TRATAMIENTO DE LA IMPRECISIÓN EN LA TEORÍA DE LA UTILIDAD DEL CONSUMIDOR

David Gálvez Ruiz

Supervisor:
Dr. José Luis Pino

Tesis Doctoral

21 de julio de 2009

Índice general

Capítulo 1

Exordio

La presente tesis tiene como propósito presentar un nuevo enfoque en el tratamiento de la incertidumbre interna en la toma de decisiones de los individuos. Más concretamente, se centra en uno de los campos de aplicación de la teoría de la decisión multicriterio más importantes, tanto por la cantidad de trabajo desarrollado en él como en sus repercusiones sociales y económicas, que han dado lugar al despliegue de un amplio espectro de teorías en torno suya: la teoría del consumidor.

El estudio de la toma de decisiones de consumo desde un punto de vista clásico se sustenta en el concepto de utilidad. El primer acercamiento a este concepto provino de Stanley Jevons y su apreciación de que los individuos consumen según el dolor o placer que perciben de su acción, a lo cual llamó utilidad en una carta que escribió a su hermano (Rothbard, M. N.: *Historia del pensamiento económico. Vol. 1, El pensamiento económico hasta Adam Smith*. Unión Editorial. 1999.). Este punto de partida ha llevado a varias definiciones clásicas de la utilidad, resumidas magistralmente por la gran economista keynesiana Joan Robinson, que afirma que la utilidad no es más que la característica de las mercancías que hace que los individuos quieran comprarlas, y estos individuos compran las mercancías para gozar de su utilidad (Robinson, J.: *Economics is a serious subject*. W. Heffer and Sons. 1932.).

Estas definiciones llevaron a los economistas clásicos a formular la utililidad como un concepto mesurable cardinal. Así, para los primeros teóricos, la utilidad se consideraba como una realidad psicológica nacida de la introspección y, en consecuencia, se le dio el trato de una cantidad directamente medible. En esta concepción extrema, la medición de la utilidad consiste en asociar un número real (unidades de utilidad) a la sensación obtenida con el consumo de un bien. De esta forma, un bien que aportase 20 unidades de utilidad en su consumo, sería el doble de deseable que uno que aportase sólo 10. Sin embargo, con el ocaso del siglo XIX, esta concepción se irá revisando progresivamente, tanto en el ámbito conceptual como instrumental.

El primero de estos avances tuvo lugar con la formulación de la función de utilidad generalizada de Edgeworth (Edgeworth, F. Y.: *Mathematical Psychics.* 1881.), en la que establece la utilidad que reporta el consumo de varios bienes (antes sólo se establecía respecto a un bien), abarcando todas las interdependencias posibles entre ellos, si bien sigue proponiendo una representación funcional de tipo cardinal.

Sin embargo, no es hasta Pareto, cuando se rechaza la visión de utilidad cardinal. Para Pareto (*Leçon d'économie pure à l'université de Lausanne*, 1983. Sin publicar), la utilidad tal como se había entendido hasta el momento, permite pensar que la satisfacción de necesidades no reposa más que en las propiedades objetivas de las cosas, y no en el aspecto subjetivo de las necesidades. Por ello, Pareto redefine el concepto de función de utilidad, si bien mantiene la condición de optimalidad del consumidor. Ya no es necesario definir una función de utilidad cardinal, sino que es suficiente con establecer una relación de preferencias sobre el conjunto de cestas de bienes. En consecuencia, los niveles de utilidad se pueden representar por cualquier función creciente. Esta función será la función de utilidad, y lo único que se le pide es que refleje una relación de orden, de forma que un bien que aportase 20 unidades de utilidad en su consumo, sólo sería más deseable que uno que aportase sólo 10, pero no tiene por qué ser necesariamente el doble.

Este paso llevó a la concepción subjetiva de la utilidad que ha permitido introducir parámetros en las funciones de utilidad para adecuarlos a la percepción de las necesidades de los agentes analizados. Por tanto, la función de utilidad de un individuo reportará un valor diferente para el consumo de una combinación de bienes del que reportará la función de utilidad de otro individuo, de forma que cualquier comparación interpersonal es ilegítima.

Todo estos avances llevaron a la construcción de una nueva Teoría Clásica del Consumidor, cuyo principal artífice fue Hicks, que enuncia su programa en los siguientes términos: "debemos ahora de emprender el trabajo de matar y rechazar todos los conceptos que tengan la traza de la utilidad cuantitativa, para reemplazarlos, allí donde estén, por nociones totalmente exentas de ello" (Hicks, J. R.: *Value and capital: An inquiry into some fundamental principles of economic theory.* Clarendon Press. 1939.).

Toda su argumentación se basa en la definición de la relación marginal de sustitución (RMS). La RMS de X_1 por X_2 es la cantidad de X_2 que bastará para compensar al consumidor de la pérdida de una unidad marginal de X_1. Con esta definición, Hicks consigue trasladar el elemento cuantitativo en la subjetividad del consumidor desde la utilidad hasta la RMS, logrando establecer una relación entre ambas. Este concepto y la relación directa que entraña con la función de utilidad son un elemento central en la presente tesis doctoral, y por ello se desarrollará más extensamente en la segunda parte.

El avance de los instrumentos matemáticos y estadísticos para la modelización de las ciencias sociales en el siglo XX tuvo una repercusión enorme en la teoría de la utilidad. El punto de inflexión se encuentra en 1944 con la formulación de la Teoría de la Utilidad Esperada (Von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and economics behaviour*. Princeton University Press. 1944.). Esta formulación, analizada más detenidamente en los preliminares de esta tesis doctoral, supone un primer intento de modelizar la incertidumbre en un ambiente de decisión del consumidor, utilizando para ello la teoría de la probabilidad.

Sin embargo, si bien el modelo de Von Neumannn y Morgenstern se ha convertido en principal referente en la modelización de las decisiones en ambiente de riesgo, no han faltado autores que han presentado teorías alternativas agrupadas bajo el nombre genérico de Teorías de la Utilidad Generalizada, y entre las que caben destacar las teorías de la utilidad del proceso (Frey, B., Benz, M., Stutzer,M.: Introducing procedural utility: not only what, but also how matters, *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, vol. 160 (3).2004.) y la teoría SSB (Fishburn, P.C.: Dominance in SSB utility theory, *Journal of Economic Theory, vol. 34*. 1984.) entre otras muchas[1].

A pesar de que la teoría de la utilidad esperada ha sido ampliamente utilizada, ésta, al igual que la mayoría de las alternativas para modelizar la incertidumbre confrontan gravemente el principio formulado por Hicks, ya que dirigen su atención a la valoración de la utilidad, si bien incorporan el elemento de incertidumbre en esta valoración, lo cual, supone un verdadero paso atrás. Posteriormente se volverá sobre esta cuestión para justificar el enfoque adoptado en esta tesis doctoral.

Una de las consecuencias de la metodología de la utilidad esperada es el

[1]Una práctica enumeración puede encontrarse en:

López, J. M., De Paz, S.: Más allá de la utilidad esperada: una introducción a la utilidad del proceso, *XIII Jornadas de ASEPUMA*. 2005.

Herrero, C.: Teorías alternativas a la utilidad esperada: una interpretación en términos de bienestar social, *Investigaciones Económicas, vol. 11(3)*. 1987.

surgimiento por analogía instrumental de la teoría de la utilidad multiatributo (MAUT: Multi-Attribute Utility Theory). Esta teoría (Keeney, R. L. Raiffa, H.: *Decisions with multiple objectives : preferences and value trade offs*. John Wiley and Sons. 1976.) nace como consecuencia del avance de la teoría de la decisión multicriterio, y aplica las asunciones y el procedimiento de ponderación y agregación usado por Von Neumann y Morgenstern. Una buena comparación entre ambas teorías es posible encontrarla en Miyamoto, J. M.: Generic analysis of utility models, *Utility Theories: Measurements and applications (Edit. Edwards, W.)*, Kluwer Academic Publishers. 1992. La presente tesis doctoral plantea un tratamiento de la decisión de consumo desde un marco multicriterio, por lo que quedaría encuadrada dentro de MAUT. Debido a ello, la teoría de la decisión multicriterio, y más concretamente la teoría de la utilidad multiatributo disponen de un capítulo específico en los preliminares de esta tesis.

A su vez, la teoría de la utilidad multicriterio ha sido objeto de aplicación de la teoría de la utilidad esperada para adaptarlo a un ambiente de incertidumbre a través de la introdución de elementos estocásticos, lo cual no añade ninguna innovación metodológica importante ni una nueva concepción de la incertidumbre, que sólo hace referencia a la incertidumbre externa al decisor derivada de los posibles escenarios posibles en la toma de decisiones. Es decir, la incertidumbre modelada mediante estos métodos estocásticos se refiere al "entorno" del decisor sobre el que éste no puede influir.

Este último paso sí se alcanza con la introducción de la teoría de conjuntos fuzzy (Zadeh, L.A.: Fuzzy sets, *Information and Control, vol. 8*. 1965.) en la teoría de la utilidad multicriterio. La nueva herramienta introducida por Zadeh se ha convertido en una alternativa al tratamiento estocástico[2] de la incertidumbre a través de la probabilidad. Más concretamente, el análisis multicriterio fuzzy se dirige a la modelización de la incertidumbre interna en las valoraciones del decisor. Ésta incluye factores como la falta de información perfecta y el sesgo en la percepción de las consecuencias de una elección. La teoría de conjuntos fuzzy, a cuyo acercamiento teórico se le dedica el tercer capítulo de los preliminares de la tesis, se ha convertido en un instrumento ampliamente utilizado (si bien al principio se insistía en el tratamiento estocástico a través de la probabilidad) en la teoría de la decisión multicriterio cuando se trata de modelizar la imprecisión en las valoraciones subjetivas del

[2]En realidad, ambas teorías no son precisamente alternativas, ya que, como se verá, tratan de modelar diferentes situaciones de incertidumbre. Sin embargo, aún se suele pensar que la incertidumbre interna derivada de la imprecisión es posible modelarse mediante tratamiento estocástico, como se había venido haciendo anteriormente sin mucho éxito, de ahí que en los años sesenta y setenta sí se planteara como una alternativa.

decisor.

Esta implantación de la teoría fuzzy responde a que es capaz de abordar con diferentes metodologías dos cuestiones fundamentales del análisis multicriterio derivadas de la incertidumbre interna.

De un lado, permite modelizar la agregación de criterios interdependientes en la toma de decisiones. Una muestra de aplicaciones concretas se pueden encontrar en Cheng, C.H., Mon, D.-L.; Evaluating weapon system by analytical hierarchy process based on fuzzy scales, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 63.* 1994., o en Altrock, C.V., Krause, B.: Multi-criteria decision-making in German automotive industry using fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems vol.63.* 1994. Para una enumeración más detallada de las posibles aplicaciones en las que se han usado estos métodos se puede consultar Carlsson, C., Fullér, R.: Fuzzy multiple criteria decision making: recent developments, *Fuzzy Sets and Systems, vol 78.* 1996, y más específicamente para el caso de fuzzy MAUT, Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., Matarazzo, B.: Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research, vol. 158.* 2004.

Estos métodos, conocidos como *fuzzy integrals* se valen de las integrales de Choquet y Sugeno (Choquet, G.: Theories of capacities, *Annales de l'institut Fourier, vol. 5.* 1953.; Sugeno, M.: Theory of fuzzy integrals and its applications, *PhD. thesis.* Tokyo Institute of Technology. 1974.) para establecer las ponderaciones de cada uno de los criterios que conforman el problema de decisión, cuando el decisor es incapaz de percibirlas directamente debido a las relaciones existentes entre éstos.

De otro lado, permite la modelización de la incertidumbre interna del individuo considerando la valoración de éste como una magnitud fuzzy. Como ya se indicó, este enfoque es minoritario frente al estocástico que incluye la incertidumbre derivada del entorno, si bien cada vez es utilizado en más aplicaciones (Dean, P.-K. et al.: Product and cost estimation with fuzzy multi-attribute utility theory, *The Engineering Economist, vol. 44(4).* 1999) e incluso se puede combinar con un enfoque estocástico para considerar ambos tipos de incertidumbres (Szidarovszky, F., Zarghami, M.: Stochastic-fuzzy multi criteria decision making for robust water resources management, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, recurso on line.* 2008.).

A pesar de todos estos avances, estos métodos, al igual que los basados en la utilidad esperada, violan el principio básico hicksiano enunciado anteriormente: "matar y rechazar todos los conceptos que tengan la traza de la utilidad cuantitativa" usando para ello el concepto de relación marginal de sustitución. Es decir, estos métodos se centran en valorar directamente la utilidad del individuo, aún teniendo en cuenta la incertidumbre en esta valoración. Esta laguna intenta suplantarla la presente tesis doctoral. Para ello, se tomará la incertidumbre interna en la relación marginal de sustitución mediante el uso de la teoría de conjuntos fuzzy propuesta por Zadeh, para después obtener una forma funcional de la función de utilidad del consumidor sobre la que aplicar el análisis de optimalidad que lleva a modelizar la toma de decisiones de éste. En este contexto, el consumidor tomará su decisión de consumo intentando maximizar su utilidad para un presupuesto dado.

A modo introductorio, la primera parte de la tesis repasa los tres pilares básicos en los que se desarrolla la investigación, introducendo las definiciones y planteamientos matemáticos de éstos: la teoría de la decisión multicriterio, la teoría de la utilidad, y la teoría de los conjuntos difusos (Fuzzy Set Theory).

La segunda parte del documento constituye el cuerpo de la presente tesis doctoral. En ella, se plantea la obtención de una forma funcional explícita para la utilidad del consumidor, incorporando la incertidumbre derivada de la falta de información y errores de apreciación mediante números fuzzy. La principal aportación será considerar el ambiente fuzzy en la relación marginal de sustitución del consumidor, en lugar de en la función de utilidad, para posteriormente deducir una expresión funcional de ésta como una variable fuzzy. Obviamente, el desarrollo de este enfoque vendrá precedido de una disertación más amplia sobre su justificación.

Finalmente, la tercera parte de la tesis plantea el nuevo problema de decisión derivado de obtener la función de utilidad a partir de una RMS fuzzy.

Parte I

Preliminares: herramientas para la modelización de la toma de decisiones

Capítulo 2

Teoría de la Decisión

La teoría de la decisión, como toda teoría que se precie de serlo, define, valora, y argumenta, en su caso, sobre las decisiones, utilizando para ello una serie de técnicas y metodologías desarrolladas para tal fin.

Todos y cada uno de nosotros pasamos los días y las horas de nuestra vida teniendo que tomar decisiones, esto es, planteando y analizando varias alternativas posibles con vistas a alcanzar un fin concreto, debiendo escoger la que mejor satisfaga la consecución de ese fin. Algunas decisiones tienen una importancia relativa en el desarrollo de nuestra vida, mientras otras son trascendentales en ella. Es por ello que el desarrollo de una teoría sobre la toma de decisiones inspirara la reflexión de muchos pensadores de todos los tiempos. Grandes filósofos como Aristóteles, Platón, o Tomás de Aquino, por mencionar sólo algunos de ellos, hicieron planteamientos sobre la capacidad de los seres humanos para tomar decisiones.

Estas reflexiones, en un mundo como el que se desarrollan las actividades humanas actualmente, compuesto por numerosos sistemas complejos, todos ellos interdependientes entre sí, requieren un desarrollo formal acompañado de una serie de instrumentos cada vez más complejos que se adapten a los distintos escenarios posibles que pueden aparecer en una toma de decisiones.

Etapas del proceso de toma de decisiones

Como se puede deducir de lo avanzado anteriormente, el proceso de toma de decisiones se compone de varias etapas que se desarrollan de forma lineal en el tiempo, si bien pueden aparecer retroalimentaciones de información entre ellas (una conclusión en una de ellas puede influir en la etapa anterior) que hagan que el desarrollo temporal de éstas no sea estrictamente lineal.

1. Identificación y diagnóstico del problema. En primer lugar, como todo problema, deben identificarse los elementos que intervienen en el problema y, la naturaleza del mismo.

   En un problema de toma de decisiones, se pueden distinguir los siguientes elementos:

   a) El decisor, encargado de realizar la decisión que mejor contribuya a la consecución de sus fines.

   b) Las alternativas, que configuran las distintas formas de actuar posibles, y de entre las cuales, el decisor deberá elegir la que mejor satisfaga sus fines.

   c) El entorno, ambiente, o contexto, esto es, el conjunto de factores que escapan al control del decisor y que confeccionan el marco en que se tiene que realizar la toma de decisiones. Este marco, puede ser:

      - Certeza: Se sabe con seguridad cuáles son los efectos de las distintas acciones que se pueden llevar a cabo.
      - Riesgo: No se sabe con certeza qué ocurrirá tomando determinadas decisiones, pero sí se conocen las consecuencias de cada una de ellas, y cuál es la probabilidad de que eso ocurra, asignando una distribución de probabilidad conocida.
      - Incertidumbre: Cada decisión puede tener consecuencias a las que no es posible asignar una distribución de probabilidad.

      A pesar de esta distinción entre los distintos niveles de información disponible a la hora de la toma de decisiones, lo cierto es que la incertidumbre siempre está presente en el proceso de valoración de las alternativas, y ello es debido a la existencia de la denominada incertidumbre interna. Como ya se adelantó en el exordio, pueden distinguirse dos tipos básicos de incertidumbre:

      - La incertidumbre externa derivada de los factores del entorno que escapan al control del individuo, como por ejemplo el tiempo meteorológico, el estado del tráfico, etc.
      - La incertidumbre interna en las valoraciones del decisor que se manifiesta en la racionalidad de éste. Este tipo de incertidumbre siempre se encuentra presente en la toma de decisiones, pues la incertidumbre externa es posible eliminarla o disminuirla obteniendo la mayor cantidad de información posible sobre el entorno, pero la interna, sin embargo, es inherente al propio decisor, cuya valoración siempre tendrá un elemento de

subjetividad. Esta incertidumbre interna es la que se trata de modelar mediante la introducción de las herramientas fuzzy en la teoría de la decisión.

d) Las consecuencias o resultados que se obtienen con cada una de las alternativas.

2. Selección del mejor método para evaluar las distintas alternativas y de una regla de decisión para escoger la mejor alternativa de las posibles.

3. Evaluación de alternativas aplicando el criterio seleccionado.

4. Elección de la alternativa de acuerdo a la regla de decisión fijada.

5. Implementación de la decisión.

Bajo esta descripción, parece evidente que la Estadística y la Investigación Operativa encuentren en este campo un terreno en el que avanzar, y contribuir así a la toma de decisiones de los agentes mediante el desarrollo de un importante aparato matemático. De esta forma, es posible usar elementos cuantitativos (números, probabilidades, funciones...) para cuantificar valores e incertidumbres, lo cual, ayuda a comprender la situación de la decisión.

