados obtenidos con y sin la transformación de Telles (CT y ST en la leyenda), utilizando el mismo número de puntos de Gauss en ambos casos. Se muestra la evolución del FIT en modo I adimensionalizado a lo largo del frente de grieta (por simetría, tan solo se representa el intervalo $0 \leq \phi \leq \pi/2$).

Al ser un problema relativamente sencillo, se obtienen buenos resultados en todos los casos. Sin embargo, puede observarse como los resultados obtenidos sin la transformación de Telles difieren sensiblemente de la solución analítica cuando la relación de aspecto de los elementos a $1/4$ se hace elevada (en torno a $\phi = 0^\circ$ para el caso a y a $\phi = 90^\circ$ para el caso b). Este fenómeno

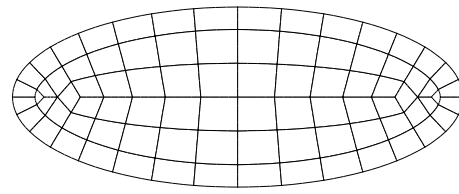
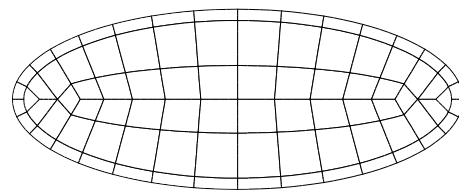
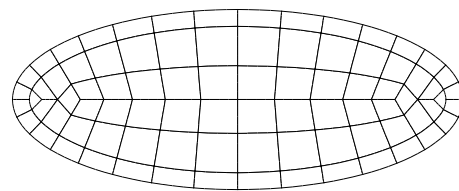
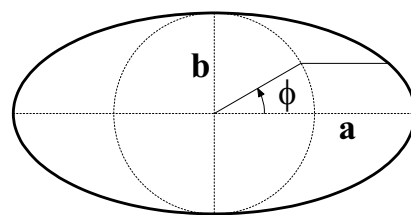
(a) $L=1$ (b) $L=0.5$ (c) $L=0.75$

Figura 3.7: Distintas discretizaciones para grieta elíptica.

Figura 3.8: Geometría de grieta elíptica de semiejes a y b .

no se observa cuando se aplica la transformación de Telles, lo cual es un indicador de la mayor robustez alcanzada en la formulación implementada.

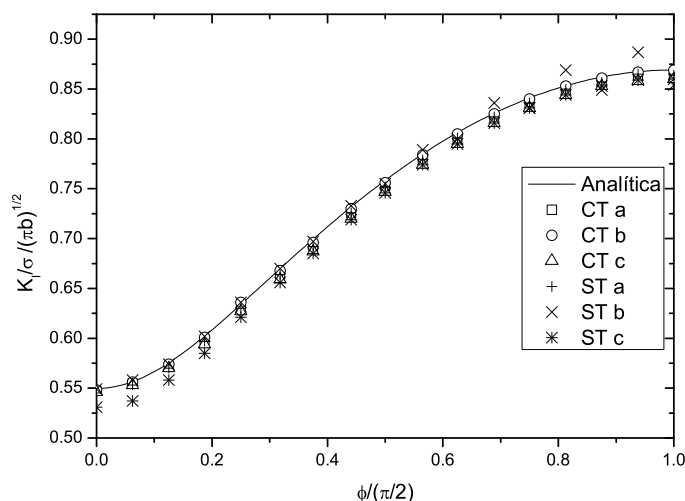


Figura 3.9: Evolución del FIT en modo I. Grieta elíptica en medio infinito.

3.4.2. Barra prismática isótropa con grieta de borde sometida a tracción uniforme

En este apartado se va a considerar un problema más complicado, consistente en una pieza prismática con una grieta de borde sometida a tracción uniforme. El esquema del problema y el tipo de discretización empleada se representan en la fig. 3.10, siendo $H/a=0.175$, $W/a=3$ y $t/a=2$. El material considerado es el mismo que el del caso anterior.

Los resultados obtenidos por Ariza (2002) para este problema estaban en buen acuerdo con los obtenidos por otros autores mediante distintas aproximaciones numéricas (Raju y Newman, 1977, Mi y Aliabadi, 1992, Li et al., 1998). Así se muestra en la fig. 3.11, donde 'HBEM' representa los resultados de Ariza aplicando la formulación mixta de elementos de contorno que ha servido de punto de partida del presente trabajo. En dicha figura se muestra la evolución del FIT adimensionalizado frente a una coordenada s que recorre el frente de grieta (con origen en el centro de éste) adimensionalizada con el ancho del prisma (W). Por razones de simetría, solo se representa la mitad de la gráfica.

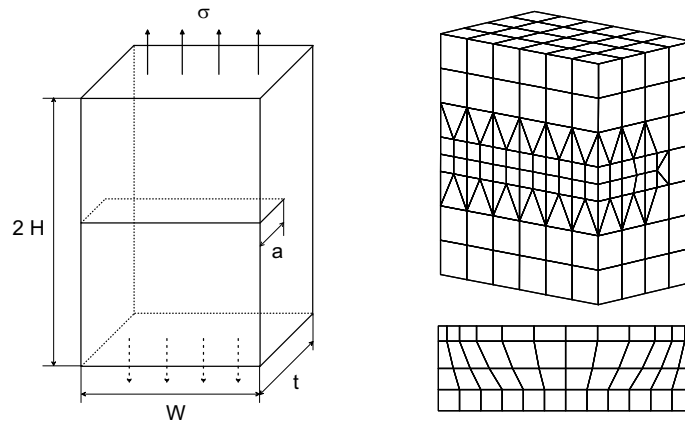


Figura 3.10: Barra prismática con grieta de borde sometida a tracción uniforme

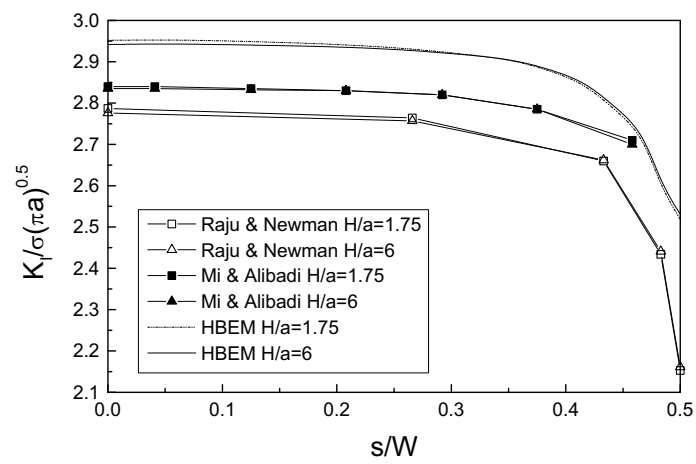


Figura 3.11: Comparación del FIT normalizado modo I para grieta recta de borde.

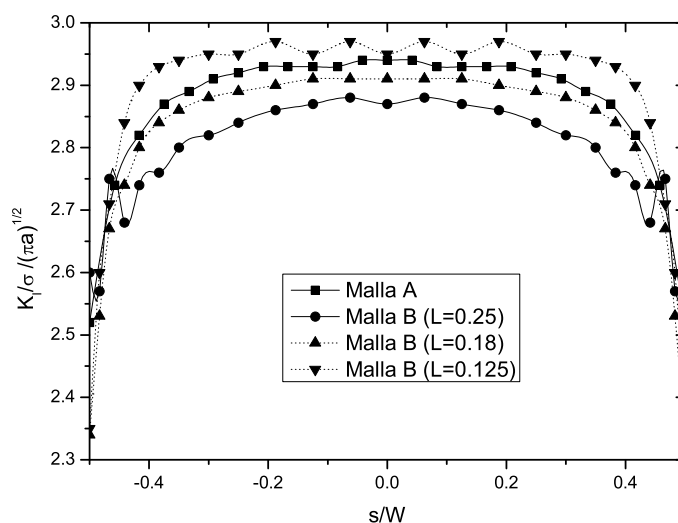


Figura 3.12: Valor del FIT en pieza prismática con grieta de borde utilizando subdivisiones

Para ilustrar el efecto de las mejoras obtenidas gracias al estudio numérico presentado a lo largo de este capítulo, se van a presentar una serie de resultados para el problema de la fig. 3.10, que se ha resuelto con distintas discretizaciones de la grieta. La primera de ellas (tipo A) consiste en una discretización uniforme con elementos de dimensiones 0.25×0.25 , y las tres restantes (tipo B) se diferencian en la longitud L de los elementos a $1/4$ en la dirección perpendicular al frente de grieta ($L=0.25$, $L=0.125$ y $L=0.18$).

Los resultados representados en la fig. 3.12 han sido obtenidos aplicando la técnica de subdivisiones, mientras que los de la fig. 3.13 han sido obtenidos aplicando la transformación de Telles, en la forma en que se ha presentado en este capítulo.

Con la técnica de subdivisiones el número de puntos de integración utilizado es mucho mayor que al aplicar la transformación de Telles, con lo que el tiempo de computación crece sensiblemente. Sin embargo, tal y como puede apreciarse en las figs. 3.12 y 3.13, los resultados obtenidos con subdivisiones son menos satisfactorios que con la transformación de Telles. Con subdivisiones se observa una variación apreciable de los resultados de una discretización a otra, e incluso en algunos casos llegan a tener un carácter oscilatorio no deseable. Con la transformación de Telles se obtienen por el contrario resultados muy estables y apenas dependientes de la discretización.

El carácter oscilatorio de algunos resultados que se aprecia en la fig. 3.12 se puede relacionar con la discretización de cada caso. Los resultados más precisos y estables son los obtenidos con la

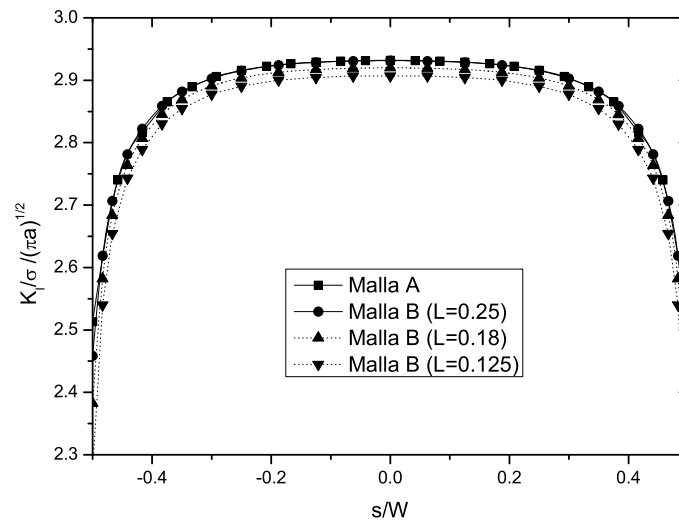


Figura 3.13: Valor del FIT en pieza prismática con grieta de borde utilizando transformación de Telles

discretización tipo A, en la que los elementos a $1/4$ son todos cuadrados, y la tipo B con $L = 0,18$, en la que los elementos a $1/4$ tienen una buena relación de aspecto a lo largo de todo el frente de grieta. Sin embargo, en la malla tipo B con $L = 0,25$, se tienen elementos con mala relación de aspecto en los extremos de la grieta ($s = 0,5W$), mientras que con $L = 0,125$ esto ocurre en la parte central del frente de grieta ($s = 0$). Estas zonas son precisamente las que muestran un comportamiento oscilatorio en los resultados en cada caso. Este comportamiento no se aprecia en absoluto cuando se aplica la transformación de Telles, por lo que se consigue claramente una aproximación más robusta.

Capítulo 4

Materiales transversalmente isótropos. Problemas estáticos y dinámicos

4.1. Introducción

En este capítulo se aplicarán, en materiales transversalmente isótropos, los resultados del análisis numérico presentados anteriormente para materiales isótropos. Como ya se apuntó entonces, se persigue conseguir una eficiente utilización desde un punto de vista numérico de la EIC en tracciones, de cara a aplicar la formulación mixta del MEC en problemas de Mecánica de la Fractura, aprovechando sus ventajas. Esto se llevará a cabo en problemas tridimensionales estáticos y dinámicos en el dominio de la frecuencia.

A modo de introducción y resumen de conocimientos necesarios para el análisis de estos problemas, en el siguiente apartado se tratará el comportamiento en estos materiales.

A continuación se presentará la formulación empleada, atendiendo fundamentalmente aquellos aspectos particulares para el tipo de problemas que se van a resolver y que no se trataron en el capítulo 2, como es el tratamiento de la solución fundamental armónica.

Finalmente, se presentarán finalmente algunos resultados numéricos obtenidos.

4.2. Comportamiento de materiales transversalmente isótopos

Los materiales transversalmente isótopos son aquellos que presentan comportamiento isótropo en todos los planos perpendiculares a una dirección fija (x_3 , por ejemplo).

Existen en la naturaleza un número considerable de materiales que presentan un comportamiento transversalmente isótropo y que tienen interés desde un punto de vista ingenieril. Los materiales cristalinos con estructura hexagonal, algunos tipos de terrenos arcillosos o el hielo son algunos ejemplos.

Además, hay otros materiales fabricados por el hombre que presentan este tipo de comportamiento, como son los materiales compuestos formados por un polímero reforzado con fibras alineadas unidireccionalmente. En este caso y para el tipo de problema que nos ocupa, el material ha de estudiarse desde un punto de vista macromecánico, es decir, la grieta deberá tener un tamaño característico mucho mayor que el diámetro de las fibras. Además, en el caso de problemas dinámicos, la longitud de onda que se propaga en el medio deberá ser mucho mayor que dicho diámetro.

La mayoría de materiales piezoeléctricos de interés práctico también presentan comportamiento elástico transversalmente isótropo, aunque acoplado con el fenómeno piezoeléctrico, tal y como se verá en el capítulo siguiente.

La ley de comportamiento de los materiales transversalmente isótopos, escrita según dos direcciones (1 y 2) contenidas en el plano de isotropía y el eje de simetría (dirección 3) normal a dicho plano, puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

En la ecuación (4.1) puede observarse que el comportamiento viene definido por cinco constantes elásticas independientes.

Un material isótropo puede considerarse como un caso particular de este tipo de comportamiento. En este caso se tendría que $C_{11} = C_{33} = \lambda + 2\mu$; $C_{44} = \mu$ y $C_{12} = C_{13} = \lambda$ (siendo λ y μ las constantes de Lamé).

Aunque la ley de comportamiento de un material transversalmente isótropo queda definida por la matriz de rigidez que aparece en (4.1), puede resultar complicada la interpretación de las constantes C_{ij} de dicha matriz, así como su caracterización experimental para un material concreto. Por ello es frecuente manejar en la práctica otro tipo de constantes, llamadas constantes ingenieriles, de más fácil interpretación y obtenibles directamente mediante la realización de ensayos para la caracterización del material. Estas constantes aparecen en la ley de comportamiento del material escrita en función de la matriz de flexibilidad (ec. 4.2), que matemáticamente se obtiene como la inversa de la matriz de rigidez.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

En la expresión (4.2) se ha tenido ya en cuenta la equivalencia elástica entre las direcciones 1 y 2. Las relaciones matemáticas entre los términos de la matriz de rigidez y flexibilidad son fácilmente deducibles (véase, e.g. Christensen, 1979). Los factores E_{ij} son los módulos de elasticidad longitudinal asociados al eje de simetría del material (E_{33}) y a una dirección contenida en el plano de simetría (E_{11}). Los factores ν_{ij} son coeficientes de Poisson asociados a la contracción en dirección j producidas por tensiones normales en dirección i . Por último, los factores G_{ij} son los módulos de cizalladura asociados a tensiones tangenciales σ_{ij} .

Se puede deducir que (véase, e.g. Christensen, 1979)

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{13}}{E_{11}} &= \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \\ G_{12} &= \frac{E_{11}}{2(1 + \nu_{12})} \end{aligned}$$

con lo que queda finalmente que solo 5 constantes elásticas son independientes.

También resulta interesante tener en cuenta la existencia de cotas para los coeficientes de Poisson, al igual que ocurre en materiales isótopos. Así se tienen las siguientes condiciones que han de cumplir estos coeficientes (véase, e.g. Christensen, 1979):

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \nu_{12} \leq 1 \\
 |\nu_{31}| &\leq \left(\frac{E_{33}}{E_{11}} \right)^{1/2} \\
 |\nu_{13}| &\leq \left(\frac{E_{11}}{E_{33}} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

En cuanto al comportamiento dinámico de los materiales transversalmente isótopos, hay que señalar que el tipo de ondas que se propagan en el medio son distintas al caso isótropo, y sus velocidades son dependientes de la dirección de propagación. Cuando se resuelve la ecuación de equilibrio dinámica armónica en términos de desplazamientos para un material anisótropo con fuerzas de volumen nulas, se obtienen tres tipos de ondas planas como solución del problema. Estas ondas serán cuasi-longitudinales o cuasi-transversales. La ecuación característica del material definirá tres velocidades de fase para cada dirección. La representación de cada una de estas tres velocidades para cada dirección define una superficie de tres hojas. En el caso de materiales transversalmente isótopos habrá una hoja correspondiente a ondas puramente transversales y las otras dos serán cuasi-transversales y cuasi-longitudinales, respectivamente. Para un estudio exhaustivo de la propagación de ondas en estos materiales se pueden consultar los trabajos de Musgrave (1970), Payton (1983) o Sáez (1997).

Los materiales isótopos también pueden ser considerados como un caso particular desde el punto de vista dinámico. En este caso las velocidades son las mismas en cualquier dirección, y solo hay una velocidad para ondas puramente longitudinales y otra para ondas puramente transversales. La superficie representativa de las velocidades de fase estará compuesta en este caso por dos superficies concéntricas.

Así pues, la formulación que aquí se presenta es por tanto válida para materiales isótopos y transversalmente isótopos. Esto permite validar la formulación por comparación con los resultados obtenidos por otros autores para materiales isótopos, en el caso de que no existan resultados previos para materiales transversalmente isótopos.

4.3. Formulación

La formulación desarrollada para resolver problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia en materiales transversalmente isótopos es básicamente la misma que en el capítulo anterior. La

EIC en desplazamientos para un punto del contorno y la EIC en tracciones para un punto de la grieta se pueden escribir según 4.4 y 4.5 respectivamente..

$$c_{lk}u_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)u_k(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)p_k(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma = 0 \quad (4.4)$$

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)N_m(\mathbf{y})u_k(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)N_m(\mathbf{y})p_k(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma = 0 \quad (4.5)$$

donde se puede observar que ahora los núcleos de la solución fundamental dependen de la frecuencia ω . Esto quiere decir que los tensores $u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ y $p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ son las tracciones y desplazamientos en dirección k en un punto \mathbf{x} del contorno cuando en el punto \mathbf{y} actúa una fuerza de amplitud unidad y frecuencia ω en dirección l .

Los núcleos d_{lmk}^* y s_{lmk}^* serán de nuevo combinaciones lineales de u_{lk}^* y p_{lk}^* , según la ley de comportamiento del material.

Así como en problemas estáticos el coeficiente del término libre de la EIC en desplazamientos se hallaba de forma simplificada mediante la condición de que un movimiento de sólido rígido no produce tensiones ni tracciones en el material (esto evita el cálculo geométrico del coeficiente c_{lk}), en dinámica se simplifica el cálculo de una forma similar (Domínguez, 1993). En el caso de la EIC en tracciones, el coeficiente del término libre es conocido bajo la hipótesis de que la grieta conforma un contorno suave y se trata de una grieta autoequilibrada (véase apartado 2.2).

La solución fundamental se puede dividir en una parte correspondiente al caso estático y otra correspondiente a la parte oscilante que debe añadirse para representar el caso dinámico armónico:

$$\begin{aligned} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= u_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + u_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= p_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + p_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

siendo $u_{lk}^S, p_{lk}^S, d_{lmk}^S$ y s_{lmk}^S los términos correspondientes a la solución fundamental estática, y $u_{lk}^R, p_{lk}^R, d_{lmk}^R$ y s_{lmk}^R la parte adicional correspondiente al caso dinámico.

La parte estática empleada parte de las expresiones obtenidas por Pan y Chou (1976) para u_{lk}^S y $\sigma_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($p_{lk}^{*S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})n_m(\mathbf{x})$). Las expresiones de d_{lmk}^* son equivalentes a las de σ_{lmk}^* salvo por un cambio de signo, debido a que en un caso los desplazamientos se derivan en el punto de observación (\mathbf{x}) y en el otro se derivan en el punto de colocación (\mathbf{y}). Los términos s_{lmk}^S se obtienen combinando las derivadas de los términos de σ_{lmk}^S y sus expresiones fueron obtenidas por Ariza (2002).

Merece la pena señalar en este punto un detalle importante sobre la implementación de la solución fundamental que aparece en el trabajo de Pan y Chou (1976). En su artículo no se especifica que las expresiones que aparecen allí para los desplazamientos y tensiones son estrictamente válidas para valores de z positivos (siendo z la coordenada relativa del punto de observación respecto al punto de colocación en el sentido del eje de simetría del material). Del mismo modo, las expresiones de los términos s_{lmk}^S obtenidas de forma directa por derivación y combinación de las expresiones de las tensiones, tienen la misma restricción.

Este inconveniente se puede solventar fácilmente en su implementación en el código de elementos de contorno, teniendo en cuenta las condiciones de simetría y antisimetría que deben cumplir los distintos términos de la solución fundamental u_{lk}^* , d_{lmk}^* y s_{lmk}^* . En primer lugar, se evalúan normalmente las expresiones que aparecen en los trabajos citados anteriormente, pero trabajando con el valor absoluto de la coordenada z , y cambiando el signo de la componente z de la normal en el punto de observación que aparece en los términos de s_{lmk}^* en caso de que el valor de z sea negativo. Una vez que se tienen evaluadas las distintas expresiones, y siempre que z sea negativo, se deberá cambiar el signo a los términos impares en z , que serán aquellos que tengan un número impar de subíndices '3', es decir:

$$\text{si } l=3 \text{ y } m,k=1,2, \text{ o si } m=3 \text{ y } l,k=1,2 \text{ o si } k=3 \text{ y } m,l=1,2, \text{ o si } l=m=k=3$$

$$\text{entonces } u_{lk}^*(-z) = -u_{lk}^*(z), d_{lmk}^*(-z) = -d_{lmk}^*(z) \text{ y } s_{lmk}^*(-z) = -s_{lmk}^*(z)$$

Esta corrección no parece haber sido tomada en cuenta adecuadamente en el trabajo de Ariza y Domínguez (2004), lo que podría explicar algunas diferencias en resultados numéricos que se verán al final de este capítulo.

Respecto a la parte dinámica de la solución fundamental, ésta se puede obtener mediante la sustracción de la parte estática a la solución fundamental armónica obtenida por Wang y Achenbach (1995). El valor de sus términos tiende a cero con la frecuencia, de forma que haciendo $\omega=0$ se obtendría la solución de un problema estático.

Así como la parte estática, aun siendo más complicada que la del caso isótropo, tiene expresiones explícitas para los distintos términos de la solución fundamental, la parte dinámica se expresa como una integral sobre una esfera de radio unidad centrada en el punto de colocación. Este hecho condiciona sobremanera la implementación eficiente de la formulación desde un punto de vista computacional, por los motivos que se detallarán más adelante. En la ec. 4.7 se recoge la expresión de la parte dinámica de la solución fundamental en desplazamientos

$$u_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{16\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{m=1}^3 A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) \quad (4.7)$$

donde \mathbf{n} es la normal unitaria externa a la esfera de radio unidad centrada en el punto de colocación, $k_m = \omega/C_m$ es el número de onda asociado a la velocidad de fase C_m en dirección \mathbf{n} , y \mathbf{x} es el vector de posición del punto de integración respecto al punto de colocación. Los términos $A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega)$ para un material transversalmente isótropo con eje de simetría x_3 , son

$$\begin{aligned} A_{l3}^3(\mathbf{n}, \omega) &= A_{3l}^3(\mathbf{n}, \omega) = A_{33}^3(\mathbf{n}, \omega) = 0 \\ A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) &= \left\{ \frac{n_l n_k}{1 - n_3^2} \frac{M}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \right\} C_{44} \\ A_{lk}^3(\mathbf{n}, \omega) &= \left\{ - \left[\frac{n_l n_k}{1 - n_3^2} - \delta_{lk} \right] \frac{\kappa_3}{c_3^2} \right\} C_{44} \\ A_{33}^m(\mathbf{n}, \omega) &= \left\{ \frac{K}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \right\} C_{44} \\ A_{l3}^m(\mathbf{n}, \omega) &= A_{3l}^m(\mathbf{n}, \omega) = \left\{ -\kappa_5 n_l n_3 \frac{1}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \right\} C_{44} \end{aligned}$$

para $l, k, m = 1, 2$ (4.8)

donde c_m son las tres velocidades de fase asociadas a las ondas transversales, cuasi-longitudinales y cuasi-transversales características de este tipo de materiales, adimensionalizadas con $\sqrt{C_{44}/\rho}$, y sus expresiones son:

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\{ 0,5(B - (B^2 - 4A)^{0,5}) \right\}^{0,5}, c_2 = \left\{ 0,5(B + (B^2 - 4A)^{0,5}) \right\}^{0,5}, \\ c_3 &= \left\{ 0,5\kappa_4(1 - n_3^2) + n_3^2 \right\}^{0,5} \end{aligned} \quad (4.9)$$

siendo

$$\begin{aligned}
A(n_3) &= \kappa_1 n_3^4 + \kappa_3 n_3^2 (1 - n_3^2) + \kappa_2 (1 - n_3^2)^2 \\
B(n_3) &= (\kappa_1 + 1)n_3^2 + (\kappa_2 + 1)(1 - n_3^2) \\
C(c_m, n_3) &= (\kappa_1 + 1)n_3^2 + (\kappa_2 + 1)(1 - n_3^2) - 2c_m^2 \\
M(c_m, n_3) &= \kappa_1 n_3^2 + (1 - n_3^2) - c_m^2 \\
K(c_m, n_3) &= n_3^2 + \kappa_2 (1 - n_3^2) - 2c_m^2 \\
\kappa_1 &= \bar{c}_{33}, \quad \kappa_2 = \bar{c}_{11}, \quad \kappa_3 = 1 + \kappa_1 \kappa_2 - (\bar{c}_{13} + 1) \\
\kappa_4 &= \frac{1}{2}(\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}), \quad \kappa_5 = \bar{c}_{13} + 1, \quad \bar{c}_{mn} = \frac{C_{mn}}{C_{44}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

El término $\sqrt{C_{44}/\rho}$ utilizado para adimensionalizar las velocidades de fase coincide con la velocidad de ondas transversales en la dirección del eje de simetría de un material transversalmente isótropo, y en cualquier dirección en un material isótropo.

Los términos d_{lmk}^{*R} y $\sigma_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($p_{lk}^{*R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y})n_m(\mathbf{x})$) se obtienen por combinación de las derivadas primeras de los desplazamientos, que tienen la forma

$$u_{lk,q}^{*R} = \frac{i}{16\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 ik_m n_q \text{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) \tag{4.11}$$

Los términos s_{lmk}^{*R} se obtienen por combinación de las derivadas segundas de los desplazamientos, que tienen la forma

$$\begin{aligned}
u_{lk,pq}^{*R} &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) k_m^2 n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) - \\
&\quad \frac{i}{16\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 2A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{n})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

La segunda integral de la anterior expresión se puede convertir en una integral de línea sobre una circunferencia de radio unidad perpendicular al vector \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}
&\int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 2A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{n}) = \\
&\int_{|d|=1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}=0} \sum_{m=1}^3 2A_{lk}^m(\mathbf{n}, \omega) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \frac{1}{|x|} dl(\mathbf{n})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

La evaluación de estas integrales para obtener la solución fundamental en cada punto de integración resulta muy costosa desde el punto de vista computacional. Este inconveniente se ve

acentuado por el hecho de que dichas integrales necesitan de un mayor número de puntos de integración cuanto mayor es la distancia entre el punto de integración y el punto de colocación, ya que el integrando se hace más oscilatorio según crece x .

Para solventar esta dificultad, algunos autores han desarrollado diversas técnicas. Sáez (1997) y Sáez y Domínguez (1999) aplicaron una transformación de coordenadas para agilizar el proceso de evaluación de la solución fundamental. Sáez y Domínguez (2000) propusieron también la utilización de soluciones de campo lejano basándose en los trabajos de Lighthill (1960) sobre estimación asintótica de integrales de Fourier. Otra alternativa (Wilson y Cruse, 1978) es la generación numérica de una base datos en la cual interpolar para evaluar la solución fundamental en cada punto.

En la tesis de Ariza (2002) se opta por esta segunda alternativa, que en principio es más sencilla, y se consiguieron resolver problemas dinámicos de grietas inmersas en un medio infinito. Esta técnica es la que se va aplicar aquí también, aunque de forma más completa, de forma que se puedan resolver problemas más generales, pudiendo estar la grieta en un medio finito o infinito, y prestando especial atención a los aspectos computacionales asociados a su implementación, tal y como se detalla en el apartado siguiente correspondiente al proceso de generación de la base de datos.

Por otro lado, para los problemas dinámicos se ha mejorado la fase de construcción del montaje del sistema de ecuaciones final mediante la construcción por separado de las matrices resultantes de la integración de los núcleos asociados a la parte estática y dinámica. Con esto se consigue reducir el tiempo de computación por los dos motivos que se exponen a continuación.

El primero de ellos es que se utiliza un número de puntos de integración adecuado para cada caso, ya que toda la problemática en cuanto a la integración numérica que se planteó en el capítulo anterior solo afecta a la parte estática. La parte dinámica es regular, salvo la integral sobre la circunferencia de radio unidad que aparece en las derivadas segundas de los desplazamientos, pero que es débilmente singular y no plantea problemas de integración. Así pues, el número de puntos de integración necesario para la parte dinámica es mucho menor que para la parte estática, y no son necesarios técnicas de regularización, transformación de Telles o subdivisiones, con lo que así se consigue invertir el menor tiempo posible en la integración y evaluación de los términos asociados a la parte dinámica.

La segunda ventaja de separar la parte del sistema de ecuaciones correspondiente de la parte estática y la correspondiente a la parte dinámica se observa a la hora de resolver un mismo pro-

blema para varias frecuencias distintas. En estos casos, la parte estática habrá que obtenerla sólo una vez, y sumarle posteriormente para cada frecuencia la parte dinámica que le corresponda.

Además, la construcción del sistema correspondiente a la integración de la parte dinámica o regular se simplifica por el hecho de que en la ecuación clásica no es necesario distinguir la técnica de integración sobre cada elemento en función de si el punto de colocación está dentro o fuera del elemento, ya que las integrales no son singulares. En la formulación hipersingular se hace necesaria esta distinción para la integración de la parte de los términos s_{lmk}^R correspondientes a la integración sobre la circunferencia de radio unidad, que es débilmente singular.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que los puntos de colocación deben ser los mismos que los empleados en la parte singular, para construir coherentemente el conjunto del sistema de ecuaciones.

Por lo demás, la formulación mixta del MEC es la misma que la presentada en el capítulo 2. Tan solo se debe puntualizar que, al plantear la EIC en tracciones, solo se aplica el proceso de regularización a la parte estática de la solución fundamental, ya que la parte dinámica no presenta un comportamiento singular que de lugar a problemas de integración numérica. Así, la ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma_0} \{s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - \\
 d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - p_k(\mathbf{y}, \omega)]\} d\Gamma + \quad (4.14) \\
 [u_k(\mathbf{y}, \omega) I_{lk}^0 + u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) J_{lhk}^0 + p_k(\mathbf{y}, \omega) K_{lk}^0] + \\
 \int_{\Gamma - \Gamma_0} \{s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}, \omega)\} d\Gamma + \\
 \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega)\} d\Gamma = 0.
 \end{aligned}$$

donde de nuevo Γ_0 es el elemento que contiene el punto de colocación, y $\Gamma - \Gamma_0$ es el resto del contorno.

Las expresiones de I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} para materiales transversalmente isótopos, que contienen integrales regulares o débilmente singulares, válidas para grietas planas perpendiculares al eje de simetría del material, se pueden encontrar en la tesis de Ariza (2002).

4.3.1. Generación de base de datos para la evaluación de parte dinámica de la solución fundamental

Como ya se comentó anteriormente, hasta ahora (Ariza, 2002) solo se habían resuelto problemas para grietas contenidas en el plano de simetría del material y en un medio infinito. Esto quiere decir que tan solo era necesario plantear la EIC en tracciones, y de ésta solo era necesario conocer los valores de los núcleos s_{lmk}^* , suponiendo que ambas caras de la grieta están sometidas a las mismas tracciones pero de signo contrario (según se explicó en el apartado 2.2 y su consideración según el apartado 2.6). Por tanto, solo se hacía necesario la generación de una base de datos para puntos contenidos en el plano de simetría del material, a lo largo de una dirección cualquiera contenida en dicho plano. En esta base de datos se recogían los valores de la primera integral que aparece en la expresión (4.12), mientras que la segunda integral, que es débilmente singular y se realiza sobre una circunferencia de radio unidad, se obtiene para cada punto de integración mediante una cuadratura de Gauss monodimensional.

En este trabajo, se ha planteado la evaluación de la parte dinámica de la solución fundamental para resolver problemas de grietas con cualquier orientación en medios finitos o infinitos. Sin embargo, hay que señalar que la orientación de la grieta está limitada, ya que para la parte estática de la EIC en tracciones solo se dispone de la regularización de los términos necesarios para resolver problemas de grietas planas contenidas en el plano de simetría del material. Sería por tanto preciso hallar todos los términos necesarios para un problema más general, al igual que se ha hecho con los términos de la parte dinámica, para poder resolver cualquier tipo de problema sin limitaciones en cuanto a la orientación y forma de la grieta. Sin embargo, la limitación en la formulación aplicada no es excesivamente restrictiva, ya que resulta adecuada para resolver la mayoría de problemas de interés práctico que se suelen plantear.

Por tanto, la base de datos diseñada en este trabajo se genera variando dos coordenadas del punto de observación: la distancia al punto de colocación sobre el plano de simetría (plano x_1-x_2) y el ángulo azimutal con respecto al eje x_3 . Por otro lado, se han añadido los términos necesarios para evaluar las expresiones de s_{lmk}^R para problemas más generales y se han incluido los términos adecuados para evaluar u_{lk}^R , p_{lk}^R y d_{lmk}^R .

Esto hace que el tamaño de la base de datos crezca mucho en comparación con la situación anterior, lo cual ralentiza el desarrollo del programa, no solo por ser necesario invertir mayor tiempo en su construcción, sino por el requerimiento de memoria a utilizar por el computador. Esto se ve

acentuado por el hecho de que en la formulación dinámica se trabaja en variable compleja, lo cual duplica automáticamente la cantidad de memoria requerida. En este punto se aprovechan todas las ventajas desde un punto de vista computacional extraídas del estudio numérico presentado en el capítulo anterior para problemas estáticos, además de las distintas técnicas o estrategias que se exponen a continuación y que han sido necesarias para gestionar adecuadamente los recursos computacionales y llevar a cabo una eficiente implementación de la formulación dinámica.

En primer lugar, para una optimización de la evaluación de las integrales sobre la esfera y circunferencia de radio unidad, se pueden realizar subdivisiones sobre ellas en función de la distancia entre el punto de colocación y de integración (módulo del vector \mathbf{x}), ya que la función a integrar se hace más oscilante conforme aumenta dicha distancia. Al ser integrales no singulares, el método de las subdivisiones aplicado sobre estos dominios de integración (esfera o circunferencia) es adecuado y sencillo para formular un método adaptativo de integración (véase el apartado 3.2). Lo único que habrá que asegurar será que el número de puntos de integración en cada subdivisión sea capaz de integrar adecuadamente las oscilaciones que sufra el integrando en dicha subdivisión.

Además, hay que tener en cuenta que dada la simetría de las funciones que aparecen en estas integrales con respecto al plano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$, bastará con realizar la integración tan solo sobre media esfera (por ejemplo sobre la semiesfera en la que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} > 0$).

Por otro lado, y en busca de ocupar la menor cantidad de memoria posible, se construirá la base de datos para el menor número posible de términos de la solución fundamental. Para ello se considerarán las siguientes relaciones de simetría en los términos u_{lk} , d_{lmk} (o σ_{lmk} que es lo mismo salvo un cambio de signo) y $u_{lk,pq}$, para los que se construye la base de datos:

$$\begin{aligned} u_{lk}^* &= u_{kl}^* \\ d_{lmk}^* &= d_{mlk}^* \\ u_{lk,pq}^* &= u_{kl,pq}^* = u_{lk,qp}^* = u_{kl,qp}^* \end{aligned}$$

Hay que señalar que la base de datos se construye para los términos de la segunda derivada de los desplazamientos y no para los términos s_{lmk}^* directamente. La razón de ello estriba en que en los términos s_{lmk}^* aparece la normal del punto de integración (se construye a partir de las derivadas de las tracciones en el punto de observación). Por ello se construye la base de datos de las derivadas segundas de los desplazamientos, y una vez realizada la interpolación para hallar

sus valores en el punto de integración, se construyen los términos s_{lmk}^* para ese punto concreto del contorno.

También merece la pena indicar que la parte de los términos $u_{lk,pq}^*$ correspondiente a la integral sobre la circunferencia no se pueden evaluar de forma directa en todos los casos a partir de una base de datos. El motivo es que se trata de un término débilmente singular que se podrá evaluar a partir de cierto valor de $|x|$, y por tanto el punto sobre el que interpolar podría caer fuera de los límites de la base de datos generada y necesitaría una evaluación directa, prescindiendo de la base de datos, la cual tendría que tener además un conjunto de puntos y una interpolación distinta a la del resto de términos. En este trabajo se ha preferido evaluar siempre estos términos de forma directa, ya que resulta más sencillo y al ser una integral de línea no penaliza excesivamente los tiempos de computación.

La base de datos se construye para una serie de valores del vector x que une el punto de colocación y de observación, variando su componente sobre un plano $x'y'$ (se varía solo x' y se mantiene nula y') y su componente z' (siendo z' el eje de simetría del material). De esta forma se puede considerar que se tiene una retícula plana de puntos en los que se conocen los valores de los términos de la solución fundamental, y partir de ellos se puede conocer el valor para cualquier punto que sea necesario mediante interpolación (fig. 4.1). A la hora de interpolar se considera que el sistema $x'y'z'$ se encuentra situado tal que el vector x se encuentra contenido en el plano $x'z'$ de la base de datos, y con componente z' positiva. En función de esta componente y de su proyección sobre el plano xy o $x'y'$ se puede interpolar en la base de datos.

Una vez realizada la interpolación en el sistema $x'y'z'$ para obtener los valores de u'_{lk} , d'_{lmk} y $u'_{lk,pq}$, se obtienen los términos $p'_{lk} = -d'_{lmk}n'_m$, $d'_{lk} = d_{lmk}N'_m$ y $s'_{lk} = s'_{lmk}N'_m$, habiendo referido la normal en el punto de integración n y la normal en el punto de colocación N al sistema $x'y'z'$ (los términos s'_{lmk} se obtienen a partir de $u'_{lk,pq}$ y la normal n'). Los tensores u'_{lk} , p'_{lk} , d'_{lk} y s'_{lk} son referidos finalmente al sistema original xyz premultiplicándolos por una matriz de giro T y postmultiplicándolo por su traspuesta T^T . Esta matriz de giro T (también utilizada en su forma traspuesta para referir los vectores n y N al sistema $x'y'z'$) es la que aparece en (4.15), teniendo en cuenta que el sistema $x'y'z'$ es un sistema cartesiano dextrógiro, al igual que el sistema xyz .

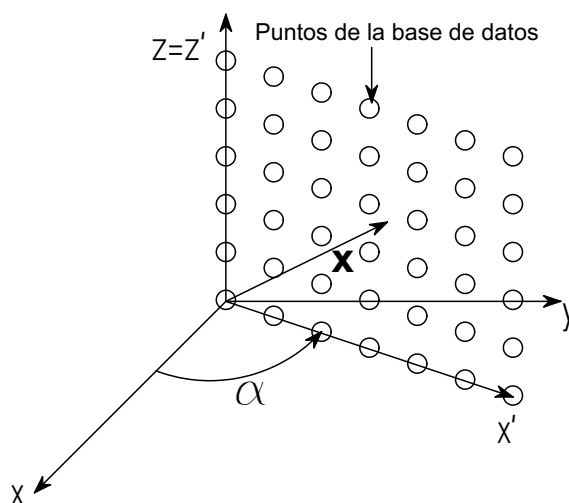


Figura 4.1: Esquema simbólico de retícula de puntos de base de datos , sistemas de coordenadas y vector posición del punto de observación o integración con respecto al punto de colocación.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } z \geq 0$$

(4.15)

$$\mathbf{T}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{si } z < 0$$

Una cuestión fundamental que queda por abordar es el tamaño de la base de datos. Este tamaño dependerá fundamentalmente de dos parámetros: las dimensiones del modelo a analizar y la frecuencia a la que se esté trabajando. Cuanto mayor sea la dimensión del dominio de trabajo, resulta evidente que la retícula ficticia de la base de datos deberá abarcar un mayor espacio geométrico y por tanto tendrá un mayor número de puntos. Por otro lado, conforme aumente la frecuencia del problema considerado, el carácter oscilatorio de la solución fundamental aumenta, y por tanto se hace necesario que la densidad geométrica de puntos de la base de datos sea mayor.

Para gestionar de manera eficiente el tamaño de la base de datos en función de estos dos

n° puntos/onda	Err. máx. Interp. Lineal (%)	Err. máx. Interp. cúbica (%)
8	7.6	0.85
10	4.9	0.42
12	3.4	0.23
14	2.5	0.13
16	1.9	0.08
18	1.5	0.05
20	1.23	0.03
22	1.0	0.02

Tabla 4.1: Errores máximos cometidos según tipo de interpolación y número de puntos por onda

parámetros, se ha hecho un estudio monodimensional sobre el error cometido al evaluar en un punto el valor de una senoide (función seno que representa un ciclo de onda) por interpolación entre un número determinado de puntos en los que se conoce con precisión el valor de dicha senoide. En la tabla 4.1 se recogen los errores máximos que se cometen en esta interpolación para distintos valores del número de puntos distribuidos uniformemente a lo largo de la senoide y en los que se conoce exactamente su valor. Se muestran los resultados para una interpolación lineal (se interpola entre 2 puntos) y cúbica (se interpola entre 4 puntos).

