SUBVARIEDADES EN ESPACIOS DE CURVATURA ϕ–SECCIONAL CONSTANTE GENERALIZADOS

Memoria presentada por
Pablo S. Alegre Rueda
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Fdo.: Pablo S. Alegre Rueda.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$
El doctor director:

Alfonso Carriazo Rubio

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Resumen.

La curvatura de Riemann es una importante herramienta en el estudio de variedades. Así, es de sobra conocida la clasificación de los espacios de curvatura constante en función del valor de dicha curvatura.

En Geometría Compleja, F. Tricerri y L. Vanhecke ampliaron este estudio a los *espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados*. En esta memoria, introducimos el caso análogo en Geometría Casi-Contacto, definiendo los *espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados*. Presentamos interesantes ejemplos y estudiamos sus propiedades fundamentales.

En una segunda parte, realizamos el estudio de las *desigualdades de B.-Y. Chen* para subvariedades de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Indice

Introducción.

En Geometría Diferencial, el tensor de curvatura $\widetilde{R}$ de una variedad Riemanniana $(\widetilde{M}, g)$ desempeña un papel fundamental. En particular, resultan especialmente interesantes aquellos elementos que permiten determinarlo, facilitando la clasificación de las variedades Riemannianas en cuestión.

Un ejemplo fundamental es el de las curvaturas seccionales de la variedad. Para cada punto p de $\widetilde{M}$ y cada subespacio Π de dimensión 2 del espacio tangente $T_p\widetilde{M}$ a $\widetilde{M}$ en p, se define la *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de Π como $K(\Pi) = g(\widetilde{R}(X,Y)Y, X)$, siendo X e Y vectores ortonormales de Π. Si $K(\Pi)$ es constante, para toda sección plana Π de $T_p\widetilde{M}$ y para todo punto p de $\widetilde{M}$, entonces se dice que $\widetilde{M}$ es un *espacio de curvatura constante*. En este caso, el tensor de curvatura de $\widetilde{M}$ satisface la ecuación

$$\widetilde{R}(X,Y)Z \;=\; k\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\},$$

para cualesquiera campos diferenciables X, Y y Z, siendo k una constante. Como ejemplos notables de espacios de curvatura constante podemos encontrar los espacios euclídeos ($k = 0$) o las esferas con sus métricas usuales ($k = 1$).

El estudio de las variedades complejas desde un punto de vista Riemanniano presenta un comportamiento análogo al descrito anteriormente. En este sentido, si $(\widetilde{M}, J, g)$ es una variedad Kaehleriana, para cada vector unitario X, la curvatura seccional $K(X \wedge JX)$ de la sección plana generada por X y JX recibe el nombre de *curvatura seccional holomorfa* de X. Si todas las curvaturas seccionales holomorfas tienen el mismo valor c, entonces se dice que $\widetilde{M}$ es un *espacio de curvatura seccional holomorfa constante* c y se sabe que su tensor de curvatura es de la forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= c/4\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(X,JZ)JY - \\ &\quad - g(Y,JZ)JX + 2g(X,JY)JZ\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, es posible modelizar estos espacios tomando como ejemplos paradigmáticos el espacio proyectivo complejo $\mathbf{CP}^n(c)$, el espacio euclídeo complejo $\mathbf{C}^n$ o el espacio hiperbólico complejo $\mathbf{CH}^n(c)$, según sea $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$.

La situación anterior fue ampliada por F. Tricerri y L. Vanhecke en [38] y en [35], presentando la noción de *espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado* como aquella variedad casi Hermítica cuyo tensor de curvatura satisface la expresión

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= f_1\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \\ &+ f_2\{g(X,JZ)JY - g(Y,JZ)JX + 2g(X,JY)JZ\},\end{aligned}$$

donde f_1 y f_2 son dos funciones diferenciables en $\widetilde{M}$. En el mismo artículo demostraban que para dimensiones mayores o iguales que 6 las funciones f_1 y f_2 son constantes. Posteriormente, diversos autores han realizado trabajos sobre este tipo de variedades, destacando [27], en el que Z. Olszak presenta interesantes ejemplos en dimensión 4.

Por otra parte, el estudio análogo a la geometría casi Hermítica en dimensión impar corresponde de manera natural al de las variedades casi-contacto métricas. Dada una variedad Sasakiana $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$, una sección plana Π de $T_p\widetilde{M}$ generada por un vector unitario X, ortogonal a ξ, y por ϕX recibe el nombre de *ϕ-sección*, y su curvatura seccional $K(\Pi)$ se conoce como *curvatura ϕ-seccional*. Se dice que $\widetilde{M}$ es un *espacio de curvatura ϕ-seccional constante* c si todas sus curvaturas ϕ-seccionales toman el mismo valor c. En este caso, su tensor de curvatura viene determinado por la ecuación:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= (c+3)/4\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \\ &+ (c-1)/4\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z + \\ &+ \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\}.\end{aligned}$$

Estos espacios también pueden ser clasificados, dependiendo de si $c > -3$, $c = -3$ o $c < -3$.

El propósito fundamental de este trabajo es introducir el concepto de *espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado* como aquella variedad casi-contacto métrica cuyo vector de curvatura tome la forma

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= f_1\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}+ \\ &+f_2\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z\}+ \\ &+f_3\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\},\end{aligned}$$

siendo f_1, f_2 y f_3 funciones diferenciables en $\widetilde{M}$. Estos espacios así definidos engloban a los espacios de curvatura ϕ-seccional constantes. Esta definición la desarrollamos a lo largo del Capítulo 2. Anteriormente, aparece un primer capítulo dedicado a los preliminares en el que se recogen aquellos resultados y notaciones de Geometría Riemanniana, Compleja y Casi-Contacto que usaremos en el resto de la memoria.

El caso en el que las funciones f_2 y f_3 coincidan ha sido estudiado por P. Bueken y L. Vanhecke en [10] y [11]. Por ello ha sido necesario buscar ejemplos no triviales de variedades que pueden ser englobadas dentro de esta nueva familia, es decir, con las funciones f_2 y f_3 distintas. Hemos encontrado interesantes ejemplos, que justifican su estudio, a partir de variedades producto y productos warped.

Una vez ofrecida la definición anterior, estudiamos las principales propiedades que presentan estas variedades, relacionándolas tanto con los tipos de variedades ya conocidos en Geometría Casi-Contacto Métrica (variedades de contacto, K-contacto, Sasakianas, cosimplécticas, variedades con una estructura trans-Sasakiana (α,β), etc.), como con los espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados de la Geometría Compleja. Por ello, hemos usado en este estudio una gran variedad de construcciones geométricas: sumersiones Riemannianas, productos Riemannianos, productos warped y fibraciones de Boothby-Wang.

Así, a lo largo de la Sección 2.1 probaremos, entre otros resultados, que para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado es equivalente el ser una variedad K-contacto y el ser una variedad Sasakiana, y, en el Teorema 2.1.10, que un espacio $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$, dotado de una estructura de variedad de contacto, es una variedad Sasakiana si y sólo si se verifica:

$$f_3 = f_1 - 1.$$

En tal caso también se satisfacen las igualdades $f_2 = f_3 = f_1 - 1$, tal y como se pone de manifiesto en el Teorema 2.1.15.

Además, partiendo de ciertas identidades que se tienen para el tensor de curvatura de Riemann de una variedad Sasakiana, estudiamos esas igualdades para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, obteniendo interesantes consecuencias, como por ejemplo

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = \widetilde{R}(X, Y, Z, W),$$

para todos X, Y, Z, W ortogonales al campo de estructura.

Hemos señalado que F. Tricerri y L. Vanhecke demuestran, [38] y [35], que para dimensiones mayores o iguales que 6 los únicos espacios de curvatura holomorfa seccional constante generalizados que existen son aquellos que tienen funciones características constantes. Probaremos en el Corolario 2.2.19 un resultado equivalente en Geometría de Contacto: para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, que tenga dimensión mayor o igual que 5 y sea variedad Sasakiana, las funciones f_1, f_2, f_3 son constantes.

Se presenta por tanto la necesidad de encontrar más ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados. Para ello nos valemos de diversas construcciones geométricas, como puede ser partir de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado, $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ y realizar un producto métrico $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times \widetilde{N}$ (véase el Teorema 2.2.6) o un producto warped con una cierta función diferenciable f, $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$ (Teorema 2.2.11). Obtenemos así multitud de ejemplos con funciones no constantes.

Dedicamos toda la Sección 2.3 a obtener nuevos ejemplos, usando ahora diversas transformaciones métricas, como pueden ser las transformaciones conformes, las $\mathcal{D}$-homotéticas y $\mathcal{D}$-conformes.

Veremos en el Teorema 2.1.10, que para un espacio $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con dimensión mayor o igual que 5 con estructura de contacto basta tener $f_3 = f_1 - 1$ para que las funciones sean constantes. Se plantea naturalmente la cuestión de estudiar si existen espacios de curvatura ϕ-seccional constantes con estructura de contacto y funciones no constantes y también estudiar el caso particular de los espacios con dimensión 3. A ello dedicamos la Sección 2.4, en la que usaremos que un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura de contacto en un (κ, μ)-*espacio generalizado*.

Estos espacios han sido ampliamente estudiados por diversos autores. Los primeros en interesarse por ellos fueron D. E. Blair, T. Koufogiorgos y

B. J. Papantoniou que, en [6], consideraron aquellas variedades de contacto métricas en las que el tensor de curvatura de Riemann verifica la igualdad

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY),$$

para todos X e Y campos en $\widetilde{M}$, donde

$$hX = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)X,$$

κ y μ son ciertas constantes y L es la derivada de Lie. Esta condición es invariante por transformaciones D-homotéticas.

Estos espacios, llamados (κ,μ)-espacios, fueron clasificados por E. Boeckx en [9], y engloban a las variedades Sasakianas ($\kappa = 1$, $\mu = 0$). Un ejemplo clásico que no es Sasakiano es el fibrado tangente esférico de una variedad Riemanniana llana, dotado de la estructura de variedad de contacto métrica usual, [4].

Posteriormente, esta definición fue generalizada por R. Sharma en [31], trabajando con variedades de contacto métricas que verifican la condición para κ y μ funciones diferenciables no necesariamente constantes. Estas variedades son los (κ,μ)-espacios generalizados con los que vamos a trabajar.

Así, en dimensiones mayores o iguales que 5, llegamos a que todo espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estrucura de contacto es en realidad una variedad Sasakiana, y por tanto las funciones son constantes (Teorema 2.4.9).

Sin embargo en dimensión 3 sí existen ejemplos no triviales que son clasificados en la última parte de esta sección.

Por otra parte, en muchos de los ejemplos de la Sección 2.3 partimos de una variedad Kaehleriana y llegamos a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado dotado de una estructura trans-Sasakiana (α,β). Por ello procedemos a realizar en la Sección 2.5 un estudio detallado de estos espacios. Encontramos diversas ecuaciones que deben verificar las funciones de estructura de estos espacios. Con ello conseguimos mejorar alguno de los resultados vistos anteriormente como, por ejemplo, el Teorema 2.3.10. En dimensión 3 caracterizamos las funciones f_1, f_2, f_3 de los espacios que sean variedades trans-Sasakianas $(0,\beta)$, relacionándolas con la curvatura escalar y la función β.

Una vez justificado el interés por los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados, se abre ante nosotros el estudio de sus subvariedades.

Uno de los problemas fundamentales en la teoría de subvariedades es la inmersibilidad (o no inmersibilidad) de una variedad Riemanniana en un espacio Euclídeo, o más generalmente en un espacio de curvatura constante. Es bien conocido el resultado de J. F. Nash que afirma que toda variedad Riemanniana admite una inmersión isométrica en algún espacio Euclídeo con suficiente codimensión.

Para estudiar este problema, a partir del teorema de Nash, es natural imponer ciertas condiciones sobre la inmersión. Por ejemplo qué condiciones son necesarias para que una variedad Riemanniana admita una inmersión minimal en un espacio Euclídeo, una inmersión Lagrangiana en algún $\mathbf{C}^n$ o una inmersión slant en algún toro complejo $\mathbf{C}T^n$.

Una importante herramienta en este estudio es el invariante métrico definido por B.-Y. Chen. Este lleva a ciertas desigualdades que facilitan obstrucciones para que una variedad Riemanniana admita una inmersión totalmente real o slant en una variedad Hemítica. Diversos autores han estudiado el caso análogo en geometía de contacto. Así, han establecido las correspondientes desigualdades y ofrecido obstrucciones para que de una variedad admita una inmersión anti-invariante o slant en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante (para una visión de conjunto véase [17]).

Es por ello que, en esta memoria, ante la gran cantidad de aspectos que caben plantearse en torno a las subvariedades, nos preocupamos por formular las correspondientes desigualdades de B.-Y. Chen para subvariedades de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

A la hora de estudiar subvariedades se deben estudiar tanto los invariantes intrínsecos como extrínsecos. Entre los primeros cabe destacar la curvatura seccional, la curvatura de Ricci y la curvatura escalar, y entre los segundos, la norma de la segunda forma fundamental y el cuadrado de la curvatura media. Resultan igualmente de gran interés las relaciones existentes entre los invariantes intrínsecos y extrínsecos. En esta línea, B.-Y. Chen define un invariante intrínseco en el que interviene la curvatura escalar y la curvatura seccional y lo relaciona con el cuadrado de la curvatura media y la norma de la segunda forma fundamental. Dada una variedad Riemanniana M, para cada punto $p \in M$, se considera

$$(\mathrm{inf}K)(p) = \mathrm{inf}\{K(\Pi) : \Pi \text{ es una sección plana de } T_pM\},$$

donde $K(\Pi)$ denota la curvatura seccional en M. Sea también

$$\delta_M(p) = \frac{m(m+1)}{2}\,\tau(p) - \mathrm{inf}K(p),$$

con τ la curvatura escalar de M. δ_M es el invariante métrico introducido por Chen (ver [15], [16]).

Para una subvariedad M de un espacio de curvatura seccional constante $\mathbf{R}^n(c)$, Chen da la siguiente desigualdad

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}|H|^2 + \frac{1}{2}(m+1)(m-2)c,$$

donde m denota la dimensión de M y H es el vector curvatura media. Esta desigualdad también es válida para subvariedades totalmente invariantes de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante $\widetilde{M}^n(c)$, con curvatura seccional holomorfa constante c. Más tarde generalizó la situación anterior para subvariedades cualesquiera de dimensión mayor o igual que 2 de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante, demostrando esa misma desigualdad para el espacio hiperbólico complejo $\mathbf{CH}^n(c)$ $(c < 0)$ y una similar para el espacio proyectivo complejo $\mathbf{CP}^n(c)$.

En geometría de contacto, F. Defever, I. Mihai y L. Verstraelen, [18], obtuvieron una desigualdad análoga para espacios de curvatura ϕ-seccional constante, $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, y subvariedades normales al campo de estructura. A. Carriazo en [13] y Y. H. Kim y D.-S. Kim en [21] dan versiones de esta desigualdad para subvariedades tangentes al campo de estructura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante.

Posteriormente, [22], J.-S. Kim, Y.-M. Song y M. M. Tripathi, han estudiado las desigualdades de Chen para espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados. En el Capítulo 3, nuestro objetivo es encontrar las correspondientes desigualdades para subvariedades cualesquiera de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados.

Finalmente, quisiera aprovechar esta introducción para dar las gracias a todos aquellos que me han ayudado a llevar a cabo este trabajo.

En primer lugar, al Profesor Dr. D. Alfonso Carriazo Rubio por su ayuda en la elaboración de esta tesis. Muchas gracias por todo el tiempo que me ha dedicado, por darme siempre ánimos para continuar. Por su amistad.

Al Profesor Dr. D. David E. Blair por sus valiosos consejos al comenzar estos estudios.

Al Ilmo. Sr. Director del Departamento de Geometría y Topología, Profesor Dr. D. José Luis Cabrerizo Jaraíz, y los Profesores Dr. D. Francisco Javier Echarte Reula, Dr. D. Manuel Fernández Andrés y Dr. D. Luis Manuel Fernández Fernández por la ayuda y atención prestadas a lo largo de todos estos años.

Gracias también a mis padres, mi hermana, mi familia y amigos por su apoyo y cariño en los momentos buenos y malos.

Señalemos por último que, recientemente, hemos publicado en [1] algunos de los resultados que se recogen en los apartados 2.1, 2.2, 2.3 y 2.5 de esta memoria.

Capítulo 1

Preliminares.

Dedicamos este primer capítulo a resumir aquellos resultados de Geometría Casi-Contacto que necesitaremos a lo largo de esta memoria.

En primer lugar recordamos los distintos tipos de estructuras casi-contacto y sus principales propiedades. También mencionamos la definición de espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado, aunque sea una noción de Geometría Compleja. Finalmente, atendemos a cómo se relacionan los diversos operadores definidos en una variedad dotada de una estructura casi-contacto métrica.

1.1 Variedades casi-contacto.

Se define el tensor de curvatura de Riemann de una variedad Riemanniana $\widetilde{M}$, con conexión Riemanniana $\widetilde{\nabla}$, por

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

para cualesquiera campos X, Y, Z en $\widetilde{M}$. Dados X, Y, Z, W campos tangentes a $\widetilde{M}$, escribiremos:

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = g(\widetilde{R}(X,Y)Z, W).$$

Se dice que $\widetilde{M}^{2n+1}$, una variedad de dimensión $2n+1$, es una *variedad casi-contacto* si existe ϕ un tensor de tipo $(1,1)$, un campo vectorial ξ y una 1-forma η tales que:

$$\eta(\xi) = 1, \tag{1.1.1}$$

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{1.1.2}$$

para todo X campo en $\widetilde{M}$. ξ se denomina *campo de estructura*, se dice que $\widetilde{M}$ tiene una (ϕ, ξ, η)-estructura.

Para una variedad casi-contacto $\widetilde{M}^{2n+1}$ se verifican las siguientes igualdades:

$$\phi\xi = 0, \tag{1.1.3}$$

$$\eta \circ \phi = 0, \tag{1.1.4}$$

$$\text{rango}(\phi) = 2n. \tag{1.1.5}$$

Una métrica g en $\widetilde{M}$ se dice adaptada a la estructura casi-contacto si verifica

$$g(X, \xi) = \eta(X), \tag{1.1.6}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{1.1.7}$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}^{2n+1}$.

Una variedad casi-contacto dotada de una métrica adaptada g se llama *variedad casi-contacto métrica* y se dice que tiene una (ϕ, ξ, η, g)-estructura o una estructura casi-contacto métrica.

Para una variedad casi-contacto métrica se verifica

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y), \tag{1.1.8}$$

para cualesquiera campos X, Y en $\widetilde{M}$. En particular, $g(X, \phi X) = 0$ para todo X en $\widetilde{M}^{2n+1}$.

Se denota por Φ, y se denomina *2-forma fundamental* de $\widetilde{M}$, a la 2-forma definida por

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y), \tag{1.1.9}$$

para X, Y dos campos en $\widetilde{M}^{2n+1}$. En virtud de (1.1.8), se verifica que Φ es antisimétrica y, como ϕ tiene rango $2n$,

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0. \tag{1.1.10}$$

Se dice que una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}^{2n+1}$ es *de contacto métrica* si $\Phi = d\eta$. En ese caso η se llama *forma de contacto*, y por (1.1.10),

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

El caso completamente opuesto a una variedad de contacto es el de una *variedad cosimpléctica*, una variedad casi contacto métrica normal con η y Φ formas cerradas.

Usamos la siguiente notación:

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = \widetilde{\nabla}_X \phi Y - \phi \widetilde{\nabla}_X Y, \tag{1.1.11}$$

para X, Y campos en $\widetilde{M}$. Puede probarse que una variedad casi-contacto métrica es cosimpléctica si y sólo si

$$\widetilde{\nabla}\phi = 0, \tag{1.1.12}$$

es decir, si ϕ es paralelo (ver [5]).

Por otra parte, en una variedad de contacto métrica se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\widetilde{\nabla}_\xi \phi = 0, \tag{1.1.13}$$

$$\widetilde{\nabla}_\xi \xi = 0. \tag{1.1.14}$$

Si $\widetilde{M}$ es una variedad de contacto métrica y ξ es un campo de Killing con respecto a g, $\widetilde{M}$ se denomina *variedad K-contacto*. Se prueba que una variedad de contacto métrica es K-contacto si y sólo si se verifica:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\phi X. \tag{1.1.15}$$

De hecho, este resultado puede mejorarse:

Proposición 1.1.1.– *Toda variedad casi-contacto métrica con $\widetilde{\nabla}_X \xi = -\phi X$ es una variedad K-contacto.*

Demostración: Una variedad K-contacto es aquella variedad de contacto métrica $\widetilde{M}$ que verifica $\widetilde{\nabla}_X\xi = -\phi X$. Luego basta probar que la variedad es de contacto métrica, es decir, que se tiene

$$d\eta = \Phi.$$

Sean X, Y campo en $\widetilde{M}$. Para ellos

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X,Y]) =$$

$$= \frac{1}{2}(Xg(Y,\xi) - Yg(X,\xi) - \eta(\widetilde{\nabla}_X Y) + \eta(\widetilde{\nabla}_Y X)) =$$

$$= \frac{1}{2}(g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) + g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi) - g(\widetilde{\nabla}_Y X,\xi) -$$

$$-g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi) - g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) + g(\widetilde{\nabla}_X YX,\xi)) =$$

$$= \frac{1}{2}(g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi) - g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi)) =$$

$$= \frac{1}{2}(-g(\phi X,Y) + g(\phi Y,X)) = g(X,\phi Y) = \Phi(X,Y),$$

y por tanto $\widetilde{M}$ es una variedad K-contacto. □

En una variedad K-contacto se tiene

$$(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y = \widetilde{R}(\xi,X)Y, \tag{1.1.16}$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$.

Se dice que la estructura casi-contacto de $\widetilde{M}^{2n+1}$ es *normal* si el tensor de torsión de Nijenhuis, dado por

$$[\phi,\phi](X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X,Y] - \phi[X,\phi Y], \tag{1.1.17}$$

verifica la siguiente ecuación:

$$[\phi,\phi](X,Y) = -2d\eta(X,Y)\xi. \tag{1.1.18}$$

Una variedad de contacto métrica normal se denomina *variedad Sasakiana*. Se demuestra que toda variedad Sasakiana es K-contacto, y que una variedad casi-contacto métrica es Sasakiana si y sólo si

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \tag{1.1.19}$$

para todo par de campos X, Y en $\widetilde{M}$.

En una variedad Sasakiana se verifican las siguientes igualdades

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{1.1.20}$$

$$\widetilde{R}(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X, \tag{1.1.21}$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$.

Una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$ se dice que es una *variedad nearly Sasakiana* si para todo campo X en $\widetilde{M}$ se cumple:

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)X = g(X,X)\xi - \eta(X)X. \tag{1.1.22}$$

Por último, se dice que una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$ tiene una *estructura trans-Sasakiana* (α, β), [29], si

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X), \tag{1.1.23}$$

con α y β funciones diferenciables en la variedad, para cualesquiera campos X e Y en la variedad.

Observamos que, por (1.1.12), una variedad cosimpléctica es una variedad trans-Sasakiana con $\alpha = \beta = 0$ y que una variedad Sasakiana lo es con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Por otra parte, el caso en el que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ se corresponde con las *variedades de Kenmotsu*.

Estos espacios han sido estudiados por J. C. Marrero en [25], donde demuestra que una variedad trans-Sasakiana (α, β) de dimensión mayor o igual que 5 es de tipo $(0, \beta)$ o $(\alpha, 0)$.

Para una variedad trans-Sasakiana (α, β) se verifica:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), \tag{1.1.24}$$

y
$$d\eta = \alpha\Phi. \tag{1.1.25}$$
En efecto, la primera se deduce inmediatamente de la definición de variedad trans-Sasakiana (α, β). Y para la segunda, sean X, Y campos en $\widetilde{M}$,

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(g(-\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), Y) - g(-\alpha\phi Y + \beta(Y - \eta(Y)\xi), X)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-\alpha g(\phi X, Y) + \beta g(X,Y) - \beta\eta(X)\eta(Y) +$$
$$+\alpha g(\phi Y, X) - \beta g(Y, X) + \beta\eta(Y)\eta(X)) =$$
$$= \alpha g(X, \phi Y).$$

Una variedad casi-contacto métrica se denomina $C(\alpha)$-*variedad* si su tensor de curvatura de Riemann verifica la siguiente identidad

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W) +$$

$$+\alpha\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) +$$
$$+g(X,\phi Z)g(Y,\phi W) - g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\},$$

para todos X, Y, Z, W campos diferenciables en $\widetilde{M}$, para un cierto número real α.

Se demuestra que una variedad trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$, con α una cierta constante, es una $C(\alpha^2)$-variedad y una variedad cosimpléctica es una $C(0)$-variedad, véase [19].

1.2 Subvariedades.

En esta sección ofrecemos un breve repaso a la teoría general de subvariedades. Recordamos los distintos tipos de estructuras casi-contacto y sus primeras propiedades. Finalmente, atendemos a cómo se relacionan los diversos operadores definidos en una variedad dotada de una estructura casi-contacto métrica y en una subvariedad suya.

Sea M una subvariedad de una variedad Riemanniana $\widetilde{M}$. Denotaremos por g tanto a la métrica de $\widetilde{M}$ como a la inducida en M.

Denotemos por ∇ y $\widetilde{\nabla}$ las respectivas conexiones Riemannianas de M y $\widetilde{M}$, entonces para X, Y campos tangentes a M y un campo normal V, las fórmulas de Gauss y Weingarten vienen dadas por:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{1.2.1}$$

$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V, \tag{1.2.2}$$

donde h denota la segunda forma fundamental de M en $\widetilde{M}$ y A_V el endomorfismo de Weingarten asociado a V. La segunda forma fundamental y el endomorfismo de Weingarten están relacionados según la siguiente ecuación:

$$g(h(X,Y),V) = g(A_V X, Y). \tag{1.2.3}$$

Si M es una subvariedad de dimensión $m+1$ y $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ es una referencia local ortonormal suya, se define la curvatura media

$$H = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} h(E_i, E_i). \tag{1.2.4}$$

Se dice que M es minimal si H es idénticamente nulo.

Sean M subvariedad de $\widetilde{M}$ y R, $\widetilde{R}$ sus tensores de curvatura de Riemann respectivos. Entonces si X, Y, Z, W son campos tangentes a M, se verifican la ecuación de Gauss

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z)) + \\ + g(h(X,Z),h(Y,W)),\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

y la ecuación de Codazzi

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{1.2.6}$$

donde $\widetilde{R}(X,Y,Z)^{\perp}$ denota la componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ y

$$(\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z). \tag{1.2.7}$$

Sea ahora, M una subvariedad, de dimensión $m+1$, de una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$, con dimensión $2n+1$. Supondremos en adelante, a no ser que se indique lo contrario, que M es tangente al campo de estructura, en ese caso podemos escribir

$$TM = \mathcal{D} \oplus \mathrm{Span}\{\xi\},$$

donde $\mathcal{D}$, el complemento ortogonal de ξ en TM, se denomina *distribución de contacto* en M.

Para un campo X tangente a $\widetilde{M}$ escribimos

$$\phi X = TX + NX, \tag{1.2.8}$$

donde TX y NX son las componentes tangente y normal de ϕX, respectivamente. Y para V un campo normal a la subvariedad,

$$\phi V = tV + nV, \tag{1.2.9}$$

representando tV y nV las componentes tangente y normal de ϕV.

Con esta notación se tienen trivialmente, a partir de (1.1.8), las relaciones que siguen

$$g(TX,Y) = -g(X,TY), \tag{1.2.10}$$

$$g(NX,V) = -g(X,tV), \tag{1.2.11}$$

$$g(nV,W) = -g(V,nW), \tag{1.2.12}$$

para todos X,Y tangentes a M y V,W normales.

Si la variedad ambiente $\widetilde{M}$ es de contacto, para una subvariedad tangente al campo de estructura se tiene a partir de (1.2.1) y (1.1.14):

$$\nabla_\xi \xi = 0, \tag{1.2.13}$$

$$h(\xi,\xi) = 0. \tag{1.2.14}$$

Para una subvariedad M de una variedad K-contacto tangente al campo de estructura, por (1.1.15), se verifica

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -\phi X = -TX - NX,$$

y como siempre se tiene (1.2.1),

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = \nabla_X\xi + h(X,\xi),$$

igualando las componentes tangentes,

$$\nabla_X\xi = -TX, \tag{1.2.15}$$

e igualando las componentes normales,

$$h(X,\xi) = -NX. \tag{1.2.16}$$

Ya estudiamos $\widetilde{\nabla}_X\xi$ con X tangente para una variedad K-contacto, observemos entonces $\widetilde{\nabla}_V\xi$ con V normal.

Lema 1.2.1.– *Sea M una subvariedad de una variedad K-contacto $\widetilde{M}$, tangente al campo de estructura. Se verifica*

$$A_V\xi = tV, \tag{1.2.17}$$

$$\nabla^{\perp}_{\xi}V = -nV + [\xi, V], \tag{1.2.18}$$

para todo campo V normal a la subvariedad.

Demostración: En las condiciones del lema se tiene

$$\widetilde{\nabla}_\xi V = -A_V\xi + \nabla^{\perp}_{\xi}V, \tag{1.2.19}$$

y por otra parte

$$\widetilde{\nabla}_\xi V = \widetilde{\nabla}_V\xi + [\xi, V] = -\phi V + [\xi, V] = -tV - nV + [\xi, V]. \tag{1.2.20}$$

Ahora bien, $[\xi, V]$ es un campo normal a la subvariedad, pues, para todo campo tangente X, se verifica

$$g(X, [\xi, V]) = g(X, \widetilde{\nabla}_\xi V - \widetilde{\nabla}_V\xi) = \xi g(X, V) - g(\widetilde{\nabla}_\xi X, V) + g(X, \phi V) =$$

$$= -g(\widetilde{\nabla}_\xi X, V) - g(\phi X, V) = -g(\widetilde{\nabla}_\xi X, V) + g(\widetilde{\nabla}_X \xi, V) = g([X,\xi], V) = 0.$$

Luego, igualando las componentes tangentes y normales de las expresiones (1.2.19) y (1.2.20), se obtienen (1.2.17) y (1.2.18) respectivamente. □

1.3 Algunas notaciones.

A continuación aclaramos algunas de las notaciones que vamos a usar en el trabajo, esto es necesario pues en la literatura se manejan varias definiciones según el autor.

Sea $\widetilde{M}$ una variedad métrica de dimensión n y $\{E_1, ..., E_n\}$ una referencia local ortonormal. Se define el tensor de Ricci como

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{R}(E_i, X, Y, E_i), \tag{1.3.1}$$

a partir de ahí se define el operador de Ricci, Q, como el tensor que verifica

$$S(X,Y) = g(QX, Y), \tag{1.3.2}$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$. Por lo que

$$QX = \sum_i \widetilde{R}(X, E_i)E_i. \tag{1.3.3}$$

Por otra parte, usaremos la siguiente definición de la curvatura escalar:

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i S(E_i, E_i) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \widetilde{R}(E_i, E_j, E_j, E_i). \tag{1.3.4}$$

En una variedad casi contacto métrica $\widetilde{M}^{2n+1}$ se denomina ϕ-base a una base ortonormal del tipo:

$$\{E_1, ..., E_n, \phi E_1, ..., \phi E_n, \xi\}. \tag{1.3.5}$$

También introducimos la notación que usaremos para describir el tensor de curvatura de Ricci de ciertas variedades en Geometría Compleja y de Contacto.

En Geometría Compleja, el tensor de curvatura de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante c, (una variedad Kaehleriana con curvatura seccional holomorfa constante) $\widetilde{N}^{2n}(c)$,viene dado por

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) +$$

$$+\frac{c}{4}(g(X,JZ)JY - g(Y,JZ)JX + 2g(X,JY)JZ)$$

Un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado es una variedad casi Hermítica $\widetilde{N}$ cuyo tensor de curvatura es de la forma

$$\widetilde{R} = F_1R_1 + F_2R_2, \tag{1.3.6}$$

donde F_1 y F_2 son funciones diferenciables en $\widetilde{N}$ y

$$\widetilde{R}_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y, \tag{1.3.7}$$

$$\widetilde{R}_2(X,Y)Z = g(X,JZ)JY - g(Y,JZ)JX + 2g(X,JY)JZ, \tag{1.3.8}$$

para todos X, Y, Z campos diferenciables en $\widetilde{N}$. Se denota por $\widetilde{N}(F_1, F_2)$. Está claro que todo espacio de curvatura seccional holomorfa constante es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado.

Si $(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ es una variedad casi-contacto métrica, se llama *ϕ-sección* de $\widetilde{M}$ en $p \in \widetilde{M}$ a una sección $\Pi \subseteq T_p(\widetilde{M})$ tal que exista un vector X_p, unitario y ortogonal a ξ_p, verificando $\Pi = Span\{X_p, \phi X_p\}$.

Y se define la *curvatura ϕ-seccional de* Π por

$$K(X, \phi X) = \widetilde{R}(X, \phi X, \phi X, X). \tag{1.3.9}$$

Una variedad Sasakiana con curvatura ϕ-seccional constante, es decir, tal que el valor de la curvatura ϕ-seccional no dependa de la ϕ-sección escogida ni del punto de $\widetilde{M}$ en cuestión, se denomina *espacio de curvatura ϕ-seccional constante.*

El tensor de curvatura de Riemann de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante tiene la siguiente expresión,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)+$$

$$+\frac{c-1}{4}(g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z)+$$

$$+\frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi),$$

donde c denota la curvatura ϕ-seccional.

Usaremos la siguiente notación:

$$\widetilde{R}_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y, \tag{1.3.10}$$

$$\widetilde{R}_2(X,Y)Z = g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z, \tag{1.3.11}$$

$$\widetilde{R}_3(X,Y)Z = \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi, \tag{1.3.12}$$

y escribiremos:

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c+3}{4}\widetilde{R}_1(X,Y)Z + \frac{c-1}{4} + \widetilde{R}_2(X,Y)Z + \frac{c-1}{4}\widetilde{R}_3(X,Y)Z.$$

En lo concerniente a subvariedades vamos a fijar las definiciones que usaremos de los cuadrados de las normas de T y N. Si trabajamos con una subvariedad M tangente al campo de estructura, consideramos que su dimensión es $m+1$, y dada una base ortonormal local de campos $\{E_1,...,E_m\}$ de $\mathcal{D}$, definimos

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^{m} |TE_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g^2(E_i, TE_j), \tag{1.3.13}$$

$$|N|^2 = \sum_{i=1}^{m} |NE_i|^2, \tag{1.3.14}$$

respectivamente. Si la subvariedad M es normal al campo de estructura, consideramos que su dimensión es m, y fijada una referencia local de campos ortonormales, $\{E_1,...,E_m\}$, de TM, los cuadrados de las normas de T y N viene dados por esas mismas ecuaciones. Es fácil probar que, en cualquiera de los casos, $|T|^2$ y $|N|^2$ son independientes de la elección de la base.

Capítulo 2

Espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados.

En este segundo capítulo definimos los *espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados* de forma que engloben a los espacios de curvatura ϕ-seccional constante, de igual manera que los espacios de curvatura seccional holomorfa constante constituyen un ejemplo natural de espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados.

Presentamos ejemplos de dichos espacios que justifican el interés por ellos. Y estudiamos algunas identidades importantes que verifica el tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Finalmente, analizamos la relación de los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados que definimos y los tratados por P. Bueken y L. Vanhecke en [10] y [11].

2.1 Definición y primeras propiedades.

En lo que sigue denotaremos por $\widetilde{M}$ a una variedad casi-contacto métrica con estructura (ϕ, ξ, η, g).

Definición 2.1.1.– *Decimos que una variedad casi-contacto métrica* $\widetilde{M}$ *es un* espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado *si existen funciones* f_1*,* f_2 *y* f_3 *diferenciables en* $\widetilde{M}$ *tales que*

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = f_1(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)+$$

$$+f_2(g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z)+$$

$$+f_3(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi), \quad (2.1.1)$$

para todos X, Y, Z *campos diferenciables en* $\widetilde{M}$*, donde* $\widetilde{R}$ *denota el tensor de curvatura de* $\widetilde{M}$*. En tal caso, escribiremos* $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$*.*

Nota 2.1.2.– Observemos que un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ es un caso particular de espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con $f_1 = \dfrac{c+3}{4}$ y $f_2 = f_3 = \dfrac{c-1}{4}$.

Ejemplo 2.1.3.– En los Preliminares vimos que una variedad casi-contacto métrica se llamaba cosimpléctica si $\widetilde{\nabla}\phi = 0$. En [3], C.L. Bejan señala que si $\widetilde{M}$ es una variedad cosimpléctica con curvatura ϕ-seccional constante c, el tensor de curvatura de Riemann viene dado por la siguiente expresión,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y+$$

$$+g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z+$$

$$+\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\},$$

es decir, es un espacio de curvatura ϕ seccional constante generalizado con $f_1 = f_2 = f_3 = \dfrac{c}{4}$.

Ejemplo 2.1.4.– En [10], P. Bueken y L. Vanhecke consideran una variedad casi-contacto métrica que sea $C(\alpha)$*-variedad* y que además tenga curvatura ϕ-seccional constante c. Su tensor de curvatura de Riemann viene dado por

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c+3\alpha^2}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)\}+$$

$$+\frac{c-\alpha^2}{4}\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z\}+$$

$$+\frac{c-\alpha^2}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\},$$

siendo por tanto un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con $f_1 = \dfrac{c+3\alpha^2}{4}$ y $f_2 = f_3 = \dfrac{c-\alpha^2}{4}$.

En el siguiente teorema probaremos una condición que debe cumplir f_3 en el caso de que la variedad sea K-contacto. Para ello, necesitamos un resultado previo.