Los seres humanos pueden comprender, comparar y manipular números. Por lo tanto, para crear un modelo de análisis de decisiones es necesario crear la estructura del modelo y asignar los valores para dotar al modelo de formalización matemática. Aquí se incluyen los valores para medir incertidumbre, las funciones de valor o utilidad para evaluar alternativas, las ponderaciones de valor para medir la concesión que se debe hacer entre los objetivos y criterios, y en su caso, la preferencia de riesgo.

Una vez definida la estructura y los números, el análisis puede comenzar. El análisis de decisiones implica mucho más que calcular la utilidad (valor) esperada y ponderada de cada alternativa. Si esto fuera todo, los decisores no tendrían demasiada información. De ahí la necesidad de examinar la sensibilidad de la utilidad (valor) esperada y ponderada.

A continuación, se expondrá el proceso de análisis en la toma de decisiones multicriterio -también llamado multiatributo-, desarrollando el planteamiento matemático del problema.

2.1. Teoría de la decisión multicriterio

La teoría de la decisión multicriterio[1], desarrolla una serie de instrumentos para ordenar las distintas alternativas posibles en una toma de decisiones afectada por varios criterios. En un proceso de toma de decisiones, generalmente, toman partido varios objetivos, que en muchos casos son incompatibles entre sí. Es decir, si bien el objetivo último de un decisor es maximizar la utilidad (o valor) de su decisión, normalmente, ésta depende de varios factores que delimitarán el grado de idoneidad de cada una de las alternativas. A estos factores, a los que se les puede asignar una valoración para cada alternativa acorde a su idoneidad para la consecución de un objetivo final, es decir, son mesurables, se les puede considerar como subobjetivos mesurables, en la medida de que forman el objetivo final, y se denominan criterios.

De esta forma, en un problema de decisión multicriterio, un punto muy importante es la identificación de los criterios que influyen en la toma de decisiones. Además, a la hora de definir el mecanismo que se va a adoptar para generar la alternativa preferida o medir el grado de preferencia de cada una de ellas, no es asunto trivial el tratamiento que se le va a dar a los diferentes criterios, ya que su importancia dentro del objetivo final y la forma de combinarlos para obtener la valoración final de cada alternativa va a determinar el grado de preferencia de cada una de éstas.

2.1.1. Construcción del modelo de decisión multicriterio

Como se ha adelantado, la implementación matemática del proceso de toma de decisiones, permite desarrollar una serie de instrumentos que ayudan al decisor a tomar la decisión que le reportaría mayor valor o utilidad.

1. En primer lugar, es preciso delimitar las distintas alternativas que se pueden adoptar como decisión. Al conjunto de éstas la denominaremos $A = \vec{a} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, donde a_j, $j = 1, 2, ..., n$, son las n alternativas posibles en el problema de toma de decisiones.

2. Los criterios, como se ha explicado, son objetivos mesurables que se toman como referencia para medir la idoneidad de las distintas al-

[1]Las palabras criterio y atributo son usadas como sinónimos en la literatura sobre el análisis multicriterio. Durante este trabajo, se utilizará la palabra criterio. Al desarrollo de un modelo de decisión multicriterio, se le denomina Análisis Multicriterio (AMC).

ternativas. De esta forma, los distintos criterios forman un conjunto $K \subset N = C_1, C_2, ..., C_k$, donde k es el número total de criterios presentes en el problema. Estos criterios adquirirán un valor c_i, en el caso del criterio i, que si es referido a alguna de las alternativas anteriores será $C_i(a_j)$ que indica el valor que alcanza el criterio i en la alternativa j. A este número se le denomina *consecuencia* en términos de este criterio si se eligiera la alternativa j. Por lo tanto, se puede considerar que los valores de los criterios $C_1, C_2, ..., C_k$ conforman un espacio de consecuencias k-dimensional, de forma que para una alternativa $a_j \in A$:

$$\vec{c}(a_j) = (C_1(a_j), C_2(a_j), ..., C_k(a_j))$$

asigna el punto que corresponde a la alternativa a_j en el espacio de consecuencias, denotado $\mathbf{C}^k \subset K'$, donde K' representa el conjunto de valores que pueden alcanzar los distintos criterios, y por lo tanto, indica la consecuencia de la elección de la alternativa a_j si se evalúa en los k criterios. En otras palabras, indica el valor que alcanza a_j en cada criterio. De la misma forma, se notará con $\vec{c_i} \in K'$, al que alcanza una combinación cualquiera de valores de los distintos criterios, sin hacer referencia a ninguna alternativa, por lo que podría ser un punto no obtenido efectivamente por ninguna alternativa.

3. La función de valor/utilidad o los procedimientos de comparación de pares de alternativas serán los elementos que permitan valorar la capacidad de éstas en la consecución del objetivo final. Dependiendo del problema que se desee afrontar, el decisor debe elegir el método de análisis de decisión multicriterio que va a utilizar para clasificar las distintas alternativas y elegir la mejor. Estos métodos se diferencian en la forma en que valoran las distintas alternativas, pudiéndose hacer una clasificación básica de ellos en métodos *outranking*[2], y métodos basados en funciones de valor (aquí se incluyen también los modelos de utilidad, pues ésta se trata en la teoría de la decisión como una función de valor). La diferencia fundamental es que mientras los métodos *outranking* clasifican las distintas alternativas mediante comparaciones directas de las mismas a través de diversas herramientas, los métodos basados en función de valor, implementan una función que asigna un número real a cada alternativa, permitiendo así la evaluación de cada una.

[2]La teoría de la decisión multicriterio, al igual que en la mayoría de las ramas científicas se ha desarrollado en la literatura científica hablada y escrita en inglés. La traducción al castellano de la palabra *outranking* sería algo así como *sobreclasificación*, lo que no da una idea real de cómo actúan estos métodos y, además, carece de sentido en castellano. Por ello, se utilizará el término anglosajón para referirse a estos métodos.

Por tanto, es importante elegir el modelo que se va a utilizar de forma que sea el que más se ajuste a la realidad del problema planteado, lo que se corresponde con la forma que va a adquirir la función de valor/utilidad o la herramienta que se implemente en los métodos *outranking.*

Entre los métodos outranking es posible destacar ELECTRE[3] y sus variantes (Roy, B.: The outranking approach and the Foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decisions, vol. 31(1).* 1991; Hokkanen, J., Salminen, P.: ELECTRE III and IV decision aids in an environmental problem , *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 6(4).* 1997; T., Mousseau, V.: Using assignment examples to infer category limits for the ELECTRE TRI method, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 11(1).* 2002), PROMETHEE[4] (Mareschal B., Brans, J.P.: Geometrical representations for MCDA. The GAIA Module, *European Journal of Operational Research, vol. 33.*1988; Brans, J. P., Vincke, P.H., A preference ranking organization method, the PROMETHEE method, Management Science, vol. 31. 1985), MAPPAC y PRAGMA[5] (Matarazzo, B.: A pairwise Criterion Comparison Approach: The MAPPAC and PRAGMA methods, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Spinger Verlag, Berlin, 1990), IDRA[6] (Greco, S.: A new PCCA method: IDRA, *European Journal of Operational Research, vol. 98.3.* 1997), PACMAN[7] (Giarlotta, A. : Passive and active compensability multicriteria analysis (PACMAN), *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol 7(4).* 1998), ORESTE[8] (Leysen, J., Pastijn, H.: Constructing an outranking relation with ORESTE, *Mathematical and Computer modelling, vol. 12(10-11).* 1989), y TACTIC[9](Vasnick, J-C.: On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research, vol. 24.* 1986).

[3]ELECTRE es el acrónimo de ELimination Et Choix Traduisant la REalité.

[4]PROMETHEE es el acrónimo de Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations.

[5]MAPPAC es el acrónimo de Multicriterion Analysis of Preferences by Means of Pairwise Actions and Criterion Comparision, mientras que PRAGMA lo es de Preference Ranking Global Frecuencies in Multicriterion Analysis.

[6]IDRA es el acrónimo de Intercriteria Decision Rule Approach.

[7]Passive and active compensability multicriteria analysis

[8]ORESTE proviene de Organisation, Rangement et Synthèse de Données Relationnelles.

[9]TACTIC proviene de Treatment of the Alternatives According to de Importance of Criteria.

Por su parte, entre los métodos basados en función valor, caben destacar AHP[10] (Saaty, T. L.: A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology, vol. 15.* 1977; Saaty, T. L.: Axiomatic foundation of the Analytic Hierarchy Process, *Management Science, vol. 32(7).* 1986), SMART[11] (Edwards, W., Von Winterfeld, D.: *Decision analysis and behavioral research.* Cambridge University Press. 1986), REMBRANDT[12] (Lootsma, F. A.: The REMBRANDT system for multi-criteria decision analysis via pairwise comparisons or direct rating, *Report 92-05, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology.* Delft, Netherlands. 1992; Van Den Honert, R. C.: Stochastic Pairwise Comparative Judgements and Direct Ratings of Alternatives in the REMBRANDT System, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 7.* 1998), y MACBETH[13] (Bana e Costa, De Corte, J-M., C.A., Vasnick, J-C.: MACBETH, *London School of Economics Operations Research Working Paper 03.56*).

La función de valor[14] se aplica a los valores que adquiere cada opción en cada uno de los criterios. De este modo, si no se tiene en cuenta el conjunto de alternativas específico del problema, se puede decir que una función de valor $v : R^k \longrightarrow R$ asigna un número $v(\vec{c})$ a cada consecuencia $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$, donde c_i es el nivel que alcanza el criterio C_i, por lo que dicha función se configura como herramienta clave para ordenar las distintas opciones según el valor que alcancen éstas en los distintos criterios. Por tanto, si se aplica al valor que alcanza una alternativa a_j en cada uno de los criterios, se puede escribir:

$$v(a_j) = v(\vec{c}(a_j)) = v(C_1(a_j), C_2(a_j)..., C_k(a_j))$$

Esta función se puede definir sobre cualquier punto del espacio de consecuencias, como $v(\vec{c_i})$ que expresaría el valor alcanzado por la combinación i de valores de los criterios, es decir, del punto $\vec{c_i}$ del espacio de consecuencias, aunque este no sea alcanzado efectivamente por ninguna alternativa.

[10] AHP es el acrónimo de Analytic Hierarchy Process.

[11] SMART es el anacronismo de Simple Multiattrubute Rating Technique.

[12] REMBRANDT es el anacronismo de Ratio Estimation in Magnitudes or Deci-Bells to Rate Alternatives which are Non-Dominated.

[13] MACBETH proviene de Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique.

[14] En adelante, sólo para este capítulo, se tomará la función de valor como elemento genérico que permite evaluar cada alternativa.

La función de valor puede ser ordinal si:

$$v(\vec{c}_1) \geq v(\vec{c}_2) \Longleftrightarrow \vec{c}_1 \succeq \vec{c}_2$$

es decir, si un mayor valor en la función de valor de una combinación de valores de los criterios implica que esa combinación de valores de criterios es preferible a otra que alcance un menor valor en la función de valor. Este tipo de expresiones de la función de valor se utilizan con frecuencia en los métodos *outranking* .

También puede ser una función mesurable si, además de la condición anterior, cumple que:

$$v(\vec{c}_1) - v(\vec{c}_2) \geq v(\vec{c}_3) - v(\vec{c}_4) \Longleftrightarrow (\vec{c}_1 \longleftarrow \vec{c}_2) \succeq (\vec{c}_3 \longleftarrow \vec{c}_4),$$

lo que indica que el cambio de la situación $\vec{c}_2$ a la $\vec{c}_1$ es como mínimo tan bueno como el cambio de $\vec{c}_4$ a $\vec{c}_3$, es decir, es capaz de medir la fuerza de la preferencia.

Por último, como ya se adelantó en el exordio entorno a Fuzzy MAUT, es necesario mencionar que muchos de los métodos nombrados han sido tratados y ampliados desde la óptica fuzzy (Dias, L.C., Mosseau, V.: Fuzzy outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures, *DIMACS Research Report 2001-27*, Rutges University. 2001 ; Chen, L., Chen, Y-H., Wang, T-C.: Method for evaluating IS outsourcing suppliers, *Fuzzy Systems and Knoledge Discovery, vol. 3.* 2008; Ertugrul, I., Karakasoglu, N.: Comparison of fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods for facility location selection, *International Journal of Advance Mnufacturing Technology, vol. 39.* 2008; Diaz, B., Morillas, A., González, J.: Análisis de concordancia comparativa difusa, *Estadística Española, vol. 39.* 1997).

4. A continuación, es necesario establecer unas reglas de preferencia entre las distintas alternativas que permitan una clasificación de éstas.

   - De esta forma, para dos alternativas $a_j, a_h \in A$, se establece que a_j es estrictamente preferida a a_h

     $$a_j \succ a_h$$

     si la alternativa a_j es mejor que la a_h para el problema planteado, es decir, $v(a_j) > v(a_h)$.

   - De la misma manera, a_j es débilmente preferida a a_h

     $$a_j \succeq a_h$$

si la alternativa a_j es como mínimo tan buena como a_h para el problema planteado, es decir, $v(a_j) \geq v(a_h)$.

- Una alternativa a_j es indiferente respecto a a_h

$$a_j \sim a_h$$

si el decisor, a la hora de elegir entre ambas alternativas, obtiene la misma satisfacción al elegir una u otra, es decir, no sentiría ninguna decepción si se viera forzado a escoger una en vez de la otra. Esto es $v(a_j) = v(a_h)$. Si dos alternativas son indiferentes considerando un conjunto k de criterios, se dice que pertenecen a la misma *superficie de indiferencia*[15], que por tanto, es la representación geométrica del conjunto $I = \{\vec{c_i} \in K' \setminus \vec{c_i} \sim \vec{c_h}, \quad i, h \in K'\}$, donde, como ya se indicó, $\vec{c_i}$ y $\vec{c_h}$ indican dos combinaciones distintas de los valores alcanzados por los criterios. Nótese que la superficie de indiferencia se define para todos los valores posibles de los criterios, incluidos los que no son alcanzados por ninguna de las alternativas tratadas en el problema de análisis multicriterio.

5. Para dotar de cierta consistencia lógica y racionalidad al proceso de toma de decisiones, se deben asumir una serie de axiomas que delimiten las reglas en las que se debe desarrollar el proceso de toma de decisiones:

    1. Comparabilidad. Todo par de alternativas debe ser comparable, es decir,
    $\forall a_j, a_h \in A$, $a_j \succeq a_h$, o, $a_h \succeq a_j$, o, $a_j \sim a_h$
    2. Transitividad.
    $\forall a_j, a_h, a_l \in A$, si $a_j \succeq a_h$ y $a_h \succeq a_l, \Longrightarrow a_j \succeq a_l$
    3. Consistencia de la indiferencia y preferencia débil.
    $\forall a_j, a_h \in A$, $a_j \sim a_h \Longleftrightarrow (a_j \succeq a_h$ y $a_h \succeq a_j)$
    4. Consistencia de la preferencia fuerte y débil. Una alternativa es preferida a otra sí y sólo sí, el decisor no piensa que esta última es como mínimo, tan buena como la primera:
    $\forall a_j, a_h \in A$, $a_j \succ a_h \Longleftrightarrow \neg(a_h \succeq a_j)$

    Además, el cumplimiento de los axiomas 1 y 4 garantizan la reflexividad en este sistema axiomático.

[15] En el caso de que $k = 2$, esta superficie sería una curva de indiferencia. Este caso es de especial interés para la representación gráfica.

2.1.2. Construcción de una representación matemática del modelo de decisión multicriterio

Con estas reglas y definiciones, ya se puede plantear de forma general un problema de decisión multicriterio estándar.

De esta forma, el objetivo del decisor será encontrar la mejor alternativa de entre las posibles, esto es, hallar $a^* \in A$ tal que:

$$a^* \succeq a_j \quad \forall a_j \in A$$

o, en términos de la función de valor:

$$v(\vec{c}(a^*)) \geq v(\vec{c}(a_j)) \quad \forall a_j \in A$$

Por lo tanto, el problema se reduce a la optimización de la función de valor en el espacio de las alternativas posibles. Esto es:

$$\max_{a_j \in A} v(\vec{c}(a_j))$$

Fases de un problema de decisión multicriterio

Una vez que se ha definido la forma matemática del problema de análisis multicriterio, se pueden reformular la etapas adaptándolas al caso particular de la actuación de varios criterios y al lenguaje y las definiciones desarrolladas.

1. Identificar los objetivos. El decisor debe identificar los objetivos, esto es, el tipo de función v que desea maximizar[16]. Esta función objetivo puede adquirir la forma de una función de beneficios, de utilidad, de consumo,... Obviamente, su forma final no se obtendrá hasta que se hayan completado las 2 fases siguientes.

2. Identificar las alternativas que permiten alcanzar los objetivos. Esto es, definir los distintos a_j que componen el conjunto A de alternativas posibles y que por tanto son el conjunto de soluciones factibles al que está sujeto el problema de optimización

3. Identificar los criterios que permiten la comparación de las distintas alternativas. La forma en que se integren o combinen estos criterios

[16]Para el caso de que el objetivo último conste sólo de minimizar unos costes (monetarios o no), la función debe ser minimizada.

según su aportación a los objetivos del decisor, así como la naturaleza de los mismos delimitará finalmente la forma de v. Por tanto, es esencial identificar los C_i que conforman el conjunto $K \subset N$, y, por supuesto, el conjunto K' formado por los $\vec{c_i}$, que en el caso de que hagan referencia a una alternativa definen $\mathbf{C}^k \subset K'$. Es la identificación de estos elementos lo que posibilitará la evaluación de la función objetivo del problema de programación matemática.

4. Elección del modelo de decisión o clasificación multicriterio que se utilizará para generar la mejor alternativa, o una clasificación de éstas según el grado de consecución de los objetivos establecidos. Es decir, establecer el método con el que resolver el problema de optimización que se plantea mediante el tratamiento de los $\vec{c_i}$ que generan el valor de v.

5. Elegir la mejor alternativa tras aplicar el método seleccionado. El método generará la mejor solución, esto es a^*, que será, normalmente, la que el decisor adoptará como decisión. Los métodos que tratan con funciones de valor mesurables, además pueden establecer una clasificación de las alternativas e indicar cuanto mejor es una sobre otra.