Si se admite un error máximo admisible de hasta un 1 %, se observa como con una interpolación lineal serían necesarios 22 puntos por onda, mientras que con una interpolación cúbica basta con 8 puntos para cometer un error máximo del 0.85 %. Se escoge por tanto este segundo tipo de interpolación, con el que el tamaño de la base de datos podrá ser casi tres veces menor que con la interpolación lineal, con el consecuente ahorro en el empleo de memoria y reducción en el tiempo de generación de la base de datos. Esta ventaja es fundamental para afrontar modelos de grandes dimensiones geométricas o problemas de alta frecuencia.

El procedimiento para determinar el tamaño de la base de datos será el siguiente. En primer lugar, se caracteriza el tamaño geométrico del modelo por la mayor dimensión de su proyección en plano xy y su mayor dimensión según el eje z (parámetros $Distb$ y $DistZ$, según la fig. 4.2). Estas dimensiones serán las de la retícula ficticia formada por los puntos de la base de datos, de la cual queda por determinar la distribución de sus puntos. Para ello, se establece que la mayor distancia (Δr_{max}) entre puntos de la base de datos debe ser menor que $1/8$ de la menor longitud

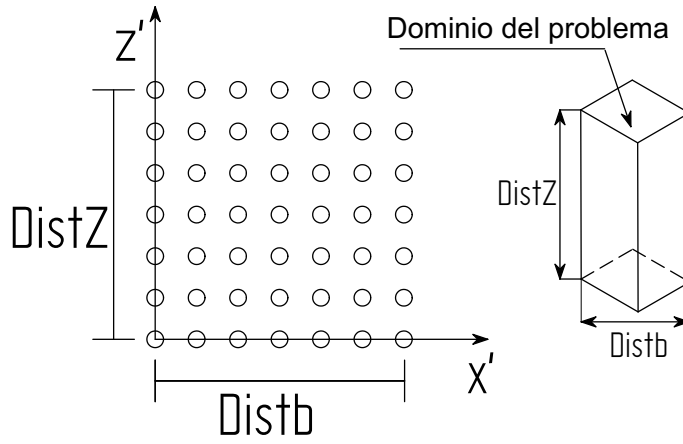


Figura 4.2: Dimensiones $Distb$ y $DistZ$ que caracterizan el dominio y las coordenadas sobre las que se extienden los puntos de la base de datos.

de onda que tenga lugar en el problema en cuestión (teniendo en cuenta que debe haber 8 puntos por onda, según se comentó anteriormente). Esta condición se recoge en la ec. (4.16), donde es necesario hallar previamente la mínima velocidad de fase de entre las dadas por las expresiones (4.9) para las distintas direcciones del espacio (distintos valores de n_3).

$$\Delta r_{max} = \frac{\lambda_{min}}{8} = \frac{c_{min}}{\omega/2\pi} \quad (4.16)$$

Por otro lado, suponiendo por simplicidad que se van considerar el mismo número de puntos (N) a lo largo de las distancias $Distb$ y $DistZ$, se tendrá que la máxima distancia entre puntos de la base de datos (Δr_{base}) vendrá dada por la ec. (4.17).

$$\Delta r_{base} = \sqrt{\left(\frac{DistZ}{N}\right)^2 + \left(\frac{Distb}{N}\right)^2} \quad (4.17)$$

Para que el error cometido en la interpolación sea admisible se deberá cumplir que $r_{base} \leq r_{max}$, lo cual se traduce en una cota para el número N (ec. 4.18).

$$N \geq \frac{8\omega}{c_{min}2\pi} \sqrt{DistZ^2 + Distb^2} \quad (4.18)$$

Se toma N como el primer valor entero mayor que el valor obtenido según 4.18 y con esto ya se tienen definidos los parámetros $Distb$, $DistZ$ y N que determinan la ubicación de los pun-

tos de la base de datos para los que se ha de evaluar la solución fundamental y sobre los que posteriormente se deberá interpolar.

Al tratarse la base de datos de una retícula plana de puntos, la interpolación será bidimensional y no monodimensional como se hizo en el estudio sobre número de puntos necesarios por onda recogido en la tabla 4.1. Esto hace que la interpolación cúbica monodimensional con 4 puntos se transforme en una interpolación lagrangiana en 16 puntos, que realmente supone una interpolación de mayor grado, con lo que la cota del error estimada anteriormente será efectivamente menor. Una interpolación de este tipo y una revisión sobre cuestiones relativas a la construcción de una base de datos similar puede encontrarse en el libro de Schlar (1994), aplicado a la evaluación de la solución fundamental elastostática anisótropa 3D.

4.4. Obtención de Factores de Intensidad de Tensiones (FIT)

El proceso de obtención de los FIT en materiales transversalmente isótropos sigue el procedimiento general relatado en el apartado 2.5. Los términos del campo asintótico de tensiones y desplazamientos en las cercanías del frente de una grieta plana perpendicular al eje simetría del material fueron obtenidos por Kassir y Sih (1968) y (1975) y se recogen en las expresiones (4.19) y (4.20) para estado de carga simétricos (modo I) y en (4.24) y (4.25) para estados de carga anti-simétricos (modos II y III). Las componentes de tensiones, desplazamientos y sus expresiones se refieren a las coordenadas locales que ya se definieron en la fig. 2.3.

Para un estado simétrico se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \frac{K_I}{2\beta_1\sqrt{r\pi}} \left\{ \frac{C_{13}m_1 - C_{11}n_1}{n_1^{1/2}(1+m_1)} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} - \\
&\quad \frac{C_{13}m_2 - C_{11}n_2}{n_2^{1/2}(1+m_2)} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\quad \left. \times (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} \right\} + 0(r^0) \\
\sigma_{tt} &= \frac{K_I}{2\beta_1\sqrt{r\pi}} \left\{ \frac{C_{13}m_1 - C_{12}n_1}{n_1^{1/2}(1+m_1)} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} - \\
&\quad \frac{C_{13}m_2 - C_{12}n_2}{n_2^{1/2}(1+m_2)} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\quad \left. \times (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} \right\} + 0(r^0) \\
\sigma_{zz} &= \frac{K_I C_{44}}{2\beta_1\sqrt{r\pi}} \left\{ n_1^{1/2} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} - \\
&\quad n_2^{1/2} \left[\cos\theta + (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\quad \left. \times (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} \right\} + 0(r^0) \\
\sigma_{nz} &= \frac{K_I C_{44}}{2\beta_1\sqrt{r\pi}} \left\{ \left[(\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} - \cos\theta \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2\theta + n_1^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} - \left[(\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{1/2} - \cos\theta \right]^{1/2} \\
&\quad \left. \times (\cos^2\theta + n_2^{-1}\sin^2\theta)^{-1/2} \right\} + 0(r^0) \\
\sigma_{tz} &= 0(r^0) \\
\sigma_{nt} &= 0(r^0)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

y

$$u_n = -\frac{K_I \sqrt{(r/\pi)}}{\beta_1} \left\{ \frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right\} + 0(r)$$

$$u_t = 0(r) \quad (4.20)$$

$$u_z = -\frac{K_I \sin \theta \sqrt{(r/\pi)}}{\beta_1} \left\{ \frac{m_1}{n_1^{1/2} (1+m_1)} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} - \frac{m_2}{n_2^{1/2} (1+m_2)} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} \right\} + 0(r)$$

donde n_1 y n_2 son las raíces de la ecuación característica

$$C_{11}C_{44}n^2 + [C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) - C_{11}C_{33}]n + C_{33}C_{44} = 0 \quad (4.21)$$

y

$$m_j = \frac{(C_{13} + C_{44})n_j}{C_{33} - C_{44}n_j}, \quad j = 1, 2 \quad (4.22)$$

$$\beta_1 = C_{44} (n_1^{1/2} - n_2^{1/2}) \quad (4.23)$$

En general, n_1 y n_2 son raíces reales o complejas conjugadas (e.g., son reales para el magnesio y complejas conjugadas para el zinc). Cuando n_1 y n_2 son complejas conjugadas, debe tomarse la parte real de $n_1^{1/2}$ y $n_2^{1/2}$, de manera que desplazamientos y tensiones resulten igualmente reales (Elliot, 1948).

Para un caso de carga antisimétrico se tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \frac{K_{II}}{2\alpha_2 C_{44} (m_1 - m_2) \sqrt{(r\pi)}} \left\{ (1 + m_2) (C_{13}m_1 - C_{11}n_1) n_1^{-1} \right. \\
&\quad \times \left[(\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \\
&\quad - (1 + m_1) (C_{13}m_2 - C_{11}n_2) n_2^{-1} \left[(\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \left. \right\} + 0 (r^0) \\
\sigma_{tt} &= \frac{K_{II}}{2\alpha_2 C_{44} (m_1 - m_2) \sqrt{(r\pi)}} \left\{ (1 + m_2) (C_{13}m_1 - C_{12}n_1) n_1^{-1} \right. \\
&\quad \times \left[(\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \\
&\quad - (1 + m_1) (C_{13}m_2 - C_{12}n_2) n_2^{-1} \left[(\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \left. \right\} + 0 (r^0) \\
\sigma_{zz} &= \frac{K_{II} (n_1 n_2)^{1/2}}{2 (n_2^{1/2} - n_1^{1/2}) \sqrt{(r\pi)}} \left\{ \left[(\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} - \left[(\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \left. \right\} + 0 (r^0) \\
\sigma_{tz} &= \frac{K_{III}}{2\sqrt{(r\pi)}} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_3^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_3^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} + 0 (r^0) \\
\sigma_{nz} &= \frac{K_{II} (n_1 n_2)^{1/2}}{2 (n_2^{1/2} - n_1^{1/2}) \sqrt{(r\pi)}} \left\{ n_1^{-1/2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} - n_2^{-1/2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} \left. \right\} + 0 (r^0) \\
\sigma_{nt} &= \frac{K_{III} n_3^{1/2} (C_{11} - C_{12})}{2C_{44} \sqrt{(r\pi)}} \left[(\cos^2 \theta + n_3^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right]^{1/2} \\
&\quad \times (\cos^2 \theta + n_3^{-1} \sin^2 \theta)^{-1/2} + 0 (r^0)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

y

$$\begin{aligned}
u_n &= -\frac{K_{II} (n_1 n_2)^{1/2} \sin \theta \sqrt{(r/\pi)}}{\beta_1} \left\{ [(1+m_1) n_1]^{-1} \right. \\
&\quad \times \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} - \\
&\quad \left. [(1+m_2) n_2]^{-1} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} \right\} + 0(r) \\
u_t &= -\frac{K_{III} n_3^{1/2} \sin \theta \sqrt{(r/\pi)}}{C_{44} (m_2 - m_1)} \left\{ \frac{1+m_2}{n_1} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1+m_1}{n_2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-1/2} \right\} + 0(r) \\
u_z &= \frac{K_{II} \sqrt{(r/\pi)}}{\alpha_2 C_{44} (m_1 - m_2)} \left\{ \frac{m_1 (1+m_1)}{n_1^{1/2}} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_2 (1+m_2)}{n_2^{1/2}} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right\} + 0(r)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

donde

$$n_3 = \frac{2C_{44}}{(C_{11} - C_{12})} \tag{4.26}$$

y

$$\alpha_2 = \frac{(1+m_1)(1+m_2)}{m_1 - m_2} \left[\frac{1}{n_1^{1/2}} - \frac{1}{n_2^{1/2}} \right] \tag{4.27}$$

Las expresiones anteriores son más complicadas que las correspondientes al caso isótropo, por intervenir en mayor medida las constantes elásticas del material, pero en lo fundamental son similares: la singularidad del campo de tensiones es del mismo tipo $1/\sqrt{r}$ y el campo de desplazamientos sigue también una ley del tipo \sqrt{r} .

Según las propiedades del elemento a $1/4$ y el procedimiento indicado en el apartado 2.5.1, se pueden obtener las expresiones que relacionan los FIT con los desplazamientos obtenidos de los nodos a $1/4$, que se recogen en (4.28).

$$\begin{aligned}
K_I &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_z \frac{\beta_1}{\frac{m_1}{1+m_1} - \frac{m_2}{1+m_2}} \\
K_{II} &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_n \frac{C_{44} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}) (1+m_1)(1+m_2)}{(m_2 - m_1) \sqrt{n_1 n_2}} \\
K_{III} &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_t \frac{C_{44}}{\sqrt{n_3}}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

donde L es la longitud del elemento a $1/4$ en la dirección normal al frente de grieta, y el resto de parámetros han sido definidos anteriormente.

4.5. Análisis de un problema de referencia y ajuste de parámetros de la formulación

En este apartado se presenta un problema estático pero de geometría muy exigente, que servirá como banco de pruebas de la formulación y como medio para optimizar la implementación de la parte estática, lo cual es necesario para aprovechar todas las ventajas que ofrecen las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior y construir una formulación eficiente y robusta tanto para problemas estáticos como dinámicos, que permita afrontar con garantías la resolución de problemas para los que no se conocen resultados previos, y evitar que los resultados obtenidos puedan ser imprecisos o dependientes de la discretización utilizada.

El problema en cuestión consiste en una barra prismática sometida a tracción uniforme y con una grieta en forma de $1/4$ de círculo situada en torno a una esquina a la altura del plano medio de la pieza. El esquema del problema y su discretización se presentan en las figs. 4.3 y 4.4, siendo $H/W = 4$ y $W/a = 2$.

Este problema ya fue resuelto por Ariza y Domínguez (2004) para dos tipos de materiales transversalmente isótropos: un material compuesto grafito-epoxy ($C_{11}=13.92$ GPa; $C_{33}=160.7$ GPa; $C_{12}=6.92$ GPa; $C_{13}=6.44$ GPa; $C_{44}=7.07$ GPa) y otro laminado compuesto con mayor grado de anisotropía ($C_{11}=5.37$ GPa, $C_{33}=251.168$ GPa, $C_{12}=1.34$ GPa, $C_{13}=3.35$ GPa y $C_{44}=5$ GPa). En el trabajo de Ariza y Domínguez (2004) también se obtuvieron resultados para un material isótropo ($G=100$ GPa, $\nu=0.3$), y en este caso se consiguió un buen acuerdo con los obtenidos por Li et al. (1998).

En el apartado correspondiente a resultados numéricos de este capítulo se analizará con mayor profundidad los resultados obtenidos para este problema en diversos materiales, y se comentarán algunas diferencias encontradas con respecto a los resultados de otros autores y sus causas. En el presente apartado se pretende tan solo realizar un análisis numérico de la eficiencia de la formulación desarrollada y su implementación. Para ello, se ha resuelto el mismo problema con distintas discretizaciones de la grieta y se van a comparar los resultados obtenidos con la técnica de subdivisiones y los obtenidos mediante la aplicación de la transformación de Telles en la forma

que se explicó en el capítulo anterior.

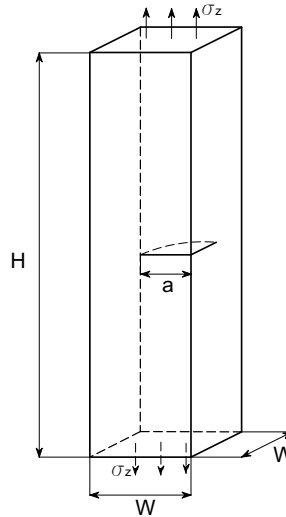


Figura 4.3: Esquema del problema de pieza prismática con grieta en esquina en forma de 1/4 de círculo.

En este último caso se van a comparar también resultados obtenidos con distinto número de puntos de Gauss según el punto de colocación está “cerca” o “lejos” del elemento de integración, así como distintas distancias críticas para distinguir entre “cerca” y “lejos”, tal y como se definió este concepto en el apartado 3.2. También se mostrará un ejemplo de los resultados obtenidos con distinta ubicación de los puntos de colocación (según se comentó en el apartado 3.3). Esta ubicación se representa en la última columna de la tabla 4.2, donde aparece la diferencia entre las coordenadas naturales del punto de colocación y a las coordenadas nodales.

En la tabla 4.2 solo se muestran las combinaciones de los parámetros anteriores más representativas de entre los numerosos casos considerados, que son para las que se van a presentar los resultados obtenidos.

Con cada una de estas combinaciones se resolvió el problema para las cuatro discretizaciones de la grieta que aparecen en la fig. 4.5, y se presentan una serie de figuras para comparar y analizarlos distintos resultados obtenidos. Los resultados se obtuvieron para el material transversalmente isótropo con mayor grado de anisotropía de los citados anteriormente (composite laminado), por ser el que supone un mayor grado de exigencia desde un punto de vista numérico.

En la leyenda de las siguientes figuras aparece una referencia al tipo de combinación referido

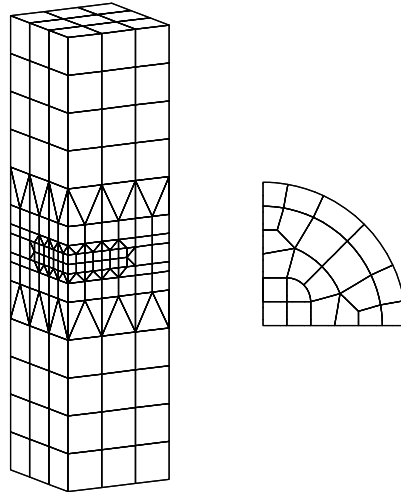


Figura 4.4: Discretización empleada en problema de grieta de esquina.

Combinación	Ptos. Gauss "lejos"	Ptos. Gauss "cerca"	Distancia crítica	Distancia pto. coloc.-nodo
P1	20	20	2	0.25
P2	6	6	2	0.25
P3	12	6	2	0.25
P4	20	6	2	0.25
P5	20	6	2	0.15
P6	20	6	3	0.25

Tabla 4.2: Combinaciones de números de puntos de Gauss, distancia crítica para la aplicación de transformación de Telles y ubicación relativa de puntos de colocación.

en la tabla 4.2 y a la malla de que se trate. A la hora de analizar los gráficos se debe tener en cuenta que el rango representado en el eje de ordenadas varía de unos a otros, con el objeto de poder apreciar bien los resultados en cada caso.

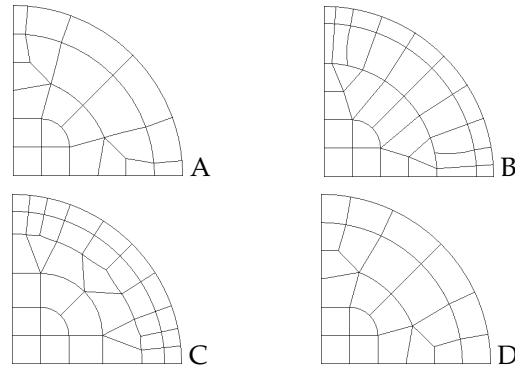


Figura 4.5: Discretizaciones de la grieta de esquina

En la fig. 4.6 se muestran los resultados obtenidos con la combinación P1, que es la que mayor número de puntos de integración utiliza, y la técnica de subdivisiones. Se observa como con esta técnica se obtienen resultados bastante aproximados con 3 de las 4 mallas, pero con una de ellas, precisamente la que tiene elementos con peor relación de aspecto, los resultados se alejan mucho de la solución real. Esto no ocurre con los resultados obtenidos con las mejoras introducidas en la formulación desarrollada en este trabajo, lo que demuestra de nuevo su robustez.

En las figuras siguientes se compararán los resultados de las distintas combinaciones de la tabla 4.2 con los de la combinación P1, que es la que mejores resultados debe proporcionar pero a costa de un mayor coste computacional, para así intentar hallar la combinación más eficiente de los parámetros que aparecen en la tabla 4.2.

En la fig. 4.7 se muestran los resultados obtenidos con la combinación P2, que es precisamente la que utiliza un menor número de puntos de integración. A la vista de la fig. 4.7 se concluye inmediatamente que es necesario aumentar dicho número de puntos, ya que los resultados obtenidos son inexactos y muy dependientes de la discretización utilizada.

Con la configuración P3 se aumenta considerablemente el número de puntos de Gauss con respecto a la combinación P2 cuando el punto de colocación se encuentra cerca del elemento sobre el que se integra. Sin embargo, se observa en la fig. 4.8 como los resultados distan mucho de ser tan precisos y estables como los obtenidos con la combinación P1.

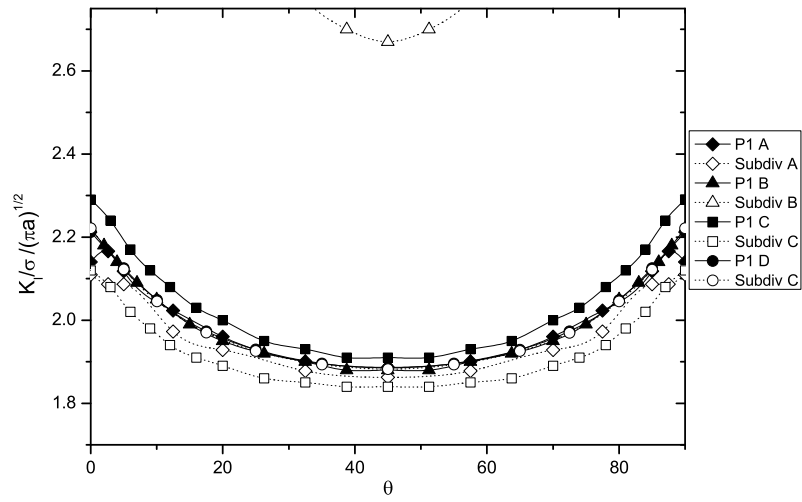


Figura 4.6: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y subdivisiones

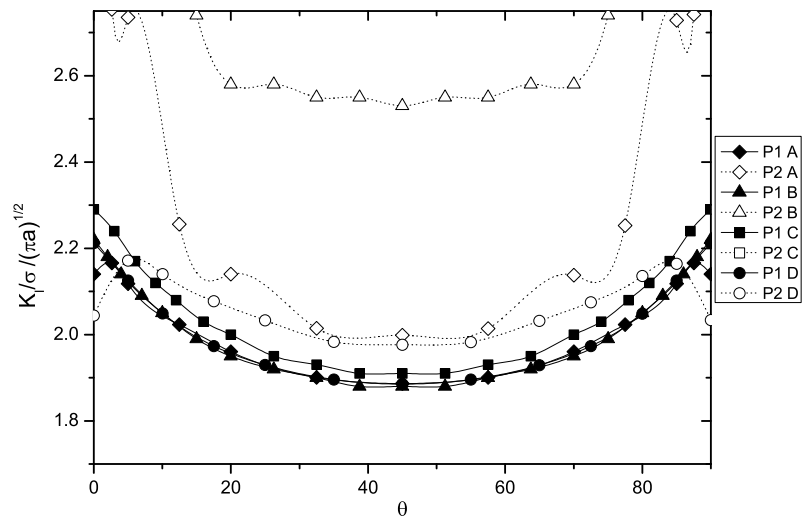


Figura 4.7: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y P2

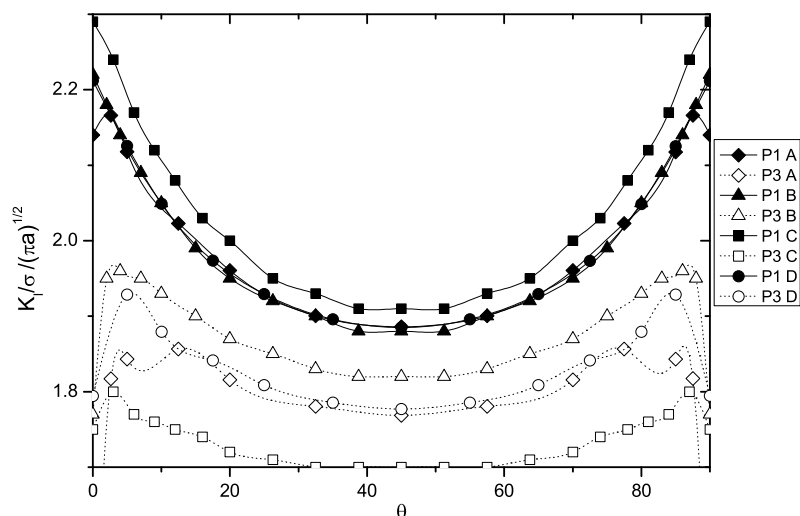


Figura 4.8: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y P3

Con la combinación P4 se considera el mismo valor de número de puntos de Gauss que en P1 cuando el punto de colocación se encuentra "cerca" del elemento. Se puede ver en la fig. 4.9 que los resultados con esta combinación se aproximan bastante a los de la combinación P1, pero es necesario introducir alguna mejora.

La siguiente combinación (P5) sirve para comprobar qué ocurre si se ubican los puntos de colocación más cerca de la posiciones nodales (distancia 0.15 frente la de 0.25 considerada hasta ahora). Los resultados se muestran en la fig. 4.10. Como era previsible, de acuerdo con las conclusiones extraídas al respecto en el capítulo anterior, esto no hace sino empeorar los resultados con respecto a la situación anterior (P4).

Por último, se considera una última combinación (P6), igual que P4, con la que se obtuvieron resultados próximos a los deseados, pero aumentando de 2 a 3 la distancia crítica sobre la que cambiar el número de puntos de Gauss y aplicar o no la transformación de Telles. El resultado (fig. 4.11) es que se consiguen resultados tan buenos como con la combinación P1.

La combinación P6 es por tanto la mejor encontrada, ya que se consigue con ella unos excelentes resultados, necesitando un tiempo de computación total tres veces menor que con la combinación P1 y dos veces menor que con subdivisiones.

La combinación P6 será por tanto la combinación que se use en lo sucesivo. Sin embargo, a la

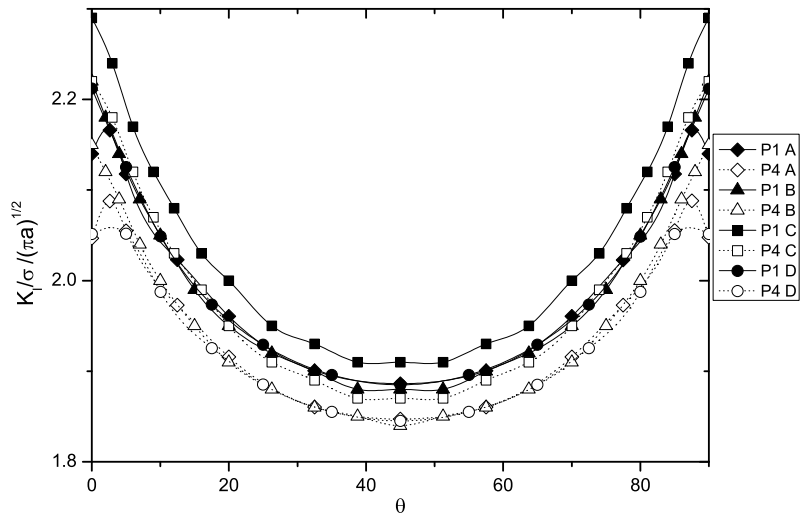


Figura 4.9: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y P4

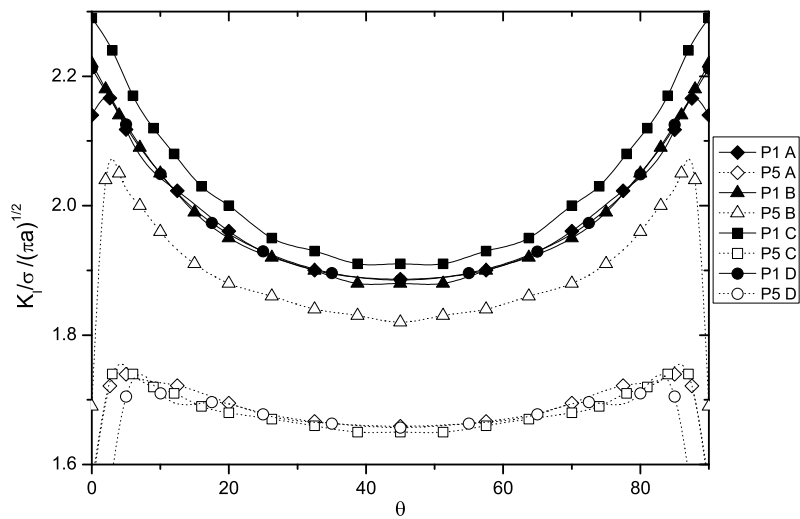


Figura 4.10: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y P5

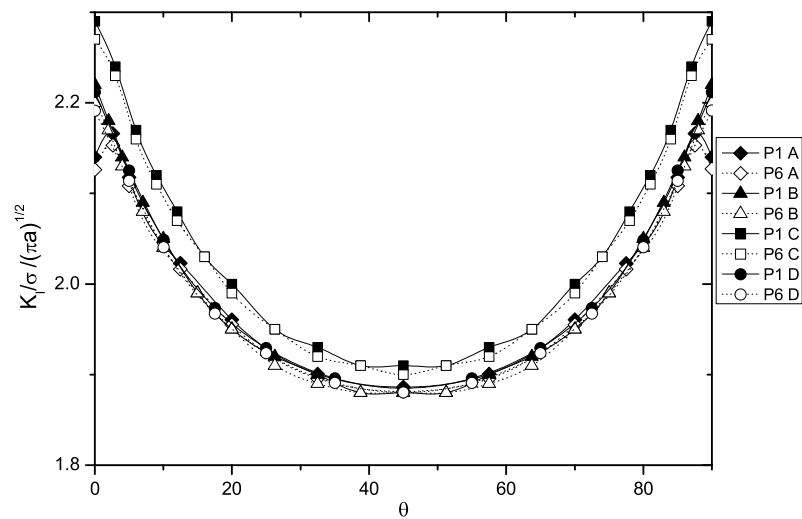


Figura 4.11: Resultados grieta de esquina. Combinación P1 y P6

vista de la mejoría de los resultados al pasar de la combinación P4 a P6, es razonable pensar que se podría optimizar aún más el número de puntos de Gauss a emplear en cada caso si se amplía el abanico de posibilidades de dicho número en función de la distancia del punto de colocación al elemento sobre el que se integra. En este trabajo se ha considerado sin embargo que no resulta rentable la programación en el código de esta posibilidad.

4.6. Resultados numéricos

4.6.1. Propiedades de los materiales

En los siguientes ejemplos numéricos se considerarán algunos materiales además de los ya presentes en el problema analizado en la sección anterior. Las propiedades de todos ellos se recogen en la tabla 4.3, incluyendo todas las constantes que aparecen tanto en la matriz de rigidez como en la matriz de flexibilidad, además de la densidad, cuyo valor es necesario para el comportamiento dinámico. A partir de estas últimas se puede observar como la relación entre los módulos de elasticidad en la dirección del eje de simetría (E_{33}) y en el plano de isotropía (E_{11}) es mayor para el composite laminado que para el grafito-epoxy, y la de éste a su vez es mayor que la del vidrio-epoxy. Esta relación es un indicador del grado de anisotropía del material y da lugar a

	Isótropo	Vidrio epoxy	Grafito Epoxy	Composite laminado
Ctes. Rigidez				
C_{11} (Pa)	3.50e6	1.46e10	1.39e10	5.37e9
C_{33} (Pa)	3.50e6	3.82e10	1.61e11	2.52e11
C_{12} (Pa)	1.50e6	5.61e9	6.92e9	1.34e9
C_{13} (Pa)	1.50e6	6.68e9	6.44e9	3.35e9
C_{44} (Pa)	1.00e6	4.34e9	7.07e9	5.00e9
C_{66} (Pa)	1.00e6	4.51e9	3.50e9	2.02e9
Ctes. flexibilidad				
E_{11} (Pa)	2.6e6	1.20e10	1.04e10	5.01e9
E_{33} (Pa)	2.6e6	3.38e10	1.57e11	2.48e11
ν_{12}	0.30	0.33	0.488	0.243
ν_{31}	0.30	0.33	0.309	0.499
ν_{13}	0.30	0.117	0.0205	0.0101
G_{13} (Pa)	1e6	4.34e9	7.07e9	5.00e9
G_{12} (Pa)	1e6	4.51e9	3.50e9	2.02e9
Densidad	5000	1700	1578	-

Tabla 4.3: Propiedades mecánicas de los materiales utilizados en los ejemplos numéricos

que el módulo de Poisson ν_{13} pueda resultar muy pequeño en este tipo de materiales, en los que habitualmente se pretende disponer de una mayor rigidez en el sentido en el que normalmente actúen las cargas que ha de soportar (dirección 3).

4.6.2. Problemas estáticos

4.6.2.1. Prisma con grieta recta

En esta sección se va a analizar el comportamiento de una pieza prismática con una grieta recta en su interior con distintas disposiciones: grieta de borde, grieta central y doble grieta de borde. Para estas tres configuraciones se utilizarán las mismas discretizaciones pero aplicando condiciones de simetría en los planos que correspondan. También se utilizará una discretización con un espesor relativamente pequeño y otra de gran espesor, entendiendo por espesor la dimen-

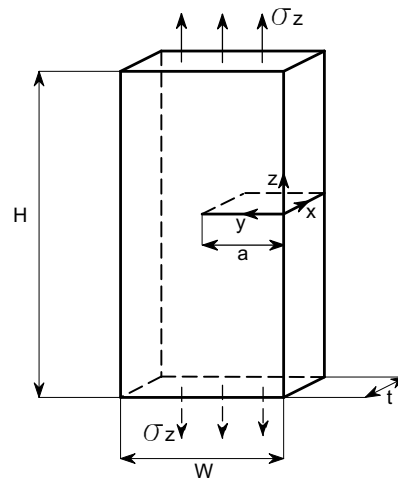


Figura 4.12: Esquema de la geometría básica de prisma con grieta recta de borde ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

sión en la dirección del frente de grieta. La discretización de pequeño espesor servirá para simular un comportamiento bidimensional, y los resultados obtenidos servirán para analizar el carácter tridimensional de la segunda.

La geometría del problema y las discretizaciones empleadas aparecen en las figuras 4.12, 4.13 y 4.14. En esta última las dimensiones y la discretización del problema son las mismas que las que se utilizaron en el apartado 3.4.2, e igualmente se consideran 4 discretizaciones distintas de la grieta para contrastar la estabilidad y robustez de los resultados. La primera de ellas (tipo A) consiste en una discretización uniforme con elementos de dimensiones $0,25 \times 0,25$, y las tres restantes (tipo B) son del tipo que aparece en la fig. 4.14, pero variando la longitud L de los elementos a $1/4$ en la dirección perpendicular al frente de grieta ($L=0,25$, $L=0,125$ y $L=0,18$).

En la pieza de pequeño espesor ($t/W = 0,25$) se simulan condiciones de deformación plana impidiendo el desplazamiento en dirección x en las caras perpendiculares a dicha dirección, mientras que éstas se dejan como superficies libres de tracciones para simular condiciones de tensión plana. Esto no deja de ser una aproximación, que sería mejor cuanto menor fuese el espesor del modelo.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para las distintas configuraciones, para posteriormente extraer una serie de conclusiones sobre el conjunto de situaciones analizadas.

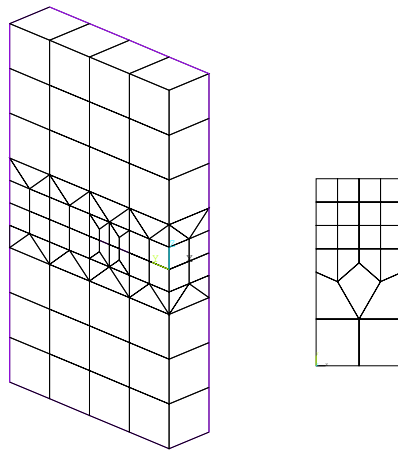


Figura 4.13: Discretización del prisma de pequeño espesor y de la superficie de la grieta ($t/W=0.25$)

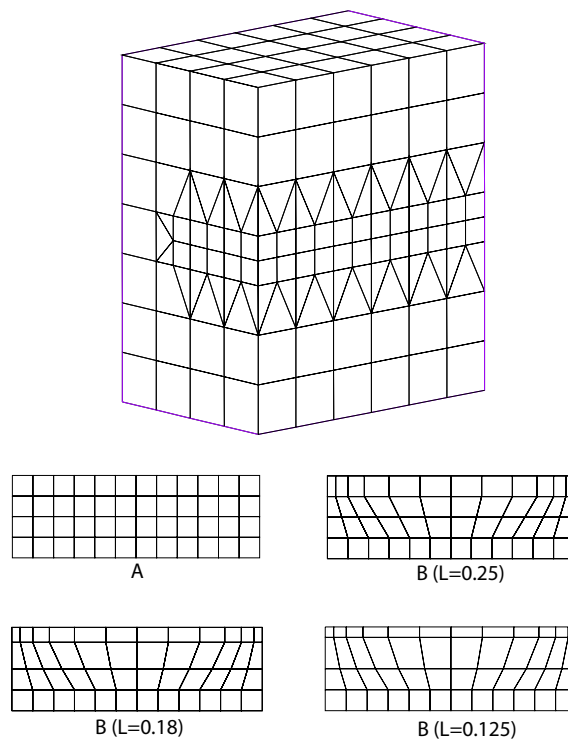


Figura 4.14: Discretización del prisma de gran espesor ($t/W=1.5$) y distintas discretizaciones consideradas para la grieta

	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/K_{I\text{ isótr.}}$
Isótropo	2.930	1
Vidrio Epoxy	5.836	1.992
Grafito Epoxy	6.547	2.234
Compos. Lam.	7.920	2.703

Tabla 4.4: Resultados para grieta recta de borde en “deformación plana”

4.6.2.1.1. Prisma con grieta recta de borde. Para validar el modelo ‘2D’ en este tipo de problema se resolvió previamente una configuración en la que $H/W = 2$, para la que existen resultados previos (Brown y Strawley, 1966, Rooke y Cartwright, 1976). A partir del DAG del nodo a 1/4 ubicado en el centro del espécimen y simulando condiciones de deformación plana se obtiene un FIT de valor $K_I = 2,84\sigma\sqrt{\pi a}$ mientras que Brown y Strawley (1966) predice un valor de $K_I = 2,897\sigma\sqrt{\pi a}$, lo cual supone una diferencia del 2 %, que sirve para admitir el modelo “2D” como válido.

A continuación se resuelve el mismo problema para un valor de $H/W = 1,75$. En la fig. 4.15 se muestra la evolución del FIT adimensionalizado a lo largo del espesor de la pieza (la coordenada s tiene su origen en el centro de la pieza) para distintos materiales y simulando condiciones de deformación plana y tensión plana. Se puede observar como el valor del FIT es sensiblemente distinto para cada material, obteniéndose mayores valores cuanto mayor es su grado de anisotropía. En todos los casos se obtiene una evolución similar entre los casos que simulan deformación plana y tensión plana. En el caso de “deformación plana” no aparece apenas variación del FIT a lo largo del espesor, tal y como era predecible, si bien aparece un pequeño efecto en los extremos (borde libre o esquina), donde hay un ligero descenso en su valor. Bajo condición de “tensión plana” este efecto del borde libre es más acusado, y en general se observa una ligera variación del FIT a lo largo del espesor, así como un valor superior al caso de “deformación plana”, si bien la diferencia entre ambas situaciones es pequeña (inferior al 5%), tal y como era predecible (Rooke y Cartwright, 1976).

En la tabla 4.4 aparecen los FIT en deformación plana obtenidos para cada material, y su relación con el obtenido para el caso isótropo. Estos resultados serán comparados con los de otras configuraciones y analizados posteriormente.

A continuación se representan los resultados para la geometría de mayor espesor en la figu-

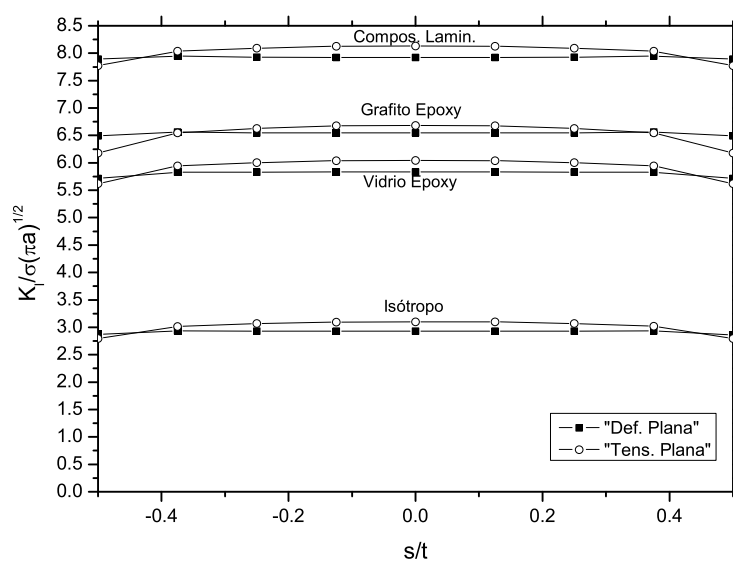


Figura 4.15: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta recta de borde en prisma "2D" ($H/W = 1,75$)

ra 4.16, donde se recoge la evolución del FIT para cada material considerado y para cada discretización del problema. Para cada material se obtienen unas diferencias menores del 3% entre los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones. En todos los casos se observa además un brusco descenso del FIT en las proximidades del borde libre. Esto concuerda con las observaciones realizadas en el apartado 2.5, donde se analizaba el hecho de que en la intersección normal del frente de grieta con un borde libre el orden de la singularidad es menor que $1/\sqrt{r}$ (Folias, 1975, Bazant et al., 1979, Benthem, 1980) por lo que si se obtiene el FIT a partir de su definición habitual, como es este caso, sucede que el FIT así obtenido tiende a cero en el borde libre. Las discretizaciones utilizadas no son lo suficientemente refinadas en las proximidades de esta intersección como para analizar con detalle este fenómeno. No obstante, resulta significativo que conforme el tamaño de los elementos en esas zonas se va haciendo menor, se obtiene una mayor caída del FIT en el borde libre.