Lema 2.1.5.– *En una variedad K-contacto $\widetilde{M}$, las curvaturas seccionales de secciones planas que contengan al campo de estructura ξ valen 1 en cada punto de $\widetilde{M}$.*

Demostración: Dado un campo X unitario y ortogonal a ξ, teniendo en cuenta (1.1.13), (1.1.14) y (1.1.15), se prueba

$$\widetilde{R}(X,\xi,\xi,X) = -g(\widetilde{\nabla}_\xi\widetilde{\nabla}_X\xi, X) - g(\widetilde{\nabla}_{[X,\xi]}\xi, X) =$$

$$= g(\widetilde{\nabla}_\xi\phi X, X) + g(\phi[X,\xi], X) =$$

$$= g((\widetilde{\nabla}_\xi\phi)X + \phi\widetilde{\nabla}_X\xi, X) = -g(\phi^2X, X) = 1,$$

y por lo tanto se tiene el resultado. □

Teorema 2.1.6.– *Sea $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Si $\widetilde{M}$ es K-contacto, entonces $f_3 = f_1 - 1$.*

Demostración: Dado un campo X unitario y ortogonal a ξ, por la ecuación (2.1.1) se tiene

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = f_1(g(\xi,\xi)X - g(X,\xi)\xi)+$$

$$+f_2(g(X,\phi\xi)\phi\xi - g(\xi,\phi\xi)\phi X + 2g(X,\phi\xi)\phi\xi)+$$

$$+f_3(\eta(X)\eta(\xi)\xi - \eta(\xi)\eta(\xi)X + g(X,\xi)\eta(\xi)\xi - g(\xi,\xi)\eta(X)\xi) =$$

$$= (f_1 - f_3)X,$$

lo cual implica que:
$$\widetilde{R}(X,\xi,\xi,X) = f_1 - f_3.$$

Ahora bien, al ser $\widetilde{M}$ K-contacto, en virtud del Lema 2.1.5,

$$\widetilde{R}(X,\xi,\xi,X) = 1,$$

de donde se deduce el resultado. □

Nota 2.1.7.– Como toda variedad Sasakiana es una variedad K-contacto, se deduce del teorema anterior que si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad Sasakiana entonces $f_3 = f_1 - 1$. Este resultado, para variedades Sasakianas, también podemos obtenerlo atendiendo a otras relaciones que aparecen en los preliminares, (1.1.20) y (1.1.21).

Usando que en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ que sea una variedad K-contacto se verifica $f_3 = f_1 - 1$, probamos que, en realidad, para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado son equivalentes ser K-contacto y ser Sasakiano.

Teorema 2.1.8.– *Todo espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que sea una variedad K-contacto es Sasakiano.*

Demostración: Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado y supongamos que es una variedad K-contacto. Entonces se verifica la ecuación (1.1.16),

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = \widetilde{R}(\xi, X)Y,$$

por tanto, según la expresión del tensor de curvatura de Riemann, queda

$$\begin{gathered}(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = f_1(g(X,Y)\xi - g(\xi,Y)X) + \\ + f_2(g(\xi,\phi Y)\phi X - g(X,\phi Y)\phi\xi + 2g(\xi,\phi X)\phi Y) + \\ + f_3(\eta(\xi)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\xi + g(\xi,Y)\eta(X)\xi - g(X,Y)\eta(\xi)\xi) = \\ = (f_1 - f_3)(g(X,Y)\xi - g(\xi,Y)X) = \\ = (f_1 - f_3)(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) =\end{gathered}$$

$$= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X,$$

pues al ser $\widetilde{M}$ K-contacto se tiene que $f_3 = f_1 - 1$ por el Teorema 2.1.6, y esta ecuación implica que $\widetilde{M}$ es una variedad Sasakiana. □

A partir de otras ecuaciones que verifica el tensor de curvatura de Ricci de una variedad de contacto métrica, podemos enunciar un resultado que, dada la equivalencia entre ser una variedad K-contacto y ser Sasakiana para espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, es el recíproco del Teorema 2.1.6 para variedades de contacto.

En [4, pág. 65] se demuestra el siguiente resultado.

Lema 2.1.9.– *Una variedad de contacto $\widetilde{M}^{2n+1}$ es una variedad K-contacto si y sólo si el tensor de curvatura de Ricci en la dirección de ξ es $2n$, es decir, si y sólo si*

$$S(\xi,\xi) = 2n.$$

Teorema 2.1.10.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad de contacto métrica con $f_3 = f_1 - 1$ es una variedad Sasakiana.*

Demostración: Consideremos una variedad $\widetilde{M}$ como la del enunciado, escogemos una referencia local ortonormal $\{e_1, ..., e_{2n}, e_{2n+1} = \xi\}$, para ella el tensor de curvatura de Ricci en la dirección de ξ viene dado por

$$S(\xi,\xi) = \sum_{1=1}^{2n} \widetilde{R}(e_i,\xi,\xi,e_i) + \widetilde{R}(\xi,\xi,\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{2n}(f_1 - f_3),$$

en virtud de los resultados del Teorema 2.1.6, y si $f_3 = f_1 - 1$ resulta que

$$S(\xi,\xi) = 2n.$$

Así, por el Lema 2.1.9, se tiene que la variedad $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es K-contacto y con el Teorema 2.1.8 se concluye que es Sasakiana. □

La hipótesis de que la variedad sea de contacto métrica es necesaria. Para comprobarlo recurrimos a un ejemplo que probaremos más adelante, dado un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado

$\widetilde{N}(F_1, F_2)$ Kaehleriano (por ejemplo un espacio de curvatura seccional holomorfa constante), consideremos el producto warped $\widetilde{M} = (-\pi/2, \pi/2) \times_f \widetilde{N}$ con $f(t) = \cos t$, entonces como resultado del Teorema 2.2.11 veremos que $\widetilde{M}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con funciones

$$f_1 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} = \frac{(F_1 \circ \pi) + \operatorname{sen} t}{\cos^2 t},$$

$$f_2 = (F_2 \circ \pi)/f^2 = (F_2 \circ \pi)/\cos^2 t,$$

$$f_3 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} = \frac{(F_1 \circ \pi) + \operatorname{sen} t}{\cos^2 t} - 1,$$

es decir, para este ejemplo $f_3 = f_1 - 1$ y sin embargo no es una variedad Sasakiana pues, según se demuestra en la Proposición 2.2.25 es una variedad trans-Sasakiana $(0, -\tan t)$.

Veamos ahora algunas propiedades interesantes de los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados. Estudiamos en primer lugar la curvatura ϕ-seccional de uno de estos espacios y posteriormente algunas identidades que verifica su tensor de curvatura.

Proposición 2.1.11.– *La curvatura ϕ-seccional de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es $f_1 + 3f_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado X un campo unitario y ortogonal a ξ, la curvatura ϕ-seccional de $\pi = \mathrm{Span}\{X_p, \phi X_p\}$ viene dada según (1.3.9) por

$$K(X, \phi X) = \widetilde{R}(X, \phi X, \phi X, X) =$$

$$= f_1(g(\phi X, \phi X)g(X, X) - g(X, \phi X)g(\phi X, X)) +$$
$$+ f_2(g(X, \phi^2 X)g(\phi^2 X, X) - g(\phi X, \phi^2 X)g(\phi X, X) + 2g(X, \phi^2 X)g(\phi^2 X, X)) +$$
$$+ f_3(\eta(X)\eta(\phi X)g(\phi X, X) - \eta(\phi X)\eta(\phi X)g(X, X) +$$
$$+ g(X, \phi X)\eta(\phi X)\eta(X) - g(\phi X, \phi X)\eta(X)\eta(X)),$$

teniendo en cuenta (1.1.2), (1.1.4), (1.1.6), (1.1.7) y que X es ortogonal a ξ se llega a

$$K(X, \phi X) = (f_1 + 3f_2)g(X, X),$$

con lo que, al ser X unitario, concluímos la demostración. $\square$

En [4, pág. 93] aparece el siguiente resultado referido a variedades Sasakianas:

Lema 2.1.12.– *En una variedad Sasakiana $\widetilde{M}$ se verifican las siguientes identidades*

i) para todos X, Y, Z, W,

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,\phi W) + \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,W) = -\widetilde{\Gamma}(X,Y,Z,W),$$

y para X, Y, Z, W ortogonales a ξ,

ii) $\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = \widetilde{R}(X,Y,Z,W)$,

iii) $\widetilde{R}(X,\phi X,Y,\phi Y) = \widetilde{R}(X,Y,X,Y) + \widetilde{R}(X,\phi Y,X,\phi Y) - 2\widetilde{\Gamma}(X,Y,X,\phi Y)$,

donde

$$\widetilde{\Gamma}(X,Y,Z,W) = d\eta(X,Z)g(Y,W) - d\eta(X,W)g(Y,Z) -$$

$$-d\eta(Y,Z)g(X,W) + d\eta(Y,W)g(X,Z),$$

para cualesquiera X, Y, Z, W campos en $\widetilde{M}$.

A continuación vamos a establecer unas identidades análogas a éstas para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Para ello denotaremos

$$\widetilde{P}(X,Y,Z,W) = g(X,\phi Z)g(Y,W) - g(X,\phi W)g(Y,Z) -$$

$$-g(Y,\phi Z)g(X,W) + g(Y,\phi W)g(X,Z),$$

con X, Y, Z, W campos en $\widetilde{M}$ que, en el caso de una variedad Sasakiana, coincide con la definición de $\widetilde{\Gamma}$ pues, al ser la variedad de contacto métrica, $d\eta = \Phi$.

Proposición 2.1.13.– *Sea* $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ *un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado, se verifica*

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,\phi W) + \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,W) = -(f_1 - f_2)\widetilde{P}(X,Y,Z,W),$$

para todos X, Y, Z, W *ortogonales a* ξ.

Demostración: Dados X, Y, Z, W campos en $\widetilde{M}$, en virtud de (2.1.1):

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,\phi W) + \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,W) =$$

$$\begin{gathered}
= f_1\{g(Y,Z)g(X,\phi W) - g(X,Z)g(Y,\phi W)\}+ \\
+f_2\{g(X,\phi Z)g(\phi Y,\phi W) - g(Y,\phi Z)g(\phi X,\phi W) + 2g(X,\phi Y)g(\phi Z,\phi W)\}+ \\
+f_3\{\eta(X)\eta(Z)g(Y,\phi W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,\phi W)+ \\
+g(X,Z)\eta(Y)\eta(\phi W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(\phi W)\}+ \\
+f_1\{g(Y,\phi Z)g(X,W) - g(X,\phi Z)g(Y,W)\}+ \\
+f_2\{g(X,\phi^2 Z)g(\phi Y,W) - g(Y,\phi^2 Z)g(\phi X,W) + 2g(X,\phi Y)g(\phi^2 Z,W)\}+ \\
+f_3\{\eta(X)\eta(\phi Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(\phi Z)g(X,W)+ \\
+g(X,\phi Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y,\phi Z)\eta(X)\eta(W)\}.
\end{gathered}$$

Ahora bien, si X, Y, Z, W son ortogonales a ξ, los términos que aparecen multiplicando a f_3 se anulan. Y por (1.1.1), (1.1.2) y (1.1.7) queda

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,\phi W) + \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,W) =$$

$$\begin{gathered}
= f_1\{g(Y,Z)g(X,\phi W) - g(X,Z)g(Y,\phi W)\}+ \\
+f_2\{g(X,\phi Z)g(Y,W) - g(Y,\phi Z)g(X,W) + 2g(X,\phi Y)g(Z,W)\}+ \\
+f_1\{g(Y,\phi Z)g(X,W) - g(X,\phi Z)g(Y,W)\}+ \\
+f_2\{-g(X,Z)g(\phi Y,W) + g(Y,Z)g(\phi X,W) - 2g(X,\phi Y)g(Z,W)\} = \\
= -\,(f_1 - f_2)\,\widetilde{P}(X,Y,Z,W),
\end{gathered}$$

como queríamos demostrar. □

De la Proposición 2.1.13 y del apartado $i)$ del Lema 2.1.12 deducimos la relación que existe entre las funciones f_1 y f_2 para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que sea una variedad Sasakiana.

Proposición 2.1.14.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado dotado de una estructura Sasakiana, entonces $f_2 = f_1 - 1$.*

Demostración: Comparando las fórmulas del Lema 2.1.12 y la Proposición 2.1.13 se deduce que $f_1 - f_2 = 1$. □

Y teniendo en cuenta el Teorema 2.1.6, resumimos la situación que se tiene para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado Sasakiano en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.15.– *En un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado Sasakiano, se verifica la siguiente relación:*

$$f_2 = f_3 = f_1 - 1.$$

Proposición 2.1.16.– *En un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, se verifica*

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = \widetilde{R}(X, Y, Z, W),$$

para todos X, Y, Z, W ortogonales a ξ.

Demostración: En efecto, dados X, Y, Z, W campos en $\widetilde{M}$, en virtud de (1.1.1) y de (2.1.1):

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = f_1\{g(\phi Y, \phi Z)g(\phi X, \phi W) - g(\phi X, \phi Z)g(\phi Y, \phi W)\}+$$
$$+f_2\{g(\phi X, \phi^2 Z)g(\phi^2 Y, \phi W) - g(\phi Y, \phi^2 Z)g(\phi^2 X, \phi W)+$$
$$+2g(\phi X, \phi^2 Y)g(\phi^2 Z, \phi W)\}.$$

De nuevo por (1.1.2) y (1.1.1)

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = f_1\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\}+$$
$$+f_2\{g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W) + 2g(X, \phi Y)g(\phi Z, W)\}+$$

$$+f_1\{-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)+$$
$$+g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) + \eta(X)\eta(Z)g(Y,W)\}.$$

Ahora bien, si X, Y, Z, W son campos ortogonales a ξ, el último término se anula y esa expresión coincide con $\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$. □

Por último, en relación al apartado *iii*) del Lema 2.1.12 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.17.– *En un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, para todos X, Y ortogonales a ξ se verifica:*

$$\widetilde{R}(X,\phi X,Y,\phi Y) = \widetilde{R}(X,Y,X,Y) + \widetilde{R}(X,\phi Y,X,\phi Y)-$$
$$-2(f_1 - f_2)\widetilde{P}(X,Y,X,\phi Y).$$

Demostración: Dados X, Y como los del enunciado, por (2.1.1) se tiene para ellos

$$\widetilde{R}(X,\phi X,Y,\phi Y) - \widetilde{R}(X,Y,X,Y) - \widetilde{R}(X,\phi Y,X,\phi Y) =$$
$$= f_1\{g(\phi X,Y)g(X,\phi Y) - g(X,Y)g(\phi X,\phi Y)\}+$$
$$+f_2\{g(X,\phi Y)g(\phi^2 X,\phi Y) - g(\phi X,\phi Y)g(\phi X,\phi Y) + 2g(X,\phi^2 X)g(\phi Y,\phi Y)\}-$$
$$-f_1\{g(Y,X)g(X,Y) - g(X,X)g(Y,Y)\}-$$
$$-f_2\{g(X,\phi X)g(\phi Y,Y) - g(Y,\phi X)g(\phi X,Y) + 2g(X,\phi Y)g(\phi X,Y)\}-$$
$$-f_1\{g(\phi Y,X)g(X,\phi Y) - g(X,X)g(\phi Y,\phi Y)\}-$$
$$-f_2\{g(X,\phi X)g(\phi^2 Y,\phi Y) - g(\phi Y,\phi X)g(\phi X,\phi Y) + 2g(X,\phi^2 Y)g(\phi X,\phi Y)\},$$

y operando teniendo en cuenta (1.1.1), (1.1.2) y (1.1.7), queda

$$\widetilde{R}(X,\phi X,Y,\phi Y) - \widetilde{R}(X,Y,X,Y) - \widetilde{R}(X,\phi Y,X,\phi Y) =$$
$$= f_1\{-g(X,\phi Y)^2 - g(X,Y)^2\}+$$
$$+f_2\{-g(X,\phi Y)^2 - g(X,Y)^2 - 2g(X,X)g(Y,Y)\}-$$
$$-f_1\{g(Y,X)^2 - g(X,X)g(Y,Y)\} - f_2\{-3g(X,\phi Y)^2\}-$$

$$-f_1\{-g(X,\phi Y)^2 - g(X,X)g(Y,Y)\} - f_2\{-3g(X,Y)\} =$$
$$= 2(f_2 - f_1)\{g(X,\phi Y)^2 + g(X,Y)^2 - g(X,X)g(Y,Y) =$$
$$= 2(f_2 - f_1)\widetilde{P}(X,Y,X,\phi Y),$$

con lo que se concluye la demostración. □

A partir de esta proposición y del Lema 2.1.12 se obtiene de nuevo el mismo resultado de la Proposición 2.1.14.

En el Ejemplo 2.1.4 tratábamos con una $C(\alpha)$-variedad, es decir, una variedad casi-contacto métrica cuyo tensor de curvatura de Riemann verificaba

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W) +$$
$$+\alpha\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) +$$
$$+g(X,\phi Z)g(Y,\phi W) - g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\}, \tag{2.1.2}$$

para un cierto número real α, siendo X,Y,Z,W campos cualesquiera en $\widetilde{M}$. Estudiamos a continuación la diferencia $\widetilde{R}(X,Y,Z,W) - \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W)$ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Proposición 2.1.18.– *Sea $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Se verifica*

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) - \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W) =$$
$$= (f_1 - f_2)\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) +$$
$$+g(X,\phi Z)g(Y,\phi W) - g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\} +$$
$$+(f_3 - f_2)\{\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) +$$
$$+g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)\}, \tag{2.1.3}$$

para todos X,Y,Z,W campos en $\widetilde{M}$.

Demostración: La demostración es una mera comprobación. Así, dados X,Y,Z,W, comprobemos la diferencia

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) - \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W) =$$

$$
\begin{gathered}
= f_1(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) + \\
+ f_2(g(X,\phi Z)g(\phi Y,W) - g(Y,\phi Z)g(\phi X,W) + 2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)) + \\
+ f_3(\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) + \\
+ g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)) - \\
- f_1(g(Y,\phi Z)g(X,\phi W) - g(X,\phi Z)g(Y,\phi W)) - \\
- f_2(g(X,\phi^2 Z)g(\phi Y,\phi W) - g(Y,\phi^2 Z)g(,\phi W) + 2g(X,\phi Y)g(\phi^2 Z,\phi W)) - \\
- f_3(\eta(X)\eta(\phi Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)g(X,\phi W) + \\
+ g(X,Z)\eta(Y)\eta(\phi W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)) = \\
= (f_1 - f_2)\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) + \\
+ g(X,\phi Z)g(Y,\phi W) - g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\} + \\
+ (f_3 - f_2)\{\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) + \\
+ g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)\},
\end{gathered}
$$

donde se han usado (1.1.2), (1.1.4), (1.1.6) y (1.1.7). □

Así pues en el caso $f_2 = f_3$ y $f_1 - f_2$ igual a una constante α, la variedad $\widetilde{M}$ es una $C(\alpha)$-variedad. Recíprocamente enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.19.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado de dimensión mayor o igual que 5, que sea una $C(\alpha)$-variedad, se verifica la siguiente relación:*

$$f_2 = f_3 = f_1 - \alpha.$$

Demostración: Basta comparar las expresiones que se tienen de la diferencia

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) - \widetilde{R}(X,Y,\phi Z,\phi W)$$

para una $C(\alpha)$-variedad y para un espacio de curvatura ϕ seccional constante generalizado. Escogemos campos unitarios. En primer lugar tomamos $X = W$ ortogonal a $Y = Z = \xi$. Sustituyendo en (2.1.2) y (2.1.3),

$$\alpha = (f_1 - f_2) - (f_3 - f_2),$$

y si escogemos campos $X = W$, $Y = Z$ en la distribución de contacto, con Y ortogonal a X y ϕX se tiene:

$$\alpha = f_1 - f_2.$$

De ambas ecuaciones se deduce que las funciones f_1, f_2, f_3 verifican la relación del enunciado. □

Obsérvese que en la demostración hacemos uso explícito de que la dimensión es mayor o igual que 5. En dimensión 3 no podemos escoger campos para obtener dos ecuaciones linealmente independientes.

Como vimos en los Preliminares, una variedad Sasakiana es un ejemplo de $C(1)$-variedad. Por tanto, del teorema anterior, se deduce que en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado Sasakiano, se verifica

$$f_2 = f_3 = f_1 - 1.$$

Es decir, obtenemos de nuevo el resultado que daba el Teorema 2.1.15, aunque el razonamiento usado ahora sólo es válido para variedades de dimensión mayor o igual que 5,

Procediendo del mismo modo, podemos dar un resultado análogo para variedades cosimplécticas.

Corolario 2.1.20.– *En un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado cosimpléctico, de dimensión mayor o igual que* 5*, se verifica:*

$$f_1 = f_2 = f_3.$$

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que una variedad cosimpléctica es una $C(0)$-variedad. Por tanto, a partir del Teorema 2.1.19 se deduce directamente el resultado. □

Por otra parte en [37] se consideran algunas identidades para el tensor de curvatura de Riemann de una variedad casi Hermítica (N^{2n}, J, g), en concreto

$$
\begin{array}{rlcl}
1) & \widetilde{R}'(X,Y,Z,W) & = & \widetilde{R}'(X,Y,JZ,JW), \\
2) & \widetilde{R}'(X,Y,Z,W) & = & \widetilde{R}'(JX,JY,Z,W)+ \quad \widetilde{R}'(JX,Y,JZ,W)+ \\
 & & & +\widetilde{R}'(JX,Y,Z,JW), \\
3) & \widetilde{R}'(X,Y,Z,W) & = & \widetilde{R}'(JX,JY,JZ,JW),
\end{array}
$$

para todos X, Y, Z, W campos en N.

Se afirma que si denotamos por $\mathcal{H}$ la clase de todas las variedades Hermíticas y por $\mathcal{H}_i$ la subclase de aquellos cuyo tensor de curvatura verifique la identidad i), $i = 1, 2, 3$, se verifica:

$$\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_3 \subseteq \mathcal{H}.$$

Ya hemos estudiado algunas de estas identidades en su equivalente de contacto. Así hemos probado que para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado se verifica

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W) = \widetilde{R}(X, Y, Z, W),$$

para todos X, Y, Z, W ortogonales a ξ, y la identidad equivalente a la primera, es decir,

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = \widetilde{R}(X, Y, \phi Z, \phi W)$$

se verifica para campos ortogonales a ξ si y sólo si $f_1 = f_2$, según la Proposición 2.1.18.

Estudiemos entonces en qué casos se tiene, para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, la identidad

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = \widetilde{R}(\phi X, \phi Y, Z, W) + \widetilde{R}(\phi X, Y, \phi Z, W) + \widetilde{R}(\phi X, Y, Z, \phi W),$$

para campos X, Y, Z, W en $\widetilde{M}$, y cuándo se verifica para campos ortogonales a ξ.

Desarrollemos pues la expresión

$$\widetilde{R}(\phi X, \phi Y, Z, W) + \widetilde{R}(\phi X, Y, \phi Z, W) + \widetilde{R}(\phi X, Y, Z, \phi W).$$

Teniendo en cuenta (1.1.1), queda

$$
\begin{gathered}
f_1(g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,Z)g(\phi Y,W))+\\
+f_2(g(\phi X,\phi Z)g(\phi^2Y,W)-g(\phi Y,\phi Z)g(\phi^2X,W)+2g(\phi X,\phi^2Y)g(\phi Z,W))+\\
+f_1(g(Y,\phi Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,\phi Z)g(Y,W))+\\
+f_2(g(\phi X,\phi^2Z)g(\phi Y,W)-g(Y,\phi^2Z)g(\phi^2X,W)+2g(\phi X,\phi Y)g(\phi^2Z,W))+\\
+f_3(g(\phi X,\phi Z)\eta(Y)\eta(W))+\\
+f_1(g(Y,Z)g(\phi X,\phi W)-g(\phi X,Z)g(Y,\phi W))+\\
+f_2(g(\phi X,\phi Z)g(\phi Y,\phi W)-g(Y,\phi Z)g(\phi^2X,\phi W)+2g(\phi X,\phi Y)g(\phi Z,\phi W))+\\
+f_3(-\eta(Y)\eta(Z)g(\phi X,\phi W)).
\end{gathered}
$$

Agrupando convenientemente y en virtud de (1.1.2) y (1.1.7), se llega a

$$
\begin{gathered}
f_1(-(g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z))g(Y,W)+g(Y,Z)(g(X,W)-\eta(X)\eta(W)))+\\
+f_2(2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)+g(X,\phi Z)g(\phi Y,W)-g(Y,\phi Z)g(\phi X,W))+\\
+f_3((g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z))\eta(Y)\eta(W)-\eta(Y)\eta(Z)(g(X,W)-\eta(X)\eta(W)))=\\
=f_1(g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W))+\\
+f_2(g(X,\phi Z)g(\phi Y,W)-g(Y,\phi Z)g(\phi X,W)+2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W))+\\
+f_3(g(X,Z)\eta(Y)\eta(W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W))+\\
+f_1(\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(X)g(Y,Z)\eta(W)).
\end{gathered}
$$

Por tanto si X,Y,Z,W son ortogonales a ξ se anula todo el término en f_3 y el segundo término en f_1, coincidiendo con $\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$ en ese caso. En general, para cualesquiera campos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.21.– *Sea $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Se verifica la identidad*

$$
\widetilde{R}(X,Y,Z,W)=\widetilde{R}(\phi X,\phi Y,Z,W)+\widetilde{R}(\phi X,Y,\phi Z,W)+\widetilde{R}(\phi X,Y,Z,\phi W)
$$

para todos X,Y,Z,W campos en $\widetilde{M}$ si y sólo si $f_1=f_3$.

Demostración: Es consecuencia de los cálculos anteriores. □

Nota 2.1.22.– Obsérvese que la identidad no se verifica en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que sea Sasakiano, pues en tal caso, en virtud de la proposición anterior, debería tenerse $f_3 = f_1$ y por ser Sasakiano $f_3 = f_1 - 1$, lo que sería una contradicción.

2.2 Ejemplos y resultados.

Ya hemos estudiado los primeros ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados; además de los espacios de curvatura ϕ-seccional constante, hemos visto ejemplos en variedades dotadas de una estructura cosimpléctica y en $C(\alpha)$-variedades.

Una vez estudiada en la sección anterior cómo se relacionan las funciones f_1, f_2, f_3 en una variedad K-contacto, nuestra intención en lo que sigue es presentar algunos ejemplos más elaborados, en otras estructuras y con las funciones f_i no constantes.

Más adelante estudiamos los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados a la luz de los artículos de P. Bueken y L. Vanhecke, [10] y [11], y Z. Olszack, [27], sobre espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados. Comparamos sus resultados con nuestra definición y contrastamos los nuevos ejemplos obtenidos.

La siguiente proposición [39, pág. 456], relaciona los tensores de curvatura de dos variedades cuando existe una sumersión Riemanniana de una de ellas en la otra. Esto nos permitirá, en principio, dar más ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados.

Sean $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad Sasakiana y $(\widetilde{N}, J, G)$ una variedad Kaehleriana, con dimensiones $2n + 1$ y $2n$ respectivamente. Y sea

$$\pi : (\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (\widetilde{N}, J, G)$$

una sumersión Riemanniana, verificando las siguientes condiciones:

i) $\mathcal{V}_p = Span\{\xi_p\}$,

ii) $(JX)^* = \phi X^*$,

para todo punto $p \in \widetilde{M}$ y todo campo X en $\widetilde{N}$, donde $\mathcal{V}_p$ es el subespacio vertical en p y por * se denota el levantamiento horizontal con respecto a la proyección π. Observemos que en estas condiciones, para todos $X, Y \in T(\widetilde{N})$, se tiene:

$$g(X^*, Y^*) = G(X, Y). \tag{2.2.1}$$

Denotaremos por $\widetilde{\nabla}$ y $\widetilde{\nabla}'$ las conexiones Riemannianas asociadas a g y G, respectivamente.

Proposición 2.2.1.– *En las condiciones anteriores, si $\widetilde{R}$ y $\widetilde{R}'$ son los tensores de curvatura respectivos, se verifica*

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}'(X, Y)Z)^* = \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(X^*, \phi Z^*)\phi Y^* -\\ -g(Y^*, \phi Z^*)\phi X^* + 2g(X^*, \phi Y^*)\phi Z^*\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

para todos X, Y, Z campos diferenciables en N.

DEMOSTRACIÓN: Por la ecuación de O'Neill [39], sabemos que

$$\mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^*) = (\widetilde{\nabla}'_X Y)^*,$$

donde $\mathcal{H}$ denota la proyección horizontal con respecto a la sumersión π. Así pues, teniendo en cuenta la condición $i)$, se sigue que

$$\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^* = (\widetilde{\nabla}'_X Y)^* + g(Y^*, \phi X^*)\xi, \tag{2.2.3}$$

pues

$$\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^* = \mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^*) + \eta(\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^*)\xi$$

y

$$\eta(\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^*) = g(\widetilde{\nabla}_{X^*}Y^*, \xi) = -g(Y^*, \widetilde{\nabla}_{X^*}\xi) = g(Y^*, \phi X^*),$$

dado que, al ser $\widetilde{M}$ una variedad Sasakiana, en particular es K-contacto, por lo que se verifica la ecuación (1.1.15).

Usando (2.2.3) reiteradamente y teniendo en cuenta la definición de la curvatura, llegamos a

$$(\widetilde{R}'(X, Y)Z)^* =$$

$$= \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(Z^*, \phi Y^*)\phi X^* - X^*(g(Z^*, \phi Y^*))\xi - g(\widetilde{\nabla}_{Y^*} Z^* \phi X^*)\xi -$$
$$-g(Z^*, \phi X^*)\phi Y^* + Y^*(g(Z^*, \phi X^*))\xi + g(\widetilde{\nabla}_{X^*} Z^*, \phi Y^*)\xi -$$
$$-2g(Y^*, \phi X^*)\phi Z^* + g(Z^*, \phi[X^*, Y^*])\xi =$$
$$= \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(Z^*, \phi Y^*)\phi X^* - g(Z^*, \phi X^*)\phi Y^* - 2g(Y^*, \phi X^*)\phi Z^* +$$
$$+g(Z^*, (\widetilde{\nabla}_{Y^*}\phi)X^* - (\widetilde{\nabla}_{X^*}\phi)Y^*)\xi =$$
$$= \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(Z^*, \phi Y^*)\phi X^* - g(Z^*, \phi X^*)\phi Y^* - 2g(Y^*, \phi X^*)\phi Z^* +$$
$$+g(Z^*, g(X^*, Y^*)\xi - \eta(X^*)Y^* - g(X^*, Y^*)\xi + \eta(Y^*)X^*)\xi =$$
$$= \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(Z^*, \phi Y^*)\phi X^* - g(Z^*, \phi X^*)\phi Y^* - 2g(Y^*, \phi X^*)\phi Z^* =$$
$$= \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + g(X^*, \phi Z^*)\phi Y^* - g(Y^*, \phi Z^*)\phi X^* + 2g(X^*, \phi Y^*)\phi Z^*,$$

en virtud de las ecuaciones (1.1.8) y (1.1.19), con lo cual concluye la demostración. □

Proposición 2.2.2.– *En las mismas condiciones, si $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado, se verifica*

$$\widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* = (F_1 \circ \pi)(g(Y^*, Z^*)X^* - g(X^*, Z^*)Y^*) +$$
$$+((F_2 \circ \pi) - 1)(g(X^*, \phi Z^*)\phi Y^* - g(Y^*, \phi Z^*)\phi X^* + 2g(X^*, \phi Y^*)\phi Z^*)$$

para todos X, Y, Z campos en $\widetilde{N}$.

Demostración: Teniendo en cuenta (2.2.1), se tiene

$$G(X, JY) = g(X^*, (JY)^*) = g(X^*, \phi Y^*),$$

y a partir de (1.3.6), resulta:

$$(\widetilde{R}'(X, Y)Z)^* = (F_1 \circ \pi)(\widetilde{R}_1(X, Y)Z)^* + (F_2 \circ \pi)(\widetilde{R}_2(X, Y)Z)^* =$$
$$= (F_1 \circ \pi)(g(Y^*, Z^*)X^* - g(X^*, Z^*)Y^*) +$$
$$+(F_2 \circ \pi)(g(X^*, \phi Z^*)\phi Y^* - g(Y^*, \phi Z^*)\phi X^* + 2g(X^*, \phi Y*)\phi Z^*).$$

Basta ahora sustituir en (2.2.2) para obtener el resultado. □

En esta misma situación, veamos qué forma adopta el tensor de curvatura de $\widetilde{M}$. Para ello, sean $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ tres campos de vectores en $\widetilde{M}$, que podemos escribir como

$$\widetilde{X} = X^* + \eta(\widetilde{X})\xi, \quad \widetilde{Y} = Y^* + \eta(\widetilde{Y})\xi \quad \text{y} \quad \widetilde{Z} = Z^* + \eta(\widetilde{Z})\xi,$$

para ciertos campos X, Y, Z de $\widetilde{N}$. Así pues,

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{R}(X^* + \eta(\widetilde{X})\xi, Y^* + \eta(\widetilde{Y})\xi)(Z^* + \eta(\widetilde{Z})\xi),$$

y usando la linealidad del tensor de curvatura, resulta:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* + \eta(\widetilde{Z})\widetilde{R}(X^*, Y^*)\xi + \eta(\widetilde{Y})\widetilde{R}(X^*, \xi)Z^* +$$

$$+\eta(X^*)\widetilde{R}(\xi, Y^*)Z^* + \eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{R}(X^*, \xi)\xi + \eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{R}(\xi, Y^*)\xi +$$
$$+\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Y})\widetilde{R}(\xi, \xi)Z^* + \eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{R}(\xi, \xi)\xi.$$

Ahora bien, gracias a (1.1.20), se tiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^*, Y^*)\xi &= \eta(Y^*)X^* - \eta(X^*)Y^* = 0, \\
\widetilde{R}(X^*, \xi)\xi &= \eta(\xi)X^* - \eta(X^*)\xi = X^*, \\
\widetilde{R}(\xi, Y^*)\xi &= \eta(Y^*)\xi - \eta(\xi)Y^* = -Y^*, \\
\widetilde{R}(\xi, \xi)\xi &= \eta(\xi)\xi - \eta(\xi)\xi = 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud de (1.1.16), y al ser $\widetilde{M}$ Sasakiana, se verifica:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^*, \xi)Z^* &= -\widetilde{R}(\xi, X^*)Z^* = -(\widetilde{\nabla}_{X^*}\phi)Z^* = \\
&= -g(X^*, Z^*)\xi + \eta(Z^*)X^* = -g(X^*, Z^*)\xi, \\
\widetilde{R}(\xi, Y^*)Z^* &= (\widetilde{\nabla}_{Y^*}\phi)Z^* = g(Y^*, Z^*)\xi - \eta(Z^*)Y^* = g(Y^*, Z^*)\xi, \\
\widetilde{R}(\xi, \xi)Z^* &= (\widetilde{\nabla}_{\xi}\phi)Z^* = g(\xi, Z^*)\xi - \eta(Z^*)\xi = 0.
\end{aligned}$$

Así, llegamos a

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{R}(X^*, Y^*)Z^* -$$
$$-\eta(\widetilde{Y})g(X^*, Z^*)\xi + \eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})X^* + \eta(\widetilde{X})g(Y^*, Z^*)\xi - \eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})Y^*,$$

y, utilizando la proposición anterior, obtenemos:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = (F_1 \circ \pi)[g(Y^*, Z^*)X^* - g(X^*, Z^*)Y^*] +$$

$$+((F_2\circ\pi)-1)[g(X^*,\phi Z^*)\phi Y^*-g(Y^*,\phi Z^*)\phi X^*+2g(X^*,\phi Y^*)\phi Z^*]-$$
$$-\eta(\widetilde{Y})g(X^*,Z^*)\xi+\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})X^*+\eta(\widetilde{X})g(Y^*,Z^*)\xi-\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})Y^*.$$

Por último, observemos que

$$\begin{array}{rcl} g(\widetilde{X},\phi\widetilde{Y}) & = & g(X^*+\eta(\widetilde{X})\xi,\phi\widetilde{Y})=g(X^*,\phi Y^*), \\ g(\widetilde{Y},\widetilde{Z}) & = & g(Y^*,Z^*)+\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z}), \end{array}$$

por tanto

$$g(Y^*,Z^*)X^*=(g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})-\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z}))(\widetilde{X}-\eta(\widetilde{X})\xi)=$$
$$=g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\widetilde{X}-\eta(\widetilde{X})g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\xi-\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{X}+\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\xi.$$

Con lo que se tiene

$$\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}=$$
$$=(F_1\circ\pi)[g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\widetilde{X}-\eta(\widetilde{X})g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\xi-\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{X}+\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\xi-$$
$$-g(\widetilde{X},\widetilde{Z})\widetilde{Y}+\eta(\widetilde{Y})g(\widetilde{X},\widetilde{Z})\xi+\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{Y}-\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\xi]+$$
$$+((F_2\circ\pi)-1)[g(\widetilde{X},\phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{Y}-g(\widetilde{Y},\phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{X}+2g(\widetilde{X},\phi\widetilde{Y})\phi\widetilde{Z}]-$$
$$-\eta(\widetilde{Y})(g(\widetilde{X},\widetilde{Z})-\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z}))\xi+\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})(\widetilde{X}-\eta(\widetilde{X})\xi)+$$
$$+\eta(\widetilde{X})(g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})-\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\xi)-\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})(\widetilde{Y}-\eta(\widetilde{Y})\xi),$$

de donde:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}=(F_1\circ\pi)[g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\widetilde{X}-g(\widetilde{X},\widetilde{Z})\widetilde{Y}]+$$
$$+((F_2\circ\pi)-1)[g(\widetilde{X},\phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{Y}-g(\widetilde{Y},\phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{X}+2g(\widetilde{X},\phi\widetilde{Y})\phi\widetilde{Z}]+$$
$$+((F_1\circ\pi)-1)[\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{Y}-\eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{X}+g(\widetilde{X},\widetilde{Z})\eta(\widetilde{Y})\xi-g(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\eta(\widetilde{X})\xi].$$

Hemos probado entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.2.3.– *Sea* $\pi:(\widetilde{M}^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)\longrightarrow(\widetilde{N}^{2n},J,G)$ *una sumersión Riemanniana de una variedad Sasakiana en una variedad Kaehleriana, verificando* $\mathcal{V}_p=Span\{\xi_p\}$, *y* $(JX)^*=\phi X^*$, *para todo punto* $p\in\widetilde{M}$ *y todo campo* X *en* $\widetilde{N}$. *Entonces, si* $\widetilde{N}$ *es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado,* $\widetilde{N}(F_1,F_2)$, $\widetilde{M}$ *es un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado* $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ *con*

$$f_1 = F_1 \circ \pi,$$

$$f_2 = (F_2 \circ \pi) - 1$$

y

$$f_3 = (F_1 \circ \pi) - 1.$$

Obsérvese que el espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado obtenido es Sasakiano. Por tanto, en virtud del Teorema 2.1.15, debe verificarse $f_2 = f_3 = f_1 - 1$. Así pues, del Teorema 2.2.3, se deduce la siguiente propiedad para espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados:

Corolario 2.2.4.– *Sea $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado Kaehleriano. Si $\widetilde{N}$ admite una sumersión Riemanniana en una variedad Sasakiana $\widetilde{M}$*

$$\pi : (\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (\widetilde{N}, J, G),$$

entonces $F_1 = F_2$.