6. Realizar análisis de sensibilidad. El planteamiento matemático del problema nos permite realizar un análisis sobre cual sería el resultado o el efecto sobre la opción final, de cambiar alguno de los factores que intervienen en el problema, bien en el conjunto factible de alternativas, o bien en cualquiera de los elementos que forman la función objetivo.

7. Todo buen método debe de tener un proceso de retroalimentación o "feedback", es decir, utilizar los resultados obtenidos tras la implementación del modelo para mejorarlo en futuras aplicaciones.

Capítulo 3

Teoría de la Utilidad

El único medio para medir la utilidad[1] de las cosas consiste en utilizar una escala subjetiva de gustos que muestre teóricamente un registro estadístico de la utilidad del consumo que se hace. Sin embargo, existen otras razones por las cuales también puede obtenerse satisfacción y no es precisamente utilidad. En la teoría de la utilidad clásica, se supone que los consumidores poseen una información completa acerca de todo lo que se relacione con su decisión de consumo, pues conoce todo el conjunto de bienes y servicios que se venden en los mercados. Además, para la decisión de consumo final, deben conocer el precio exacto que tienen y que no pueden variar como resultado de sus acciones como consumidor. Adicionalmente también conocen la magnitud de sus ingresos.

Por tanto, la actitud de consumo de bienes será diferente para cada uno de ellos, independiente de la satisfacción que deseen obtener. De lo anterior se deriva la idea de definir la utilidad como la cualidad que vuelve deseable a un bien.

La utilidad de los bienes no podrá medirse jamás, pero sí puede calcularse mediante procedimientos matemáticos de inferencia.

La teoría de la utilidad del consumidor se basa en los axiomas de ordenación de preferencias. Éstos ya fueron incluidos en el capítulo anterior, pero a ellos se le debe añadir un axioma más para poder definir la utilidad en términos

[1] La diferencia entre lo métodos basados en función de utilidad y los de función de valor propiamente dichos es la presencia de incertidumbre en la toma de decisiones, aunque sin embargo, la filosofía que subyace de ambos es la misma, esto es, la posibilidad de mostrar la preferencia del decisor entre varias alternativas a través de una función capaz de asignar una valoración a cada una de ellas.

formales:

5. Continuidad: Un orden de preferencias es continuo si, para cada $a_j \in A$, los conjuntos $\{a_h \in A \mid a_h \succeq a_j\}$ y $\{a_h \in A \mid a_j \succeq a_h\}$ son cerrados.

De esta forma, si la ordenación de preferencias cumple los axiomas 1-4 y 5, entonces las preferencias se pueden representar a través de una función de utilidad continua U, con valores reales, definida en A de tal forma que el orden de preferencias sobre A se preserva por la magnitud de U.

3.1. El ambiente de incertidumbre: la utilidad esperada

El manejo de situaciones de incertidumbre a través de la teoría de la utilidad ha recibido tradicionalmente un enfoque probabilístico. En este ámbito, la teoría de la utilidad esperada de Von Neuman y Morgenstein (Von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and economics behaviour*. Princeton University Press. 1944) ha protagonizado la mayoría de los acercamientos al tratamiento de la utilidad en ambientes inciertos, y se ha constituido en la base de numerosos avances y aportaciones en este ámbito.

Esta teoría mantiene que si se puede asignar una utilidad a cada posible consecuencia, y es posible calcular la probabilidad de que ésta ocurra, entonces, la mejor alternativa es la que obtiene mayor utilidad esperada, calculada ésta a través de la agregación de las utilidades de las posibles consecuencias de esta acción ponderadas por las probabilidades de que éstas ocurran. Es decir, si $\{1, 2, ..., m\}$ son los distintos escenarios que pueden acontecer, y $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ son las probabilidades de que acontezcan, la utilidad esperada vendrá dada por:

$$E(U) = p_1U_1 + p_2U_2 + ... + p_mU_m,$$

donde U_i es la utilidad obtenida en el escenario i-ésimo.

La teoría de la utilidad esperada se basa también en axiomas sobre las distribuciones de probabilidad. Si se nombra $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_m\}$ al conjunto de distribuciones de probabilidad asociadas al conjunto de consecuencias posibles, $\forall\lambda \in (0, 1)$, los axiomas de la teoria de la utilidad esperada son:

1. Orden: $\succeq$ es un orden débil.

2. Continuidad: Si $p_i \succeq p_l \succeq p_t$, entonces, $\exists\alpha \in (0,1), \beta \in (0,1)$ tales que:

$$\alpha p_i + (1-\alpha)p_t \succeq p_l \succeq \beta p_i + (1-\beta)p_t.$$

3. Independencia:

$$\text{Si } p_i \succeq p_l, \text{ entonces } [\lambda p_i + (1-\lambda)p_t] \succeq [\lambda p_l + (1-\lambda)p_t], \forall p_t \in \mathcal{P}$$

Si se cumplen estos axiomas, se podrá obtener una función de utilidad esperada que represente las preferencias del consumidor.

3.2. Teoría de la utilidad multicriterio (MAUT)

Los métodos MAUT (Multi-Attribute Utility Theory) calculan la utilidad de cada alternativa en cada criterio para después proceder a su agregación.

MAUT incorpora preferencias e incluso incertidumbre en la utilidad sobre los criterios a la hora de determinar su peso (constante de escala w_i) y función de utilidad marginal. Asumiendo las condiciones anteriores, para establecer una función de utilidad multiatributo, el decisor debe asignar una función de utilidad a cada criterio y, el decisor debe ser capaz de determinar los w_i a la utilidad marginal correspondiente al criterio i-ésimo.

De esta forma, para la inclusión de la incertidumbre externa, MAUT se basa en la utilidad esperada y requiere de las distribuciones de probabilidad subjetivas para las consecuencias inciertas (posibles c_i, valores en los criterios) para obtener la utilidad esperada de cada opción. Algunos autores han propuesto diferentes formas de generar distribuciones de probabilidad subjetivas para incorporarlas en la utilidad marginal (Andrews, R.W.: Methods of estimating a power utility function, *Working Paper 126, Graduate School of Business Administration*, University of Michigan, Michigan. 1976). Sin embargo, no es posible ocultar las dificultades de generar probabilidades subjetivas. Para paliar este problema se han intentado otras posibilidades. McDaniels (McDaniels, T. L.: A multiattribute index for evaluating environmental impacts of electric utilities, *Journal of Environmental Management, vol. 46*. 1996), por ejemplo, sugirió el uso de un índice de utilidad basado en la propia función de utilidad total multicriterio para sustituirlos por estas probabilidades.

Lo cierto, es que la estimación de la utilidad de cada criterio, principalmente por la inclusión en ellas de la probabilidad resulta un escollo en esta teoría. Sin embargo, a día de hoy es la más utilizada en campos como la microeconomía, en el que incluso se consiguen explicitar con forma funcional concreta estas funciones de utilidad marginales con métodos microeconométricos (Mora, J. J.: *Introducción a la teoría del consumidor : de las preferencias a la estimación*. Universidad ICESI. 2002; Colin, A., Trivedi, P.: *Microeconometrics. Methods and Applications*. Cambridge University Press. 2005).

Como ya se desarrollará en el cuerpo de la tesis, existen varios métodos para obtener la función de utilidad total a través de la agregación de las funciones de utilidad de cada criterio. De ellos, los más aplicados y tratados en MAUT son los generados a través de la utilidad aditiva.

Una clasificación muy aceptada de estos procedimientos se encuentra en E. Jacket-Lagreze y J. Siskos: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method, en *European Journal of Operational Research*, vol. 10. 1982. Según los autores, es posible distinguir tres tipos de procedimientos para determinar la utilidad de un decisor:

- Métodos directos en los cuales las utilidades marginales se estiman a partir de juicios de valor del decisor (a través de ratios, ránkings o preferencias en loterías) para cada criterio.
- Métodos de compensación en los que las utilidades marginales se estiman a partir de las compensaciones entre los criterios o alternativas, lo que normalmente requiere de las curvas de indiferencia[2]. Estos últimos métodos serán los utilizados en esta tesis doctoral para estimar funciones de utilidad fuzzy con forma explícita. Se desarrollarán en la siguiente parte del documento.

Estas dos clases de métodos se encuentran bien analizados en P. Fishburn: "Methods of estimating additive utilities", en *Management Sciences*, vol. 13, 1967.

- El tercer grupo de métodos se basa bien en la observación de elecciones del conjunto A hechas por uno o varios individuos anteriormente, bien en el conocimiento de las preferencias subjetivas sobre el conjunto A, pero siempre intentando estimar una función aditiva tan consistente

[2]Las curvas de indiferencia son superficies que representan combinaciones de cantidad o valores que proporcionan el mismo nivel de utilidad.

como sea posible con las elecciones observadas o las preferencias subjetivas conocidas. Entre estos métodos, se pueden nombrar el análisis discriminante, la regresión lineal múltiple, los métodos de Wagner, ORDREG (Ordinal Regresion), DISQUAL (Disqualification Method, y el método UTA de Jacket-Lagreze y Siskos. Debido a que esta tesis intenta obtener una forma funcional explícita de la función de utilidad, para lo que estos métodos no proporcionan las herramientas adecuadas, no se va a entrar a detallar ninguno de estos últimos, si bien, debido a su gran importancia y desarrollo, se van a señalar brevemente en este capítulo algunos métodos de este grupo descritos en la literatura de la utilidad.

Los siguientes métodos se encuadran dentro de la utilidad multriatibuto aditiva e intentan estimar las utilidades prescindiendo de su forma funcional. Sin embargo, al no ser el objeto de esta tesis, sólo se muestran de modo descriptivo.

3.3. Métodos UTA (Utilitès Additives)

En el marco general MAUT, la metodología UTA infiere la utilidad aditiva usando la programación lineal, buscando en todo caso la máxima consistencia con las preferencias del decisor. Estos métodos desisten de la búsqueda de una forma funcional explícita de la función de utilidad. En su lugar, estiman los valores finales de éstas en una escala de 0 a 1.

Como se adelantó, el modelo UTA adquiere la forma aditiva:

$$U(\vec{c}) = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i(c_i),$$

sujeto a las restricciones de normalización:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ \\ u_i(c_i^+) = 1, \quad u_i(c_i^-) = 0, \quad \forall i \in I \end{cases}$$

donde $u_i, \forall i = 1, ..., k$ son las funciones de utilidad marginal monótona no decreciente correspondiente a los distintos criterios, y normalizadas entre 0 y 1, y w_i representa el peso de la función de utilidad del criterio i-ésimo, y, por tanto, será mayor mientras más importancia tenga ese criterio. c_i^+ y c_i^- son el mejor y peor nivel del criterio i-ésimo respectivamente.

Este modelo se puede simplificar aún más usando su forma equivalente no ponderada, donde:

$$U(\vec{c}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(c_i),$$

con las restricciones: $\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} u_i(c_i^+) = 1 \\ \\ u_i(c_i^-) = 0, \quad \forall i \in I \end{cases}$

Para estimar la utilidad marginal, Jacket-Lagreze y Siskos (Jacket-Lagreze, E., Siskos, J.: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method, en *European Journal of Operational Research*, vol. 10. 1982) usan la interpolación lineal. Si los valores c_i^+ y c_i^- son finitos y es posible dividir el intervalo cerrado comprendido entre ellos, esto es: $[c_i^-, c_i^+]$ en $(\alpha_i - 1)$ intervalos iguales $[c_i^t, c_i^{t+1}]$, donde α_i es determinada para indicar el número de puntos de estimación que se van a usar para determinar la utilidad marginal del criterio i-ésimo, el punto c_i^t vendrá determinado por:

$$c_i^t = c_i^- + \frac{t-1}{\alpha_i - 1} c_i^{t+1} - (c_i^t), \quad \forall t = 1, ..., \alpha_i.$$

Por lo tanto, la función de utilidad marginal sobre la alternativa a_j se aproxima mediante interpolación lineal, de forma que para a_j tal que $C_i(a_j) \in [c_i^t, c_i^{t+1}]$:

$$u_i(C_i(a_j)) = u_i(c_i^t) + \frac{C_i(a_j) - c_i^t}{c_i^{t+1} - c_i^t}[u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t)].$$

Como la presencia en los errores de percepción en la medición del valor de cada alternativa, e incluso en la forma de la utilidad total son posibles, lo cierto es que lo más adecuado es introducir un término de error de forma que:

$$U'(C(\vec{a_j})) = \sum_{i=1}^{n} u_i(C_i(a_j)) + \varepsilon(a_j), \quad \forall a_j \in A,$$

con $\varepsilon(a_j)$ error potencial de la utilidad de a_j.

Como ya se indicó, las acciones están sujetas a un orden débil $R = \{P, I\}$ por lo que es posible escribir que:

$$U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) \geq \delta \Leftrightarrow a_j \succ a_h,$$

y

$$U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) = 0 \Leftrightarrow a_j \sim a_h,$$

donde δ es el valor positivo que se requiere para considerar significativa la diferencia entre dos alternativas sucesivas como para hacer una discriminación entre ellas. Este número no debe ser mayor a $1/Q$, donde Q es el número de clases de indiferencia en R. A continuación se aclara el concepto de Q.

Si en lugar de dos alternativas, se tienen en cuenta tres: a_j, a_h, a_s, es posible obtener tres clases de indiferencia de R :

$U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) \geq \delta$
$U'(C(\vec{a_h})) - U'(C(\vec{a_s})) \geq \delta$
y, a partir de las dos relaciones anteriores: $U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_s})) \geq 2\delta$.

Este mismo análisis se puede trasladar a I, de forma que si:

$$a_j I a_h, \text{ y } a_h I a_s \Rightarrow a_j I a_s,$$

lo que nos lleva a tres clases de indiferencia a partir de dos comparaciones (transitividad), y así sucesivamente. Por tanto, si se considera el orden débil R con Q clases de indiferencia, cada uno de ellos con n_q alternativas, $q = (1, ..., Q)$, no es necesario establecer todas las relaciones 2 a 2, pues algunas pueden resultar redundantes, como se mostró anteriormente, gracias a la propiedad transitiva. Por ello, es posible definir $R' = P' \bigcup I'$ como la subrelación de $R = P \bigcup I$ que excluye las redundancias.

Por otra parte, la monotonía creciente de la función de utilidad respecto al valor de los criterios, garantiza que:

$$u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq s_i, \quad t = 1, ..., \alpha - 1, \quad i = 1, ..., k,$$

donde s_i son los umbrales de indiferencia definidos para cada criterio. Varios autores, entre ellos Jacket-Lagreze y Siskos, han señalado que este análisis se puede simplificar, esto es, que el modelo se puede implementar sin tener en cuenta estos umbrales ($s_i = 0$). En este documento se adoptará esta última afirmación.

Con todos estos elementos, el modelo UTA básico para determinar la utilidad marginal se plantea a través del siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
\min_{u_1,u_2,\ldots,u_k} \quad & F = \sum_{a_j \in A} \varepsilon(a_j) \\
s.a. \quad & U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) \geq \delta \leftarrow a_j P' a_h \\
& U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) = 0 \leftarrow a_j I' a_h \\
& u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq 0 \\
& \sum_{i=1}^{k} u_i(c_i^+) = 1 \\
& u_i(c_i^-) = 0, \quad u_i(c_i^t) \geq 0, \quad \varepsilon(a_j) \geq 0
\end{aligned}$$

$i = 1, ..., k, \quad t = (1, ..., \alpha), a_j \in A$

El análisis post-optimalidad muestra que si en el óptimo $F^* = 0$, el poliedro que delimita la región factible para $u_i(c_i)$ es no vacío y, además, varias funciones de utilidad resultan en una perfecta representación del orden R a partir del orden R' usado. Sin embargo, si $F^* > 0$, es posible que aparezcan algunas soluciones menos satisfactorias en términos del orden R, si bien pueden ser satisfactorias en otros sentidos, como por ejemplo, el cumplimiento del criterio τ de kendall.

A partir de este método, se han desarrollado otros que han buscado estimar la utilidad marginal para proceder a su agregación. Algunos de ellos se muestran a continuación.

3.3.1. UTASTAR

En el método UTASTAR desarrollado por Siskos y Yannakopoulos (Siskos, J., Yannacopoulos, D.: UTASTAR-An ordinal regresion method for building additive value functions, *Investigaçao Operational, vol. 5(1).* 1985), se introduce un nuevo error adicional de forma que intente disminuir la dispersión provocada por la posible sobreestimación o subestimación. De esta forma, la expresión de la utilidad total queda:

$$U'(C(\vec{a_j})) = \sum_{i=1}^{n} u_i(C_i(a_j)) + \varepsilon^+(a_j) + \varepsilon^-(a_j), \quad \forall a_j \in A,$$

donde $\varepsilon^+(a_j)$ y $\varepsilon^-(a_j)$ son los errores de sobreestimación y subestimación respectivamente.

Si se realiza la siguiente transformación de variables:

$$\omega_{it} = u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq 0 \quad \forall i \in I, t = (1, ..., \alpha),$$

el problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\min_{u_1, u_2, \ldots, u_k} \quad & z = \sum_{a_j \in A} \varepsilon^+(a_j) + \varepsilon^-(a_j) \\
s.a. \quad & U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) \geq \delta \leftarrow a_j P' a_h \\
& U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) = 0 \leftarrow a_j I' a_h \\
& \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{\alpha_i} \omega_{it} = 1. \\
& \omega_{it} \geq 0, \quad \varepsilon^+(a_j) \geq 0, \quad \varepsilon^-(a_j) \geq 0
\end{aligned}$$

$i = 1, ..., k, \quad t = (1, ..., \alpha), a_j \in A$

En caso de que la solución no sea única, sino que haya varias cercanas, el análisis post-optimalidad lleva a encontrar la función de utilidad media de éstas que maximiza la siguiente función:

$$u_i(c_i^+) = \sum_{t=1}^{\alpha_i} \omega_{it}$$

sujeta al conjunto de restricciones anteriores más la siguiente adicional:

$$\sum_{j=1}^{n}[\varepsilon^{+}(a_j)+\varepsilon^{-}(a_j)] \leq z^{*}+\theta,$$

donde z^* es el valor óptimo del programa lineal anterior y, θ es un número real positivo muy pequeño.

3.3.2. Métodos Meta-UTA

Para el caso de que haya que llegar a la última fase del método UTASTAR por la existencia de soluciones próximas, Despotis y Yannacopoulos proponen minimizar las dispersiones de los errores. Para ello, usa el valor τ de Kendal[3] intentando determinar la existencia de una solución del programa lineal original de UTASTAR que lleve aparejado un orden R' tal que $\tau(R', R) > \tau(R^*, R)$, donde R^* es el orden correspondiente a la solución óptima del programa lineal original.