Los resultados para materiales transversalmente isótopos de la figura 4.16 muestran cierto desacuerdo con los presentados por Ariza y Domínguez (2004). La razón de ello podría estar en errores en la implementación de los términos s_{lmk}^* de la solución fundamental, y en una incorrecta evaluación de los FIT en el caso del material grafito-epoxy. Los resultados aquí presentados se

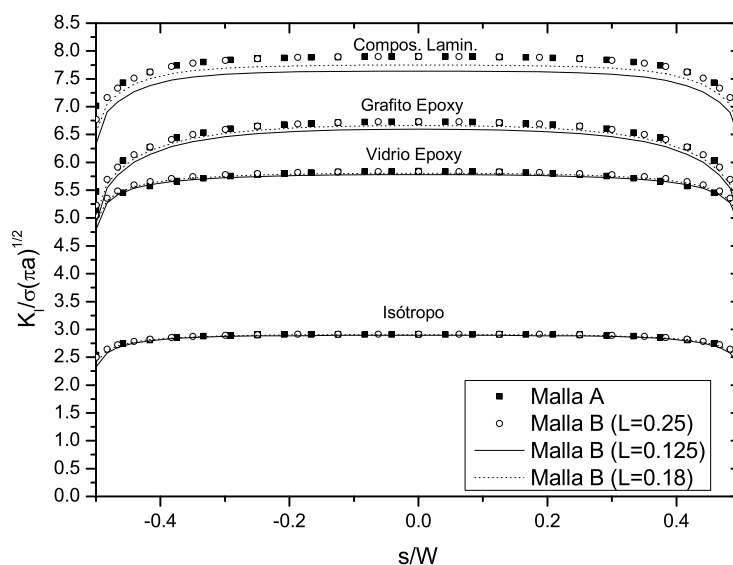


Figura 4.16: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta recta de borde en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

pueden considerar como una corrección de los anteriormente obtenidos por Ariza y Domínguez (2004). En el caso isótropo los resultados concuerdan entre sí y ambos están también de acuerdo con los previamente obtenidos por Li et al. (1998).

Por otro lado, y al igual que ocurría en el caso "2D", se obtiene un mayor valor del FIT conforme aumenta el grado de anisotropía del material. Si la evolución del FIT para cada material se adimensionaliza con el valor del FIT que le corresponde en deformación plana, se obtiene la evolución que aparece en la fig. 4.17 (para una mayor claridad, en este tipo de representaciones se representará el resultado para una discretización concreta, ya que los resultados son similares para el resto de discretizaciones).

En la fig. 4.17 se observa como el FIT adimensionalizado con respecto al de deformación plana presenta una evolución prácticamente idéntica en todos los materiales. Tan solo se observa una evolución algo más acusada para el grafito-epoxy, aunque en cualquier caso presenta una diferencia menor del 3% con respecto al resto de materiales, los cuales a su vez difieren entre sí en menos de un 1%. Estas diferencias podrían ser justificadas por la existencia de errores numéricos y el efecto de la propia discretización utilizada. El efecto de la variación de las constantes elásticas es otra justificación razonable, pero en cualquier caso resulta prácticamente inapreciable su efecto

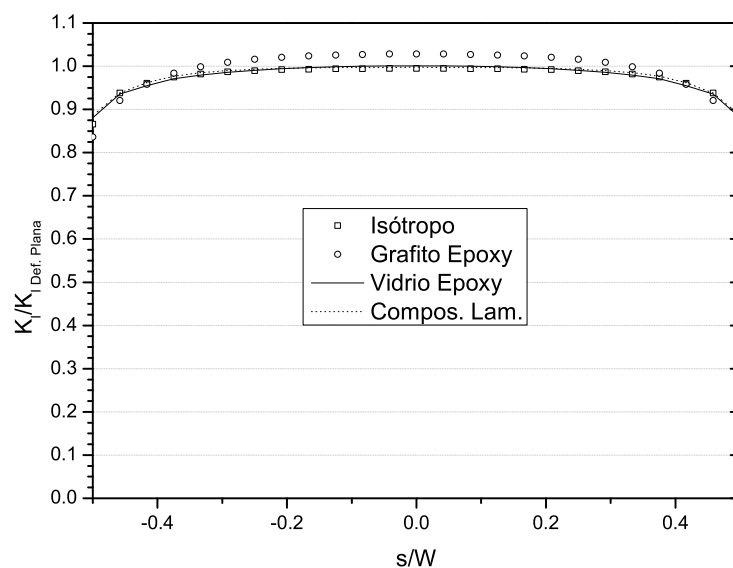


Figura 4.17: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta recta de borde en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$) adimensionalizado con el FIT en deformación plana

a la vista de la variedad de combinaciones consideradas. La cuantificación de su efecto requeriría un estudio analítico y numérico con mayor detalle, lo cual queda fuera del alcance de esta tesis.

También se observa con mayor claridad en la fig. 4.17 la evolución relativa del FIT. Se observa su tendencia decreciente desde el centro hacia los extremos, siendo su valor prácticamente constante a lo largo de la mayor parte del espesor. En la parte central su valor coincide con el de deformación plana, como era previsible, y difiere en menos de un 5 % con respecto a este valor en todo el espesor salvo en una “capa límite” que abarca aproximadamente un 10 % del espesor y en la que el FIT decrece rápidamente. Es significativo que en el caso de “tensión plana” (fig. 4.15) se observa también una “capa límite” del 10 % del espesor, aunque en este caso la discretización es aún menos refinada en ese sentido y resulta más difícil de determinar.

4.6.2.1.2. Prisma con grieta recta central. Según el esquema de la fig. 4.12, imponiendo desplazamientos nulos según la dirección y en la cara del prisma $y=0$, se estará especificando que ese es un plano de simetría y se estará modelando un prisma con una grieta recta central y pasante en su interior (fig. 4.18).

Es lógico pensar que la condición de contorno de simetría impide el giro de esta cara del

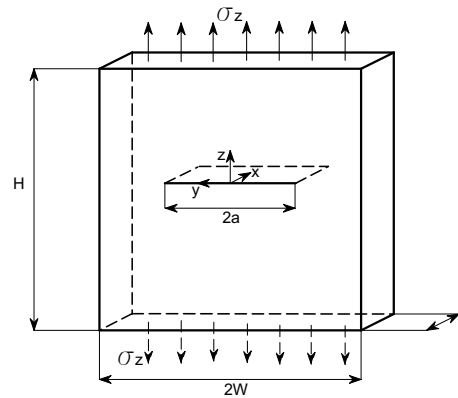


Figura 4.18: Esquema de la geometría básica de prisma con grieta recta central ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/K_{I\text{ isótr.}}$	$K_{I\text{ central}}/K_{I\text{ borde}}$
Isótropo	1.420	1	0.485
Vidrio Epoxy	3.327	2.343	0.570
Grafito Epoxy	4.256	2.997	0.650
Compos. Lam.	5.446	3.835	0.688

Tabla 4.5: Resultados para grieta recta central en “deformación plana”

prisma, lo cual reduce la apertura de grieta y por tanto el valor del FIT disminuirá con respecto al caso anterior. Esto se refleja si se comparan los resultados “2D” para este problema (fig. 4.19) con los de la grieta recta de borde (fig. 4.15). Por lo demás, se observan en ambos problemas el mismo tipo de comportamiento en los casos de “deformación plana” y “tensión plana”. También se vuelven a obtener mayores valores del FIT para mayores valores del grado de anisotropía.

En la tabla 4.5 se recogen los FIT en deformación plana obtenidos para los distintos materiales considerados, así como su relación con el caso isótropo y con la situación de grieta recta de borde. Se puede observar como ambas relaciones son completamente distintas para cada material, indicando así que el cambio de configuración en la geometría del problema afecta de manera muy diferente a cada uno de ellos.

Para el caso isótropo, el valor obtenido del FIT en deformación plana es $K_I/\sigma\sqrt{\pi a} = 1,420$, mientras que Isida (1975) obtuvo un valor de $K_I/\sigma\sqrt{\pi a} = 1,43$. Este resultado sirve para validar

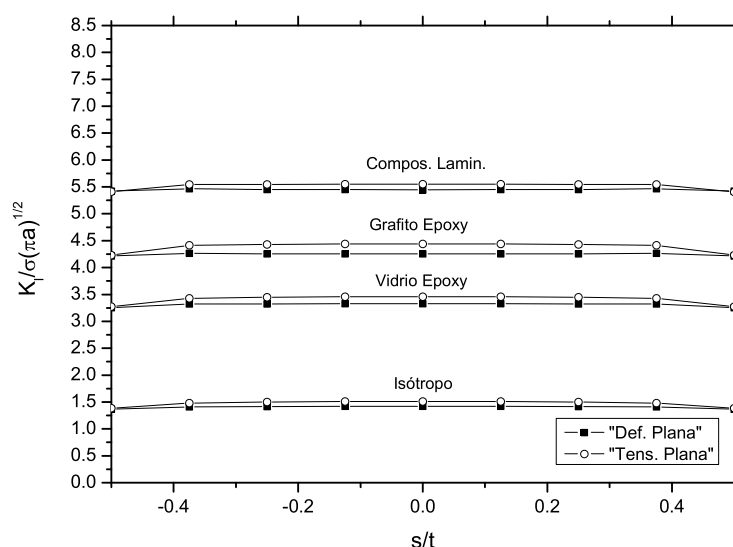


Figura 4.19: Resultados de prisma con grieta recta central "2D" ($t/W = 0,25$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

de nuevo la metodología desarrollada.

En la fig. 4.20 se muestran la evolución del FIT para la pieza de mayor espesor. Resulta llamativo en este caso que la evolución es ligeramente creciente desde el centro de la pieza hacia los extremos, existiendo finalmente una zona (elemento más cercano al borde libre) donde esta tendencia cambia bruscamente y el valor del FIT disminuye bruscamente. Este fenómeno resulta independiente de la discretización utilizada y del material de que se trate. No obstante, esta caída en el valor del FIT puede estar asociada a la intersección del frente de grieta con una superficie libre, tal y como se comentó en el apartado anterior. Sin embargo, el hecho de que este descenso solo sea registrado en un único elemento de la discretización indica que sería necesario un análisis en mayor profundidad, con una discretización más fina, para poder analizar qué ocurre en esta zona.

La evolución del FIT adimensionalizado con el valor correspondiente a la situación de "deformación plana" para cada material se muestra en la figura 4.21. Al igual que en el caso anterior, la evolución del FIT adimensionalizado de esta manera resulta prácticamente independiente del material. Las diferencias entre distintos materiales son menores del 5%, y pueden estar producidas por errores numéricos, efecto de la discretización, etc. De nuevo es el material grafito-epoxy

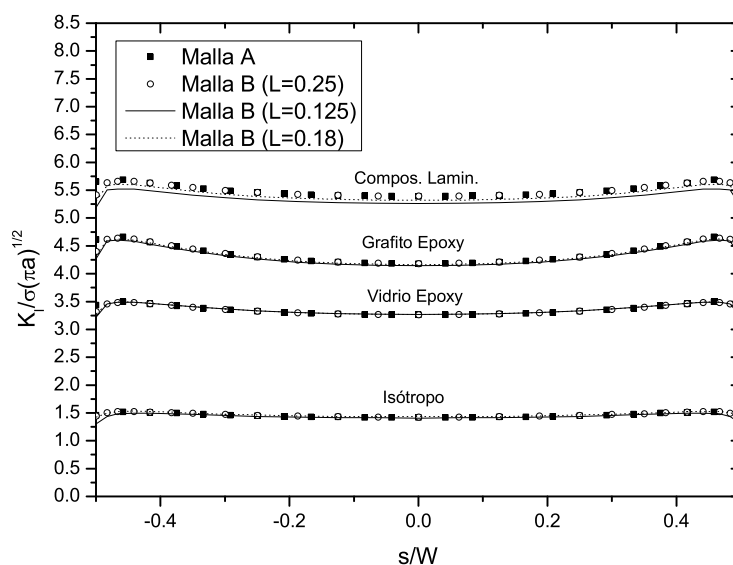


Figura 4.20: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta recta central en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

el que muestra una evolución algo más acusada, mostrando los otros tres materiales un comportamiento casi idéntico entre sí.

En este caso se observa de nuevo cómo los valores del FIT difieren en menos de un 5% con respecto al valor de deformación plana en todo el espesor salvo en una zona próxima al borde libre que tiene una dimensión aproximada del 10% del espesor ($|s/t| \geq 0,4$).

4.6.2.1.3. Doble grieta recta de borde. En este caso se impone una condición de simetría en el plano $y = W$ (fig. 4.12) impidiendo el desplazamiento en dirección y en ese plano. De esa forma la geometría del problema que se está modelando queda representado en la figura 4.22.

En la fig. 4.23 se muestran los resultados para esta geometría simulando un problema bidimensional. Se obtienen de nuevo el mismo tipo de resultados que en los dos casos anteriores, pudiéndose sacar por tanto las mismas conclusiones. El único efecto significativo es una mayor diferencia entre los valores en “deformación plana” y “tensión plana” para el material grafito epoxy. En la tabla 4.6 se muestran el FIT para cada material en condiciones de “deformación plana”, y su relación con el valor del caso isótropo por un lado y con su valor correspondiente para el caso de una sola grieta recta de borde. Estas relaciones sirven para comprobar de nuevo

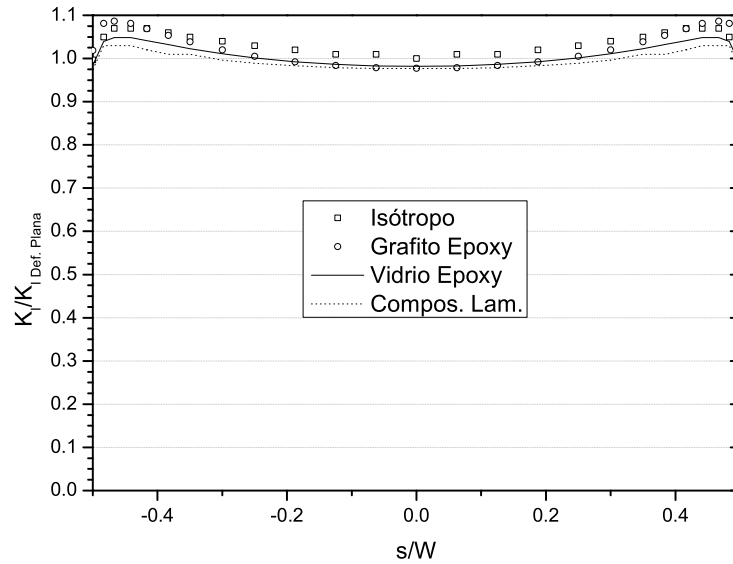


Figura 4.21: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta recta central en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$) adimensionalizado con el FIT en deformación plana

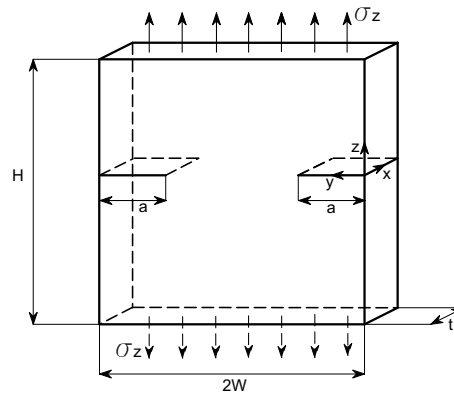


Figura 4.22: Esquema de la geometría básica de prisma con dos grietas rectas de borde ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

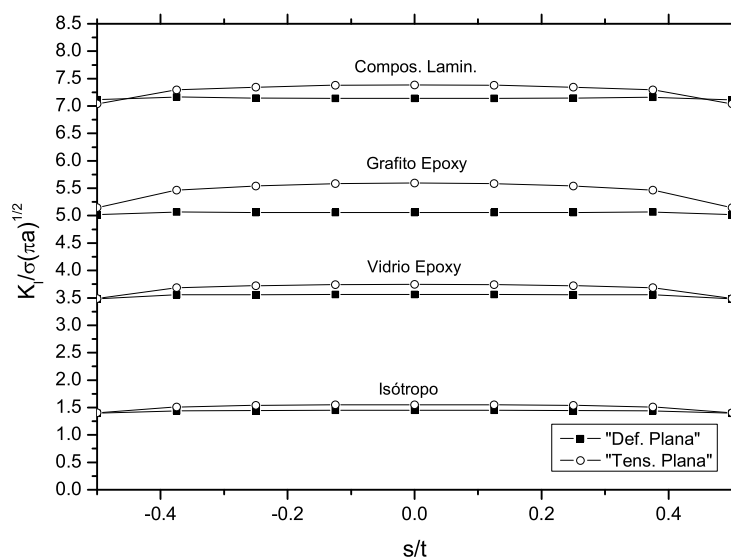


Figura 4.23: Resultados de prisma con doble grieta recta de borde "2D" ($t/W = 0,25$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

como el cambio en la geometría del problema afecta de manera muy distinta a cada uno de los materiales.

Representando los valores del FIT obtenidos para la configuración de mayor espesor (fig. 4.24) se obtiene de nuevo una tendencia decreciente en el valor del FIT desde el centro hacia los extremos. Además, los resultados son de nuevo muy poco dependientes de la discretización utilizada, y se detecta en mayor medida el efecto del borde libre cuanto más fina es la malla en sus proximidades

Los resultados anteriores, adimensionalizados con el resultado correspondiente a cada ma-

	$K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$	$K_I / K_{I \text{ isótr.}}$	$K_{I \text{ bordedoble}} / K_{I \text{ borde}}$
Isótropo	1.451	1	0.495
Vidrio Epoxy	3.561	2.454	0.610
Grafito Epoxy	5.056	3.484	0.772
Compos. Lam.	7.138	4.919	0.901

Tabla 4.6: Resultados para doble grieta recta de borde en "deformación plana"

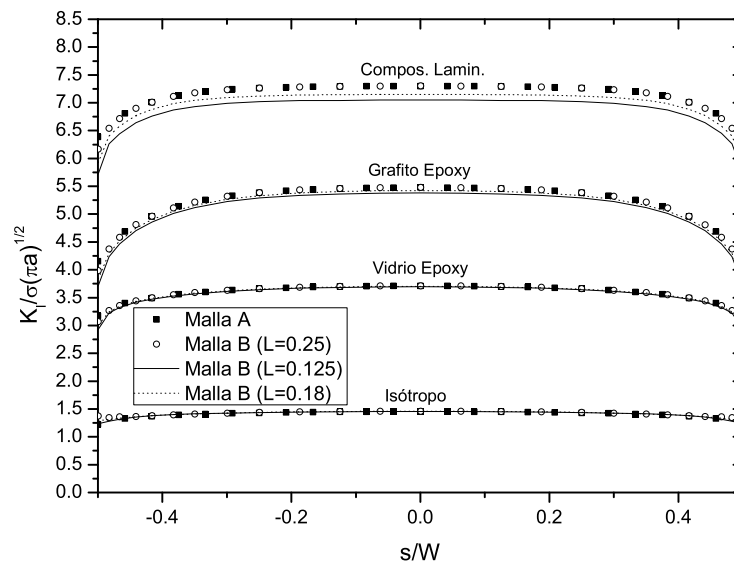


Figura 4.24: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$) con dos grietas rectas de borde

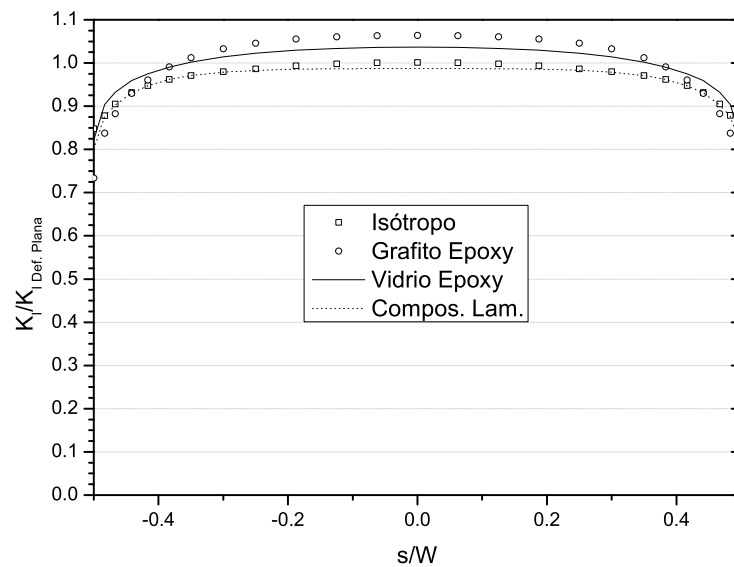


Figura 4.25: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$, $H/W = 1,75$, $W/a = 2$) con dos grietas de borde, adimensionalizado con el FIT en deformación plana

terial en deformación plana (fig. 4.25) permiten extraer las mismas conclusiones que en los dos casos anteriores.

4.6.2.1.4. Conclusiones. En los tres apartados anteriores se han estudiado distintas configuraciones para un prisma con una grieta recta en su interior. De su análisis se pueden extraer una serie de conclusiones que se resumen a continuación, aunque la mayoría de las cuales se han mencionado ya en cada uno de los casos.

Se ha observado como la configuración geométrica del problema afecta de manera muy distinta a cada uno de los materiales considerados. Por otro lado, los valores del FIT, para una misma geometría y estado de cargas, resultan mayores cuanto mayor es el grado de anisotropía del material.

En todos los materiales y discretizaciones se ha visto reflejado el efecto del borde libre, detectándose una caída brusca en el valor del FIT, que teóricamente debiera tender a cero en dicha región (Folias, 1975, Bazant et al., 1979, Benthem, 1980). Esta disminución en el valor del FIT es más acusada cuanto más fina es la malla en la zona próxima al borde libre. Para sacar conclusiones más determinantes sería necesario un estudio en mayor detalle de este fenómeno en los distintos materiales con discretizaciones más refinadas en esas zonas, así como un estudio en el interior del dominio en la zonas cercanas al frente de grieta, del estilo a los realizados por Agrawal y Kishore (2001) y Nakamura y Parks (1988).

En todos los materiales se ha detectado una variación del FIT prácticamente idéntica cuando éste se adimensionaliza con el valor correspondiente a un estado de deformación plana. Las diferencias encontradas en todos los casos son inferiores al 7% (siendo normalmente inferiores al 3%) y pueden ser debidas más a errores o inestabilidades numéricas que a un diferente comportamiento de los materiales. Los diferentes valores de las propiedades mecánicas así como las relaciones entre ellas para los materiales considerados hacen pensar en la escasa influencia que tienen éstas sobre la evolución del FIT una vez adimensionalizado éste convenientemente. A pesar de estos resultados, sería necesario un estudio numérico más riguroso y, sobre todo, un estudio analítico en detalle, para determinar cual es la verdadera influencia de las constantes elásticas en los resultados. En cualquier caso, a la vista del estudio realizado se puede concluir que en problemas tridimensionales de este tipo se puede conocer a priori la solución para un material transversalmente isótropo a partir de la solución de un problema al que se pueda asimilar en deformación plana junto con la solución del problema tridimensional para un material isótropo (estas dos

situaciones son normalmente más fáciles de resolver e incluso se pueden encontrar resultados previos de otros autores). Este método de aproximación puede conllevar un error aceptable para la mayoría de casos prácticos.

Por último, sería interesante llevar a cabo un análisis de este tipo en materiales anisótropos, y comprobar si se cumple esta misma analogía entre problemas 2D y 3D con respecto al caso isótropo.

4.6.2.2. Prisma con grieta de esquina en forma de cuarto de círculo

En esta sección se vuelve a analizar el problema que ya se planteó en la sección 4.5, donde sirvió para establecer una serie de criterios en la implementación de la formulación desarrollada y mostrar su eficiencia.

La geometría del problema y las discretizaciones utilizadas se muestran en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5. En la fig. 4.26 aparecen los resultados obtenidos para los materiales considerados en los ejemplos anteriores y cuyas propiedades se recogen en la tabla 4.3. En dicha figura se representa la evolución del FIT adimensionalizado a lo largo del frente de grieta (θ es una coordenada angular que recorre el frente de grieta).

Se puede observar como existe muy poca diferencia entre los resultados obtenidos para los distintos materiales transversalmente isótropos, que sí difieren significativamente con respecto a los del material isótropo. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las secciones anteriores, esto muestra de nuevo como la variación de la geometría del contorno y de la grieta afectan de distinta manera según el material que se trate.

Se han obtenido resultados para cada material con las distintas discretizaciones que se mostraron la fig. 4.5. En todos los casos se ha encontrado muy poca diferencia entre los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones, tal y como ya se comprobó en el apartado 4.5 para el material composite laminado. Para facilitar la interpretación de la figura 4.26 solo se muestran los resultados para una de las discretizaciones consideradas.

Hay que admitir una apreciable discrepancia entre los resultados aquí presentados y los obtenidos por Ariza y Domínguez (2004) para los materiales transversalmente isótropos en consideración. Como ya se comentó en el caso del prisma con grieta recta de borde, esta discrepancia pudiera ser debida a errores en la implementación de los términos s_{lmk}^* de la solución fundamental y/o en la evaluación de los FIT para el material grafito-epoxy, ya que en el caso isótropo se obtienen

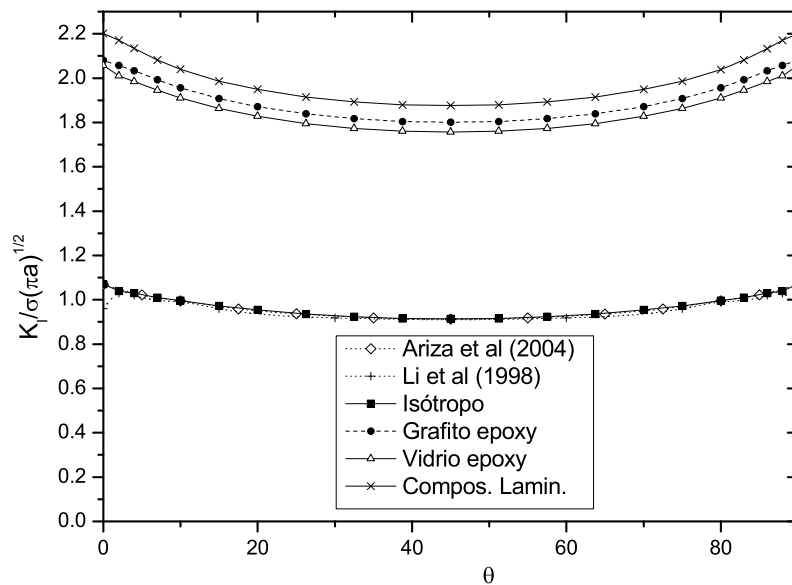


Figura 4.26: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta en prisma con grieta circular en forma de 1/4 de círculo

resultados en concordancia con los valores previos obtenidos por Ariza y Domínguez (2004) y Li et al. (1998).

El valor del FIT obtenido muestra una tendencia creciente desde el centro de la pieza ($\theta = 45^\circ$) hacia los extremos (borde libre) en todos los casos. Esto indicaría que si la grieta se propaga lo haría en principio sobre la superficie del contorno o en su zona próxima. Algo parecido (aunque con una evolución más suave del FIT) se obtuvo en el caso de un prisma con una grieta recta central en su interior. Sin embargo, en aquel caso era apreciable una “capa límite” en la que el valor del FIT disminuía significativamente, y esto resulta justificado por el hecho de que en la superficie libre el grado de la singularidad es menor que $1/\sqrt{r}$, como ya se comentó anteriormente (apartado 2.5). Esta “capa límite” también se observaba en los casos de grieta recta de borde (sencilla o doble).

En el caso de la grieta de esquina en forma de 1/4 de círculo tan solo se ha observado claramente esta “capa límite” en una de las discretizaciones empleadas (tipo A, fig. 4.5), y muy ligeramente en otra de ellas (tipo C, fig. 4.5), mientras que en las otras dos no se ha observado ningún efecto de este tipo. Esta situación queda reflejada en las figuras 4.6 a 4.11 para el caso del com-

posite laminado, y se repite de la misma manera en todos los materiales considerados. Li et al. (1998) observaron este efecto en los resultados obtenidos con una malla del tipo aquí utilizado, mientras que con una malla muy poco refinada no observaron este efecto. Los autores justificaron este hecho por la razón de que la segunda discretización no era lo suficientemente refinada para captar el efecto del borde libre. Esta justificación parece plausible, y de hecho concuerda en cierta medida con las observaciones realizadas en la sección anterior sobre el efecto de la discretización en las proximidades del borde libre. Sin embargo, en el problema que ahora nos ocupa no parece haber una relación tan clara entre el tipo de discretización y el efecto de borde libre que se observa en cada caso, a la vista de los distintos tipos de mallas empleadas. Al igual que en la sección anterior, se puede llegar a la conclusión de que se hace necesario un estudio con mayor profundidad y detalle sobre el comportamiento de la grieta en las proximidades de la superficie libre. No obstante, dado que diversos autores (e.g. Bazant et al., 1979, Pook, 1994) afirman que el grado de la singularidad del campo de tensiones depende del ángulo con que la grieta intersecta con la superficie libre, sería interesante investigar también el efecto adicional que tiene la curvatura del frente de grieta en dicho punto de intersección. A falta de un estudio numérico más profundo, podría pensarse que esta curvatura puede afectar al grado de la singularidad del campo de tensiones en esa zona y por tanto puede justificar la inexistencia de una “capa límite” en los casos analizados.

Respecto a la evolución del FIT en función del material, se puede observar una tendencia muy similar para todos los materiales. En el caso del prisma con grieta recta (apartado anterior) esta semejanza entre el comportamiento de distintos materiales se pudo comprobar con la representación del FIT relativo respecto a una situación de deformación plana. En el problema del prisma con una grieta de esquina no existe un problema bidimensional con el que se pueda asimilar directamente. Sin embargo, si se representa la evolución del FIT relativo respecto al FIT obtenido en cada caso en el centro de la pieza ($\theta = 45^\circ$) se tiene el resultado representado en la figura 4.27. En dicha figura se puede comprobar como efectivamente la evolución relativa del FIT resulta de nuevo prácticamente idéntica para todos los materiales.

4.6.3. Problemas dinámicos

En esta sección se presentan una serie de resultados para problemas dinámicos de grietas inmersas en medios transversalmente isótropos sometidos a una carga dinámica, utilizando la

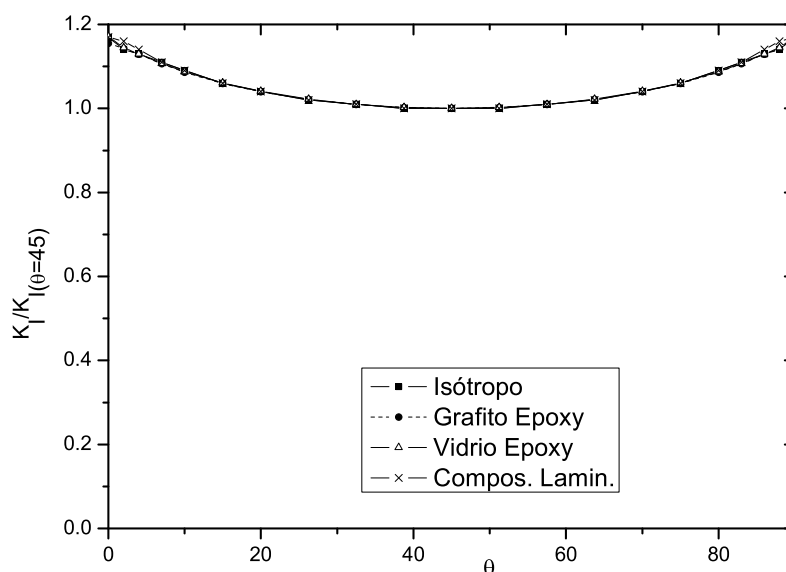


Figura 4.27: Evolución del FIT a lo largo del frente de grieta en prisma con grieta circular en forma de 1/4 de círculo, adimensionalizado con el FIT en el punto medio del frente de grieta

formulación presentada a lo largo del capítulo.

En primer lugar se analizará la respuesta dinámica de una grieta circular en un medio infinito bajo un frente de ondas normal a su superficie. Este problema no es del tipo que se pretende resolver con la metodología desarrollada a lo largo de este trabajo. Sin embargo, antes de comenzar a obtener resultados de problemas de grietas en medios finitos transversalmente isótropos, sobre los que habrá muy pocos o ningún resultado previo obtenido por otros autores, conviene comprobar el correcto funcionamiento del código desarrollado sobre algún otro problema de menor complejidad y para el que existan resultados previos.

Posteriormente se estudiará el comportamiento dinámico de un prisma con una grieta de forma circular en su interior, y finalmente se obtendrá la respuesta dinámica de una placa con una grieta elíptica en su interior, con distintas configuraciones geométricas.

En estos casos, los resultados se presentarán como la amplitud del FIT en función de la frecuencia, de tal forma que este barrido en frecuencia de lugar a la obtención de un espectro que constituye la Función de Respuesta en Frecuencia del problema en cuestión. Este resultado serviría para obtener la evolución temporal del FIT ante una excitación no armónica, a partir de la trans-

formada inversa de Fourier de la función en frecuencia resultante de multiplicar la Función de Respuesta en Frecuencia y el espectro de la excitación.

Hay que advertir que para realizar este paso al dominio del tiempo se hace necesario disponer de un espectro en frecuencia preciso, ya que los resultados pueden ser muy sensibles a pequeños errores en dicho espectro. Esto es aún más complicado y computacionalmente costoso en materiales transversalmente isótropos, en los que, tal y como se verá en los siguientes ejemplos, se obtienen espectros más complejos que en el caso isótropo, necesiándose un barrido en frecuencia más fino para su obtención.

Por otro lado, para una aplicación más realista y práctica del análisis en frecuencia, sería necesario la consideración del comportamiento viscoelástico del material, de forma que la magnitud de los picos que aparecen en la Función de Respuesta en Frecuencia puedan ser correctamente evaluados. La no consideración del amortiguamiento interno del material hace que los picos del espectro tiendan matemáticamente a un valor no acotado (se trata de frecuencias de resonancia), aunque numéricamente se obtengan valores finitos en estos picos (se podría hablar de cierto tipo “amortiguamiento numérico” ficticio).

La determinación del amortiguamiento en materiales compuestos que exhiben un comportamiento transversalmente isótropo no es sencilla (Yin-Tao et al, 2001, Saravanos y Chamis, 1991, Ni y Adams, 1984). No obstante la suposición de invariabilidad de los coeficientes de Poisson (e.g. Christensen, 1981, Hilton, 2001) simplifica la consideración del comportamiento viscoelástico del material (Melo y Radford, 2003) y su inclusión en la formulación desarrollada no es complicada. Sin embargo, la difícil evaluación experimental de los correspondientes coeficientes de amortiguamiento y la escasez de resultados existentes en cuanto a dicha caracterización hacen difícil la obtención de resultados numéricos prácticos y precisos.

En esta tesis no se ha abordado la inclusión del amortiguamiento del material, siendo éste un posible desarrollo futuro del trabajo realizado, así como la obtención de resultados en el dominio del tiempo.

4.6.3.1. Grieta circular en medio infinito bajo un frente de ondas incidente normal a su superficie

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para una grieta circular en un medio infinito bajo la acción de un frente ondas incidente en dirección normal a la grieta. La grieta

está contenida en el plano de isotropía del material, luego las ondas incidentes se desplazan en la dirección del eje de simetría del material.

Este problema, para material isótropo y transversalmente isótropo, ya fue resuelto por Ariza (2002) y Ariza y Domínguez (2004b), además de otros autores como Kundu y Boström (1991) o Tsai (1988).

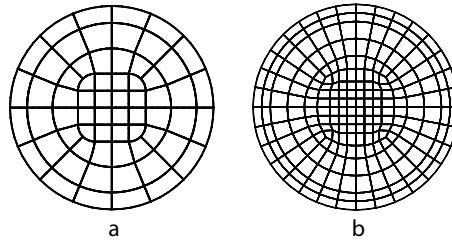


Figura 4.28: Discretizaciones grieta circular en medio infinito para baja (a) y alta (b) frecuencia

En este caso, se han obtenido resultados para dos tipos de materiales: un material isótropo de distintas propiedades al considerado en los apartados anteriores ($E=69.15$ GPa, $\nu=0.25$, $\rho=2770$ kg/m³) y un material compuesto grafito-epoxy ya considerado anteriormente y cuyas propiedades se recogen en la tabla 4.3.

En ambos casos se han obtenido los resultados para $k_t a = 2$, $k_t a = 10$ y $k_t a = 20$, siendo k_t el número de onda asociado a ondas puramente transversales viajando la dirección del eje de simetría del material ($k_t = \omega / \sqrt{C_{44}/\rho}$) y a el radio de la grieta. Esto equivale a una frecuencia ω de 2106.66, 10533.31 y 21066.62 s⁻¹ para el material isótropo y 1411.120, 7055.6 y 14111.3 s⁻¹ para el material grafito-epoxy.

Para el valor más bajo de la frecuencia se han obtenido resultados con la discretización de la grieta que aparece en la fig. 4.28a, mientras que para valores superiores se ha considerado una malla más refinada (fig. 4.28b) para poder obtener una buena representación de la solución del problema.

En las figuras 4.29 y 4.30 se muestran los resultados para el material isótropo y transversalmente isótropo, respectivamente (la formulación mixta del MEC desarrollada aparece en estas figuras con el nombre de FMMEC). Se representa la amplitud del DAG armónico, normalizado con respecto al DAG en el centro de la grieta en el caso estático, a lo largo del radio adimensionalizado de la grieta. Obviamente, el problema tiene simetría de revolución y con esta representación

queda definida la solución del problema completo.

El acuerdo es excelente entre los resultados obtenidos y los presentados por Ariza y Domínguez (2004b) y Kundu y Boström (1991). Tan solo para el máximo valor de frecuencia se encuentran ciertas discrepancias entre los resultados de los distintos autores. Como es lógico, los valores obtenidos presentan mayor acuerdo con los de Ariza y Domínguez (2004b) que con los de Kundu y Boström (1991), aunque hay que resaltar la dificultad numérica asociada a la obtención de buenos resultados para valores elevados de la frecuencia, tal y como se recoge en ambos trabajos previos.

Se puede observar como para baja frecuencia la deformación de la grieta es parecida a la del caso estático, existiendo una amplificación dinámica del DAG. A medida que aumenta la frecuencia, la deformación de la grieta se va haciendo más compleja, pero desciende la amplitud de los movimientos. Se puede observar también como el material isótropo y el transversalmente isótropo ofrecen un comportamiento cualitativamente similar, atendiendo a la forma de las curvas obtenidas, caracterizada por el número y ubicación de puntos de inflexión y de máximos y mínimos relativos.

4.6.3.2. Prisma con grieta circular en su interior

En esta sección se analiza el comportamiento de un prisma de sección cuadrada con una grieta circular en su interior sometido a tracción armónica, y estando la grieta contenida en el plano de simetría del material. El centro de la grieta coincide con el baricentro del prisma. La geometría del problema se muestra en el esquema de la figura 4.31 ($H = 2W$, $W = 2a$), mientras que la discretización empleada se muestra en la figura 4.32.

Se han obtenido resultados para tres materiales distintos: un material isótropo, un material grafito-epoxy y otro del tipo glass-epoxy. Estos dos últimos ya han sido considerados en ejemplos anteriores y sus propiedades se recogen en la tabla 4.3, mientras que el material isótropo (módulo de cizalladura $\mu = 76,923GPa$, módulo de Poisson $\nu = 0,2$ y densidad $\rho = 5000kg/m^3$) tiene distintas propiedades a los considerados en ejemplos anteriores, con el fin de poder comparar con los resultados previos obtenidos por Ariza (2002).