Un ejemplo de la situación contemplada en el corolario es la fibración de Hopf:

$$S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2.$$

Aquí S^3 es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante y S^2 un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

A continuación estudiaremos otras formas de conseguir ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados. Más concretamente veremos que multiplicando un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado por $\mathbf{R}$, o haciendo un producto warped por $\mathbf{R}$, obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Antes de enunciar el próximo resultado recordemos que, si $(\widetilde{N}^{2n}, J, G)$ es una variedad casi Hermítica, $\widetilde{N}^{2n} \times \mathbf{R}$ puede dotarse de una estructura casi-contacto métrica (ϕ, ξ, η, g) del siguiente modo:

- g es la métrica Riemanniana producto.
- Dado un campo $\widetilde{X}$ en $\widetilde{N}^{2n} \times \mathbf{R}$, $\phi\widetilde{X} = J(\pi_*\widetilde{X})^*$, donde

$$\pi : \widetilde{N}^{2n} \times \mathbf{R} \longrightarrow \widetilde{N}^{2n}$$

  denota la proyección natural.
- Si t denota la componente en $\mathbf{R}$, $\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$.
- Y, naturalmente, $\eta(\widetilde{X}) = g(\widetilde{X}, \xi)$.

Para la demostración del teorema enunciamos el siguiente lema, [30, pág. 125].

Lema 2.2.5.– *Sean B y F dos variedades Riemannianas y notemos por R^B y R^F sus tensores de curvatura de Riemann respectivos. Si consideramos la variedad Riemanniana producto, $B \times F$, su tensor de curvatura de Riemann, $\widetilde{R}$, viene dado por*

$$\widetilde{R} = (R^B, R^F),$$

es decir, si $\widetilde{X} = (X_1, X_2)$, $\widetilde{Y} = (Y_1, Y_2)$ y $\widetilde{Z} = (Z_1, Z_2)$ son campos de la variedad producto, dados por sus componentes en B y F,

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = (R^B(X_1, Y_1)Z_1, R^F(X_2, Y_2)Z_2).$$

Teorema 2.2.6.– *Sea $(\widetilde{N}^{2n}(F_1, F_2), J, g)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado. Entonces $\widetilde{N}^{2n} \times \mathbf{R}$, con la estructura casi-contacto producto, es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado,*
$\widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$, con

$$f_1 = f_3 = F_1 \circ \pi,$$

$$f_2 = F_2 \circ \pi.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ tres campos tangentes a la variedad producto $N \times \mathbf{R}$:

$$\widetilde{X} = \left(X, h_1 \frac{\partial}{\partial t}\right), \ \widetilde{Y} = \left(Y, h_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ y } \widetilde{Z} = \left(Z, h_3 \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

donde X, Y, Z son campos en N y h_1, h_2, h_3 son funciones diferenciables en $\widetilde{N} \times \mathbf{R}$.

En virtud del Lema 2.2.5

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = (R^{\widetilde{N}}(X, Y)Z, 0),$$

donde $R^{\widetilde{N}}$ es el tensor de curvatura de Riemann de $\widetilde{N}$ y hemos tenido en cuenta que el tensor de curvatura de Riemann de $\mathbf{R}$ es idénticamente nulo.

Como $\widetilde{N}^{2n}(F_1, F_2)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado,

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = (F_1 \circ \pi)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) +$$

$$\begin{aligned}
+(F_2 \circ \pi)(g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ) = \\
= (F_1 \circ \pi)((g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) - \eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z}))(\widetilde{X} - \eta(\widetilde{X})\xi) - \\
-(g(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) - \eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z}))(\widetilde{Y} - \eta(\widetilde{Y})\xi)) + \\
+(F_2 \circ \pi)(g(\widetilde{X}, \phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{Y} - g(\widetilde{Y}, \phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{X} + 2g(\widetilde{X}, \phi\widetilde{Y})\phi\widetilde{Z}),
\end{aligned}$$

y reordenando esta expresión llegamos a

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = (F_1 \circ \pi)(g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\widetilde{X} - g(\widetilde{X}, \widetilde{Z})\widetilde{Y}) +$$

$$\begin{aligned}
+(F_2 \circ \pi)(g(\widetilde{X}, \phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{Y} - g(\widetilde{Y}, \phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{X} + 2g(\widetilde{X}, \phi\widetilde{Y})\phi\widetilde{Z}) + \\
+(F_1 \circ \pi)(\eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{Y} - \eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{X} + g(\widetilde{X}, \widetilde{Z})\eta(\widetilde{Y})\xi - g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\eta(\widetilde{X})\xi),
\end{aligned}$$

con lo que $\widetilde{M} = \widetilde{N} \times \mathbf{R}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(F_1 \circ \pi, F_2 \circ \pi, F_1 \circ \pi)$. □

En particular, si $\widetilde{N}^{2n}(c)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante igual a c, $\widetilde{N} \times \mathbf{R}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con funciones f_1, f_2 y f_3 constantes e iguales a $c/4$. Observemos que $\widetilde{N} \times \mathbf{R}$ no es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, pues su estructura casi-contacto métrica no es Sasakiana sino cosimpléctica.

Veremos ahora un segundo modo de obtener ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados, a partir de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado realizando un producto warped. Para ello, usamos el Lema 2.2.10 que describe el tensor de curvatura de Riemann de un producto warped [28].

Previamente, recordamos la definición de producto warped y algunas relaciones entre las conexiones Riemannianas de las variedades implicadas.

Definición 2.2.7.– *Sean B y F dos variedades Riemannianas, g_B y g_F sus métricas respectivas, y $f > 0$ una función diferenciable en B. El* producto warped *$\widetilde{M} = B \times_f F$ es la variedad producto $B \times F$ con el siguiente tensor métrico*

$$g_f = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

donde π y σ son las proyecciones de $B \times F$ en B y F respectivamente.

Nota 2.2.8.– Dada una variedad casi Hermítica $(\widetilde{N}^{2n}, J, G)$, el producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$, donde $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$, $f > 0$, puede dotarse de la estructura (ϕ, ξ, η, g) siguiente:

- $g = g_f$, es la métrica del producto warped.
- $\phi(\widetilde{X}) = (J\sigma_* \widetilde{X})^*$, para $\widetilde{X}$ un campo tangente a $\widetilde{M}$, donde σ denota la proyección de $\widetilde{M}$ en $\widetilde{N}$.
- $\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$, si t denota la componente en $\mathbf{R}$.

Con esta estructura $\widetilde{M}$ es una variedad casi-contacto métrica.

Lema 2.2.9.– [28, pág. 206] *Sea $\widetilde{M} = B \times_f F$, y denotemos por $\widetilde{\nabla}$, ∇^B y ∇^F las conexiones Riemannianas de $\widetilde{M}$, B y F, respectivamente. Si X, Y son campos en B y V, W en F, entonces*

1) $\widetilde{\nabla}_X Y$ *es el levantamiento de* $\nabla^B_X Y$.

2) $\widetilde{\nabla}_X V = \widetilde{\nabla}_V X = (Xf/f)V$.

3) La componente de $\widetilde{\nabla}_V W$ *normal a la fibras de* $B \times_f F$ *es*

$$-(g_f(V,W)/f)\mathit{grad}\ f.$$

4) La componente de $\widetilde{\nabla}_V W$ *tangente a* F *es el levantamiento de* $\nabla^F_V W$.

Recordemos, [28, pág. 85], que el gradiente de una función diferenciable $f \in \mathcal{F}(B)$, grad f, es el campo vectorial tangente equivalente a la 1-forma df. Es decir,

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf,$$

para todo X en B. En términos de coordenadas $df = \sum_{i,j}(\partial f/\partial x^i)dx^j$, luego

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_j,$$

siendo $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Lema 2.2.10.– *Sea* $\widetilde{M} = B \times_f F$ *un producto warped, con tensor de curvatura de Riemann* $\widetilde{R}$. *Sean* X, Y, Z *campos en* B *y* U, V, W *en* F, *entonces:*

1) $\widetilde{R}(X,Y)Z$ *es un campo en* B *y es el levantamiento de* $R^B(X,Y)Z$ *en* B.

2) $\widetilde{R}(V,X)Y = -(H^f(X,Y)/f)V$, *donde* H^f *es el Hessiano de* f.

3) $\widetilde{R}(X,Y)V = \widetilde{R}(V,W)X = 0$.

4) $\widetilde{R}(X,V)W = -(g_f(V,W)/f)\widetilde{\nabla}_X(\mathit{grad}\ f)$.

5)
$$\begin{array}{rcl}\widetilde{R}(V,W)U &=& R^F(V,W)U+ \\ &+& (g_f(\mathit{grad}\ f, \mathit{grad}\ f)/f^2)\{g_f(V,U)W - g_f(W,U)V\}.\end{array}$$

Recordamos que el Hessiano de una función es un tensor de tipo $(0,2)$ dado por:

$$H^f(X,Y) = XYf - (\widetilde{\nabla}_X Y)f = g(\widetilde{\nabla}_X(\text{grad } f), Y). \tag{2.2.4}$$

Estamos ya en condiciones de probar el teorema que nos ocupa.

Teorema 2.2.11.– *Sea $\widetilde{N}^{2n}(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado. Entonces el producto warped $\widetilde{M}^{2n+1} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, con las siguientes funciones:*

$$f_1 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2},$$

$$f_2 = \frac{(F_2 \circ \pi)}{f^2},$$

$$f_3 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}.$$

Demostración: Dados $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ campos en $\widetilde{M}$, escribimos estos campos descompuestos en

$$\widetilde{X} = X + U, \quad \widetilde{Y} = Y + V \quad \text{y} \quad \widetilde{Z} = Z + W,$$

donde X, Y, Z denotan las componentes en $\mathbf{R}$ y U, V, W las componentes en $\widetilde{N}$.

Estamos considerando en $\widetilde{M}$ la estructura dada en la Nota 2.2.8. Para facilitar la escritura utilizaremos los siguientes abusos de notación, $\phi(\widetilde{X}) = JU$ y $\eta(\widetilde{X}) = \eta(X)$. Según esta notación podemos escribir un campo $\widetilde{X}$ de $\widetilde{M}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{X} = \eta(X)\xi + U. \tag{2.2.5}$$

Denotaremos por $\widetilde{\nabla}$ la conexión Riemanniana en $\widetilde{M}$ y por $\nabla^{\mathbf{R}}$ y $\nabla^{\widetilde{N}}$ las de $\mathbf{R}$ y $\widetilde{N}$, respectivamente.

El tensor de curvatura de Riemann de $\widetilde{M}$ viene dado por:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{R}(X,Y)Z + \widetilde{R}(X,V)Z + \widetilde{R}(U,Y)Z + \widetilde{R}(U,V)Z +$$

$$+\widetilde{R}(X,Y)W + \widetilde{R}(X,V)W + \widetilde{R}(U,Y)W + \widetilde{R}(U,V)W.$$

Y en virtud del Lema 2.2.10 la expresión del tensor de curvatura queda:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = (R^{\mathbf{R}}(X,Y)Z)^* + \frac{H^f(X,Z)}{f}V - \frac{H^f(Y,Z)}{f}U -$$

$$-\frac{g_f(V,W)}{f}\widetilde{\nabla}_X(\text{grad } f) + \frac{g_f(U,W)}{f}\widetilde{\nabla}_Y(\text{grad } f) + R^{\widetilde{N}}(U,V)W +$$

$$+\frac{g_f(\text{grad } f, \text{grad } f)}{f^2}\{g_f(U,W)V - g_f(V,W)U\}.$$

Veamos cuánto vale cada uno de estos sumandos.

- $R^{\mathbf{R}}(X,Y)Z = 0$, pues el tensor de curvatura de Riemann de $\mathbf{R}$ es idénticamente nulo.

- Por (2.2.4), $H^f(X,Z) = XZf - (\widetilde{\nabla}_X Z)f$.

  Por la definición de producto warped, sabemos que f es una función diferenciable en $\mathbf{R}$. Se tiene por (2.2.5):

$$XZ(f) = X(\eta(Z)\xi(f)) = \eta(X)\xi(\eta(Z)f') =$$

$$= \eta(X)\xi(\eta(Z))f' + \eta(X)\eta(Z)f''.$$

  Y en virtud del apartado 1 del Lema 2.2.9,

$$(\widetilde{\nabla}_X Z)f = (\nabla^{\mathbf{R}}_X Z)f =$$

$$= (\nabla^{\mathbf{R}}_{\eta(X)\xi}\eta(Z)\xi)f = \eta(X)\{\xi(\eta(Z))\xi + \eta(Z)\nabla^{\mathbf{R}}_\xi \xi\}f =$$

$$= \eta(X)\xi(\eta(Z))f',$$

  pues $\nabla^{\mathbf{R}}_\xi \xi = 0$ ya que $\nabla^{\mathbf{R}}$ es la conexión Riemanniana en $\mathbf{R}$.

  Por tanto $H^f(X,Z) = \eta(X)\eta(Z)f''$.

- Para calcular $\widetilde{\nabla}_X(\text{grad } f)$, observemos en primer lugar que

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j = f' \xi,$$

y por tanto grad f es tangente a $\mathbf{R}$. Teniendo en cuenta el apartado 1 del Lema 2.2.9:

$$\widetilde{\nabla}_X(\text{grad } f) = \nabla^{\mathbf{R}}_X(\text{grad } f) = \nabla^{\mathbf{R}}_{\eta(X)\xi} f' \xi = \eta(X) f'' \xi.$$

- Y por último:

$$g_f(\text{grad } f, \text{grad } f) = f'^2.$$

Así pues, como $\widetilde{N}$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} &= \frac{1}{f}\eta(X)\eta(Z)f''V - \frac{1}{f}\eta(Y)\eta(Z)f''U - \\ &- \frac{f^2 g(V,W)}{f}\eta(X)f''\xi + \frac{f^2 g(U,W)}{f}\eta(Y)f''\xi + \\ &+ (F_1\circ\pi)\{g(V,W)U - g(U,W)V\} + \\ &+ (F_2\circ\pi)\{g(U,JW)JV - g(V,JW)JU + 2g(U,JV)JW\} + \\ &+ \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \{f^2 g(U,W)V - f^2 g(V,W)U\}.\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Usaremos a partir de ahora la notación dada en (1.3.7) y (1.3.8), es decir, escribiremos $\widetilde{R}_i$ para denotar la parte del tensor de curvatura de Riemann de $\widetilde{N}^{2n}$ que aparece multiplicada por F_i, $i = 1, 2$. Y para $\widetilde{M}^{2n+1} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$, escribiremos $\widetilde{R}^f_j$ en las ecuaciones dadas en (1.3.10), (1.3.11) y (1.3.12).

Observemos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^f_1(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} &= g_f(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\widetilde{X} - g_f(\widetilde{X},\widetilde{Z})\widetilde{Y} = \\ &= \{\eta(Y)\eta(Z) + f^2 g(V,W)\}(\eta(X)\xi + U) - \\ &- \{\eta(X)\eta(Z) + f^2 g(U,W)\}(\eta(Y)\xi + V) = \\ &= f^2\widetilde{R}_1(U,V)W + f^2 g(V,W)\eta(X)\xi - f^2 g(U,W)\eta(Y)\xi +\end{aligned}$$

$$+\eta(Y)\eta(Z)U - \eta(X)\eta(Z)V. \tag{2.2.7}$$

Como $g_f(\widetilde{X}, \phi\widetilde{Z})\phi\widetilde{Y} = f^2 g(U, JW)JV$, se tiene:

$$\widetilde{R}_2^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = f^2 \widetilde{R}_2(U, V)W. \tag{2.2.8}$$

Y también:

$$\widetilde{R}_3^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \eta(\widetilde{X})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{Y} - \eta(\widetilde{Y})\eta(\widetilde{Z})\widetilde{X} +$$

$$+ g_f(\widetilde{X}, \widetilde{Z})\eta(\widetilde{Y})\xi - g_f(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\eta(\widetilde{X})\xi =$$

$$= \eta(X)\eta(Z)V - \eta(Y)\eta(Z)U + f^2 g(U, W)\eta(Y)\xi - f^2 g(V, W)\eta(X)\xi. \tag{2.2.9}$$

Agrupando convenientemente en (2.2.6), en virtud de (2.2.7) y (2.2.8), llegamos a que el tensor de curvatura es:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} \widetilde{R}_1^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} + \frac{(F_2 \circ \pi)}{f^2} \widetilde{R}_2^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}$$

$$+((F_1 \circ \pi) - f'^2)\{-g(V, W)\eta(X)\xi + g(U, W)\eta(Y)\xi -$$

$$- \frac{1}{f^2}\eta(Y)\eta(Z)U + \frac{1}{f^2}\eta(X)\eta(Z)V\} +$$

$$+ \frac{f''}{f}\{\eta(X)\eta(Z)V - \eta(Y)\eta(Z)U - f^2 g(V, W)\eta(X)\xi + f^2 g(U, W)\eta(Y)\xi\}.$$

Y teniendo en cuenta (2.2.9):

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} \widetilde{R}_1^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} + \frac{(F_2 \circ \pi)}{f^2} \widetilde{R}_2^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} +$$

$$+ \left(\frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) \widetilde{R}_3^f(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}.$$

Por lo tanto, si llamamos

$$f_1 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2},$$

$$f_2 = \frac{(F_2 \circ \pi)}{f^2},$$

$$f_3 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f},$$

concluímos que $\widetilde{M}^{2n+1}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$. $\square$

Nota 2.2.12.– Realizando la construcción del teorema anterior, si partimos de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado con funciones constantes, $\widetilde{N}^{2n}(a, b)$, de dimensión cualquiera, llegamos a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado

$$\widetilde{M}^{2n+1}\left(\frac{a - f'^2}{f^2},\ \frac{b}{f^2},\ \frac{a - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}\right).$$

Es decir, si f no es constante, llegamos a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que no tiene las funciones constantes.

Es más, si partimos de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante $\widetilde{N}^{2n}(c)$, por el método anterior obtenemos

$$\widetilde{M}^{2n+1}\left(\frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2},\ \frac{\frac{c}{4}}{f^2},\ \frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}\right),$$

un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado cuyas funciones no son constantes.

Sabemos que todos los espacios de curvatura seccional holomorfa constante son isomorfos a $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{CP}^n(4)$ o $\mathbf{CH}^n(-4)$, según sea su curvatura cero, positiva o negativa, respectivamente. Veamos entonces qué expresiones adoptan las funciones f_i al realizar productos warped con estos espacios que modelizan los espacios de curvatura seccional holomorfa constante.

Para $\mathbf{C}^n$ la curvatura seccional holomorfa es cero, y por tanto $\mathbf{C}^n \times_f \mathbf{R}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, con funciones:

$$f_1 = -\frac{f'^2}{f^2}, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = -\frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}.$$

$\mathbf{CP}^n(4)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante igual a 4, así $\mathbf{CP}^n(4) \times_f \mathbf{R}$ tiene por funciones caracteristicas las siguientes:

$$f_1 = \frac{1 - f'^2}{f^2}, \quad f_2 = \frac{1}{f^2}, \quad f_3 = \frac{1 - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}.$$

Por último el espacio hiperbólico complejo, $\mathbf{CH}^n(-4)$, con curvatura -4 da lugar a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con funciones:

$$f_1 = \frac{-1 - f'^2}{f^2}, \quad f_2 = \frac{-1}{f^2}, \quad f_3 = \frac{-1 - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}.$$

Nota 2.2.13.– Es la existencia de estos ejemplos, en los que $f_2 \neq f_3$, en cualquier dimensión, lo que justifica nuestra definición de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, Definición 2.1.1, generalizando la definición manejada por otros autores que sólo contemplaban el caso $f_2 = f_3$, [10] y [11].

Recordemos que la situación en Geometría Compleja era distinta; se tiene el siguiente resultado debido a F. Tricerri y L. Vanhecke, [35].

Teorema 2.2.14.– *Sea $\widetilde{N}^{2n}(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado conexo con dimensión real $2n \geq 6$ y F_2 no idénticamente nula. Entonces $\widetilde{N}$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante. Es decir F_1 y F_2 son constantes e iguales.*

En estos trabajos quedaba abierta la existencia de espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados de dimensión 4, con funciones no constantes. Este problema fue tratado por Z. Olszack en [27], donde prueba los dos siguientes teoremas. En el primero demuestra la existencia de estos espacios.

Teorema 2.2.15.– *Sea $(\widetilde{N}, J, \tilde{g})$ una variedad Kaehleriana con tensor de Bochner nulo, de dimensión 4. Supongamos además que la curvatura escalar $\tilde{\tau}$ es distinta de cero en todo punto y que no es constante. Sea $g = e^{\sigma}\tilde{g}$, $\sigma = -log(C\tilde{\tau}^2)$, con C una constante positiva. Entonces la variedad Hermítica $(\widetilde{N}, J, g)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ con F_2 distinta de cero en todo punto y no constante.*

Y en el segundo que cualquier espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado, con $F_2 \neq 0$ en todo punto, puede obtenerse de esa forma.

Teorema 2.2.16.– *Sea $(\widetilde{N}(F_1, F_2), J, g)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado de dimensión 4, con F_2 no nula en $\widetilde{N}$ y no constante. Sea $\tilde{g} = e^{-\sigma} g$, con $\sigma = -(1\backslash 3) log(C_1 F_2^2)$, C_1 una constante positiva. Entonces $(\widetilde{N}, J, \tilde{g})$ es una variedad Kaehleriana con tensor de Bochner nulo, y $\sigma = -log(C\tilde{\tau}^2)$ para una cierta constante positiva C.*

Nota 2.2.17.– Los casos reseñados en la Nota 2.2.12 no son los únicos existentes. Así, podemos partir de una variedad $\widetilde{N}^4(F_1, F_2)$ con funciones no constantes, cuya exitencia asegura el Teorema 2.2.15, realizar un producto warped, y obtener ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados de dimensión 5, con funciones no constantes.

Posteriormente P. Bueken y L. Vanhecke estudiaron la situación análoga en Geometría de Contacto. Las variedades casi-contacto métricas que estudian son aquellas cuyo tensor de curvatura de Riemann es de la forma:

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = f(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)+$$
$$+h(g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z+$$
$$+\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi).$$

Para ellas, en [10], obtenían el siguiente teorema, en el que adaptamos la notación con $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ y $\widetilde{R}_3$.

Teorema 2.2.18.– *Sea $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad casi-contacto métrica conexa tal que $g(X, \widetilde{\nabla}_X \xi) = 0$ para todo campo X ortogonal a ξ y $dim(\widetilde{M}) \geq 5$. Si el tensor de curvatura de Riemann $\widetilde{R}$ tiene la forma*

$$\widetilde{R} = f\widetilde{R}_1 + h(\widetilde{R}_2 + \widetilde{R}_3),$$

donde f y h son funciones diferenciables en $\widetilde{M}$ con h no idénticamente nula, entonces f y h son funciones constantes y $f - h \geq 0$. Es más, si $f - h = 1$ $\widetilde{M}$ es una variedad Sasakiana.

Es decir que para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con $f_2 = f_3$ de dimensión mayor que 5 las funciones son constantes.

Comprobamos pues que la definición que damos de espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado engloba la anterior, eliminando la restricción existente para dimensiones superiores o iguales que 5. Por otra parte hemos presentado suficientes ejemplos que justifican su estudio.

Del Teorema 2.2.18 podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 2.2.19.– *No existen espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados Sasakianos conexos con funciones no constantes de dimensión mayor o igual que* 5.

Demostración: Por el Teorema 2.1.15, si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado Sasakiano, se verifica

$$f_2 = f_3 = f_1 - 1.$$

Además si $\widetilde{M}$ es Sasakiano siempre se verifica $g(X, \widetilde{\nabla}_X \xi) = 0$ pues, por (1.1.15)

$$g(X, \widetilde{\nabla}_X \xi) = -g(X, \phi X) = 0.$$

Entonces si $f_2 = f_3 \equiv 0$ se tiene que $f_1 \equiv 1$. Y si $f_2 = f_3$ no es idénticamente nula, como se verifican las hipótesis del Teorema 2.2.18, $f_2 = f_3$ y f_1 son constantes. □

Nota 2.2.20.– En realidad en el enunciado del teorema puede sustituirse Sasakiano por K-contacto ya que, en virtud del Teorema 2.1.8, ambas condiciones son equivalentes para espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados.

Por otra parte, la curvatura de una ϕ-sección de $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es $f_1 + 3f_2$, según la Proposición 2.1.11, así si las funciones f_1 y f_2 son constantes $\widetilde{M}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante.

Luego el teorema puede reescribirse del siguiente modo:

Teorema 2.2.21.– *Los únicos espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados conexos de dimensión mayor o igual que 5 con estructura K-contacto son los espacios de curvatura ϕ-seccional constante que sean variedades K-contacto.*

Los ejemplos que hemos obtenido nos sirven también para probar un resultado en Geometría Compleja que complementa los expuestos por Z. Olszack en [27] para variedades complejas de dimensión 4. Para ello tendremos en cuenta el siguiente resultado, [39, pág. 289-291], dado para una variedad simpléctica:

Teorema 2.2.22.– *Sea $\widetilde{N}^{2n}(J, G)$ una variedad casi Hermítica cuya 2-forma fundamental Ω verifica $d\Omega = 0$, $(\Omega^n) \neq 0$, y tal que Ω determina una clase integral de cohomología. Entonces, existe un fibrado principal por círculos*

$$\pi : \widetilde{M}^{2n+1} \longrightarrow \widetilde{N}^{2n},$$

y una conexión η en $\widetilde{M}$ tal que:

i) η es una forma de contacto en $\widetilde{M}^{2n+1}$.

ii) El campo vectorial asociado ξ genera las traslaciones a derecha de la estructura de grupo S^1 de la fibra.

Es más, a lo largo de la demostración se prueba que $d\eta = \pi^*\Omega$. En esta situación, se tiene una fibración de Boothby-Wang y podemos dotar a $\widetilde{M}$ de una estructura casi-contacto métrica, (ϕ, ξ, η, g), del siguiente modo:

- ξ es el campo vectorial asociado a la conexión η.
- Se define $\phi X = (J\pi_* X)^*$, para todo campo X en $\widetilde{M}$, donde * denota el levantamiento horizontal respecto de π.
- Consideramos la métrica

$$g(X, Y) = G(\pi_* X, \pi_* Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

para X, Y campos en $\widetilde{M}$.

Así mismo, se prueba que $\widetilde{M}$ con esta estructura es una variedad K-contacto. Además $\widetilde{N}$ es Kaehleriana si y sólo si $\widetilde{M}$ es Sasakiana.

A la vista de estos resultados y del Teorema 2.2.3 probamos el siguiente teorema para variedades complejas.

Teorema 2.2.23.– *Sea $\widetilde{N}^4(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado conexo de dimensión 4. Si $\widetilde{N}$ es Kaehleriana y su 2-forma fundamental determina una clase integral de cohomología, entonces F_1 y F_2 son constantes e iguales.*

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones del enunciado, según lo indicado previamente, existe una fibración principal

$$\pi : \widetilde{M}^5 \longrightarrow \widetilde{N}^4,$$

con $\widetilde{M}^5$ Sasakiana.

Ahora bien, por ser $\widetilde{N}$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado $\widetilde{N}(F_1, F_2)$, se tiene, en virtud del Teorema 2.2.3, que $\widetilde{M}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con funciones:

$$f_1 = F_1 \circ \pi,$$

$$f_2 = (F_2 \circ \pi) - 1,$$

$$f_3 = (F_1 \circ \pi) - 1.$$

Tenemos entonces $\widetilde{M}^5(f_1, f_2, f_3)$ Sasakiana luego, por el Teorema 2.1.15, $f_2 = f_3 = f_1 - 1$. En estas condiciones el Teorema 2.2.18 asegura que f_1 y f_2 son constantes. Por tanto F_1 y F_2 son constantes e iguales. $\square$

Nota 2.2.24.– El Teorema 2.2.23 demuestra que una variedad $\widetilde{N}$ en esas condiciones es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

La demostración del Teorema 2.2.18 se basa en el hecho de que para toda variedad Riemanniana se verifica la segunda identidad de Bianchi:

$$\mathfrak{S}_{W,X,Y}(\widetilde{\nabla}_W \widetilde{R})(X,Y)Z = 0, \tag{2.2.10}$$

donde σ indica la suma cíclica en W, X, Y.

Veamos ahora, en el caso de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, qué condiciones imponen las identidades de Bianchi sobre las funciones f_1, f_2, f_3.

El tensor de curvatura de Riemann de una variedad Riemanniana verifica la primera identidad de Bianchi:

$$\widetilde{R}(X,Y)Z + \widetilde{R}(Y,Z)X + \widetilde{R}(Z,X)Y = 0.$$

Resulta una mera comprobación observar que el tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ verifica la primera identidad de Bianchi y que ello no impone ninguna restricción sobre las funciones f_1, f_2 y f_3. En efecto, se tiene

$$\begin{gathered}
\widetilde{R}(X,Y)Z + \widetilde{R}(Y,Z)X + \widetilde{R}(Z,X)Y = \\
= f_1(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \\
+ f_2(g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z) + \\
+ f_3(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi) + \\
+ f_1(g(Z,X)Y - g(Y,X)Z) + \\
+ f_2(g(Y,\phi X)\phi Z - g(Z,\phi X)\phi Y + 2g(Y,\phi Z)\phi X) + \\
+ f_3(\eta(Y)\eta(X)Z - \eta(Z)\eta(X)Y + g(Y,X)\eta(Z)\xi - g(Z,X)\eta(Y)\xi) + \\
+ f_1(g(X,Y)Z - g(Z,Y)X) + \\
+ f_2(g(Z,\phi Y)\phi X - g(X,\phi Y)\phi Z + 2g(Z,\phi X)\phi Y) + \\
+ f_3(\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)Z + g(Z,Y)\eta(X)\xi - g(X,Y)\eta(Z)\xi) = 0,
\end{gathered}$$

para cualesquiera campos X, Y, Z en $\widetilde{M}$.

Desarrollemos ahora la segunda identidad de Bianchi (2.2.10) para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ de dimensión mayor o igual que 5. Según (2.1.1) y usando la notación dada en (1.3.10), (1.3.11) y (1.3.12),

$$0 = \sigma_{W,X,Y}(\widetilde{\nabla}_W \widetilde{R})(X,Y)Z =$$

$$= \mathfrak{S}_{W,X,Y}\{W(f_1)\widetilde{R}_1(X,Y)Z + f_2(\widetilde{\nabla}_W\widetilde{R}_2)(X,Y)Z+$$
$$+W(f_2)\widetilde{R}_2(X,Y)Z + f_3(\widetilde{\nabla}_W\widetilde{R}_3)(X,Y)Z + W(f_3)\widetilde{R}_3(X,Y)Z\}, \quad (2.2.11)$$
ya que $(\widetilde{\nabla}_W\widetilde{R}_1)(X,Y)Z = 0$, pues

$$(\widetilde{\nabla}_W\widetilde{R}_1)(X,Y)Z =$$
$$= W(\widetilde{R}_1(X,Y)Z) - \widetilde{R}_1(\widetilde{\nabla}_W X,Y)Z - \widetilde{R}_1(X,\widetilde{\nabla}_W Y)Z - \widetilde{R}_1(X,Y)\widetilde{\nabla}_W Z =$$
$$= W(g(Y,Z)X + g(X,Z)Y) - (g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_W X - g(\widetilde{\nabla}_W X,Z)Y)-$$
$$-g(\widetilde{\nabla}_W Y,Z)X - g(X,Z)\widetilde{\nabla}_W Y) - (g(Y,\widetilde{\nabla}_W Z)X - g(X,\widetilde{\nabla}_W Z)Y) = 0.$$

Tomemos en primer lugar W, X, Y, Z campos ortogonales a ξ en (2.2.11):

$$0 = \mathfrak{S}_{W,X,Y}\{W(f_1)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}+$$
$$+W(f_2)\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z\}+$$
$$+f_2\{g(X,(\widetilde{\nabla}_W\phi)Z)\phi Y + g(X,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_W\phi)Y - g(Y,(\widetilde{\nabla}_W\phi)Z)\phi X-$$
$$-g(Y,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_W\phi)X + 2g(X,(\widetilde{\nabla}_W\phi)Y)\phi Z + 2g(X,\phi Y)(\widetilde{\nabla}_W\phi)Z\}\}+$$
$$+f_3\{g(X,Z)g(Y,\widetilde{\nabla}_W\xi)\xi - g(Y,Z)g(X,\widetilde{\nabla}_W\xi)\xi\}.$$

Ahora supongamos $\|X\| = \|Y\| = 1$, con Y ortogonal a $X, \phi X$, y tomemos $Z = X$ y $W = \phi Y$. Así, multiplicando por ϕY y por ϕX llegamos, tras un laborioso cálculo, a las siguientes ecuaciones:

$$Y(f_1) - 3f_2 g(\phi Y,(\widetilde{\nabla}_X\phi)X) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$-2X(f_2) + 3f_2\{g(\phi Y,(\widetilde{\nabla}_Y\phi)X)) + g(X,(\widetilde{\nabla}_{\phi Y}\phi)Y)\} = 0. \quad (2.2.13)$$

Y multiplicando por ξ:

$$f_3\{g(Y,\widetilde{\nabla}_{\phi Y}\xi) - g(\phi Y,\widetilde{\nabla}_Y\xi)\} - 2f_2 g(\widetilde{\nabla}_X\phi X,\xi) = 0. \quad (2.2.14)$$

Sustituyamos a continuación en (2.2.11) $W = \xi$ y X, Y, Z ortogonales a ξ:

$$\xi(f_1)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}+$$
$$+\xi(f_2)\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z\}+$$

$$+f_2\{g(X,(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Z)\phi Y+g(X,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Y-g(Y,(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Z)\phi X-$$
$$-g(Y,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)X+2g(X,(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Y)\phi Z+2g(X,\phi Y)(\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Z\}+$$
$$+f_3\{g(X,Z)g(Y,\widetilde{\nabla}_\xi\xi)\xi-g(Y,Z)g(X,\widetilde{\nabla}_\xi\xi)\xi\}-$$
$$-X(f_1)g(Y,Z)\xi+X(f_3)g(Y,Z)\xi+$$
$$+f_2\{g(Y,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_X\phi)\xi-g(\xi,(\widetilde{\nabla}_X\phi)Z)\phi Y+2g(Y,(\widetilde{\nabla}_X\phi)\xi)\phi Z\}+$$
$$+f_3\{-g(Z,\widetilde{\nabla}_X\xi)Y+g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X\xi\}+Y(f_1)g(X,Z)\xi-Y(f_3)g(X,Z)\xi+$$
$$+f_2\{g(\xi,(\widetilde{\nabla}_Y\phi)Z)\phi X-g(X,\phi Z)(\widetilde{\nabla}_Y\phi)\xi+2g(\xi,(\widetilde{\nabla}_Y\phi)X)\phi Z\}+$$
$$+f_3\{g(Z,\widetilde{\nabla}_Y\xi)X-g(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y\xi\}=0. \tag{2.2.15}$$

Escogiendo X e Y unitarios, con Y ortogonal a $X, \phi X$, multiplicando por ξ, y tomando primero $Z = X$ y después $Z = \phi X$ se llega a:

$$f_3 g(Y,\widetilde{\nabla}_\xi\xi)+Y(f_1)-Y(f_3)=0, \tag{2.2.16}$$

$$f_2 g((\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Y,\xi)=0. \tag{2.2.17}$$

De nuevo tomamos $Z = X$, y multiplicando (2.2.15) sucesivamente por $\phi X, Y$ y ϕY:

$$3f_2\{g((\widetilde{\nabla}_\xi\phi)Y,X)+g((\widetilde{\nabla}_Y\phi)X,\xi)\}+$$
$$+2f_2 g(Y,(\widetilde{\nabla}_X\phi)\xi)+f_3 g(\phi\widetilde{\nabla}_Y\xi,X)=0, \tag{2.2.18}$$

$$\xi(f_1)+f_3\{g(X,\widetilde{\nabla}_X\xi)+g(\widetilde{\nabla}_Y\xi,Y)\}=0, \tag{2.2.19}$$

$$f_2 g(\xi,(\widetilde{\nabla}_X\phi)X)+f_3 g(\widetilde{\nabla}_Y\xi,\phi Y)=0. \tag{2.2.20}$$

Y si hubiésemos tomado $Z = \phi X$, sólo habríamos obtenido una nueva ecuación ϕY:

$$\xi(f_2)+f_2\{g(\xi,(\widetilde{\nabla}_X\phi)\phi X)+g(\xi,(\widetilde{\nabla}_Y\phi)\phi Y)\}=0, \tag{2.2.21}$$

Si suponemos $g(\widetilde{\nabla}_X\xi, X) = 0$ para todo campo X ortogonal a ξ, de (2.2.19) y (2.2.21), se deduce

$$\xi(f_1)=\xi(f_2)=0.$$

Si $f_2 = f_3$, a partir de las ecuaciones (2.2.12), (2.2.13) y (2.2.16), se deduce $X(f_1 + f_2) = 0 = X(f_1 - f_2)$; y por tanto, para variedades conexas de dimensiones mayores que 5, las funciones f_1 y $f_2 = f_3$ son constantes. De hecho ésta es la demostración del Teorema 2.2.18 dada en [10].