Por ello, en el análisis post-optimalidad se intenta minimizar la distancia entre el máximo ε_{max} y mínimo error ε_{min}. Usando la norma L_∞, el programa lineal generado en estas técnicas queda:

[3]El estadístico τ de Kendal es una medida de asociación para variables ordinales. Su expresión general es $\tau = \frac{2S}{n^2-n}$, donde S es la suma de unas medidas de las comparaciones posibles entre las observaciones de las dos variables ordinales o nominales, que adquieren valor +1 si hay concordancia entre las observaciones en un atributo y, -1 si hay discordancia.

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{u_1,u_2,\ldots,u_k} & \varepsilon_{max} \\
s.a. & U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) \geq \delta \leftarrow a_j P' a_h \\
& U'(C(\vec{a_j})) - U'(C(\vec{a_h})) = 0 \leftarrow a_j I' a_h \\
& u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq 0 \\
& \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(c_i^+) = 1 \\
& u_i(c_i^-) = 0, \quad u_i(c_i^t) \geq 0, \quad \varepsilon(a_j) \geq 0 \\
& \varepsilon_{max} - \varepsilon^+(a_j) \geq 0 \quad \forall a_j \in A \\
& \varepsilon_{max} - \varepsilon^-(a_j) \geq 0 \quad \forall a_j \in A \\
& \varepsilon_{max} \geq 0.
\end{array}
$$

$i = 1, ..., k, \quad t = (1, ..., \alpha), a_j \in A$

A pesar de que esta es la forma más conocida y utilizada de las técnicas Meta-UTA, se han desarrollado otras partiendo de los mismos objetivos. Siskos, Grigoroudis, y Matsatsinis en *Multiple Criteria Decision Analisys, State of the Art Surveys* (Edit:Figueira, Greco y Ehrgott) destacan las técnicas UTAMP. A continuación se citan las fuentes donde los autores las desarrollaron.

UTAMP1 aparece en M. Beuthe y G. Scannella: "Applications comparées des méthodes d'analyse multicritère UTA", en *RAIRO Recherche Opérationelle* nº30. 1996. Estos mismos autores muestran una nueva variante, UTAMP2, en "Comparative analysis of UTA multicriteria methods", en *European Journal of Operational Research* nº130. 2001.

3.3.3. Métodos UTA de clasificación

UTADIS[4] *Restringido*

[4] UTADIS proviene de Utilités Additives Discriminantes.

El objetivo de esta metodología es inferir la utilidad en el contexto de un problema que pretende clasificar las alternativas en unas categorías de preferencia predefinidas. El modelo restringido considera sólo la presencia de dos categorías, de forma que:

$a_j \in A_1 \Leftrightarrow U(\vec{C}(a_j)) \geq U_0$
$a_j \in A_2 \Leftrightarrow U(\vec{C}(a_j)) < U_0$

donde U_0 es el nivel de aceptación para incluir las alternativas en A_1, esto es, en la categoría de las mejores alternativas, o en A_2, esto es, en la categoría de las peores alternativas.

El programa lineal para la estimación de las utilidades queda:

$$\begin{aligned}
&\min_{u_1,u_2,\ldots,u_k} && \sum_{a_j \in A} \varepsilon(a_j) \\
&s.a. && \sum_{i=1}^{k} u_i(C_i(a_j)) - U_0 + \varepsilon(a_j) \geq 0 \quad \forall a_j \in A_1 \\
& && \sum_{i=1}^{k} u_i(C_i(a_j)) - U_0 - \varepsilon(a_j) \leq 0 \quad \forall a_j \in A_2 \\
& && u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq 0 \\
& && \sum_{i=1}^{k} u_i(c_i^+) = 1 \\
& && u_i(c_i^-) = 0, \quad u_i(c_i^t) \geq 0
\end{aligned}$$

$i = 1, ..., k, \quad t = (1, ..., \alpha), a_j \in A$

que, como puede observarse, es una variación del original UTA.

UTADIS Generalizado

Este método es la generalización del anterior para el caso en que se predefinan q categorías de alternativas, de forma que A_1 acoga las mejores y A_q las peores. De esta forma:

$a_j \in A_1 \Leftrightarrow U(\vec{C}(a_j)) \geq U_1$
$a_j \in A_l, \quad l = (2, 3, ..., q-1) \Leftrightarrow U_l \leq U(\vec{C}(a_j)) < U_{l-1}$
$a_j \in A_q \Leftrightarrow U(\vec{C}(a_j)) \leq U_{q-1}$

donde $U_1 > U_2 > ... > U_{q-1}$ son los umbrales determinados para clasificar a una alternativa en uno u otro grupo.

El programa lineal en este caso queda:

$$\min_{u_1,u_2,...,u_k} \quad \sum_{a_j \in A} \varepsilon^+(a_j) + \varepsilon^-(a_j)$$

$$s.a. \qquad \sum_{i=1}^{k} u_i(C_i(a_j)) - U_l + \varepsilon^+(a_j) + \varepsilon^-(a_j) \geq 0 \quad \forall a_j \in A_l$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(C_i(a_j)) - U_{l-1} - (\varepsilon^+(a_j) + \varepsilon^-(a_j)) \leq 0 \quad \forall a_j \in A_l$$

$$u_i(c_i^{t+1}) - u_i(c_i^t) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(c_i^+) = 1$$

$$u_i(c_i^-) = 0, \quad u_i(c_i^t) \geq 0, \quad \varepsilon(a_j) \geq 0$$

$i = 1, ..., k, \quad t = (1, ..., \alpha), \quad (l = 2, 3, ..., q-1) a_j \in A$

donde:

- $\varepsilon^+(a_j) = max\{0, U_l - U(\vec{C}(a_j))\}, \quad \forall a_j \in A_l \quad l = (2, 3, ..., q-1)$ refleja el error asociado al incumplimiento del límite inferior U_l de la categoría A_l por la alternativa $a_j \in A_l$. Es decir, marca un error asociado a una sobreestimación de a_j que llevaría a incluirla en una categoría superior a la que le correspondería sin ese error.

- $\varepsilon^-(a_j) = max\{0, U(\vec{C}(a_j)) - U_{l-1})\}, \quad \forall a_j \in A_l \quad l = (2, 3, ..., q-1)$ refleja el error asociado al incumplimiento del límite superior U_{l-1} de la categoría A_l por la alternativa $a_j \in A_l$. Es decir, marca un error asociado a una subestimación de a_j que llevaría a incluirla en una categoría inferior a la que le correspondería sin ese error.

De nuevo, Siskos, Grigoroudis, y Matsatsinis en *Multiple Criteria Decision Analisys, State of the Art Surveys* (Edit: Figueira, Greco y Ehrgott) reseñan los métodos UTADIS I, UTADIS II, y UTADIS III como variantes de éste que también intentan encajar las distintas alternativas en categorías. El procedimiento MHDIS (Multi-group Hierarchical Discrimination) también parte de la misma base.

UTADIS I se puede encontrar en C. Zopounidis y M. Doumpos: "A multicriteria decision aid methodology for the assessment of country risk ", en *European Research on Management and Business Economics* nº3. 1997.

UTADIS II se puede encontrar en C. Zopounidis y M. Doumpos: "A preference disaggregation decision support system for financial classification problems", en *European Journal of Operations Research* nº130. 2001.

UTADIS III se puede encontrar en C. Zopounidis y M. Doumpos: *Multicriteria Decision Aid Classification Methods* .Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

MHDIS se puede encontrar en C. Zopounidis y M. Doumpos: "Building additive utilities for multi-group hierarchical discrimination: The MHDIS method", en *Optimization Methods and Software* nº14. 2000.

3.4. Acerca del concepto de utilidad

La metodología expuesta en esta tesis doctoral trata la incertidumbre generada en el decisor de una forma diferenciada del enfoque probabilístico usado en la teoría de la utilidad esperada. Es por ello que utiliza la definición clásica de utilidad para aplicarles elementos de la teoría de conjuntos fuzzy como alternativa para tratar la incertidumbre.

El uso de herramientas fuzzy ya ha sido introducida por varios autores en la teoría de la utilidad multiatributo, si bien, como ya se indicó, ésta prescinde generalmente de una forma funcional y se centra en las interrelaciones entre criterios (Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., Matarazzo, B.: Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research, vol. 158.* 2004), las relaciones de preferencia (Orlovsky, S.A.: Decision making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Sys-*

tems vol. 1. 1978; Banerjee, A.: Fuzzy choice functions, revealed preference rationality, *Fuzzy Sets and Systems vol. 70.* 1995) o en el valor de utilidad final obtenida en los métodos UTA (Dean, P.-K. et al.: Product and cost estimation with fuzzy multi-attribute utility theory, *The Engineering Economist, vol. 44(4).* 1999). Esto hace que se apliquen elementos de la teoría de conjuntos fuzzy a la valoración final del consumidor, y no a algún elemento de la forma funcional de ésta, lo que limita enormemente el análisis posterior.

Otra limitación de los métodos MAUT proviene del conjunto de alternativas. Como ya se indicó, un problema de decisión parte de un conjunto de alternativas $A = \{a_1, ..., a_n\}$, y los métodos MAUT más comunes se han desarrollado para un número finito de alternativas. Sin embargo, el problema de decisión de consumo planteado parte de un conjunto $X = (x_1, x_2)$ que contiene tantas alternativas como posibles cantidades de los bienes X_1 y X_2, representadas por x_1 y x_2. Al ser estos bienes completamente divisibles, el conjunto X contendrá infinitas combinaciones de ambos. Además, los problemas de utilidad MAUT incorporan las restricciones económicas como un criterio más, mientras que la teoría de la utilidad del consumidor clásica las incorpora a posteriori como una restricción, conformando de esta forma un problema de programación matemática que se planteará en la tercera parte de la tesis.

Esta tesis introduce como gran novedad la fuzzyficación de los parámetros de la relación marginal de sustitución del consumidor previamente estimada en su forma funcional. A partir de ésta se obtendrá una forma funcional fuzzy de la utilidad del consumidor a la cual será posible aplicarle el análisis económico de optimalidad, esto es, maximizar la función de utilidad sujeta a las restricciones presupuestarias. Asimismo, toma un enfoque nulticriterio, pero sin entender como tal los costes monetarios, que se incluirán como restricción presupuestaria en el problema de optimización final, si bien la metodología que se desarrollará es también aplicable a un enfoque global o unicriterio. En la segunda parte de la tesis se profundizará en estos conceptos y en el planteamiento.

Capítulo 4

Teoría de conjuntos fuzzy

Los conjuntos fuzzy[1] se han consolidado como una potente herramienta para tratar la imprecisión en un abanico cada vez mayor de campos de las matemáticas. A continuación, se presenta a modo introductorio una serie de definiciones que servirán como base al desarrollo de esta tesis doctoral. Durante el desarrollo de la misma se irán ampliando estos conceptos e introduciendo los elementos de la teoría de conjuntos fuzzy necesarios.

Si X es una colección de objetos denotados genéricamente por x, entonces, un conjunto fuzzy $\tilde{A}$ en X es un conjunto de pares:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in X\},$$

donde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ se denomina función de pertenencia (o grado de pertenencia) de x en $\tilde{A}$, la cual proyecta X en el espacio de pertenencia M. El rango de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es un subconjunto de números reales no negativos cuyo supremo es finito.

A partir de esta definición, se desarrolla el concepto de núnero fuzzy como un caso especial de conjunto fuzzy en el que se cumplen las siguientes características:

1. $\sup \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \quad \text{ínf}\, \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$
2. $\forall \alpha \in [0, 1], \quad \tilde{A}_\alpha = \{x \in X|\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ es convexo. Al conjunto $\tilde{A}_\alpha$ se le denomina $\alpha - corte$.

[1]La traducción de la palabra fuzzy más cercana en el idioma castellano es ”difuso”, si bien en esta tesis se opta por mantener el término anglosajón.

3. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es continua al menos a tramos.

4. $\exists\{x_0 \in X | \mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1\}$.

A pesar de ser ésta la definición más extendida, existen una gran variedad de formas para definir un número fuzzy. En la segunda parte de la tesis se utilizará la definición alternativa recogida en Goetschel Jr. R., Voxman, W.: Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 18*. 1986. Sin embargo, esta aproximación no se introducirá aún hasta la segunda parte del documento.

Estos conjuntos se utilizan en conceptos donde el valor que se quiere representar no es claro o exacto debido a factores como la incertidumbre o la falta de información. Un ejemplo sería: "un número real cercano a diez", o "alrededor de ocho".

Como se desprende de la definición de número fuzzy, la función de pertenencia es el elemento que caracteriza a estos conjuntos, hasta el punto de que es posible clasificarlos según su función de pertenencia. Obviamente, habrá tantos tipos de números fuzzy como diversidad de expresiones de función de pertenencia, sin embargo, es posible identificar los más comunes:

1. Triangular:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(x - x_0 + \lambda), & x_0 - \lambda \leq x \leq x_0 \\ \frac{1}{\lambda}(x_0 + \lambda - x), & x_0 \leq x \leq x_0 + \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Donde x_0 es el valor más prometedor de pertenecer a $\tilde{A}$, o "de referencia" para su pertenencia. En el ejemplo "un número real cercano a diez", $x_0 = 10$, y λ es un parámetro que describe la falta de precisión de x_0 que se identifica con una posible desviación respecto a éste.

   Otra forma de definir los números fuzzy triangulares es identificarlo con una terna (a_1, a_2, a_3), donde a_2 tiene la misma interpretación que x_0 en el caso anterior, mientras que a_1 y a_3 son el menor y mayor valor que puede tomar el elemento x, esto es, el mayor y menor valor de $\tilde{A}$ respectivamente. En base a esto, se puede reescribir la función de

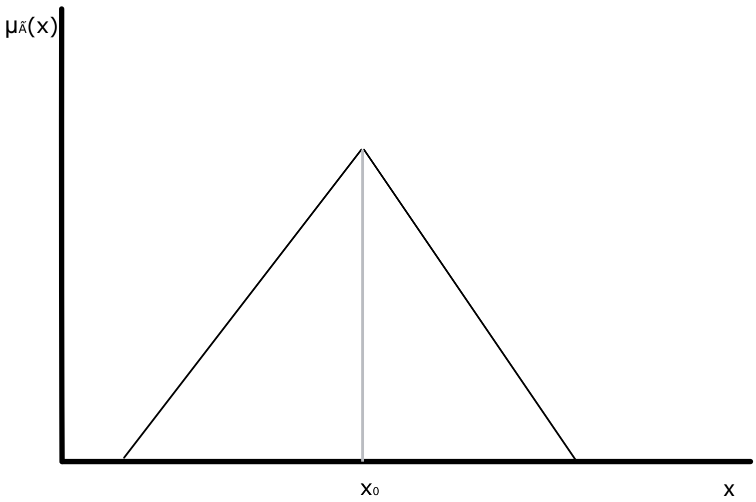

Figura 4.1: Función de pertenencia de un número fuzzy triangular

pertenencia de un número fuzzy como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\[2ex] \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\[2ex] 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Trapezoidal.

   De forma similar al triangular, es posible identificarlo a partir de un cuarteto (a_1, a_2, a_3, a_4), de forma que la función de pertenencia de un número fuzzy de este tipo adquiere la forma:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq x_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x > a_4 \end{cases}$$

   que lleva aparejada una forma gráfica trapezoide:

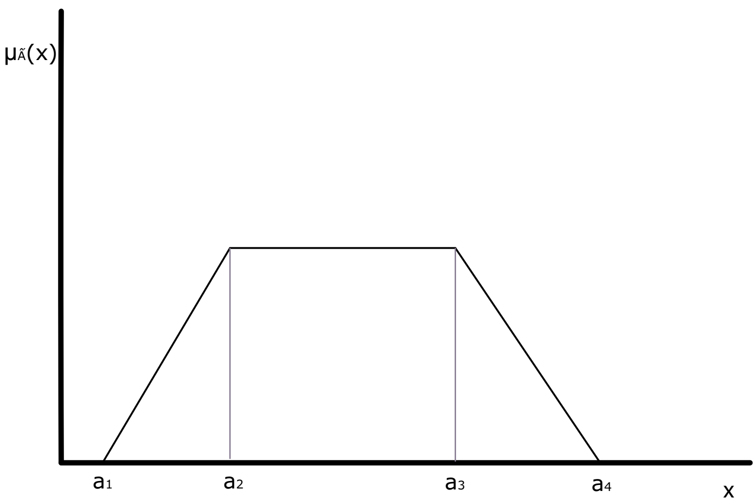

Figura 4.2: Función de pertenencia de un número fuzzy trapezoidal

3. Acampanado o Gaussiano:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right\}, \quad \sigma > 0$$

donde σ es un parámetro que será mayor cuanto mayor sea la falta de precisión.

Obviamente, como su nombre indica, la función de pertenencia de estos números fuzzy tendrán forma acampanada semenjante a la función de densidad de la distribución normal.

Como puede apreciarse, estos conjuntos tienen una cierta similitud con las variables aleatorias, pudiéndose incluso establecer una analogía entre el papel de la función de pertenencia en los conjuntos fuzzy con el de la función de probabilidad en las variables aleatorias, ya que ambas tratan de medir algún tipo de incertidumbre asociada a un valor usando para ello el intervalo $[0, 1]$ como rango. Un ejemplo claro de esto es la forma funcional que adoptan la función de pertenencia de un número fuzzy acampanado y la función de densidad de una variable aleatoria normal. Esta relación entre la teoría de conjuntos fuzzy y la teoría de la probabilidad ha sido objeto de amplias discusiones desde que Zadeh publicó su primer trabajo en 1965.