La respuesta en frecuencia de la pieza se representa en las fig. 4.33, 4.34 y 4.35 para los materiales isótropo, grafito-epoxy y vidrio-epoxy, respectivamente. En estas figuras se representa la evolución del FIT, adimensionalizado con el FIT obtenido en el caso estático (frecuencia nula), con

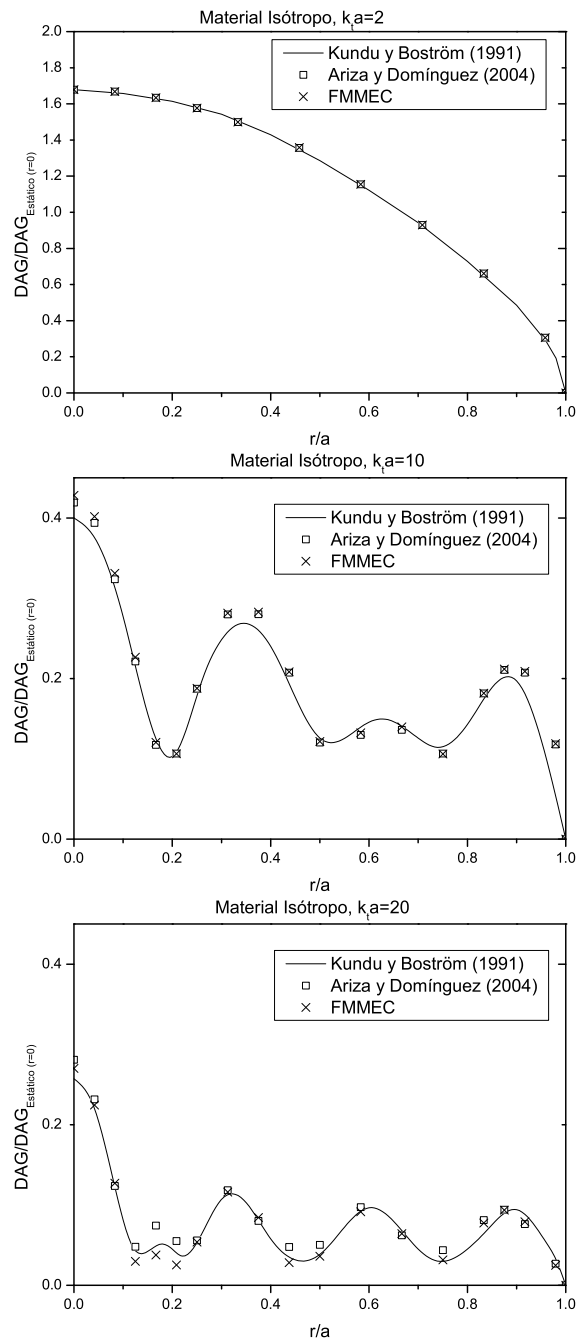


Figura 4.29: Resultados grieta circular, material isótropo, en baja y alta frecuencia

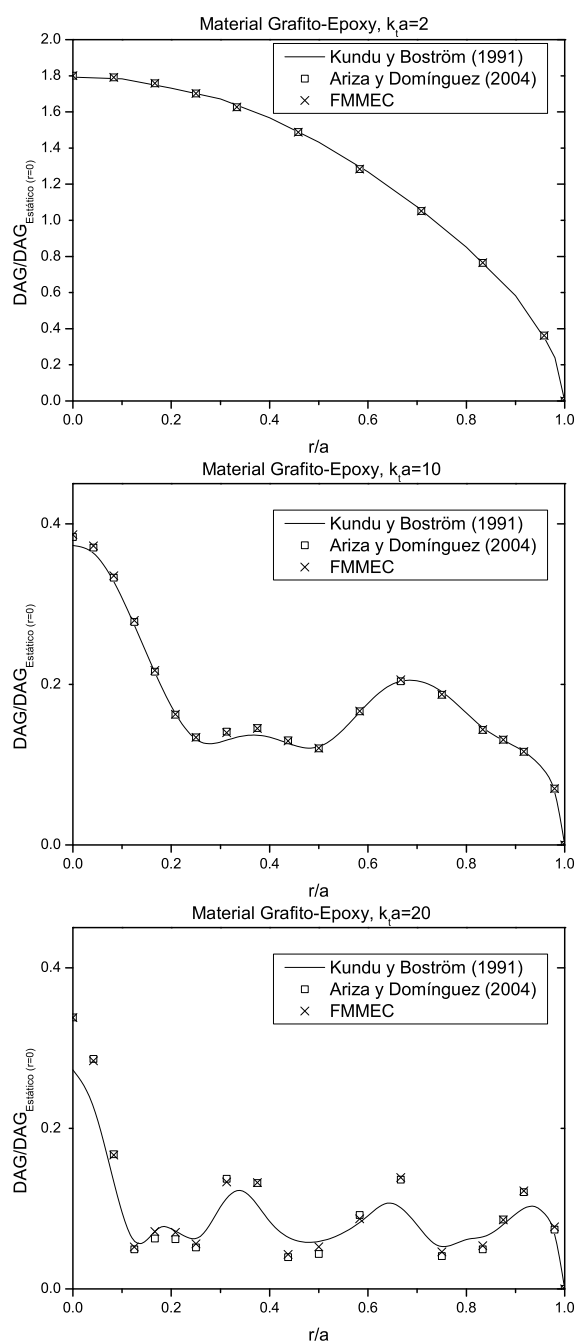


Figura 4.30: Resultados grieta circular, material transversalmente isótopro, en baja y alta frecuencia

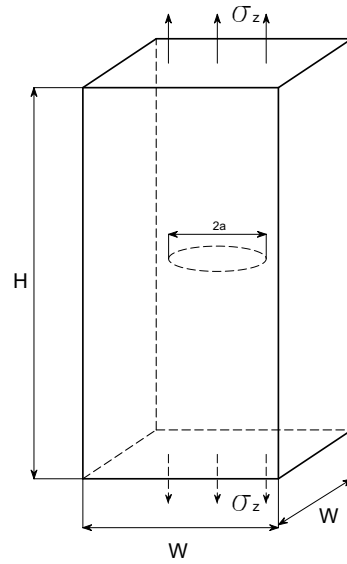


Figura 4.31: Geometría del prisma con grieta circular en su interior ($H = 2W$, $W = 2a$)

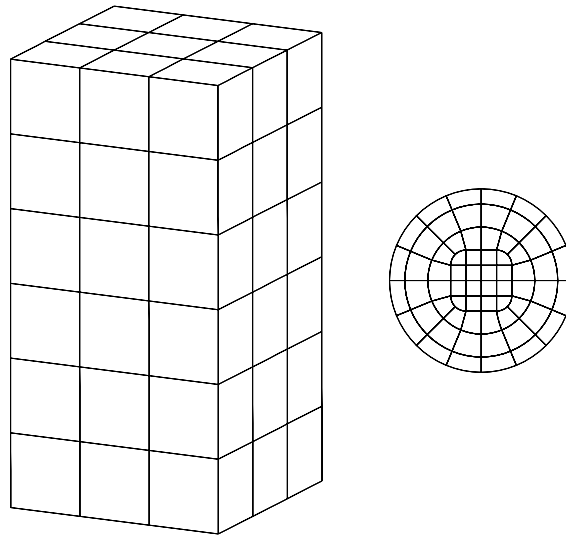


Figura 4.32: Discretización del contorno del prisma y de la grieta circular en su interior

	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$
Isótropo	0.334
Grafito-epoxy	1.427
Vidrio-epoxy	1.342

Tabla 4.7: Valores del FIT en grieta circular en el interior de prisma bajo carga estática.

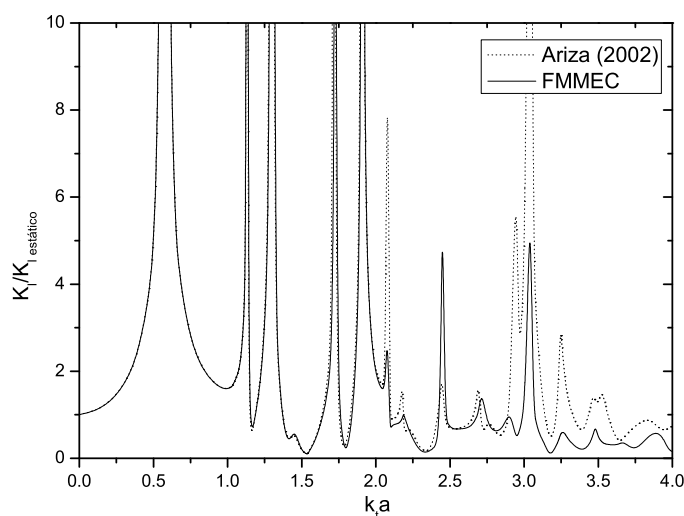


Figura 4.33: Respuesta dinámica de prisma con grieta circular en su interior. Material isótropo

respecto a la frecuencia adimensionalizada $k_t a$, siendo k_t el número de onda asociado a ondas puramente transversales viajando la dirección del eje de simetría del material ($k_t = \omega/\sqrt{C_{44}/\rho}$) y a el radio de la grieta. Los resultados del caso estático para cada uno de los materiales considerados se recogen en la tabla 4.7.

En el caso isótropo se puede comprobar como los resultados obtenidos con la formulación desarrollada para materiales transversalmente isótopos concuerdan con los obtenidos previamente por Ariza (2002) con una formulación para materiales isótopos.

No existen resultados previos para este tipo de problema en materiales transversalmente isótopos, al menos que sean conocidos por el autor. En estos casos se observa con respecto al caso isótropo una distribución menos uniforme de las frecuencias de resonancia del problema, debido a la generación de un mayor número de tipos de ondas y a la dependencia espacial de la

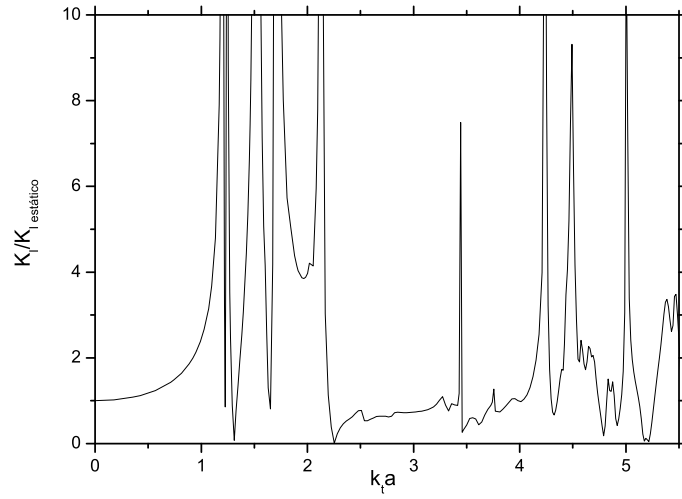


Figura 4.34: Respuesta dinámica de prisma con grieta circular en su interior. Material grafito-epoxy

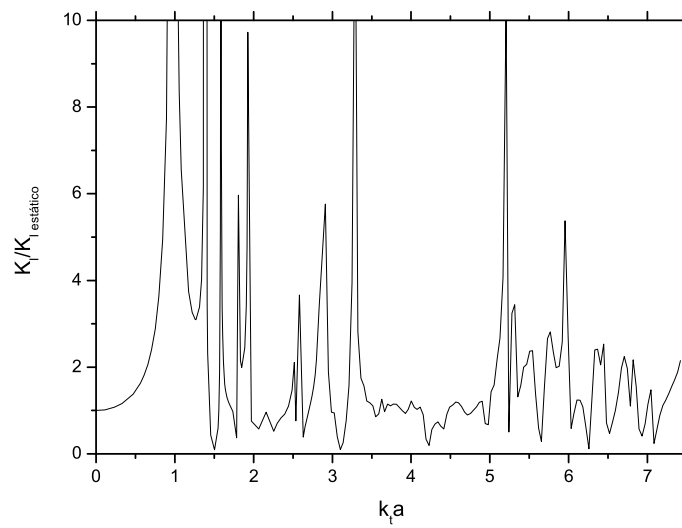


Figura 4.35: Respuesta dinámica de prisma con grieta circular en su interior. Material vidrio-epoxy

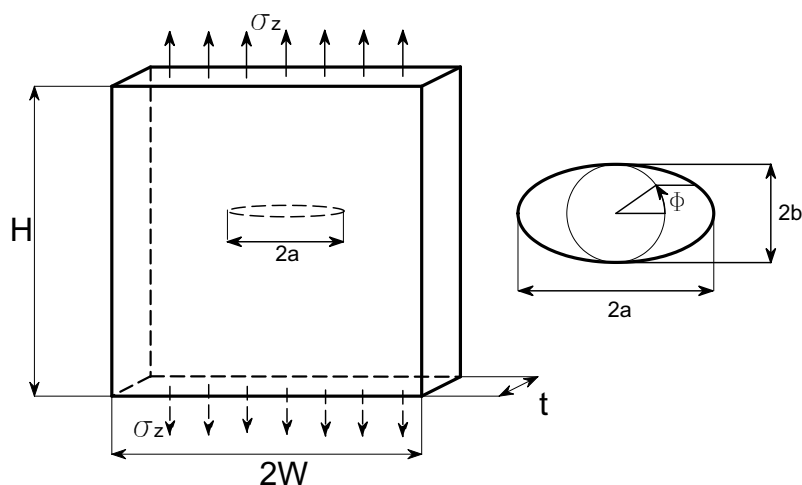


Figura 4.36: Geometría de placa con grieta elíptica centrada en su interior ($H = W$, $H = 4t$, $t = 4b$, $b = 0,5a$)

velocidad de propagación de éstas. En el caso del grafito-epoxy se observa incluso una gran proximidad entre las dos primeras frecuencias naturales, lo cual constituye una zona de frecuencia crítica para este problema y con ese material.

4.6.3.3. Placa con grieta elíptica centrada en su interior

En este caso se analiza la respuesta dinámica de una placa sometida a tracción con una grieta elíptica centrada en su interior y perpendicular al eje de simetría del material. En la figura 4.36 aparece un esquema del problema analizado, con las dimensiones y la definición del ángulo ϕ necesario para identificar los puntos del frente de grieta sobre los que se mostrarán los resultados obtenidos. La discretización del contorno externo y de la superficie de la grieta se presenta en la figura 4.37.

El problema se ha resuelto para los mismos materiales considerados en el ejemplo anterior. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 4.38, 4.39 y 4.40. En estas figuras se representa el valor adimensionalizado del FIT obtenido en función de la frecuencia adimensionalizada. Al igual que ocurre en el caso estático para materiales isótopos (Raju y Newman, 1977) y transversalmente isótopos (Ariza, 2002), se obtiene en el semieje menor de la grieta elíptica ($\phi = 90^\circ$) un mayor valor del FIT que en el semieje mayor ($\phi = 0^\circ$). La respuesta dinámica de la grieta en estos dos

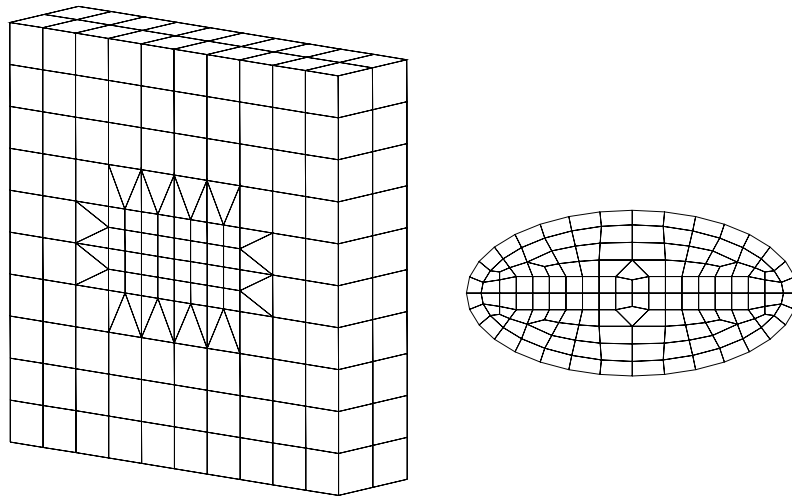


Figura 4.37: Discretización del contorno la placa y la grieta elíptica en su interior

puntos es semejante para cada uno los materiales, salvo en algunos intervalos de frecuencias en los que se puede producir una mayor amplitud del DAG en el semieje mayor.

4.6.3.4. Prisma con grieta elíptica no centrada en su interior

En esta sección se analiza un caso similar al anterior pero en el que la grieta no está centrada con respecto a la dimensión del espesor t del prisma. En la figura 4.41 se muestra un esquema del problema, similar al del caso anterior pero en el que se incluye un esquema de la posición de la grieta. Las proporciones geométricas del problema son: $H = W = 2t$, $W = 4a$, $b/a = 0,4$, $b/h = 0,4$.

La discretización del contorno externo y de la superficie de la grieta se muestra en la figura 4.42.

Se han obtenido resultados para los mismos materiales considerados en los dos ejemplos anteriores: material isótropo ($\mu = 76,923GPa$, $\nu = 0,2$, $\rho = 5000kg/m^3$), grafito-epoxy y vidrio-epoxy. En las figuras 4.43, 4.44 y 4.45 se muestra la respuesta respecto a la frecuencia normalizada $k_t a$ del FIT normalizado en tres puntos característicos del frente de grieta definidos por $\phi = -90^\circ$ (punto del semieje menor más próximo a la superficie del prisma), $\phi = 0^\circ$ (punto del semieje mayor) y $\phi = 90^\circ$ (punto del semieje menor más alejado de la superficie del prisma).

Como es lógico, y al igual que en el caso anterior, se cumple que para una geometría de la

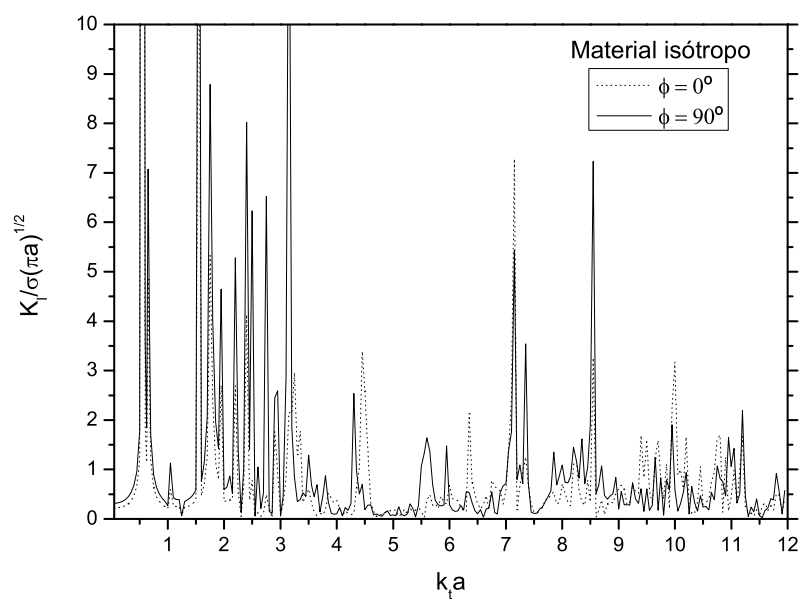


Figura 4.38: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica. Material isotrópico

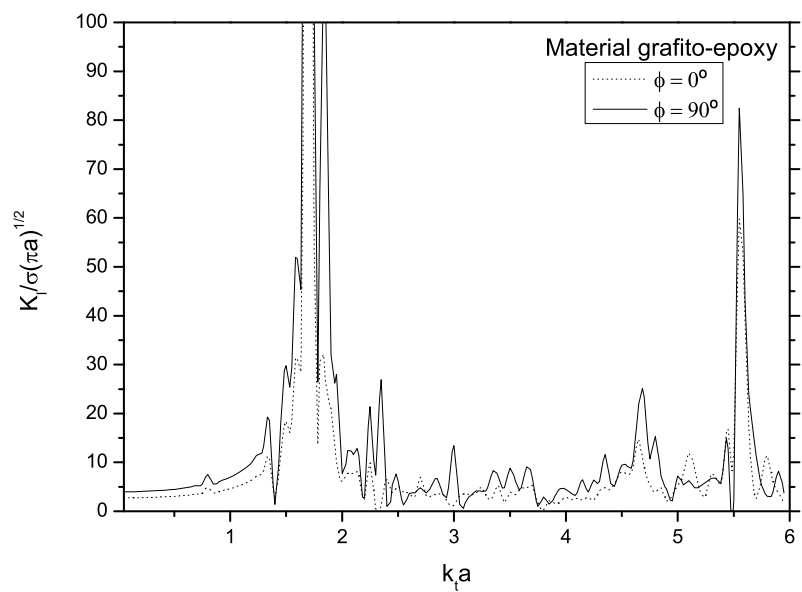


Figura 4.39: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica. Material grafito-epoxy

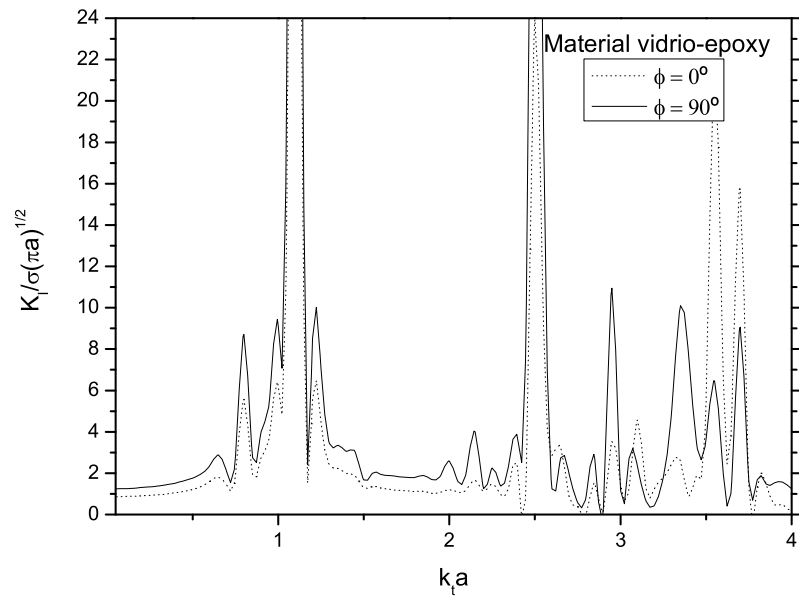


Figura 4.40: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica. Material vidrio-epoxy

grieta en forma de elipse se tiene un mayor valor del FIT en el semieje menor. En este caso se cumple además que en el punto más cercano al contorno del prisma ($\phi = -90^\circ$) se tiene un mayor valor del FIT que en el lado opuesto del semieje menor. Estas relaciones se cumplen en la mayor parte del espectro y para todos los materiales analizados, y concuerdan con el análisis estático de este tipo de problemas realizado por Ariza (2002).

Por otro lado, aún cuando en el caso estático y con la geometría estudiada se tienen valores del FIT muy próximos a los obtenidos si la grieta estuviera en un medio infinito (Ariza, 2002), se observa sin embargo una gran influencia del contorno externo cuando se analiza la respuesta en frecuencia de la pieza, resultando un espectro mucho más complejo que el obtenido por Ariza y Domínguez (2004b) para una grieta elíptica en un medio infinito.

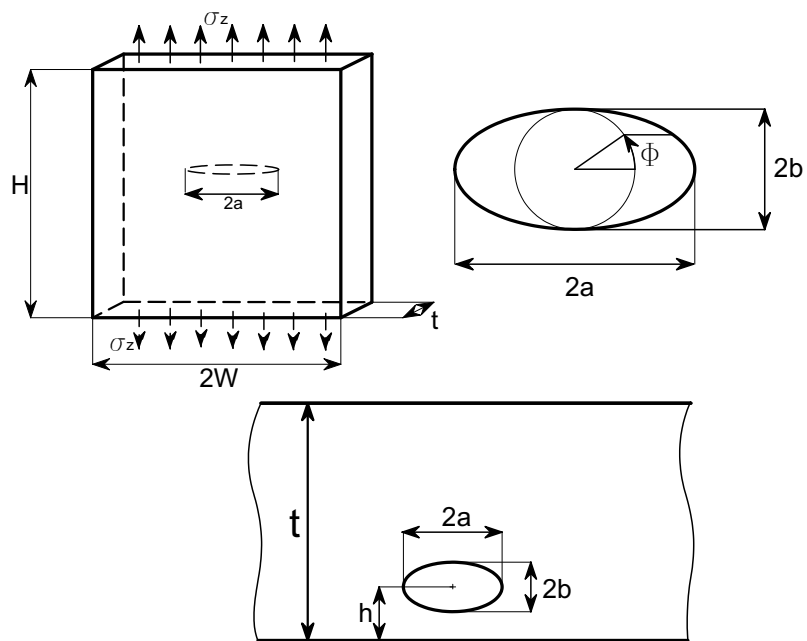


Figura 4.41: Geometría de prisma con grieta elíptica no centrada en su interior ($H = W = 2t$, $W = 4a$, $b/a = 0,4$, $b/h = 0,4$)

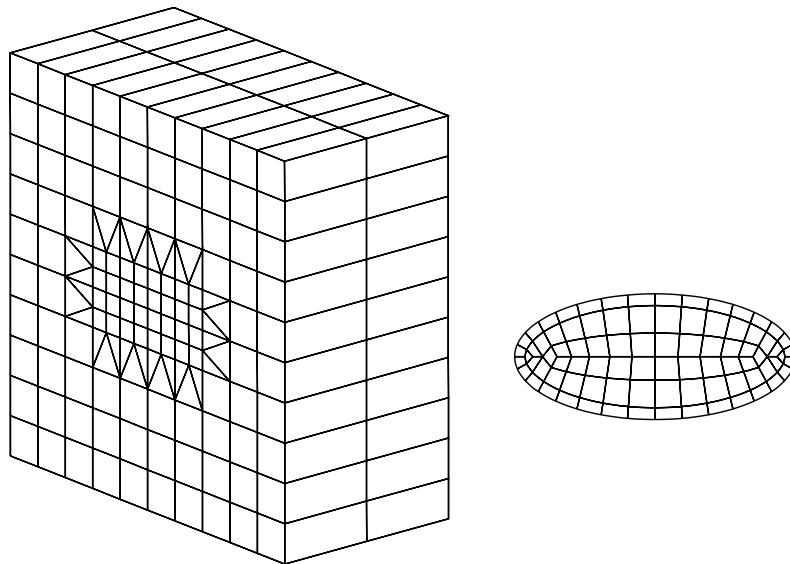


Figura 4.42: Discretización del contorno la placa y la grieta elíptica en su interior

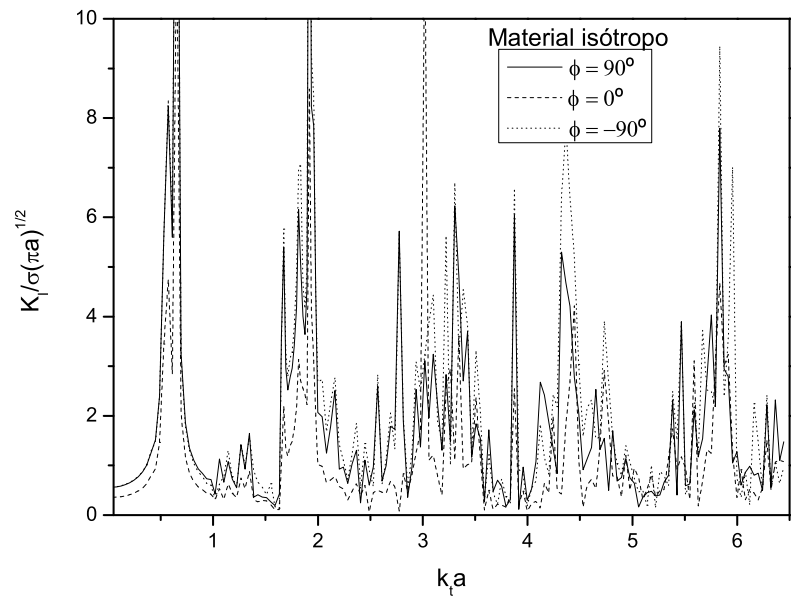


Figura 4.43: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica no centrada. Material isotrópico

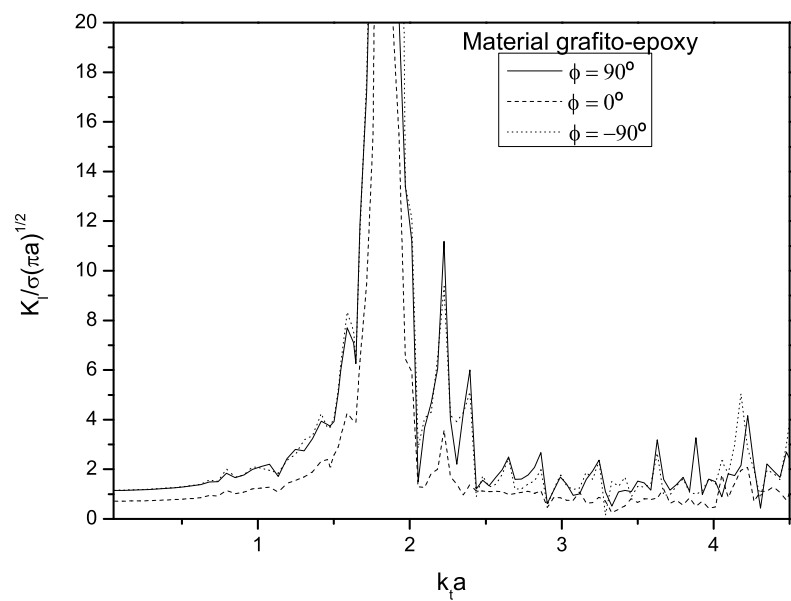


Figura 4.44: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica no centrada. Material grafito-epoxy

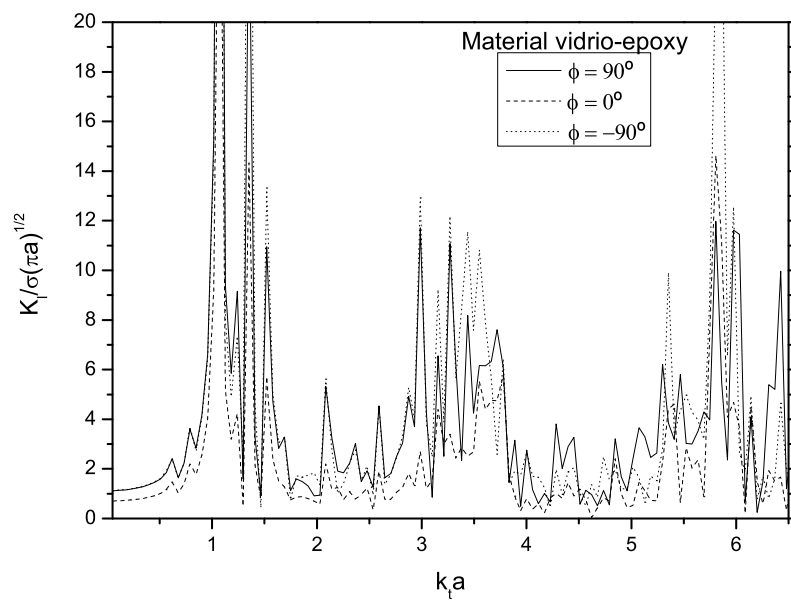


Figura 4.45: Respuesta en frecuencia de placa con grieta elíptica no centrada. Material vidrio-epoxy

Capítulo 5

Materiales piezoeléctricos

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta el desarrollo de la formulación mixta del MEC para problemas de Mecánica de la Fractura 3D en materiales piezoeléctricos. Esta formulación es análoga a la desarrollada anteriormente por Ariza (2002) para materiales isótropos y transversalmente isótropos, y que posteriormente ha sido analizada y mejorada según se ha detallado en los capítulos anteriores. La extensión de la formulación al caso piezoeléctrico conlleva una dificultad añadida derivada de la inclusión de las variables eléctricas asociadas al problema, además del necesario proceso de obtención de los núcleos de las ecuaciones por derivación de la solución fundamental y su regularización analítica para la integración numérica.

En este capítulo, se planteará en primer lugar el problema piezoeléctrico, incluyendo las ecuaciones que lo gobiernan, de forma similar a cómo se formula del problema elástico en su forma más general. Esta formulación se desarrollará en forma compacta de forma subindicada, prestando especial atención a los subíndices y a las definiciones de cada variable, lo cual resulta fundamental para simplificar y realizar de forma ordenada la implementación de la formulación en un código de elementos de contorno. También se resaltarán aspectos particulares del problema piezoeléctrico, así como algunas cuestiones que siguen siendo objeto de debate entre la comunidad científica en cuanto al comportamiento de estos materiales, como es el caso de la consideración de las condiciones de contorno en las superficies de la grieta.

Una vez definidas las variables que intervienen en el problema piezoeléctrico, y formulado

éste en su forma general, se pasarán a revisar los aspectos fundamentales asociados a la Mecánica de la Fractura. Se definirán entonces los Factores de Intensidad de Tensiones Extendidos (FITEs) y la forma de evaluarlos según la metodología desarrollada en esta tesis.

Posteriormente, se presentará en detalle la formulación mixta del MEC desarrollada para medios piezoeléctricos, prestando especial atención al proceso de obtención de los términos necesarios para la formulación de la EIC en desplazamientos y la EIC en tracciones, con su regularización correspondiente.

Finalmente, se cerrará el capítulo con una sección dedicada a la presentación de una serie de resultados numéricos. En primer lugar, se validará la formulación mediante algunos ejemplos sencillos para los que existen soluciones analíticas previas. Posteriormente se presentarán resultados para los que el autor no conoce la existencia de resultados previos.

5.2. El problema piezoeléctrico

5.2.1. Ecuaciones que gobiernan el problema

La formulación completa del problema piezoeléctrico, incluyendo las causas de la existencia de este fenómeno y su enfoque desde distintos puntos de vista, puede encontrarse en la obra de diversos autores (véase, e.g., Cady, 1964, Tiersten, 1969 o Ikeda, 1996). En esta tesis se considerará el problema piezoeléctrico lineal, elástico, bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones. Por simplicidad, y en aras de una mayor efectividad en el planteamiento del problema, en este apartado se presentarán las ecuaciones que gobiernan este problema y que resultan necesarias para desarrollar la formulación de elementos de contorno objeto de ese capítulo, sin entrar en profundidad en el origen y proceso de obtención de estas ecuaciones, ni en la definición o justificación de las variables eléctricas asociadas al problema. Para un tratamiento en mayor profundidad se remite al lector a los trabajos previos de otros autores, tales como las referencias citadas anteriormente.

Al igual que el problema elástico, el problema piezoeléctrico se puede plantear en función de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se pueden dividir en ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento del material.

A partir del equilibrio de fuerzas de un paralelepípedo infinitesimal se puede escribir la ecuación de equilibrio estático como

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \quad (5.1)$$

donde σ_{ij} es el tensor de tensiones elástico y X_i son las fuerzas de volumen.

Por otro lado, el equilibrio de cargas eléctricas aplicado al mismo elemento infinitesimal se puede escribir como

$$D_{i,i} = q_f \quad (5.2)$$

siendo \mathbf{D} el vector desplazamiento eléctrico y q_f la densidad de carga libre.

Las ecuaciones de compatibilidad asociadas a la deformación del medio se pueden escribir como la definición del tensor de deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.3)$$

mientras que el equivalente en el caso eléctrico es la definición del campo eléctrico \mathbf{E} como el gradiente cambiado de signo del potencial eléctrico ϕ .

$$E_l = -\phi_{,l}. \quad (5.4)$$

En las ecuaciones anteriores de equilibrio y compatibilidad no se ha mostrado ningún acoplamiento entre las variables elásticas y eléctricas. Este acoplamiento tan solo existe en la ley de comportamiento del material, por lo que para expresar con mayor claridad la forma en que ocurre este acoplamiento se opta por presentar esta ley de forma explícita (ec. 5.5).

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + e_{31}\phi_{,z} \\
\sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + e_{31}\phi_{,z} \\
\sigma_{zz} &= C_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + C_{33}\varepsilon_{zz} + e_{33}\phi_{,z} \\
\sigma_{yz} &= 2C_{44}\varepsilon_{yz} + e_{15}\phi_{,y} \\
\sigma_{xz} &= 2C_{44}\varepsilon_{xz} + e_{15}\phi_{,x} \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\varepsilon_{xy} \\
D_x &= 2e_{15}\varepsilon_{xz} - \epsilon_{11}\phi_{,x} \\
D_y &= 2e_{15}\varepsilon_{yz} - \epsilon_{11}\phi_{,y} \\
D_z &= e_{31}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + e_{33}\varepsilon_{zz} - \epsilon_{33}\phi_{,z}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

En las expresiones 5.5 las constantes C_{ij} son las constantes elásticas del material ($[N/m^2]$ en unidades S.I.), e_{ij} son las constantes piezoeléctricas ($[N/(V \cdot m)]$ en unidades S.I.) y ϵ_{ij} son las constantes dieléctricas del material ($[N \cdot V^{-2}]$ en unidades S.I.). Hay que recordar que el Voltio se define como la diferencia de potencial existente entre dos puntos tales que hay que realizar un trabajo de 1 Julio para trasladar de uno a otro una carga eléctrica de 1 Culombio (siendo el Culombio la unidad elemental de carga eléctrica definida en el S.I.). También se puede decir por tanto que la diferencia de potencial (Voltaje) entre dos puntos es el trabajo necesario para mover un Culombio (C) entre dichos puntos: $[C][V]=[N][m]$.

En el caso de un material piezoeléctrico transversalmente isótropo, se tendrán en total 10 constante independientes: 5 constantes elásticas (**C**), 3 piezoeléctricas (**e**) y 2 dieléctricas (ϵ). El acoplamiento entre las variables elásticas y eléctricas, es decir, el fenómeno piezoeléctrico, viene determinado por las constantes piezoeléctricas.

En forma matricial, esta ley de comportamiento se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + e_{lij}\phi_{,l} \\
D_i &= e_{ikl}\varepsilon_{kl} - \epsilon_{il}\phi_{,l}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde los subíndices i,j,k,l adoptan valores entre 1 y 3 que se corresponden con las direcciones y subíndices x,y,z respectivamente que aparecen en las expresiones 5.5.

Esta ley de comportamiento se puede escribir de diversas formas, tomando otras variables independientes en lugar de las tensiones y el desplazamiento eléctrico, aunque para el desarrollo de la formulación que aquí se presenta sólo se aplicará la ley de comportamiento en la forma en que se ha escrito en (5.5). En rigor, según las variables independientes consideradas en (5.5), se debe especificar que las constantes elásticas contenidas en \mathbf{C} han de ser obtenidas bajo campo eléctrico constante, mientras que las constantes dieléctricas contenidas en ϵ se obtienen bajo una condición de deformación constante. Esta consideración tiene poca influencia desde un punto de vista práctico, ya que la diferencia que se puede dar con respecto a otras situaciones es muy pequeña. Por tanto, de aquí en adelante se prescindirá de realizar esta especificación. Las distintas formas en que se puede escribir la ley de comportamiento y las diferencias en las constantes según las variables independientes escogidas se puede encontrar, por ejemplo, en la obra de Ikeda (1996).

Una vez presentadas las ecuaciones que gobiernan el problema planteado, conviene escribir éstas en lo que se conoce como notación extendida, introducida originalmente por Barnett y Lothe (1975) y posteriormente utilizada por muchos autores. Con esta notación se consigue escribir de forma compacta la formulación del problema por medio de la definición de *pseudotensores* y *pseudovectores*. Para ello se trabajará con unos subíndices asociados a las variables consideradas que tomarán valores entre 1 y 4 (por la inclusión de las variables eléctricas) y que se representarán con letra mayúscula, mientras que los subíndices asociados a las coordenadas cartesianas adoptarán valores entre 1 y 3 y se denotarán con letra minúscula. El empleo de esta notación resulta fundamental para desarrollar e implementar de forma ordenada y eficiente la formulación mixta del MEC que aquí se presenta.

Para escribir las ecuaciones de equilibrio en notación extendida se introduce la matriz de tensiones extendida Σ_{iJ} (matriz tensión-desplazamiento eléctrico), que se define como

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{para } J = 1, 2, 3 \\ D_i & \text{para } J = 4 \end{cases} \quad (5.7)$$

De esta forma la ecuación de equilibrio se puede escribir como

$$\Sigma_{iJ,i} + b_J = 0 \quad (5.8)$$

donde b_J es el vector columna de fuerzas de volumen extendido (fuerza y carga eléctrica).

El vector de desplazamiento extendido (U_K) se puede escribir como

$$U_K = \begin{cases} u_k & \text{para } K = 1, 2, 3 \\ \phi & \text{para } K = 4 \end{cases} \quad (5.9)$$

y las ecuaciones de compatibilidad en su forma extendida se pueden escribir como la definición del *pseudotensor* de deformaciones extendido Z_{kl} :

$$Z_{Kl} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) & \text{para } K, l = 1, 2, 3 \\ \phi, l & \text{para } K = 4 \end{cases} \quad (5.10)$$

Finalmente, la ley de comportamiento en notación extendida se puede poner como

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKl} Z_{Kl} \quad (5.11)$$

siendo E_{iJKl} la matriz de constantes electro-elástica,

$$E_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{para } J, K = 1, 2, 3 \\ e_{lij} & \text{para } J = 1, 2, 3 \quad K = 4 \\ e_{ikl} & \text{para } J = 4 \quad K = 1, 2, 3 \\ -\epsilon_{il} & \text{para } J, K = 4 \end{cases} \quad (5.12)$$

Dada la simetría en las constantes elásticas del material ($E_{ijkl} = E_{iJlk}$ para $k=1,2,3$), se puede escribir la ley de comportamiento como

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKl} U_{K,l} \quad (5.13)$$

Por último, cabe definir el vector de tracciones extendido como la proyección de las tensiones extendidas sobre la normal exterior al problema:

$$T_J = \Sigma_{iJ} n_i = E_{iJKl} U_{K,l} n_i \quad (5.14)$$

5.2.2. Condiciones de contorno

Para acabar de cerrar el problema piezoeléctrico quedan imponer las condiciones de contorno del problema. En el caso de presencia de grietas en el interior del sólido piezoeléctrico, la imposición de condiciones de contorno en las superficies de la grieta no resulta trivial (véanse las

revisiones de Ou y Chen, 2003 y Chen y Hasebe, 2005), y es por ello que se le dedica un apartado específico a este tema.

Al igual que en el problema elástico, en el problema piezoeléctrico se pueden definir en principio tanto condiciones de contorno en desplazamientos y potencial eléctrico como en tracciones o densidad superficial de carga eléctrica (proyección sobre la normal externa al contorno del vector desplazamiento eléctrico). Estas condiciones de contorno se pueden escribir como:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ en } \Gamma^{u_i} \quad (5.15)$$

$$\Phi = \bar{\Phi} \text{ en } \Gamma^\Phi \quad (5.16)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = t_j = \bar{t}_j \text{ en } \Gamma^{t_j} \quad (5.17)$$

$$D_i \cdot n_i = q = \bar{q} \text{ en } \Gamma^q \quad (5.18)$$

donde \bar{u}_i y $\bar{\Phi}$ son los desplazamientos y potencial eléctrico prescritos sobre la parte del contorno Γ^{u_i} y Γ^Φ respectivamente, mientras que \bar{t}_j y \bar{q} son las tracciones y densidad de carga eléctrica prescritos sobre la parte del contorno Γ^{t_j} y Γ^q respectivamente. Siendo Γ el contorno del problema, se ha de cumplir que:

$$\begin{aligned} \Gamma^{u_i} \cap \Gamma^{t_i} &= \emptyset \\ \Gamma^{u_i} \cup \Gamma^{t_i} &= \Gamma \\ \Gamma^\Phi \cap \Gamma^q &= \emptyset \\ \Gamma^\Phi \cup \Gamma^q &= \Gamma \end{aligned} \quad (5.19)$$

En notación extendida, las condiciones de contorno anteriores se pueden formular por tanto como:

$$\begin{aligned} U_I &= \bar{U}_I \text{ en } \Gamma^{U_I} \\ \Sigma_{i,j} \cdot n_i &= T_j = \bar{T}_j \text{ en } \Gamma^{T_j} \end{aligned} \quad (5.20)$$

La imposición de condiciones de contorno sobre las superficies de la grieta desde un punto de vista mecánico no plantea dificultad. Normalmente en ellas se imponen tracciones nulas, ya que se trata de superficies libres de tensiones, salvo cuando se aplican cargas aplicadas directamente sobre los labios de la grieta. La situación más habitual de este tipo se suele dar cuando se considera una presión interna en el interior de la grieta, que se modela como tracciones normales no nulas y autoequilibradas en las superficies de la grieta. La imposición de desplazamientos prescritos en las superficies de la grieta es menos habitual desde un punto de vista práctico, aunque físicamente puede ser posible y su modelización matemática no supone ninguna dificultad.

Sin embargo, la imposición de condiciones de contorno eléctricas sobre la grieta no resulta inmediato, ya que el espacio en el interior de la grieta interactúa desde un punto de vista eléctrico con sus superficies, lo cual no ocurre con las variables mecánicas. En efecto, el medio existente entre los labios de la grieta, que en el caso más habitual será aire o vacío, es susceptible en cualquier caso de ser polarizado eléctricamente y por tanto se ha de establecer una condición de equilibrio en desplazamiento eléctrico sobre las superficies de la grieta.

La primera aproximación en la imposición de condiciones de contorno eléctricas sobre la superficie de una grieta sea probablemente la realizada por Parton (1976), quien consideró que el desplazamiento y potencial eléctricos debían ser continuos a través de la grieta, es decir, se debía imponer la existencia de un mismo desplazamiento y potencial eléctrico en una y otra cara de la grieta. Esta condición es la que se conoce como condición de contorno permeable, y no es más que una condición de continuidad y equilibrio sobre dos superficies adyacentes que a todos los efectos funcionarían como si de un medio continuo se tratara desde un punto de vista eléctrico.