Como hemos visto anteriormente, existen ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados con $f_2 \neq f_3$. Veremos a continuación que los ejemplos $\widetilde{N} \times \mathbf{R}$ y $\mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$ tienen estructura cosimpléctica y trans-Sasakiana $(0, \beta)$, respectivamente, como muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.2.25.– *Sea $\widetilde{N}$ una variedad casi Hermítica. Entonces, el producto warped $\mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$ es una variedad con estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, con $\beta = f'/f$, si y sólo si $\widetilde{N}$ es una variedad Kaehleriana.*

Demostración: Según las relaciones entre las conexiones afines de $\widetilde{N}$ y $\mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$ dadas en el Lema 2.2.9, dados $\widetilde{X} = X + U$, $\widetilde{Y} = Y + V$ campos en $\mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$,

$$(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\phi)\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\phi\widetilde{Y} - \phi\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} =$$

$$= \widetilde{\nabla}_X JV + \widetilde{\nabla}_U JV - \phi(\widetilde{\nabla}_X Y + \widetilde{\nabla}_U Y + \widetilde{\nabla}_X V + \widetilde{\nabla}_U V) =$$

$$= \frac{X(f)}{f} JV + \left(\frac{-g_f(U, JV)}{f} \mathrm{grad}(f) + \nabla^{\widetilde{N}}_U JV \right) -$$

$$-\phi \left(\nabla^{\mathbf{R}}_X Y + \frac{Y(f)}{f} U + \frac{X(f)}{f} V + \frac{-g_f(U, V)}{f} \mathrm{grad}(f) + \nabla^{\widetilde{N}}_U V \right) =$$

$$= \frac{X(f)}{f} JV - \frac{g_f(U, JV)}{f} \mathrm{grad}(f) + \nabla^{\widetilde{N}}_U JV - \frac{Y(f)}{f} JU - \frac{X(f)}{f} JV - J\nabla^{\widetilde{N}}_U V =$$

$$= -\frac{g_f(U, JV)}{f} \mathrm{grad}(f) - \frac{Y(f)}{f} JU + (\nabla^{\widetilde{N}}_U J)V.$$

Ahora bien como

$$\mathrm{grad}(f) = f'\xi,$$

$$Y(f) = \eta(Y)\xi(f) = f'\eta(\widetilde{Y}),$$

donde hacemos los abusos de notación convenidos, la expresión anterior queda:

$$(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\phi)\widetilde{Y} = \frac{f'}{f}\{g_f(\widetilde{Y}, \phi\widetilde{X})\xi - \eta(\widetilde{Y})\phi\widetilde{X}\} + (\nabla^{\widetilde{N}}_U J)V.$$

Por tanto, según (1.1.23), $\mathbf{R}\times_f \widetilde{N}$ es una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta)$ con $\beta = f'/f$ si y sólo si $(\nabla^{\widetilde{N}}_U J)V = 0$, es decir, si $\widetilde{N}$ es Kaehleriana. □

Corolario 2.2.26.– *Sea $\widetilde{N}$ una variedad casi Hermítica. Entonces $\widetilde{N}\times\mathbf{R}$ con la estructura descrita en el* Teorema 2.2.6 *es una variedad cosimpléctica si y sólo si $\widetilde{N}$ es una variedad Kaehleriana.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $\widetilde{N}\times\mathbf{R}$ puede verse como un caso particular de producto warped con $f\equiv 1$, pues es naturalmente difeomorfa a $\mathbf{R}\times\widetilde{N}$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.2.25, $\widetilde{N}\times\mathbf{R}$ es $(0,0)$ trans-Sasakina, es decir, posee una estructura cosimpléctica. □

Sabemos que para una variedad trans-Sasakiana se verifica (1.1.24), una condición más debil que la de ser variedad trans-Sasakiana. Esta condición, como demostramos a continuación, se tiene en los producto warped que hemos construido sin necesidad de exigir condiciones sobre $\widetilde{N}$.

Proposición 2.2.27.– *Sea $\widetilde{N}$ una variedad casi Hermítica. Entonces, en el producto warped $\mathbf{R}\times_f\widetilde{N}$ $(0,\beta)$ se verifica*

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\xi = \beta(\widetilde{X} - \eta(\widetilde{X})\xi)$$

con $\beta = f'/f$, para todo campo X.

DEMOSTRACIÓN: Usando la escritura acostumbrada, (2.2.5), dado $\widetilde{X} = \eta(\widetilde{X})\xi + U$ un campo en $\mathbf{R}\times_f\widetilde{N}$, en virtud del Lema 2.2.9, se tiene

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\xi = \widetilde{\nabla}_{\eta(\widetilde{X})\xi}\xi + \widetilde{\nabla}_U\xi =$$

$$= \eta(\widetilde{X})\widetilde{\nabla}^{\mathbf{R}}_{\xi}\xi + \frac{\xi(f)}{f}U = \frac{f'}{f}U = \frac{f'}{f}(\widetilde{X} - \eta(\widetilde{X})\xi),$$

es decir, la condición del enunciado. □

También en otros resultados, en los que se use la condición de ser trans-Sasakiana $(0,\beta)$, estudiaremos los enunciados equivalentes para variedades que sólo verifiquen la condición (1.1.24).

Veamos qué información obtenemos, a partir de la segunda identidad de Bianchi, sobre las funciones f_i para $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ una variedad cosimpléctica.

Proposición 2.2.28.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad cosimpléctica conexa de dimensión mayor o igual que* 5*, las funciones f_1, f_2, f_3 son constantes e iguales.*

Demostración: En las hipótesis del teorema y teniendo en cuenta (1.1.12) y (1.1.24), para una variedad cosimpléctica las ecuaciones (2.2.12) y (2.2.19) quedan

$$X(f_1) = 0, \quad \xi(f_1) = 0,$$

y esto para todo X unitario y ortogonal a ξ. Luego, como $\widetilde{M}$ es conexa, f_1 es constante.

Por otra parte, sabemos del Corolario 2.1.20 que $f_1 = f_2 = f_3$, por tanto todas las funciones son constantes. □

De esta proposición podemos obtener un resultado que complementa los estudios de F. Tricerri, L. Vanhecke y Z. Olszack sobre espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados.

Corolario 2.2.29.– *Sea $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado conexo y Kaehleriano de dimensión mayor o igual que* 4*. Entonces las funciones F_1 y F_2 son constantes e iguales.*

Demostración: Para dimensiones mayores o iguales que 6, el resultado es conocido para espacios de curvatura seccional holomorfa constante generalizados cualesquiera como recogimos en el Teorema 2.2.14.

Para la demostración en dimensión 4, sea $\widetilde{N}^4(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado conexo y Kaehleriano. En virtud del Teorema 2.2.6 la variedad producto $\widetilde{M} = \widetilde{N} \times \mathbf{R}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado conexo $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con funciones:

$$f_1 = F_1 \circ \pi,$$

$$f_2 = F_2 \circ \pi,$$

$f_3 = F_1 \circ \pi$.

En estas condiciones, el Corolario 2.2.26 implica que $\widetilde{M}$ es una variedad cosimpléctica y entonces, de la Proposición 2.2.28, se deduce que las funciones f_1, f_2 son constantes e iguales; por tanto también lo son F_1, F_2. $\square$

Nota 2.2.30.– Este resultado no contradice los ejemplos dados por Z. Olszack en dimensión 4, ya que no eran variedades Kaehlerianas.

Además el Corolario 2.2.29 mejora los resultados expuestos en el Corolario 2.2.4 y en el Teorema 2.2.23.

El trabajo realizado con la segunda identidad de Bianchi se retomará en la Sección 2.5 para el caso de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados con estructura trans-Sasakianas.

2.3 Espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados y transformaciones conformes de métricas.

En esta sección vamos a presentar una serie de ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados que se obtienen a partir de otro realizando ciertas transformaciones métricas.

Usaremos una gran variedad de transformaciones métricas: *transformaciones conformes*, *D-homotéticas* y *D-conformes*. Varios autores han tratado estas transformaciones y comprobamos que existe cierta confusión en la nomenclatura, por lo que explicarémos claramente qué estamos usando en cada momento.

Comenzaremos nuestro estudio por los cambios conformes de métrica. Para ello sea $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad casi-contacto métrica. Consideramos la siguiente transformación conforme

$$g^* \;=\; \rho^2 g, \tag{2.3.1}$$

donde ρ es una función positiva en $\widetilde{M}$. Se puede probar fácilmente que, si tomamos

$$\phi^* = \phi, \qquad \xi^* = \frac{1}{\rho}\,\xi, \qquad \eta^* = \rho\eta, \tag{2.3.2}$$

entonces $(\widetilde{M}, \phi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ es también una variedad casi-contacto métrica [36].

Es bien conocido (véase por ejemplo [14]) que, si $\widetilde{\nabla}^*$ denota la conexión Riemanniana asociada a g^* y $\widetilde{R}^*$ el tensor de curvatura de g^*, se verifica que

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^*_X Y &= \widetilde{\nabla}_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U, \\ \widetilde{R}^*(X,Y)Z &= \widetilde{R}(X,Y)Z - t(Y,Z)X + t(X,Z)Y - \\ &\quad - g(Y,Z)TX + g(X,Z)TY,\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

para cualesquiera campos X, Y, Z en $\widetilde{M}$, donde:

$$U = \mathrm{grad}(\log(\rho)), \qquad \omega = \mathrm{d}(\log(\rho)),$$

$$TX = \widetilde{\nabla}_X U - \omega(X)U + \frac{1}{2}\omega(U)X, \tag{2.3.4}$$

$$t(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X \omega)Y - \omega(X)\omega(Y) + \frac{1}{2}\omega(U)g(X,Y). \tag{2.3.5}$$

Más aún, de (2.3.4) y (2.3.5) tenemos:

$$\begin{aligned}-t(Y,Z)X + t(X,Z)Y - g(Y,Z)TX + g(X,Z)TY &= \\ = -\omega(U)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} - \\ -\{\omega(X)\omega(Z)Y - \omega(Y)\omega(Z)X + g(X,Z)\omega(Y)U - g(Y,Z)\omega(X)U\} + \\ +g(\widetilde{\nabla}_X U, Z)Y - g(\widetilde{\nabla}_Y U, Z)X + g(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y U - g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X U.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Así pues, si $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con funciones f_1, f_2, f_3, usando (2.1.1), (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) y (2.3.6), podemos escribir

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \frac{f_1 - \omega(U)}{\rho^2}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\} +$$

$$+\frac{f_2}{\rho^2}\{g^*(X,\phi^*Z)\phi^*Y - g^*(Y,\phi^*Z)\phi^*X + 2g^*(X,\phi^*Y)\phi^*Z\} +$$

$$+\frac{f_3}{\rho^2}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X +$$
$$+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\} -$$
$$-\{\omega(X)\omega(Z)Y - \omega(Y)\omega(Z)X + g(X,Z)\omega(Y)U - g(Y,Z)\omega(X)U\} +$$
$$+g(\widetilde{\nabla}_X U, Z)Y - g(\widetilde{\nabla}_Y U, Z)X + g(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y U - g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X U, \qquad (2.3.7)$$

para cualesquiera campos X, Y, Z.

Supongamos ahora que existe una función μ en $\widetilde{M}$ tal que $U = \mu\xi$, lo que implica que $\omega = \mu\eta$ y $\omega(U) = \mu^2$. Entonces:

$$\omega(X)\omega(Z)Y - \omega(Y)\omega(Z)X + g(X,Z)\omega(Y)U - g(Y,Z)\omega(X)U =$$
$$= \frac{\mu^2}{\rho^2}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X +$$
$$+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}. \qquad (2.3.8)$$

Por otra parte, $\widetilde{\nabla}_X U = \mu\widetilde{\nabla}_X\xi + X(\mu)\xi$, para cada campo X, y por tanto, $g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi) = 0$. Supondremos además que la función μ es constante y que existe una función β en $\widetilde{M}$ tal que $\widetilde{\nabla}_X\xi = \beta(X - \eta(X)\xi)$, para cada X. Así pues, $\widetilde{\nabla}_X U = \mu\beta(X - \eta(X)\xi)$ y:

$$g(\widetilde{\nabla}_X U, Z)Y - g(\widetilde{\nabla}_Y U, Z)X + g(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y U - g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X U =$$
$$= -\frac{2\mu\beta}{\rho^2}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\} +$$
$$-\frac{\mu\beta}{\rho^2}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X +$$
$$+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}. \qquad (2.3.9)$$

De (2.3.7), (2.3.8) y (2.3.9), deducimos:

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \frac{f_1 - \mu^2 - 2\mu\beta}{\rho^2}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\} +$$
$$+\frac{f_2}{\rho^2}\{g^*(X,\phi^*Z)\phi^*Y - g^*(Y,\phi^*Z)\phi^*X + 2g^*(X,\phi^*Y)\phi^*Z\} +$$
$$+\frac{f_3 - \mu^2 - \mu\beta}{\rho^2}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X +$$

$$+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado tal que exista una función β en $\widetilde{M}$ con $\widetilde{\nabla}_X\xi = \beta(X - \eta(X)\xi)$, para cualquier campo X. Consideramos una función positiva ρ en $\widetilde{M}$ y la estructura casi contacto métrica dada por* (2.3.2) *y sean $U = \mathrm{grad}(\log(\rho))$ y $\omega = \mathrm{d}(\log(\rho))$. Si existe una constante $k \neq 0$ tal que $U = k\xi$, entonces $(\widetilde{M}, \phi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con funciones:*

$$f_1^* = \frac{f_1 - k^2 - 2k\beta}{\rho^2}, \qquad f_2^* = \frac{f_2}{\rho^2}, \qquad f_3^* = \frac{f_3 - k^2 - k\beta}{\rho^2}.$$

Mostraremos ahora que existen variedades casi contacto métricas que satisfacen todas las condiciones del teorema.

Ejemplo 2.3.2.– Sea $\widetilde{N}(c)$ un espacio de curvatura holomorfa constante, construyamos el producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}$, con $f = f(t) > 0$. Si consideramos en $\widetilde{M}$ la estructura casi contacto métrica descrita anteriormente, hemos probado anteriormente que es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con funciones:

$$f_1 = \frac{c - 4f'^2}{4f^2}, \qquad f_2 = \frac{c}{4f^2}, \qquad f_3 = \frac{c - 4f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{f}. \tag{2.3.10}$$

Más aún, en virtud de la Proposición 2.2.25, sabemos que es una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$ con $\beta = f'/f$, y por tanto

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = \frac{f'}{f}(X - \eta(X)\xi),$$

para todo X.

Por otra parte, si $\rho = \rho(t) > 0$, entonces

$$U = (\log(\rho))'\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\rho'}{\rho}\xi,$$

y por tanto, existe una constante k tal que $U = k\xi$ si y sólo si $\rho(t) = Ke^{kt}$, donde $K > 0$ es una constante. En tal caso, en virtud del Teorema 2.3.1, $(\widetilde{\widetilde{M}}, \phi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con funciones:

$$f_1^* = \frac{c - 4(f' + kf)^2}{(2Kfe^{kt})^2}, \qquad f_2^* = \frac{c}{(2Kfe^{kt})^2},$$
$$f_3^* = \frac{c - 4(f' + kf)^2 + 4f(kf' + f'')}{(2Kfe^{kt})^2}.$$

Es más , podemos conseguir otros ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados usando transformaciones conformes de la métrica, sin exigir que μ sea una constante.

Teorema 2.3.3.– *Dado un espacio de curvatura holomorfa constante $\widetilde{N}(c)$ y dos funciones positivas $f = f(t)$ y $\rho = \rho(t)$, la transformación conforme de métrica con función ρ dota al producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$ de una estructura de espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con funciones:*

$$f_1^* = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right), \qquad f_2^* = \frac{1}{\rho^2}\frac{c}{4f^2},$$
$$f_3^* = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho' f'}{\rho f} + \frac{f''}{f} + (\log(\rho))''\right).$$

Demostración: Usando la misma notación que en el ejemplo anterior, $\mu = \rho'/\rho$, se tiene que $U = (\rho'/\rho)\xi$ y $\mu' = (\log(\rho))''$. Está claro que para cualquier campo X en $\widetilde{M}$,

$$X(\rho'/\rho) = \eta(X)(\log(\rho))'',$$

pues ρ es una función en $\mathbf{R}$ y $X = \widetilde{X} + \eta(X)\dfrac{\delta}{\delta t}$, donde $\widetilde{X}$ es una campo en $\widetilde{N}$. Así pues

$$\widetilde{\nabla}_X U = \frac{\rho'}{\rho}\widetilde{\nabla}_X \xi + X(\rho'/\rho)\xi = \frac{\rho' f'}{\rho f}(X - \eta(X)\xi) + \eta(X)(\log(\rho))''\xi,$$

donde hemos usado que $\widetilde{M}$ está dotada de una estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$ con $\beta = \dfrac{f'}{f}$.

Realizando un cálculo análogo a (2.3.9),

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{\nabla}_X U, Z)Y - g(\widetilde{\nabla}_Y U, Z)X + g(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y U - g(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X U \;&= \\
= \; -\frac{2\mu\beta}{\rho^2}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\}&+ \\
+\left\{-\frac{\mu\beta}{\rho^2} + \frac{\mu'}{\rho^2}\right\}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X&+ \\
+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}&. \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Entonces, de (2.3.7), (2.3.8) y (2.3.11), deducimos trás los cálculos pertinentes que

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \frac{f_1 - \dfrac{\rho'^2}{\rho^2}}{\rho^2}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\}+$$

$$+\frac{f_2}{\rho^2}\{g^*(X,\phi^*Z)\phi^*Y - g^*(Y,\phi^*Z)\phi^*X + 2g^*(X,\phi^*Y)\phi^*Z\}+$$

$$+\frac{f_3}{\rho^2}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X + g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}-$$

$$-\frac{\rho'^2}{\rho^4}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X + g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\}-$$

$$-\frac{2\rho'\beta}{\rho^3}\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\}-$$

$$+\left\{-\frac{\rho'\beta}{\rho^3} + \frac{(\log(\rho))''}{\rho^2}\right\}\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X+$$

$$+g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\},$$

y teniendo en cuenta que $\widetilde{M} = \widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ con las funciones f_1, f_2, f_3 descritas en (2.3.10) resulta que

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right)\{g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y\}+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\frac{c}{4f^2}\{g^*(X,\phi^*Z)\phi^*Y - g^*(Y,\phi^*Z)\phi^*X + 2g^*(X,\phi^*Y)\phi^*Z\}+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f}+\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho' f'}{\rho f} + \frac{f''}{f} + (\log(\rho))''\right)\{\eta^*(X)\eta^*(Z)Y-$$

$$-\eta^*(Y)\eta^*(Z)X + g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*\},$$

lo que demuestra el teorema. □

Pero existen otras transformaciones métricas usualmente empleadas en geometría de contacto, como son las D-homotéticas y las D-conformes.

Definición 2.3.4.– *Dada* $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *una variedad casi contacto métrica, llamamos* transformación D-conforme *a la siguiente transformación métrica*

$$g^* = bg + (a^2 - b)\eta\otimes\eta, \tag{2.3.12}$$

donde a *y* b *son sendas funciones definidas en* $\widetilde{M}$*, con* b *una función positiva y* $a \neq 0$ *en todo punto. Si* a, b *son constantes la transformación recibe el nombre de* transformación D-homotética.

Estas transformaciones generalizan distintos tipos de transformaciones manejadas por diversos autores. Así para $a = b$ coinciden con las transformaciones D-conformes definidas por S. Suguri y S. Nakayama en [32]. El caso a y b constantes corresponde a las transformaciones D-homotéticas usadas por Z. Olszack en [26], que a su vez generaliza las tratadas por S. Tanno, [33], que sólo considera $a = b$ constantes.

Lema 2.3.5.– *Dada* $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *una variedad casi contacto métrica, consideramos una transformación* D*-conforme. La estructura* $(\widetilde{M},\phi^*,\xi^*,\eta^*,g^*)$*, dada por*

$$\phi^* = \phi, \quad \xi^* = \frac{1}{a}\xi, \quad \eta^* = a\eta, \quad g^* = bg + (a^2-b)\eta\otimes\eta, \tag{2.3.13}$$

dota a $\widetilde{M}$ *de estructura de variedad casi contacto métrica.*

Demostración: La demostración es un mera comprobación de la definición de variedad casi contacto métrica. □

En adelante trabajaremos con un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, y realizaremos transformaciones D-conformes en las que a y b sean dos funciones que sólo varíen en la dirección de ξ, con b positiva y a distinta de cero en todo punto de $\widetilde{M}$.

En primer lugar, podemos probar el siguiente resultado:

Lema 2.3.6.– *En las condiciones anteriores, si $\widetilde{M}$ tiene una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, la conexión Riemanniana, $\widetilde{\nabla}^*$, de g^* viene dada por*

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}^*_X Y &= \widetilde{\nabla}_X Y + \frac{2(a^2-b)\beta - \xi(b)}{2a^2} g(\phi X, \phi Y)\xi + \\ &+ \frac{\xi(b)}{2b}(\eta(Y)X + \eta(X)Y - 2\eta(X)\eta(Y)\xi) + \frac{\xi(a^2)}{2a^2}\eta(X)\eta(Y)\xi, \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$.

Demostración: Partimos de la fórmula de Koszul, que determina $\widetilde{\nabla}^*$ a partir de g^*:

$$\begin{aligned} 2g^*(\widetilde{\nabla}^*_X Y, Z) &= Xg^*(Y,Z) + Yg^*(X,Z) - Zg^*(X,Y) + \\ &+ g^*([X,Y],Z) + g^*([Z,X],Y) - g^*([Y,Z],X). \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Si desarrollamos el segundo miembro usando la definición de g^*, y tenemos en cuenta que a y b son funciones que sólo varían en la dirección de ξ, resulta que

$$X(bg(Y,Z) + (a^2-b)\eta(Y)\eta(Z)) + Y(bg(X,Z) + (a^2-b)\eta(X)\eta(Z)) -$$

$$-Z(bg(X,Y) + (a^2-b)\eta(X)\eta(Y)) + bg([X,Y],Z) + (a^2-b)\eta([X,Y])\eta(Z) +$$

$$+bg([Z,X],Y) + (a^2-b)\eta([Z,X])\eta(Y) - bg([Y,Z],X) - (a^2-b)\eta([Y,Z])\eta(X) =$$

$$= \xi(b)\{\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(X,Y)\} +$$

$$+b\{g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) + g(\widetilde{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \widetilde{\nabla}_Y Z) -$$

$$-g(\widetilde{\nabla}_Z X, Y) - g(X, \widetilde{\nabla}_Z Y) + g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\widetilde{\nabla}_Y X, Z)+$$
$$+g(\widetilde{\nabla}_Z X, Y) - g(\widetilde{\nabla}_X Z, Y) - g(\widetilde{\nabla}_Y Z, X) + g(\widetilde{\nabla}_Z Y, X)\}+$$
$$+\xi(a^2 - b)\{\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) + \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\}+$$
$$+(a^2 - b)\{g(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi)\eta(Z) + g(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi)\eta(Z) + \eta(Y)g(\widetilde{\nabla}_X Z, \xi)+$$
$$+\eta(Y)g(Z, \widetilde{\nabla}_X \xi) + g(\widetilde{\nabla}_Y X, \xi)\eta(Z) + g(X, \widetilde{\nabla}_Y \xi)\eta(Z) + \eta(X)g(\widetilde{\nabla}_Y Z, \xi)+$$
$$+\eta(X)g(Z, \widetilde{\nabla}_Y \xi) - g(\widetilde{\nabla}_Z X, \xi)\eta(Y) - g(X, \widetilde{\nabla}_Z \xi)\eta(Y) - \eta(X)g(\widetilde{\nabla}_Z Y, \xi)-$$
$$-\eta(X)g(Y, \widetilde{\nabla}_Z \xi) + g(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi)\eta(Z) - g(\widetilde{\nabla}_Y X, \xi)\eta(Z) + g(\widetilde{\nabla}_Z X, \xi)\eta(Y)-$$
$$-g(\widetilde{\nabla}_X Z, \xi)\eta(Y) - g(\widetilde{\nabla}_Y Z, \xi)\eta(X) + g(\widetilde{\nabla}_Z Y, \xi)\eta(X)\} =$$
$$= \xi(b)\{\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\}+$$
$$+2bg(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + \xi(a^2 - b)\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)+$$
$$+(a^2 - b)\{2g(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi)\eta(Z) + g(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi)\eta(Z) + g(X, \widetilde{\nabla}_Y \xi)\eta(Z)+$$
$$+g(Z, \widetilde{\nabla}_X \xi)\eta(Y) + g(Z, \widetilde{\nabla}_Y \xi)\eta(X) - g(X, \widetilde{\nabla}_Z \xi)\eta(Y) - g(Y, \widetilde{\nabla}_Z \xi)\eta(X)\}.$$

Teniendo en cuenta ahora (1.1.24), puesto que la variedad ambiente es trans-Sasakiana $(0, \beta)$, y desarrollando el primer término según la definición de g^*, obtenemos:

$$2g^*(\widetilde{\nabla}^*_X Y, Z) = 2bg(\widetilde{\nabla}^*_X Y, Z) + 2(a^2 - b)\eta(\widetilde{\nabla}^*_X Y)\eta(Z) =$$
$$= \xi(b)\{\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\}+$$
$$+2bg(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + \xi(a^2 - b)\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)+$$
$$+2(a^2 - b)\{\eta(\widetilde{\nabla}_X Y)\eta(Z) + \beta g(X, Y)\eta(Z) - \beta\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\}. \quad (2.3.16)$$

Tomando en (2.3.16) X e Y ortogonales a ξ, se llega a:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_X Y, Z) + 2(a^2 - b)\eta(\widetilde{\nabla}^*_X Y)\eta(Z) =$$
$$= -\xi(b)\eta(Z)g(X, Y) + 2bg(\widetilde{\nabla}_X Y, Z)+$$
$$+2(a^2 - b)\{\eta(\widetilde{\nabla}_X Y)\eta(Z) + \beta g(X, Y)\eta(Z)\}.$$

Por tanto, si $Z = \xi$

$$2a^2\eta(\widetilde{\nabla}^*_X Y) = 2a^2\eta(\widetilde{\nabla}_X Y) + (2(a^2 - b)\beta - \xi(b))g(X, Y),$$

y si Z es ortogonal a ξ:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_X Y, Z) = 2bg(\widetilde{\nabla}_X Y, Z).$$

Así pues, para X e Y ortogonales a ξ, si $\{e_1, ..., e_{2n}, \xi\}$ es una base local de campos, se tiene:

$$\widetilde{\nabla}^*_X Y = \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}^*_X Y, e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}^*_X Y)\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}_X Y, e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}_X Y)\xi + \frac{2(a^2 - b)\beta - \xi(b)}{2a^2} g(X, Y)\xi =$$

$$= \widetilde{\nabla}_X Y + \frac{2(a^2 - b)\beta - \xi(b)}{2a^2} g(X, Y)\xi. \tag{2.3.17}$$

Tomemos ahora en (2.3.16) X ortogonal a ξ e $Y = \xi$, con lo cual

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_X \xi, Z) + 2(a^2 - b)\eta(\widetilde{\nabla}^*_X \xi)\eta(Z) =$$

$$= \xi(b)g(X, Z) + 2bg(\widetilde{\nabla}_X \xi, Z),$$

pues $\eta(\widetilde{\nabla}_X \xi) = 0$, al ser ξ unitario.

Para $Z = \xi$ obtenemos la ecuación

$$2a^2 \eta(\widetilde{\nabla}^*_X \xi) = 0,$$

y para Z ortogonal a ξ:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_X \xi, Z) = \xi(b)g(X, Z) + 2bg(\widetilde{\nabla}_X \xi, Z).$$

Por tanto, para X ortogonal a ξ se verifica:

$$\widetilde{\nabla}^*_X \xi = \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}^*_X \xi, e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}^*_X \xi)\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}_X \xi, e_i)e_i + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\xi(b)}{2b} g(X, e_i)e_i = \widetilde{\nabla}_X \xi + \frac{\xi(b)}{2b} X. \tag{2.3.18}$$

Ahora consideramos en (2.3.16) $X = \xi$ e Y ortogonal a ξ, y resulta:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y, Z) + 2(a^2 - b)\eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y)\eta(Z) =$$

$$= \xi(b)g(Y,Z) + 2bg(\widetilde{\nabla}_\xi Y, Z) + 2(a^2-b)\eta(\widetilde{\nabla}_\xi Y)\eta(Z).$$

Tomando sucesivamente $Z=\xi$ y Z ortogonal a ξ, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$2a^2\eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y) = 2a^2\eta(\widetilde{\nabla}_\xi Y),$$

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y, Z) = \xi(b)g(Y,Z) + 2bg(\widetilde{\nabla}_\xi Y, Z).$$

De ahí que

$$\widetilde{\nabla}^*_\xi Y = \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y, e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi Y)\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}_\xi Y, e_i)e_i + \sum_{i=1}^{2n}\frac{\xi(b)}{2b}g(Y,e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}_\xi Y)\xi =$$

$$= \widetilde{\nabla}_\xi Y + \frac{\xi(b)}{2b}Y. \tag{2.3.19}$$

Por último, evaluamos (2.3.16) para $X=Y=\xi$, llegando a:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi, Z) + 2(a^2-b)\eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi)\eta(Z) =$$

$$= \xi(b)\eta(Z) + 2bg(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, Z) + \xi(a^2-b)\eta(Z).$$

Si $Z=\xi$,

$$2a^2\eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi) = \xi(a^2),$$

y si Z es ortogonal a ξ:

$$2bg(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi, Z) = 2bg(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, Z).$$

Luego,

$$\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi = \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi, e_i)e_i + \eta(\widetilde{\nabla}^*_\xi \xi)\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} g(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, e_i)e_i + \frac{\xi(a^2)}{2a^2}\xi = \widetilde{\nabla}_\xi \xi + \frac{\xi(a^2)}{2a^2}\xi. \tag{2.3.20}$$

Finalmente, tomando X e Y dos campos cualesquiera y descomponiendolos de la forma $X = \widetilde{X} + \eta(X)\xi$ e $Y = \widetilde{Y} + \eta(Y)\xi$, con $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ ortogonales a ξ, basta usar (2.3.17)–(2.3.20), para obtener (2.3.14). □

Nota 2.3.7.– Obsérvese que en la demostración no se ha usado que la variedad sea trans-Sasakiana $(0, \beta)$ sino que se verifique

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$, con β una función que sólo varía en la dirección de ξ, es decir, la ecuación (1.1.24) con $\alpha = 0$.

Nota 2.3.8.– En las condiciones del lema usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^*_X Y &= \widetilde{\nabla}_X Y + Ag(\phi X, \phi Y)\xi + \\ +B(\eta(Y)X + \eta(X)Y &- 2\eta(X)\eta(Y)\xi) + C\eta(X)\eta(Y)\xi,\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

siendo $A = \dfrac{2(a^2 - b)\beta - \xi(\beta)}{2a^2}$, $B = \dfrac{\xi(b)}{2b}$ y $C = \dfrac{\xi(a^2)}{2a^2}$.

Podemos demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.9.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, tal que β sea una función que sólo varíe en la dirección de ξ. Entonces, el tensor de curvatura de Riemann de la variedad $(\widetilde{M}, \phi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ obtenida al realizar a $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una transformación D-conforme, con funciones a y b que sólo varíen en la dirección de ξ, viene dado por:*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \frac{f_1 + A\beta + AB - \beta B}{b}\widetilde{R}^*_1(X,Y)Z + \frac{f_2}{b}\widetilde{R}^*_2(X,Y)Z + \\ + \left(\frac{a^2 - b}{b}(f_1 + A\beta + AB - \beta B) + f_3 + \xi(B) + (\beta + B)(A + B - C)\right)\cdot \\ \cdot\frac{1}{a^2}(\eta^*(X)\eta^*(Z)Y - \eta^*(Y)\eta^*(Z)X) + \\ + \frac{f_3 - \xi(A) - (A - \beta)(C - 2B)}{b}(g^*(X,Z)\eta^*(Y)\xi^* - g^*(Y,Z)\eta^*(X)\xi^*),\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

con $A = \dfrac{2(a^2 - b)\beta - \xi(b)}{2a^2}$, $B = \dfrac{\xi(b)}{2b}$ *y* $C = \dfrac{\xi(a^2)}{2a^2}$.

Demostración: Desarrollamos la expresión

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}^*_X \widetilde{\nabla}^*_Y Z - \widetilde{\nabla}^*_Y \widetilde{\nabla}^*_X Z - \widetilde{\nabla}^*_{[X,Y]} Z,$$

usando (2.3.14), con lo cual, teniendo en cuenta que se anulan todos aquellos términos que son simétricos en X e Y, tras laboriosos cálculos resulta que:

$$\begin{gathered}
\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z + \xi(A)\eta(X)g(Y,Z)\xi + \xi(B)\eta(X)\eta(Z)Y + \\
+A\{(\beta+B)g(Y,Z)X + (C-\beta-B)g(Y,Z)\eta(X)\xi - \\
-\beta\eta(Y)g(Z,X)\xi - (\beta+B)\eta(Y)\eta(Z)X\} + \\
+B\{\beta g(X,Z)Y - \beta\eta(X)\eta(Z)Y + Ag(X,Z)\eta(Y)\xi + \\
+B\eta(Y)\eta(Z)X - 2\beta\eta(Y)g(Z,X)\xi - 2(\beta+B)\eta(Y)\eta(Z)X\} + \\
+C\{\beta g(Z,X)\eta(Y)\xi + (\beta+B)\eta(Y)\eta(Z)X\} - \\
-\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \xi(A)\eta(Y)g(X,Z)\xi - \xi(B)\eta(Y)\eta(Z)X - \\
-A\{(\beta+B)g(X,Z)Y + (C-\beta-B)g(X,Z)\eta(Y)\xi - \\
-\beta\eta(X)g(Z,Y)\xi - (\beta+B)\eta(X)\eta(Z)Y\} - \\
-B\{\beta g(Y,Z)X - \beta\eta(Y)\eta(Z)X + Ag(Y,Z)\eta(X)\xi + \\
+B\eta(X)\eta(Z)Y - 2\beta\eta(X)g(Z,Y)\xi - 2(\beta+B)\eta(X)\eta(Z)Y\} - \\
-C\{\beta g(Z,Y)\eta(X)\xi + (\beta+B)\eta(X)\eta(Z)Y\} - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z.
\end{gathered}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{gathered}
\widetilde{R}^*(X,Y)Z = \widetilde{R}(X,Y)Z + \\
+(\xi(A) + (A-\beta)(C-2B))(g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y))\xi + \\
+(A\beta + AB - \beta B)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \\
+(\xi(B) + (\beta+B)(A+B-C))(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X). \qquad (2.3.23)
\end{gathered}$$

En esta expresión, debemos ahora estudiar cada uno de los términos $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ y $\widetilde{R}_3$ del tensor de curvatura $\widetilde{R}$, y con el resto de sumandos intentar agruparlos de forma que $\widetilde{R}^*$ tome la forma característica del tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

En primer lugar:

$$\widetilde{R}_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y =$$

$$= \frac{1}{b}(g^*(Y,Z)X - g^*(X,Z)Y) - \frac{a^2-b}{b}(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) =$$

$$= \frac{1}{b}\widetilde{R}(X,Y)Z - \frac{a^2-b}{b}(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y).$$

Es fácil comprobar que:

$$\widetilde{R}_2(X,Y)Z = \frac{1}{b}\widetilde{R}^*_2(X,Y)Z.$$

Por último:

$$\widetilde{R}_3(X,Y)Z = \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi =$$

$$= \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + \frac{1}{b}(g^*(X,Z)\eta(Y)\xi - g^*(Y,Z)\eta(X)\xi).$$

Sustituyendo estos valores en (2.3.23), obtenemos

$$\widetilde{R}^*(X,Y)Z = (f_1 + A\beta + AB - \beta B)\frac{1}{b}\widetilde{R}^*_1(X,Y)Z + \frac{1}{b}\widetilde{R}^*_2(X,Y)Z+$$

$$+\left(\frac{a^2-b}{b}(f_1 + A\beta + AB - \beta B) + f_3 + \xi(B) + (\beta + B)(A + B - C)\right)\cdot$$

$$\cdot(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X)+$$

$$+(f_3 - \xi(A) - (A-\beta)(C-2B))\frac{1}{b}(g^*(X,Z)\eta(Y)\xi - g^*(Y,Z)\eta(X)\xi),$$

y como $\xi^* = \dfrac{1}{a}\xi$ y $\eta^* = a\eta$, llegamos a la ecuación (2.3.22). □

Al igual que en el Lema 2.3.6 únicamente utilizamos que se verifique (1.1.24) con $\alpha = 0$.

A la vista de este resultado, se deduce que para que la variedad $\widetilde{M}$, obtenida al realizar una transformación D-conforme resulte ser también un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, debe verificarse que

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2-b}{b}(f_1+A\beta+AB-\beta B)+f_3+\xi(B)+(\beta+B)(A+B-C)\right)=$$

$$=\frac{1}{b}(f_3-\xi(A)-(A-\beta)(C-2B)), \tag{2.3.24}$$

con $A=\dfrac{2(a^2-b)\beta-\xi(b)}{2a^2}$, $B=\dfrac{\xi(b)}{2b}$ y $C=\dfrac{\xi(a^2)}{2a^2}$.

Desarrollando esta condición, obtenemos que

$$(a^2-b)(f_1-f_3)+(a^2-b)(A\beta+AB-\beta B)+b\xi(B)+$$
$$+b(\beta+B)(A+B-C)+a^2\xi(A)+a^2(A-\beta)(C-2B)=0,$$

por lo que efectuando los productos y sustituyendo A, B y C por sus valores, la ecuación queda:

$$0=(a^2-b)(f_1-f_3)+a^2A\beta+a^2AB-a^2\beta B+b\beta B+$$
$$+b\xi(B)+b\beta B-b\beta C+bB^2-bBC+$$
$$+a^2\xi(A)+a^2AC-2a^2AB-a^2\beta C+2a^2\beta B=$$
$$=(a^2-b)(f_1-f_3)+(a^2-b)\beta^2-\frac{\xi(b)}{2}\beta-\frac{(a^2-b)}{2b}\beta\xi(b)+\frac{1}{4b}\xi(b)^2+a^2\beta\frac{\xi(b)}{2b}+$$
$$+\frac{\xi^2(b)}{2}-\frac{\xi(b)^2}{2b}+\beta\xi(b)-b\beta\frac{\xi(a)}{a}+\frac{1}{4b}\xi(b)^2-\frac{1}{2a}\xi(a)\xi(b)+$$
$$+(a^2-b)\xi(\beta)-\xi(b)\beta+\frac{2b}{a}\xi(a)\beta-\frac{1}{2}\xi^2(b)+\frac{1}{a}\xi(a)\xi(b)+$$
$$+\frac{a^2-b}{a}\beta\xi(a)-\frac{1}{2a}\xi(b)\xi(a)-a\beta\xi(a)=$$
$$=(a^2-b)(f_1-f_3+\xi(\beta)+\beta^2)+$$
$$+\xi(a)\frac{\beta}{a}(2b-b+a^2-b-a^2)+\xi(b)\frac{\beta}{2b}(-b-a^2+b+a^2)=$$
$$=(a^2-b)(f_1-f_3+\xi(\beta)+\beta^2).$$

Ahora bien, si $a^2-b=0$, la transformación D-conforme se reduce a una transformación conforme, que ya hemos estudiado anteriormente. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a^2 - b \neq 0$ en todo punto, en caso contrario bastaría restringir el estudio a un entorno donde ocurriera esto. Por tanto, la condición resultante es

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0,$$

y hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.3.10.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, dotado de una estructura de variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$, con β una función que sólo varíe en la dirección de ξ. Realizamos una transformación D-conforme y, si se verifica que*

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0, \tag{2.3.25}$$

entonces la variedad obtenida es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, con funciones:

$$f_1^* = \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{a^2 - b}{a^2}\beta^2 - \frac{\beta}{a^2}\xi(b) - \frac{\xi(b)^2}{4a^2 b}\right),$$

$$f_2^* = \frac{1}{b} f_2,$$

$$f_3^* = \frac{1}{b}\left(f_3 - \frac{a^2 - b}{a^2}\xi(\beta) - \frac{b}{a^3}\beta\xi(a) - \frac{\xi(a)\xi(b)}{2a^3} + \frac{\xi^2(b)}{2a^2} - \frac{\xi(b)^2}{2a^2 b}\right).$$

Demostración: A partir de (2.3.22), se tiene que:

$$f_1^* = (f_1 + A\beta + AB - \beta B)\frac{1}{b} =$$

$$= \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{2(a^2 - b)\beta - \xi(b)}{2a^2}\beta + \frac{2(a^2 - b)\beta - \xi(b)}{2a^2}\frac{\xi(b)}{2b} - \beta\frac{\xi(b)}{2b}\right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{a^2 - b}{a^2}\beta^2 - \frac{\beta}{a^2}\xi(b) - \frac{\xi(b)^2}{4a^2 b}\right).$$

Igualmente a partir de (2.3.22) es evidente que $f_2^* = \frac{1}{b} f_2$.