Todo esto ha llevado, en primer lugar a Zadeh, a desarrollar el concepto de "variable fuzzy" en Zadeh, L.A.: The concept of Linguistic variables and its applications to approximate reasoning. Part II, *Information Sciences, vol. 8 (4)*. 1975, posteriormente perfilado y mejorado por Steven Nahmias, como analogía al de variable aleatoria dentro de la terminología fuzzy. Una variable fuzzy no es más que una redifinición de un número fuzzy a partir de elementos que puedan tener analogía con los usados en la teoría de la probabilidad. Sin embargo, esta analogía sólo es una formalidad comparativa, ya que las variables aleatorias dentro de la teoría de la probabilidad y los números o variables fuzzy en la teoría de conjuntos fuzzy hacen referencias a diferentes tipos de incertidumbres y, por tanto, pretenden modelizar diferentes escenarios. Las variables aleatorias se corresponden con incertidumbres externas de tipo estocástico y, por tanto, pretenden asignar una probabilidad a un suceso, mientras que los números fuzzy hacen referencia a la imprecisión derivada de la incertidumbre interna sobre un suceso que ocurre. Así, por ejemplo, la afirmación *el* 60 *por ciento de los pacientes tienen la piel amarilla y el* 40 *por ciento normal*, indica que es posible modelar con probabilidades la división de los pacientes en uno u otro grupo, pero éstas no valdrán para modelar el adjetivo color de piel, de forma que la inclusión en una u otra categoría depende de la percepción del grado de palidez del individuo, lo cual es una imprecisión que escapa a las variables aleatorias y que es modelable mediante la lógica fuzzy. Es decir, la lógica fuzzy se emplea para razonar acerca de conceptos inherentemente vagos, como por ejemplo, el grado de inclusión de un paciente en el grupo con la piel es amarilla es de (0.3), un consumidor tiene un determinado sistema de preferencias con un grado de verdad de (0.6), o un parámetro alcanza un determinado valor con un grado de certidumbre de (0.8).

Parte II

Obtención de función de utilidad fuzzy del consumidor a través de la Relación Marginal de Sustitución Fuzzy (RMSF)

Para la obtención de una función de utilidad multicriterio, se requiere en primer lugar el tratamiento en el marco unicriterio para obtener las utilidades marginales y posteriormente agregarlas en busca de la función de utilidad total multicriterio[2]. En este punto es necesario introducir una primera aclaración debido al doble campo que conforma el pilar fundamental de esta tesis doctoral.

De una parte, la teoría económica aplica el concepto *marginal* al efecto provocado por un pequeño cambio a partir de la posición presente. De esta forma, en términos económicos, la utilidad marginal es la proporcionada por el consumo de la última unidad de un bien, y es de esta definición de donde procede el término relación marginal de sustitución (RMS) utilizado en esta tesis.

De otra parte, la teoría de la decisión multicriterio, y más específicamente la utilidad multicriterio, utiliza el concepto *marginal* para referirse a uno de los criterios que componen el problema de decisión. De esta forma, en términos de la teoría de la decisión, las utilidades marginales son las proporcionadas por cada uno de los criterios y que conjuntamente conforman la utilidad total.

Debido a que esta tesis se presenta como avance en la teoría de la decisión, se optará por esta última acepción del término *utilidad marginal* al referirse a la utilidad marginal.

La presente tesis se fija en la aplicación concreta a la teoría clásica del consumidor, si bien es posible generalizar estos desarrollos en otros contextos de toma de decisiones. Para la teoría del consumidor, se considerará una toma de decisión entre dos productos diferentes divisibles[3]. El consumidor elegirá la combinación de éstos que maximice su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria.

Obviamente, la microeconomía clásica ha tratado este problema básico añadiendo múltiples modificaciones para adaptarlo lo más posible a la toma de decisiones de un consumidor real. Por su parte, desde la teoría de la

[2]En adelante, hasta que no se aborde el problema de la agregación de utilidades marginales (unicriterio) para la obtención de la utilidad total (multicriterio), todo el análisis se hará desde una perspectiva unicriterio.

[3]Esta restricción se introduce para evitar problemas de programación lineal entera y el uso de ecuaciones en diferencias en lugar de en derivadas parciales. Estos bienes sin embargo cubren un gran porcentaje de las opciones de consumo humanas, como por ejemplo la mayor parte de los alimentos y, a nivel productor, la cantidad de materias primas. Sin embargo, los resultados obtenidos pueden ser adaptados a estos casos utilizando las herramientas adecuadas.

utilidad multicriterio, se ha introducido la metodología fuzzy para modelizar la incertidumbre interna del decisor que intenta maximizar su utilidad.

Estos métodos de utilidad fuzzy utilizados hasta la fecha, como ya se indicó, consideran como elemento difuso en la percepción del individuo la propia valoración en términos de utilidad de una alternativa, o la relación de preferencias que la propicia, esto es, el resultado de aplicar a una alternativa la función de utilidad asignada (esta función de utilidad puede ser implícita a través de valoraciones del decisor o bien, explícita si puede estimarse su forma funcional, sin embargo, la inclusión de lógica fuzzy en la relación de preferencias es el método más usado e implica prescindir de la forma funcional). Por otra parte, la lógica fuzzy, a través de los métodos fuzzy integral, ha permitido la agregación de criterios interdependientes[4] .

Sin embargo, esta tesis doctoral sostiene que esta visión parece poco cercana a la realidad de la toma de decisiones de un consumidor. Parece poco acertado suponer que el decisor sea capaz de asignar un número a su utilidad y tratar simplemente la posibilidad de falta de información o precisión de éste al realizar esta valoración.

Por ejemplo, si a un individuo se le pregunta por la utilidad de consumir 200 gr. de garbanzos y 300 gr. de lentejas , parece poco razonable que éste pueda dar un número y tratar su imprecisión fuzzyficando esta valoración.

Sin embargo, sí es posible prescindir de la valoración de la utilidad en un primer momento y plantear al decisor cuántas unidades de un producto intercambiaría por otro manteniendo la misma satisfacción (utilidad). Esta aproximación es mucho más realista y también es posible tratar la imprecisión del individuo en este intercambio debido a su falta de información o previsión mediante la metodología fuzzy. Este concepto responde al concepto

[4]Referencias sobre algunos trabajos en ambos sentidos se enumeran en las páginas 9 y 38. Para la inclusión de elementos fuzzy en la relación de preferencias del individuo, vease Orlovsky, S.A.: Decision making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Systems vol. 1.* 1978. Para el tratamiento fuzzy de valoraciones numéricas finales de utilidad, véase Dean, P.-K. et al.: Product and cost estimation with fuzzy multi-attribute utility theory, *The Engineering Economist, vol. 44(4).* 1999. Para el uso de la lógica fuzzy como herramienta de agregación de criterios interdependientes en los que el decisor tiene incertidumbre en la percepción del peso individual de cada uno de ellos, véase Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., Matarazzo, B.: Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research, vol. 158.* 2004. Además, se han desarrollado varios métodos en el ámbito general de la teoría de la decisión multicriterio aplicables al caso específico de la utilidad como una función de valor particular: Fodor, J. C., Roubens, M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multi-Criteria Decision Aid.* Kluwer Academic Publishers. 1994.

de Relación Marginal de Sustitución Fuzzy (RMSF), que además proporciona una base para la estimación de una forma funcional de la utilidad fuzzy.

Capítulo 5

Relación Marginal de Sustitución Fuzzy (RMSF)

Sean:

- U_i = Utilidad asociada a un atributo C_i (utilidad marginal de C_i), $i = 1, ...k$.
- Ω_i = Conjunto de posibles valores que puede alcanzar la utilidad.
- U_i^{ω} = Nivel de utilidad $\omega \quad (U_i(\cdot) = \omega), \quad \omega \in \Omega$.
- x_i = Cantidad del bien X_i.
- $U_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ = Utilidad proporcionada por la combinación de bienes $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Nótese que según la notación introducida en la teoría de la decisión multicriterio, $U_i(x_1, x_2, ..., x_n) = U(c_i(x_1, x_2, ..., x_n))$. Sin embargo, en el resto de la tesis, se utilizará la notación simplificada U_i para señalar la utilidad proporcionada por un valor del criterio i-ésimo.

Considérese en un principio sólo dos bienes. La curva de indiferencia de estos dos bienes será el conjunto:

$$I_{\omega} = \{(x_1, x_2) \setminus U_i(x_1, x_2) = \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_i\},$$

que no es otra cosa que una curva de nivel de la función de utilidad marginal correspondiente al criterio i-ésimo a la que pertenecen todas aquellas combinaciones de x_1 y x_2 que reportan un mismo nivel de utilidad.

La figura 5.1 muestra la representación clásica de unas curvas de indiferencia de bienes normales.

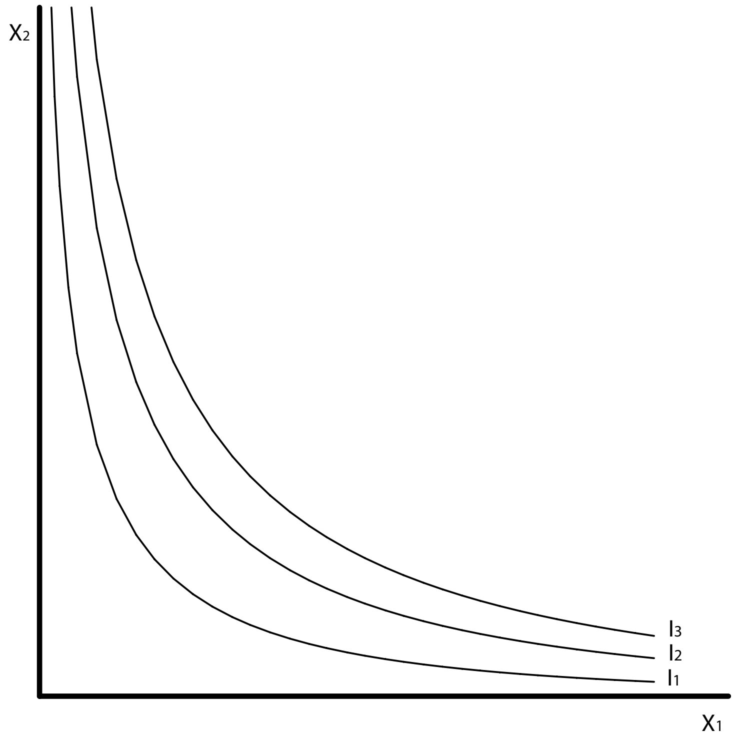

Figura 5.1: curvas de indiferencia estándar

La tasa marginal de sustitición de x_2 sobre x_1 indica la cantidad que se está dispuesto a renunciar del bien x_2 para consumir unidades adicionales del bien x_1 considerando sólo el criterio i-ésimo. Por lo tanto, vendrá dada por:

$$RMS_{21}^{i} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1},$$

donde el signo negativo se introduce para que la RMS_{21}^{i} sea positiva. Esto se debe a que la pendiente cambia a lo largo de la curva de indiferencia, puesto que cuanto menor sea la cantidad de x_1 y mayor la de x_2 que tiene el consumidor, más valorará los cambios marginales en x_1 en relación a los cambios marginales en x_2. Esto conlleva que el valor absoluto de la RMS_{21}^{i} disminuya conforme mayor es la cantidad de x_1.

Además, se tiene que:

$$\triangle U_i = \frac{U_i(x_1 + \triangle x_1, x_2) - U_i(x_1, x_2)}{\triangle x_1} \triangle x_1 + \frac{U_i(x_1, x_2 + \triangle x_2) - U_i(x_1, x_2)}{\triangle x_2} \triangle x_2$$

Si estas variaciones se realizan en la misma curva de indiferencia, entonces la utilidad permanece constante, y por lo tanto, $\triangle U_i = 0$, pudiendo escribirse:

$$-\frac{\triangle x_2}{\triangle x_1} = \frac{[U_i(x_1 + \triangle x_1, x_2) - U_i(x_1, x_2)]/\triangle x_1}{[U_i(x_1, x_2 + \triangle x_2) - U_i(x_1, x_2)]/\triangle x_2}$$

En el término de la derecha, el numerador indica el cambio que experimenta la utilidad al modificar el consumo del bien X_1, mientras que el denominador indica lo propio respecto al bien X_2. Por su parte, el término de la izquierda muestra la RMS^i_{21}. De esta forma, se obtiene la expresión cuando $\triangle \to 0$:

$$RMS^i_{21} = \frac{\partial U_i/\partial x_1}{\partial U_i/\partial x_2}$$

Si se dispone de una forma funcional explícita de la función de utilidad, es posible obtener la RMS^i_{21} también en su forma funcional a partir de la expresión anterior. Esta práctica es la habitual en los problemas microeconómicos, en los que se estima la forma de la utilidad a partir de regresiones[1], y a partir de ellas, se obtiene una función que representa la RMS^i_{21}. De esta forma, se puede decir que:

$$RMS^i_{21} = \frac{\partial U_i/\partial x_1}{\partial U_i/\partial x_2} = F(x_1, x_2; \vec{\beta}),$$

donde $\vec{\beta}$ es un vector de parámetros asociado a las preferencias subjetivas de cada individuo y que determina las características inherentes a la función de utilidad y la RMS^i_{21} de éste.

El camino inverso también es cierto mediante la resolución de la ecuación en derivadas parciales que representa. Sin embargo, si bien como se ha justificado anteriormente, resulta más obvio inferir una función para RMS^i_{21} debido a que los datos que puede dar el consumidor son más exactos en términos de intercambio de productos que de valoración de la utilidad, lo cierto es que

[1]Este tema está tratado ampliamente en la literatura microeconométrica. Véase por ejemplo John James Mora: *Introducción a la teoría del consumidor. De la preferencia a la estimación.* ICESI. 2002.

esta vía está ausente en el enfoque de los problemas de decisión de consumo, tal vez porque el paso de una función de utilidad a una RMS_{21}^i sea más fácil que el paso de ésta a aquella. Para obtener la forma funcional de la RMS_{21}^i también es posible recurrir a técnicas de regresión ampliamente conocidas adecuadas a los datos del decisor que no se van a tratar en esta tesis doctoral.

Fruto de estas estimaciones se han catalogado un gran número de funciones de utilidad y relaciones marginales de sustitución estándar para cestas de bienes según la naturaleza de éstos y que abarcan la práctica totalidad de los procesos de toma de decisiones de los consumidores. A lo largo del documento se irán introduciendo algunas de las más usadas.

El ambiente de incertidumbre

En una toma de decisiones basada en la utilidad, la incertidumbre se convierte en un elemento inherente a ésta. La incertidumbre implica que la correspondencia entre una combinación de bienes consumida (alternativa) y sus consecuencias en términos de valoración de ésta en el criterio en que se analiza la utilidad, no es directa o predecible. Normalmente se distinguen dos tipos:

1. De naturaleza externa: Proviene de factores del entorno y escapan del control del decisor.

2. De naturaleza interna: Son las que influyen de forma directa en la función de utilidad del decisor debido a sus errores en las valoraciones. Esta incertidumbre es la que se va a tratar a través de las variables fuzzy. Estas incertidumbres provienen, por ejemplo, de factores como:

    - Información parcial u obsoleta del consumidor.
    - Error en la interpretación del entorno o de sus necesidades de consumo.
    - Incertidumbre acerca de la influencia de cada decisión de consumo en su utilidad.

Es por ello que, como ya se ha razonado anteriormente, el valor de la RMS_{21}^i percibido será sólo una aproximación al valor real de ésta con la información de que dispone el consumidor en un ambiente de incertidumbre interna. Por esta razón, se considera más adecuado considerar la función de RMS_{21}^i como una variable fuzzy:

$$\widetilde{RMS_{21}}^{i} = \frac{\partial \tilde{U}_i / \partial x_1}{\partial \tilde{U}_i / \partial x_2} = F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

donde la tilde sobre algún elemento explica su carácter fuzzy.

Estas relaciones marginales de sustitución serán por tanto variables fuzzy con sus correspondientes funciones de pertenencia asociadas. Como ya se indicó en la introducción, las variables y los números fuzzy son la misma esencia vista desde diferentes perspectivas. Parece lógico identificar estas variables fuzzy con una función de pertenencia triangular, de forma que ésta alcance su máximo en los valores obtenidos a partir de las afirmaciones del decisor y descienda conforme nos alejamos de éste entre un máximo y un mínimo [2].

Se trata, por tanto de una representación de las preferencias de intercambio entre bienes cuyo valor no es preciso o "claro", esto es, representa una función o tasa de intercambio "cercana" a la real como consecuencia de la falta de precisión en las percepciones individuales o de información a la hora de realizar valoraciones.

[2] También es razonable asociar a estas variables una función de pertenencia gaussina o acampanada. Sin embargo, dos son los motivos para desechar esta idea. De un lado, un número fuzzy gaussiano admite todos los valores de la recta real. Si bien mientras más se alejan del centro, menor es el valor que alcanza la función de pertenencia en éstos, es más lógico pensar que los valores se encuentren en un intervalo cerrado. De otro lado, los números fuzzy triangulares son especialmente manejables para las operaciones donde se encuentren implicados. Los números fuzzy trapezoidales también podrían representar bien el comportamiento del parámetro. Por ello, la aproximación elegida en esta tesis es adaptable a parámetros fuzzy con cualquier tipo de función de pertenencia, con sólo cambiar las condiciones de diferenciabilidad que se darán más adelante.

Capítulo 6

La función de utilidad marginal fuzzy

Tomando como una aproximación más realista tratar la imprecisión del individuo a través de la relación marginal de sustitución, en vez del método clásico que la localiza directamente en la función de utilidad o en la valoración última de ésta (utilidad implícita), el siguiente paso es la obtención de una representación funcional de la utilidad. Para ello, es necesario partir de la relación marginal de sustitución. Este camino, es el inverso al que se sigue en la resolución de problemas de toma de decisiones del consumidor, en los que en primer lugar se infiere la función de utilidad para luego obtener la correspondiente relación marginal de sustitución. Sin embargo, como ya se ha argumentado, el enfoque propuesto en esta tesis doctoral parte de la premisa de que es mucho más preciso preguntar al decisor cuantas unidades de un producto está dispuesto a intercambiar por una unidad de otro, que pedirle directamente que asigne una utilidad a una combinación de bienes (los método UTA multicriterio introducidos en la parte de preliminares sólo necesitan que clasifiquen esas combinaciones en comparaciones una a una como preferidas, no preferidas, o indiferentes, si bien no explicitan una forma funcional para la utilidad ni son aplicables cuando hay infinitas alternativas, como en el caso planteado de consumo de bienes divisibles en los que hay infinitas combinaciones de productos posibles).

El reto, por tanto, consiste en pasar de una expresión de una variable fuzzy:

$$\widetilde{RMS}^i_{21} = \frac{\partial \tilde{U}_i / \partial x_1}{\partial \tilde{U}_i / \partial x_2} = F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

a esta otra variable fuzzy:

$$\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\tilde{\vec{\beta}}}),$$

para lo cual será necesario resolver la ecuación en derivadas parciales correspondiente.

Si bien las aplicaciones del cálculo infinitesimal en variables fuzzy han dado lugar a múltiples publicaciones en el campo de las ecuaciones diferenciales con componentes fuzzy produciendo un abanico de definiciones de soluciones a una ecuación diferencial fuzzy en función a los diferentes conceptos de derivada fuzzy propuestos[1], lo cierto es que las investigaciones dedicadas a las ecuaciones en derivadas parciales brillan por su escasez, si bien hay publicaciones como Buckley, J. J. y Feuring, T.:"Introduction to fuzzy partial differential equations", en *Fuzzy Sets and Systems, Vol.105.* que proponen una metodología basada en los distintos conceptos de derivadas fuzzy para encontrar la solución.