Una condición similar es la que aplican algunos autores (por ejemplo McMeeking, 1990) que consideran el material piezoeléctrico inmerso en un medio dieléctrico, de forma que en el interior de la grieta existe un fluido conductor, situación en la que se puede considerar que el potencial eléctrico es nulo en ambas caras de la grieta (Suo et al, 1992).

Ahora bien, en un caso más general, en el momento en que la grieta sufra una cierta apertura, entre ambas caras existirá un medio con el que deberán de cumplir continuidad y equilibrio. La condición mecánica de equilibrio resulta evidente:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^+ n_j^+ &= -p \\ \sigma_{ij}^- n_j^- &= p\end{aligned}\tag{5.21}$$

siendo p la presión interna en la grieta, pero además deberá cumplirse una condición eléctrica de equilibrio:

$$(D_i - D_i^v)n_i = 0 \quad (5.22)$$

$$n \times (\nabla\phi - \nabla\phi^v) = 0 \quad (5.23)$$

donde el superíndice v se refiere al vacío o medio que haya en el interior de la grieta, y el resto de variables se refieren a una u otra cara de la grieta. La condición de continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico (ec. 5.23) puede ser sustituida por la continuidad en el potencial (Toupin, 1956), teniéndose entonces que

$$\phi = \phi^v \quad (5.24)$$

Estas condiciones de contorno son más rigurosas que las anteriores y se suelen denominar como "exactas". Un gran número de autores reconoce que se trata de las condiciones más adecuadas, aunque suelen ser posteriormente simplificadas en su aplicación de forma que el debate sobre la conveniencia en el empleo de un tipo de condición de contorno u otra sigue abierto.

A continuación se describen con mayor detalle las distintas condiciones de contorno que aparecen en la literatura, sus implicaciones, simplificaciones que conllevan, e incluso la opinión de algunos autores al respecto.

Condición de contorno exacta

Parton y Kudryatsev (1988), Hao y Shen (1994), Kogan et al. (1996) y Lin et al (2003), son algunos de los autores que consideran que el medio existente entre los labios de la grieta debe ser considerado como un medio dieléctrico con sus correspondientes propiedades, en el que se puede considerar que se producirá un campo eléctrico constante. A veces se denomina este tipo de condición como PKHS debido al nombre de los autores que la consideraron originalmente (Parton y Kudryatsev en 1988 y Hao y Shen en 1994). La situación considerada se traduce en las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}^+ &= \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^+ \\ \mathbf{D}^- \cdot \mathbf{n}^- &= \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^- \end{aligned} \quad (5.25)$$

siendo n^+ y n^- la normal externa en una y otra cara de la grieta, D^+ y D^- el desplazamiento eléctrico en una y otra cara de la grieta y D^v el desplazamiento eléctrico en el espacio entre ellas.

Considerando este espacio como un medio dieléctrico homogéneo, y teniendo en cuenta la continuidad de potencial eléctrico entre las superficies de la grieta y el medio en su interior, se cumplirá además que

$$\phi^+ - \phi^- = \phi^{v+} - \phi^{v-} = \mathbf{E}^v \cdot \mathbf{n}^- (u_n^- - u_n^+) = \frac{\mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^-}{\epsilon_v} (u_n^- - u_n^+) \quad (5.26)$$

donde el subíndice n indica que se trata de la componente asociada a la dirección normal a la superficie de la grieta (dirección de apertura de grieta en modo I), y $\mathbf{E}^v = \frac{\mathbf{D}^v}{\epsilon_v}$ es el campo eléctrico en el espacio interior a la grieta.

La consideración de esta condición de contorno equivale a resolver un problema con dos dominios: el medio piezoelectrico y el medio entre las superficies de la grieta. Sin embargo, las variables asociadas a dicho espacio no serán en general de interés, por lo que las condiciones de contorno a considerar para la resolución del problema piezoelectrico se podrían escribir como:

$$\begin{aligned} D_n^+ &= -D_n^- \\ D_n^- (u_n^- - u_n^+) &= \epsilon_a (\phi^+ - \phi^-) \end{aligned} \quad (5.27)$$

es decir, en las caras de la grieta se tienen cargas iguales pero de signo contrario (que es una condición similar a la de una grieta autoequilibrada en tracciones mecánicas, como se da, por ejemplo, al estar sometida a presión interna). La segunda condición en (5.27) implica el conocimiento de la permitividad del medio presente en el interior de la grieta.

Condición de grieta permeable. Como ya se comentó anteriormente, la condición de grieta permeable fue el primer tipo de condición de contorno considerada sobre las superficies de la grieta (Parton, 1976), y sigue siendo utilizada por algunos autores, aunque en determinadas circunstancias en las que puede resultar adecuada. Por ejemplo, Heyer et al (1998) realizan experimentos en los que el espacio interior a la grieta es rellenado con una solución de NaCl en agua, sobre la que se aplica un potencial eléctrico constante, de forma que en el modelo numérico se considera una condición de grieta permeable o conductora. La condición de grieta permeable se puede formular como

$$\begin{aligned} D_n^+ &= -D_n^- \\ \phi^+ &= \phi^- \end{aligned} \quad (5.28)$$

Esta condición de contorno supone que la componente normal del desplazamiento eléctrico y el potencial eléctrico se pueden considerar como continuos a través de la grieta.

Esta condición, sin embargo, coincide con la formulada al principio de esta sección como exacta para el caso de una grieta cerrada, lo cual resulta bastante intuitivo. Si en la ec. (5.27) se impone que $\phi^+ = \phi^-$, y $\mathbf{D}_n \neq 0$, entonces deberá cumplirse que $u_n^+ = u_n^-$, lo que significa que no hay apertura de grieta, y viceversa, si $u_n^+ = u_n^-$ y $D_n \neq 0$ entonces se tiene que $\phi^+ = \phi^-$.

Por tanto, y de acuerdo también con Ou y Chen (2003) y Wang y Mai (2004), la condición de contorno de grieta permeable desde un punto de vista eléctrico solo será válida si la grieta se encuentra cerrada o bien el espacio interior está ocupado por un fluido conductor (permitividad infinita). En ese caso, las tracciones en las caras de la grieta podrán ser no nulas y la grieta se encontrará autoequilibrada. En el caso de que en la grieta se activen modos tangenciales de apertura (modos II y III), la condición de grieta permeable seguirá siendo adecuada.

Condición de grieta impermeable

Este tipo de condición de contorno es el asumido por la mayoría de autores, por ser la más simple de implementar y resultar bastante realista en principio. Pak (1990), Sosa (1991), Suo et al (1992), Wang (1992), Qin (2001), Qin y Noda (2004) o García-Sánchez et al. (2005) son algunos de los autores que han optado por su empleo.

La condición de impermeabilidad se traduce en la ausencia de flujo eléctrico a través de las superficies de la grieta, lo que equivale a imponer que la componente normal del desplazamiento eléctrico sobre dichas superficies es nula:

$$D_n = 0 \quad (5.29)$$

Esta condición resulta equivalente desde un punto de vista matemático a la imposición de tracciones mecánicas nulas sobre la superficie de la grieta.

La condición de grieta impermeable se basa fundamentalmente en el hecho de que la permitividad eléctrica de un material piezoelectrico es habitualmente mucho mayor que la del medio existente en el interior de la grieta (aire o vacío).

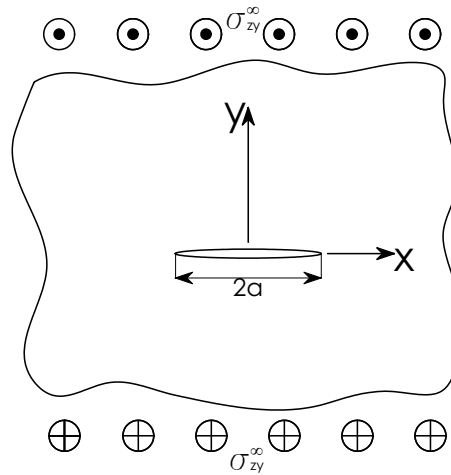


Figura 5.1: Esquema del problema planteado por Pak (1990).

Entre los textos que analizan el empleo de unas condiciones de contorno u otras, cabe destacar el trabajo realizado por Pak (1990). Este autor justifica el empleo de la condición impermeable sobre un problema bidimensional antiplano en el que una grieta orientada según la dirección x del plano de isotropía x - y de un material piezoeléctrico transversalmente isótropo, es sometida a tensión tangencial en el infinito σ_{zy}^{∞} (fig. 5.1). Partiendo de las condiciones de contorno exactas, y suponiendo que la tensión tangencial en la grieta es nula (lo cual es lo más habitual, y casi la única condición posible en caso de admitir que en el interior de la grieta existe aire o vacío), se tendrá que (según la ley de comportamiento reflejada en la ec. 5.5):

$$2C_{44}\varepsilon_{yz} - e_{15}E_y^p = 0 \quad (5.30)$$

donde el superíndice p indica que se trata de una magnitud asociada al material piezoeléctrico, frente al superíndice v que hace referencia al vacío o espacio interior de la grieta. Por otro lado, la condición de continuidad del desplazamiento eléctrico normal a la grieta (D_y en este caso), teniendo en cuenta de nuevo la ley de comportamiento (5.5), lleva a la siguiente condición

$$2e_{15}\varepsilon_{yz} + \epsilon_{11}E_y^p = \epsilon_a E_y^v \quad (5.31)$$

De la condición (5.30) se tiene que

$$\varepsilon_{yz} = \frac{e_{15}}{C_{44}} E_y^p \quad (5.32)$$

y sustituyendo en (5.31) se tiene que

$$\frac{E_y^p}{E_y^v} = \frac{\varepsilon_a}{\frac{e_{15}^2}{C_{44}} + \varepsilon_{11}} \quad (5.33)$$

Dado que (en unidades S.I.) $e_{15} \sim 10$, $C_{44} \sim 10^{10}$, $\varepsilon_{11} \sim 10^{-10}$ y $\varepsilon_a \sim 10^{-3}\varepsilon_{11}$, Pak (1990) concluye que

$$\frac{\varepsilon_a}{\frac{e_{15}^2}{C_{44}} + \varepsilon_{11}} \ll 1 \quad (5.34)$$

y que por tanto E_y^p ha de tender a cero para que E_y^v mantenga un valor finito.

Pak (1990) apunta además que no sería necesario realmente que el material piezoeléctrico tuviera una permitividad eléctrica mucho mayor que la del medio en el interior de la grieta, ya que es suficiente que se cumpla la condición $\frac{e_{15}^2}{C_{44}} \gg \varepsilon_a$.

El mismo autor admite que para concluir que $E_y^p = 0$ se debería de cumplir que el material piezoeléctrico tuviera una permitividad dieléctrica infinita ($\varepsilon_{11} \rightarrow \infty$). También admite que existirá un campo eléctrico en el interior de la grieta, y que será mayor que el que exista en el material piezoeléctrico, pero que no será lo suficientemente grande como para tener que considerar tensiones de Maxwell o el fenómeno de electrostricción. Finalmente, considera razonable considerar como condición de contorno que el campo E_y^p sea nulo, con lo que quedan desacoplados el problema en el medio piezoeléctrico y en el espacio en el interior de la grieta, donde las variables eléctricas no son de interés.

Discusión sobre las distintas condiciones de contorno

El espléndido trabajo de Pak (1990) parece razonable y lo corrobora el hecho de que la gran mayoría de autores consideran acertada la hipótesis de grieta impermeable. Sin embargo, se puede pensar que el campo eléctrico en la grieta puede alcanzar un valor lo suficientemente elevado como para que el desplazamiento eléctrico en el interior de la grieta ($D^v = \varepsilon_a E^v$) adquiera un valor que no ha de ser necesariamente próximo a cero o despreciable, lo cual llevaría a la necesidad de considerar la condición de contorno exacta. Esta opinión es compartida por ejemplo por Kogan et al. (1996) y Ou y Chen (2003).

Otro aspecto a tener en cuenta en el trabajo de Pak (1990) es que su desarrollo está aplicado sobre un problema antiplano (fig. 5.1) en el que la grieta está contenida en el plano xy del material

(plano de isotropía), siendo el eje z el eje de simetría del material, y está sometida a unas tensiones σ_{yz} aplicadas en el infinito. Esto quiere decir que al imponer la condición de contorno de tensiones tangenciales nulas sobre la grieta (ec. 5.30), aparece la componente del campo eléctrico normal a la grieta (E_y^p), según la dirección de apertura de grieta considerada por el autor.

Sin embargo, en los problemas de Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos considerados por la mayoría de autores, se considera como dirección normal de apertura de la grieta la dirección del eje de simetría del material (dirección z según el planteamiento de Pak). En esta situación, la condición de grieta impermeable ($D_z = 0$) no se puede deducir a partir de las condiciones de tensiones tangenciales nulas sobre las superficies de la grieta ($\sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$), ya que éstas se relacionan a través de la ley de comportamiento del material con las componentes E_x y E_y del campo eléctrico, pero no con la componente E_z que es la que está directamente relacionada con D_z . No hay por tanto un razonamiento análogo al de Pak que permita concluir que la condición de grieta impermeable $D_z = 0$ es una condición aceptable.

Por otro lado, considerando el acoplamiento entre el medio piezoeléctrico y el espacio entre la grieta que aparece en la condición de contorno exacta (ec. 5.27), no parece aceptable que por ser ε_a muy pequeño entonces $D_n^+ \rightarrow 0$. Aun cuando $\varepsilon_a = 0$, sería igualmente razonable pensar desde un punto de vista matemático que el DAG sea nulo y se tendría entonces que la grieta permanece cerrada y la condición de contorno de grieta permeable sería la adecuada.

Hay que tener en cuenta además que, aunque $\varepsilon_a \rightarrow 0$, el salto de potencial eléctrico en la grieta es del orden de 10^{12} veces mayor que el DAG (en unidades S.I.), por lo que la igualdad en la ec. (5.27) puede cumplirse con un valor de D_n^+ finito y no necesariamente próximo a cero.

No obstante, si el DAG no es nulo, entonces la condición de impermeabilidad resultaría razonable. A esta conclusión llegan también Wang y Mai (2004) mediante un planteamiento matemático más complejo y riguroso, llegando incluso a cuantificar la validez de la hipótesis de impermeabilidad. Para un problema plano de una grieta en un medio infinito, concluyen que para valores del DAG mayores que el 1% de la semilongitud de la grieta, la hipótesis de impermeabilidad ofrecerá resultados suficientemente aproximados (con diferencias a lo sumo del orden del 10% con respecto a la consideración de condición de contorno exacta).

También resulta oportuno realizar una observación adicional sobre la implicación que supone en determinados casos la imposición de condiciones de contorno impermeables, independientemente de que resulten suficientemente aproximadas para modelar matemáticamente el acoplamiento eléctrico con el espacio en el interior de la grieta.

Considérese el caso de un sólido piezoeléctrico con una grieta en su interior y sometido a la acción de una densidad de carga eléctrica D_n^0 en su contorno externo normal a la grieta, mientras que se mantienen tracciones mecánicas nulas en todo el contorno externo y superficies de la grieta. Este tipo de problema es considerado por gran número de autores y también será analizado en los ejemplos numéricos que se presenten en esta tesis.

La consideración de impermeabilidad eléctrica en la grieta en estos casos no parece tener demasiado sentido físico, a juicio del autor y según las observaciones realizadas por Kogan et al. (1996). Basta con pensar que si se parte de una situación inicial en la que la grieta se encuentra cerrada y se aplica posteriormente la densidad de carga eléctrica antes mencionada, la solución al problema será la presencia de un desplazamiento eléctrico constante D_z^0 en todo el medio piezoeléctrico, manteniéndose la grieta cerrada y comportándose como si de un medio continuo se tratara. Esta será la solución puesto que cumple todas las ecuaciones del problema piezoeléctrico, considerando las condiciones de contorno exactas, que equivaldrían en esta situación al caso permeable. Las deformaciones inducidas ε_{zz} y la variación de potencial según z se obtendrán al hacer $\sigma_{ij} = 0$, $D_z = D_z^0$ y $D_x = D_y = 0$ en la ley de comportamiento.

La imposición sobre las superficies de la grieta de desplazamiento eléctrico normal nulo (condición impermeable) solo tendría sentido en el caso de que en el problema planteado se partiera de una situación en la que la grieta presentase ya cierta abertura, y siempre admitiendo como válida la condición impermeable frente a la condición exacta. Es decir, se trata de un problema de interés siempre que se superpusiera a otro que implicase una apertura inicial de la grieta. Una posibilidad para que esto se cumpla es el caso considerado por Kogan et al. (1996), quien además de imponer un desplazamiento eléctrico en el infinito impone también que el desplazamiento según la dirección normal a la grieta sea nulo en el infinito. Un caso más sencillo puede ser la superposición del desplazamiento eléctrico con la acción de tracciones mecánicas en el sentido normal a la grieta.

Un ejemplo análogo que puede servir para entender un poco mejor este fenómeno es el caso termoelástico. Si se considera un medio elástico con una grieta en su interior, sometido a una temperatura constante y tracciones nulas sobre su contorno externo, parece claro que la solución a este problema será una distribución de temperatura constante en todo el medio, que no sufrirá tensiones mecánicas por tratarse de una situación isostática y un campo uniforme de temperatura, pero sí tendrán lugar deformaciones térmicas.

Parece también razonable pensar que en el momento en que la grieta se abriera (por efecto

de la aplicación de tracciones mecánicas superpuestas a la temperatura, por ejemplo), se tendría entonces un problema de conducción térmica acoplado entre el material elástico y el medio en el interior de la grieta. Además, y siguiendo con la analogía termoelástica, en caso de que la conductividad térmica de este medio fuese muy pequeña, esto no sería suficiente para considerar que el flujo térmico en la superficie de la grieta sea nulo, aunque ésta pudiera ser una hipótesis razonable a efectos prácticos.

Conclusiones acerca de las condiciones de contorno

En este apartado dedicado a las condiciones de contorno sobre las superficies de la grieta en un problema piezoeléctrico, se han presentado y analizado los distintos tipos de condiciones que se pueden imponer, sus implicaciones y la conveniencia en su empleo en distintas situaciones.

La condición de grieta permeable resulta adecuada sólo cuando la grieta se encuentra cerrada o en su espacio interior existe un medio conductor (permitividad infinita), mientras que la condición impermeable no parece tener una justificación física ni matemática del todo rigurosa y admisible. Además, se ha razonado por qué la aplicación de este tipo de condición de contorno puede resultar incluso en algunos casos incorrecta desde un punto de vista físico.

Parece por tanto que las condiciones de contorno más adecuadas son las condiciones exactas, que admiten el acoplamiento eléctrico entre el medio piezoeléctrico y el medio en el interior de la grieta.

Sin embargo, y tal y como apunta también Qin (2001), la consideración de las condiciones exactas resulta compleja desde un punto de vista matemático y computacional (el problema se convierte en no lineal y mal condicionado) por lo que su implementación puede resultar engorrosa. Una herramienta numérica avanzada en este sentido es la desarrollada recientemente por Wu y Wu (2006) aplicando el Método de los Elementos Finitos con un elemento híbrido con una función de transición específica en el frente de grieta.

No obstante, hay que señalar que el trabajo de algunos autores parece indicar que los resultados obtenidos con la condición impermeable o exacta no difieren excesivamente entre sí, aunque las diferencias pudieran ser relevantes en ciertas aplicaciones. Así, Hao y Shen (1994) encuentran que la singularidad del campo de potencial eléctrico en las proximidades de la grieta (asociado al factor K_{IV} que se definirá en el apartado siguiente) es mayor cuando se considera la condición impermeable en lugar de exacta, lo cual en principio puede llevar a pensar que la condición impermeable estará normalmente del lado de la seguridad. Por otro lado, Lin et al (2003) analizan una grieta circular con condiciones de contorno exactas e impermeables y obtienen el mismo

valor de K_I para las distintas condiciones de contorno. Sin embargo, estos autores sí encuentran diferencias en la influencia que el campo eléctrico tiene sobre la tendencia a la propagación de la grieta. Mientras que con la condición exacta esta influencia es independiente del criterio de propagación empleado, con la condición impermeable se observa una influencia distinta según el criterio aplicado.

Recientemente, Chen y Hasebe (2005) han realizado una exhaustiva revisión sobre la influencia de las condiciones de contorno según los resultados obtenidos por un gran número de autores, y resulta sorprendente el gran número de resultados contradictorios existentes en la literatura. Estas contradicciones parecen tener su causa en la influencia de las zonas con comportamiento no lineal en torno al frente de grieta, los niveles de carga mecánica y eléctrica considerados, las constantes del material, etc., aunque la cuantificación y justificación del efecto de cada uno de estos fenómenos resulta aún una incógnita.

Como conclusión final se puede decir que sigue siendo necesario la realización de estudios en profundidad acerca del acoplamiento eléctrico entre el material piezoeléctrico y el medio en el interior de la grieta, que puede ser aún más complejo en el caso de problemas dinámicos. Es preciso por tanto un mayor desarrollo analítico y numérico, que ha de ir acompañado de la realización de estudios experimentales que ilustren la realidad del fenómeno. Solo así se podrá avanzar en la determinación de las condiciones de contorno más adecuadas para cada problema, así como conseguir resultados numéricos realistas y prácticos, o al menos poder disponer de ciertas cotas de los errores cometidos. Todo lo que sea avanzar en ese sentido favorecerá la aportación al desarrollo tecnológico que debe suponer el conocimiento sobre Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos.

5.3. Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos

En materiales piezoeléctricos se distinguen los mismos modos de apertura de grieta (modos I, II y III) que ya se presentaron para el caso más general en la sección 2.5 (fig. 2.4). En el caso elástico no piezoeléctrico se definen unos Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) que caracterizan el campo singular de tensiones en las inmediaciones del frente de grieta y se encuentran directamente relacionados con cada uno de los modos de apertura (K_I , K_{II} y K_{III}). En el caso piezoeléctrico aparece también una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ en el campo de tensiones y desplazamiento eléctrico, y un comportamiento del tipo \sqrt{r} en los desplazamientos y potencial

eléctrico (Suo et al, 1992, Sosa, 1992, Pak, 1992). Esto lleva a definir un parámetro similar a los FIT de las tensiones mecánicas, que se conoce como K_{IV} y está asociado a la singularidad en el campo de desplazamiento eléctrico.

Al conjunto formado por los factores K_I , K_{II} , K_{III} y K_{IV} se conoce como Factores de Intensidad de Tensiones Extendidos (FITEs), y caracterizan el campo asintótico del problema piezoeléctrico en torno al frente de grieta. La definición del conjunto de FITEs se recoge en (5.35), de manera similar a como se hizo en las expresiones (2.28) para los FIT pero incluyendo ahora el factor K_{IV} .

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{zz} |_{\theta=0} \quad (5.35)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{nz} |_{\theta=0} \quad (5.36)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{tz} |_{\theta=0} \quad (5.37)$$

$$K_{IV} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} D_z |_{\theta=0} \quad (5.38)$$

Algunos autores definen un factor de intensidad de campo eléctrico, asociado a la singularidad del campo eléctrico y no del desplazamiento eléctrico, e incluso a veces asociado a una componente distinta de la normal a la superficie de la grieta (Heyer et al, 1998).

Los FITEs caracterizan la solución del problema pero no sirven para establecer directamente un criterio de propagación de la grieta, al contrario de lo que ocurre en materiales elásticos no piezoeléctricos, debido a que no permiten tener en consideración directamente la influencia del campo eléctrico sobre la tendencia a la propagación de la grieta y a la imposibilidad de definir y evaluar una tenacidad a la fractura (Park y Sun, 1995, Qin, 2001).

Otros criterios de propagación propuestos para materiales piezoeléctricos son la tasa de liberación de energía total, la tasa de liberación de energía mecánica de deformación y la tasa de liberación de energía local. Hasta el momento, ninguno de ellos ha demostrado ser lo suficientemente robusto en su aplicación, por lo que no existe aún un criterio de propagación que sea comúnmente aceptado. Un repaso teórico sobre los distintos criterios, sus limitaciones e inconvenientes en su aplicación puede encontrarse en el trabajo de Qin (2001) y Chen y Hasebe (2005).

La propagación de la grieta queda fuera del alcance de esta tesis, por lo que se considera que los problemas que se planteen quedarán resueltos mediante la obtención de los FITEs, que caracterizan la solución del problema y a partir de los cuales se podrían evaluar otros parámetros asociados a criterios de propagación.

Para la evaluación de los FITEs se ha extendido a 3D el procedimiento aplicado en 2D por García-Sánchez (2005). Este procedimiento se puede entender bien como el resultado de una extensión a 3D del formalismo de Stroh (1962) desarrollado en 2D para materiales piezoeléctricos por Barnett y Lothe (1975) y Deeg (1980), y utilizado por Pak (1992) para la obtención del campo asintótico de desplazamientos y tensiones extendidos en las cercanías del frente de grieta, o bien como la aplicación de las expresiones matriciales de dicho campo obtenidas por Suo et al (1992).

A continuación se presentan los pasos fundamentales en el proceso de evaluación de los FITEs, sin entrar en detalle en el formalismo de Stroh y prescindiendo de los desarrollos matemáticos en los que se basa el procedimiento. Para un estudio en mayor profundidad se pueden consultar las referencias anteriores.

La primera premisa en la que se basa el formalismo de Stroh consiste en suponer una solución del desplazamiento extendido del tipo

$$U_K = A_K \cdot f(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + p\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.39)$$

siendo \mathbf{x} el vector posición y \mathbf{m} y \mathbf{n} dos vectores unitarios ubicados en el plano normal al frente de grieta.

Introduciendo esta expresión del desplazamiento en las ecuaciones de Navier (obtenidas a partir de la introducción de la ley de comportamiento y ecuaciones de compatibilidad en las ecuaciones de equilibrio) se obtiene finalmente un sistema de ecuaciones que se puede plantear como el siguiente problema de autovalores y autovectores:

$$|\mathbf{N} - p_\alpha \mathbf{I}| = 0 \quad (5.40)$$

donde p_α son los autovalores de la matriz \mathbf{N} , que es de dimensión 8×8 . Esta matriz depende de las constantes del material y se puede escribir en submatrices de dimensión 4×4 (ec. 5.41) según la definición de las constantes en la ec. (5.11) (los subíndices IJ de estas constantes se corresponden con los subíndices de cada submatriz de 4×4).

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} (E_{3IJ3})^{-1} \cdot E_{3IJ1} & (E_{3IJ3})^{-1} \\ E_{1IJ3} \cdot (E_{3IJ3})^{-1} \cdot E_{3IJ1} - E_{1IJ1} & E_{1IJ3} \cdot (E_{3IJ3})^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Los autovectores correspondientes a autovalores con parte imaginaria positiva se agrupan en una matriz \mathbf{Z} de dimensión 8×4 que se subdivide en dos submatrices \mathbf{A} y \mathbf{L} de dimensión 4×4 :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Definiendo la matriz \mathbf{Y} como

$$\mathbf{Y} = i\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1} \quad (5.43)$$

y teniendo en cuenta la relación de las variables nodales del elemento a 1/4 con el comportamiento del tipo \sqrt{r} de los desplazamientos y potencial eléctrico (Pak, 1992, Suo et al, 1992), de manera análoga a como se detalló en la sección 2.5.1 se pueden escribir finalmente los FITEs en función del DAG extendido de los nodos a 1/4 según la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_{III} \\ K_I \\ K_{IV} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \text{Re}(\mathbf{Y})^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \\ \Delta u_z \\ \Delta \Phi \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

donde L es la longitud del elemento a un cuarto en dirección perpendicular al frente de grieta.

5.4. Formulación mixta del MEC para materiales piezoeléctricos

La formulación mixta del MEC desarrollada para materiales piezoeléctricos es esencialmente la misma que la que se ha tratado en los capítulos anteriores. La diferencia fundamental radica en el empleo de una solución fundamental diferente y la inclusión de las variables eléctricas.

En esta sección se pretende introducir tan solo el desarrollo de la formulación para materiales piezoeléctricos en notación extendida, lo cual resulta de gran utilidad para su implementación. Por otro lado, se remitirá a los apéndices correspondientes para la consulta de las expresiones de la solución fundamental y sus derivadas, así como los términos resultantes de la regularización de la ecuación hipersingular.

La Ecuación Integral de Contorno (EIC) en desplazamientos (formulación clásica) en un punto interno y del dominio del problema, cuyo contorno es una superficie regular Γ , en ausencia de fuerzas de volumen y densidad volumétrica de carga eléctrica, se expresa como sigue,

$$U_K(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U_M(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_M(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (5.45)$$

donde $T_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $U_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la solución fundamental del problema. En esta tesis se ha empleado la solución fundamental de Dunn y Wienecke (1996), cuyas expresiones aparecen en el apéndice A. En el trabajo de estos autores aparecen las expresiones de la solución fundamental en desplazamientos $U_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. A partir de las derivadas de estas expresiones se obtienen las expresiones de la solución fundamental en tracciones según la definición de éstas:

$$T_{KM}^* = \frac{\partial}{\partial x_c} U_{BK}^* E_{aMBc} n_a \quad (5.46)$$

siendo n_a la normal en el punto de observación \mathbf{x} . Las expresiones de la primera derivada de los términos $U_{KM}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aparecen en el apéndice A.

La solución fundamental de Dunn y Wienecke (1996) es válida para materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos y presenta la gran ventaja de estar formulada con expresiones explícitas. El método de obtención de esta solución y las expresiones finales guardan gran similitud con la solución fundamental de Pan y Chou (1976) para materiales transversalmente isótropos, que ya fue empleada en el capítulo 4 de esta tesis.

Existen otras soluciones fundamentales para materiales piezoeléctricos anisótropos, como es la solución de Deeg (1980), que son más generales pero no disponen de expresiones explícitas, lo que hace más engorrosa su implementación y conllevan un mayor coste computacional. Además, el comportamiento transversalmente isótropo es el que exhiben la mayoría de materiales piezoeléctricos de interés tecnológico. Recientemente, Ding et al. (2004) han presentado una solución con ciertas similitudes a la ofrecida anteriormente por Dunn y Wienecke (1996), aunque algo más compleja en su implementación.

La ecuación (5.45) se ha escrito para un punto interno del dominio. Al hacer el paso al límite para un punto del contorno aparecerá un coeficiente afectando al término libre, tal y como se explicó en el capítulo 2. Las consideraciones sobre este término libre en la formulación para materiales piezoeléctricos son idénticas a las realizadas en aquel capítulo, por lo que aquí se prescindirá por simplicidad de dicho paso al límite y la justificación del coeficiente que acompaña al término libre en cada caso.

Derivando la ecuación (5.45), combinando estas ecuaciones derivadas según la ley de comportamiento del material piezoeléctrico y proyectando según la normal en el punto de colocación, se obtiene la siguiente EIC en tracciones (formulación hipersingular) en la que en el término libre aparecen las tracciones en el punto de colocación:

$$T_J(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} s_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) U_M(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) T_M(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (5.47)$$

donde N_i es la normal en el punto de colocación y los términos s_{iMJ}^* , d_{iMJ}^* , se definen como

$$s_{iMJ}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y_l} T_{KM}^* E_{iJKl} \quad (5.48)$$

$$d_{iMJ}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y_l} U_{KM}^* E_{iJKl} \quad (5.49)$$

La derivación respecto a y_l indica que se trata de una derivación respecto a la posición del punto de colocación, que es igual que la derivada respecto al punto de observación (en ese caso la derivación sería respecto x_l) pero cambiada de signo.

Según la definición de la solución fundamental en tracciones a partir de los desplazamientos (ec. 5.46) y la expresión (5.48), se pueden poner finalmente los núcleos hipersingulares s_{iMJ}^* como

$$s_{iMJ}^* = \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_c} U_{BK}^* E_{iJKl} E_{aMBc} n_a \quad (5.50)$$

Las expresiones de las segundas derivadas de los términos de la solución fundamental en desplazamientos, necesarias para la obtención de los núcleos s_{iMJ}^* , se recogen también en el apéndice A.

El orden de las singularidades que aparecen en la solución fundamental es el mismo que en materiales no piezoeléctricos, por lo que en la EIC en tracciones aparecen núcleos fuertemente singulares e hipersingulares cuya integración numérica resulta complicada. Para solventar esta dificultad se aplica en la formulación para materiales piezoeléctricos la misma técnica de regularización empleada por Ariza (2002) para materiales isótropos y transversalmente isótropos, y que ya fue descrita a grandes rasgos en el capítulo 2. De esta forma, la EIC en tracciones que se implementa finalmente es la siguiente:

$$\begin{aligned} T_J(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_0} \{s_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) [U_M(\mathbf{x}) - U_M(\mathbf{y}) - U_{M,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] \\ - d_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) [T_M(\mathbf{x}) - T_M(\mathbf{y})]\} d\Gamma + [U_M(\mathbf{y}) I_{MJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U_{M,h}(\mathbf{y}) J_{MhJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ + \int_{\Gamma - \Gamma_0} \{s_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) U_M(\mathbf{x}) - d_{iMJ}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) T_M(\mathbf{x})\} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde Γ_0 es la región sobre la que se aplica el proceso de regularización. En este trabajo se ha mantenido el criterio adoptado en la tesis de Ariza (2002), consistente en considerar esta región

como el elemento que contiene al punto de colocación. En los elementos adyacentes se deberán evaluar integrales cuasi singulares, para lo que se aplican de nuevo las técnicas presentadas en el capítulo 3.

La regularización de los núcleos fuertemente singulares e hipersingulares que da lugar a los términos I_{MJ} y J_{MhJ} , se realiza aplicando el Teorema de Stokes, transformado integrales de superficie en integrales de línea. Para ello, en las expresiones de los núcleos a regularizar se identifican términos del tipo que aparecen en las siguientes relaciones, y teniendo en cuenta éstas se aplica de forma inmediata el Teorema de Stokes sobre estos términos:

$$\frac{n_3 N_3}{r^3} = \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{N})}{r^3} \right] \cdot \mathbf{n} \quad (5.52)$$

$$\frac{n_3 N_3 r_{,h}}{r^2} = \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_h \times \mathbf{N})}{r} \right] \cdot \mathbf{n} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{n_3 N_3 r_{,h} r_{,c} r_{,l}}{r^2} &= \frac{1}{3} \delta_{cl} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}) r_{,l}^2}{r} \right] \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{3} \delta_{hl} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_c \times \mathbf{N}) r_{,l}^2}{r} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \delta_{ch} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_l \times \mathbf{N}) r_{,h}^2}{r} \right] \cdot \mathbf{n} \\ &+ \frac{2}{3} \delta_{cl} \delta_{ch} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_h \times \mathbf{N})}{r} \right] \cdot \mathbf{n} - \frac{2}{3} \delta_{cl} \delta_{ch} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}) r_{,c}^2}{r} \right] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.54)$$

siendo $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ el vector posición del punto de observación respecto del de colocación, y $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ su módulo. Los términos \mathbf{e} son vectores unitarios según las direcciones cartesianas indicadas por sus subíndices.

En el proceso de regularización llevado a cabo para la formulación en materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos, se ha considerado que la superficie de la grieta es plana y perpendicular al eje de simetría del material ($N_1 = N_2 = n_1 = n_2 = 0$). Esto simplifica el proceso de regularización y, aunque limita la aplicabilidad de la formulación desarrollada, hay que tener en cuenta que la situación considerada es la que despierta mayor interés desde un punto de vista práctico y así lo consideran la mayoría de autores.

Esta simplificación tiene las mismas consecuencias que en materiales no piezoeléctricos (Ariza, 2002). Así se tiene que son nulos los términos K_{lk} que aparecen en la EIC regularizada a implementar en su forma más general (ec. 2.25), por lo que no han sido incluidos en la expresión (5.51), y también resultan nulas las integrales de superficie que aparecen en los términos I_{MJ} y J_{MhJ} .

Todos los detalles del proceso de regularización se pueden encontrar en la tesis de Ariza (2002), mientras que las expresiones de los términos I_{MJ} y J_{MhJ} de la formulación para materiales piezoelectricos desarrollada en esta tesis se pueden encontrar en el apéndice B.

Finalmente, e independientemente del proceso de regularización, queda hacer un comentario relativo a la implementación de la formulación y la normalización del sistema de ecuaciones. Ya se resaltó en el capítulo 2 (apartado 2.6) que el sistema de ecuaciones resultante de la aplicación del MEC es un sistema mal condicionado, en el que aparecen términos de muy distinto orden de magnitud. Este fenómeno se hace aún más acusado al utilizar la formulación mixta del MEC, en la que se emplean en el mismo sistema la EIC en desplazamientos y la EIC en tracciones. En el capítulo 2 se explicó entonces una técnica de normalización del sistema de ecuaciones por medio de las constantes elásticas del material.

En el caso piezoelectrico, este mal condicionamiento del sistema se hace todavía más significativo al aparecer constantes en la ley de comportamiento del material de muy distinto orden de magnitud. En unidades S.I., las constantes elásticas son del orden de 10^{10} , las constantes piezoelectricas son de orden unidad, y las constantes dieléctricas son de orden 10^{-10} . Además, en el vector solución de desplazamientos o tracciones extendidas existe la misma diferencia en el orden de magnitud entre variables eléctricas y elásticas.

Para solucionar este inconveniente se propone trabajar en GPa para las tracciones mecánicas y en GV para el potencial eléctrico (la unidad de carga eléctrica seguirá siendo el Culombio y los desplazamientos seguirán refiriéndose en metros). De esta forma, introduciendo en estas unidades las constantes de la ley de comportamiento del material y las condiciones de contorno del problema, se obtendrá un sistema de ecuaciones mejor condicionado. La solución del problema obtenida será en GPa para las tracciones y GV para el potencial eléctrico.

5.5. Ejemplos numéricos

5.5.1. Generalidades

Para cerrar el capítulo dedicado a la formulación mixta del MEC para materiales piezoelectricos, se presentan una serie de resultados numéricos obtenidos con dicha formulación. Se analizan situaciones de grietas inmersas en medios infinitos y finitos, estando la grieta inmersa en el interior del dominio o intersectando el contorno externo del problema, y se consideran tanto cargas

mecánicas como eléctricas. Los resultados son comparados con resultados previos obtenidos por otros autores cuando éstos existen.

Por simplicidad, en ocasiones se colocará el superíndice “*mec*” a los FITEs obtenidos bajo condición de carga mecánica y “*elec*” para carga eléctrica. Esto servirá para referirse con mayor comodidad a una u otra situación de carga, sin querer esto decir en ningún caso que la definición de los FITEs sea distinta por el hecho de ir acompañado de este superíndice.

A la hora de presentar valores de los FITEs, resulta conveniente adimensionalizarlos de forma que sus valores sean fácilmente comparables con otras configuraciones e independientes de la sollicitación aplicada. Esto no suele plantear dificultad en problemas no piezoeléctricos, así como en los factores K_I^{mec} y K_{IV}^{elec} , cuyos valores adimensionalizados habituales son $K_I^{mec}/\sigma/\sqrt{\pi a}$ y $K_{IV}^{mec}/D_z/\sqrt{\pi a}$ respectivamente, siendo σ y D_z la tensión mecánica y desplazamiento eléctrico aplicados, y a es una dimensión característica de la grieta. La dificultad que supone en este sentido el comportamiento piezoeléctrico es que los FITEs asociados al campo de tensiones y desplazamiento eléctrico tienen distintas unidades y por tanto los factores “cruzados” (K_I^{elec} y K_{IV}^{mec}) no pueden ser adimensionalizados con respecto a la sollicitación aplicada. Lo que se plantea en esta tesis como mejor alternativa para una correcta e inequívoca interpretación de los resultados es mantener el mismo factor de adimensionalización en función de la sollicitación, de forma que se presentarán valores de $K_I^{elec}/D_z/\sqrt{\pi a}$ y $K_{IV}^{mec}/\sigma/\sqrt{\pi a}$ que no serán adimensionales pero se consigue que estos valores sean independientes del valor de la sollicitación y no inducir a errores en el empleo de las unidades. En los ejemplos numéricos que se analizan en esta tesis, y salvo que se especifique lo contrario, los factores $K_I^{mec}/\sigma/\sqrt{\pi a}$ y $K_{IV}^{mec}/\sigma/\sqrt{\pi a}$ tendrán dimensiones de [GN/C] y [C/GN] respectivamente.

En todos los ejemplos se considerará el mismo material piezoeléctrico. Se trata de una cerámica comercial de la familia de los plomo circonato titanato, conocida como PZT4, que ha sido empleada por un gran número de autores como material de referencia. Queda fuera del alcance de esta tesis el análisis de la posible influencia que puedan tener las propiedades del material en los resultados obtenidos. Las propiedades del PZT4 se recogen en la tabla 5.1.

5.5.2. Grieta circular en medio infinito bajo carga mecánica y eléctrica

El problema de una grieta circular inmersa en un medio infinito es el problema más elemental en Mecánica de la Fractura 3D, y al mismo tiempo resulta de gran interés. Esto hace que nu-

Constantes elásticas ($\times 10^{10} N/m^2$)	C_{11}	13.9
	C_{12}	7.78
	C_{13}	7.43
	C_{33}	11.3
	C_{44}	2.56
Constantes piezoeléctricas (C/m^2)	e_{31}	-6.98
	e_{33}	13.84
	e_{15}	13.44
Constantes dieléctricas ($\times 10^{-9} C/(V \cdot m)$)	ϵ_{11}	6.00
	ϵ_{33}	5.47

Tabla 5.1: Propiedades del material PZT4 considerado en los ejemplos numéricos.

merosos autores lo hayan tratado desde diversos enfoques matemáticos, llegando incluso a obtener soluciones analíticas que sirven posteriormente como banco de pruebas para la validación de otros métodos numéricos más generales.

En el caso de materiales piezoeléctricos, la obtención de soluciones cerradas para problemas concretos de Mecánica de la Fractura se hace aún más complicado que para materiales que no exhiben comportamiento piezoeléctrico. Sin embargo, en el caso de una grieta circular en un medio infinito, los campos de tensión y campo eléctrico son similares en ambos casos, dando lugar a expresiones análogas para los FITEs.