Por último,

$$f_3^* = (f_3 - \xi(A) - (A-\beta)(C-2B))\frac{1}{b} =$$

$$= \frac{1}{b}\Bigg(f_3 - \frac{a^2-b}{a^2}\xi(\beta) + \frac{\xi(b)}{a^2}\beta -$$

$$- \frac{2ba\xi(a)}{a^4}\beta + \frac{\xi^2(b)2a^2}{4a^4} - \frac{a\xi(a)\xi(b)}{a^4} + \left(\frac{b}{a^2}\beta + \frac{\xi(b)}{2a^2}\right)\left(\frac{\xi(a)}{a} - \frac{\xi(b)}{b}\right)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(f_3 - \frac{a^2-b}{a^2}\xi(\beta) - \frac{b}{a^3}\beta\xi(a) - \frac{\xi(a)\xi(b)}{2a^3} + \frac{\xi^2(b)}{2a^2} - \frac{\xi(b)^2}{2a^2 b}\right),$$

con lo que concluye la demostración. $\square$

Nota 2.3.11.– Obsérvese que la condición (2.3.25) es independiente de las funciones a y b, es decir, es independiente de la transformación D-conforme.

Nota 2.3.12.– Con este resultado hemos mejorado los obtenidos en [1], pues en dicho artículo únicamente considerábamos transformaciones D-conformes como las tratadas en [32], es decir, $a = b$, y más concretamente el caso en el que $a = b$ fuese constante, correspondiente a las transformaciones D-homotéticas usadas por S. Tanno, [33].

Para obtener un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado a partir de otro mediante una transformación D-conforme no es necesario exigir que la variedad de partida sea trans-Sasakiana $(0, \beta)$.

Proposición 2.3.13.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado,verificando*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$ con β una función que sólo varíe en la dirección de ξ. Realizamos una transformación D-conforme y, si se verifica que

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0,$$

entonces la variedad obtenida es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, con funciones:

$$f_1^* = \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{a^2-b}{a^2}\beta^2 - \frac{\beta}{a^2}\xi(b) - \frac{\xi(b)^2}{4a^2b}\right),$$

$$f_2^* = \frac{1}{b}f_2,$$

$$f_3^* = \frac{1}{b}\left(f_3 - \frac{a^2-b}{a^2}\xi(\beta) - \frac{b}{a^3}\beta\xi(a) - \frac{\xi(a)\xi(b)}{2a^3} + \frac{\xi^2(b)}{2a^2} - \frac{\xi(b)^2}{2a^2b}\right).$$

Demostración: La demostración sigue la del Teorema 2.3.10, que se deduce del Lema 2.3.6 y la Proposición 2.3.9, en todos ellos no se usaba la condición de ser trans-Sasakiana $(0,\beta)$ sino que

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$, con β una función que sólo varíe en la dirección de ξ. Así pues en las condiciones del enunciado se obtiene el mismo resultado que en el Teorema 2.3.10. □

Veamos a continuación un importante caso que suministra bastantes ejemplos que se encuentran en las condiciones del Teorema 2.3.10.

Teorema 2.3.14.– *Sea $\widetilde{N}(F_1, F_2)$ un espacio de curvatura holomorfa constante generalizado Kaehleriano, consideremos el producto warped $\widetilde{M}^{2n+1} = \mathbf{R}\times_f \widetilde{N}$ y realicemos una transformación D-conforme a $\widetilde{M}$. Entonces, la variedad obtenida es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$.*

Demostración: Basta comprobar cada una de las hipótesis del Teorema 2.3.10. Por el Teorema 2.2.11, el producto warped $\widetilde{M}^{2n+1} = \mathbf{R}\times_f \widetilde{N}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, con

$$f_1 = \frac{(F_1\circ\pi) - f'^2}{f^2},$$

$$f_2 = \frac{(F_2 \circ \pi)}{f^2},$$

$$f_3 = \frac{(F_1 \circ \pi) - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f},$$

de donde se deduce que

$$f_1 - f_3 = -\frac{f''}{f}.$$

Por otra parte, de la Proposición 2.2.25 deducimos que $\widetilde{M}$ es una variedad con estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, con $\beta = f'/f$, que sólo varía en la dirección de $\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Finalmente,

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = -\frac{f''}{f} + \xi\left(\frac{f'}{f}\right) + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = -\frac{f''}{f} + \frac{f''f - f'^2}{f^2} + \frac{f'^2}{f^2} = 0,$$

es decir, se verifica la última condición, (2.3.25). □

Este resultado engloba los que aparecen en [1] para espacios obtenidos al aplicar una transformación D-homotética a un producto warped de $\mathbf{R}$ por un espacio de curvatura holomorfa constante generalizado ($a = b$ constantes). En el caso en que β fuese una constante, teníamos el Teorema 5.4, que ahora podemos obtener como:

Corolario 2.3.15.– *Dados un espacio de curvatura holomorfa constante $\widetilde{N}(c)$, una constante positiva a y la función $f(t) = Ke^{kt}$, $k \in \mathbf{R}$, $K > 0$, la transformación D-homotética con constante a dota al producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$ de la estructura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con funciones:*

$$f_1^* \;=\; \frac{c}{4aK^2e^{2kt}} - \left(\frac{k}{a}\right)^2, \qquad f_2^* \;=\; f_3^* \;=\; \frac{c}{4aK^2e^{2kt}}.$$

Demostración: En la Nota 2.2.12 recogimos que si partimos de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante $\widetilde{N}^{2n}(c)$ y realizamos un producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$ se obtiene un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado,

$$\widetilde{M}^{2n+1}\left(\frac{\frac{c}{4}-f'^2}{f^2},\ \frac{\frac{c}{4}}{f^2},\ \frac{\frac{c}{4}-f'^2}{f^2}+\frac{f''}{f}\right).$$

Más concretamente, si $f(t) = Ke^{kt}$, $k \in \mathbf{R}$, resulta:

$$f_1 = \frac{\frac{c}{4} - K^2k^2e^{2kt}}{K^2e^{2kt}}, \quad f_2 = f_3 = \frac{c}{4K^2e^{2kt}}.$$

En virtud del Teorema 2.3.14, sabemos que se verifica la condición (2.3.25). Así, al realizar la transformación D-homotética se obtiene $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, donde las funciones f_i^* se deducen del Teorema 2.3.10 teniendo en cuenta que $b = a$, que es constante

$$f_1^* = \frac{1}{a}\left(\frac{c}{4K^2e^{2kt}} - k^2 + \frac{a-1}{a}\frac{K^2k^2e^{2kt}}{K^2e^{2kt}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{c}{4K^2e^{2kt}} - k^2 + \frac{a-1}{a}k^2\right) = \frac{c}{4aK^2e^{2kt}} - \left(\frac{k}{a}\right)^2,$$

$$f_2^* = \frac{1}{a}\frac{c}{4K^2e^{2kt}} = \frac{c}{4aK^2e^{2kt}},$$

$$f_3^* = \frac{1}{a}\left(\frac{c}{4K^2e^{2kt}} - \frac{a-1}{a}\frac{Kk^2e^{kt}Ke^{kt} - K^2k^2e^{2kt}}{K^2e^{2kt}}\right) = \frac{c}{4aK^2e^{2kt}},$$

como queríamos demostrar. □

Y su generalización para β una función no constante [1, Teorema 5.5]:

Corolario 2.3.16.– *Dados un espacio de curvatura holomorfa constante $\widetilde{N}(c)$, una constante positiva a y una función $f = f(t) > 0$, la transformación D-homotética con constante a dota al producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$ de la estructura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con funciones:*

$$f_1^* = \frac{ac - 4f'^2}{4a^2f^2}, \qquad f_2^* = \frac{c}{4af^2}, \qquad f_3^* = \frac{ac-4f'^2}{4a^2f^2} + \frac{f''}{a^2f}.$$

Demostración: Al igual que en la demostración del corolario anterior, al realizar el producto warped se obtienen las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$, indicadas en la Nota 2.2.12, donde ahora f es una función cuya derivada no es constante. Aplicando de nuevo los Teoremas 2.3.10 y 2.3.14, resulta

$$f_1^* = \frac{1}{a}\left(\frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2} + \frac{a-1}{a}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) = \frac{ac - 4f'^2}{4a^2 f^2},$$

$$f_2^* = \frac{1}{a}\frac{c}{4f^2} = \frac{c}{4af^2},$$

$$f_3^* = \frac{1}{a}\left(\frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} - \frac{a-1}{a}\frac{f''f - f'^2}{f^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{c}{4f^2} + \frac{1}{a}\frac{f''}{f} - \frac{1}{a}\frac{f'^2}{f^2}\right) = \frac{ac - 4f'^2}{4a^2 f^2} + \frac{f''}{a^2 f},$$

lo cual concluye la demostración. □

También obteníamos el siguiente resultado, [1, Teorema 5.6], para transformaciones D-conformes del tipo manejado por S. Suguri y S. Nakayama en [32], es decir, con una única función δ:

$$\phi^* = \phi, \quad \xi^* = \frac{1}{\delta^2}\xi, \quad \eta^* = \delta^2\eta, \quad g^* = \delta^2 g + \delta^2(\delta^2 - 1)\eta \otimes \eta. \tag{2.3.26}$$

Corolario 2.3.17.– *Dados un espacio de curvatura holomorfa constante $\widetilde{N}(c)$ y dos funciones $f = f(t) > 0$, $\delta = \delta(t) > 0$, la transformación D-conforme con función δ dota al producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$ de estructura de espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con funciones:*

$$f_1^* = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{f'}{f} + \frac{\delta'}{\delta}\right)^2\right), \qquad f_2^* = \frac{c}{4\delta^2 f^2},$$

$$f_3^* = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\left(\frac{f'}{f} + \frac{\delta'}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{f''}{f} + \frac{\delta''}{\delta}\right) + 2\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^2\right)\right).$$

Demostración: De nuevo recurrimos a la Nota 2.2.12, al Teorema 2.3.10 (con $a = b = \delta^2$) y al Teorema 2.3.14. Así, llegamos a que las funciones que caracterizan al espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado son las siguientes:

$$f_1^* = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2} + \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2}\beta^2 - \frac{\beta}{\delta^4}\xi(\delta^2) - \frac{\xi(\delta^2)^2}{4\delta^6}\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\delta^4}\frac{f'}{f}2\delta\delta' - \frac{(2\delta\delta')^2}{4\delta^6}\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{2\delta' f'}{\delta^3 f} - \frac{\delta'^2}{\delta^4}\right) = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{f'}{f} + \frac{\delta'}{\delta}\right)^2\right),$$

$$f_2^* = \frac{1}{\delta^2}\frac{c}{4f^2} = \frac{c}{4\delta^2 f^2},$$

$$f_3^* = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\frac{c}{4} - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} - \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2}\xi(\beta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\delta^4}\beta\xi(\delta^2) - \frac{1}{2\delta^6}\xi(\delta^2)^2 + \frac{1}{2\delta^4}\xi^2(\delta^2) - \frac{\xi(\delta^2)^2}{2\delta^6}\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f''}{f} - \frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\left(-\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\delta\delta'}{\delta^2}\frac{f'}{f} + \frac{(2\delta\delta')^2}{\delta^4} - \frac{(\delta'^2 + \delta\delta'')}{\delta^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(-\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + 2\frac{\delta' f'}{\delta f} + \frac{(2\delta\delta')^2}{\delta^4} - \frac{(\delta'^2 + \delta\delta'')}{\delta^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\left(\frac{f'}{f} + \frac{\delta'}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{f''}{f} + \frac{\delta''}{\delta}\right) + 2\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^2\right)\right),$$

con lo que queda demostrado el corolario. □

Nota 2.3.18.– Obsérvese cómo los Corolarios 2.3.15 y 2.3.16 se obtienen como casos particulares del Corolario 2.3.17.

Ejemplo 2.3.19.– Destaquemos que si $\widetilde{N}(c)$ es $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{CP}^n$ o $\mathbf{CH}^n$, podemos obtener ejemplos concretos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados aplicando el Teorema 2.3.3 y los Corolarios 2.3.15, 2.3.16 y 2.3.17, con las correspondientes expresiones del tensor de curvatura de $\widetilde{M}$, simplemente escribiendo $c = 0$, $c = 4$ o $c = -4$, respectivamente, en los distintos resultados mencionados.

Nota 2.3.20.– En [1] se hace mención a otro tipo de transformación métrica, dada por $g^* = \gamma^2 g + (1 - \gamma^2)\eta \otimes \eta$, siendo γ una función positiva en $\widetilde{M}$. Obsérvese que esta transformación es sólo un caso particular de las transformaciones D-conformes que venimos manejando. Es bien sabido que si $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ es una variedad casi contacto métrica, entonces $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g^*)$ también lo es (véase, por ejemplo, [25]). Podríamos considerar esa transformación sobre un producto warped $\widetilde{M} = \mathbf{R} \times_f \widetilde{N}(c)$, con $\gamma = \gamma(t)$. Pero, en este caso, es fácil comprobar que $\widetilde{M}$ se transforma en otro producto warped, con función γf, por lo que procediendo de este modo no se obtiene ningún ejemplo significativo.

Volviendo al caso de las transformaciones D-conformes, es interesante estudiar qué estructura tiene la variedad obtenida tras aplicarle tal transformación, en el caso que nos ha venido ocupando:

Proposición 2.3.21.– *Sea $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad con estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Al aplicarle una transformación D-conforme*

$$\phi^* = \phi, \qquad \xi^* = \frac{1}{a}\xi, \qquad \eta^* = a\eta, \qquad g^* = bg + (a^2 - b)\eta \otimes \eta$$

con a y b funciones que únicamente varíen en la dirección de ξ, se obtiene una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta^*)$ con

$$\beta^* = \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right).$$

Demostración: Debemos estudiar la exprexión $(\widetilde{\nabla}^*_X\phi)Y$, lo que hacemos a partir de (2.3.14):

$$(\widetilde{\nabla}^*_X\phi)Y = \widetilde{\nabla}^*_X\phi Y - \phi\widetilde{\nabla}^*_X Y =$$

$$= \widetilde{\nabla}_X\phi Y + Ag(X,\phi Y)\xi + B\eta(X)\phi Y - \phi\widetilde{\nabla}_X Y - B(\eta(Y)\phi X + \eta(X)\phi Y) =$$

$$= (\widetilde{\nabla}_X\phi)Y + Ag(X,\phi Y)\xi - B\eta(Y)\phi X.$$

Pero al ser $\widetilde{M}$ una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta)$, resulta que:

$$(\widetilde{\nabla}^*_X\phi)Y = \beta(g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X) + Ag(X,\phi Y)\xi - B\eta(Y)\phi X =$$

$$= \beta\left(\frac{a}{b}g^*(\phi X,Y)\xi^* - \frac{1}{a}\eta^*(Y)\phi X\right) +$$

$$+ \left(\frac{a^2-b}{a^2}\beta - \frac{\xi(b)}{2a^2}\right)\frac{a}{b}g^*(X,\phi Y)\xi^* - \frac{\xi(b)}{2ba}\eta^*(Y)\phi X =$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a^2}\beta + \frac{\xi(b)}{2a^2}\right)g^*(\phi X,Y)\xi^* - \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right)\eta^*(Y)\phi X =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right)g^*(\phi X,Y)\xi^* - \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right)\eta^*(Y)\phi X.$$

Por lo tanto, como $\phi^* = \phi$, $(\widetilde{M},\phi^*,\xi^*,\eta^*,g^*)$ tiene una estructura trans-Sasakiana $(0,\beta^*)$, con $\beta^* = \dfrac{1}{a}\left(\beta + \dfrac{\xi(b)}{2b}\right)$. □

Nota 2.3.22.– Así, por ejemplo podríamos partir de un producto warped como $\mathbf{R}\times_f \widetilde{N}(c)$, que es una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta)$ con $\beta = f'/f$, según vimos en la Proposición 2.2.25, en la que además β fuese constante y, realizando una transformación D-conforme con funciones a y b adecuadas, conseguir una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta^*)$ con β^* no constante.

Al igual que hemos señalado en varias ocasiones vamos a estudiar un resultado similar para una variedad que, en vez de ser trans-Sasakiana $(0,\beta)$, verifique (1.1.24) con $\alpha = 0$. Estudiemos pues qué estructura tiene la variedad obtenida tras aplicarle una transformación D-conforme.

Proposición 2.3.23.– *Sea $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad verificando*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$ con β una función que sólo varía en la dirección de ξ. Al aplicarle una transformación D-conforme

$$\phi^* = \phi, \qquad \xi^* = \frac{1}{a}\xi, \qquad \eta^* = a\eta, \qquad g^* = bg + (a^2 - b)\eta \otimes \eta$$

con a y b funciones que únicamente varíen en la dirección de ξ, se obtiene una variedad que verifica

$$\widetilde{\nabla}^*_Y \xi = \beta^*(Y - \eta^*(Y)\xi^*),$$

para todo campo Y con

$$\beta^* = \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right).$$

Demostración: Sea Y un campo en la variedad, vamos a estudiar el valor de $\widetilde{\nabla}^*_Y \xi$. Para ello podemos usar la ecuación (2.3.14) pues, como indicamos en la Nota 2.3.7, es válida para variedades en las condiciones del enunciado. Así pues,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}^*_Y \xi^* = \widetilde{\nabla}_Y \xi^* + Ag(\phi Y, \phi\xi^*)\xi + \\ +B(\eta(\xi^*)Y + \eta(Y)\xi^* - 2\eta(Y)\eta(\xi^*)\xi) + C\eta(Y)\eta(\xi^*)\xi = \\ = Y\left(\frac{1}{a}\right)\xi + \frac{1}{a}\widetilde{\nabla}_Y \xi + B\left(\frac{1}{a}Y - \frac{1}{a}\eta(Y)\xi\right) + C\frac{1}{a}\eta(Y)\xi = \\ = \frac{1}{a}(Y - \eta(Y)\xi + \frac{B}{a}(Y - \eta(Y)\xi) = \beta^*(Y - \eta^*(Y)\xi^*), \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación dada en la Nota 2.3.8. □

2.4 Espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados con estructura de contacto.

Ya sabemos por el Corolario 2.2.19 que no existen espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ conexos, de dimensión mayor o igual que 5, dotados con una estructura Sasakiana y funciones no constantes. En la Nota 2.2.20 debilitamos esta condición y vimos que bastaba que la variedad fuese K-contacto. Es más, en virtud del Teorema 2.1.10, es suficiente que la variedad sea de contacto métrica y $f_3 = f_1 - 1$ para que las funciones sean constantes.

Pero quedaba abierto el problema de qué ocurría en el caso de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que tuviese simplemente una estructura de contacto métrica. En esta sección demostraremos que también en este caso las funciones son constantes. Para ello recurrimos a una serie de artículos que trabajan con un cierto tipo de variedades de contacto que engloba a aquellos espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados que sean variedades de contacto métricas.

D. E. Blair, T. Koufogiorgos y B. J. Papantoniou inician, en [6], el estudio de aquellas variedades de contacto métricas en las que ξ pertenece a la distribución (κ, μ)-nula, para ciertos κ y μ números reales. Esto quiere decir que el tensor de curvatura de Riemann verifica la igualdad

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY), \qquad (2.4.1)$$

para cualesquiera campos X, Y en $\widetilde{M}$, donde

$$hX = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)X,$$

siendo L la derivada de Lie.

Estos espacios engloban a las variedades Sasakianas ($\kappa = 1$, $\mu = 0$), pero resulta más interesante el estudio de variedades no Sasakianas. Estas existen y el ejemplo clásico es el fibrado tangente esférico de una variedad Riemanniana llana, dotado de la estructura de variedad de contacto métrica usual, [4]. Otro punto de interés de estos espacios es que la condición (2.4.1) es invariante por transformaciones D-homotéticas, si bien las constantes κ y μ sí varían, [6, pág. 193].

En [8], E. Boeckx trata estos espacios, a los que denomina (κ, μ)-*espacios*, y en [9] ofrece una clasificación de los mismos.

R. Sharma generaliza la definición de estos espacios, en [31], trabajando con variedades de contacto métricas que verifican la condición (2.4.1) para κ y μ funciones diferenciables no necesariamente constantes. Estas variedades reciben el nombre de (κ, μ)-*espacios generalizados*. Sobre esta nueva definición trabajan T. Koufogiorgos y C. Tsichlias (ver [23]), demostrando que en dimensiones mayores o iguales que 5 las funciones κ y μ son constantes, y presentando ejemplos en dimensión 3 con funciones no constantes.

En todos los artículos comentados se trata de forma separada el caso Sasakiano, que como hemos señalado se corresponde con $\kappa = 1$ y $\mu = 0$. A este respecto, en [6], se demuestra que $\kappa = 1$ si y sólo si $h = 0$, lo que equivale al hecho de que la variedad de contacto métrica sea K-contacto [4, pág. 51]. Es más, la variedad en tal caso será Sasakiana, tal y como se pone de manifiesto en el Teorema 2.4.1 que enunciaremos a continuación. Por otra parte, en toda variedad Sasakiana,

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

para todos X, Y, con lo cual será un $(1, 0)$-espacio. Así, los conceptos de variedad Sasakiana y $(1, 0)$-espacio son equivalentes.

A continuación presentamos algunas identidades que necesitaremos, véase [6, pág. 191]:

$$h\xi = 0, \tag{2.4.2}$$

$$h\phi = -\phi h, \tag{2.4.3}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\phi X - \phi h X. \tag{2.4.4}$$

De (2.4.3) se deduce que si X es un autovector de h asociado al autovalor λ, ϕX lo es asociado a $-\lambda$.

El principal resultado de [6] es el siguiente teorema, cuya demostración se basa en un resultado de S. Tanno (ver [34]).

Teorema 2.4.1.– [6, pág. 194] *Sea* $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *un* (κ, μ)*-espacio. Entonces,* $\kappa \leq 1$*. Si* $\kappa = 1$*, entonces* $h = 0$ *y* $\widetilde{M}$ *es Sasakiana. Si* $\kappa < 1$*,* $\widetilde{M}$ *admite tres distribuciones mutuamente ortogonales e integrables* $\mathcal{D}(0)$*,* $\mathcal{D}(\lambda)$ *y* $\mathcal{D}(-\lambda)$ *determinadas por los espacios propios de* h*, donde* $\lambda = \sqrt{1-\kappa}$*. Es más,*

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = (\kappa - \mu)(g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda), \tag{2.4.5}$$

$$\widetilde{R}(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda = (\kappa - \mu)(g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_{-\lambda} - g(\phi X_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi Y_{-\lambda}), \tag{2.4.6}$$

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = \kappa g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_{-\lambda} + \mu g(\phi X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda}, \tag{2.4.7}$$

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda = -\kappa g(\phi Y_{-\lambda}, Z_\lambda)\phi X_\lambda - \mu g(\phi Y_{-\lambda}, X_\lambda)\phi Z_\lambda, \tag{2.4.8}$$

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda = (2(1+\lambda) - \mu)(g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda), \tag{2.4.9}$$

$$\widetilde{R}(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = (2(1-\lambda) - \mu)(g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}), \tag{2.4.10}$$

donde X_λ*,* Y_λ*,* $Z_\lambda \in \mathcal{D}(\lambda)$ *y* $X_{-\lambda}, Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda} \in \mathcal{D}(-\lambda)$*.*

Obsérvese que, en virtud de (2.4.4), $\xi \in \mathcal{D}(0)$. De hecho, si $\kappa < 1$ se prueba en [6] que $\mathcal{D}(0)$ es justamente la distribución generada por ξ.

Este resultado nos suministra una expresión explícita del tensor de curvatura de Riemann que debemos comparar con la expresión característica de los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados. Para ello, veamos primero que, en el caso de contacto, nuestros espacios constituyen ejemplos de (κ, μ)-espacios generalizados.

Proposición 2.4.2.– *Un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado,* $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$*, que sea una variedad de contacto métrica es un* (κ, μ)*-espacio generalizado con* $\kappa = f_1 - f_3$ *y* $\mu = 0$*.*

Demostración: En $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ se tiene que

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = (f_1 - f_3)(\eta(Y)X - \eta(X)Y), \tag{2.4.11}$$

para cualesquiera X, Y campos en $\widetilde{M}$, en virtud de (2.1.1). Es decir, se verifica la condición (2.4.1) para $\kappa = f_1 - f_3$ y $\mu = 0$, y al ser $\widetilde{M}$ de contacto métrica resulta que es un (κ, μ)-espacio generalizado. □

Así pues, si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es de contacto métrica, es un $(\kappa, 0)$-espacio generalizado, con $\kappa = f_1 - f_3$.

Si la función $\kappa = f_1 - f_3$ es idénticamente 1 la variedad es Sasakiana y en tal caso, por el Corolario 2.2.19, sabemos que, para dimensiones mayores o iguales que 5, las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$, son constantes.

Veamos qué ocurre si $f_1 - f_3$ no es idénticamente 1. Para ello de nuevo debemos distinguir que la variedad tenga dimensión 3 o superior. Más adelante estudiaremos las variedades de dimensión 3. En todo lo que sigue supondremos que la variedad $\widetilde{M}$ es una variedad de contacto métrica conexa y que tiene dimensión mayor o igual que 5.

Proposición 2.4.3.– *Sea $\widetilde{M}$ un $(\kappa, 0)$-espacio generalizado, no Sasakiano, con dimensión mayor o igual que 5. Entonces, κ es constante, es decir, $\widetilde{M}$ es un $(\kappa, 0)$-espacio. Además se verifica $\kappa < 1$.*

DEMOSTRACIÓN: En el Teorema 3.5 de [23] se demuestra que, en dimensiones mayores o iguales que 5, para todo (κ, μ)-espacio generalizado no Sasakiano las funciones κ y μ son constantes. En tal caso ya sabemos, Teorema 2.4.1, que $\kappa \leq 1$; es más como la variedad no es Sasakiana la constante no puede ser 1. □

Estudiemos en este último caso cómo son las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$.

Lema 2.4.4.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad de contacto métrica, no Sasakiana, de dimensión mayor o igual que 5, entonces f_2 es constante e igual a $\kappa = f_1 - f_3$.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos probado gracias a las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3 que $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es un $(\kappa, 0)$-espacio, con $\kappa = f_1 - f_3$ constante. Por ello, de (2.4.5) se deduce que

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = \kappa(g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda),$$

para $X_\lambda, Y_\lambda \in \mathcal{D}(\lambda)$ y $Z_{-\lambda} \in \mathcal{D}(-\lambda)$. Y en virtud de la expresión característica del tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, (2.1.1), al ser X_λ e Y_λ ortogonales a $Z_{-\lambda}$ y todos ellos a ξ, se tiene que

$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} =$$

$$= f_2\{g(X_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda - g(Y_\lambda, \phi Z_{-\lambda})\phi X_\lambda + 2g(X_\lambda, \phi Y_\lambda)\phi Z_{-\lambda}\} =$$

$$= f_2(g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi Y_\lambda),$$

pues

$$g(X, \phi Y_\lambda) = 0$$

dado que si $Y_\lambda \in \mathcal{D}(\lambda)$, $\phi Y_\lambda \in \mathcal{D}_{-\lambda}$. En dimensiones superiores o iguales que 5 podemos escoger X_λ ortogonal a Y_λ, así tomando $Z_{-\lambda} = \phi X_\lambda$ e igualando ambas ecuaciones se deduce que $f_2 = \kappa$. □

Lema 2.4.5.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad de contacto métrica, no Sasakiana, de dimensión mayor o igual que* 5*, entonces $f_2 = 0$.*

Demostración: Por el Teorema 2.4.1 sabemos que $T\widetilde{M}$ admite la descomposición

$$T\widetilde{M} = \mathcal{D}(\lambda) \oplus \mathcal{D}(-\lambda) \oplus \mathcal{D}(0).$$

Escogemos $X, Y \in \mathcal{D}(\lambda)$ unitarios y ortogonales y consideramos $\phi X \in \mathcal{D}(-\lambda)$. En $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ se tiene que

$$\widetilde{R}(X, \phi X, Y, \phi Y) =$$

$$= f_2\{g(X, \phi Y)g(\phi^2 X, \phi Y) - g(\phi X, \phi Y)g(\phi X, \phi Y) + 2g(X, \phi^2 X)g(\phi Y, \phi Y)\} =$$

$$= 2f_2 g(X, -X)g(Y, Y) = -2f_2.$$

Por otra parte, al ser $\widetilde{M}$ un $(\kappa, 0)$-espacio, se tiene por (2.4.8) que:

$$\widetilde{R}(X, \phi X)Y = -\kappa g(\phi^2 X, Y)\phi X = -\kappa g(-X, Y)\phi X = 0,$$

y por tanto

$$\widetilde{R}(X, \phi X, Y, \phi Y) = 0.$$

Comparando ambas expresiones se deduce que $f_2 = 0$. □

Uniendo los resultados de ambos lemas podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 2.4.6.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura de contacto métrica, no Sasakiano, de dimensión mayor o igual que* 5. *Entonces $\widetilde{M}$ es un $(0,0)$-espacio.*

DEMOSTRACIÓN: Usando la Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3 sabemos que $\widetilde{M}$ es un $(\kappa, 0)$-espacio, y de los lemas anteriores se deduce obviamente que $\kappa = f_2 = 0$. □

Aunque hayamos demostrado que $f_1 - f_3 = \kappa = f_2 = 0$, aún queda por determinar el valor de las funciones $f_1 = f_3$. Estudiando la ecuación (2.4.6) no obtenemos ninguna información; no ocurre así con la ecuación (2.4.7).

Lema 2.4.7.– *Si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ es una variedad de contacto métrica, no Sasakiana, de dimensión mayor o igual que* 5, *entonces $f_1 = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: La ecuación (2.4.7) para un $(0,0)$-espacio queda
$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = 0,$$
para $X_\lambda \in \mathcal{D}(\lambda)$, $Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda} \in \mathcal{D}(-\lambda)$. Y por ser $\widetilde{M} = \widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$,
$$\widetilde{R}(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = f_1 g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_\lambda,$$
donde hemos utilizado que $f_2 = 0$. Comparando ambas ecuaciones para $Y_{-\lambda} = Z_{-\lambda}$ y tomando todos los campos unitarios, se deduce que $f_1 = 0$. □

Unificando todos estos resultados, podemos demostrar:

Teorema 2.4.8.– *Todo espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, de dimensión mayor o igual que* 5, *que sea una variedad de contacto métrica no Sasakiana, es una variedad llana.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ en las condiciones del enunciado. Por los Lemas 2.4.4 y 2.4.5, $f_2 = \kappa = 0$. Por otra parte, sabemos que $f_1 = f_3$ y del Lema 2.4.7 se sigue que se anulan.

Así pues, el tensor de curvatura de Riemann es idénticamente nulo en la variedad, es decir, $\widetilde{M}$ es llana. $\square$

Sin embargo, es un hecho conocido (véase [4]) que no existen variedades de contacto métricas, de dimensiones mayores o iguales que 5, que sean llanas. Por tanto, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.4.9.– *Todo espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, de dimensión mayor o igual que 5, que sea una variedad de contacto métrica, es una variedad Sasakiana. Por lo tanto las funciones f_1, f_2 y f_3 son constantes.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos probado que, en dimensión mayor o igual que 5, los únicos espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados que pueden existir han de ser Sasakianos o llanos, y como estos últimos no existen, deben ser todos Sasakianos.

El que las funciones f_1, f_2 y f_3 sean constantes se deduce entonces de Corolario 2.2.19. $\square$

Hemos concluido el estudio de los espacios $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ que fuesen variedades de contacto métricas y tuviesen dimensión mayor o igual que 5. Centraremos ahora nuestra atención en los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados de dimensión 3 que tengan estructura de variedad de contacto métrica. Tras los resultados obtenidos en dimensiones superiores cabe plantearse si existirán espacios en estas condiciones que no sean Sasakianos y en tal caso cómo se comportarán las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$. Responderemos a estas y otras cuestiones.

Previamente necesitamos hacer una apreciación: en dimensión 3, a diferencia de lo que ocurre en dimensiones superiores, la expresión del tensor de curvatura no está unívocamente determinada. Ello es de gran importancia en nuestro caso, ya que definimos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado como aquella variedad casi contacto métrica cuyo tensor de curvatura admite la siguiente expresión

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = f_1\widetilde{R}_1(X,Y)Z + f_2\widetilde{R}_2(X,Y)Z + f_3\widetilde{R}_3(X,Y)Z,$$

para ciertas funciones f_i, $i = 1,2,3$, y para cualesquiera campos X, Y, Z en $\widetilde{M}$, donde $\widetilde{R}_i$, $i = 1,2,3$, representan las expresiones usuales, (1.3.10), (1.3.11) y (1.3.12) respectivamente. Veámoslo.

Para ello, sea $\widetilde{M}^3$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado y supongamos que su tensor de curvatura admite dos escrituras

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = f_1\widetilde{R}_1(X,Y)Z + f_2\widetilde{R}_2(X,Y)Z + f_3\widetilde{R}_3(X,Y)Z$$

y

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = f_1^*\widetilde{R}_1(X,Y)Z + f_2^*\widetilde{R}_2(X,Y)Z + f_3^*\widetilde{R}_3(X,Y)Z.$$

Nos proponemos estudiar qué relación existe entre las funciones f_i y f_i^*.

Escojamos una base ortonormal $\{X, \phi X, \xi\}$, es decir, una ϕ-base y consideremos

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = (f_1 - f_3)X,$$
$$\widetilde{R}(X,\phi X)X = -(f_1 + 3f_2)\phi X.$$

Escribiendo las mismas ecuaciones para f_i^*, multiplicando la primera por X, la segunda por ϕX e igualando llegamos al siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 - f_3 & = & f_1^* - f_3^* \\ f_1 + 3f_2 & = & f_1^* + 3f_2^* \end{array}\right. ,$$

o equivalentemente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (f_1^* - f_1) - (f_3^* - f_3) & = & 0 \\ (f_1^* - f_1) + 3(f_2^* - f_2) & = & 0 \end{array}\right. .$$

El sistema es compatible indeterminado, y se obtiene trivialmente que la relación existente entre las funciones, viene dada por

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1 + f, \\ f_2^* &= f_2 - \frac{f}{3}, \\ f_3^* &= f_3 + f, \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

pudiendo elegir como f cualquier función diferenciable en $\widetilde{M}$.

Así, el tensor de curvatura de Riemann de cualquier espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ podemos reescribirlo con $f_2^* = 0$. En tal caso:

$$f_1^* = f_1 + 3f_2 \quad \text{y} \quad f_3^* = f_3 + 3f_2. \tag{2.4.13}$$

Recíprocamente, si $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, y definimos f_i^*, $i = 1, 2, 3$, como en las ecuaciones anteriores, es fácil ver que el tensor de curvatura de $\widetilde{M}^3$ admite la escritura

$$\widetilde{R}(X.Y)Z = \sum_{i=1}^{3} f_i^* \widetilde{R}_i(X, Y)Z.$$

En efecto, como

$$\widetilde{R} = \sum_{i=1}^{3} f_i \widetilde{R}_i = (f_1^* - f_1)\widetilde{R}_1 + \left(f_2^* + \frac{f}{3}\right)\widetilde{R}_2 + (f_3^* - f)\widetilde{R}_3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i^* \widetilde{R}_i + \left(-f\widetilde{R}_1 + \frac{f}{3}\widetilde{R}_2 - f\widetilde{R}_3\right),$$

bastará probar que

$$-f\widetilde{R}_1(X, Y)Z + \frac{f}{3}\widetilde{R}_2(X, Y)Z - f\widetilde{R}_3(X, Y)Z = 0,$$

para todos X, Y, Z campos en $\widetilde{M}^3$. En realidad basta probar esta igualdad para una ϕ-base, $\{X, \phi X, \xi\}$, lo cual es una mera comprobación.

En lo que sigue, para considerar una única escritura del tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado de dimensión 3, tomaremos aquella en la que $f_2 = 0$. Así pues, los espacios que trataremos podemos denotarlos por $\widetilde{M}^3(f_1, 0, f_3)$.

Nota 2.4.10.– En dimensiones superiores a 3, el sistema manejado es compatible determinado, y por tanto la expresión del tensor de curvatura de Riemann es única.

El estudio de los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados de dimensión 3, con estructura de variedad de contacto, se basa en algunos resultados de D. E. Blair, T. Koufogiorgos y S. Sharma, [7], en los que estudian $(\kappa, 0)$-espacios de dimensión 3. En particular, demuestran:

Proposición 2.4.11.– [7] *Sea $(\widetilde{M}^3, \phi, \xi, \eta, g)$ una variedad de contacto métrica. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\widetilde{M}^3$ *es una variedad η-Einstein,*

ii) $Q\phi = \phi Q$,

iii) $\widetilde{M}$ *es un $(\kappa, 0)$-espacio,*

donde Q denota el operador de Ricci de $\widetilde{M}$.

Recordemos que una varieadad η-Einstein es una variedad de contacto métrica en la que el operador de Ricci, Q, verifica

$$Q = aI + b\eta \otimes \xi,$$

para ciertas funciones diferenciables a y b definidas en $\widetilde{M}$.

Obsérvese que en la condición *iii)* κ es una constante. De la Proposición 2.4.2, en cuya demostración no se utiliza que la variedad tenga dimensión mayor o igual que 5, se deduce que un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$, que sea una variedad de contacto métrica, verifica esa condición para $f_1 - f_3$ que en principio no tendría por qué ser constante. En la próxima proposición demostraremos que lo es, pues cumple las condiciones de la Proposición 2.4.11.