Este camino será el adoptado en esta tesis doctoral, obteniendo las directrices generales para encontrar las soluciones más fácilmente interpretables y análogas a los ambientes de certidumbre, asegurando que éstas son variables fuzzy. Dentro de este grupo se encuentran la derivada de Seikkala, la derivada de Buckley-Feuring, la derivada de Puri-Ralescu, y la derivada de Kandel-Friedman-Ming, si bien, estas dos últimas se valen de sustracciones abstractas de los conceptos fuzzy para su definición, alejándolas de una interpretación económica dentro de la teoría de la utilidad. Por tanto, a continuación se propondrá una metodología, -modificando el desarrollo mostrado por Buckley y Feuring para encontrar funciones soluciones de Buckley-Feuring- que representen funciones de utilidad fuzzy unicriterio a partir de la Relación Marginal de Sustitución Fuzzy propuesta en esta tesis. Este nuevo desarrollo adapta el propuesto por Buckley y Feuring a expresiones no polinomiales, como es el caso de la relación marginal de sustitución, y a otros intervalos de posibles valores alcanzables por las variables.

Sean:

- x_r = Cantidad del bien $X_r, r = 1, 2 \quad x_1 \in I_1 = (0, M_1], x_2 \in I_2 =$

[1]Las más importantes son la derivada de Seikkala, la derivada de Goetschel-Voxman, la derivada de Dubois-Prade, la derivada de Buckley-Feuring, la derivada de Puri-Ralescu, y la derivada de Kandel-Friedman-Ming. Un pequeño resumen descriptivo de ellas se puede encontrar en Buckley, J. J. y Feuring, T.:"Fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets and Systems, Vol.110.* 2000.

$(0, M_2]$. Como se puede observar, las cantidades de bienes consumidos deben ser positivas y no nulas, y están acotadas superiormente por un valor que indica el umbral de saturación del consumidor.

- $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$ = Utilidad fuzzy proporcionada por la combinación (x_1, x_2) en el criterio i-ésimo, $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) > 0$ y creciente, pues está tratando con dos bienes, por lo que el aumento del consumo siempre implica un aumento de la utilidad. $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$ debe ser continua con derivadas parciales D_{x_1}, D_{x_2} en $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

  No debe perderse de vista que esta función adopta la forma de un número fuzzy, de forma que $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \tilde{z}$.

- $$\widetilde{RMS}^i_{21} = \frac{\partial \tilde{U}_i / \partial x_1}{\partial \tilde{U}_i / \partial x_2} = F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

  relación marginal de sustitución que da lugar a una ecuación en derivadas parciales fuzzy en $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\beta})$. Sin pérdida de generalidad, ya que $\widetilde{RMS}^i_{21} = 1/\widetilde{RMS}^i_{12}$, se considerará que la RMS se hace del bien menos consumido sobre el más consumido, esto es, $x_1 > x_2$.

- $F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$ continua para $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

- $\tilde{\vec{\beta}} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, ..., \tilde{\beta}_n)$, es un vector de parámetros fuzzy asociado a las preferencias subjetivas de cada individuo y que determina las características inherentes a la función de utilidad marginal del criterio i-ésimo y la RMS^i_{21} de éste. Estos parámetros adoptan forma de número fuzzy triangular, con sus respectivas funciones de pertenencia. Para simplificar la notación, en este capítulo no se utilizarán índices que identifiquen a este vector de parámetros fuzzy con el criterio para el que actúa en la función de utilidad. Esto es debido a que la metodología introducida en esta parte de la tesis trata de obtener funciones de utilidad marginales para un criterio genérico, en este caso, el i-ésimo. En los siguientes capítulos en los que se trata la obtención de la función de utilidad fuzzy multicriterio, sí se recurrirá a índices para señalar el criterio al que pertenecen estos parámetros cuando sea necesario para evitar confusiones.

- $\mu_{\tilde{\beta}_j}(\beta_j)$ es la función de pertenencia de $\beta_j \in \tilde{\beta}_j$. Como ya se señaló, la función que recoge la relación marginal de sustitución procede de la inferencia realizada con las respuestas del consumidor sobre intercambios de productos. Los parámetros $\vec{\beta}$ inferidos de éstas son los que se consideran en un ámbito de incertidumbre que les dota de un carácter fuzzy, pudiéndose caracterizar a éstos como números fuzzy triangulares. Por ello, es común y aceptable, aunque en esta tesis se obvia optando por un enfoque más general, considerar que el elemento del número fuzzy $\tilde{\beta}_j$ con un mayor valor en la función de pertenencia sea el correspondiente al valor del parámetro estimado previamente, es decir, a_2 según la notación empleada en el capítulo de introducción a la teoría fuzzy, mientras que a_1 y a_3 los determinan el intervalo de valores posibles del parámetro, o en caso de que éstos sean de amplitud infinita, los valores en los que la RMS pasa a tender a 0 o infinito (el consumidor nunca estaría dispuesto a intercambiar alguno de los dos bienes).

- $\tilde{\beta}_j[\alpha] = \{\beta_j \mid \mu(\beta_j) \geq \alpha, \quad \alpha \in (0,1)\}$ conjunto denominado α-corte.

  Como estos conjuntos son cerrados y acotados, es posible escribir el α-corte en forma de intervalo. Para un número fuzzy $\tilde{\beta}_j : \tilde{\beta}_j[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, donde:

  - $b_1(\alpha)$ es el valor β_j más bajo a partir del cual $\mu_{\tilde{\beta}_j}[\beta_j] \geq \alpha, \quad \beta_j \in \tilde{\beta}_j$.
  - $b_2(\alpha)$ es el valor β_j más alto en el que $\mu_{\tilde{\beta}_j}[\beta_j] \geq \alpha, \quad \beta_j \in \tilde{\beta}_j$.

  Para el vector de parámetros, los α-corte se definen como $\tilde{\vec{\beta}}[\alpha] = \prod_1^n \tilde{\beta}_j[\alpha]$.

- $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})$ representa una expresión de coeficientes constantes en los operadores (D_{x_1}, D_{x_2}) aplicada sobre $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\beta})$. En el caso de la relación marginal de sustitución, esta expresión es el cociente entre ambas derivadas parciales.

De esta manera, la ecuación en derivadas parciales fuzzy se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$$

Esta ecuación fuzzy en derivadas parciales también puede partir de unas condiciones iniciales que dependan de otros parámetros fuzzy $\tilde{\vec{c}} = (\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_m)$. Sin embargo, estas condiciones iniciales no son necesarias en una decisión de consumo basada en la utilidad, pues están implícitas en los rangos de x_1 y x_2 y los axiomas de la utilidad.

Si no se tuviera en cuenta el carácter fuzzy de esta ecuación en derivadas parciales, la solución vendría dada por:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = G(x_1, x_2; \vec{\beta}),$$

con G continua $\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

En el caso fuzzy, esta función G adoptaría una forma:

$$\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

con G continua $\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. Nótese que en un principio, $\tilde{Y}_i$ sólo es la representación fuzzy de G, lo cual no significa que sea la solución a la ecuación en derivadas parciales fuzzy. En el caso de que finalmente sí lo sea, entonces: $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \tilde{Y}_i(x_1, x_2)$.

6.1. La solución de Buckley-Feuring (B-F)

Siguiendo las notaciones anteriores, sean:

$\tilde{Y}_i(x_1, x_2)[\alpha] = [y_1(x_1, x_2; \alpha), y_2(x_1, x_2; \alpha)]$, y

$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [f_1(x_1, x_2; \alpha), f_2(x_1, x_2; \alpha)], \forall \alpha$.

Entonces, por definición:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\}$,

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\}$ y,

$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{F(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\}$,

$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{F(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\}$,

$\forall x_1, x_2; \alpha$

Si al aplicar el operador $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})$ sobre $y_i(x_1, x_2; \alpha)$, se obtienen unas expresiones continuas $\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \quad \forall \alpha$, tales que:

- Para $0 < h \leq 1$:
  $\text{lím}_{\alpha \to h^-} \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; \alpha) = \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; h)$, y
  $\text{lím}_{\alpha \to h^-} \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_2(x_1, x_2; \alpha) = \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_2(x_1, x_2; h)$.

- $\lim_{\alpha\to 0^+} \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 0)$, y $\lim_{\alpha\to 0^+} \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 0)$.

Sería posible definir en este dominio la expresión $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$:

$$\Gamma(x_1, x_2; \alpha) = [\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha), \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)]$$

Si, para cada par $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$, $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ define un α-corte de un número fuzzy, entonces, se dice que $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$ es **diferenciable**, pudiéndose escribir:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2)[\alpha] = \Gamma(x_1, x_2; \alpha),$$

$\forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \quad \forall\alpha.$

Por tanto, es necesario comprobar si realmente $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ define un α-corte de un número fuzzy y así testar la diferenciabilidad de $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$. Para ello, las condiciones que debe cumplir $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ son, de acuerdo con Goetschel Jr. R., Voxman, W.: Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 18*:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha)$ es una función creciente y continua en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.
2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)$ es una función decreciente y continua en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.
3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1)$ para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

Una vez aclarado el concepto de diferenciabilidad de $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$, ya es posible definir la solución de Buckley-Feuring. $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$ es solución de Buckley-Feuring si cumple conjuntamente las siguientes condiciones:

1. $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$ es diferenciable.
2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$.
3. $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$ cumpla las condiciones iniciales establecidas en cada caso.

Obviamente, al ser verificada la diferenciabilidad de $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$, ésta será un número fuzzy. Para completar estas condiciones, sólo es necesario testar que:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

o lo que es equivalente:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = f_1(x_1, x_2; \alpha)$.
2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = f_2(x_1, x_2; \alpha)$.

$\forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \quad \forall\alpha.$

En este caso, ya se podría identificar $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$ con $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$.

A continuación se va a plasmar este procedimiento sobre algunas de las expresiones de utilidad y relación marginal de sustitución más comunes.

La función de utilidad fuzzy CES

La función de utilidad más utilizada surge como analogía directa a la teoría de la producción y es ampliamente aceptada como base para la representación de la utilidad reportada por dos bienes normales divisibles, por lo que es especialmente recomendada para decisiones de consumo de materias primas, donde la empresa se comporta como consumidor. Es la denominada función de utilidad CES (Constant Elasticity Substitution), aparecida por primera vez en 1961 propuesta por los grandes economistas Kenneth J. Arrow, Hollis Chenery, B.S. Minhas y Robert Solow, y adquiere la forma:

$$U_i(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1^\beta + \lambda_2 x_2^\beta)^{1/\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1$$

Los parámetros λ_1 y λ_2 hacen referencia a una predisposición inicial del consumidor por un bien u otro independientemente del criterio que se tiene en cuenta en la función de utilidad, mientras que β se define como se hizo con $\vec{\beta}$ anteriormente.

Puede observarse como:

$$RMS_{21}^i = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\beta-1} \qquad 0 < \beta \leq 1$$

Esta función CES, como ya se indicó, es representativa de funciones de utilidad muy presentes en la toma de decisiones, y como tal, forma curvas de indiferencia convexas típicas de bienes normales como la mostrada en la figura 5.1. Es por ello que se utilizará esta forma funcional como primer objeto de análisis de la metodología expuesta en esta tesis doctoral. En principio, no se tendrá en cuenta la subjetividad o predisposición inicial del consumidor por algún bien ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Como extensión, esta metodología también es aplicable a cualquier otra función de utilidad, obteniéndose resultados propios que no tienen por qué coincidir con los obtenidos para la función CES. Algunas de ellas se muestran en esta sección.

Con ello se pretende obtener una función de utilidad fuzzy que, si cumple las condiciones de solución anteriormente analizadas, podría coincidir con la función de utilidad CES original, sólo que "fuzzyficada" en el parámetro que acoge la imprecisión reflejada en la percepción de la convexidad de la curva de indiferencia.

En este caso, la ecuación en derivadas parciales de partida es:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i/\partial x_1}{\partial \tilde{U}_i/\partial x_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1$$

donde, correspondiéndose con la notación usada:

- $\tilde{\vec{\beta}}$ es unidimensional, correspondiéndose por tanto con $\tilde{\beta}$. Es necesario aclarar el significado que se le da a la expresión $0 < \tilde{\beta} \leq 1$ y otras similares que se encontrarán a lo largo del documento. Cuando afectan a un conjunto fuzzy, y mas concretamente a un número fuzzy, señala que cualquier elemento del conjunto $\tilde{\beta}$ posible para conformar la relación marginal de sustitución o la función de utilidad debe cumplir esta condición. En otras palabras, $\tilde{\beta}$ está contenido en el conjunto no fuzzy $(0, 1]$, es decir, $\tilde{\beta} \subseteq (0, 1]$. Este parámetro fuzzy tendrá asociada una función de pertenencia triangular $\mu(\beta)$. Además, según lo expuesto, a partir de sus α-corte, es posible asignarle $\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, donde:
    - $b_1(\alpha)$ es el valor de β más bajo a partir del cual $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta) \geq \alpha, \quad \beta \in \tilde{\beta}$.
    - $b_2(\alpha)$ es el valor de β más alto en el que $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta) \geq \alpha, \quad \beta \in \tilde{\beta}$.
- $\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}$
- $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) \longrightarrow \frac{\partial \tilde{U}_i/\partial x_1}{\partial \tilde{U}_i/\partial x_2}$,

Además, es necesario recordar que x_1 y x_2 están definidas en los intervalos I_1 e I_2 descritos anteriormente que además de ajustarse a la realidad en una toma de decisiones de consumo, sirven para garantizar la continuidad de las funciones implicadas.

Obviamente, resolviendo la ecuación en derivadas parciales exacta (sin considerar al parámetro como fuzzy), se obtiene la función de utilidad CES:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = G(x_1, x_2; \beta) = (x_1^{\beta} + x_2^{\beta})^{1/\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

Siguendo la metodología expuesta para encontrar soluciones de Buckley-Feuring en este tipo de expresiones, la fuzzificación de esta solución sería:

$$\tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) = \tilde{Y}_i(x_1, x_2) = (x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

que se constituiye en candidata a solución de Buckley-Feuring.

A partir de aquí es posible definir:

$\tilde{Y}_i(x_1, x_2)[\alpha] = [y_1(x_1, x_2; \alpha), y_2(x_1, x_2; \alpha)]$, y

$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta})[\alpha] = [f_1(x_1, x_2; \alpha), f_2(x_1, x_2; \alpha)], \forall \alpha.$

Por definición, al ser la función de utilidad CES creciente respecto a $\beta \in \tilde{\beta}[\alpha]$ se tiene:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{G(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; b_1(\alpha)),$

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{G(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; b_2(\alpha))$ y,

$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{F(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; b_1(\alpha)),$

$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{F(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; b_2(\alpha)),$

$\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \alpha$

y, por tanto, sustituyendo por sus expresiones:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = (x_1^{b_1(\alpha)} + x_2^{b_1(\alpha)})^{1/b_1(\alpha)}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = (x_1^{b_2(\alpha)} + x_2^{b_2(\alpha)})^{1/b_2(\alpha)}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

$$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$
$$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Como los rangos I_1 e I_2 y el carácter fuzzy de $\tilde{\beta}$ aseguran la continuidad de la expresión[2], el siguiente punto para ver si la función candidata a ser solución reune los requisitos, es ver si es diferenciable. Para ello, es necesario obtener $\Gamma(x_1, x_2; \alpha) = [\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha), \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)]$ y ver si realmente $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ define un α-corte de un número fuzzy triangular para cada par $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

Para el caso de la función de utilidad fuzzy CES sin valoraciones iniciales, se obtiene que:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$
$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Es sobre estas expresiones donde se debe comprobar si cumple las condiciones para definir un número fuzzy:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}$ es una función creciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

   La comprobación de este punto es sencilla desde el momento en que se tiene en cuenta que $b_1(\alpha)$ se define a partir de un α-corte de un número fuzzy triangular, como es el caso de $\tilde{\beta}$, y como tal, satisface que es creciente en α. Además, como se aclaró sin pérdida de generalidad que las relaciones marginales de sustitución se definirían para $x_1 > x_2; (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$, es obvio que $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha)$ es creciente en α y cumple esta condición.

[2]Los *alpha*-corte de un número fuzzy como $\tilde{\beta}$ siempre cumplen las condiciones de continuidad establecidas. Es por ello que éstas constituyen un requisito para definir *alpha*-corte de un número fuzzy triangular.

2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}$ es una función decreciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

   De nuevo, siguiendo el razonamiento anterior, al tener en cuenta que $b_2(\alpha)$ se define a partir de un α-corte de un número fuzzy triangular, como es el caso de $\tilde{\beta}$, y como tal, satisface que es decreciente en α. Esto unido a la relación $x_1 > x_2; (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ conlleva que $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)$ es decreciente en α y cumple esta condición.

3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1) \quad \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. En este caso:

   $$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

   Una vez más, como $\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ se define para un número fuzzy triangular, deberá cumplirse que $b_1(1) \leq b_2(1)$, y por tanto,

   $$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Por tanto, se está en condiciones de afirmar que

$$\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = (x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

es diferenciable y sigue siendo una buena candidata a solución de Buckley-Feuring. Para serlo, debe cumplir que:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2.$$

Para el caso de la función de utilidad fuzzy CES:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1} \text{ y,}$$

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}$$

y por tanto se demuestra que la función de utilidad simplificada CES fuzzyficada es solución de la ecuación en derivadas parciales producida por la relación marginal de sustitución fuzzy. En caso de que se establecieran unas condiciones iniciales, sólo habría que analizar si estas se cumplen en $\tilde{Y}(x_1, x_2)$. Sin embargo, en el problema de decisión planteado, estas condiciones se encuentran implícitas en los rangos I_1 e I_2.

Como ya se señaló, esta forma de la función de utilidad CES corresponde a la simplificación de la original propuesta por Arrow, Chenery, Minhas y Sollow:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = (\lambda_1 x_1^{\beta} + \lambda_2 x_2^{\beta})^{1/\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, lo que implica que no existe una predisposición inicial en el consumidor por un bien en concreto antes de valorarlo de acuerdo al criterio i-ésimo. Sin embargo, como se comprobará a continuación, la función CES original fuzzyficada

$$\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = (\tilde{\lambda}_1 x_1^{\tilde{\beta}} + \tilde{\lambda}_2 x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \geq 0$$

$\tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2$ no es tan buena candidata a función de utilidad fuzzy obtenida a partir de la relación marginal de sustitución fuzzy como su homóloga simplificada.