La mayoría de los trabajos desarrollados se centran en el modo I de apertura de grieta, que lleva asociados los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{IV} . Entre los trabajos que tratan este problema desde un punto de vista analítico se encuentran los de Huang (1997), que llega a expresiones muy complicadas, Zhao et al (1997b), quienes llegan a expresiones compactas tanto para las discontinuidades de desplazamientos y potencial eléctrico en la grieta como para los FITEs, y por último Chen et al (2000), quienes obtienen también una expresión clara para los FITEs. Todos estos autores tratan el problema considerando para la grieta condiciones de contorno impermeables, con las que se llega a las siguientes expresiones para los FITEs.

$$K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\sigma_z \quad K_{IV} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}D_z \quad (5.55)$$

donde σ_z es la presión interna o tracción a la que es sometida la grieta en el infinito, y D_z es la densidad de carga o desplazamiento eléctrico en las caras de la grieta o aplicada en el infinito. Se puede observar como las expresiones son análogas a las del caso elástico no piezoeléctrico. Se puede comprobar también como los FITES K_I y K_{IV} están desacoplados el uno del otro. Es decir, K_I solo depende de la carga mecánica impuesta y K_{IV} solo depende de la carga eléctrica impuesta. Esto no quiere decir sin embargo que bajo carga eléctrica no se produzca discontinuidad de desplazamientos en la grieta o ausencia de tensiones mecánicas en el medio piezoeléctrico, ni tampoco que la carga mecánica no de lugar a discontinuidad de potencial eléctrico en la grieta o que haya ausencia de campo eléctrico en el medio. Chen et al (2000) muestran incluso como, bajo carga eléctrica, el campo de tensión mecánica normal al plano de la grieta (σ_z) es nulo en el plano de la grieta ($z = 0$) pero no lo es para $z \neq 0$.

Para analizar el problema con la formulación hipersingular del MEC desarrollada, se ha discretizado la grieta con la malla de elementos de contorno que aparece en la figura 5.2. Tan solo una cara de la grieta necesita ser discretizada, empleando para ello 64 elementos cuadráticos isoparamétricos de 9 nodos, siendo del tipo a 1/4 los adyacentes al frente de grieta.

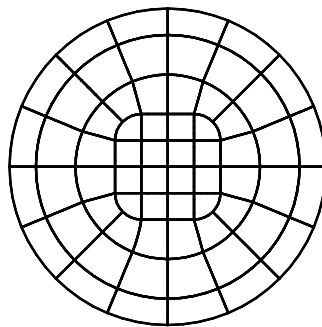


Figura 5.2: Discretización de la grieta circular (64 elementos)

En la figura 5.3 se muestra el perfil a lo largo del radio de la grieta de la discontinuidad de desplazamiento normal a la grieta y potencial eléctrico cuando la grieta se encuentra sometida tanto a carga mecánica como eléctrica. Los resultados obtenidos con el modelo numérico desarrollado se comparan con los resultados obtenidos por Zhao et al (1997b), mostrando un alto grado de acuerdo. Se puede observar como los desplazamientos producidos bajo carga eléctrica coinciden con el potencial eléctrico obtenido bajo carga mecánica, tal y como era de esperar, y son no

nulos, lo que demuestra el acoplamiento electromecánico existente, aunque este acoplamiento no se refleje en los FITEs.

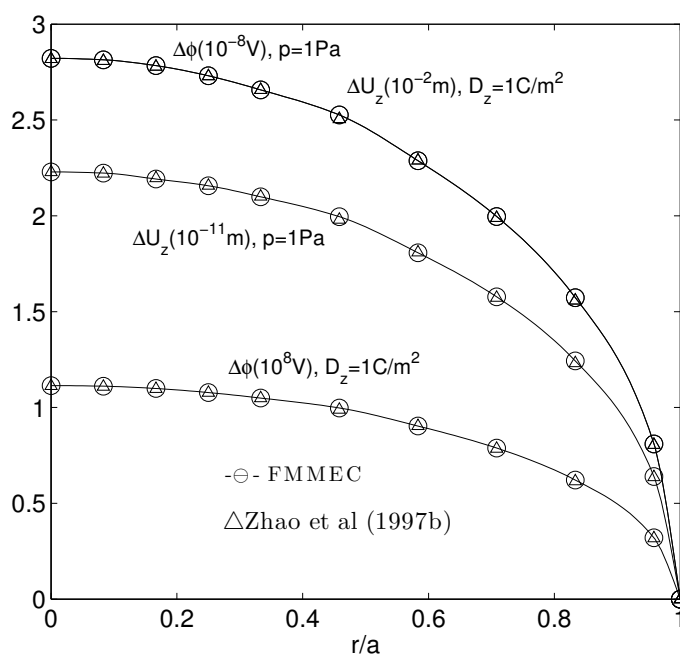


Figura 5.3: Perfil radial de la discontinuidad en desplazamiento y potencial eléctrico. $a(m)$ es el radio de la grieta, $p(Pa)$ es la presión interna de la grieta o tracción impuesta en el infinito para el caso de carga mecánica, y $D_z(C/m^2)$ es la densidad de carga impuesta en las superficies de la grieta o en el infinito para el caso de carga eléctrica.

En cuanto a los FITEs obtenidos a partir de los desplazamientos de los nodos a $1/4$, según el procedimiento explicado con anterioridad (apartado 5.3), se tienen los resultados adimensionalizados de K_I para carga mecánica y K_{IV} para carga eléctrica que se recogen en la tabla 5.2.

El error cometido respecto al valor teórico de estos FITEs es muy pequeño.

Tal y como se comentó anteriormente, los trabajos y resultados anteriores se referían a condiciones de grieta impermeables, para las que se obtenían unas expresiones similares y análogas a las del caso elástico. Estas expresiones sin embargo resultan distintas en el caso de considerar condiciones de contorno exactas. Kogan et al. (1996), abordan el problema de una inclusión con forma esférica considerando condiciones de contorno exactas, y obtienen la solución para la grieta circular como un caso degenerado, hallando las correspondientes expresiones de los FITEs. Por

		Error
$K_I/p/\sqrt{a/\pi}$	1.9895	0.525 %
$K_{IV}/D_z/\sqrt{a/\pi}$	1.9901	0.495 %

Tabla 5.2: Resultados de FITEs modo I y error cometido

otro lado, Lin et al (2003) realizan un análisis muy interesante del modo I de apertura de la grieta circular, considerando también condiciones de contorno exactas y estudiando el efecto de la presencia de un campo eléctrico aplicado desde el infinito. En ambos trabajos se llega a la conclusión de que los FITEs asociados al modo I dependen exclusivamente de la carga mecánica y no de la carga eléctrica. La expresión del K_I obtenida por estos autores es igual a la del caso de condición de contorno impermeable, mientras que la de K_{IV} es distinta, resultando proporcional a K_I a través de un factor dependiente de la permeabilidad eléctrica del espacio interior de la grieta y el campo eléctrico existente en dicho espacio.

Según estos resultados, una carga eléctrica, considerando condiciones de contorno exactas y tracción nula en el infinito, no producirá la apertura de la grieta ni por tanto su propagación. Esto quiere decir también que la consideración de la condición impermeable da lugar a singularidades en el desplazamiento eléctrico en el frente de grieta, que pueden carecer de sentido físico según Kogan et al. (1996). En este trabajo se puntualiza sin embargo que en el caso de considerar una carga eléctrica con desplazamiento mecánico impedido en el infinito, entonces sí se producirían singularidades en el campo de tensiones mecánicas y desplazamiento eléctrico en el frente de grieta. Estos resultados están directamente relacionados con las observaciones realizadas en el apartado dedicado a las condiciones de contorno sobre las superficies de la grieta en un problema piezoeléctrico (sección 5.2.2), donde se advertían algunas limitaciones en la consideración de impermeabilidad eléctrica en la grieta.

En cuanto a los modos II y III de apertura para la grieta circular, han sido muy pocos los autores que los hayan abordado en sus trabajos. Kogan et al. (1996) resuelven de nuevo esta situación como un caso degenerado de inclusión con forma esférica, pero las expresiones obtenidas para los FITEs quedan en función de una serie de constantes a resolver a partir de un sistema de ecuaciones, y no ofrecen resultados numéricos. En esta ocasión, estos autores consideran que para los modos II y III las condiciones de contorno exactas coinciden con las impermeables.

Chen et al (2000), obtienen la solución para una grieta circular sometida a tensión tangencial

constante y a una fuerza puntual tangencial, pero las expresiones de los campos de desplazamientos, potencial eléctrico y FITEs son muy complicadas. Para una tensión tangencial constante, Zhao et al (1997b) obtiene expresiones compactas para los FITEs asociados a los modos II y III idénticas a las del caso elástico no piezoelectrico, gracias a la obtención de un módulo de Poisson equivalente para este tipo de materiales, y ofrecen resultados para algunos materiales concretos. En dicho artículo se definen también unos FITEs asociados al desplazamiento eléctrico en modo II y III, que son proporcionales a los mecánicos y que no parecen tener mucho sentido. De hecho, el autor no conoce ningún otro trabajo en que se definan este tipo de FITEs.

En la fig. 5.4 se muestra la evolución de estos factores de intensidad de tensión adimensionalizados a lo largo del frente de grieta. Los resultados obtenidos con la formulación del MEC desarrollada se comparan con los resultados obtenidos por Zhao et al (1997b), obteniéndose de nuevo un elevado grado de acuerdo. Por simetría, solo se muestra 1/4 del frente de grieta.

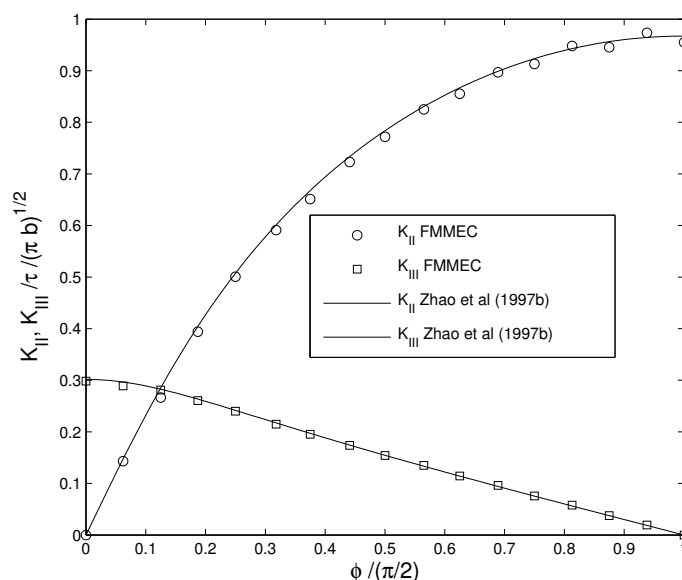


Figura 5.4: Valores de los factores K_{II} y K_{III} para grieta circular en medio infinito

5.5.3. Grieta elíptica en medio infinito sometida a carga eléctrica o mecánica

El problema de una grieta plana de forma elíptica inmersa en un medio infinito resulta de mayor interés que el de una grieta circular. Se trata de una geometría más realista, que implica tam-

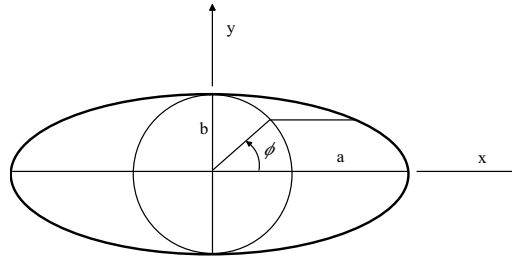


Figura 5.5: Geometría de grieta elíptica.

bién una mayor complejidad a la hora de analizar su comportamiento. En materiales piezoeléctricos, son muy pocos los autores que han aportado soluciones para este problema, ya sea desde un punto de vista analítico o numérico. Wang y Huang (1995) llegaron a expresiones muy complejas para la solución del problema cuando la grieta es sometida a tracción mecánica o densidad de carga eléctrica uniforme. Estas expresiones contenían además algunos errores (Zhao et al, 1997b), por lo que Shang et al (2003) las analizaron de nuevo para obtener finalmente a partir de ellas las mismas expresiones de los FITEs K_I y K_{IV} que ya obtuvieran previamente Zhao et al (1997b) de forma analítica. Estas expresiones son las siguientes:

$$K_I = \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/4}}{E(k)} \sqrt{\pi \frac{b}{a}} \sigma_z \quad (5.56)$$

$$K_{IV} = \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/4}}{E(k)} \sqrt{\pi \frac{b}{a}} D_z \quad (5.57)$$

donde σ_z es la presión interna o tracción a la que es sometida la grieta en el infinito, y D_z es la densidad de carga o desplazamiento eléctrico en las caras de la grieta o aplicada en el infinito, a y b son los semiejes de la elipse ($a \geq b$) y $E(k)$ es la integral elíptica de segundo orden con argumento $k = (1 - (b/a)^2)^{1/2}$ (ec. 5.58).

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi \quad (5.58)$$

Particularizando para $a = b$, se obtienen las expresiones correspondientes al problema de una grieta circular. Se observa, al igual que en aquel caso, que los FITEs K_I y K_{IV} están desacoplados. Es decir, K_I solo depende de la tracción mecánica y K_{IV} solo depende de la carga eléctrica impuesta. También se observa como sus expresiones son análogas a las del caso elástico no

piezoeléctrico, obtenidas por Irwin (1962). Según Zhao et al (1997b)) estas conclusiones son extensibles para cualquier otra geometría de la grieta, aunque en su trabajo solo se analizan grietas contenidas en un medio infinito, y es de suponer que esta relación con la solución en un medio no piezoeléctrico es de aplicación tan solo en aquellos problemas en los que los FIT del problema no piezoeléctrico no dependan de las constantes elásticas.

Desde un punto de vista numérico, la grieta elíptica ha sido analizada por Shang et al (2003) aplicando el método de los elementos finitos, y por Chen (2005), aplicando un método de integral de parte finita sobre ecuaciones hipersingulares integro-diferenciales. Los resultados de estos trabajos muestran un buen acuerdo con la expresión analítica de los FITEs. También presentan resultados sobre otros tipos de geometrías de grietas inmersas en un medio infinito pero de escaso interés práctico, como son el caso de grietas con forma cuadrada y rectangular (Chen, 2005), y los casos de un cuarto y de la mitad de un círculo y de una elipse (Shang et al, 2003).

En todos los trabajos previos que analizan el caso de una grieta elíptica y que han sido citados anteriormente se consideran condiciones de contorno impermeables en las caras de la grieta. No existen resultados conocidos por el autor para condiciones de contorno exactas, que sí existen para una grieta circular (Kogan et al., 1996, Lin et al, 2003) y en cuyo caso se han encontrado discrepancias relevantes con el caso impermeable, según se comentó en la sección anterior.

Aquí se presentan los resultados obtenidos con la formulación mixta del MEC (FMMEC) desarrollada para materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos, considerando que la grieta está contenida en un plano perpendicular al eje de simetría o eje de polarización del material. La discretización con elementos de contorno se muestra en la fig. 5.6, y está formada por 84 elementos isoparamétricos de 9 nodos, siendo del tipo a 1/4 los que se encuentran en el frente de grieta. Los resultados se han obtenido para el material del tipo PZT4, lo cual afectará a los campos de desplazamientos y potencial eléctrico pero no a los valores de los FITEs. Se han considerado dos tipos de carga: presión interna o tracción mecánica en el infinito, o bien inducción eléctrica uniforme en el interior de la grieta o en el infinito.

En la fig. 5.7 se presenta el perfil de la discontinuidad del desplazamiento normal a la grieta y del potencial eléctrico para un valor $\phi = 0$ del ángulo paramétrico de la elipse (definido en la fig. 5.5) tanto para el caso de carga eléctrica como mecánica. Se ha comprobado que, al igual que ocurre con la solución de Zhao et al (1997b), este tipo de representación respecto a la coordenada 'radial' adimensionalizada es independiente del ángulo ϕ . Con la representación de la fig. 5.7 queda caracterizado por tanto el campo de desplazamientos y potencial eléctrico en la grieta. El

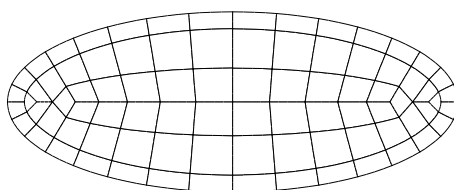


Figura 5.6: Discretización para la grieta elíptica.

acuerdo con los resultados obtenidos por Zhao et al (1997b) es excelente.

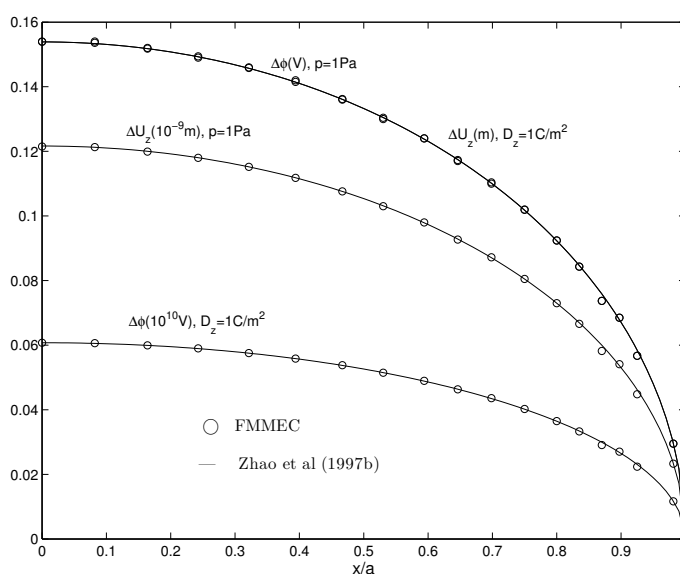


Figura 5.7: Perfil radial de la discontinuidad de desplazamiento y potencial eléctrico en una grieta elíptica bajo carga mecánica y eléctrica.

En la fig. 5.8 se muestra la evolución de los FITEs K_I y K_{IV} adimensionalizados a lo largo del ángulo ϕ de la elipse. Debido a la simetría de los resultados solo se muestra un cuarto de la representación. Se puede observar un elevado grado de acuerdo con el valor analítico, siendo el error cometido menor del 1%. Hay que hacer hincapié en que los valores numéricos de K_I y K_{IV} obtenidos coinciden entre sí para carga mecánica y eléctrica, respectivamente, tal y como ocurre con las expresiones analíticas obtenidas por Zhao et al (1997b).

Para los modos II y III, se aplica una tensión tangencial uniforme en la dirección del semieje

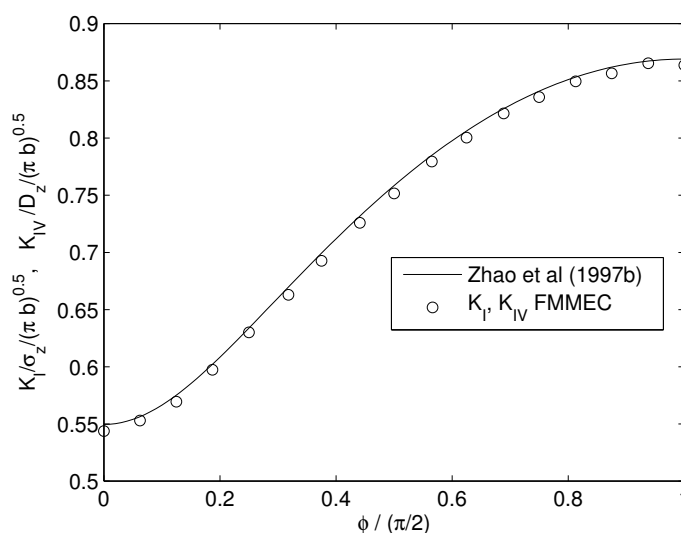


Figura 5.8: Valores de los factores K_I y K_{IV} para una grieta elíptica sometida a tracción mecánica y desplazamiento eléctrico respectivamente.

menor de la elipse. Los resultados se comparan con la solución analítica obtenida por Kassir y Sih (1966) para medios elásticos isótropos, en cuyas expresiones se introduce el módulo de Poisson equivalente obtenido por Zhao et al (1997b) para diversos materiales piezoeléctricos. Los resultados numéricos obtenidos muestran un buen acuerdo con los valores analíticos (fig. 5.9).

5.5.4. Grieta circular en cilindro

En esta sección se analiza el caso de una grieta circular inmersa en una pieza cilíndrica. El eje del cilindro coincide con la dirección del eje de simetría del material, mientras que la grieta es perpendicular a dicho eje y se encuentra centrada en el plano medio del cilindro. Se analiza el comportamiento de la pieza cuando es sometida a tracción o desplazamiento eléctrico uniforme en sus caras extremas. La geometría del problema y la discretización del contorno externo se muestra en la fig. 5.10. La discretización de la grieta es la misma que la empleada para la grieta circular en un medio infinito (fig. 5.2)

Una vez analizados con éxito los problemas de grietas inmersas en un medio infinito, y validada por tanto la formulación hipersingular del MEC, este problema sirvió para una primera comprobación de la correcta implementación de la formulación mixta (empleo de formulación

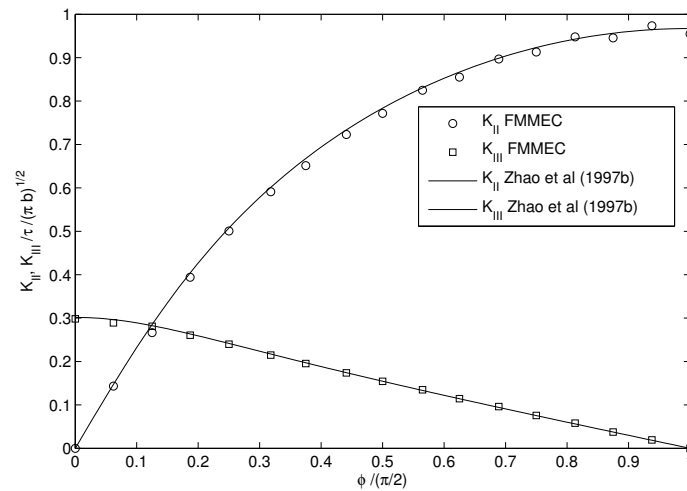


Figura 5.9: Valores de los factores K_{II} y K_{III} para una grieta elíptica sometida a tensión tangencial uniforme.

clásica además de la hipersingular). En primer lugar se consideró un cilindro de un radio mucho mayor que el de la grieta ($R = 10a$), de forma que simulase el comportamiento de la grieta en un medio infinito, y se obtuvieron resultados plenamente satisfactorios. La misma geometría ha sido utilizada también por Shang et al (2003) con un material PZT5H y aplicando el Método de los Elementos Finitos. El empleo de este método obliga a recurrir a este tipo de geometría (dominio mucho más grande que el tamaño de la grieta) para simular un medio infinito, lo cual supone una desventaja frente al MEC.

Posteriormente se analizó el problema para la geometría “finita” de la fig. 5.10 ($H = R = 2a$). Los resultados obtenidos son comparados con los publicados previamente por Sanz et al (2005), obtenidos mediante una formulación clásica del MEC, aprovechando la simetría del problema y utilizando elementos a un cuarto singulares. Este problema también ha sido estudiado por Yang y Lee (2003), abordándolo como un problema axisimétrico y aplicando la teoría del potencial y la transformada de Hankel. Sin embargo, sus resultados no son comparables con los aquí obtenidos debido a que estos autores aplican la condición de contorno permeable en la grieta, además de considerar un material distinto (PZT6B).

El desplazamiento y potencial eléctrico en una de las caras de la grieta para carga mecánica y eléctrica se representa en la fig. 5.11. El acuerdo con los resultados previos obtenidos por Sanz et

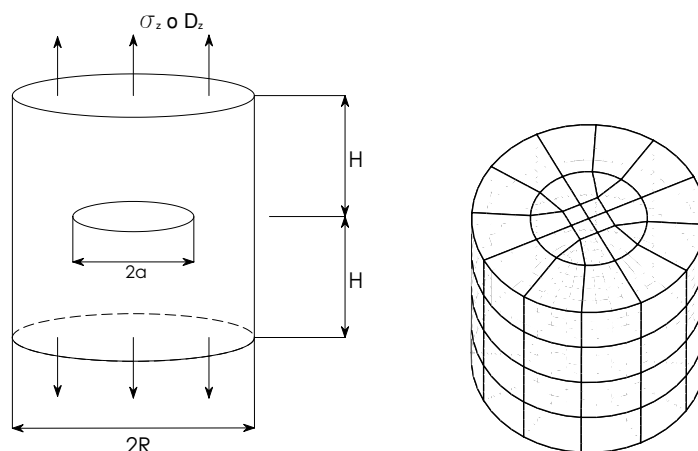


Figura 5.10: Esquema de grieta circular en el interior de pieza cilíndrica ($H = R = 2a$) y discretización del contorno externo.

al (2005) es excelente.

Los valores de los FITEs se recogen en la tabla 5.3. Se pueden apreciar pequeñas diferencias con los valores obtenidos por Sanz et al (2005) en los valores 'cruzados' de los FITEs, es decir, en el factor K_{IV} cuando se considera carga mecánica y en K_I para excitación eléctrica. Esto es debido a problemas de cancelación existentes al evaluar la expresión (5.44). Esto hace que aunque las diferencias en los desplazamientos obtenidos sean muy pequeñas, se pueden obtener diferencias importantes al evaluar estos valores de los FITEs según el método propuesto.

Carga mecánica	$K_I/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$	$K_{IV}/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$ (C/GN)
Sanz et al (2005)	0.691	0.00705
FMMEC	0.6908	0.0068
Carga eléctrica	$K_I/(D_z\sqrt{\pi a})$ (GN/C)	$K_{IV}/(D_z\sqrt{\pi a})$
Sanz et al (2005)	$1.81 \cdot 10^{-4}$	0.663
FMMEC	$1.91 \cdot 10^{-4}$	0.664

Tabla 5.3: FITEs para grieta circular en pieza cilíndrica.

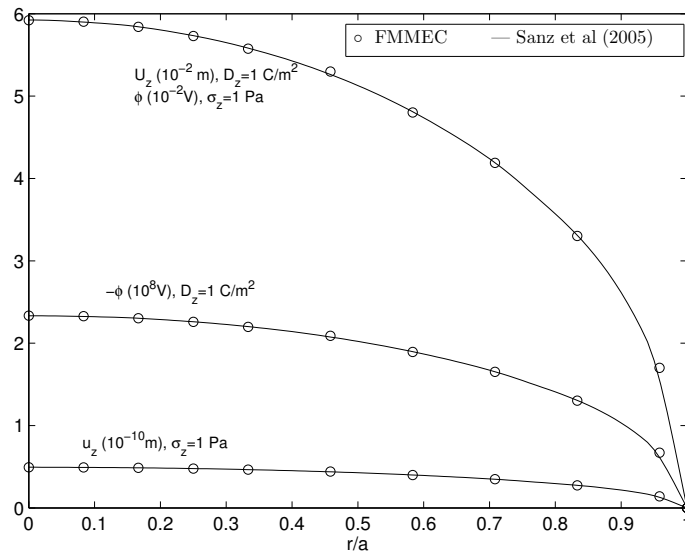


Figura 5.11: Valores de los desplazamientos y potencial en grieta circular en el interior de un cilindro bajo carga mecánica y eléctrica.

5.5.5. Prisma con grieta recta

Esta sección es similar a la que lleva el mismo título en el capítulo dedicado a materiales transversalmente isótropos. Al igual que entonces, se considerarán diversas configuraciones en las que una grieta recta contenida en un prisma intersecta con el contorno externo.

Partiendo de una geometría básica (fig. 5.12, con $H/W = 1,75$ y $W/a = 2$), e imponiendo condiciones de simetría en uno de los planos normales al eje y que aparece en la figura, se tendrán en total 3 tipos de problemas: grieta de borde, grieta central y doble grieta de borde.

En cada una de estas configuraciones se analizará una situación en las que con un pequeño espesor del prisma ($t/W = 0,25$) y aplicando las condiciones de contorno en desplazamientos adecuadas se puede simular un problema plano, tanto en una situación de deformación plana como de tensión plana. Para simular el caso de deformación plana se restringe el desplazamiento según x en las caras normales a dicha dirección (fig. 5.12) y en tensión plana estas superficies quedan libres. El valor de los FITEs en deformación plana vendrá dado por el valor obtenido en la parte central de la pieza. Esta metodología ya fue validada en su aplicación para materiales transversalmente isótropos (capítulo 4).

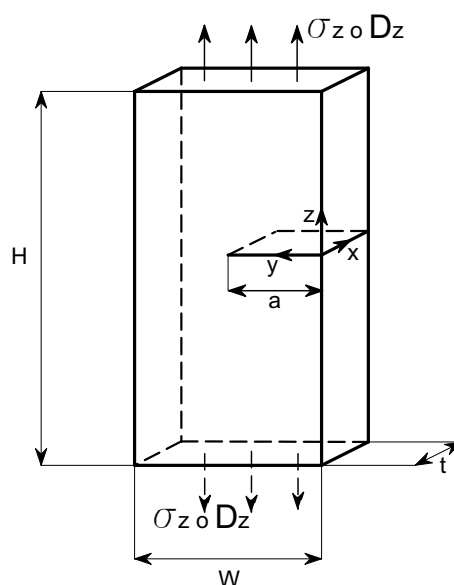


Figura 5.12: Esquema de la geometría básica de prisma con grieta recta ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

Posteriormente se analizará el caso en que el prisma tenga un gran espesor ($t/W = 1,5$), con el objeto de analizar el efecto tridimensional del problema. Las discretizaciones empleadas para los casos de pequeño y gran espesor del prisma aparecen en las fig. 5.13 y 5.14 respectivamente, y coinciden con las empleadas para materiales transversalmente isótropos.

A continuación se resumen los resultados obtenidos con cada configuración y posteriormente se discutirán los aspectos más relevantes en un apartado de conclusiones.

5.5.5.1. Grieta recta central

En la fig. 5.15 se representa un esquema del tipo de problema que se analiza.

Para este tipo de problema, aunque con una geometría algo diferente ($H = W = 4t = 2a$), existen resultados previos obtenidos por Sanz et al (2005) utilizando una formulación clásica del MEC a partir de la solución fundamental de Deeg (1980). En la fig. 5.16 se comparan los desplazamientos extendidos a lo largo del plano medio de la grieta obtenidos por Sanz et al (2005) con los obtenidos con la formulación desarrollada en esta tesis. Se puede observar como la diferencia en los resultados es inapreciable (inferior al 1%). En la tabla 5.4 aparecen los valores de los FITEs obtenidos a partir de estos desplazamientos extendidos. Los valores obtenidos presentan

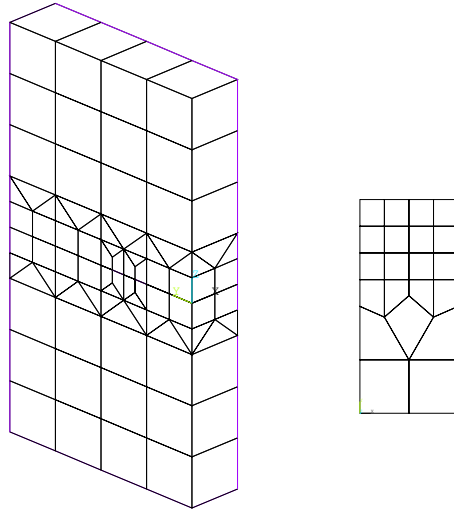


Figura 5.13: Discretización del prisma de pequeño espesor ($t/W=0.25$) y de la superficie de la grieta

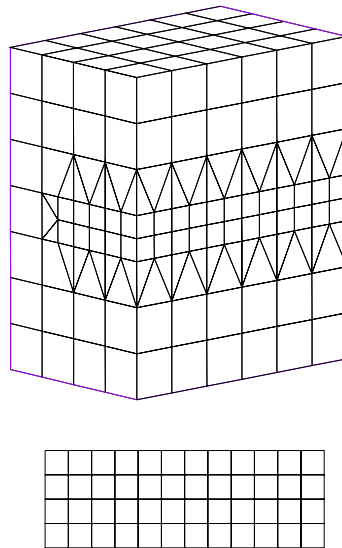


Figura 5.14: Discretización del prisma de gran espesor ($t/W=1.5$) y de la superficie de la grieta

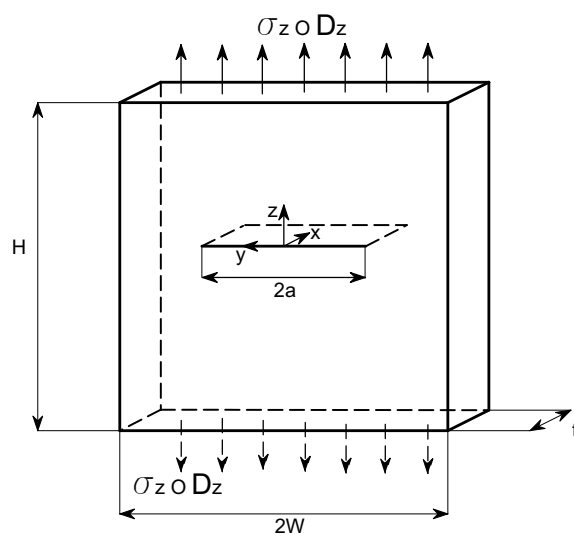


Figura 5.15: Esquema del problema de grieta recta central ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

un alto grado de acuerdo entre sí. Al igual que ocurre en el ejemplo anterior, los valores de los FITEs “cruzados” presentan valores muy bajos, y en su proceso de evaluación existen imprecisiones debido a problemas de cancelación numérica, por lo que en el caso del factor K_I bajo carga eléctrica (K_I^{elec}) existen diferencias importantes en los valores obtenidos con ambas formulaciones del MEC, a pesar de que las diferencias en los desplazamientos utilizados para evaluar los FITEs son muy pequeñas.

Carga mecánica	$K_I/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$	$K_{IV}/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$ (C/GN)
Sanz et al (2005)	1.81	0.162
FMMEC	1.85	0.1678
Carga eléctrica	$K_I/(D_z\sqrt{\pi a})$ (GN/C)	$K_{IV}/(D_z\sqrt{\pi a})$
Sanz et al (2005)	0.017	1.16
FMMEC	0.036	1.15

Tabla 5.4: FITEs para grieta central en deformación plana ($H/W = 1$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$)

En cuanto a la geometría original que nos ocupa ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$), se recogen en la fig. 5.17 los valores de los factores K_I y K_{IV} obtenidos simulando condiciones de tensión plana y

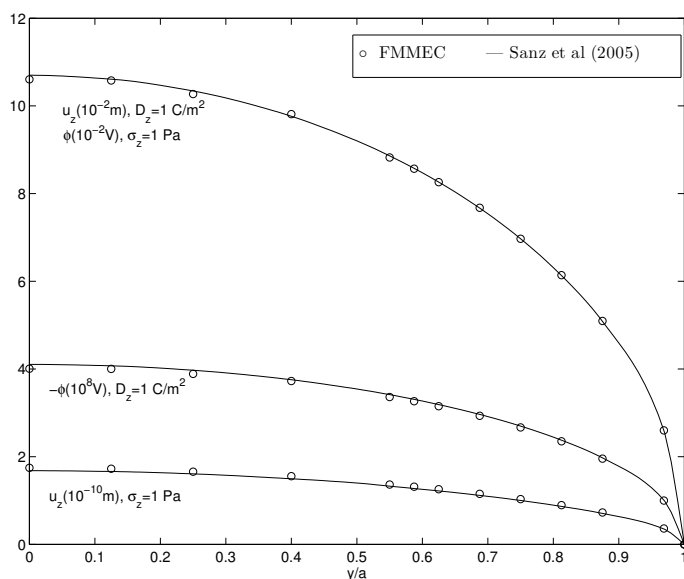


Figura 5.16: Desplazamientos en grieta recta central en prisma ($H/W = 1$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$)

deformación plana. Al igual que ocurría en materiales transversalmente isótropos, se observa un valor ligeramente más alto en el caso de tensión plana, lo cual es lógico por la mayor restricción a la deformación que existe en el caso de deformación plana. También se observa en el caso de tensión plana una ligera caída en el valor de los FITEs en las proximidades del borde libre, como era de esperar. Resulta más significativo el hecho de que el factor K_{IV} no presenta apenas variación a lo largo del espesor y su valor es independiente de si se trata de deformación o tensión plana.

Los valores de K_I^{elec} y K_{IV}^{mec} son muy bajos, y en el caso de K_I^{elec} se obtienen valores muy dispares entre la situación de deformación y tensión plana. Esto es debido a los ya comentados problemas de cancelación existentes en su evaluación, ya que las diferencias en los desplazamientos extendidos obtenidos en ambas situaciones son muy pequeñas.

La evolución a lo largo del espesor de los FITEs obtenidos para el mismo problema pero con mayor espesor del prisma se presentan en la fig. 5.18. La evolución del factor K_I^{mec} es similar a la que se obtiene en materiales no piezoeléctricos (capítulo 4), con una evolución creciente desde el centro de la pieza hacia los extremos y con una disminución brusca en las cercanías de la intersección del frente de grieta con la superficie libre del contorno externo.

El factor K_{IV}^{elec} no presenta apenas variación a lo largo del espesor y tan solo se observa una

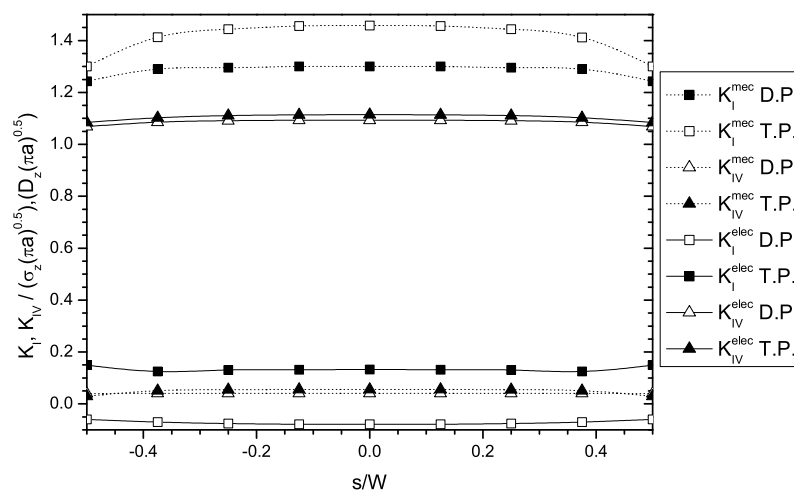


Figura 5.17: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de pequeño espesor ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$) con grieta recta central en 'deformación plana' (D.P.) y 'tensión plana' (T.P.)

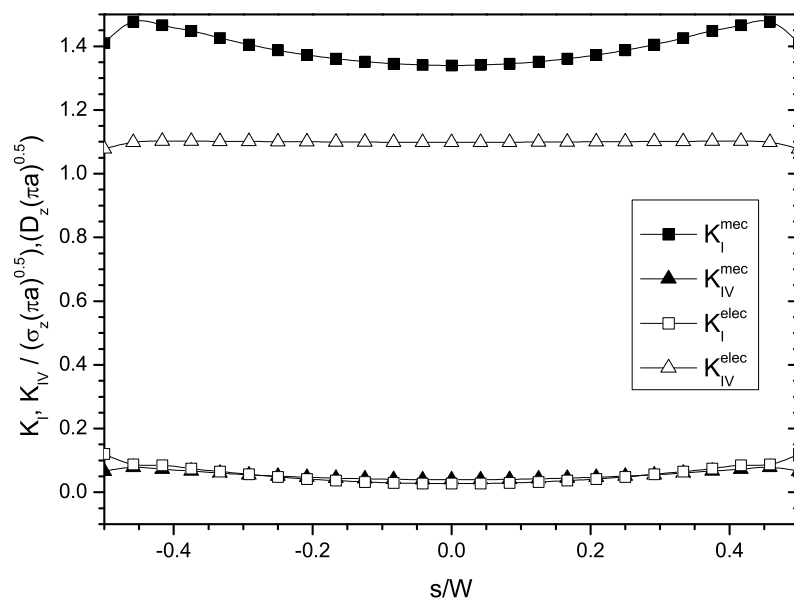


Figura 5.18: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con grieta recta central.

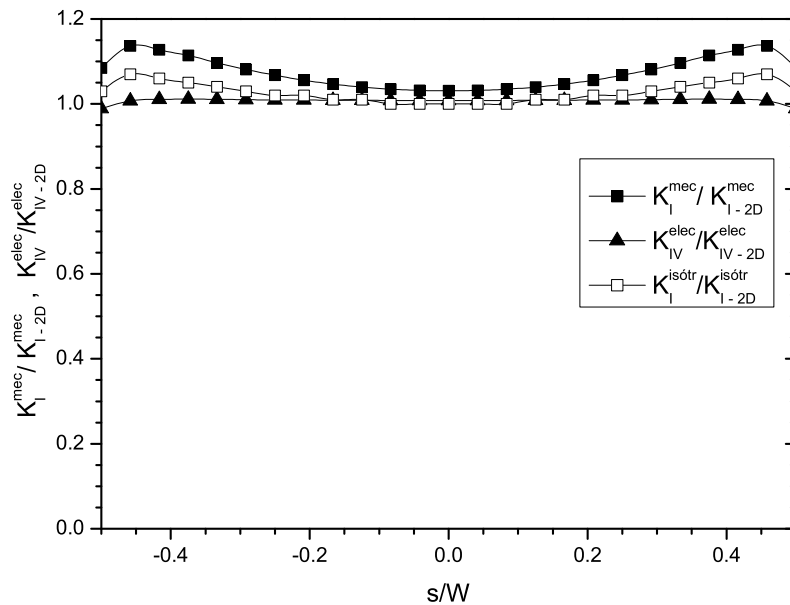


Figura 5.19: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con grieta recta central, adimensionalizados con los FITEs en deformación plana

ligera disminución de su valor en la intersección con la superficie libre.

Los valores de K_I^{elec} y K_{IV}^{mec} bajo carga mecánica presentan unos valores muy bajos y con poca variación a lo largo del espesor. Lo más significativo es un aumento del valor de K_I^{elec} en las proximidades del borde libre. Esto querría decir que el grado de la singularidad de las tensiones en esa zona es mayor de $1/\sqrt{r}$, al contrario de lo ocurre cuando se aplica carga mecánica.

En la fig. 5.19 aparece la evolución a lo largo del espesor de los FITEs adimensionalizados con el valor obtenido en el centro del prisma de pequeño espesor bajo condición de deformación plana. Se incluye la misma representación para el caso de un material isótropo, con el objeto de comparar la evolución obtenida de la misma manera que se hizo en el capítulo 4 con materiales transversalmente isótropos. No se consideran los valores de K_I^{elec} y K_{IV}^{mec} por el hecho de que existe gran incertidumbre sobre su valor exacto, y a que éste es lo suficientemente pequeño como para pensar en su poca influencia al aplicar un criterio de fractura.