Antes, recordemos que en una variedad Riemanniana de dimensión 3, el tensor de curvatura de Riemann viene dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z = {} & g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + g(QY,Z)X - \\ & -g(QX,Z)Y - 3\tau(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y), \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

donde τ denota la curvatura escalar.

Proposición 2.4.12.– *Sea $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado de dimensión 3, con estructura de contacto métrica. Entonces, se verifica que $f_1 - f_3$ es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Basta comprobar que $\widetilde{M}$ cumple la condición $i)$ de la Proposición 2.4.11. Entonces, por esta proposición, se deduce que ha de verificarse la condición $iii)$, es decir,

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y),$$

para cualesquiera X, Y campos en $\widetilde{M}$, siendo κ una cierta constante. Como, por la Proposición 2.4.2, ese valor coincide con $f_1 - f_3$, esta diferencia es constante.

Comprobemos pues la condición $i)$. Por una parte, en $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ se verifica la ecuación (2.4.11). Comparemos esta expresión de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ con la que se deduce de la ecuación (2.4.14). Previamente necesitamos realizar algunos cálculos.

En primer lugar debemos estudiar $Q\xi$, para ello escogemos una base local de campos ortonormales, $\{X_1, X_2, X_3 = \xi\}$, y calculamos que:

$$Q\xi = \sum_{i=1}^{3} g(Q\xi, X_i)X_i = \sum_{i=1}^{3} g(\sum_{j=1}^{3} \widetilde{R}(\xi, X_j)X_j, X_i)X_i =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \widetilde{R}(X_j, X_i, \xi, X_j)X_i = \sum_{i,j=1}^{3} (f_1 - f_3)g(\eta(X_i)X_j - \eta(X_j)X_i, X_j)X_i =$$

$$= 3\sum_{i=1}^{3}(f_1 - f_3)\eta(X_i)X_i - \sum_{i,j=1}^{3} (f_1 - f_3)\eta(X_j)\delta_{ij}X_i =$$

$$= 3(f_1 - f_3)\xi - (f_1 - f_3)\xi = 2(f_1 - f_3)\xi.$$

En segundo lugar veamos el valor de $\eta(QX)$:

$$\eta(QX) = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{R}(X, X_i, X_i, \xi) = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{R}(\xi, X_i, X_i, X) = g(Q\xi, X) =$$

$$= g(2(f_1 - f_3)\xi, X) = 2(f_1 - f_3)\eta(X).$$

Ya estamos en condiciones de sustituir en la ecuación (2.4.14), obteniendo:

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi =$$

$$= \eta(Y)QX - \eta(X)QY + \eta(QY)X - \eta(QX)Y - 3\tau(\eta(Y)X - \eta(X)Y) =$$
$$= \eta(Y)QX - \eta(X)QY + 2(f_1 - f_3)\eta(Y)X -$$
$$-2(f_1 - f_3)\eta(X)Y - 3\tau(\eta(Y)X - \eta(X)Y) =$$
$$= \eta(Y)\left(QX + (2(f_1 - f_3) - 3\tau)\,X\right) -$$
$$-\eta(X)\left(QY + (2(f_1 - f_3) - 3\tau)\,Y\right). \qquad (2.4.15)$$

Restando las ecuaciones (2.4.15) y (2.4.11), resulta que

$$\eta(Y)\left(QX + (f_1 - f_3 - 3\tau)\,X\right) - \eta(X)\left(QY + (f_1 - f_3 - 3\tau)\,Y\right) = 0,$$

que tomando Y ortogonal a ξ y $X = \xi$ queda

$$QY + (f_1 - f_3 - 3\tau)\,Y = 0,$$

es decir,

$$QY = (3\tau - f_1 + f_3)\,Y.$$

Finalmente, veamos cuál es la expresión de QZ para Z un campo cualquiera en $\widetilde{M}$:

$$QZ = Q(Z - \eta(Z)\xi + \eta(Z)\xi) = (3\tau - f_1 + f_3)\,(Z - \eta(Z)\xi) + \eta(Z)Q\xi =$$
$$= (3\tau - f_1 + f_3)\,(Z - \eta(Z)\xi) + 2(f_1 - f_3)\eta(Z)\xi =$$
$$= (3\tau - f_1 + f_3)\,Z - 3\,(\tau - f_1 + f_3)\,\eta(Z)\xi. \qquad (2.4.16)$$

Por tanto $\widetilde{M}$ es una variedad η-Einstein con $a = (3\tau - f_1 + f_3)$ y $b = -3\,(\tau - f_1 + f_3)$. □

Nota 2.4.13.– En la demostración de la proposición anterior hemos comprobado que un espacio $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$, dotado de una estructura de variedad de contacto métrica, es η-Einstein. Entonces, en virtud de la Proposición 2.4.11, el operador de Ricci y ϕ han de conmutar.

De hecho, esta propiedad se puede obtener directamente en un ámbito más general, tal como recoge la siguiente proposición:

Proposición 2.4.14.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, de dimensión cualquiera. Entonces, $Q\phi = \phi Q$, donde Q denota el operador de Ricci de $\widetilde{M}$.*

Demostración: Tomemos una ϕ-base en $\widetilde{M}$, $\{e_i, \phi e_i, \xi\}$. Calculemos en primer lugar

$$\widetilde{R}(X, e_i)e_i = f_1\{X - g(X, e_i)e_i\} + 3f_2 g(X, \phi e_i)\phi e_i - f_3\eta(X)\xi,$$

$$\widetilde{R}(X, \phi e_i)\phi e_i = f_1\{X - g(X, \phi e_i)\phi e_i\} + 3f_2 g(X, e_i)e_i - f_3\eta(X)\xi,$$

y

$$\widetilde{R}(X, \xi)\xi = f_1\{X - \eta(X)\xi\} + f_3\{\eta(X)\xi - X\} = (f_1 - f_3)(X - \eta(X)\xi).$$

Así pues, el operador de Ricci en un espacio de curvatura generalizado tiene la siguiente expresión

$$QX = \sum_i \widetilde{R}(X, e_i)e_i + \sum_i \widetilde{R}(X, \phi e_i)\phi e_i + \widetilde{R}(X, \xi)\xi =$$

$$= f_1((2n+1)X - X) + 3f_2(X - \eta(X)\xi) - f_3 2n\eta(X)\xi + f_3(-X + \eta(X)\xi) =$$
$$= 2nf_1X + 3f_2(X - \eta(X)\xi) - f_3(X + (2n-1)\eta(X)\xi),$$

para cualquier campo X en $\widetilde{M}$.

Por tanto, es fácil comprobar

$$Q\phi X = 2nf_1\phi X + 3f_2\phi X - f_3\phi X = \phi QX,$$

con lo que concluye la demostración. □

Hemos visto que todo espacio $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ admite una escritura como $\widetilde{M}^3(f_1^*, 0, f_3^*)$, y que si, además, la variedad es de contacto métrica entonces $f_1^* - f_3^*$ es constante. Al igual que nos planteábamos en dimensiones superiores, nos preguntamos ahora, una vez adoptada esta escritura unificada, cómo se comportan las funciones f_1^* y f_3^*.

Para ello retomamos el artículo [7] cuyo principal resultado clasifica las variedades de contacto métricas de dimensión 3 en las que el operador de Ricci conmuta con el tensor ϕ:

Teorema 2.4.15.– [7, pág. 395] *Sea $\widetilde{M}^3$ una variedad de contacto métrica en la que $Q\phi = \phi Q$. Entonces $\widetilde{M}^3$ es una variedad Sasakiana, una variedad llana o un espacio de curvatura ξ-seccional constante $\kappa < 1$ y curvatura ϕ-seccional constante $-\kappa$.*

Del estudio de la curvatura ξ-seccional no obtenemos ningún resultado adicional, pues en $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ la curvatura ξ-seccional es

$$\widetilde{R}(X, \xi, \xi, X) = g((f_1 - f_3)(X - \eta(X)\xi), X) = f_1 - f_3, \tag{2.4.17}$$

con X unitario, donde hemos usado la Proposición 2.4.2, y ya sabemos que $f_1 - f_3 = \kappa$, constante. Y el hecho de que $\kappa \leq 1$, tal como asegura el Teorema 2.4.15, se conocía del Teorema 2.4.1 que era válido para cualquier dimensión.

Pero del estudio de la curvatura ϕ-seccional sí obtenemos información:

Proposición 2.4.16.– *En un espacio $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ de contacto métrico, no Sasakiano, se verifica la siguiente relación entre las funciones:*

$$2f_1 + 3f_2 - f_3 = 0. \tag{2.4.18}$$

Demostración: Tal como hemos destacado en la Nota 2.4.13 sabemos que en $\widetilde{M}$ se verifica $Q\phi = \phi Q$, por lo que, estamos en las condiciones del Teorema 2.4.15.

En la Proposición 2.1.11 vimos que la curvatura ϕ-seccional de $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ era $f_1 + 3f_2$ y en (2.4.17) hemos comprobado que la curvatura ξ-seccional es $f_1 - f_3$.

Distinguimos dos casos:

Que $\widetilde{M}^3$ sea una variedad llana. En este caso, tanto las curvaturas ξ-seccionales como las curvaturas ϕ-seccionales se anulan y por tanto

$$f_1 + 3f_2 = 0 = -(f_1 - f_3). \tag{2.4.19}$$

O que $\widetilde{M}^3$ sea un espacio de curvatura ξ-seccional constante $\kappa < 1$ y curvatura ϕ-seccional constante $-\kappa$. En tal caso, $f_1+3f_2 = -\kappa$ y $f_1-f_3 = \kappa$, de donde:

$$f_1 + 3f_2 = -(f_1 - f_3). \tag{2.4.20}$$

Así, tanto de (2.4.19) como de (2.4.20) se obtiene la ecuación (2.4.18). $\square$

Nota 2.4.17.– Obsérvese que la ecuación (2.4.18) es consistente con (2.4.12), es decir, si las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$, satisfacen (2.4.18), las funciones f_i^* también, como se comprueba trivialmente.

Por otra parte, en $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$, es fácil calcular diréctamente la curvatura escalar. Podemos enunciar el siguiente resultado que mejora los señalados en la Nota 2.4.13.

Proposición 2.4.18.– *Si $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ está dotado de una estructura de variedad de contacto métrica, no Sasakiana, entonces*

$$QX = 2k\eta(X)\xi, \tag{2.4.21}$$

para cualquier campo X en $\widetilde{M}$, y la curvatura escalar viene dada por

$$\tau = \frac{\kappa}{3}, \tag{2.4.22}$$

siendo $\kappa = (f_1 - f_3) < 1$ una constante.

Demostración: Para calcular la curvatura escalar, basta considerar una ϕ-base $\{X, \phi X, \xi\}$ y tener en cuenta que, como ya hemos señalado las curvaturas ξ-seccionales valen $f_1 - f_3$ y las curvaturas ϕ-seccionales $f_1 + 3f_2$. Así, se obtiene que

$$6\tau = 4(f_1 - f_3) + 2(f_1 + 3f_2),$$

de donde:

$$3\tau = 3f_1 + 3f_2 - 2f_3,$$

y, por (2.4.18)

$$3\tau = f_1 - f_3. \tag{2.4.23}$$

Por otra parte, la expresión de QX viene dada por (2.4.16), teniendo en cuenta (2.4.23), resulta:

$$a = 3\tau - f_1 + f_3 = 0,$$

$$b = -3(\tau - f_1 + f_3) = 2(f_1 - f_3),$$

luego

$$QX = 2(f_1 - f_3)\eta(X)\xi.$$

Ahora bien, en virtud del Teorema 2.4.15, sabemos que, en las condiciones del enunciado, $f_1 - f_3$ es una cierta constante $\kappa < 1$. □

Finalmente, llegamos a:

Teorema 2.4.19.– *Si $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$ está dotado de una estructura de variedad de contacto métrica, no Sasakiana, podemos escribir*

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = -\kappa\widetilde{R}_1(X,Y)Z - 2\kappa\widetilde{R}_3(X,Y)Z,$$

para todos X, Y, Z campos en $\widetilde{M}$, siendo $\kappa < 1$ una constante.

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta que el tensor de curvatura de Riemann de una variedad de dimensión 3 viene dado por la ecuación (2.4.14), y usando (2.4.21) y (2.4.22), obtenemos

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = 2\kappa g(Y,Z)\eta(X)\xi - 2\kappa g(X,Z)\eta(Y)\xi + 2\kappa\eta(Y)\eta(Z)X -$$

$$-2\kappa\eta(X)\eta(Z)Y - \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) =$$

$$= -\kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) -$$

$$-2\kappa(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi),$$

como queríamos demostrar. □

Nota 2.4.20.– De esta forma hemos llegado a la escritura normalizada del tensor de curvatura, es decir con $f_2 = 0$, y hemos demostrado que tanto f_1 como f_3 son constantes, en el caso no Sasakiano.

Es inmediato comprobar que estos valores de las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$, satisfacen la ecuación (2.4.18).

En algunos de los cálculos que hemos realizado para espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados de dimensión 3 la condición de ser variedad de contacto métrica no es necesaria. De hecho, en la demostración del Proposición 2.4.11 sólo se utiliza que la variedad sea de contacto en la implicación *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* para deducir que κ es una constante. Así, podemos enunciar:

Proposición 2.4.21.– *Sea $\widetilde{M}^3$ una variedad casi contacto métrica de dimensión* 3*. Si se cumple*

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y),$$

para todos X, Y campo en $\widetilde{M}$ y para κ una función diferenciable en $\widetilde{M}$, entonces se verifica

i) $QX = (3\tau - \kappa)\,X - 3\,(\tau - \kappa)\,\eta(X)\xi,$

ii) $Q\phi = \phi Q,$

donde Q denota el operador de Ricci y τ la curvatura escalar.

Demostración: La demostración del apartado *i)* es exactamente igual a la realizada en la Proposición 2.4.12, ahora el papel de la función $f_1 - f_3$ es el de la función κ.

Una vez demostrado el apartado *i)*, el otro apartado es una mera comprobación. En efecto, sea X un campo en $\widetilde{M}$, con lo que

$$Q\phi X = (3\tau - \kappa)\,\phi X,$$

$$\phi QX = \phi\,(3\tau - \kappa)\,X = (3\tau - \kappa)\,\phi X,$$

por lo que Q y ϕ conmutan, como queríamos demostrar. $\square$

Nota 2.4.22.– La condición *i)* no implica que la variedad sea η-Einstein, pues para ello es necesario que ésta sea de contacto métrica.

Por último, analizamos qué podemos deducir de una variedad casi contacto métrica que verifique la condición que caracteriza a las variedades de contacto que son η-Einstein, siendo ésta una forma de cerrar la cadena de implicaciones que hemos estado tratando.

Teorema 2.4.23.– *Toda variedad casi contacto métrica de dimensión* 3 *verificando*

$$QX = aX + b\eta(X)\xi,$$

con a y b funciones diferenciables, es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con $f_1 = 4a - 3\tau$, $f_2 = 0$ y $f_3 = -2b$.

DEMOSTRACIÓN: En una variedad de dimensión 3, el tensor de curvatura de Riemann viene determinado por el operador de Ricci según la ecuación (2.4.14). Sustituyendo en dicha ecuación su valor se llega a

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = 2g(Y,Z)(aX+b\eta(X)\xi) - 2g(X,Z)(aY+b\eta(Y)\xi) + 2ag(Y,Z)X +$$

$$+2b\eta(Y)\eta(Z)X - 2ag(X,Z)Y - 2b\eta(X)\eta(Z)Y - 3\tau(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) =$$
$$= (4a - 3\tau)\,(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) -$$
$$-2b(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi).$$

Por tanto la variedad es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado en las condiciones del enunciado. Esta escritura, al ser $f_2 = 0$, se corresponde con la escritura normalizada. □

Si la variedad del enunciado del teorema es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}^3(f_1, f_2, f_3)$, por la Proposición 2.4.21 se tienen las hipótesis del teorema para $a = 3\tau - f_1 + f_3$ y $b = -3(\tau - f_1 + f_3)$ pero los valores obtenidos no implican ninguna contradicción. Aplicando el teorema llegamos a que el espacio puede escribirse como $\widetilde{M}(f_1^*, f_2'^*, f_3^*)$ con:

$$f_1^* = 4a - 3\tau = 4(3\tau - f_1 + f_3) - 3\tau = 9\tau - 4f_1 + 4f_3,$$

$$f_2^* = 0,$$

$$f_3^* = -2b = 6(\tau - f_1 + f_3).$$

Ahora bien, usando (2.4.23) y (2.4.18), podemos escribir:

$$f_1^* = -(f_1 + 3f_3) = f_1 + 3f_2,$$

$$f_2^* = 0,$$

$$f_3^* = -2(f_1 - f_3) = f_3 + 3f_2.$$

Es decir, el cambio de f_i a f_i^*, $i = 1, 2, 3$, es simplemente el cambio que se produce al escribir $f_2^* = 0$ según vimos en (2.4.13).

2.5 Espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados con estructura trans-Sasakiana.

Hemos estudiado en profundidad los espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados que son variedades de contacto métricas, pero la estructura de muchos de los ejemplos presentados era la de variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Así ocurría con los ejemplos obtenidos al considerar productos warped (Teorema 2.2.11 y Proposición 2.2.25), los obtenidos al realizar transformaciones D-conformes (Teorema 2.3.14 y Proposición 2.3.21), o D-homotéticas.

Por otra parte, ya habíamos analizado en la Sección 2.2 la segunda identidad de Bianchi para un espacio $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ de dimensión mayor o igual que 5, con $f_2 = f_3$, que verificase $g(X, \widetilde{\nabla}_X \xi) = 0$ para todo campo ortogonal a ξ, así como para espacios con estructura cosimpléctica. Ahora vamos a estudiarla para espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados dotados de una estructura trans-Sasakiana. Además estudiaremos algunos valores del tensor de curvatura de Riemann para profundizar en el conocimiento de la relación existente entre las funciones α y β y las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$.

Como vimos en los preliminares, en dimensiones mayores o iguales que 5, una variedad trans-Sasakiana siempre es una variedad $(\alpha, 0)$ o $(0, \beta)$. Finalmente haremos un estudio similar de las variedades trans-Sasakianas con dimensión 3.

Comencemos con las variedades trans-Sasakianas $(\alpha, 0)$. Nuestro objetivo es demostrar que no existen ejemplos interesantes de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados trans-Sasakianos $(\alpha, 0)$, es decir, no existen ejemplos con funciones f_i no constantes. Hasta el momento, dentro de las variedades $(\alpha, 0)$ ya habíamos estudiado el caso Sasakiano, $\alpha = 1$, para dimensiones mayores o iguales que 5, en el Corolario 2.2.19.

Lema 2.5.1.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ una variedad de dimensión mayor o igual que 5, con estructura trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$. Entonces, se verifica*

$$f_1 - f_3 = \alpha^2, \tag{2.5.1}$$

y α sólo varía en la dirección de ξ.

DEMOSTRACIÓN: Particularizando las ecuaciones (1.1.23) y (1.1.24) para el caso de una variedad trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$, se tiene:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\alpha\phi X,$$

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X),$$

para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$. Usando ambas ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X, \xi)\xi &= \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_\xi \xi - \widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{\nabla}_X \xi - \widetilde{\nabla}_{[X,\xi]} X = \\
&= \widetilde{\nabla}_X(-\alpha\phi\xi) - \widetilde{\nabla}_\xi(-\alpha\phi X) + \alpha\phi[X, \xi] = \\
&= \xi(\alpha)\phi X + \alpha\widetilde{\nabla}_\xi \phi X + \alpha\phi\widetilde{\nabla}_X \xi - \alpha\phi\widetilde{\nabla}_\xi X = \\
&= \xi(\alpha)\phi X + \alpha(\widetilde{\nabla}_\xi \phi)X + \alpha\phi(-\alpha\phi X) = \\
&= \xi(\alpha)\phi X + \alpha(\alpha(g(\xi, X)\xi - \eta(X)\xi)) - \alpha^2\phi^2 X = \\
&= \xi(\alpha)\phi X + \alpha^2 X - \alpha^2\eta(X)\xi.
\end{aligned}$$

Para X ortogonal a ξ, resulta:

$$\widetilde{R}(X, \xi)\xi = \xi(\alpha)\phi X + \alpha^2 X.$$

Por otra parte, por ser $\widetilde{M} = \widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, para X ortogonal a ξ:

$$\widetilde{R}(X, \xi)\xi = (f_1 - f_3)X.$$

Comparando ambas ecuaciones, se deduce, multiplicando por X unitario, que

$$f_1 - f_3 = \alpha^2,$$

y multiplicando por ϕX, que $\phi X(\alpha) = 0$, y esto para todo campo X unitario ortogonal a ξ, por lo que concluímos que α sólo varía en la dirección de ξ. $\square$

Nota 2.5.2.– En el caso particular de que α sea constante, este resultado podría obtenerse como consecuencia del Teorema 2.1.19, teniendo en cuenta que, tal como dijimos en los Preliminares, toda variedad trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$ con α constante es una $C(\alpha^2)$-variedad.

Para completar el estudio de las variedades $(\alpha, 0)$ recurrimos de nuevo al estudio de la segunda identidad de Bianchi.

Teorema 2.5.3.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, conexo, de dimensión mayor o igual que 5 y dotado de una estructura trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$. Entonces las funciones f_1 y f_2 son constantes. Además, si $\alpha \neq 0$ o $\alpha = 0$ en todo punto de $\widetilde{M}$, entonces f_3 también es constante.*

Demostración: Ya estudiamos la segunda identidad de Bianchi para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado cualquiera, es decir, cuya estructura fuese unicamente la de variedad casi contacto métrica, obteniendo las ecuaciones (2.2.12) a (2.2.21). Concretemos estas ecuaciones al caso que nos preocupa, el de una variedad trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$.

Para X, Y campos unitarios, ortogonales entre sí y ortogonales a ξ, con ϕY ortogonal a X, teníamos (2.2.12),

$$Y(f_1) - 3f_2 g(\phi Y, (\widetilde{\nabla}_X \phi)X) = 0,$$

que para una variedad $(\alpha, 0)$ queda

$$Y(f_1) - 3f_2 g(\phi Y, \alpha(g(X, X)\xi - \eta(X)X) = 0,$$

es decir,

$$Y(f_1) = 0, \tag{2.5.2}$$

y de la ecuación (2.2.13),

$$-2X(f_2) + 3f_2\{g(\phi Y, (\widetilde{\nabla}_Y \phi)X)) + g(X, (\widetilde{\nabla}_{\phi Y} \phi)Y)\} = 0,$$

resulta

$$-2X(f_2)+3f_2\{g(\phi Y,\alpha(g(Y,X)\xi-\eta(X)Y))+$$
$$+g(X,\alpha(g(\phi Y,Y)\xi-\eta(Y)\phi Y))\}=0,$$

por lo que:

$$X(f_2)=0.$$

De la ecuación (2.2.14),

$$f_3\{g(Y,\widetilde{\nabla}_{\phi Y}\xi)-g(\phi Y,\widetilde{\nabla}_Y\xi)\}-2f_2g(\widetilde{\nabla}_X\phi X,\xi)=0,$$

se deduce

$$f_3\alpha\{g(Y,-\phi^2Y)-g(\phi Y,-\phi Y)\}-2f_2\alpha g(\phi X,\phi X)=0,$$

y por tanto,

$$(f_2-f_3)\alpha=0,$$

y lo mismo hubiésemos obtenido de (2.2.20).

Por ser $\widetilde{\nabla}_\xi\xi=0$, de (2.2.16) se tiene

$$Y(f_1-f_3)=0,$$

y por (2.5.2) se deduce que $Y(f_3)=0$.

Las ecuaciones (2.2.17) y (2.2.18) se transforman en identidades.

De (2.2.19) y (2.2.21), al ser $g(\widetilde{\nabla}_X\xi,X)=0$, se deduce $\xi(f_1)=\xi(f_2)=0$.

Tenemos pues:

i) $X(f_1)=X(f_2)=X(f_3)=0$, para todo X ortogonal a ξ,

ii) $\xi(f_1)=\xi(f_2)=0$,

iii) $(f_2-f_3)\alpha=0$.

De las dos primeras condiciones deducimos que f_1 y f_2 son constantes.

En la tercera, distinguimos dos casos. Si $\alpha\neq 0$ en todo punto, entonces $f_3=f_2$ también es constante. Y si $\alpha=0$ en todo punto, de (2.5.1) deducimos que $f_1=f_3$, y por tanto todas las funciones son constantes también en este caso. □

De hecho, hemos obtenido algo más, pues el argumento final de la demostración anterior prueba que f_3 es constante en un entorno de cada punto donde α no se anule.

Nota 2.5.4.– El caso $\alpha = 0$ se corresponde con una variedad cosimpléctica, para estas ya sabíamos, por la Proposición 2.2.28, que las funciones eran constantes y además iguales.

Por otra parte, al estudiar la segunda identidad de Bianchi, en las páginas 48 a 50, llegábamos también a que, para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante conexo, de dimensión mayor o igual que 5, con $g(\widetilde{\nabla}_X \xi, X) = 0$ se deducía que $\xi(f_1) = \xi(f_2) = 0$, pero para llegar a $X(f_1) = X(f_2) = 0$ era necesario hacer una suposición adicional: $f_2 = f_3$. Ahora, gracias a la estructura de la variedad, no es necesario hacer esa suposición para llegar a las mismas conclusiones.

Nota 2.5.5.– Estos resultados justifican que no estudiemos las transformaciones D-conformes, ni D-homotéticas, para variedades trans-Sasakianas $(\alpha, 0)$. Más concretamente, si partimos de $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura trans-Sasakiana $(\alpha, 0)$, y por tanto con funciones constantes, y realizamos una transformación D-conforme, puede probarse que bajo algunas condiciones, llegaríamos a un nuevo espacio $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ con otra estructura trans-Sasakiana $(\alpha^*, 0)$ y por tanto también con funciones constantes, con lo cual no obtenemos ejemplos significativos.

Realizando un estudio análogo para el caso de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, como son los productos warped, llegamos al siguiente resultado.

Teorema 2.5.6.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, de dimensión mayor o igual que 5, con una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Entonces, $X(f_i) = 0$ para todo X campo ortogonal a ξ, $i = 1, 2, 3$, y además se verifican las ecuaciones:*

$$\xi(f_1) + 2\beta f_3 = 0, \tag{2.5.3}$$

$$\xi(f_2) + 2\beta f_2 = 0. \tag{2.5.4}$$

Demostración: Considerando las relaciones (1.1.23) y (1.1.24), que se verifican por tener $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$, las ecuaciones que habíamos hallado a partir de la segunda identidad de Bianchi quedan del siguiente modo:

i) De la ecuación (2.2.12) se deduce que

$$0 = Y(f_1) - 3f_2 g(\phi Y, (\widetilde{\nabla}_X \phi)X) =$$
$$= Y(f_1) - 3f_2 g(\phi Y, \beta(g(\phi X, X)\xi - \eta(X)\phi X)) = Y(f_1),$$

pues esta ecuación se tenía para Y ortogonal a X, y el razonamiento es válido para cualquier campo Y ortogonal a ξ.

ii) De la ecuación (2.2.13):

$$0 = -2X(f_2) + 3f_2\{g(\phi Y, (\widetilde{\nabla}_Y \phi)X)) + g(X, (\widetilde{\nabla}_{\phi Y} \phi)Y)\} =$$
$$= -2X(f_2) + 3f_2\{g(\phi Y, \beta(g(\phi Y, X)\xi - \eta(X)\phi Y))-$$
$$-g(X, \beta(g(\phi^2 Y, Y)\xi - \eta(Y)\phi^2 Y))\}.$$

Como en esta ecuación X e Y eran ortogonales a ξ, se deduce

$$X(f_2) = 0,$$

y esto es válido para todo X en la distribución de contacto de $\widetilde{M}$.

iii) En virtud de (1.1.24), $\widetilde{\nabla}_\xi \xi = \beta(\xi - \eta(\xi)\xi) = 0$, por lo que la ecuación (2.2.16) queda

$$X(f_1) - X(f_3) = 0,$$

para X ortogonal a ξ. Como ya hemos visto que $X(f_1) = 0$, se tiene que

$$X(f_3) = 0.$$

iv) Razonando análogamente con las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.20), teniendo en cuenta que en ellas X, Y eran campos unitarios en la distribución de contacto de $\widetilde{M}$ con Y ortogonal a $X, \phi X$, se llega a que las funciones f_1, f_2 y f_3 verifican las ecuaciones

$$\xi(f_1) + 2\beta f_3 = 0,$$
$$\xi(f_2) + 2\beta f_2 = 0,$$

como queríamos demostrar. □

Nota 2.5.7.– Si, en vez de pedir que la variedad sea trans-Sasakiana $(0,\beta)$, tan sólo pedimos que se verifique $\widetilde{\nabla}_X\xi = \beta(X-\eta(X)\xi)$, para una cierta función β que sólo varía en la dirección de ξ y para todo campo X, también se llega a las ecuaciones (2.5.3) y (2.5.4). Pero no se deduce que las funciones únicamente varíen en la dirección de ξ.

Obsérvese que en el Teorema 2.2.18 P. Bueken y L. Vanhecke exigen que se verifique $g(X,\nabla_X\xi)=0$, para todo campo X ortogonal a ξ, con la condición que señalamos en la Nota se tiene que $g(\phi X,\widetilde{\nabla}_X\xi)=0$. Es decir, la condición que tratamos, más debil que ser trans-Sasakiana $(0,\beta)$, es similar a aquella, más debil que ser Sasakiana.

Nota 2.5.8.– De las ecuaciones (2.5.3) y (2.5.4) podemos obtener información sobre cómo son las funciones f_i de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ con estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$.

Así, integrando respecto de t en la ecuación (2.5.4), deducimos que localmente

$$f_2 = \widetilde{F}_2 e^{-2\int \beta dt},$$

para una cierta función $\widetilde{F}_2$ con $\partial\widetilde{F}_2/\partial t = 0$.

De igual modo a partir de (2.5.3) se tiene que, localmente,

$$f_1 = \widetilde{F}_1 - 2\int \beta f_3 dt,$$

con $\widetilde{F}_1$ una función verificando $\partial\widetilde{F}_1/\partial t = 0$.

Nota 2.5.9.– Sabemos por la Proposición 2.2.25 que, si $\widetilde{N}$ es una variedad Kaehleriana, la variedad $\mathbf{R}\times_f\widetilde{N}$ tiene una estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$, con $\beta = f'/f$. Es una mera comprobación confirmar que, si la variedad de partida $\widetilde{N}(F_1,F_2)$ es Kaehleriana, las funciones dadas para $\mathbf{R}\times_f\widetilde{N} = \widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ en el Teorema 2.2.11 verifican las ecuaciones (2.5.3) y (2.5.4) del Teorema 2.5.6.

Nota 2.5.10.– Como ya indicamos, una variedad cosimpléctica es un caso particular de variedad trans-Sasakiana, con una estructura $(0,0)$. Así la Proposición 2.2.28 puede obtenerse como consecuencia del Teorema 2.5.6 y el Corolario 2.1.20.

En el Teorema 2.5.6 hemos demostrado ciertas propiedades de las funciones f_i, para un espacio $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ dotado de una estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$. Podemos obtener más información del estudio de algunos valores del tensor de curvatura de Riemann. Comencemos con $\widetilde{R}(X,\phi X)\xi$.

Teorema 2.5.11.– *Sea $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$. Entonces β sólo puede variar en la dirección de ξ.*

Demostración: En una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta)$,

$$\widetilde{R}(X,\phi X)\xi = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi - \widetilde{\nabla}_{\phi X}\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[X,\phi X]}\xi =$$

$$= \widetilde{\nabla}_X(\beta(\phi X-\eta(\phi X)\xi)) - \widetilde{\nabla}_{\phi X}(\beta(X-\eta(X)\xi)) - \beta([X,\phi X]-\eta([X,\phi X])\xi) =$$
$$= X(\beta)\phi X + \beta\nabla_X\phi X - \phi X(\beta)X + \phi X(\beta)\eta(X)\xi - \beta\nabla_{\phi X}X + \beta g(\nabla_{\phi X}X,\xi)+$$
$$+\beta g(X,\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi)\xi + \beta\eta(X)\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi - \beta([X,\phi X]-\eta([X,\phi X])\xi) =$$
$$= X(\beta)\phi X - \phi X(\beta)X + \phi X(\beta)\eta(X)\xi+$$
$$+\beta g(X,\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi)\xi + \beta\eta(X)\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi + \beta g(\widetilde{\nabla}_X\phi X,\xi).$$

Teniendo en cuenta que, usando (1.1.24)

$$g(\widetilde{\nabla}_X\phi X,\xi) = Xg(\phi X,\xi) - g(\phi X,\widetilde{\nabla}_X\xi) = -g(\phi X,\beta(X-\eta(X)\xi)) = 0,$$
$$g(X,\widetilde{\nabla}_{\phi X}\xi) = g(X,\beta(\phi X-\eta(\phi X)\xi)) = 0,$$

y, nuevamente, (1.1.24), la expresión anterior queda:

$$\widetilde{R}(X,\phi X)\xi = X(\beta)\phi X - \phi X(\beta)X + \phi X(\beta)\eta(X)\xi + \beta\eta(X)\beta(\phi X-\eta(\phi X)\xi) =$$
$$= X(\beta)\phi X - \phi X(\beta)X + \phi X(\beta)\eta(X)\xi + \beta^2\eta(X)\phi X. \tag{2.5.5}$$

Por otra parte, al ser $\widetilde{M} = \widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$:

$$\widetilde{R}(X,\phi X)\xi = f_1(g(\phi X,\xi)X - g(X,\xi)\phi X)+$$

$$+f_3(\eta(X)\phi X - \eta(\phi X)X + \eta(X)\eta(\phi X)\xi - \eta(\phi X)\eta(X)\xi) =$$
$$= (f_3 - f_1)\eta(X)\phi X. \tag{2.5.6}$$

Tomando X unitario y ortogonal a ξ, las ecuaciones (2.5.5) y (2.5.6) quedan

$$\widetilde{R}(X, \phi X)\xi = X(\beta)\phi X - \phi X(\beta)X,$$

y

$$\widetilde{R}(X, \phi X)\xi = 0,$$

respectivamente. Multiplicando por ϕX la primera e igualando con la segunda, se deduce que $X(\beta) = 0$, y esto es cierto para todo X unitario y ortogonal a ξ. Por tanto β sólo puede variar en la dirección de ξ. $\square$

Como en otras ocasiones, no hemos usado que la variedad sea trans-Sasakian $(0, \beta)$ sino tan sólo el valor de $\widetilde{\nabla}_X\xi$.

Proposición 2.5.12.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con*

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$. Entonces, β sólo varía en la dirección de ξ.

DEMOSTRACIÓN: Es válida la demostración del teorema anterior. $\square$

A continuación estudiaremos $\widetilde{R}(X, \xi)\xi$ para demostrar un importante teorema que nos permitirá debilitar las hipótesis de otros teoremas anteriores.

Teorema 2.5.13.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Entonces, las funciones f_1, f_3 y β verifican la relación:*

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0. \tag{2.5.7}$$

DEMOSTRACIÓN: Por ser $\widetilde{M}$ una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$, el valor de $\widetilde{\nabla}_X\xi$ viene dado por la ecuación (1.1.24). Por tanto,

$$\widetilde{R}(X, \xi)\xi = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_\xi\xi - \widetilde{\nabla}_\xi\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[X,\xi]}\xi =$$

$$= \widetilde{\nabla}_X(\beta(\xi - \eta(\xi)\xi)) - \widetilde{\nabla}_\xi(\beta(X - \eta(X)\xi)) - \beta([X,\xi] - \eta([X,\xi])\xi) =$$
$$= -\xi(\beta)(X - \eta(X)\xi) - \beta\widetilde{\nabla}_\xi X + \beta\xi(\eta(X))\xi + \beta\eta(X)\widetilde{\nabla}_\xi\xi -$$
$$-\beta\widetilde{\nabla}_X\xi + \beta\widetilde{\nabla}_\xi X + \beta\eta(\widetilde{\nabla}_X\xi)\xi - \beta\eta(\widetilde{\nabla}_\xi X)\xi =$$
$$= -\xi(\beta)(X - \eta(X)\xi) + \beta\xi(\eta(X))\xi - \beta\widetilde{\nabla}_X\xi - \beta\eta(\widetilde{\nabla}_\xi X)\xi,$$

pues $\widetilde{\nabla}_\xi\xi = 0$ y $\eta(\widetilde{\nabla}_X\xi) = \beta(\eta(X) - \eta(X)) = 0$.

Para X ortogonal a ξ se tiene

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = -\xi(\beta)X - \beta(\beta(X - \eta(X)\xi)) - \beta\eta(\widetilde{\nabla}_\xi X)\xi =$$
$$= (-\xi(\beta) - \beta^2)X,$$

pues:

$$\eta(\widetilde{\nabla}_\xi X) = \xi g(X,\xi) - g(X,\widetilde{\nabla}_\xi\xi) = 0.$$

Por otra parte, al ser $\widetilde{M} = \widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$, para X ortogonal a ξ se verifica,

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = (f_1 - f_3)X.$$

Comparando ambas expresiones de $\widetilde{R}(X,\xi)\xi$ se deduce que

$$f_1 - f_3 = -\xi(\beta) - \beta^2,$$

y de ahí el resultado. □

Ya sabíamos del Teorema 2.5.6 que, en las condiciones que estamos tratando, las funciones f_i, $i = 1,2,3$, sólo varían en la dirección de ξ y acabamos de demostrar en el Teorema 2.5.11 que lo mismo ocurre con β. Combinando estos resultados con la relación que acabamos de ver entre f_1, f_3 y β, podemos deducir otras relaciones:

Corolario 2.5.14.– *Sea $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado de dimensión mayor o igual que 5, con estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$ y tal que $f_1 + \beta^2 > 0$. Entonces, se verifica:*

$$2\beta = -\xi(log(f_1 + \beta^2)).$$

Demostración: En el Teorema 2.5.6 habíamos demostrado que f_1, f_3 y β verificaban la ecuación (2.5.3):

$$\xi(f_1) + 2\beta f_3 = 0.$$

Despejando el valor de f_3 en (2.5.7) y sustituyendo se tiene

$$0 = \xi(f_1) + 2\beta(f_1 + \xi(\beta) + \beta^2) =$$

$$= \xi(f_1) + 2\beta f_1 + 2\beta\xi(\beta) + 2\beta^3 = \xi(f_1 + \beta^2) + 2\beta(f_1 + \beta^2),$$

luego

$$\frac{\xi(f_1 + \beta^2)}{f_1 + \beta^2} = -2\beta,$$

de donde

$$2\beta = -\xi(\log(f_1 + \beta^2)),$$

es decir, la relación buscada entre f_1 y β. □

Por otra parte, la ecuación (2.5.7), obtenida en el Teorema 2.5.13, coincide con la condición (2.3.25), que imponíamos en el Teorema 2.3.10. Por tanto podemos reescribir dicho teorema eliminando tanto esta condición, como el hecho de que β varíe sólo en la dirección de ξ, pues esto último lo obtuvimos en el Teorema 2.5.11.