Los pasos a seguir para esta comprobación son los mismos seguidos anteriormente para la función de utilidad CES simplificada con el gran añadido de que en esta ocasión, el vector de parámetros es tridimensional, esto es, $\tilde{\vec{\beta}} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\beta})$, lo que puede influir en la diferenciabilidad de la función.

Para este caso, la ecuación en derivadas parciales de partida será:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i / \partial x_1}{\partial \tilde{U}_i / \partial x_2} = \left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2}\right) \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in (I_1 \times I_2),$$

Por lo que:

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2}\right) \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \geq 0,$$

$$(x_1, x_2) \in (I_1 \times I_2)$$

y

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})U_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) \longrightarrow \frac{\partial \tilde{U}_i/\partial x_1}{\partial \tilde{U}_i/\partial x_2},$$

Los parámetros fuzzy que forman el vector $\tilde{\vec{\beta}}$ tendrán asociados una función de pertenencia triangular $\mu(\lambda_i)$, y $\mu(\beta)$. A partir de sus α-corte será posible definir:

$\tilde{\lambda_1}[\alpha] = [l_1^1(\alpha), l_2^1(\alpha)]$,

$\tilde{\lambda_2}[\alpha] = [l_1^2(\alpha), l_2^2(\alpha)]$,

$\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, y

$\tilde{\vec{\beta}}[\alpha] = \tilde{\lambda_1}[\alpha] \times \tilde{\lambda_2}[\alpha] \times \tilde{\beta}[\alpha]$

Siguiendo el orden y la metodología expuesta anteriormente para la función de utilidad CES simplificada, la solución a la ecuación en derivadas parciales exacta será:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = G(x_1, x_2; \vec{\beta}) = (\lambda_1 x_1^{\beta} + \lambda_2 x_2^{\beta})^{1/\beta}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1,$$

que coincide con la función de utilidad CES.

La fuzzificación de esta solución se llevaría a cabo en los parámetros donde se introduce el error de percepción:

$$\tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \tilde{Y}(x_1, x_2) = (\tilde{\lambda_1} x_1^{\tilde{\beta}} + \tilde{\lambda_2} x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}},$$

con $0 < \tilde{\beta} \leq 1, \quad \tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2} \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$,

que se constituye en candidata a solución de Buckley-Feuring.

A partir de aquí es posible definir:

$\tilde{Y}_i(x_1, x_2)[\alpha] = [y_1(x_1, x_2; \alpha), y_2(x_1, x_2; \alpha)]$, y

$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [f_1(x_1, x_2; \alpha), f_2(x_1, x_2; \alpha)], \forall \alpha.$

Al igual que para el caso de la función de utilidad CES simplificada, al ser ésta creciente en los parámetros, por definición se tiene:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; l_1^1(\alpha), l_1^2(\alpha), b_1(\alpha))$,

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; l_2^1(\alpha), l_2^2(\alpha), b_2(\alpha))$

y,

$$f_1(x_1,x_2;\alpha) = \text{mín}\{F(x_1,x_2;\vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = F(x_1,x_2;l_1^1(\alpha),l_2^2(\alpha),b_1(\alpha)),$$

$$f_2(x_1,x_2;\alpha) = \text{máx}\{F(x_1,x_2;\vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = F(x_1,x_2;l_2^1(\alpha),l_1^2(\alpha),b_2(\alpha)),$$

$$\forall (x_1,x_2) \in I_1 \times I_2, \alpha$$

que sustituyendo por sus expresiones resulta, $\forall (x_1,x_2) \in I_1 \times I_2$:

$$y_1(x_1,x_2;\alpha) = (l_1^1(\alpha)x_1^{b_1(\alpha)} + l_1^2(\alpha)x_2^{b_1(\alpha)})^{1/b_1(\alpha)}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad l_1^i(\alpha) \geq 0$$

$$y_2(x_1,x_2;\alpha) = (l_2^1(\alpha)x_1^{b_2(\alpha)} + l_2^2(\alpha)x_2^{b_2(\alpha)})^{1/b_2(\alpha)}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \quad l_2^i(\alpha) \geq 0$$

$$f_1(x_1,x_2;\alpha) = \left(\frac{l_1^1(\alpha)}{l_2^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad l_1^i(\alpha) \geq 0$$

$$f_2(x_1,x_2;\alpha) = \left(\frac{l_2^1(\alpha)}{l_1^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \quad l_2^i(\alpha) \geq 0$$

El siguiente paso es comprobar la diferenciabilidad de $\tilde{G}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}})$, para lo que se debe analizar $\Gamma(x_1,x_2;\alpha) = [\varphi(D_{x_1},D_{x_2})y_1(x_1,x_2;\alpha), \varphi(D_{x_1},D_{x_2})y_2(x_1,x_2;\alpha)]$ para ver si efectivamente $\Gamma(x_1,x_2;\alpha)$ define un α-corte de un número fuzzy triangular para cada par $(x_1,x_2) \in I_1 \times I_2$.

Para el caso de la función de utilidad fuzzy CES, se obtiene :

$$\varphi(D_{x_1},D_{x_2})y_1(x_1,x_2;\alpha) = \left(\frac{l_1^1(\alpha)}{l_1^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}$$

$$0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad l_1^i(\alpha) \geq 0$$

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{l_2^1(\alpha)}{l_2^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}$$

$$0 < b_2(\alpha) \leq 1, \quad l_2^i(\alpha) \geq 0$$

Como un razonamiento análogo al usado para la función CES simplificada lleva a afirmar que las expresiones cumplen los requisitos de continuidad, las condiciones que deben cumplir, son:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha)$ es una función creciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)$ es una función decreciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1)$ para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

Si al testar estas condiciones sobre la forma funcional de $\tilde{Y}_i$ proporcionada por la función de utilidad CES fuzzyficada para el criterio i-ésimo, ésta cumple todos los puntos, se dirá que es diferenciable y por tanto es un número fuzzy y candidata a ser solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales fuzzy:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{l_1^1(\alpha)}{l_1^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}$ sólo será ceciente para $0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad l_1^i(\alpha) \geq 0$, si la tasa de crecimiento de $l_1^1(\alpha)$ es mayor que la de $l_1^2(\alpha)$ (pues ambas son crecientes, ya que están definidas a partir de un α-corte de un número fuzzy) en todo su dominio, lo que no tiene necesariamente que ocurrir, pues depende de la pendiente de la función de pertenencia de ambos.

2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{l_2^1(\alpha)}{l_2^2(\alpha)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}$ sólo será decreciente para $0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad l_2^i(\alpha) \geq 0$, si la tasa de decrecimiento de $l_1^1(\alpha)$ es mayor que la de $l_1^2(\alpha)$ (pues ambas son decrecientes) en todo su dominio, lo que de nuevo no tiene necesariamente que ocurrir.

3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1) \quad \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.
En este caso:

$$\left(\frac{l_1^1(1)}{l_1^2(1)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{l_2^1(1)}{l_2^2(1)}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Como $\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, $\tilde{\lambda_1}[\alpha] = [l_1^1(\alpha), l_2^1(\alpha)]$, $\tilde{\lambda_2}[\alpha] = [l_1^2(\alpha), l_2^2(\alpha)]$ se definen para números fuzzy triangulares que cumplen esta condición, se tiene que $b_1(1) \leq b_2(1)$, $\quad l_1^1(1) \leq l_2^1(1)$, $\quad l_1^2(1) \leq l_2^2(1)$ sin tener más información al respecto, por lo que, si bien como ocurría con la función CES simplificada:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

no es posible asegurar que, en la otra parte que compone el producto:

$$\left(\frac{l_1^1(1)}{l_1^2(1)}\right) \leq \left(\frac{l_2^1(1)}{l_2^2(1)}\right) \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

pues $l_2^2(1)$ puede ser lo suficientemente mayor en proporción a $l_1^2(1)$ de lo que lo es $l_2^1(1)$ a $l_1^1(1)$, pudiendo contrarrestar la desigualdad respaldada por la relación entre los $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_i(1)-1}$.

De esto se desprende que la función de utilidad CES fuzzyficada no es una solución en términos de Buckley-Feuring de la RMS fuzzy CES.

La función de utilidad Cobb-Douglas

Las funciones de utilidad de este tipo generan unas funciones de demanda en las que el total gastado en cada mercancía es una proporción constante de la renta, por lo que son originadas por preferencias denominadas "regulares", plasmadas en expresiones del tipo:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = x_1^{\beta} x_2^{\gamma}, \quad \beta, \gamma \in (0, 1), \quad \beta + \gamma = 1$$

Estas funciones de utilidad tienen una relación marginal de sustitución muy común que viene dada por la expresión:

$$\frac{\partial U_i/\partial x_1}{\partial U_i/\partial x_2} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad \beta, \gamma \in (0,1), \quad \beta + \gamma = 1$$

De esta forma, si el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por otro a esta tasa manteniendo el mismo nivel de utilidad, estará describiendo una RMS de tipo Cobb-Douglas. Sin embargo, bajo la hipótesis básica planteada en esta tesis, resultaría más adecuado tomarla como un número fuzzy debido a la falta de información o fallo en la percepción de sus preferencias. Por tanto, sería más correcto escribir:

$$\widetilde{RMS}^{i}_{21} = \frac{\partial \tilde{U}_i/\partial x_1}{\partial \tilde{U}_i/\partial x_2} = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in (0,1), \quad \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$$

La restricción $\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$ indica que los elementos del conjunto fuzzy $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ tienen una relación lineal que determina el elemento del otro conjunto fuzzy (número fuzzy) que forma parte de la expresión. Es decir, sólo podrán formar parte de la expresión: $\{\beta \in \tilde{\beta}, \gamma \in \tilde{\gamma} \mid \beta + \gamma = 1\}$.

La cuestión es si un consumidor que presenta unas tasas de sustitución marcadas por la relación anterior tendrá como función de utilidad asociada la propia función de utilidad de Cobb-Douglas fuzzyficada en sus parámetros, ya que es ésta la que resuelve la ecuación en derivadas parciales bajo certidumbre.

En este caso:

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in (0,1), \quad \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$$

y nuevamente, por la naturaleza de la propia expresión de la relación marginal de sustitución:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) \longrightarrow \frac{\partial \tilde{U}_i/\partial x_1}{\partial \tilde{U}_i/\partial x_2},$$

Los parámetros fuzzy que forman el vector $\tilde{\vec{\beta}}$ vienen denotados por $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ tendrán asociados una función de pertenencia triangular $\mu(\beta)$, y $\mu(\gamma)$ respectivamente. A partir de sus α-corte se podrán definir:

$\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$,

$\tilde{\gamma}[\alpha] = [g_1(\alpha), g_2(\alpha)]$, y

$\tilde{\vec{\beta}}[\alpha] = \tilde{\beta}[\alpha] \times \tilde{\gamma}[\alpha]$

En este caso se debe tener en cuenta una cueatión de notación. Como ya se indicó, los parámetros están sujetos a la restricción $\{\beta \in \tilde{\beta}, \gamma \in \tilde{\gamma} \mid \beta + \gamma = 1\}$. De esta forma, si se fija $b_1(\alpha)$, denominaremos $g_1(\alpha)$ a $1 - b_1(\alpha)$, aunque realmente, esta expresión indicaría el extremo superior del α-corte de γ, pero viene determinado unívocamente al fijar $b_1(\alpha)$. El mismo razonamiento se puede realizar cambiando el papel de los parámetros.

Como ya se indicó anteriormente, la resolución de la ecuación en derivadas parciales bajo certidumbre es la función de utilidad de Cobb-Douglas, esto es:

$$U_i(x_1, x_2; \vec{\beta}) = x_1^{\beta} x_2^{\gamma}, \quad \beta, \gamma \in (0,1), \quad \beta + \gamma = 1$$

Por lo que, al igual que en las funciones CES, la fuzzificación de esta solución llevaría a:

$$\tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \tilde{Y}_i(x_1, x_2) = x_1^{\tilde{\beta}} x_2^{\tilde{\gamma}}, \quad \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in (0,1), \quad \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

que se constituye en candidata a solución de Buckley-Feuring.

Pudiéndose definir a partir de sus α-cortes:

$\tilde{Y}_i(x_1, x_2)[\alpha] = [y_1(x_1, x_2; \alpha), y_2(x_1, x_2; \alpha)]$, y

$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [f_1(x_1, x_2; \alpha), f_2(x_1, x_2; \alpha)], \forall \alpha.$

Donde:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; g_1(\alpha), b_1(\alpha)),$

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{G(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; g_2(\alpha), b_2(\alpha))$

y,

$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{F(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; g_1(\alpha), b_1(\alpha)),$

$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{F(x_1, x_2; \vec{\beta}), \quad \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; g_2(\alpha), b_2(\alpha)),$

$\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \alpha$

que para el caso de una función de Cobb-Douglas resulta, $\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$:

$$y_1(x_1, x_2; \alpha) = x_1^{b_1(\alpha)} x_2^{g_1(\alpha)}, \quad b_1(\alpha), g_1(\alpha) \in (0,1), \quad b_1(\alpha) + g_1(\alpha) = 1$$

$$y_2(x_1, x_2; \alpha) = x_1^{b_2(\alpha)} x_2^{g_2(\alpha)}, \quad b_2(\alpha), g_2(\alpha) \in (0,1), \quad b_2(\alpha) + g_2(\alpha) = 1$$

$$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_1(\alpha)}{g_1(\alpha)}\right) \frac{x_2}{x_1}, \quad b_1(\alpha), g_1(\alpha) \in (0,1), \quad b_1(\alpha) + g_1(\alpha) = 1$$

$$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_2(\alpha)}{g_2(\alpha)}\right) \frac{x_2}{x_1}, \quad b_2(\alpha), g_2(\alpha) \in (0,1), \quad b_2(\alpha) + g_2(\alpha) = 1$$

Al cumplirse los requerimientos de continuidad, para comprobar la diferenciabilidad de $\tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$, a través de $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ contrastando si efectivamente $\Gamma(x_1, x_2; \alpha) = [\varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; \alpha), \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_2(x_1, x_2; \alpha)]$ define un α-corte de un número fuzzy para cada par $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$, deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_1(\alpha)}{g_1(\alpha)}\right) \frac{x_2}{x_1}, \quad b_1(\alpha), g_1(\alpha) \in (0,1)$ es una función creciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. Ya que $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} = 1$, y $b_1(\alpha) \in \tilde{\beta}$, y $g_1(\alpha) \in \tilde{\gamma}$, es posible hacer una sustitución $g_1(\alpha) = 1 - b_1(\alpha)$, quedando:

   $$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_1(\alpha)}{1 - b_1(\alpha)}\right) \frac{x_2}{x_1}, \quad b_1(\alpha) \in (0,1)$$

   De esta forma, sólo es necesario analizar la monotonía de $\left(\frac{b_1(\alpha)}{1 - b_1(\alpha)}\right)$, ya que $\frac{x_2}{x_1}$ se constituye como una constante en esta función.
   Derivando:

   $$d\left(\frac{b_1(\alpha)}{1 - b_1(\alpha)}\right) = \frac{b_1(\alpha)'(1 - b_1(\alpha)) + b_1(\alpha)' b_1(\alpha)}{(1 - b_1(\alpha))^2}$$

Si esta expresión es positiva, entonces $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha)$ será creciente. Para determinarlo, es suficiente con recurrir a que $b_1(\alpha)$ efectivamente viene definido por un α-corte de un número fuzzy triangular, y por tanto, es creciente, por lo que tiene derivada positiva. Además, al estar comprendido en el intervalo $(0, 1)$, asegura que tanto el numerador como el denominador de la expresión anterior sean positivos, y por tanto,

$$d\left(\frac{b_1(\alpha)}{1 - b_1(\alpha)}\right) > 0,$$

lo que asegura que se cumple esta primera condición de diferenciabilidad.

2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_2(\alpha)}{g_2(\alpha)}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad b_2(\alpha), g_2(\alpha) \in (0, 1)$ debe ser una función decreciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. Al igual que antes, $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} = 1$, y como $b_2(\alpha) \in \tilde{\beta}$, y $g_2(\alpha) \in \tilde{\gamma}$, es posible hacer una sustitución $g_2(\alpha) = 1 - b_2(\alpha)$, quedando:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{b_2(\alpha)}{1 - b_2(\alpha)}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad b_2(\alpha) \in (0, 1)$$

Ahora sólo es necesario analizar la monotonía de $\left(\frac{b_2(\alpha)}{1 - b_2(\alpha)}\right)$, ya que de nuevo $\frac{x_2}{x_1}$ se constituye como una constante en esta función.
Derivando:

$$d\left(\frac{b_2(\alpha)}{1 - b_2(\alpha)}\right) = \frac{b_2(\alpha)'(1 - b_2(\alpha)) + b_2(\alpha)'b_2(\alpha)}{(1 - b_2(\alpha))^2}$$

Si esta expresión es negativa, entonces $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)$ será decreciente. Para determinarlo, de nuevo es suficiente con recurrir a que $b_2(\alpha)$ viene definido por un α-corte de un número fuzzy triangular, y por tanto, es decreciente, por lo que tiene derivada negativa. Además, al estar comprendido en el intervalo $(0, 1)$, el numerador de la expresión de la derivada tendrá signo negativo, mientras que el denominador lo tendrá positivo, y por tanto:

$$d\left(\frac{b_2(\alpha)}{1 - b_2(\alpha)}\right) < 0,$$

por lo que cumple la segunda condición de diferenciabilidad.