Se puede observar una evolución similar del factor K_I^{mec} con respecto al caso isótropo, aunque con valores más elevados con respecto al caso 2D. Sin embargo, en el caso del factor K_{IV}^{elec} se observa de nuevo como no se aprecia apenas el carácter tridimensional del problema, existiendo

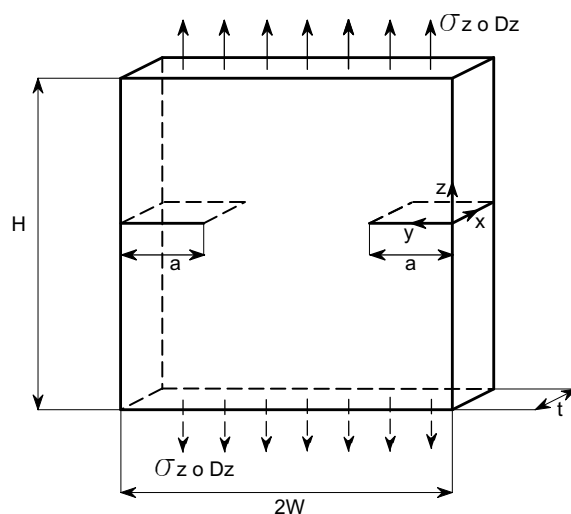


Figura 5.20: Esquema del problema de doble grieta recta de borde ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$)

tan solo una pequeña disminución de su valor por efecto del borde libre.

5.5.5.2. Doble grieta recta de borde

El esquema de este problema se muestra en la fig. 5.20.

Para este problema, pero con unas proporciones geométricas algo distintas a las que aquí se analizan ($H = W = 4t = 2a$), también existen resultados previos obtenidos por Sanz et al (2005). Los desplazamientos extendidos sobre una de las grietas se recogen en la fig. 5.21, y se observa de nuevo un excelente grado de acuerdo entre los resultados obtenidos con ambas formulaciones del MEC. Los FITEs obtenidos a partir de estos desplazamientos se recogen en la tabla 5.5. De nuevo existe un alto grado de acuerdo en los valores obtenidos, salvo en los casos ya comentados en los que el pequeñas diferencias en los desplazamientos dan lugar a grandes diferencias en los valores del FIT, como es el caso de K_I^{elec} .

Para los casos de tensión y deformación plana se representa la evolución de los FITEs en la fig. 5.22. Los resultados son muy similares a los obtenidos en el ejemplo anterior. Para la pieza de mayor espesor y sus valores adimensionalizados con respecto al caso de deformación plana los resultados se recogen en las figs. 5.23 y 5.24 respectivamente. Las observaciones realizadas para la grieta central son de aplicación para este caso de doble grieta de borde. La diferencia más

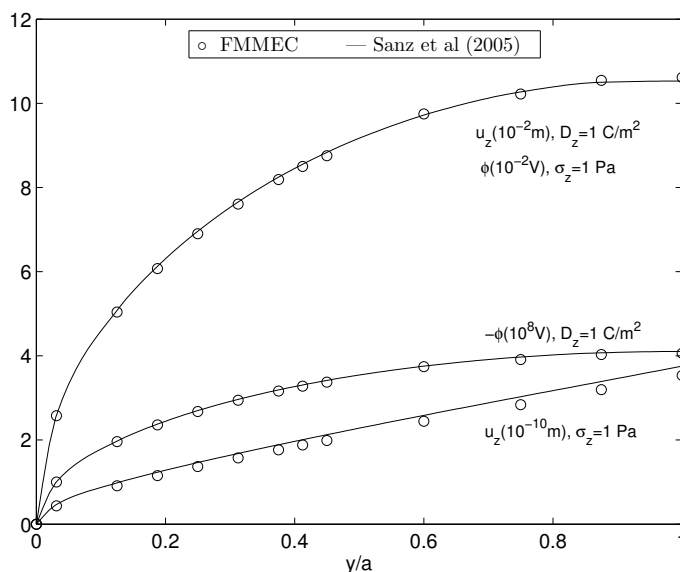


Figura 5.21: Desplazamientos en doble grieta de borde ($H/W = 1$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$)

relevante es que el valor de K_I^{mec} muestra ahora una evolución decreciente desde el centro de la pieza hacia el borde libre, al igual que ocurre en materiales no piezoeléctricos.

5.5.5.3. Grieta de borde

El esquema del problema que se analiza en este apartado aparece en la fig. 5.12. En este caso no se conocen resultados previos obtenidos por otros autores para una geometría de este tipo.

Las figs. 5.25, 5.26 y 5.27 son equivalentes a las de los apartados anteriores y de ellas se pueden extraer el mismo tipo de conclusiones. Cabe destacar el gran aumento del valor del factor K_I^{mec} con respecto a los casos anteriores. Este aumento también se observa en materiales no piezoeléctricos, y es debido al hecho de que con esta configuración el espécimen es menos rígido y la grieta se abre con mayor facilidad. Sin embargo, y tal y como se observó en el capítulo 4 con materiales transversalmente isótropos, este aumento varía mucho con las propiedades del material. En este caso, solo se han obtenido resultados para el material PZT4, pero es de esperar que con otros materiales se produzcan distintas variaciones en el valor de K_I^{mec} .

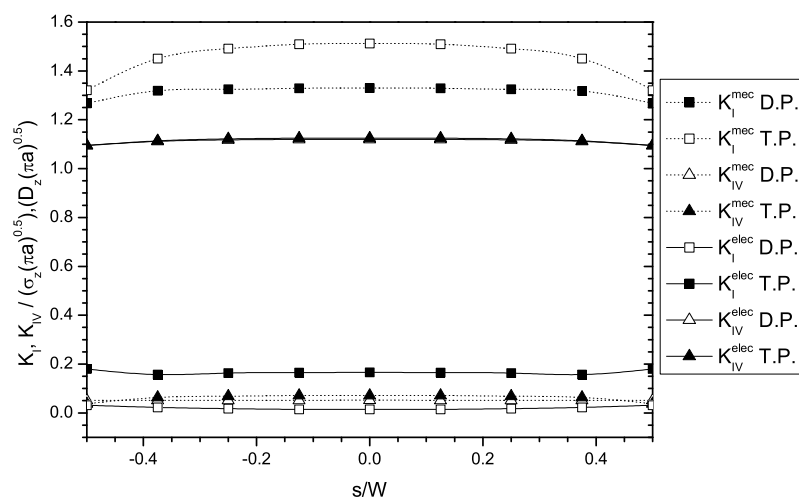


Figura 5.22: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de pequeño espesor ($H/W = 1,75$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$) con doble grieta de borde en 'deformación plana' (D.P.) y 'tensión plana' (T.P.)

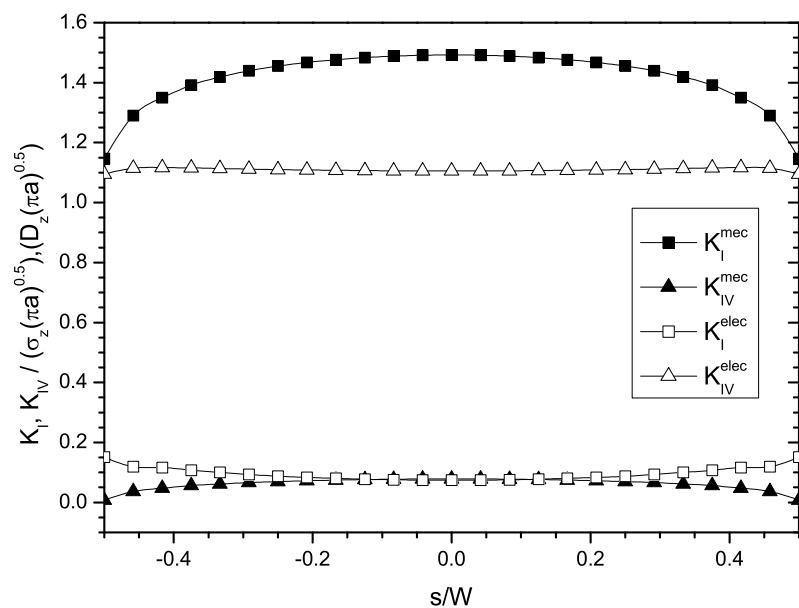


Figura 5.23: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con doble grieta de borde.

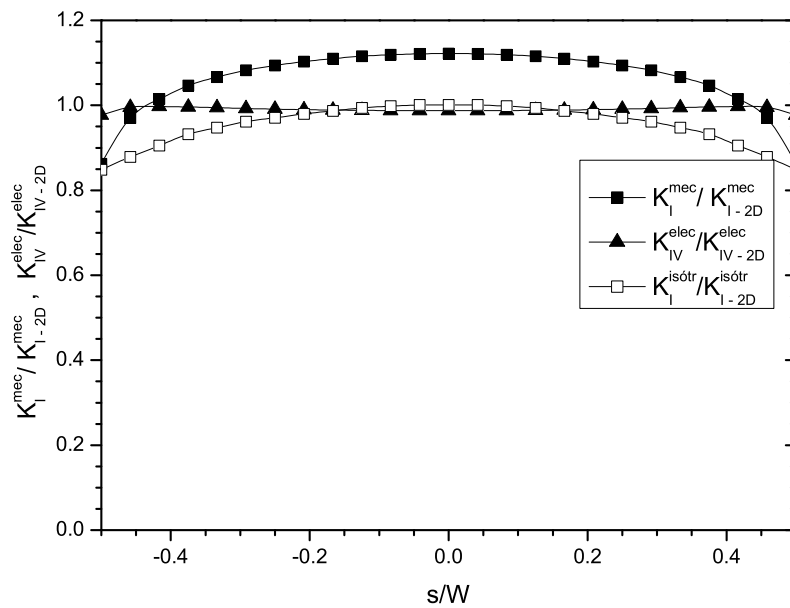


Figura 5.24: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con doble grieta de borde, adimensionalizados con los FITEs en deformación plana.

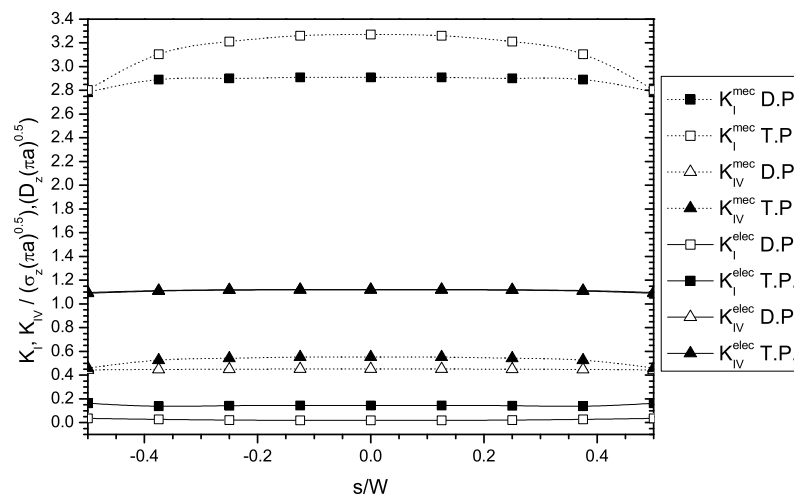


Figura 5.25: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de pequeño espesor ($t/W = 0,25$) con grieta de borde en 'deformación plana' (D.P.) y 'tensión plana' (T.P.)

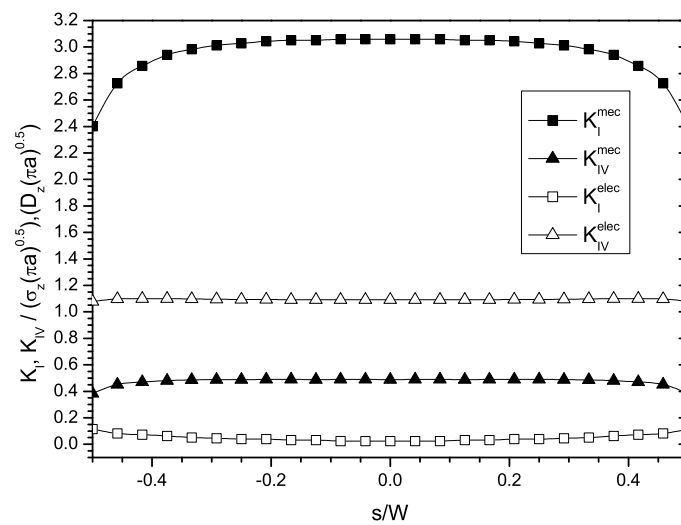


Figura 5.26: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con grieta de borde.

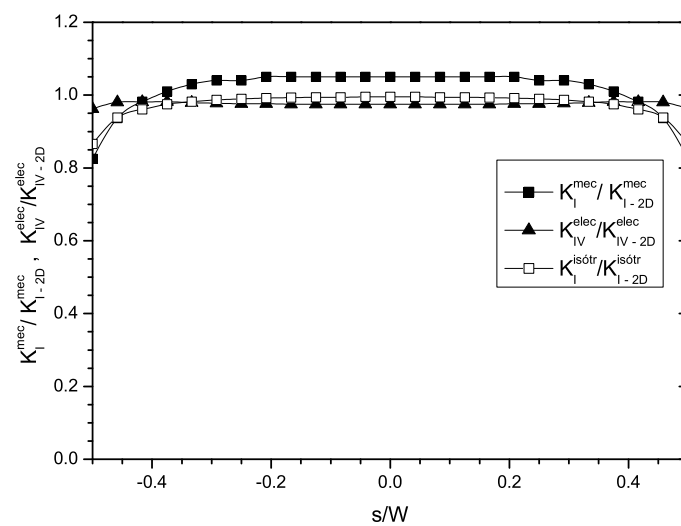


Figura 5.27: Evolución a lo largo del espesor de los FITEs en prisma de gran espesor ($t/W = 1,5$) con grieta de borde, adimensionalizados con los FITEs en deformación plana.

Carga mecánica	$K_I/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$	$K_{IV}/(\sigma_z\sqrt{\pi a})$ (C/GN)
Sanz et al (2005)	2.29	0.271
FMMEC	2.17	0.255
Carga eléctrica	$K_I/(D_z\sqrt{\pi a})$ (GN/C)	$K_{IV}/(D_z\sqrt{\pi a})$
Sanz et al (2005)	0.018	1.16
FMMEC	0.033	1.15

Tabla 5.5: FITEs para doble grieta de borde en deformación plana ($H/W = 1$, $W/a = 2$, $t/W = 0,25$)

5.5.5.4. Conclusiones

Del análisis de las distintas configuraciones consideradas para una grieta recta de borde contenida en un prisma se pueden extraer una serie de conclusiones interesantes.

En primer lugar, hay que reseñar que la formulación ha podido ser de nuevo validada con éxito por comparación con los resultados obtenidos previamente por Sanz et al (2005) a partir de una formulación clásica del MEC y empleando una solución fundamental distinta a la implementada en esta tesis. Tan solo se han encontrado algunas diferencias significativas en los valores “cruzados” de los FITEs (K_I^{elec} y K_{IV}^{mec}), lo cual es debido a fenómenos de cancelación numérica en el proceso de evaluación de los FITEs a partir de los desplazamientos de los nodos a un cuarto. Estas diferencias también se han podido apreciar entre situaciones de deformación y tensión plana, cuando en estas condiciones las diferencias deberían de ser tan pequeñas como en el resto de FITEs, tal y como ocurre con otros materiales no piezoeléctricos (véase capítulo 4). El hecho de que estos valores sean muy pequeños, y su difícil evaluación numérica, hace pensar que su influencia sea escasa a la hora de aplicar algún criterio de fractura. Para comprobar este punto sería necesario la obtención de otros parámetros asociados a la fractura como son la tasa de liberación de energía (total, de deformación mecánica o local) a partir de los FITEs obtenidos y estudiar su influencia en distintos materiales, así como comparar los resultados obtenidos con los de otros autores. En el caso de que estos factores “cruzados” fuesen relevantes a la hora de aplicar un criterio de fractura, sería preciso solventar los problemas numéricos asociados al proceso de evaluación de los FITEs.

Por otro lado, a partir del análisis de los resultados obtenidos en los problemas “2D”, se puede

decir que en el factor K_I^{mec} hay una mayor diferencia entre el comportamiento en deformación y tensión plana con respecto al comportamiento observado en materiales no piezoeléctricos. Por contra, el valor de K_{IV}^{elec} apenas varía entre las situaciones de deformación y tensión plana, y es prácticamente constante a lo largo del espesor en todos los casos, siendo el efecto del borde libre prácticamente inapreciable.

Aunque los valores de K_I^{elec} obtenidos en todos los casos sean muy bajos, resulta significativo que este factor muestra una tendencia inversa a la encontrada hasta ahora en las proximidades del borde libre. El aumento de este factor en esta zona hace pensar que las tensiones bajo carga eléctrica muestren una singularidad mayor de $1/\sqrt{r}$. Por el contrario, en la evolución de K_I^{mec} y K_{IV}^{mec} se observa una disminución de su valor en las cercanías del borde libre. A pesar de que las discretizaciones empleadas no son excesivamente refinadas en estas zonas, se puede concluir a la vista de estos resultados que los campos de tensiones y desplazamiento eléctrico bajo carga mecánica muestran un grado de singularidad menor que $1/\sqrt{r}$, al igual que ocurre con materiales no piezoeléctricos (véase el capítulo 4 de esta tesis), por lo que su valor ha de tender a cero en las proximidades del borde libre. No obstante, el autor no conoce estudios previos relativos al grado de singularidad del campo de tensiones y desplazamiento eléctrico en las proximidades de un borde libre en el frente de grieta, por lo que para extraer conclusiones más relevantes sobre este aspecto sería necesario disponer de discretizaciones más refinadas en estas zonas, considerar distintos tipos de materiales, distintas geometrías, etc.

Finalmente, hay que destacar un resultado que resulta muy llamativo, y es el hecho de que el factor K_{IV}^{elec} tiene el mismo valor en cada una de las condiciones geométricas analizadas, mientras que el resto de factores presentan variaciones significativas de un caso a otro. Esto debe estar relacionado también con el hecho observado de que bajo la aplicación de carga eléctrica la pieza apenas sufre flexión, es decir, los desplazamientos según z , así como el potencial eléctrico, varían solo significativamente con respecto a z , salvo la zona próxima a la grieta. A falta de un estudio con un mayor número de ejemplos y otras configuraciones geométricas, así como la consideración de otro tipo de materiales, se puede decir que el factor K_I^{mec} es más sensible a variaciones geométricas y condiciones de contorno que en el caso no piezoeléctrico, mientras que el factor K_{IV} es muy poco sensible a estos factores.

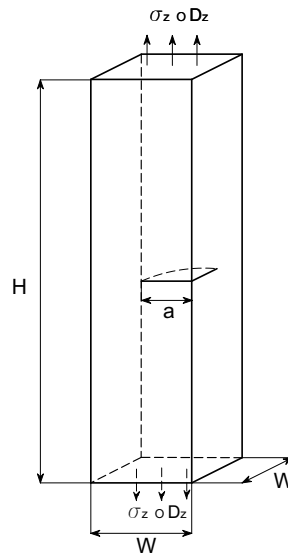


Figura 5.28: Esquema del problema de pieza prismática con grieta en esquina en forma de 1/4 de círculo.

5.5.6. Barra prismática con grieta de esquina en forma de un cuarto de círculo

Este problema ya fue analizado también en el capítulo 4 y sirvió además para realizar un ajuste de parámetros de la formulación. La geometría del problema y la discretización empleada se muestra de nuevo en las fig. 5.28 y 5.29. La única diferencia con respecto a la situación del capítulo 4 es que ahora se considera también la acción de una distribución de carga eléctrica en las superficies extremas del prisma, además de la carga mecánica. De las distintas discretizaciones manejadas para este problema en el capítulo 4, solo se considerará aquí una de ellas para una mayor claridad en la representación de los resultados, aunque se ha comprobado que se obtienen resultados muy similares con todas ellas.

La evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta se muestra en la fig. 5.30. Se observa una evolución del factor K_I^{mec} del mismo tipo que la que se obtiene en materiales no piezoeléctricos (véase capítulo 4), con un valor mínimo en la parte central de la pieza y creciente hacia los extremos. De hecho, adimensionalizando este factor con respecto a su valor en el punto medio del frente de grieta ($\theta = 45^\circ$), se obtiene una evolución muy parecida (algo más acusada en el caso piezoeléctrico) a la que se obtuvo para un material isótropo en el capítulo 4 (fig. 5.31).

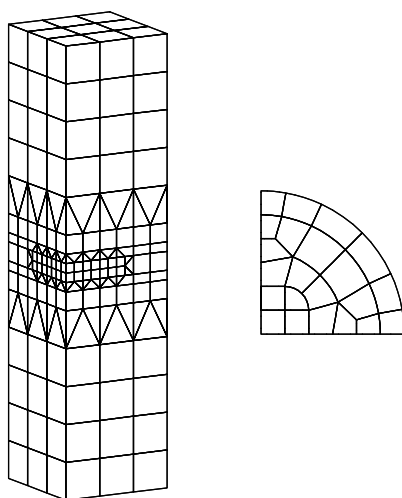


Figura 5.29: Discretización empleada en problema de grieta de esquina.

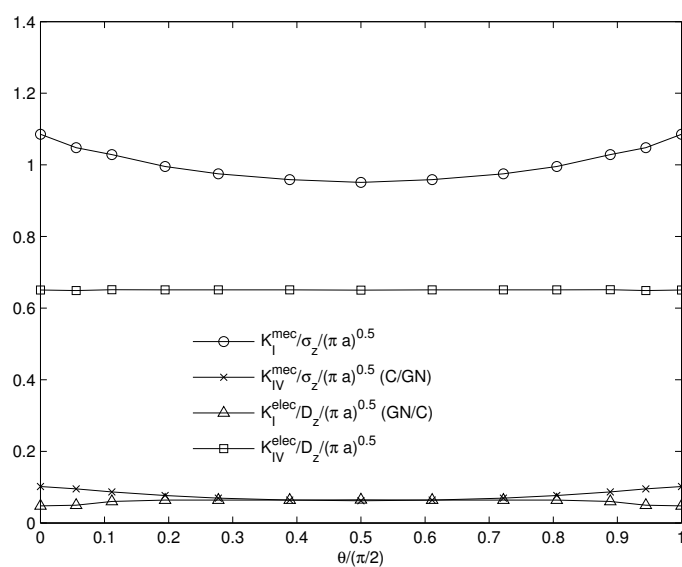


Figura 5.30: Evolución a lo largo del frente de grieta de los FITEs en prisma con grieta de esquina en forma de 1/4 de círculo.

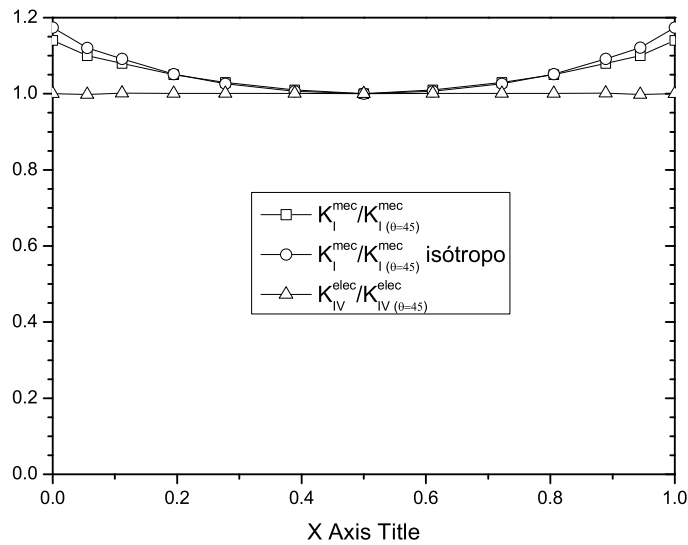


Figura 5.31: Evolución a lo largo del frente de grieta de los FITEs en prisma con grieta de esquina en forma de 1/4 de círculo adimensionalizados respecto a su valor en el punto medio del frente de grieta.

Por otro lado, y al igual que ocurría en el caso del prisma con grieta recta de borde, el valor del factor K_{IV}^{elec} apenas varía a lo largo del frente de grieta (figs. 5.30 y 5.31), lo cual resulta muy llamativo. Igualmente, cuando la pieza es sometida a carga eléctrica, apenas se aprecia deformación de flexión en el espécimen. Es decir, se obtienen de nuevo unos valores de desplazamientos según z y de desplazamiento eléctrico que apenas varían con respecto a las direcciones x y y y solo varían significativamente con respecto a z (salvo, lógicamente, en las zonas próximas a la grieta).

Por tanto, se concluye también de estos resultados que el factor K_I^{mec} es más sensible a la geometría, condiciones de contorno y efecto tridimensional que en el caso no piezoeléctrico, mientras que el factor K_{IV}^{elec} es muy poco sensible a estas circunstancias. No obstante, sería necesario un estudio sobre distintos materiales, geometrías y comparación con problemas bidimensionales para sacar conclusiones más determinantes sobre este aspecto.

Respecto a los FITEs 'cruzados' (K_I^{elec} y K_{IV}^{mec}) se obtienen de nuevo valores muy bajos, y en el caso de K_I^{elec} se aprecia una ligera tendencia decreciente desde el centro de la pieza hacia los extremos, lo cual supone una tendencia inversa a la obtenida con el resto de factores, como

también ocurría en el caso del prisma con grieta recta de borde.

En cuanto al efecto del borde libre y el grado de singularidad de los campos de tensiones y desplazamiento eléctrico en sus inmediaciones, y al igual que ocurría con materiales no piezoeléctricos (véase el capítulo 4), no se aprecia una tendencia significativa en ningún caso que lleve a extraer algún tipo de conclusión, ni siquiera contrastando los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones presentadas en el capítulo 4.

Capítulo 6

Conclusiones y desarrollos futuros

*“Hace tiempo estaba indeciso,
pero ahora ya no estoy tan seguro”*

Boscoe Pertwee, desconocido autor del siglo XVIII,
citado por Umberto Eco en *Kant y el ornitorrinco* (1997)

En esta tesis se ha analizado el comportamiento de sólidos transversalmente isótropos y piezoeléctricos con grietas en su interior. Para ello se ha utilizado una formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno, que se ha mostrado como una herramienta numérica robusta y precisa para abordar este tipo de problemas.

En primer lugar, se han mejorado aspectos computacionales de la formulación, necesarios para afrontar con garantías problemas cada vez más complejos y exigentes desde un punto de vista numérico. Se ha mejorado la evaluación de integrales cuasi singulares de orden $1/r^3$, implementando la transformación de Telles (1987) y generando un método adaptativo de integración sencillo pero eficiente. Así se ha dado respuesta a uno de los desarrollos futuros planteados originalmente en la tesis de Ariza (2002).

La aplicación de la formulación mejorada a problemas de Mecánica de la Fractura en materiales transversalmente isótropos ha dado excelentes resultados. Se han analizado problemas complejos con diversos materiales, y se han analizado los resultados obtenidos con cada uno de ellos. Se ha analizado el carácter tridimensional de algunos problemas concretos y se han encontrado ciertas analogías en los resultados obtenidos independientemente de las constantes elásticas

del material, incluso con materiales isótropos. Sin embargo, también se han encontrado respuestas claramente diferenciadas entre los distintos materiales ante variaciones geométricas del problema. Se ha realizado además un análisis de la influencia de un borde libre sobre el grado de singularidad del campo de tensiones, es decir, qué ocurre en distintos materiales cuando el frente de grieta intersecta a una superficie del contorno libre de tensiones.

La formulación mixta del MEC para materiales transversalmente isótropos se ha extendido al caso dinámico en el dominio de la frecuencia y dominios finitos. Para ello ha sido necesario realizar variaciones significativas en el código de elementos de contorno, siendo necesario la optimización en la generación de una base de datos que permita evaluar la solución fundamental dinámica armónica de Wang y Achenbach (1995). Con este avance se ha podido obtener por primera vez la respuesta en frecuencia de distintos especímenes con comportamiento transversalmente isótropo, encontrándose una gran dependencia en la respuesta frente a las propiedades del material.

Finalmente se ha desarrollado por primera vez una formulación mixta del MEC en 3D para problemas de Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos. Para ello se ha derivado y combinado dos veces según la ley de comportamiento del material la solución fundamental en desplazamientos de Dunn y Wienecke (1996) para materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos, y se han obtenido los núcleos necesarios para plantear la EIC en desplazamientos y en tracciones.

La solución de Dunn y Wienecke (1996) guarda grandes similitudes con la obtenida por Pan y Chou (1976) para materiales transversalmente isótropos, empleada en esta tesis y previamente por Ariza (2002). En los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares se han encontrado el mismo tipo de términos, por lo que, una vez identificados dichos términos, se ha procedido a su regularización aplicando fundamentalmente el teorema de Stokes, de manera análoga al proceso llevado a cabo por Ariza (2002).

Para cumplir con los requerimientos de continuidad en los puntos de colocación, se ha aplicado el Método de Colocación Múltiple, y se han aprovechado todas las mejoras computacionales desarrolladas anteriormente (transformación de Telles (1987) y método adaptativo de integración).

Para la evaluación de los Factores de Intensidad de Tensión Extendidos (FITEs), se ha llevado a cabo con éxito una extensión a 3D del método de evaluación empleado por García-Sánchez (2005) en 2D, empleando elementos a un cuarto en el frente de grieta. Con esta técnica, se han conseguido evaluar eficientemente los FITEs a partir del desplazamiento de apertura de grieta y

salto de potencial eléctrico en los nodos a un cuarto.

Con la formulación desarrollada se han obtenido resultados para un buen número de ejemplos numéricos de interés, considerando tanto la acción de una carga mecánica (tracción impuesta) como una excitación eléctrica (desplazamiento eléctrico o densidad superficial de carga impuesta). La formulación ha sido validada mediante comparación de los resultados obtenidos para algunos problemas con resultados previos analíticos o numéricos, obteniéndose siempre un elevado grado de acuerdo. Posteriormente se han obtenido resultados para algunos problemas para los que no existen resultados previos en la bibliografía que sean conocidos por el autor.

Con los problemas analizados se ha estudiado la influencia de la presencia de un borde libre, así como el carácter tridimensional de la evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta. Los resultados para el FITE asociado a las tensiones mecánicas (K_I) bajo carga mecánica son muy similares a los obtenidos en materiales no piezoeléctricos. Por el contrario, el FITE asociado al desplazamiento eléctrico (K_{IV}) no parece ser influenciado por la existencia de un borde libre, y también parece estar muy poco afectado por el carácter tridimensional del problema. Parece razonable pensar que este hecho guarda relación con el carácter “monodimensional” observado en el campo de desplazamientos y potencial eléctrico obtenido al aplicar una carga eléctrica. Por otro lado, los FITEs denominados como “cruzados” (K_I bajo carga eléctrica y K_{IV} bajo carga mecánica) presentan unos valores muy bajos en todos los casos.

6.1. Desarrollos futuros

Para avanzar en el estudio del comportamiento dinámico de materiales transversalmente isótropos, se deberían analizar los distintos modelos de amortiguamiento existentes en la bibliografía e introducirlos en la formulación. Se podría estudiar así el efecto del amortiguamiento en materiales con distintas propiedades. Además, con la función de repuesta en frecuencia obtenida incluyendo el amortiguamiento, se podría obtener también la respuesta temporal ante una excitación dinámica conocida en el dominio del tiempo, aplicando la transformada rápida de Fourier, como ya hizo Ariza (2002) en materiales isótropos.

En cuanto a los materiales piezoeléctricos, dado que se trata de un campo de investigación en el que quedan muchos aspectos por abarcar por la comunidad científica, y dado que se dispone de una potente herramienta numérica para analizar problemas en 3D, se plantea un gran número de posibles avances interesantes.

En primer lugar, es necesario estudiar la influencia de los FITEs “cruzados” en la aplicación de criterios de fractura. Aunque no haya ningún criterio de fractura claramente establecido aún para estos materiales, se deberá analizar la importancia de estos factores sobre las distintas tasas de liberación de energía definidas (mecánica, total o local). En caso de que su influencia sea significativa, se deberá revisar el procedimiento de obtención de estos factores para evitar los problemas de cancelación numérica asociados a su proceso de evaluación, y que llevan a obtener resultados dispares con respecto a otros autores, por resultar excesivamente dependientes de pequeñas variaciones en los valores del desplazamiento de apertura de grieta o del salto de potencial.

Al igual que en materiales transversalmente isótropos, el efecto tridimensional de diversos problemas, así como el efecto del borde libre, necesita de un estudio más profundo, con discretizaciones más refinadas que den información más precisa. En materiales piezoeléctricos resulta también de interés profundizar en las causas que llevan a que la evolución obtenida del factor K_{IV} bajo carga eléctrica en los distintos problemas analizados sea prácticamente independiente del carácter tridimensional del problema y fundamentalmente condicionado por el tamaño de la grieta. El objetivo de estos estudios sería extraer finalmente conclusiones relevantes que pudieran simplificar la resolución de casos prácticos.

En este sentido, sería también de interés el estudio de la variación de la respuesta de un material transversalmente isótropo conforme se incrementa el acoplamiento eléctrico. Otro aspecto relacionado que merecería la pena analizar y que ha despertado el interés de la comunidad científica es la capacidad que puede tener la existencia de un campo eléctrico en retardar el crecimiento de una grieta.

Otro tema de gran importancia es el estudio numérico de la influencia que tiene la consideración de distintos tipos de condiciones de contorno en las superficies de la grieta. Para ello, sería necesario modificar ligeramente el procedimiento de montaje del sistema de ecuaciones y emplear un algoritmo distinto para su resolución, ya que el problema pasaría a ser no lineal.

También cabría extender la formulación al caso dinámico en el dominio de la frecuencia. Esto se podría hacer de forma similar al caso transversalmente isótropo, empleando para ello la solución fundamental dinámica en el dominio del tiempo obtenida por Wang y Zhang (2005) para materiales piezoeléctricos, una vez transformada al dominio de la frecuencia mediante una transformada de Fourier. La metodología empleada en la obtención de esta solución fundamental es análoga a la empleada por Wang y Achenbach (1995) para el caso transversalmente isótropo, guardando por tanto en sus expresiones muchas analogías. No obstante, y dado que en el caso

piezoeléctrico la complejidad y coste computacional para la evaluación de la solución fundamental será aun mayor, sería recomendable el empleo de técnicas simplificadas de evaluación, del tipo de la solución de campo lejano empleada por Sáez (1997) en materiales transversalmente isótropos.

Finalmente, y según los últimos avances tecnológicos, sería también interesante extender la formulación al caso magneto-electro-elástico, para lo que habría que añadir nuevas variables asociadas al campo y flujo magnéticos. Este tipo de comportamiento, en el que además del acoplamiento electro-elástico existe un acoplamiento con el campo magnético, se consigue mediante la fabricación de materiales compuestos formados por fases piezoeléctricas y piezomagnéticas, no existiendo el acoplamiento entre los tres fenómenos en ninguna de las fases por separado. Existen también materiales naturales que exhiben el acoplamiento magneto-electro-elástico, pero al igual que ocurre con los materiales piezoeléctricos, es necesario recurrir a materiales artificiales que exhiban un nivel de acoplamiento suficientemente elevado para emplearlos en aplicaciones prácticas. Estos nuevos materiales están siendo desarrollados para su aplicación en elementos de control activo o estructuras inteligentes. Para extender la formulación mixta del MEC en 3D a este tipo de materiales se podría emplear la solución fundamental de Pan (2002) para el caso estático y la de Rojas-Díaz et al (enviado) para el caso dinámico armónico.

Apéndice A

Solución fundamental de Dunn y Wienecke. Expresiones originales y derivadas

La solución fundamental de Dunn y Wienecke (1996) para materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos es similar a la de Pan y Chou (1976) para materiales transversalmente isótropos no piezoeléctricos. El procedimiento de obtención es idéntico y las expresiones finales guardan muchas similitudes.

Las expresiones de la solución fundamental en desplazamientos que aparecen en el trabajo de Dunn y Wienecke (1996) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
U_{11} &= D_0 \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{y^2}{R_0 R_0^{*2}} \right) - \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left(\frac{1}{R_i^*} - \frac{x^2}{R_i R_i^{*2}} \right) \\
U_{22} &= D_0 \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{x^2}{R_0 R_0^{*2}} \right) - \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left(\frac{1}{R_i^*} - \frac{y^2}{R_i R_i^{*2}} \right) \\
U_{12} = U_{21} &= D_0 \frac{xy}{R_0 R_0^{*2}} + \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \frac{xy}{R_i R_i^{*2}} \\
U_{IJ} = U_{JI} &= \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{x_J}{R_i R_i^*} \quad \text{para } I = 3,4; J = 1,2 \\
U_{IJ} = U_{JI} &= \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{1}{R_i} \quad \text{para } I = 3,4; J = 3,4
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Siendo:

- x, y, z (o x_1, x_2 y x_3) son las coordenadas relativas del punto de observación respecto al punto de colocación (la dirección z coincide con el eje de simetría del material y el plano de isotropía coincide con el definido por las direcciones x - y)

- $D_0 = \frac{1}{4\pi C_{44} \nu_0}$

- $\nu_0 = \sqrt{C_{66}/C_{44}}$

- Los parámetros ν_i ($i=1,3$) se definen a continuación.

$-1/\nu_1^2, -1/\nu_2^2$ y $-1/\nu_3^2$ son las raíces de la ecuación cúbica siguiente:

$$s^3 + \frac{a}{d}s^2 + \frac{b}{d}s + \frac{c}{d} = 0 \text{ siendo}$$

$$a = C_{11}(\epsilon_{11}C_{33} + 2e_{15}e_{33}) - \epsilon_{11}C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) + C_{44}(\epsilon_{33}C_{11} + e_{31}^2) - 2e_{15}C_{13}(e_{31} + e_{15})$$

$$b = C_{33}(\epsilon_{11}C_{44} + \epsilon_{33}C_{11} + e_{31}(e_{31} + e_{15})) - C_{13}\epsilon_{33}(C_{13} + 2C_{44}) + (e_{31} + e_{15})(C_{33}e_{15} - 2C_{13}e_{33}) + e_{33}(C_{11}e_{33} - 2C_{44}e_{31})$$

$$c = C_{44}(\epsilon_{33}C_{33} + e_{33}^2)$$

$$d = C_{11}(\epsilon_{11}C_{44} + e_{15}^2)$$

- $R_i = \sqrt{x^2 + y^2 + (\nu_i z)^2}$

- $R_i^* = R_i + \nu_i z$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lambda_{i1} = \lambda_{i2} &= [(C_{13} + C_{44}) e_{33} - C_{33} (e_{31} + e_{15})] \nu_i^3 + (C_{44} e_{31} - C_{13} e_{15}) \nu_i \\ \lambda_{i3} &= -C_{44} e_{33} \nu_i^4 - [e_{31} (C_{13} + C_{44}) - e_{33} C_{11} + e_{15} C_{13}] \nu_i^2 - e_{15} C_{11} \\ \lambda_{i4} &= C_{44} C_{33} \nu_i^4 + [C_{13} (C_{13} + 2C_{44}) - C_{11} C_{33}] \nu_i^2 + C_{44} C_{11} \\ \blacksquare D_1 &= \frac{(\lambda_{24} \lambda_{33} - \lambda_{34} \lambda_{23})}{C_{44}} \cdot \frac{1}{4\pi\gamma_t} \end{aligned}$$

siendo $\gamma_t = \nu_1 \lambda_{11} (\lambda_{34} \lambda_{23} - \lambda_{24} \lambda_{33}) + \nu_2 \lambda_{21} (\lambda_{14} \lambda_{33} - \lambda_{34} \lambda_{13}) + \nu_3 \lambda_{31} (\lambda_{24} \lambda_{13} - \lambda_{14} \lambda_{23})$

El resto de términos D_i se hallan permutando cíclicamente el índice i de los términos ν_i y λ_{iJ} (no es necesario la permutación en el parámetro γ_t).

$$\begin{aligned} \blacksquare A_{13} &= (\nu_1^2 - 1) [n_2^e \lambda_{31} (\nu_3^2 - 1) - n_3^e \lambda_{21} (\nu_2^2 - 1)] \frac{1}{2\pi\gamma_a} \\ A_{14} &= \frac{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)(\nu_3^2 - 1)}{\nu_1(\nu_1^2 - \nu_2^2)(\nu_1^2 - \nu_3^2)} \cdot \frac{(-1)}{4\pi\gamma_e} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} n_i^e &= 2 [-\lambda_{i1} (e_{15} \nu_i^2 + e_{31}) + \nu_i \lambda_{i3} (e_{33} - e_{15}) + \nu_i \lambda_{i4} (\epsilon_{11} - \epsilon_{33})] \\ \gamma_a &= (\nu_1^2 - 1) \lambda_{11} (n_2^a n_3^e - n_3^a n_2^e) + (\nu_2^2 - 1) \lambda_{21} (n_3^a n_1^e - n_1^a n_3^e) + (\nu_3^2 - 1) \lambda_{31} (n_1^a n_2^e - n_2^a n_1^e) \\ \gamma_e &= (\epsilon_{11} - \epsilon_{33}) [C_{11} (C_{44} - C_{33}) + C_{44} (C_{33} + 2C_{13}) + C_{13}^2] + C_{11} (e_{33} - e_{15})^2 + \\ &+ C_{33} (e_{31} + e_{15})^2 - C_{44} (e_{33} + e_{31})^2 + 2C_{13} [e_{15} (e_{15} + e_{31} - e_{33}) - e_{33} e_{31}] \end{aligned}$$

El resto de términos A_{i3} y A_{i4} se obtienen a partir de las expresiones dadas para A_{i3} y A_{i4} permutando cíclicamente el subíndice i de los términos ν_i , n_i^e y λ_{iJ} (no se realiza permutación en la expresión de γ_a).

Con esto queda definida la solución fundamental según se recoge en el trabajo de Dunn y Wienecke (1996). Sin embargo, aunque en dicho trabajo no se diga explícitamente, las expresiones anteriores son solo válidas para valores de z positivos. Se puede comprobar fácilmente como las expresiones (A.1) quedan indeterminadas en el caso de que $x = y = 0$, $z < 0$. Esto no ocurre para valores de z positivos. Algo similar ocurre con la solución de Pan y Chou (1976) para materiales transversalmente isótropos, según se comentó en el apartado 4.3, donde se planteó como se solventaba esta dificultad a efectos de implementación numérica.