Teorema 2.5.15.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, dotado de una estructura de variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Si realizamos una transformación D-conforme la variedad obtenida es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, con funciones:*

$$f_1^* = \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{a^2 - b}{a^2}\beta^2 - \frac{\beta}{a^2}\xi(b) - \frac{\xi(b)^2}{4a^2 b}\right),$$

$$f_2^* = \frac{1}{b} f_2,$$

$$f_3^* = \frac{1}{b}\left(f_3 - \frac{a^2 - b}{a^2}\xi(\beta) - \frac{b}{a^3}\beta\xi(a) - \frac{\xi(a)\xi(b)}{2a^3} + \frac{\xi^2(b)}{2a^2} - \frac{\xi(b)^2}{2a^2 b}\right).$$

Demostración: Es consecuencia directa de los Teoremas 2.3.10, 2.5.11 y 2.5.13. □

También en el Teorema 2.5.13 podemos debilitar la hipótesis de ser trans-Sasakiana $(0, \beta)$.

Proposición 2.5.16.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado verificando*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en $\widetilde{M}$. Entonces, las funciones f_1, f_3 y β verifican la relación:

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0.$$

Demostración: En la demostración del Teorema 2.5.13 no hemos usado el valor de $(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y$ sino tan sólo el de $\widetilde{\nabla}_X \xi$, es decir, no hemos usado que la veriedad sea trans-Sasakiana $(0, \beta)$ sino la condición del enunciado. □

Y podemos enunciar una proposición mejorando los resultados en los que se pedía esa condición.

Proposición 2.5.17.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado,verificando*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en M. Realizamos una transformación D-conforme, entonces la variedad obtenida es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, con funciones:

$$f_1^* = \frac{1}{b}\left(f_1 + \frac{a^2 - b}{a^2}\beta^2 - \frac{\beta}{a^2}\xi(b) - \frac{\xi(b)^2}{4a^2 b}\right),$$

$$f_2^* = \frac{1}{b} f_2,$$

$$f_3^* = \frac{1}{b}\left(f_3 - \frac{a^2-b}{a^2}\xi(\beta) - \frac{b}{a^3}\beta\xi(a) - \frac{\xi(a)\xi(b)}{2a^3} + \frac{\xi^2(b)}{2a^2} - \frac{\xi(b)^2}{2a^2 b}\right).$$

DEMOSTRACIÓN: La demostración se deduce de la Proposición 2.3.13, teniendo en cuenta que, en virtud de la Proposición 2.5.12, β sólo varía en la dirección de ξ y la condición

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0,$$

se tiene por la proposición anterior. □

Con esto cerramos el estudio de las condiciones que impone la segunda identidad de Bianchi.

Hemos visto por el Teorema 2.2.11 y la Proposición 2.2.25 que, al realizar un producto warped de **R** por un espacio de curvatura holomorfa constante generalizado que fuese una variedad Kaehleriana, se obtenía un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$. A continuación, daremos una especie de recíproco. Para ello nos basaremos en los resultados obtenidos por J.C. Marrero en [25], donde estudia la estructura local de las variedades trans-Sasakianas.

En primer lugar estudiemos la demostración que hace J.C. Marrero para el Teorema 2.1 de dicho artículo. Volvemos a demostrar este resultado para adaptar la notación a la nuestra y lograr un mejor entendimiento de las relaciones existentes entre el producto warped y la estructura trans-Sasakiana.

Al igual que hacía J.C. Marrero, usaremos este teorema de K. Kenmotsu:

Teorema 2.5.18.– [20, pág. 96] *Sea $\widetilde{M}$ una variedad de Kenmotsu. Entonces, para cada punto $p \in \widetilde{M}$ existe un entorno $U(p)$ de p que se identifica con un producto warped $(-\varepsilon,\varepsilon) \times_F V$ tal que $(-\varepsilon,\varepsilon)$ es un intervalo abierto, $F(t) = ce^t$ y V es una variedad Kaehleriana.*

Teorema 2.5.19.– [25, pág. 80] *Sea $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,g)$ una variedad casi-contacto métrica dotada de una estructura trans-Sasakiana $(0,\beta)$, con β variando únicamente en la dirección de ξ. Entonces $\widetilde{M}$ es localmente un producto* *warped* $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$*, donde* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *es un intervalo abierto,* V *una variedad Kaehleriana,* (V, J, G)*,* f *una función positiva definida en* $(-\varepsilon, \varepsilon)$*, y la estructura* (ϕ, ξ, η, g) *viene dada por:*

i) $\phi(\sigma E, X) = (0, JX)$,

ii) $\xi = (E, 0)$,

iii) $\eta = (E^*, 0)$,

siendo E *un campo que no se anula en* $(-\varepsilon, \varepsilon)$*,* E^* *su dual y* σ *cualquier función diferenciable en este intervalo.*

Demostración: Realizamos una transformación conforme en $\widetilde{M}$ para conseguir una nueva variedad que sea de Kenmotsu y podamos por tanto aplicarle el teorema de Kenmotsu.

Al considerar la transformación conforme,

$$g^* = bg + (a^2 - b)\eta \otimes \eta,$$

con a y b funciones que sólo varían en la dirección de ξ, se obtiene, según los cálculos realizados en la Proposición 2.3.21, una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta^*)$, $\widetilde{M}^*$ con

$$\beta^* = \frac{1}{a}\left(\beta + \frac{\xi(b)}{2b}\right).$$

Por tanto, si queremos que $\widetilde{M}^*$ sea una variedad de Kenmotsu, basta tomar $a = 1$ y b una función que satisfaga:

$$1 = \beta + \frac{\xi(b)}{2b}. \tag{2.5.8}$$

De hecho, la función b puede determinarse localmente, sin más que trabajar en una carta en la que $\xi = \partial/\partial t$, siendo t una de las coordenadas locales de la misma. Entonces, en dicha carta, la ecuación (2.5.8) puede verse como

$$2(1 - \beta) = \frac{\partial}{\partial t}(\log b),$$

de donde $b = c_1 e^{2\int(1-\beta)dt} = c_1 e^{2t - 2\int \beta dt}$.

Así pues, $(\widetilde{M}^*, \phi, \xi^*, \eta^*, g^*)$ con

$$g^* = bg + (1-b)\eta \otimes \eta, \quad \xi^* = \xi \quad \text{y} \quad \eta^* = \eta, \tag{2.5.9}$$

es una variedad de Kenmotsu. Y, por el Teorema 2.5.18, se tiene que, localmente,

$$\widetilde{M}^* = (-\varepsilon, \varepsilon) \times_F V$$

con $F(t) = ce^t$ y (V, J, G) una variedad Kaehleriana. Las métricas se relacionan según

$$g^*_{t,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F^2(t) G_x \end{pmatrix},$$

es decir, para todos X, Y campos en $\widetilde{M}^*$ se verifica:

$$g^*(X,Y) = \eta(X)\eta(Y) + F^2 G(\pi_* X, \pi_* Y). \tag{2.5.10}$$

De (2.5.9) y (2.5.10) se deduce:

$$g(X,Y) = \eta(X)\eta(Y) + \left(\frac{F}{\sqrt{b}}\right)^2 G(\pi_* X, \pi_* Y).$$

Por tanto, localmente, $\widetilde{M} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$ con V Kaehleriana y $f = \dfrac{F}{\sqrt{b}} = \dfrac{c_2 e^t}{\sqrt{b}}$, con $c_2 > 0$. □

En el siguiente teorema estudiamos más detenidamente la relación existente entre la función del producto warped y la función β de la estructura trans-Sasakiana.

Teorema 2.5.20.– *Sea $\widetilde{M}$ una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$ con β variando sólo en la dirección de ξ. Para todo $p \in \widetilde{M}$, existe un entorno $U(p)$ tal que $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$, donde $(-\varepsilon, \varepsilon)$ es un intervalo abierto, V es una variedad Kaehleriana y $f = ce^{\int \beta dt}$.*

Demostración: Por el teorema anterior únicamente queda demostrar la expresión de f. Ahora bien, tal y como vimos antes,

$$b = c_1 e^{2t - 2\int \beta dt}.$$

Así pues $f = \dfrac{c_2 e^t}{\sqrt{b}} = \dfrac{c_2 e^t}{\sqrt{c_1 e^{2t-2\int \beta dt}}} = c e^{\int \beta dt}$, una función en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. $\square$

Y, concretándolo al estudio de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, obtenemos el siguiente corolario, que puede entenderse como una especie de recíproco local del Teorema 2.2.11 y la Proposición 2.2.25:

Corolario 2.5.21.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado dotado de una estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$. Entonces, $\widetilde{M}$ es localmente un producto warped $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$ con V una variedad Kaehleriana y $f = ce^{\int \beta dt}$.*

Demostración: Por ser $\widetilde{M}$ una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$, se deduce inmediatamente del Teorema 2.5.20. No es necesario suponer que β únicamente varíe en la dirección de ξ, pues sabemos por el Teorema 2.5.11 que esa condición siempre se cumple en el caso de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. $\square$

En realidad K. Kenmotsu al demostrar el Teorema 2.5.18 para una variedad cosimpléctica, $\widetilde{M}$, no hace uso de que $(\nabla_X \phi)Y$ se anule para todos X, Y campos en $\widetilde{M}$, sino tan sólo usa que $\nabla_X \xi$ se anula. Ello nos permite, al igual que hemos hecho en otras ocasiones, debilitar la condición de que la variedad sea trans-Sasakiana.

Corolario 2.5.22.– *Sea $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, verificando*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \beta(X - \eta(X)\xi),$$

para todo campo X en M. Entonces, $\widetilde{M}$ es localmente un producto warped $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$ con V una variedad Kaehleriana y $f = ce^{\int \beta dt}$.

Demostración: En primer lugar por la Proposición 2.5.12 sabemos que β sólo varía en la dirección de ξ.

El Teorema 2.5.19 sigue siendo cierto si sustituimos la condición $\widetilde{M}$ es una variedad trans-Sasakiana $(0, \beta)$ por la condición del enunciado. Siguiendo la misma demostración, al realizar la transformación conforme llegaríamos no a una variedad de Kenmotsu sino a una variedad casi contacto métrica, $\widetilde{M}^*$, que satisface

$$\nabla^*_X \xi^* = 0,$$

para todo campo X. A esta variedad podemos aplicarle el Teorema 2.5.18 que, como hemos comentado, únicamente usa esta condición.

Por tanto, usando un razonamiento análogo al del Teorema 2.5.20, pero exigiendo tan sólo la condición del enunciado se concluye la demostración. □

En esta sección hemos trabajado fundamentalmente con variedades trans-Sasakianas de dimensión mayor o igual que 5. Para concluir el estudio podemos ofrecer algunos resultados concretos al estudiar variedades de dimensión 3 dotadas de una estructura trans-Sasakiana (α, β), del mismo modo que el estudio de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizado que fuesen variedades de contacto lo concluíamos estudiando variedades de contacto de dimensión 3.

En principio, en dimensión 3 podemos considerar variedades trans-Sasakianas (α, β) no triviales, es decir, con ambas funciones no nulas.

Sea $\widetilde{M}^3$ una variedad trans-Sasakiana (α, β) y supongamos que α y β sólo varían en la direccion de ξ. Estudiemos su tensor de curvatura de Riemann.

Usaremos de nuevo que en una variedad de dimensión 3, la expresión del tensor de curvatura de Riemann en función del operador de Ricci, Q, viene dada por (2.4.14). En primer lugar vamos a estudiar el valor de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$, X, Y campos en $\widetilde{M}$, para ello procedemos a calcular el valor de los términos $Q\xi$ y $\eta(QX)$.

Estudiemos el valor que toma $Q\xi$. Dado cualquier campo W y campos Z_i, unitarios y ortogonales a ξ, consideramos:

$$\widetilde{R}(\xi, Z_i, Z_i, W) = \widetilde{R}(Z_i, W, \xi, Z_i) =$$

$$= g((\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2)(\eta(W)Z_i - \eta(Z_i)W)+$$
$$+(\xi(\alpha) + 2\alpha\beta)(\eta(W)\phi Z_i - \eta(Z_i)\phi W), Z_i) =$$
$$= (\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2)\eta(W).$$

Luego, eligiendo una base local ortonormal $\{Z_1, Z_2, \xi\}$,

$$Q\xi = \sum_{i=1}^{2} \widetilde{R}(\xi, Z_i)Z_i + \widetilde{R}(\xi, \xi)\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \widetilde{R}(\xi, Z_i, Z_i, Z_j)Z_j + \sum_{i=1}^{2} \widetilde{R}(\xi, Z_i, Z_i, \xi)\xi =$$

$$= 2(\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2)\xi,$$

y para un campo X:

$$\eta(QX) = g(Q\xi, X) = 2(\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2)\eta(X).$$

Así pues, según (2.4.14), la expresión del tensor de curvatura de Riemann en función de Q queda:

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = \eta(Y)QX - \eta(X)QY +$$
$$+(2(\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2) - 3\tau)(\eta(Y)X - \eta(X)Y). \tag{2.5.11}$$

Por otra parte, al ser $\widetilde{M}$ una variedad trans-Sasakiana (α, β), en virtud de (1.1.23) y (1.1.24),

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi =$$
$$= \widetilde{\nabla}_X(-\alpha\phi Y + \beta(Y - \eta(Y)\xi)) - \widetilde{\nabla}_Y(-\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi))+$$
$$+\alpha\phi[X, Y] - \beta([X, Y] - \eta([X, Y])\xi) =$$
$$= -\xi(\alpha)\eta(X)\phi Y - \alpha(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y + \xi(\beta)\eta(X)Y+$$
$$+\xi(\alpha)\eta(Y)\phi X + \alpha(\widetilde{\nabla}_Y\phi)X - \xi(\beta)\eta(Y)X-$$
$$-\beta g(Y, \widetilde{\nabla}_X\xi)\xi - \beta\eta(Y)\widetilde{\nabla}_X\xi + \beta g(X, \widetilde{\nabla}_Y\xi) + \beta\eta(X)\widetilde{\nabla}_Y\xi =$$
$$= (\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)+$$
$$+(\xi(\alpha) + 2\alpha\beta)(\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y), \tag{2.5.12}$$

para cualesquiera X, Y campos en $\widetilde{M}$.

Comparando (2.5.12) y (2.5.11), ha de ser

$$\eta(Y)QX - \eta(X)QY + (\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2 - 3\tau)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)-$$

$$-(\xi(\alpha)+2\alpha\beta)(\eta(Y)\phi X-\eta(X)\phi Y)=0,$$

por lo que, tomando Y ortogonal a ξ y $X=\xi$, se tiene que:

$$-QY-(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2-3\tau)Y+(\xi(\alpha)+2\alpha\beta)\phi Y=0.$$

Luego:

$$QY=-(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2-3\tau)Y+(\xi(\alpha)+2\alpha\beta)\phi Y.$$

Y para Z un campo cualquiera resulta:

$$\begin{gathered} QZ=Q(Z-\eta(Z)\xi)+Q(\eta(Z)\xi)= \\ =-(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2-3\tau)(Z-\eta(Z)\xi)+ \\ +(\xi(\alpha)+2\alpha\beta)\phi(Z-\eta(Z)\xi)+2(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2)\eta(Z)\xi= \\ =-(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2-3\tau)Z+(\xi(\alpha)+2\alpha\beta)\phi Z+ \\ +3(\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2-\tau)\eta(Z)\xi. \end{gathered} \tag{2.5.13}$$

Llamemos $A=\alpha^2-\xi(\beta)-\beta^2$ y $B=\xi(\alpha)+2\alpha\beta$. Sustituyendo (2.5.13) en la expresión de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ dada por (2.4.14) llegamos a

$$\begin{gathered} \widetilde{R}(X,Y)Z=(3\tau-2A)(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)+ \\ +B(g(X,\phi Z)Y-g(Y,\phi Z)X+g(Y,Z)\phi X-g(X,Z)\phi Y)+ \\ +3(\tau-A)(\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+ \\ +g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi). \end{gathered} \tag{2.5.14}$$

El segundo sumando no se corresponde, en general, con el de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Veamos a continuación un caso particular en el que sí se tiene un resultado interesante.

Teorema 2.5.23.– *Sea $\widetilde{M}^3$ una variedad trans-Sasakiana $(0,\beta)$ con β una función que únicamente varíe en la dirección de ξ. Entonces $\widetilde{M}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$, con funciones:*

$$f_1=3\tau+2\xi(\beta)+2\beta^2,\quad f_2=0\quad y\quad f_3=3(\tau+\xi(\beta)+\beta^2).$$

Demostración: En las condiciones del enunciado, al ser $\alpha = 0$, se tiene que $A = -\xi(\beta) - \beta^2$ y $B = 0$. Luego, la expresión del tensor de curvatura (2.5.14) queda

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = (3\tau + 2\xi(\beta) + 2\beta^2)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) +$$

$$+3(\tau + \xi(\beta) + \beta^2)(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X +$$

$$+g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi),$$

por lo que $\widetilde{M}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con las funciones indicadas. $\square$

Nota 2.5.24.– Obsérvese que siempre se cumple $f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0$, es decir, el Teorema 2.5.13 y que la expresión del tensor de curvatura de Riemann viene dada en su forma normalizada, es decir, al ser una variedad de dimensión 3 la escritura del tensor no es única y hemos acordado tomar aquella en la que $f_2 = 0$.

Capítulo 3

Desigualdades de B.-Y. Chen.

En una variedad Riemanniana M, para cada punto $p \in M$, consideramos

$$(\mathrm{inf}K)(p) = \mathrm{inf}\{K(\Pi) : \Pi \text{ es una sección plana de } T_pM\},$$

donde $K(\Pi)$ denota la curvatura seccional en M. Sea también

$$\delta_M(p) = \frac{m(m+1)}{2}\,\tau(p) - \mathrm{inf}K(p),$$

con τ la curvatura escalar de M. δ_M es un invariante métrico que fue introducido por B.-Y. Chen [15], [16].

Desde entonces, se han realizado multitud de trabajos en este campo, obteniéndose distintas desigualdades que relacionan el invariante δ_M y sus generalizaciones con los principales invariantes extrínsecos (en particular, con el cuadrado de la curvatura media). Para una visión de conjunto sobre los primeros resultados de estas desigualdades se recomienda consultar [17].

En cuanto a las subvariedades de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, destaca el estudio de F. Defever, I. Mihai y L. Verstraelen para aquellas que son normales al campo de estructura (ver [18]).

Posteriormente A. Carriazo estudió las correspondientes desigualdades para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante y una subvariedad tangente al campo de estructura, obteniendo interesantes resultados para subvariedades slant, [13]. Y. H. Kim y D.-S. Kim, [21], complementaron este estudio al considerar también secciones planas que no sean ortogonales al campo de estructura.

Finalmente, podemos citar el estudio que K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan y C. Özgür llevan a cabo en [2], donde también se estudian subvariedades ortogonales a ξ; aunque ahora la variedad ambiente es de contacto, más concretamente tratan (κ, μ)-espacios.

Nuestro propósito es obtener las desigualdades equivalentes en el caso de que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$. Consideremos M una subvariedad suya y distingamos dos casos: que M sea tangente al campo de estructura o que sea normal.

3.1 Subvariedades tangentes al campo de estructura.

Previamente, estudiemos la curvatura seccional de una subvariedad M de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$. Para ello denotemos por R y $\widetilde{R}$ sus tensores de curvatura respectivos. Entonces, en virtud de (2.1.1), la ecuación de Gauss (1.2.5) viene dada por

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = f_1[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]+ \\ +f_2[g(X,\phi Z)g(\phi Y,W) - g(Y,\phi Z)g(\phi X,W) + 2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)]+ \\ +f_3[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+ \\ +\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z)]+ \\ +g(h(Y,Z),h(X,W)) - g(h(X,Z),h(Y,W)), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

para campos X, Y, Z, W tangentes a M.

En particular:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Y,X) = f_1[g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)]+ \\ +3f_2g^2(X,\phi Y) - f_3[\eta^2(X)g(Y,Y) + \eta^2(Y)g(X,X) - 2\eta(X)\eta(Y)g(X,Y)]- \\ -\|h(X,Y)\|^2 + g(h(X,X),h(Y,Y)). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Así, se sigue que si X e Y son campos ortogonales y unitarios en TM, la curvatura seccional del plano determinado por X e Y viene dada por:

$$K_M(X \wedge Y) = R(X,Y,Y,X) = f_1 + 3f_2 g^2(X,TY) -$$

$$-f_3[\eta^2(X) + \eta^2(Y)] - \|h(X,Y)\|^2 + g(h(X,X),h(Y,Y)). \qquad (3.1.3)$$

En primer lugar, usando (3.1.3), calculamos el valor de la curvatura escalar de la subvariedad. Para ello, consideramos una base ortonormal $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ en $T_p\widetilde{M}$, $p \in \widetilde{M}$, con $E_{m+1} = \xi_p$.

$$\tau = \frac{1}{(m+1)m}\left(\sum_{i\neq j}^{m} K(E_i \wedge E_j) + 2\sum_{i=1}^{m} K(E_i \wedge \xi)\right) =$$

$$= \frac{m-1}{m+1}f_1 + \frac{1}{(m+1)m}\left(3f_2\sum_{i\neq j}^{m} g^2(E_i, TE_j) - \sum_{i\neq j}^{m} \|h(E_i,E_j)\|^2 + \right.$$

$$+\sum_{i\neq j}^{m} g(h(E_i,E_i),h(E_j,E_j)) +$$

$$\left. +2[mf_1 - mf_3 - \sum_{i=1}^{m}\|h(E_i,\xi)\|^2 + \sum_{i=1}^{m} g(h(E_i,E_i),h(\xi,\xi))]\right). \qquad (3.1.4)$$

Queremos estudiar la relación existente con el cuadrado de la curvatura media:

$$|H|^2 = g(H,H) = g\left(\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1} h(E_i,E_i), \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} h(E_j,E_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\sum_{i\neq j}^{m} g(h(E_i,E_i),h(E_j,E_j)) + \sum_{i=1}^{m} \|h(E_i,E_i)\|^2 + \right.$$

$$\left. +2\sum_{i=1}^{m} g(h(E_i,E_i),h(\xi,\xi)) + \|h(\xi,\xi)\|^2\right). \qquad (3.1.5)$$

De (3.1.4) y (3.1.5), obtenemos la siguiente ecuación que relaciona la curvatura escalar, la curvatura media, la norma de T y la norma de la segunda forma fundamental h:

$$\tau = f_1 - \frac{2}{m+1} f_3 + \frac{1}{(m+1)m} \Bigg(3f_2|T|^2 - \sum_{i \neq j}^{m} \|h(E_i, E_j)\|^2 + (m+1)^2|H|^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \|h(E_i, E_i)\|^2 - \|h(\xi, \xi)\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} \|h(E_i, \xi)\|^2 \Bigg) =$$

$$= f_1 - \frac{2}{m+1} f_3 + \frac{1}{(m+1)m} \{3f_2|T|^2 + (m+1)^2|H|^2 - |h|^2\}. \quad (3.1.6)$$

Por último, sea $\Pi \subseteq \mathcal{D}_p$ una sección plana, y estudiemos $K(\Pi)$. Tomamos $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ y $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ bases ortonormales de $T_p(M)$ y $T_p^{\perp} M$, respectivamnete, con $E_{m+1} = \xi_p$, $\Pi = \mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$ y E_{m+2} en la dirección de la curvatura media, H.

Definimos:

$$\Phi^2(\Pi) = g^2(E_1, \phi E_2). \quad (3.1.7)$$

Esta definición es independiente de la elección de la base ortonormal de Π. Además, usaremos la notación

$$h_{ij}^k = g(h(E_i, E_j), E_k),$$

para $i, j \in \{1, ..., m+1\}$ y $k \in \{m+2, ..., 2n+1\}$.

Entonces, la expresión de $K(\Pi)$ queda:

$$K(\Pi) = K(E_1 \wedge E_2) = R(E_1, E_2, E_2, E_1) =$$

$$= f_1 + 3f_2 g(E_1, TE_2)^2 - f_3(\eta(E_1)^2 + \eta(E_2)^2) -$$

$$- \|h(E_1, E_2)\|^2 + g(h(E_1, E_1), h(E_2, E_2)) =$$

$$= h_{11}^{m+2} h_{22}^{m+2} - (h_{12}^{m+2})^2 + \sum_{r=m+3}^{2n+1} (h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) +$$

$$+ f_1 + 3f_2 g^2(E_1, \phi E_2). \quad (3.1.8)$$

Antes de proseguir, recordamos un lema algebraico de [15]:

Lema 3.1.1.– *Sean $a_1, ..., a_k, c$, $k+1$ ($k>2$) números reales tales que:*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = (k-1)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + c\right).$$

Entonces se tiene $2a_1a_2 \geq c$, y la igualdad se verifica si y sólo si $a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_k$.

A continuación, en (3.1.6) despejamos $(m+1)^2|H|^2$:

$$(m+1)^2|H|^2 = |h|^2 + m(m+1)\tau - m(m+1)f_1 + 2mf_3 - 3f_2|T|^2.$$

Sumando y restando $m|h|^2$ resulta

$$(m+1)^2|H|^2 =$$

$$= m|h|^2 + m((m+1)\tau - (m+1)f_1 + 2f_3 - \frac{3}{m}f_2|T|^2 - \frac{m-1}{m}|h|^2), \quad (3.1.9)$$

que, expresándolo en función de la base para usar el lema algebraico, queda:

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1} h_{ii}^{m+2}\right)^2 = m\left(\sum_{i=1}^{m+1}(h_{ii}^{m+2})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+2})^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=m+3}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 + (m+1)\tau - (m+1)f_1 + 2f_3 - \frac{3}{m}f_2|T|^2 - \frac{m-1}{m}|h|^2\right).$$

Aplicando ahora el lema se deduce

$$2h_{11}^{m+2}h_{22}^{m+2} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+2})^2 + \sum_{r=m+3}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 +$$

$$+(m+1)\tau - (m+1)f_1 + 2f_3 - \frac{3}{m}f_2|T|^2 - \frac{m-1}{m}|h|^2, \quad (3.1.10)$$

y usando (3.1.8) y (3.1.10), se obtiene:

$$K(\Pi) \geq \frac{1}{2}\left\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+2})^2 + \sum_{r=m+3}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 + (m+1)\tau - \right.$$

$$-(m+1)f_1+2f_3-\frac{3}{m}f_2|T|^2-\frac{m-1}{m}|h|^2\Big\}-$$

$$-(h_{12}^{m+2})^2+\sum_{r=m+3}^{2n+1}(h_{11}^r h_{22}^r-(h_{12}^r)^2)+f_1+3f_2g^2(E_1,\phi E_2). \qquad (3.1.11)$$

Despejando $|h|^2$ en (3.1.6) y sustituyendo en (3.1.11):

$$K(\Pi)\geq\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+2})^2+\sum_{r=m+3}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2+(m+1)\tau-$$

$$-(m+1)f_1+2f_3-\frac{3}{m}f_2|T|^2+(m+1)(m-1)\tau-(m+1)(m-1)f_1+$$

$$+2(m-1)f_3-3\frac{m-1}{m}f_2|T|^2-\frac{(m+1)^2(m-1)}{m}|H|^2\Big\}-$$

$$-(h_{12}^{m+2})^2+\sum_{r=m+3}^{2n+1}(h_{11}^r h_{22}^r-(h_{12}^r)^2)+f_1+3f_2g^2(E_1,\phi E_2).$$

Entonces, separando aquellos términos en los que intervienen los campos E_1,E_2 resulta:

$$K(\Pi)\geq\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{j>2}((h_{1j}^r)^2+(h_{2j}^r)^2)+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j>2}(h_{ij}^{m+2})^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=m+3}^{2n+1}\sum_{i,j>2}(h_{ij}^r)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=m+3}^{2n+1}(h_{11}^r+h_{22}^r)^2-$$

$$-\frac{m(m+1)}{2}f_1+mf_3-\frac{3}{2}f_2|T|^2+\frac{m(m+1)}{2}\tau-$$

$$-\frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2+f_1+3f_2g^2(E_1,\phi E_2). \qquad (3.1.12)$$

Estamos en condiciones de obtener la acotación

$$K(\Pi)\geq\frac{2-m-m^2}{2}f_1+mf_3-\frac{3}{2}f_2|T|^2+\frac{m(m+1)}{2}\tau-$$

$$-\frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2+3f_2g(E_1,\phi E_2)^2, \qquad (3.1.13)$$

es decir:

$$\frac{m(m+1)}{2}\tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 -$$

$$-mf_3 + \frac{3}{2}f_2|T|^2 - 3f_2\Phi^2(\Pi).$$

Para que se verifique la igualdad debe de darse ésta en las dos acotaciones que hemos realizado. La igualdad en (3.1.13) impone las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll} h^r_{1j} = h^r_{2j} = 0, & r = m+2, ..., 2n+1, & j = 3, ..., m+1, \\ h^{m+2}_{ij} = 0, & i \neq j, & i, j = 3, ..., m+1, \\ h^r_{ij} = 0, & r = m+3, ..., 2n+1, & i, j = 3, ..., m+1, \\ h^r_{11} + h^r_{22} = 0, & r = m+3, ..., 2n+1, & \end{array}$$

y, en virtud del Lema 3.1.1, la igualdad en (3.1.10) se tiene si y sólo si:

$$h^{m+2}_{11} + h^{m+2}_{22} = h^{m+2}_{33} = ... = h^{m+2}_{m+1m+1}.$$

Es más podemos escoger E_1 y E_2 de forma que $h^{m+2}_{12} = 0$.

Podemos recoger estos resultados en el siguiente:

Teorema 3.1.2.– *Sea $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión $m+1$ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Entonces, para todo $p \in M$ y toda sección plana $\Pi \subset \mathcal{D}_p$, se verifica:*

$$\frac{m(m+1)}{2}\tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 +$$

$$+\frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right)f_2 - mf_3. \qquad (3.1.14)$$

La igualdad en un punto $p \in M$ se tiene si y sólo si existen bases ortonormales $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ de T_pM y $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T^\perp_pM$ tales que $E_{m+1} = \xi_p$,

$\Pi = Span\{E_1, E_2\}$, *y los operadores de Weingarten,* $A_r = A_{E_r}$, $r = m+2$, $..., 2n+1$, *toman las formas:*

$$A_{m+2} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-1} \end{pmatrix}, \quad r = m+3, ..., 2n+1.$$

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones del teorema, según vimos, podemos hacer las convenientes elecciones de base. En cuanto al caso de la igualdad, el recíproco puede comprobarse mediante un cálculo directo. $\square$

Nota 3.1.3.– Este resultado generaliza el que aparece en [13] en el caso en el que $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$. En tal caso sustituyendo en (3.1.14)

$$f_1 = \frac{c+3}{4} \quad \text{y} \quad f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4},$$

resulta:

$$\frac{m(m+1)}{2}\tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 +$$
$$+\frac{(m+1)(m-2)}{2}\frac{c+3}{4} + m + \frac{3}{2}|T|^2\frac{c-1}{4} - 3\Phi^2(\Pi)\frac{c-1}{4}.$$

Además, si se da la igualdad y $\widetilde{M}$ es una variedad K-contacto, se verifica $a = -b$ en el enunciado del teorema. En efecto,

$$a + b = h_{11}^{m+2} + h_{22}^{m+2} = h_{33}^{m+2} = ... = h_{m+1,m+1}^{m+2} =$$

$$= g(h(\xi,\xi), E_{m+2}) = g(-N\xi, E_{m+2}) = 0,$$

donde hemos usado (1.2.16).

Recordemos que, si la dimensión de $\widetilde{M}$ es mayor o igual que cinco y la variedad es de contacto métrica, entonces, por el Teorema 2.4.9, es una variedad Sasakiana, y en tal caso, en virtud del Corolario 2.2.19, las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$ son todas constantes.

Debido a que gran cantidad de los ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados obtenidos son variedades con estructura trans-Sasakiana $(0, \beta)$ resulta interesante concretar estas desigualdades para el caso en el que la variedad ambiente posea dicha estructura. Realmente, podemos trabajar en general con una estructura trans-Sasakiana (α, β).

Sea pues M una subvariedad inmersa en $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, M tangente a ξ y $\widetilde{M}$ dotado de una estructura trans-Sasakiana (α, β). Consideremos de nuevo $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ una base ortonormal de T_pM, $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$, con $E_{m+1} = \xi_p$.

Por la estructura trans-Sasakiana de $\widetilde{M}$, en virtud de (1.1.24), se verifica:

$$\widetilde{\nabla}_{E_i}\xi = \nabla_{E_i}\xi + h(E_i, \xi) = -\alpha\phi E_i + \beta(E_i - \eta(E_i)\xi), \tag{3.1.15}$$

para $i = 1, ..., m + 1$. Igualando las componentes tangentes y normales obtenemos:

$$\nabla_{E_i}\xi = -\alpha T E_i + \beta(E_i - \eta(E_i)\xi), \tag{3.1.16}$$

$$h(E_i, \xi) = -\alpha N E_i. \tag{3.1.17}$$

Para $i = m + 1$ se deduce $\widetilde{\nabla}_{E_{m+1}} E_{m+1} = 0$, de donde:

$$h^r_{m+1,m+1} = 0, \text{ para } r = m + 2, ..., 2n + 1. \tag{3.1.18}$$

Así, al aplicar el Lema 3.1.1, la igualdad se verifica si $h^{m+2}_{11} + h^{m+2}_{22} = h^{m+2}_{33} = ... = h^{m+2}_{m+1m+1}$, que hemos comprobado en estas condiciones que es cero.

Podemos reformular el Teorema 3.1.2 del siguiente modo:

Corolario 3.1.4.– *Sea $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión $m+1$ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura trans-Sasakiana*

(α, β) *y tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Entonces, para todo* $p \in M$ *y toda sección plana* $\Pi \subset \mathcal{D}_p$*, se verifica:*

$$\frac{m(m+1)}{2}\ \tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\ |H|^2 +$$
$$+\frac{(m-1)(m+2)}{2}\ f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2 - mf_3. \qquad (3.1.19)$$

La igualdad en un punto $p \in M$ *se tiene si y sólo si existen bases ortonormales* $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ *de* T_pM*,* $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ *de* $T_p^{\perp}M$ *con* $E_m + 1 = \xi_p$*,* $\Pi = Span\{E_1, E_2\}$*, y los operadores de Weingarten,* $A_r = A_{E_r}$*,* $r = m+2, ...,$ $2n+1$*, toman las formas:*

$$A_{m+2} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-1} \end{pmatrix},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-1} \end{pmatrix}, \quad r = m+3, ..., 2n+1.$$

Demostración: La demostración es inmediata a partir del Teorema 3.1.2 teniendo en cuenta (3.1.18). □

De hecho, valiéndonos de la estructura de la variedad ambiente, podemos encontrar una acotación más fina de $K(\Pi)$, llegando al siguiente teorema:

Teorema 3.1.5.– *Sea* $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ *una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión* $m+1$ *en un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado, con estructura trans-Sasakiana* (α, β) *y tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Entonces para todo* $p \in M$ *y toda sección plana* $\Pi \subset \mathcal{D}_p$*, se verifica:*

$$\frac{m(m+1)}{2}\ \tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\ |H|^2 +$$
$$+\frac{(m-1)(m+2)}{2}\ f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2 - mf_3 - \alpha^2|N|^2. \qquad (3.1.20)$$

La igualdad en un punto $p \in M$ se tiene si y sólo si existen bases ortonormales $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ de T_pM, $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$ con:

i) $E_{m+1} = \xi_p$,

ii) $\Pi = Span\{E_1, E_2\}$,

iii) y los operadores de Weingarten, $A_r = A_{E_r}$, $r = m+2, ..., 2n+1$, toman las formas:

$$A_{m+2} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1^{m+2} \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 & \mu_2^{m+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_3^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_m^{m+2} \\ \mu_1^{m+2} & \mu_2^{m+2} & \mu_3^{m+2} & \cdots & \mu_m^{m+2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 & \mu_1^r \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 & \mu_2^r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_3^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_m^r \\ \mu_1^r & \mu_2^r & \mu_3^r & \cdots & \mu_m^r & 0 \end{pmatrix}, \quad r = m+3, ..., 2n+1,$$

con $\mu_i^r = g(h(E_i, \xi), E_r)$.

Demostración: Consideremos $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ una base ortonormal de T_pM y $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$ con $E_{m+1} = \xi_p$, $\Pi = \text{Span}\{E_1, E_2\}$ y E_{m+2} en la dirección de la curvatura media, H. Procediendo como en el Teorema 3.1.2 podemos partir de (3.1.12), ahora obtenemos la acotación

$$\frac{m(m+1)}{2}\tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \\ + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right)f_2 - mf_3 - \\ - \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1}(h_{i,m+1}^r)^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=m+2}^{2n+1}(h_{m+1,m+1}^r)^2, \qquad (3.1.21)$$

en la que conservamos aquellos términos en los que interviene el campo de estructura. Con esto demostramos la desigualdad del enunciado, ya que al ser la variedad trans-Sasakiana (α, β), se verifica

$$\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1}(h^r_{i,m+1})^2 = \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1} g^2(h(E_i,\xi),E_r) =$$

$$= \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1} g^2(-\alpha N E_i, E_r) = \alpha^2|N|^2,$$

donde hemos usado (3.1.17), y también $h^r_{m+1,m+1} = g(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, E_r) = 0$, para $r = m+2, ..., 2n+1$ pues $\widetilde{\nabla}_\xi \xi = 0$.

Para que se verifique la igualdad deben ser cero todos los téminos eliminados, pues todos eran positivos, es decir:

$$\begin{array}{lll} h^r_{1j} = h^r_{2j} = 0, & r = m+2, ..., 2n+1, & j = 3, ..., m, \\ h^{m+2}_{ij} = 0, & \quad i \neq j, & i,j = 3, ..., m, \\ h^r_{ij} = 0, & r = m+3, ..., 2n+1, & i,j = 3, ..., m, \\ h^r_{11} + h^r_{22} = 0, & r = m+3, ..., 2n+1. & \end{array}$$

Además, en (3.1.12) ya habíamos usado una acotación dada por el lema algebraico, entonces se da la igualdad si y sólo si se verifica también:

$$h^{m+2}_{11} + h^{m+2}_{22} = h^{m+2}_{33} = ... = h^{m+2}_{m+1 m+1},$$

que al ser la variedad trans-Sasakiana es cero.

Estas condiciones son las que aparecen en el teorema recogidas de forma matricial. El recíproco puede comprobarse mediante un cálculo directo. □

Nota 3.1.6.– Si la variedad ambiente fuese K-contacto, el valor del sumando

$$\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1}(h^r_{i,m+1})^2,$$

que aparece en (3.1.21), es $|N|^2$, por (1.2.16). Y por (1.2.14) se anula el sumando

$$\sum_{r=m+2}^{2n+1}(h^r_{m+1,m+1})^2.$$

Por tanto se tiene la misma acotación que en el Teorema 3.1.5 para $\alpha = 1$. Ahora bien, si $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ fuese K-contacto, sería Sasakiana y las funciones f_i, $i = 1, 2, 3$ serían constantes, es decir, $\widetilde{M}$ sería un espacio de curvatura ϕ-seccional constante; es por ello que este resultado aparece recogido en [13].

Estamos en condiciones de estudiar el invariante métrico δ_M en algunos casos particulares. Al ser las subvariedades tangentes al campo de estructura, sólo vamos a considerar el ínfimo de las secciones planas ortogonales a ξ, es decir:

$$\delta_M^{\mathcal{D}}(p) = \frac{m(m+1)}{2}\,\tau(p) - \inf_{\mathcal{D}} K(p),$$
$$\inf_{\mathcal{D}} K(p) = \inf\{K(\Pi) : \Pi \text{ es una sección plana de } \mathcal{D}_p M\}.$$

Corolario 3.1.7.– *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$, tangente al campo de estructura. Entonces, se verifica:*

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2} f_1 - m f_3.$$

Además, si $\widetilde{M}$ tiene una estructura trans-Sasakiana (α, β) se verifica:

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2} f_1 - m(\alpha + f_3).$$

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa de los Teoremas 3.1.2 y 3.1.5, sin más que tener en cuenta que, si la subvariedad M^{m+1} es anti-invariante, $|T|^2 = 0$, $|N|^2 = m$ y para cualquier sección plana Π que se tome en $\mathcal{D}$ se verifica $\Phi^2(\Pi) = 0$. $\square$

Este resultado generaliza el dado en [13] para espacios de curvatura ϕ-seccional constante, $\widetilde{M}(c)$. Es más, en dicho artículo se daban acotaciones de $\delta_M^{\mathcal{D}}$ para subvariedades cualesquiera, tangentes al campo de estructura, según fuese $c > 1$ o $c < 1$. En nuestro caso daremos resultados equivalentes según el signo de f_2.

Corolario 3.1.8.– *Sea* $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ *una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión* $m+1$ *en un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Se verifica:*

i) Si $f_2 \leq 0$,

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 - mf_3.$$

Si, además, $\widetilde{M}$ *tiene una estructura trans-Sasakiana* (α, β)*, entonces:*

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 - mf_3 - \alpha|N|^2.$$

ii) Si $f_2 > 0$,

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + \frac{3|T|^2}{2}f_2 - mf_3.$$

Y si la variedad es trans-Sasakiana,

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + \frac{3|T|^2}{2}f_2 - mf_3 - \alpha^2|N|^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Las dos desigualdades del apartado *i*) se deducen de los Teoremas 3.1.2 y 3.1.5 respectivamente, sin más que tener en cuenta que para cualquier sección plana $\Pi \subset \mathcal{D}_p$ se verifica que

$$\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi) \geq 0$$

en todo punto $p \in M$.

De igual forma en el apartado *ii*) las desigualdades se deducen de los mismos teoremas, suprimiendo el término que depende de la sección plana escogida, $\Phi^2(\Pi)f_2$, que en este caso es negativo. □

Nota 3.1.9.– Señalemos que es fácil obtener ejemplos de espacios de curvatura ϕ-seccional constante generalizados con $f_2 < 0$, $f_2 = 0$ y $f_2 > 0$. Así, tal como se vio en la Nota 2.2.12, esto ocurre con $\mathbf{R}\times_f \mathbf{CH}^n(-4)$, $\mathbf{R}\times_f \mathbf{C}^n(0)$ y $\mathbf{R}\times_f \mathbf{CP}^n(4)$, con funciones

$$f_2 = \frac{-1}{f^2}, \qquad f_2 = 0, \qquad f_2 = \frac{1}{f^2},$$

respectivamente.

Hasta ahora sólo hemos tratado secciones planas ortogonales al campo de estructura, pero, al igual que Y. H. Kim y D.-S. Kim en [21], podemos obtener los resultados equivalentes para secciones planas cualesquiera. Dados $p \in M$ y Π una sección plana de $T_p(M)$ generada por los campos ortonormales X e Y, definimos la función

$$\Theta(\Pi) = \eta^2(X) + \eta^2(Y), \tag{3.1.22}$$

que está bien definida, es decir, no depende de la elección de X e Y, y toma valores en el intervalo $[0,1]$.

Teorema 3.1.10.– *Sea $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión $m+1$ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Entonces, para todo $p \in M$ y toda sección plana $\Pi \subset T_p(M)$, se verifica:*

$$\frac{m(m+1)}{2}\,\tau - K(\Pi) \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\,|H|^2 +$$
$$+\frac{(m-1)(m+2)}{2}\,f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2 - (m - \Theta(\Pi)) f_3. \tag{3.1.23}$$

La igualdad en un punto $p \in M$ se tiene si y sólo si existen bases ortonormales $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ de T_pM y $\{E_{m+2}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$ tales que $\Pi = Span\{E_1, E_2\}$, y los operadores de Weingarten, $A_r = A_{E_r}$, $r = m+2, ...,$ $2n+1$, toman las formas:

$$A_{m+2} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-1} \end{pmatrix}, \quad r = m+3, ..., 2n+1.$$

DEMOSTRACIÓN: La demostración sigue los mismos pasos que la del Teorema 3.1.2, teniendo en cuenta que ahora en la expresión de la curvatura seccional no desaparecen los términos en los que interviene el campo de estructura. Es decir, con la notación del teorema, en

$$\begin{aligned} K(\Pi) = K(E_1 \wedge E_2) = R(E_1, E_2, E_2, E_1) = \\ = f_1 + 3f_2 g(E_1, TE_2)^2 - f_3(\eta(E_1)^2 + \eta(E_2)^2) - \\ -\|h(E_1, E_2)\|^2 + g(h(E_1, E_1), h(E_2, E_2)) = \\ = h_{11}^{m+2} h_{22}^{m+2} - (h_{12}^{m+2})^2 + \sum_{r=m+3}^{2n+1} (h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + \\ +f_1 + 3f_2 g^2(E_1, \phi E_2) - f_3(\eta(E_1)^2 + \eta(E_2)^2) = \\ = h_{11}^{m+2} h_{22}^{m+2} - (h_{12}^{m+2})^2 + \sum_{r=m+3}^{2n+1} (h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + \\ +f_1 + 3f_2 \Phi^2(\Pi) - f_3 \Theta(\Pi), \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

aparece un nuevo término en $\Theta(\Pi)$ que es el que aparece en el enunciado. □

Por tanto el Teorema 3.1.2 puede obtenerse como un corolario de este anterior, ya que si la sección considerada, Π, es normal al campo de estructura entonces $\Theta(\Pi) = 0$.

A su vez, este resultado generaliza el que aparece en [21], pues se considera el caso en el que $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$.

Estamos en condiciones de enunciar el correspondiente corolario que nos informe sobre el invariante métrico definido por B.-Y. Chen.

Corolario 3.1.11.– *Sea $\varphi : M^{m+1} \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión $m+1$ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado tal que el campo de estructura sea tangente a la subvariedad. Se verifica:*

i) Si $f_2 \leq 0$ *y* $f_3 \leq 0$,

$$\delta_M \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 - mf_3.$$

ii) Si $f_2 \leq 0$ *y* $f_3 > 0$,

$$\delta_M \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 - (m-1)f_3.$$

iii) Si $f_2 > 0$ *y* $f_3 \leq 0$,

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + \frac{3|T|^2}{2}f_2 - mf_3.$$

iv) Si $f_2 > 0$ *y* $f_3 > 0$,

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}|H|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 + \frac{3|T|^2}{2}f_2 - (m-1)f_3.$$

Demostración: La demostración es inmediata partir del último teorema, sin más que proceder igual que en el Corolario 3.1.7 y tener en cuenta que $0 \leq \Theta(\Pi) \leq 1$ y el signo de f_3 en cada caso. □

En este caso no podemos mejorar la acotación si suponemos que la variedad ambiente está dotada de una estructura trans-Sasakiana. Ello es debido a que la sección plana no tiene porqué ser ortogonal al campo de estructura. Por tanto no podemos escoger ξ como elemento de una base ortonormal de $T_p(M)$ con $\Pi = \mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$. Así pues, no es posible controlar la componente de la segunda forma fundamental en la que interviene ξ ni relacionarla con $|N|$.

3.2 Subvariedades ortogonales al campo de estructura.

A continuación pretendemos estudiar las desigualdades de B.-Y. Chen para subvariedades de $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$, un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, que sean normales al campo de estructura. Si la variedad ambiente fuese de contacto sabemos por la Proposición 2.4.2 que $\widetilde{M}$ sería un (κ, μ)-espacio y ese caso ya ha sido estudiado en [2]. Además M sería anti-invariante (véase [24]).

Teorema 3.2.1.– *Sea $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión m en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, tal que el campo de estructura sea ortogonal a la subvariedad. Entonces para todo $p \in M$ y toda sección plana $\Pi \subset T_p(M)$, se verifica:*

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\tau - K(\Pi) \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\,|H|^2 + \\ + \frac{(m-2)(m+1)}{2}\,f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2. \tag{3.2.1}$$

La igualdad en un punto $p \in M$ se tiene si y sólo si existen bases ortonormales $\{E_1, ..., E_m\}$ de T_pM y $\{E_{m+1}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$ tales que $\Pi = Span\{E_1, E_2\}$ y los operadores de Weingarten, $A_r = A_{E_r}$, $r = m{+}2, ..., 2n{+}1$, toman las formas:

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{pmatrix}_{m\times m},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-2} \end{pmatrix}, \quad r = m+1, ..., 2n+1.$$

Demostración: Consideremos M^m una subvariedad de $\widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ normal al campo de estructura. En virtud de (3.1.3), para cualesquiera X, Y campos en M, unitarios y ortogonales se verifica:

$$K_M(X \wedge Y) = R(X, Y, Y, X) =$$

$$= f_1 + 3f_2 g^2(X, TY) - \|h(X, Y)\|^2 + g(h(X, X), h(Y, Y)). \tag{3.2.2}$$

Escogemos $\{E_1, ..., E_m\}$ y $\{E_{m+1}, ..., E_{2n+1}\}$ bases ortonormales de T_pM y $T_p^{\perp}M$, con E_{m+1} en la dirección de la curvatura media. Sea Π una sección plana de T_pM generada por E_1 y E_2. La curvatura seccional de Π es:

$$K(\Pi) = K(E_1 \wedge E_2) =$$

$$= f_1 + 3f_2 g^2(E_1, TE_2) - \|h(E_1, E_2)\|^2 + g(h(E_1, E_1), h(E_2, E_2)) =$$

$$= h_{11}^{m+1} h_{22}^{m+1} - (h_{12}^{m+1})^2 +$$

$$+ \sum_{r=m+2}^{2n+1} (h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + f_1 + 3f_2 g^2(E_1, TE_2). \tag{3.2.3}$$

La curvatura escalar viene dada por

$$\tau = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i \neq j}^{m} K(E_i \wedge E_j) = f_1 + \frac{1}{m(m-1)} \left\{ 3f_2 \sum_{i \neq j}^{m} g^2(E_i, TE_j) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i \neq j}^{m} \|h(E_i, E_j)\|^2 + \sum_{i \neq j}^{m} g(h(E_i, E_i), h(E_j, E_j)) \right\}, \tag{3.2.4}$$

y la curvatura media por:

$$|H|^2 = g(H, H) = g\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(E_i, E_i), \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(E_i, E_i) \right) =$$

$$= \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i \neq j}^{m} g(h(E_i, E_i), h(E_j, E_j)) + \sum_{i=1}^{m} \|h(E_i, E_i)\|^2 \right). \tag{3.2.5}$$

De (3.2.4) y (3.2.5) se deduce la relación existente entre la curvatura escalar y la curvatura media:

$$\tau = f_1 + \frac{1}{m(m-1)} \{3f_2 |T|^2 + m^2 |H|^2 - |h|^2\}. \tag{3.2.6}$$

Al despejar $m^2|H|^2$, resulta:

$$m^2|H|^2 = |h|^2 + m(m-1)\tau - m(m-1)f_1 - 3f_2|T|^2. \tag{3.2.7}$$

Sumando y restando $(m-1)|h|^2$, llegamos a

$$m^2|H|^2 = (m-1)(|h|^2 + m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2 - \frac{m-2}{m-1}|h|^2), \tag{3.2.8}$$

que expresado en función de la base, para usar el Lema 3.1.1, queda:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_{ii}^{m+1}\right)^2 = (m-1)\left\{\sum_{i=1}^{m}(h_{ii}^{m+1})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 + m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2 - \frac{m-2}{m-1}|h|^2\right\}.$$

Aplicando ahora el citado lema se deduce

$$2h_{11}^{m+1}h_{22}^{m+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 +$$

$$+ m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2 - \frac{m-2}{m-1}|h|^2, \tag{3.2.9}$$

y se tiene la igualdad si y sólo si $h_{11}^{m+1} + h_{22}^{m+1} = h_{33}^{m+1} = ... = h_{mm}^{m+1}$. De aquí y de (3.2.3) llegamos a:

$$K(\Pi) \geq \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 +$$

$$+ m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2 - \frac{m-2}{m-1}|h|^2\Big\} -$$

$$-(h_{12}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}(h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + f_1 + 3f_2 g^2(E_1, TE_2). \tag{3.2.10}$$

Despejando $|h|^2$ en (3.2.6) y sustituyendo en (3.2.10), se tiene:

$$K(\Pi) \geq \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^r)^2 + m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2 +$$

$$+m(m-2)\tau - m(m-2)f_1 - \frac{3(m-2)}{m-1}f_2|T|^2 - \frac{m^2(m-2)}{m-1}|H|^2\Big\} -$$

$$-(h_{12}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}(h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + f_1 + 3f_2 g^2(E_1, \phi E_2). \qquad (3.2.11)$$

Agrupando términos semejantes y separando aquellos términos en los que intervienen los campos E_1, E_2 resulta:

$$K(\Pi) \geq \sum_{r=m+1}^{2n+1}\sum_{j>2}((h_{1j}^r)^2 + (h_{2j}^r)^2) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j>2}(h_{ij}^{m+1})^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j>2}(h_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=m+2}^{2n+1}(h_{11}^r + h_{22}^r)^2 - \frac{m(m-1)}{2}f_1 +$$

$$-\frac{3}{2}f_2|T|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\tau - \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}|H|^2 + f_1 + 3f_2 g^2(E_1, \phi E_2). \quad (3.2.12)$$

Haciendo ahora una acotación en la que se eliminan algunos términos positivos, resulta

$$K(\Pi) \geq \frac{-m^2+m+2}{2}f_1 - \frac{3}{2}f_2|T|^2 +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\tau - \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}|H|^2 + 3f_2\Phi^2(\Pi),$$

como queríamos demostrar.

La igualdad en esta última acotación se tiene si se anulan todos los términos suprimidos, es decir, si:

$$\begin{array}{lll} h_{1j}^r = h_{2j}^r = 0, & r = m+1, ..., 2n+1, & j = 3, ..., m, \\ h_{ij}^{m+1} = 0, & \quad i \neq j & i, j = 3, ..., m, \\ h_{ij}^r = 0, & r = m+2, ..., 2n+1, & i, j = 3, ..., m, \\ h_{11}^r + h_{22}^r = 0, & r = m+2, ..., 2n+1. & \end{array}$$

Además, para que se tenga la igualdad, deben darse las condiciones impuestas por el lema algebraico para tener la igualdad en (3.2.9). Todas estas son las condiciones que aparecen en el enunciado del teorema de forma matricial. El recíproco es una mera comprobación. □

Al igual que ocurría en el caso de la subvariedad tangente al campo de estructura, podemos dar otro resultado afinando la acotación, en el caso en el que la variedad ambiente sea trans-Sasakiana. No obstante, señalemos que ahora, al no ser en general la curvatura media ortogonal a ξ, los cálculos correspondientes se complicarán considerablemente.

Primero, podemos estudiar cómo se relacionan las componentes tangentes y normal del tensor de estructura con el endomorfismo de Weingarten y la conexión normal en el caso señalado de que dicha variedad sea trans-Sasakiana (α, β). En efecto, se tiene (1.1.24), y al ser la subvariedad M normal a ξ, para todo campo X en M, se verifica:

$$-A_{\xi}X = -\alpha TX + \beta X, \tag{3.2.13}$$

$$\nabla^{\perp}_{X}\xi = -\alpha NX. \tag{3.2.14}$$

Además, de (3.2.13) se sigue que:

$$g(h(X,X),\xi) = g(A_{\xi}X, X) = -\beta. \tag{3.2.15}$$

Teorema 3.2.2.– *Sea $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión m en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura trans-Sasakiana (α, β), tal que el campo de estructura sea ortogonal a la subvariedad. Entonces para todo $p \in M$ y toda sección plana $\Pi \subset T_p(M)$, se verifica:*

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\tau - K(\Pi) \le \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\,|H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2}f_1 + \left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right)(3f_2 - \alpha^2) - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2. \tag{3.2.16}$$

La igualdad en un punto $p \in M$ se tiene si y sólo si existen bases ortonormales $\{E_1, ..., E_m\}$ de T_pM, $\{E_{m+1}, ..., E_{2n+1}\}$ de $T_p^{\perp}M$ con

i) $E_{2n+1} = \xi_p$,

ii) $\Pi = Span\{E_1, E_2\}$,

iii) y los operadores de Weingarten, $A_r = A_{E_r}$, $r = m+2, ..., 2n+1$, toman las formas:

$$
\begin{aligned}
A_{m+1} &= \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{pmatrix}, \\
A_r &= \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m-2} \end{pmatrix}, \quad r = m+2, ..., 2n, \\
A_{2n+1} &= \begin{pmatrix} -\beta & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1m} \\ \mu_{12} & -\beta & \cdots & \mu_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1m} & \mu_{2m} & \cdots & -\beta \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde $\mu_{ij} = -\alpha g(E_j, TE_i)$, para $i \neq j = 1, ..., m$.

Demostración: Escogemos $\{E_1, ..., E_m\}$ y $\{E_{m+1}, ..., E_{2n+1}\}$ bases ortonormales de T_pM y $T_p^\perp M$, con $E_{2n+1} = \xi_p$. En principio, como H no es ortogonal a ξ, no podemos tomar E_{m+1} en la dirección de la curvatura media. Hemos visto, (3.2.15), que para X tangente a M y unitario se verifica $g(h(X,X),\xi) = -\beta$, por tanto:

$$g(H,\xi) = g\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h(E_i,E_i), \xi\right) = -\beta.$$

Escogemos entonces E_{m+1} en la dirección de $H - \eta(H)\xi = H + \beta\xi$, ortogonal a ξ. Como E_{m+1} tiene que ser unitario y

$$g(H+\beta\xi, H+\beta\xi) = |H|^2 - \beta^2,$$

tomamos

$$E_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{|H|^2 - \beta^2}}\,(H + \beta\xi). \qquad (3.2.17)$$

Llamaremos $\gamma = \sqrt{|H|^2 - \beta^2}$.

Sea Π una sección plana de T_pM generada por E_1 y E_2.

Procedemos de una forma similar a la del Teorema 3.2.1, así comenzamos estudiando la relación entre $|H|^2$ y $\sum_{i=1}^m h_{ii}^{m+1}$. Por (3.2.17):

$$|H|^2 = g(H,H) = g(H, \gamma E_{m+1} - \beta\xi) =$$

$$= g\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m h(E_i,E_i), \gamma E_{m+1}\right) - g(H,\beta\xi) = \frac{\gamma}{m}\sum_{i=1}^m h_{ii}^{m+1} + \beta^2. \qquad (3.2.18)$$

De ahí,

$$m^2|H|^2 = \left(\frac{\gamma}{|H|}\sum_{i=1}^m h_{ii}^{m+1} + \frac{m\beta^2}{|H|}\right)^2 =$$

$$= \frac{\gamma^2}{|H|^2}\left(\sum_1^m h_{ii}^{m+1}\right)^2 + \frac{m^2\beta^4}{|H|^2} + 2\frac{m\gamma\beta^2}{|H|^2}\sum_{i=1}^m h_{ii}^{m+1}. \qquad (3.2.19)$$

Podemos despejar de (3.2.18) el valor del sumatorio:

$$\sum_{i=1}^m h_{ii}^{m+1} = \frac{m}{\gamma}(|H|^2 - \beta^2) = m\gamma.$$

Así pues, queda:

$$m^2|H|^2 = \frac{\gamma^2}{|H|^2}\left(\sum_1^m h_{ii}^{m+1}\right)^2 + \frac{m^2\beta^2}{|H|^2}(\beta^2 + 2\gamma^2). \qquad (3.2.20)$$

Por otra parte, ya vimos en (3.2.7) que:

$$m^2|H|^2 = |h|^2 + m(m-1)\tau - m(m-1)f_1 - 3f_2|T|^2.$$

Comparando ambas expresiones llegamos a

$$\left(\sum_{i=i}^m h_{ii}^{m+1}\right)^2 = \frac{|H|^2}{\gamma^2}\Big(|h|^2 + (m-1)m\tau - (m-1)mf_1$$

$$-3f_2|T|^2 - \frac{m^2\beta^2}{|H|^2}(\beta^2 + 2\gamma^2)\Big),$$

que sumando y restando $(m-1)|h|^2$ y escribiéndolo en función de la base para usar el Lema 3.1.1, queda:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_{ii}^{m+1}\right)^2 = (m-1)\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}(h_{ii}^{m+1})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 +$$

$$+\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{ij}(h_{ij}^{r})^2 + \left(\frac{|H|^2}{\gamma^2(m-1)} - 1\right)|h|^2 +$$

$$+\frac{|H|^2}{\gamma^2}\,(m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2) - \frac{m^2\beta^2}{\gamma^2(m-1)}\,(\beta^2+2\gamma^2).\Bigg\}$$

Aplicando ahora el citado lema se deduce

$$2h_{11}^{m+1}h_{22}^{m+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 +$$

$$+\sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{ij}(h_{ij}^{r})^2 + \left(\frac{|H|^2}{\gamma^2(m-1)} - 1\right)|h|^2 +$$

$$+\frac{|H|^2}{\gamma^2}\,(m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2) - \frac{m^2\beta^2}{\gamma^2(m-1)}\,(\beta^2+2\gamma^2),$$

y la igualdad se tiene si y sólo si $h_{11}^{m+1}h_{22}^{m+1} = h_{33}^{m+1} = ... = h_{mm}^{m+1}$. De aquí y de (3.2.3) llegamos a:

$$K(\Pi) \geq \frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{r})^2 + \left(\frac{|H|^2}{\gamma^2(m-1)} - 1\right)|h|^2 +$$

$$+\frac{|H|^2}{\gamma^2}\,(m\tau - mf_1 - \frac{3}{m-1}f_2|T|^2) - \frac{m^2\beta^2}{\gamma^2(m-1)}\,(\beta^2+2\gamma^2)\Bigg\} -$$

$$-(h_{12}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}(h_{11}^{r}h_{22}^{r} - (h_{12}^{r})^2) + f_1 + 3f_2g^2(E_1, TE_2).$$

De nuevo usamos (3.2.7), ahora despejamos $|h|^2$ y sustituimos su valor en la ecuación anterior, con lo que tras operar resulta que

$$K(\Pi) \geq \frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^{r})^2 - \frac{m^2(m-2)}{(m-1)}|H|^2 +$$

$$+m(m-1)\tau - m(m-1)f_1 - 3f_2|T|^2) - \frac{m^2}{(m-1)}\beta^2 \Big\} -$$

$$-(h_{12}^{m+1})^2 + \sum_{r=m+2}^{2n+1} (h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2) + f_1 + 3f_2 g^2(E_1, TE_2),$$

donde hemos sustituido γ por su valor.

Agrupando términos semejantes y separando aquellos términos en los que intervienen los campos E_1, E_2 resulta:

$$K(\Pi) \geq \sum_{r=m+1}^{2n+1} \sum_{j>2} ((h_{1j}^r)^2 + (h_{2j}^r)^2) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j > 2} (h_{ij}^{m+1})^2 +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{r=m+2}^{2n+1} \sum_{i,j>2} (h_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=m+2}^{2n+1} (h_{11}^r + h_{22}^r)^2 -$$

$$-\frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 - \frac{3}{2} f_2 |T|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\tau -$$

$$-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}|H|^2 - \frac{m^2}{2(m-1)}\beta^2 + 3f_2\Phi^2(\Pi).$$

Al igual que hicimos en el Teorema 3.1.5, acotamos pero conservando aquellos térmnios en los que interviene el campo de estructura, para usar posteriormente de la estructura de variedad trans-Sasakiana (α, β).

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\tau - K(\Pi) \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\,|H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 +$$

$$+3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2 + \frac{m^2}{2(m-1)}\beta^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} (h_{ij}^{2n+1})^2 + (h_{12}^{2n+1})^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i>2} (h_{ii}^{2n+1})^2 - \frac{1}{2}(h_{11}^{2n+1} + h_{22}^{2n+1})^2. \tag{3.2.21}$$

Estudiemos el valor de esos términos

$$h_{ij}^{2n+1} = g(h(E_i, E_j), \xi) = g(\widetilde{\nabla}_{E_i} E_j, \xi) = -g(E_j, \widetilde{\nabla}_{E_i}\xi) =$$

$$= \alpha g(E_j, TE_i) - \beta g(E_j, E_i),$$

donde hemos usado (3.2.13) y (3.2.14). Así pues,

$$h_{ii}^{2n+1} = -\beta, \quad \text{para} \quad i = 1, ..., m, \tag{3.2.22}$$

y

$$h_{i,j}^{2n+1} = \alpha g(E_j, TE_i), \quad \text{para} \quad i \neq j = 1, ...m. \tag{3.2.23}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i,j} (h_{ij}^{2n+1})^2 = m\beta^2 + \alpha^2 \sum_{i \neq j} g^2(E_j, TE_i) = m\beta^2 + \alpha^2 |T|^2,$$

y además,

$$(h_{12}^{2n+1})^2 = \alpha^2 g^2(E_1, TE_2) = \alpha^2 \Phi^2(\Pi).$$

Sustituyendo ambas igualdades en (3.2.21) podemos dar la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
\frac{m(m-1)}{2}\ \tau - K(\Pi) \leq{}& \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \\
&+ \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 + 3\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right) f_2 + \frac{m^2}{2(m-1)}\beta^2 - \\
&- \frac{|T|^2}{2}\alpha^2 + \alpha^2 \Phi^2(\Pi) - \frac{1}{2}(m+2)\beta^2 = \\
={}& \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 + \\
&+ \left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right)(3f_2 - \alpha^2) - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2,
\end{aligned}$$

lo que demuestra la desigualdad del teorema.

La igualdad se verifica si se anulan los términos positivos eliminados en (3.2.21),

$$\begin{array}{lll}
h_{1j}^r = h_{2j}^r = 0, & r = m+1, ..., 2n, & j = 3, ..., m, \\
h_{ij}^{m+1} = 0, & \qquad i \neq j & i, j = 3, ..., m, \\
h_{ij}^r = 0, & r = m+2, ..., 2n, & i, j = 3, ..., m, \\
h_{11}^r + h_{22}^r = 0, & r = m+2, ..., 2n, &
\end{array}$$

y además se dan las condiciones para la igualdad al aplicar el lema algebraico, $h_{11}^{m+1} + h_{22}^{m+1} = h_{33}^{m+1} = ... = h_{mm}^{m+1}$, es decir, las condiciones que aparecen en el enunciado expresadas en forma matricial. La expresión de A_{2n+1} en el caso de la igualdad se tiene a partir de (3.2.22) y (3.2.23). El recíproco es una simple comprobación. $\square$

Obsérvese que en este caso, al contrario de como ocurría en el Teorema 3.1.5, en la acotación no aparece $|N|^2$. Ello es debido a que, al ser la subvariedad ortogonal al campo de estructura, no se tiene ninguna relación entre la segunda forma fundamental y el tensor N, como podemos observar en las ecuaciones (3.2.13) y (3.2.14).

Estamos en condiciones de estudiar diversas acotaciones del invariante métrico definido por B.-Y. Chen.

En primer lugar, al igual que hicimos en el caso en el que la subvariedad fuese tangente al campo de estructura, comenzamos estudiando las subvariedades anti-invariantes.

Corolario 3.2.3.– *Sea M^m una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, $\widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$, ortogonal al campo de estructura. Entonces, se verifica:*

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1.$$

Además, si $\widetilde{M}$ tiene una estructura trans-Sasakiana (α, β) y el vector curvatura media cumple $g(H, \xi) = 0$, se verifica:

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 - \frac{m-2}{2(m-1)} \beta^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Es inmediata a partir de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2, teniendo en cuenta que, al ser la subvariedad anti-invariante, $\Phi^2(\Pi) = 0$ y $|T|^2 = 0$. $\square$

Para una subvariedad cualquiera, ortogonal al campo de estructura, podemos afirmar:

Corolario 3.2.4.– *Sea $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión m en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, y tal que el campo de estructura sea ortogonal a la subvariedad. Se verifica:*

i) Si $f_2 \leq 0$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1.$$

ii) Si $f_2 > 0$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m-2)(m+1)}{2} f_1 + \frac{3}{2} m f_2.$$

Demostración: Partiendo del resultado dado en el Teorema 3.2.1, basta tener en cuenta que

$$\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi) \geq 0,$$

para el caso en el que $f_2 \leq 0$ y, en el otro caso, que siempre $|T|^2 \leq m$. $\square$

Este último resultado se puede mejorar en el caso en el que la variedad ambiente esté dotada de una estructura trans-Sasakiana (α, β).

Corolario 3.2.5.– *Sea $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión m en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura trans-Sasakiana de tipo (α, β) y tal que el campo de estructura sea ortogonal a la subvariedad. Se verifica:*

i) Si $f_2 \leq 0$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m+1)(m-2)}{2} f_1 - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2.$$

ii) Si $0 < f_2 \leq \frac{\alpha^2}{3}$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m+1)(m-2)}{2} f_1 + \frac{3|T|^2}{2} f_2 - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2.$$

iii) Si $\dfrac{\alpha^2}{3} \leq f_2$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m+1)(m-2)}{2} f_1 + \frac{|T|^2}{2}(3f_2 - \alpha^2) - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2.$$

Demostración: Partimos de la desigualdad (3.2.16) obtenida en el Teorema 3.2.2. En cada caso acotamos eliminando aquellos sumandos que sean negativos y que dependan de la sección escogida.

En el primer caso no podemos conservar los términos en f_2 ni en α^2 porque en ambos casos $\Phi^2(\Pi)$ iría con coeficientes positivos. Así pues usamos que

$$\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi) > 0.$$

Si $0 \leq f_2 \leq \dfrac{\alpha^2}{3}$, no podemos conservar el término en α^2.

Por último, si $\dfrac{\alpha^2}{3} < f_2$, se tiene que

$$\left(\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi)\right)(3f_2 - \alpha^2) > 0,$$

pero acotamos del siguiente modo

$$\frac{|T|^2}{2} - \Phi^2(\Pi) \leq \frac{|T|^2}{2},$$

con lo cual concluye la demostración del enunciado. $\square$

En realidad, si la variedad ambiente es trans-Sasakiana (α, β) y $\alpha \neq 0$ en todo punto, cualquier subvariedad suya ortogonal al campo de estructura es anti-invariante.

Veámoslo. En general para $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura trans-Sasakiana de tipo (α, β) y X, Y dos campos en M, se verifica (1.1.25):

$$d\eta(X, Y) = \alpha\Phi(X, Y).$$

Por otra parte, si la subvariedad es ortogonal al campo de estructura,

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) = 0.$$

Igualando ambas expresiones de $d\eta(X,Y)$, si $\alpha \neq 0$ en todo punto, se deduce que

$$g(X, \phi Y) = 0,$$

para todos X, Y, por lo que la inmersión es anti-invariante.

Así pues, el corolario anterior sólo añade información al Corolario 3.2.3 si la subvariedad no es anti-invariante. Por lo tanto el caso más interesante es el de las variedades trans-Sasakianas $(0,\beta)$, para las que reformulamos el Corolario 3.2.5:

Corolario 3.2.6.– *Sea $\varphi : M^m \longrightarrow \widetilde{M}^{2n+1}(f_1, f_2, f_3)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana de dimensión m en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura trans-Sasakiana de tipo $(0,\beta)$ y tal que el campo de estructura sea ortogonal a la subvariedad. Se verifica:*

i) Si $f_2 \leq 0$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m+1)(m-2)}{2} f_1 - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2.$$

ii) Si $0 < f_2$,

$$\delta_M \leq \frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}\ |H|^2 + \frac{(m+1)(m-2)}{2} f_1 + \frac{3|T|^2}{2} f_2 - \frac{m-2}{2(m-1)}\beta^2.$$

Nota 3.2.7.– Obsérvese que la última restricción impuesta no elimina tantas variedades pues, en dimensiones superiores o iguales que 5, los tipos existentes de variedades trans-Sasakianas se reducen a las $(\alpha, 0)$ y a las $(0,\beta)$.

Bibliografía

[1] P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo. Generalized Sasakian-space-forms. *Israel J. Math.* **141** (2004), 157-163.

[2] K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan y C. Özgür. Certain inequalities for submanifolds in (k,μ)-contact space forms. *Bull. Austral Math. Soc.* (2001), .

[3] C.L. Bejan. Almost semi-invariant submanifolds in cosymplectic manifolds of constant ϕ-sectional curvature. *An. Stiint. Al. I. Cuza Univ. Iasi.* **32** (1986), 63-72.

[4] D.E. Blair. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 509. Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] D.E. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds.* Birkhäuser, Boston, 2002.

[6] D. E. Blair, T. Koufogiorgos y B. J. Papantoniou. Contact metric manifolds satisfying a nullity condition. *Israel J. Math.* **91** (1995), 189–214.

[7] D. E. Blair, T. Koufogiorgos y R. Sharma. A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\phi = \phi Q$. *Kodai Math. J.* **13** (1990), 391–401.

[8] E. Boeckx. A class of locally ϕ-symmetric contact metric spaces. *Arch. Math.* **72** (1999), 466–472.

[9] E. Boeckx. A full classification of contact metric (k,μ)-spaces. *Illinois J. Math.* **44/1** (2000), 212–219.

[10] P. Bueken y L. Vanhecke. Curvature characterizations in contact geometry. *Riv. Mat. Univ. Parma* **14** (1988), 303-313.

[11] P. Bueken y L. Vanhecke. Algebraic characterizations by means of the curvature in contact geometry, en *Differential geometry (Peñíscola, 1988)*, Lecture Notes in Mathematics 1410, 77-86. Springer, Berlin, 1989.

[12] G. Calvaruso, D. Perrone y L. Vanhecke. Homogeneity on three-dimensional contact metric manifolds. *Israel J. Math.* **114** (1999), 301–321.

[13] A. Carriazo A contact version of B.Y. Chen's inequality and its applications to slant inmersions. *Kyungpook Math. J.* **39** (1999), 465-476.

[14] B. Y. Chen. *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type.* Series in Pure Mathematics 1. World Scientific, Singapore, 1984.

[15] B.-Y. Chen. Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Arch. Math.* **60** (1993), 568-578.

[16] B.-Y. Chen. A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory. *Results in Mathematics* **27** (1995), 17-26.

[17] B.-Y. Chen. Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal inmersions and their applications, en *The third Pacific Riemannian Geometry Conference (Seoul, 1996)*, 7-60, Internat. Press, Cambridge, MA, 1998.

[18] F. Defever, I. Mihai, and L. Verstralen. B.-Y. Chen's inequality for C-totally real submanifolds of Sasakian-space-forms. *Bolettino U.M.I.* (7) **11-B** (1997), 365-374.

[19] D. Janssens and L. Vanhecke. Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Math. J.* **4** (1981), 1-27.

[20] K. Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.* **24** (1972), 93–103.

[21] Y. H. Kim y D.-S. Kim. A basic inequality for submanifolds in Sasakian space forms. *Houston J. Math.* **25** (1999), 247-257.

[22] J.-S. Kim, Y.-M. Song y M. M. Tripathi. B.-Y. Chen inequalities for submanifolds in generalized complex space forms. *Bull. Korean Math. Soc.* **40** (2003), 411-423.

[23] T. Koufogiorgos y C. Tsichlias. On the existence of a new class of contact metric manifolds. *Canad. Math. Bull.* **43/4** (2000), 440–447.

[24] A. Lotta. Slant submanifolds in contact geometry. *Bull. Math. Soc. Ronmanie* **39** (1996), 183-198.

[25] J. C. Marrero. The local structure of trans-Sasakian manifolds. *Ann. Mat. Pura Appl.* **162** (1992), 77–86.

[26] Z. Olszack. Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds. *Tensor, N.S.* **38** (1982), 19–28.

[27] Z. Olszack. On the existence of generalized complex space forms. *Israel J. Math.* **32** (1989), 214-218.

[28] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Pure and Applied Mathematics 103. Academic Press, New York, 1983.

[29] J.A. Oubiña. New classes of almost contact metric structures. *Publ. Math. Debrecen* **32** (1985), 187-193

[30] Walter A. Poor. *Differential Geometric Structures.* Mc Graw-Hill, New York, 1981.

[31] R. Sharma. On the curvature of contact metric manifolds. *J. Geometry* **53** (1995), 179–190.

[32] S. Suguri y S. Nakayama. D-Conformal deformations on almost contact metric structure. *Tensor, N.S.* **28** (1974), 125–129.

[33] S. Tanno. The topology of contact Riemannian manifolds. *Illinois J. Math* **12** (1968), 700–717.

[34] S. Tanno. Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.* **40** (1998), 441–448.

[35] F. Tricerri y L. Vanhecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365-398.

[36] I. Vaisman. Conformal changes of almost contact metric structures, en *Geometry and Differential Geometry*. Lecture Notes in Mathematics 792, 435–443. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[37] L. Vanhecke. The Bochner curvature tensor on almost Hermitian manifolds. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **34** (1975-1976), 21-38.

[38] L. Vanhecke. Almost Hermitian manifolds with J-invariant Riemann curvature tensor. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **34** (1975-1976), 487-498.

[39] K. Yano y M. Kon. *Structures on Manifolds*. Series in Pure Mathematics 3. World Scientific, Singapore, 1984.