En este caso se vuelve a atender a criterios de paridad e imparidad de las expresiones respecto a z . Para ello hay que tener en cuenta que la dimensión o subíndice 4 es equivalente a la dimensión o subíndice 3 a efectos de paridad e imparidad respecto a z . Así pues, a la hora de su implementación numérica, las expresiones (A.1) se evaluarán trabajando con el valor absoluto de

la coordenada z , y posteriormente se tendrán en cuenta las siguientes relaciones (además de la condición de simetría $U_{IJ} = U_{JI}$):

$$\begin{aligned} U_{IJ}(x, y, z) &= -U_{IJ}(x, y, -z) && \text{para } (I,J)=(3,1),(4,1),(3,2),(4,2) \\ U_{IJ}(x, y, z) &= U_{IJ}(x, y, -z) && \text{para el resto de casos} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.1. Primeras derivadas de la solución fundamental en desplazamientos

Como ya se comentó en el capítulo 5, para la obtención de la solución fundamental en tracciones (T_{KM}^*) y los núcleos d_{iMJ}^* hay que hallar las primeras derivadas de la solución fundamental en desplazamientos (expresiones A.1). Hay que recordar que para los núcleos d_{iMJ}^* la derivada se realiza respecto al punto de colocación y por tanto son de distinto signo que las realizadas respecto al punto de observación. Las expresiones de estas últimas son las que se recogen a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{11}}{\partial x_m} &= D_0 \left[-\frac{R_{0,m}^*}{R_0^{*2}} - \left(-y^2 H_{0,m} + \frac{2y}{R_0 R_0^{*2}} \delta_{2m} \right) \right] - \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left[-\frac{R_{i,m}^*}{R_i^{*2}} - \left(-x^2 H_{i,m} + \frac{2x}{R_i R_i^{*2}} \delta_{1m} \right) \right] \\ \frac{\partial U_{22}}{\partial x_m} &= D_0 \left[-\frac{R_{0,m}^*}{R_0^{*2}} - \left(-x^2 H_{0,m} + \frac{2x}{R_0 R_0^{*2}} \delta_{1m} \right) \right] - \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left[-\frac{R_{i,m}^*}{R_i^{*2}} - \left(-y^2 H_{i,m} + \frac{2y}{R_i R_i^{*2}} \delta_{2m} \right) \right] \\ \frac{\partial U_{12}}{\partial x_m} &= D_0 \left[\frac{y}{R_0 R_0^{*2}} \delta_{1m} + \frac{x}{R_0 R_0^{*2}} \delta_{2m} - xy H_{0,m} \right] + \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i2} \left[\frac{y}{R_i R_i^{*2}} \delta_{1m} + \frac{x}{R_i R_i^{*2}} \delta_{2m} - xy H_{i,m} \right] \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_m} &= \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{\delta_{Jm}}{R_i R_i^*} - x_j \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{R_{i,m} R_i^* + R_i R_{i,m}^*}{(R_i R_i^*)^2} \quad \text{para } I=3,4; J=1,2 \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_m} &= - \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{R_{i,m}}{R_i^2} \quad \text{para } I=3,4; J=3,4 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Siendo:

- δ_{IJ} es la delta de Kronecker
- $R_{i,m} = \frac{x_m}{R_i} [1 + (\nu_i^2 - 1) \delta_{3m}]$
- $R_{i,m}^* = R_{i,m} + \nu_i \delta_{3m}$

$$\blacksquare H_{i,m} = \frac{R_{i,m}R_i^{*2} + 2R_iR_i^*R_{i,m}^*}{(R_iR_i^{*2})^2}$$

y el resto de parámetros ya han sido definidos con anterioridad.

Al igual que ocurre con las expresiones de los desplazamientos, las expresiones anteriores han de ser evaluadas con el valor absoluto de la coordenada z , y posteriormente aplicar las siguientes relaciones (teniendo siempre en cuenta además la condición de simetría $U_{IJ} = U_{JI}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_1}(x, y, z) &= -\frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_1}(x, y, -z) \quad \text{para } (I, J) = (3,1), (4,1), (3,2), (4,2) \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_1}(x, y, z) &= \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_1}(x, y, -z) \quad \text{para el resto de casos} \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_2}(x, y, z) &= -\frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_2}(x, y, -z) \quad \text{para } (I, J) = (3,1), (4,1), (3,2), (4,2) \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_2}(x, y, z) &= \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_2}(x, y, -z) \quad \text{para el resto de casos} \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_3}(x, y, z) &= -\frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_3}(x, y, -z) \quad \text{para } (I, J) = (1,1), (2,2), (2,1), (3,3), (3,4), (4,4) \\ \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_3}(x, y, z) &= \frac{\partial U_{IJ}}{\partial x_3}(x, y, -z) \quad \text{para el resto de casos} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Segundas derivadas de la solución fundamental en desplazamientos

Como ya se apuntó en el capítulo 5, para la obtención de las expresiones de los núcleos s_{iMJ}^* es necesario hallar las expresiones de las segundas derivadas de la solución fundamental en desplazamientos. En rigor, la primera de estas derivadas se realiza respecto al punto de observación y la segunda respecto al punto de colocación. Las expresiones de estas derivadas se recogen a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{11}^* &= D_0 \left[\frac{R_{0,ml}^* R_0^* - 2R_{0,l}^* R_{0,m}^*}{R_0^{*3}} - 2y\delta_{l2}H_{0,m} - y^2H_{0,ml} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{2m} \left(\frac{2\delta_{2l}}{R_0 R_0^{*2}} - 2yH_{0,l} \right) \right] + \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left[-\frac{R_{i,ml}^* R_i^* - 2R_{i,l}^* R_{i,m}^*}{R_i^{*3}} \right. \\ &\quad \left. + 2x\delta_{l1}H_{i,m} + x^2H_{i,ml} - \delta_{1m} \left(\frac{2\delta_{1l}}{R_i R_i^{*2}} - 2xH_{i,l} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{22}^* &= D_0 \left[\frac{R_{0,ml}^* R_0^* - 2R_{0,l}^* R_{0,m}^*}{R_0^{*3}} - 2x\delta_{l1} H_{0,m} - x^2 H_{0,ml} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{1m} \left(\frac{2\delta_{1l}}{R_0 R_0^{*2}} - 2x H_{0,l} \right) \right] + \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i1} \left[-\frac{R_{i,ml}^* R_i^* - 2R_{i,l}^* R_{i,m}^*}{R_i^{*3}} \right. \\ &\quad \left. + 2y\delta_{l2} H_{i,m} + y^2 H_{i,ml} - \delta_{2m} \left(\frac{2\delta_{2l}}{R_i R_i^{*2}} - 2y H_{i,l} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{I=3:4, J=1:2}^* &= \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \left[\delta_{Jl} \frac{R_{i,m} R_i^* + R_i R_{i,m}^*}{(R_i R_i^*)^2} \right. \\ &\quad \left. + x_J \xi_{i,ml} + \delta_{Jm} \frac{R_{i,l} R_i^* + R_i R_{i,l}^*}{(R_i R_i^*)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{I=3:4, J=3:4}^* = \sum_{i=1}^3 A_{iI} \lambda_{iJ} \frac{R_{i,ml} R_i - 2R_{i,l} R_{i,m}}{R_i^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{1,2}^* &= D_0 \left[-\frac{\delta_{1m} \delta_{2l}}{R_0 R_0^{*2}} + y\delta_{1m} H_{0,l} - \frac{\delta_{2m} \delta_{1l}}{R_0 R_0^{*2}} + x\delta_{2m} H_{0,l} + x\delta_{2m} H_{0,l} \right. \\ &\quad \left. + xy H_{0,ml} + \delta_{1l} y H_{0,m} + \delta_{2l} x H_{0,m} \right] + \sum_{i=1}^3 D_i \lambda_{i2} \left[-\frac{\delta_{1m} \delta_{2l}}{R_i R_i^{*2}} + y\delta_{1m} H_{i,l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_{2m} \delta_{1l}}{R_i R_i^{*2}} + x\delta_{2m} H_{i,l} + x\delta_{2m} H_{i,l} + xy H_{i,ml} + \delta_{1l} y H_{i,m} + \delta_{2l} x H_{i,m} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Siendo:

$$R_{i,ml}^* = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_l} R_i^* = [1 + (\nu_i^2 - 1)\delta_{3m}] \frac{\delta_{ml} R_i - x_m R_{i,l}}{R_{i,l}^2} = R_{i,ml}$$

$$\begin{aligned} H_{i,ml} &= \frac{\partial}{\partial x_l} H_{i,m} = [R_{i,ml} R_i^{*2} + 2R_{i,m} R_i^* R_{i,l}^* \\ &\quad + 2(R_{i,l} R_i^* R_{i,m}^* + R_i R_{i,l}^* R_{i,m}^* + R_i R_i^* R_{i,ml}^*)] (R_i R_i^{*2}) \\ &\quad - 2(R_{i,m} R_i^* + 2R_i R_i^* R_{i,m}^*) (R_{i,l} R_i^{*2} + 2R_i R_i^* R_{i,l}^*) / (R_i R_i^{*2})^3 \end{aligned}$$

$$\xi_{i,ml} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{R_{i,m}R_i^* + R_{i,m}^*R_i}{(R_iR_i^*)^2} \right] = \left[(R_{i,ml}R_i^* + R_{i,m}R_{i,l}^* + R_{i,l}R_{i,m}^* + R_iR_{i,ml}^*)(R_iR_i^*) - 2(R_{i,m}R_i^* + R_iR_{i,m}^*)(R_{i,l}R_i^* + R_iR_{i,l}^*) \right] / (R_iR_i^*)^3$$

y el resto de parámetros ya han sido definidos con anterioridad. Téngase en cuenta que en las expresiones auxiliares anteriores siempre se ha derivado respecto a x (punto de integración), ya que en las derivadas segundas se ha cambiado previamente el signo según el criterio $\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_l} = -\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial y_l}$.

Como se ha dicho anteriormente, las expresiones anteriores de la derivada segunda ($U_{IJ,ml}$) solo son válidas para el caso, $z = x_3 - y_3 \geq 0$. Para considerar los casos en que la coordenada z sea negativa, se procederá de manera similar a como se ha explicado anteriormente para las expresiones de los desplazamientos y sus derivadas primeras: se evalúan con el valor absoluto de z , y posteriormente se ha de tener en cuenta que estas funciones cumplen simetría par ($f(z) = f(-z)$) en z en todos los términos (I, J, m, l) salvo los que se detallan a continuación, en los que habrá que aplicar un cambio de signo:

los términos $(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 3), (2, 2, 1, 3), (2, 2, 2, 3), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 2, 3), (3, 3, 1, 3), (3, 3, 2, 3), (3, 4, 1, 3), (3, 4, 2, 3), (4, 4, 1, 3), (4, 4, 2, 3)$ y sus correspondientes simétricos según la relación $(I, J, m, l) = (J, I, m, l) = (J, I, l, m)$, son impares con respecto a z ($f(z) = -f(-z)$).

Apéndice B

Expresiones de los términos I_{MJ} y

J_{MhJ}

Tal y como se comentó en el capítulo 5 (apartado 5.4), la regularización de los términos hipersingulares y fuertemente singulares de la formulación para materiales piezoeléctricos, bajo la hipótesis de grieta plana perpendicular al eje de simetría del material, da lugar tan solo a integrales de línea que se recogen en los términos I_{MJ} y J_{MhJ} , cuyas expresiones se incluyen a continuación.

B.1. Términos I_{MJ}

Los términos I_{MJ} cumplen una relación de simetría:

$$I_{MJ} = I_{JM} \tag{B.1}$$

A continuación se recogen las expresiones de aquellos términos que son no nulos. En sus expresiones aparecen constantes de la ley de comportamiento del material y otras constantes definidas en el apéndice A.

$$\begin{aligned}
I_{11} = & \oint_{\partial\Gamma} -((2e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + 4C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{44}^2(D_0\nu_0^2 + 2(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3))))r_{,1}^2 - \\
& (e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + 2C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{44}^2(2D_0\nu_0^2 + D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3))))r_{,2}^2) \frac{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{N}}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
I_{21} = & \oint_{\partial\Gamma} -3(e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + 2C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{44}^2(D_0\nu_0^2 + D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3))))r_{,1}r_{,2} \frac{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{N}}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} = & \oint_{\partial\Gamma} ((e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + 2C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{44}^2(2D_0\nu_0^2 + D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3))))r_{,1}^2 - \\
& (2e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + 4C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{44}^2(D_0\nu_0^2 + 2(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3))))r_{,2}^2) \frac{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{N}}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} = & \oint_{\partial\Gamma} (C_{13}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - 2C_{13}(C_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + C_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + \\
& e_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + (C_{33}A_{33} + e_{33}A_{34})\lambda_{31}\nu_3) + C_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) + \\
& 2C_{33}e_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + e_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2)) \frac{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{N}}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
I_{34} = \oint_{\partial\Gamma} & (C_{13}(e_{31}(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - e_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 - e_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + \\
& \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 - e_{33}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + C_{33}(-e_{31}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 - \\
& \epsilon_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 - \epsilon_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - e_{31}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + e_{33}A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2 - \\
& \epsilon_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + e_{33}(-e_{31}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + \\
& e_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 - e_{31}A_{34}\lambda_{31}\nu_3 + e_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2 - \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2)) \frac{\vec{r} \times \vec{N}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
I_{44} = \oint_{\partial\Gamma} & (e_{31}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) + e_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) - \\
& 2e_{33}\epsilon_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \epsilon_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2) - \\
& 2e_{31}(e_{33}(A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + A_{33}\lambda_{31}\nu_3) - \epsilon_{33}(A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3))) \frac{\vec{r} \times \vec{N}}{r^3} d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

El resto de términos I_{MJ} son nulos:

$$I_{31} = I_{13} = I_{32} = I_{23} = I_{41} = I_{14} = I_{42} = I_{24} = 0 \tag{B.8}$$

B.2. Términos J_{MhJ}

En las expresiones de estos términos aparecen también las distintas constantes del material y las definidas en el apéndice A, así como el término que se define a continuación:

$$\begin{aligned}
L_{hcl} = [\delta_{cl}(\vec{e}_h \times \vec{N})r_{,l}^2 + \delta_{hl}(\vec{e}_c \times \vec{N})r_{,l}^2 + \delta_{ch}(\vec{e}_l \times \vec{N})r_{,h}^2 + 2\delta_{cl}\delta_{ch}(\vec{e}_h \times \vec{N})(1 - r_{,c}^2)] \frac{1}{3r} \\
\text{para } h, c, l=1,2
\end{aligned} \tag{B.9}$$

donde los términos del tipo δ_{ij} representan la delta de Kronecker y los vectores \vec{e}_i son vectores unitarios según la dirección i .

Los términos J_{MhJ} no nulos se pueden escribir por tanto como sigue:

$$\begin{aligned}
J_{111} = \oint_{\partial\Gamma} & -(e_{15}^2(2L_{111} - L_{122})(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + \\
& 2C_{44}e_{15}(2L_{111} - L_{122})(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{44}^2(D_0\nu_0^2(L_{111} - 2L_{122}) + (2L_{111} - L_{122})(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
J_{211} = \oint_{\partial\Gamma} & -3L_{112}(e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + \\
& 2C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{44}^2(D_0\nu_0^2 + D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + \\
& D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$J_{112} = J_{211} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
J_{212} = \oint_{\partial\Gamma} & (e_{15}^2(L_{111} - 2L_{122})(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + \\
& 2C_{44}e_{15}(L_{111} - 2L_{122})(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{44}^2(D_0\nu_0^2(2L_{111} - L_{122}) + (L_{111} - 2L_{122})(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
J_{313} = \oint_{\partial\Gamma} & \frac{(\vec{e}_1 \times \vec{N})}{r} (C_{13}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - \\
& 2C_{13}(C_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + C_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + (C_{33}A_{33} + e_{33}A_{34})\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) + 2C_{33}e_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \\
& e_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
J_{413} = \oint_{\partial\Gamma} \frac{(\vec{e}_1 \times \vec{N})}{r} & (C_{13}(e_{31}(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - e_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 - \\
& e_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 - e_{33}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{33}(-e_{31}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 - \epsilon_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 - \\
& \epsilon_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - e_{31}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + \epsilon_{33}A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2 - \epsilon_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \\
& e_{33}(-e_{31}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - \\
& \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 - e_{31}A_{34}\lambda_{31}\nu_3 + \epsilon_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2 - \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$J_{314} = J_{413} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
J_{414} = \oint_{\partial\Gamma} \frac{(\vec{e}_1 \times \vec{N})}{r} & (e_{31}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) + e_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) - \\
& 2e_{33}\epsilon_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \epsilon_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2) - \\
& 2e_{31}(e_{33}(A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + A_{33}\lambda_{31}\nu_3) - \epsilon_{33}(A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
J_{121} = \oint_{\partial\Gamma} & (-e_{15}^2(2L_{112} - L_{222})(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34})) - \\
& 2C_{44}e_{15}(2L_{112} - L_{222})(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{44}^2(-(D_0\nu_0^2(L_{112} - 2L_{222})) - (2L_{112} - L_{222})(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
J_{221} = \oint_{\partial\Gamma} & -3L_{122}(e_{15}^2(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34}) + \\
& 2C_{44}e_{15}(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{44}^2(D_0\nu_0^2 + D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + \\
& D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
J_{222} = \oint_{\partial\Gamma} & -(- (e_{15}^2(L_{112} - 2L_{222})(A_{14}\lambda_{14} + A_{24}\lambda_{24} + A_{34}\lambda_{34})) - \\
& 2C_{44}e_{15}(L_{112} - 2L_{222})(A_{13}\lambda_{14} + A_{23}\lambda_{24} + A_{33}\lambda_{34} + A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3) - \\
& C_{44}^2(D_0\nu_0^2(2L_{112} - L_{222}) + (L_{112} - 2L_{222})(D_1\lambda_{11}\nu_1^2 + A_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{11}\nu_1) + D_2\lambda_{21}\nu_2^2 + \\
& A_{23}(\lambda_{23} + 2\lambda_{21}\nu_2) + D_3\lambda_{31}\nu_3^2 + A_{33}(\lambda_{33} + 2\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
J_{323} = \oint_{\partial\Gamma} & \frac{(\vec{e}_2 \times \vec{N})}{r} (C_{13}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - 2C_{13}(C_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& C_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + (C_{33}A_{33} + e_{33}A_{34})\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) + 2C_3e_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \\
& e_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
J_{423} = \oint_{\partial\Gamma} & \frac{(\vec{e}_2 \times \vec{N})}{r} (C_{13}(e_{31}(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) - e_{33}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 - \\
& e_{33}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 - e_{33}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{31}\nu_3) + \\
& C_{33}(-e_{31}A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + e_{33}A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 - \epsilon_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 - \\
& \epsilon_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - e_{31}A_{33}\lambda_{31}\nu_3 + e_{33}A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2 - \epsilon_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + e_{33}(-e_{31}A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + \\
& e_{33}A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 - \epsilon_{33}A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 - e_{31}A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + e_{33}A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 - \epsilon_{33}A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 - \\
& e_{31}A_{34}\lambda_{31}\nu_3 + e_{33}A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2 - \epsilon_{33}A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
J_{424} = \oint_{\partial\Gamma} & \frac{(\vec{e}_2 \times \vec{N})}{r} (e_{31}^2(D_1\lambda_{11} + D_2\lambda_{21} + D_3\lambda_{31}) + e_{33}^2(A_{13}\lambda_{13}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{23}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{33}\nu_3^2) - \\
& 2e_{33}\epsilon_{33}(A_{13}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{23}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{33}\lambda_{34}\nu_3^2) + \epsilon_{33}^2(A_{14}\lambda_{14}\nu_1^2 + A_{24}\lambda_{24}\nu_2^2 + A_{34}\lambda_{34}\nu_3^2) - \\
& 2e_{31}(e_{33}(A_{13}\lambda_{11}\nu_1 + A_{23}\lambda_{21}\nu_2 + A_{33}\lambda_{31}\nu_3) - \epsilon_{33}(A_{14}\lambda_{11}\nu_1 + A_{24}\lambda_{21}\nu_2 + A_{34}\lambda_{31}\nu_3)))d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Siendo el resto de términos J_{MhJ} nulos:

$$\begin{aligned}
J_{311} = J_{411} = J_{312} = J_{412} = J_{113} = J_{213} = J_{114} = J_{214} = J_{321} = \\
J_{421} = J_{122} = J_{322} = J_{422} = J_{123} = J_{223} = J_{124} = J_{224} = J_{324} = 0
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Referencias

- Agrawal, A.K. y Kishore, N.N. (2001). A study of free surface effects on through cracks using BEM. *Eng. Frac. Mech.*, **68**, 1297–1316.
- Aliabadi, M.H. (1997). Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics. *Appl. Mech. Rev.*, **50**, 83–96.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Yoshida, T., Sakata, M. y Richard, H.A. (1990). Elastic-plastic behavior of an aluminium alloy under mixed mode loading. *J. Mech. Phys. Solids*, **38**, 2, 195–213.
- Ariza, M.P., Sáez, A., y Domínguez, J. (1997). A Singular Element for Three-dimensional Fracture Mechanics Analysis. *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **20**, 275–285.
- Ariza, M.P. (2002). Modelo numérico con representación integral de tensiones en el contorno, para problemas de Mecánica de la Fractura, *Tesis*, Universidad de Sevilla.
- Ariza, M.P. y Domínguez, J. (2004). Boundary element formulation for 3-D transversely isotropic cracked bodies. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **60**, 719–753.
- Ariza, M.P. y Domínguez, J. (2004b). Dynamic BE analysis of 3-D cracks in transversely isotropic solids. *Computer Methods in Appl. Mech. Engrg.* **26**, 765–779.
- Barnett, D. y Lothe, J. (1975). Dislocations and Line Charges in Anisotropic Piezoelectric Insulators. *Physica Status Solidi (b)* **67**, 105–111.
- Bazant, Z.P., y Estenssoro, L.F. (1979). Surface Singularity and Crack Propagation. *Int. J. Solids Structures*, **15**, 405–426.
- J.P. Benthem (1980). The quarter-infinite crack in a half space; alternative and additional solutions. *Int. J. Solids Structures*, **16**, 119–130.
- Bialecki, R.A., Dallner, R. y Kuhn, G. (1993) Minimum distance calculation between a source point and a boundary element. *Engng. Anal. Bound. Elem.* **12**, 211–218.
- Brebbia, C.A., y Domínguez, J. (1992). Boundary Elements. An Introductory Course, segunda edición. *Computational Mechanics Publications*, Southampton y *MacGraw-Hill*, New York.
- Brown, W.F. y Strawley, J.E. (1966) STP410 *ASTM* .
- Bu, S. y Davies, T.G. (1995) Effective evaluation of non-singular integrals in 3D BEM. *Advances Eng. Software*, **23**, 121–128.
- Cady, W.G. (1964). Piezoelectricity. *Dover*, New York.
- Chen, W.T. y Soni, R.P. (1964). On a Circular Crack in a Transversely Isotropic Material with Prescribed Shear Stress. *IBM J. Research Development*, **8**, 192–195.

- Chen, W.T. (1966). On some Problems in Transversely Isotropic Elastic Materials. *J. Appl. Mech.*, **33**, 347–355.
- Chen, T. y Lin, F. (1995). Boundary integral formulations for three-dimensional anisotropic piezoelectric bodies. *Comput. Mech.*, **15**, 485–496.
- Chen, J.T. y Hong, H.K. (1999). Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. *Appl. Mech. Rev.* **52**, 17–33.
- Chen, W., Shioya, T. y Ding, H. (2000). A penny shaped crack in piezoelectrics: resolved. *Int. J. Fracture*, **105**, 49–56.
- Chen, M. (2003) Application of finite-part integrals to the three dimensional fracture problems for piezoelectric media. Part I: hypersingular equation and theoretical analysis. *Int. J. Fracture*, **121**, 133–148.
- Chen, Y.H. y Hasebe, N. (2005) Current understanding on fracture behaviors of ferroelectric/piezoelectric materials. *J. Intellig. Material Systems and Struc.*, **16**, 673–687.
- Chen, M.C. (2005) 3D mode I crack analysis of piezoelectrics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **194**, 957–968.
- Christensen, R.M. (1979). Mechanics of Composites Materials. *Wiley Interscience*, New York.
- Christensen, R.M. (1981). Theory of Viscoelasticity - An Introduction. In *Academic Press*, New York.
- Cruse, T.A., y Richardson, J.D. (1996). Nonsingular Somigliana Stress Identities in Elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 3273–3304.
- Curie, J. y Curie, P. (1884). Contractions et dilations produites par des tensions electriques dans les cristaux hemiedres a faces inclines. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **93**, 1137.
- Deeg, W. F. (1980). The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. *Tesis*, Stanford University.
- Ding, H. y Liang, J. (1999). The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method. *Comput. Struct.*, **71**, 447–455.
- Ding, H.J., Chen, W.Q. y Jiang, A.M. (2004). Green's functions and boundary element method for transversely isotropic piezoelectric materials. *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **28**, 975–987.
- Domínguez, J. (1993). Boundary Elements in Dynamics. *Computational Mechanics Publications* (Southampton) y *Elsevier Science* (Londres).
- Domínguez, J., Ariza, M.P., y Gallego, R. (2000). Flux and Traction Boundary Elements without Hypersingular or Strongly Singular Integrals. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **48**, 111–135.
- Dunn, M.L. y Wienecke, H.A. (1996). Green's Functions for Transversely Isotropic Piezoelectric Solids. *Int. J. Solids and Structures*, **33**, 4571–4581.

-
- Elliot, H.A. (1948). Three-Dimensional Stress Distribution in Hexagonal Aelotropic Crystals, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **44**, 522–531.
- Embley, G.T. y Sih, G.C. (1971). Reponse of a penny shaped crack to impact waves. *Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference*, **6**, 473–487.
- Folias, E.S. (1975). On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates. *J. Appl. Mech.*, **42**, 663–674.
- Fabrikant, V. (1989). Applications of Potential Theory in Mechanics: A selection of New Results. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands.
- Gallego, R., y Domínguez, J. (1996). Hypersingular BEM for Transient Elastodynamic. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 1681–1705.
- García, F., Sáez, A. y Domínguez, J. (2004) Traction boundary elements for cracks in anisotropic solids. *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **28**, 667–676.
- García-Sánchez, F., Sáez, A. y Domínguez, J. (2005) Anisotropic and Piezoelectric Materials Fracture Analysis by BEM. *Comp. and Structures*, **83**, 804–820.
- García Sánchez, F. (2005). Estudio numérico de problemas de fractura en materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos, *Tesis*, Universidad de Sevilla.
- Granados, J.J. y Gallego R., (2001) Regularization of nearly hypersingular integrals in the boundary element method. *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **25**, 165–184.
- Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. y Rizzo, F.J. (1992). A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations. *J. Appl. Mech. (ASME)*, **59**, 604–614.
- Hao, T.H. y Shen, Z.Y., (1994) A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Frac. Mech.*, **47**, 6, 793–802.
- Hill, L. y Farris, T., (1994) Three-dimensional piezoelectric boundary element method. *AIAA Journal*, **36**, 6, 102–108.
- Huang, J.H. (1997) A fracture criterion of a penny-shaped crack in transversely isotropic piezoelectric media. *Int. J. Solids Str.*, **34**, 2631–2644.
- Heyder, M., Kolk, K. y Kuhn, G. (2005) Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3D fatigue crack propagation. *Eng. Frac. Mech.*, **72**, 2095–2105.
- Heyer, V., Schneider, G.A., Balke, H., Dreschler, J. y Bahr, H.A. (1998) A fracture criterion for conducting cracks in homogenously poled piezoelectric PZT-PIC 151 ceramics. *Acta Mater.*, **46**, 18, 6615–6622.
- Hilton, H.H. (2001) Implications and constraints of time-independent Poisson ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *J. Elasticity*, **63**, 221–251.

- Huang, Q., y Cruse, T.A. (1994). On the Non-Singular Traction BIE in Elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, 2041–2072.
- Ikeda, T. (1996). Fundamentals of Piezoelectricity. *Oxford University Press*, New York.
- Irwin, G.R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Appl. Mech.*, **24**, 361–364.
- Irwin, G.R. (1962). Crack-Extension Force for a Part-Trough Crack in a Plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **29**, 651–654.
- Ishikawa, H. (1990). Application of the Boundary Element Method to Anisotropic Crack Problems. *Advances in Boundary Element Methods for Fracture Mechanics*, ed. M.H. Aliabadi & C.A. Brebbia. Computational Mechanics Publications, Southampton, 269–292.
- Isida, M. (1975). Effect of width and length on Stress Intensity Factors of internally cracked plates under various boundary conditions. *Int. J. Frac.*, **3**, 301–316.
- Jelitto, H., Kebler, H., Schneider, G. y Balke, H. (2005). Fracture behavior of poled piezoelectric PZT under mechanical and electrical loads. *J. Eur. Ceram. Soc.*, **25**, 749–757.
- Jin, Z.H. y Noda, N. (1994). A quasi-three-dimensional crack problem of an elastic plate subjected to in-plane shear loading. *Eng. Frac. Mech.*, **49**, 5, 773–779.
- Johnston, P.R (1999). Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**(10), 1333–1348.
- Johnston, P.R. y Elliot, D. (2005). A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **62**, 564–578.
- Jun, L., Beer, G. y Meek, J.L. (1985). Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature. *Eng. Anal.*, **2**(3), 118–123.
- Kacianauskas, R., Zenon, M., Zarnovskij, V. y Stupak, E. (2005). Three-dimensional correction of the stress intensity factor for plate with a notch. *Int. J. Frac.*, **136**, 75–98.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1966). Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **33**, 601–611.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1968). Three-Dimensional Stresses Around Elliptical Cracks in Transversely Isotropic Solids. *Eng. Fract. Mech.*, **1**, 327–345.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1975). Three-Dimensional Crack Problems. *Mechanics of Fracture*, Ed. G.C. Sih, *Nordhoff*, The Netherlands.
- Kogan, L., Hui, C.Y. y Molkov, V. (1996). Stress and inducition field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material. *Int. J. Solids Str.*, **33**, 2719–2737.

-
- Krishnasamy, G., Schmerr, L.W., Rudolphi, T.J., y Rizzo, F.J. (1990). Hypersingular Boundary Integral Equations: Some Applications in Acoustic and Elastic Wave Scattering. *J. Appl. Mech., ASME*, **57**, 404–414.
- Krishnasamy, G., Rizzo, F.J., y Rudolphi, T.J. (1992). Hypersingular Boundary Integral Equation: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation. Banerjee, P.K. and Kobayashi, S. ,eds., *Developments in Boundary Element Methods-7*. Elsevier, London.
- Kundu, T. y Boström, A. (1991). Axisymmetric Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Circular Crack in a Transversely Isotropic Solid. *ASME J. Appl. Mech.*, **58**, 695–702.
- Kuna, M. (1998). Finite element analyses of crack problems in piezoelectric structures. *Comput. Mat. Science*, **13**, 67–80.
- Lachat, J. C. y Watson, J.O. (1976). Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **10**, 991–1005.
- Lee, Y., Jeon, I. e Im, S. (2006). The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 2710–2722.
- Li, S., Mear, M.E. y Xiao, L. (1998). Symmetric Weak-Form Integral Equation Method for Three-Dimensional Fracture Analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **151**, 435–459.
- Lighthill, M.J. (1960). Studies on Magneto-Hydrodynamic Waves and Other Anisotropic Wave Motions. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A252**, 397–430.
- Lin, S., Narita, F. y Shindo, Y. (2003). Electroelastic analysis of a penny-shaped crack in a piezoelectric ceramic under mode I loading. *Mech. Res. Comm.*, **30**, 371–386.
- Mantic, V. (1994). On Computing Boundary Limiting Values of Boundary Integrals with Strongly Singular and Hypersingular Kernels in 3D BEM for Elastostatics. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, **13**, 115–134.
- Martin, P.A., y Rizzo, F.J. (1996). Hypersingular Integrals: How Smooth Must the Density Be?. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 687–704.
- Martin, P.A., Rizzo, F.J., y Cruse, T.A. (1998). Smoothness-Relaxation Strategies for Singular and Hypersingular Integral Equations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **42**, 885–906.
- Martinez, J. y Domínguez, J. (1984). On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factors computation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**, 1941–1950.
- McMeeking, R.M. (1990). A J-integral for the analysis of electrically induced mechanical stress at cracks in elastic dielectrics. *Int. J. Engng. Sci.* , **28**, 7, 605–613.
- McMeeking, R.M. (1999). Crack tip energy release rate for a piezoelectric compact tension specimen. *Engng. Frac. Mech.* , **64**, 217–244.

- Melo, J.D.D. y Radford, D.W. (2003). Viscoelastic characterization of transversely isotropic composite laminae. *J.Compos. Mater.*, **37**, 2, 129–145.
- Mi, Y., y Aliabadi, M.H. (1992). Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis. *Eng. Anal. Boundary Elements*, **10**, 161–171.
- Musgrave, M.J.P. (1970). *Crystal Acoustics*, Holden-Day, San Francisco.
- Murakami, Y. y Natsume, H. (2002). Stress singularity at the corner point of 3-D surface crack under mode II loading. *JSME Int. J. Series A*, **45**, 2, 161–169.
- Nakamura, T. y Parks, D.M. (1988). Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate. *J. Appl. Mech.*, **55**, 805–813.
- Nakamura, T. y Parks, D.M. (1989). Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate. *Int. J. Solids Structures*, **12**, 1411–1426.
- Ni, R.G. y Adams, R.D. (1984). Effect of fiber orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CRFP. *J. Compos. Mater.*, **18**, 104–121.
- Niu, Z., Wendland, W.L., Wang, X. y Zhou, H. (2005). A semi-analytical algorithm for the evaluation of the nearly singular integrals in three-dimensional boundary element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **194**, 1057–1074.
- Ou, Z.C. y Chen, Y.H. (2003). Discussion of the crack face electric boundary condition in piezoelectric fracture mechanics. *Int J Fracture*, **123**, L151–L155.
- Pak, Y.E. (1990). Crack extension force in a piezoelectric material. *J. Appl. Mech.*, **57**, 647–653.
- Pak, Y.E. (1992). Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int. J. Fract.*, **54**, 79–100.
- Pan, Y.C. y Chou, T.W. (1976). Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid. *J. Appl. Mech.*, **43**, 608–612.
- Pan, E. y Yuan, F.G. (2000). Boundary Element Analysis of Three-Dimensional Cracks in Anisotropic Solids. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **48**, 211–237.
- Pan, E. (2002). Three dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals. *A. Angew. Math. Phys.*, **53**, 815–838.
- Paris, P.C. (1998). Fracture mechanics and fatigue: a historical perspective. *Fatigue and Fract. of Engng. Mat. and Struc.*, **21**, 535–540.
- Park, S. y Sun, C.T. (1995). Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, **78**, 6, 1475–1480.
- Parton, V.Z. (1976). Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials. *Acta Astronaut.*, **3**, 671–683.

-
- Parton, V.Z y Kudryatsev, B.A. (1988). *Electromagnetoelasticity*, Gordon and Breach Science Publisher, New York.
- Payton, R.G. (1983). *Elastic wave propagation in transversely isotropic media*, Martinus Nijhoff, The Hague.
- Pook, L.P. (1994). Some implications of corner point singularities. *Eng. Fract. Mech.*, **78**, 3, 367–378.
- Portela, A., Aliabadi, M.H., y Rooke, D.P. (1992). The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**, 1269–1287.
- Qin, Q.H. (2001). *Fracture Mechanics in Piezoelectric Materials*, WIT Press, Southampton.
- Qin, T. y Noda, N.A. (2004). Application of hypersingular integral equation method to a three-dimensional crack in piezoelectric materials. *JSME Int. J. Series A*, **42**, 2, 173–180.
- Rajiyah, H., y Atluri, S.N. (1991). Analysis of Embedded and Surface Elliptical Flaws in Transversely Isotropic Bodies by Finite Element Alternating Method. *J. Appl. Mech.*, **58**, 435–443.
- Raju, I.S., y Newman, J.C. Jr. (1977). Three-Dimensional Finite Element Analysis of Finite-Thickness Fracture Specimens. *NASA TN, D-8414*.
- Richardson, J.D., Cruse, T.A., y Huang, Q. (1997). On the Validity of Conforming BEM Algorithms for Hypersingular Boundary Integral Equations. *Comput. Mech.*, **20**, 213–220.
- Rizza, R. y Nair, S. (1999). A Penny Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material under Non-Axisymmetric Impact Loads. *Int. J. Solids & Struct.*, **36**, 35–64.
- Rojas-Díaz, R., Sáez, A., García-Sánchez, F. y Zhang, Ch. (enviado). Time-Harmonic's Green's functions for anisotropic magnetoelastoelectricity. *Int. J. Solids & Struct.*
- Rooke, D.P., y Cartwright, D.J. (1976). A Compendium of Stress Intensity Factors. *Her Majesty's Stationary Office*, London. **15**, 269–278.
- Sáez, A. (1997). Análisis numérico de problemas elastodinámicos en materiales transversalmente isótropos. *Tesis*, Universidad de Sevilla, España.
- Sáez, A., Ariza, M.P., y Domínguez, J. (1997). Three-Dimensional Fracture Analysis in Transversely Isotropic Solids. *Eng. Anal. Boundary Elements*, **20**, 287–298.
- Saez, A. y Dominguez, J. (1999). BEM analysis of wave scattering in transversely isotropic solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **44**, 1283–1300.
- Saez, A. y Dominguez, J. (2000). Far field dynamic Green's functions for BEM in transversely isotropic solids. *Wave Motion*, **32**, 113–123.
- Sanz, J. A., Ariza, M. P. y Dominguez, J. (2005). Three-dimensional BEM for piezoelectric fracture analysis. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **29**, 586–596.

- Saravanos, D.A. y Chamis, C.C. (1991). Computational simulation of damping in composite structures *J. Reinforced Plastics Compos.*, **10**, 5, 256–278.
- Schlar, N.A.. (1994). Anisotropic Analysis using Boundary Elements. Topics in Engineering. Vol. 20. *Computational Mechanics Publications, Southampton*.
- Shang, F., Kuna, M. y Abendroth, M. (2003). Finite element analysis of three-dimensional crack problems in piezoelectric structures *Eng. Fract. Mech.*, **70**, 143–160.
- Shield, R.T. (1951). Notes on Problems in Hexagonal Aelotropic Materials. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47**, 401–409.
- Shindo, Y., Oka, M. y Horiguchi, K. (2001). Analysis and testing of indentation fracture behavior of piezoelectric ceramic under electric fields. *J. Engng. Mat. and Struc.*, **123**, 293–300.
- Sih, G.C. y Embley, G.T. (1972). Sudden twisting of a penny shaped crack. *J. Appl. Mech.*, **39**, 395–400.
- Sladek, V., Sladek, J., y Tanaka, M. (1992). Numerical Solution of Nonsingular BIE for Crack Problems. Brebbia, C. A., Domínguez, J., and Paris, F, eds., *Boundary Elements XIV, Vol. 2. Computational Mechanics Publications, Southampton*.
- Sosa, H. (1991). Plane problems in piezoelectric media with deffects *Int. J. Solids Structures*, **28**, 4, 491–505.
- Sosa, H. (1992). On fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int. J. Solids Structures*, **29**, 4, 2613–2622.
- Stroh, A.N. (1962). Steady state problems in anisotropic elasticity. *J. Mat. Phys.*, **41**, 77–103.
- Suo, Z., Kuo, C.-M., Barnett, D. y Willis, J. (1992). Fracture mechanics for piezoelectric ceramics *Journal Mech. Phys. Solids*, **40**, 739–765.
- Takahashi, H. y Nori, M.. (1973). Quadrature formulas obtained by variable transformation *Numer. Math.*, **21**, 206–219.
- Tanaka, M., Sladek, V., y Sladek, J. (1994). Regularization Techniques Applied to Boundary Element Methods. *Appl. Mech. Reviews*, **47**, 457–499.
- Telles, J.C.F. (1987). A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **24**, 959–973.
- H.F. Tiersten (1969). Linear Piezoelectric Plate Vibrations. *Plenum*, New York.
- Toupin, R.A. (1956). The elastic dielectric. *J. Rat. Mech. Anal.*, **5**, 849–915.
- Tsai, Y.M. (1988). Dynamic Penny-Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material. *Eng. Fract. Mech.*, **31**, 977–984.
- Tsai, Y.M. (1989). Torsional Vibration of a Penny-Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material. *Advances in Fracture Research ICF 7*, **3**, (Edited by Salama et al.). Pergamon Press, Oxford. 2363–2368.

-
- Wang, B. (1992). Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in piezoelectric material. *Int. J. Solids Structures*, **29**, 293–308.
- Wang, C.Y. y Achenbach, J.D. (1995). 3-D Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids. *Proc. Roy. Soc. London*, **A449**, 441–458.
- Wang, Z.K. y Huang, S.H. (1995). Stress intensification near an elliptical crack border *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **22**, 229–237.
- Wang, B.L. y Mai, Y.W. (2004). Impermeable crack and permeable crack assumptions, which one is more realistic?. *J. Appl. Mech.*, **71**, 575–578.
- Wang, C.Y. y Zhang, Ch. (2005). 3-D and 2-D dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **29**, 454–465.
- Watson, J.O. (1979). Advanced implementation of the boundary element method for two and three dimensional elastostatics. *Developments in Boundary Element Methods-1*, ed. P.K. Banerjee y R. Butterfield, Applied Science Publishers, London, 31–63.
- Wilson, R.B. y Cruse, T.A. (1978). Efficient Implementation of Anisotropic Three Dimensional Boundary-Integral Equation Stress Analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **12**, 1383–1397.
- Wu, D. y Wu, C.C. (2006). Numerical analysis for piezoelectric crack under varied boundary conditions by optimized hybrid element method. *Eng. Frac. Mech.*, **73**, 649–670.
- Yang, J.H. y Lee, K.Y. (2003). Penny-shaped crack in a piezoelectric cylinder under electro-mechanical loads. *Archive Appl. Mech.*, **73**, 323–336.
- Yin-Tao, W., Liang-Jin, G. y Ting-Qing, Y. (2001). Prediction of the 3-D effective damping matrix and energy dissipation of viscoelastic fiber composites. *Composite Structures*, **54**, 49–55.
- Young, A. (1996). A Single-Domain Boundary Element Method for 3-D Elastostatic Crack Analysis Using Continuous Elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 1265–1293.
- Zhao, M., Shen, Y., Liu, Y. y Liu, G (1997). Isolated crack in three-dimensional piezoelectric solid: Part I-solution by Hankel transform. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **21**, 129–139.
- Zhao, M., Shen, Y., Liu, Y. y Liu, G (1997b). Isolated crack in three-dimensional piezoelectric solid. Part II: stress intensity factors for circular crack. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **21**, 141–149.