3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1), \forall x_1, x_2 \in I_1 \times I_2$.
En este caso:

$$\left(\frac{b_1(1)}{g_1(1)}\right)\frac{x_2}{x_1} \leq \left(\frac{b_2(1)}{g_2(1)}\right)\frac{x_2}{x_1}, \forall x_1, x_2 \in I_1 \times I_2$$

Una vez más, $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} = 1$, y como $b_1(\alpha), b_2(\alpha) \in \tilde{\beta}$, y $g_1(\alpha), g_2(\alpha) \in \tilde{\gamma}$, es posible hacer las sustituciones $g_1(\alpha) = 1 - b_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) = 1 - b_2(\alpha)$ por lo que quedaría la condición análoga:

$$\left(\frac{b_1(1)}{1-b_1(1)}\right)\frac{x_2}{x_1} \leq \left(\frac{b_2(1)}{1-b_2(1)}\right)\frac{x_2}{x_1}, \quad b_1(1), b_2(1) \in (0,1) \quad \forall x_1, x_2 \in I_1 \times I_2$$

En este caso, al ser x_1, x_2 tratados como constantes, es necesario comprobar que:

$$\frac{b_1(1)}{1-b_1(1)} \leq \frac{b_2(1)}{1-b_2(1)} \Leftrightarrow \frac{b_2(1)}{b_1(1)} \geq \frac{1-b_2(1)}{1-b_1(1)},$$

sabiendo que tanto $b_1(1)$ como $b_2(1)$ están definidos para un número fuzzy triangular, por lo que:

$b_2(1) \geq b_1(1) \Leftrightarrow \dfrac{b_2(1)}{b_1(1)} \geq 1$

y

$1 - b_2(1) \leq 1 - b_1(1) \Leftrightarrow \dfrac{1-b_2(1)}{1-b_1(1)} \leq 1,$

por lo que efectivamente:

$$\frac{b_2(1)}{b_1(1)} \geq \frac{1-b_2(1)}{1-b_1(1)} \Leftrightarrow \frac{b_1(1)}{1-b_1(1)} \leq \frac{b_2(1)}{1-b_2(1)}$$

y se cumple esta tercera condición de diferenciabilidad.

Por lo tanto, la función de utilidad de Cobb-Douglas fuzzyficada es una buena candidata a función de utilidad fuzzy que genere una relación marginal de sustitución fuzzy de tipo Cobb-Douglas. Para que efectivamente lo sea, aún debe cumplir al menos un requisito más:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) \quad \beta, \gamma \in (0, 1), \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2.$$

Para el caso de la función de utilidad de Cobb-Douglas fuzzyficada:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}_i(x_1, x_2) = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}\right)\frac{x_2}{x_1}$$

y,

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}\right)\frac{x_2}{x_1},$$

por lo que se demuestra que la función de utilidad de Cobb-Douglas fuzzyficada es solución en términos de Buckley-Feuring de la ecuación en derivadas parciales producida por la relación marginal de sustitución fuzzy de Cobb-Douglas.

En caso de que se establecieran unas condiciones iniciales añadidas, se añadiría la condición de que éstas se cumplan para $\tilde{Y}_i(x_1, x_2)$.

Capítulo 7

La función de utilidad multicriterio fuzzy

Una vez utilizada la metodología expuesta para la obtención de las funciones de utilidad marginal fuzzy correspondientes a los distintos criterios $C_i, i = 1, ..., k$, será posible plantear la agregación de las distintas funciones de utilidad marginal fuzzy $\tilde{U}_1(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_1), ..., \tilde{U}_k(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_k)$ correspondientes a los k criterios para obtener la función de utilidad total multiatributo $\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$.

Para un modelo de utilidad multiatributo con k criterios con un espacio de consecuencias $\mathbf{C}^k$, es posible agregar las utilidades marginales mediante una forma aditiva o multiplicativa siempre que se cumplan determinadas condiciones de independencia. En concreto, sólo será posible asignar una forma de agregación de funciones de utilidad unicriterio en alguna de estas dos formas si los criterios son *mutuamente independientes en utilidad*[1].

Sea I un subconjunto del conjunto de índices de criterios $K = 1, ..., k$. Para cada $i \in I$, el *preorden establecido* por $(C_i)_{i \in I}$ es el inducido por $\preceq$ sobre $\prod_{i \notin I} C_i$ para cada $i \in I$. Según esta definición, los k criterios de K serán independientes si, para cada subconjunto $I \subseteq K$, el preorden establecido por $(C_i)_{i \in I}$ sobre $\prod_{i \notin I} C_i$ es independiente de $(C_i)_{i \in I}$.

[1]En realidad, el término *mutuamente independientes en utilidad* se utiliza en el ámbito de la utilidad esperada para resaltar la independencia. Fuera de la utilidad esperada, el término correcto es el de *independencia débil en diferencia*, si bien se suele utilizar el mismo término que en la utilidad esperada.

Si $(c_{i\in I}, c_{i\notin I})(c_{i\in I}, c_{j\notin I}) \succeq (c_{i\in I}, c_{h\notin I})(c_{i\in I}, c_{l\notin I})$, entonces, también se considerará:

$(c_{j\in I}, c_{i\notin I})(c_{j\in I}, c_{j\notin I}) \succeq (c_{j\in I}, c_{h\notin I})(c_{j\in I}, c_{l\notin I})$ para algún $c_j, \quad j \in I$ ya que el orden de preferencias depende sólo de los niveles de los criterios de $\prod_{i\notin I} C_i$ y no de los valores fijados de I.

En otras palabras, la independencia implica que, para cada subconjunto I de criterios, $c_i, i \in I$ no determina las relaciones entre los criterios que no forman parte de I, es decir, las relaciones del tipo $c_a \succeq c_b, a, b \notin I$, sólo depende de los valores c_a y c_b.

Una última simplificación de la condición de mutua independencia de utilidad asegura que la función de utilidad total fuzzy adquiera una forma aditiva o multiplicativa, pues las funciones de utilidad fuzzy marginales unicriterios se han obtenido de forma independiente, sólo desde el momento en que proceden de relaciones marginales de sustitución en un sólo criterio en las que el consumidor considera el resto de criterios constantes (*ceteris paribus*), por lo que la preferencia sobre valores de un criterio no depende de los valores del resto[2].

- Una función de utilidad total (o multicriterio) tiene una forma aditiva si:

$$U(x_1, x_2; \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{k} w_i U_i(x_1, x_2; \vec{\beta_i})$$

- Una función de utilidad total (o multicriterio) tiene una forma multiplicativa si:

$$1 + WU(x_1, x_2; \vec{\beta}) = \prod_{i=1}^{k} [1 + Ww_i U_i(x_1, x_2; \vec{\beta_i})]$$

donde, siguiendo la notación empleada, $U(x_1, x_2; \vec{\beta})$, es la función de utilidad total para los bienes x_1, y x_2, $U_i(x_1, x_2; \vec{\beta_i})$ es la función de utilidad marginal correspondiente al criterio i-ésimo para los bienes x_1, y x_2, w_i son los pesos que determinan la importancia relativa del criterio i-ésimo, y W es una constante de escala.

[2]La demostración de esta simplificación puede encontrarse en Keeney, R. L. Raiffa, H.: *Decisions with multiple objectives : preferences and value trade offs*. John Wiley and Sons. 1976.

Si bien tanto el modelo multiplicativo como el aditivo requieren el cumplimiento de la mutua independencia de utilidad, para que una función de utilidad total adopte una forma aditiva, es necesario que además se cumpla una condición adicional de *independencia aditiva* entre criterios, lo que la hace más restrictiva que la forma multiplicativa. Sin embargo, el modelo multiplicativo dista mucho de ser ideal en la aplicación práctica debido a sus numerosos inconvenientes técnicos derivados de una forma más compleja y un número mayor de parámetros.

Estos inconvenientes de la implementación en los modelos multiplicativos han llevado a muchos investigadores a analizar los resultados obtenidos al aplicar el modelo aditivo en marcos en los que el modelo teórico multiplicativo se adapta mejor. Los trabajos "Robustness of additive value function methods in MCDM" y "Simplified approaches for multi-criteria decision making under uncertainty", ambos de T.J. Stewart, se constituyen como buenos referentes en este campo. En ellos, Stewart realiza numerosas simulaciones utilizando el modelo aditivo en casos en los que el modelo multiplicativo se adapta mejor teóricamente. Se puede observar como los errores introducidos por el uso de modelos aditivos fueron pequeños para un gran rango de problemas de decisión multicriterios a los que se enfrenta un decisor normalmente. Además, detectó que estos errores procedían en una gran parte de la simplificación en las funciones de utilidad marginal utilizadas para recoger las preferencias del decisor, y no propiamente del modelo de agregación. De ello, es posible sacar la conclusión de que el modelo aditivo puede sustituir, por su sencillez, en un gran número de casos al multiplicativo. Sin embargo, estos trabajos también han demostrado que mientras más alejado está el marco real de la independencia aditiva requerida para que un modelo siga un esquema aditivo, mayor será el error que proporcione la sustitución de un modelo multiplicativo por uno aditivo.

Para evitar la necesidad de sustituir un modelo de agregación multiplicativa por uno de agregación aditiva, y no incurrir en los errores originados por la violación de la condición de independencia aditiva, es posible instar al decisor a que asigne los pesos de los criterios de forma que se cumplan las condiciones suficientes establecidas para que una función de utilidad total sea aditiva. Estas condiciones han sido propuestas por varios autores desde diferentes perspectivas. Así, en 1960 fueron establecidas por Gerard Debreu desde un punto de vista topológico. En 1964 por R. Duncan Luce y John W. Tuckey establecieron una serie de axiomas de aditividad desde un punto de vista algebraico, mientras que Fishburn, en 1965, derivó las condiciones de aditividad con un enfoque probabilístico. Esta perspectiva ha sido la más usada a la hora de determinar la aditividad en un modelo de utilidad esperada, y establece que las preferencias por cualquier lotería deben depender únicamente de las probabilidades marginales de los valores del atributo, y no de las probabilidades conjuntas de éstos.

Sin embargo, este acercamiento probabilístico resulta poco adecuado en esta tesis doctoral, ya que no se basa en la teoría de la utilidad esperada. Por ello, se va a optar por establecer unos axiomas que aseguren un modelo de agregación aditivo de las funciones de utilidad marginales basado en los trabajos de Debreu, y Lucey y Tukey. Si el decisor asigna los pesos de los criterios de forma que se cumplan estos axiomas, se estará ante un modelo aditivo.

Como las condiciones que se van a dar a continuación implican que la forma de la función de utilidad multicriterio es

$$U(x_1, x_2; \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_1, x_2; \vec{\beta_i}),$$

y la metodología utilizada ha dado lugar a una función de utilidad marginal para cada criterio, es decir, k funciones de utilidad marginal, se aplicarán estas condiciones para $n = k$, y $K_i = C_i$. Es decir, cada criterio se identificará con un factor.

Si se asume que existe un preorden completo de preferencias $\succeq$ sobre $K = \prod_{i=1}^{k} C_i$ tal que $\{C_i \in K \mid C_i \succeq C_j\}$ y $\{C_i \in K \mid C_i \preceq C_j\}$ son cerrados para todo $C_j \in K$, lo cual ocurrirá siempre que exista un número finito de criterios, será necesario que se cumplan las siguientes condiciones para que la función de utilidad sea aditiva:

1. Los n factores que componen K deben ser independientes.

2. K debe tener más de dos factores esenciales.

   Si $K = \{C_1, ..., C_k\}$ es el conjunto de criterios tenidos en cuenta en la toma de decisiones, sus factores $K_1, ...K_n$ son espacios separables y conectados de forma que:

   $$K = \prod_{i=1}^{n} K_i$$

   Como se puede observar, un factor puede contener uno o más criterios. Además, las condiciones que se van a dar a continuación implican que la forma de la función de utilidad multicriterio es

$$U(x_1, x_2; \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_1, x_2; \vec{\beta_i}),$$

y la metodología utilizada ha dado lugar a una función de utilidad marginal para cada criterio, es decir, k funciones de utilidad marginal, se aplicarán estas condiciones para $n = k$, y $K_i = C_i$.

De forma genérica, un factor K_i es esencial si existe un criterio C_j perteneciente a otro factor K_j para el que no todos los elementos de K_i son indiferentes según el preorden establecido por (C_j).

En el caso del marco de decisión del consumidor en este documento, los factores se corresponden con cada uno de los criterios, pues, como ya se mostró, es necesario obtener tantos sumandos como funciones de utilidad marginal correspondientes a cada criterio ($n = k$). Si c_i es el conjunto de posibles valores para el criterio C_i, y c_j representa el mismo conjunto concerniente al atributo C_j, un criterio C_i es esencial si y solo si $\exists c'_i, c''_i \in c_i, c'_j \in c_j$ tales que $(c'_i, c'_j) \nsim (c''_i, c'_j)$.

Puede observarse que una gran limitación de esta condición es que necesita al menos tres factores esenciales, lo que supone que sólo se puede aplicar en marcos de decisión que tengan en cuenta 3 o más criterios.

Para casos en los que sólo se tengan en cuenta dos criterios, es más acertado recurrir a los axiomas de Luce y Tukey. Sean C_1 y C_2 los dos criterios que intervienen en el proceso de toma de decisiones, con $c_1 = \{a, b, c, ...\}$ y $c_2 = \{A, B, C, ...\}$ los posibles valores que pueden tomar C_1 y C_2 respectivamente, por lo que $c_1 \times c_2$ está formado por los pares (a, A), (a, B), (b, A), (c, A),... Si de nuevo se considera la relación binaria $\succeq$, los criterios serán aditivos si se satisfacen los siguientes axiomas:

I Axioma de ordenación: $\succeq$ es un orden débil que cumple los axiomas de:

- Reflexividad: $(a, A) \succeq (a, A), \forall a \in c_1, A \in c_2$.
- Transitividad: Si $(a, A) \succeq (b, B)$, y $(b, B) \succeq (c, C)$, entonces: $(a, A) \succeq (c, C)$.
- Conexión: Siempre ocurre que $(a, A) \succeq (b, B)$ o $(a, A) \preceq (b, B)$ o se dan ambos.

- Definición:

  1 $(a, A) = (b, B)$ si y sólo si $(a, A) \succeq (b, B)$ y $(a, A) \preceq (b, B)$.

  2 $(a, A) \succ (b, B)$ si y sólo si no ocurre $(b, B) \succeq (a, A)$.

II Solución de ecuaciones: Para cada $a \in c_1$ y $A, B \in c_2$, la ecuación $(f, A) = (a, B)$ tiene una solución $f \in c_1$, y para cada $a, b \in c_1$ y $A \in c_2$, la ecuación $(a, A) = (b, F)$ tiene una solución $F \in c_2$.

III Cancelación: Para todo $a, b, c \in c_1$ y $A, B, C \in c_2$, si $(a, C) \succeq (c, B)$ y $(c, A) \succeq (b, C)$, entonces,$(a, A) \succeq (b, B)$.

IV Axioma arquimediano: Si $\{a_i, A_i\}, i = 0, 1, 2, ...$ es una *secuencia dual estándard* no trivial y creciente, para todo $b \in c_1, B \in c_2$, entonces existen dos enteros (positivos o negativos) m y n tales que:

$$(a_n, A_n) \succeq (b, B) \succeq (a_m, A_m).$$

Una serie infinita de pares $\{a_i, A_i\}, i = 0, 1, 2, ...$, con $a_i \in c_1, A_i \in c_2$ es una *secuencia dual estándard* (*dss* por su abreviatura inglesa) siempre que $(a_m, A_n) = (a_p, A_q)$ cuando $m+n = p+q$ para cualesquiera m, n, p, q enteros, positivos, negativos o nulos.

Una *dss* será trivial si $a_i = a_0$, o $A_i = A_0$.

Las demostraciones de estas condiciones pueden encontrarse en:

Debreu, G.:"Topological methods in cardinal utility theory", en *Mathematical Methods y Social Sciences, 1960*, para el caso de 3 o más criterios.

Luce, R.D., Tukey, J.W.:"Simultaneous Conjoint Measurement: A New Type of Fundamental Measurement", en *Journal of Mathematical Psychology, vol.1, 1964*, para el caso de dos criterios.

También es posible extender las condiciones de Luce y Tukey a más de dos criterios. Sin embargo, se ha preferido optar por el enfoque topológico de Debreu por estar más enfocado a funciones de utilidad, como el propio autor menciona en su artículo. La generalización de los axiomas de Luce y Tukey a un mayor número de criterios puede consultarse en "Foundations of Measurement", de D.H. Krantz et al.

Esta tesis doctoral considerará que estos axiomas, o en caso de más de dos criterios, la condición de Debreu, se le imponen al decisor a la hora de asignar los pesos a los distintos criterios, por lo que se optará por obtener una función de utilidad fuzzy de forma aditiva. Además, existen múltiples publicaciones que exponen variaciones de estos axiomas para la obtención de estructuras aditivas. En caso de no cumplirse estos axiomas en la asignación de ponderaciones, se incurrirá en un error de modelización en caso de adoptar un esquema aditivo, si bien, como se mencionó anteriormente, la necesidad de mayor información y la complejidad del modelo, lleva frecuentemente a la asunción de un modelo aditivo, pues los resultados difieren poco en comparación con el mayor nivel de complejidad requerido. Esta asunción de la agregación aditiva es especialmente frecuente desde mediados del siglo XX en la teoría clásica del consumidor que trata este documento.

7.1. Suma de números fuzzy

Una vez considerada la forma aditiva de la función de utilidad multicriterio, el problema se centra en obtener la expresión de la suma de números fuzzy, ya que las funciones de utilidad marginal fuzzy no dejan de adoptar esta forma de número fuzzy con unas funciones de pertenencia y α-cortes definidos en el capítulo anterior.

En esta sección se exponen los distintos métodos para la suma de números fuzzy, y se analizará cuál es el adecuado para la suma de las utilidades marginales correspondientes a cada criterio, mientras que en la siguiente sección se aplicará este método al problema de decisión planteado en esta tesis.

Son varios los artículos dedicados a la suma de números fuzzy. Entre ellos, la excelente aproximación a la poblemática de la adicción de números fuzzy realizada por D. Dubois y H. Prade en "Additions of Interactive Fuzzy Numbers", publicado en *IEEE Transactions on Automatic Control* examina de forma eficaz las distintas expresiones de suma fuzzy que pueden adoptarse según la interactividad de los sumandos.

En un ambiente carente de incertidumbre, los conceptos de interacción y no-interacción son bastante intuitivos. Así, si V y W son dos universos, y A y B dos conjuntos (no fuzzy) de V y W respectivamente, el producto cartesiano $A \times B$ vendrá determinado por los pares:

$$\{(v, w) \mid v \in A, w \in B\}$$

$A \times B$ es el mayor conjunto que contiene los pares (v, w) tal que $v \in A$ y $w \in B$. En esta definición, la elección de $v \in A$ no está condicionada a la elección de $w \in B$. Si x e y son variables que toman valores en A y B respectivamente, estas variables serán *no-interactivas* si el rango de valores de (x, y) es $A \times B$. Asimismo, los conjuntos A y B también se denominan *no-interactivos*. Por el contrario, si las variables x e y toman valores restringidos a una condición $(x, y) \in D \subset (V \times W)$, tal que $D \cap (A \times B) \neq (A \times B)$, las variables serán consideradas *interactivas*.

Una vez definido los conceptos de interactividad y no-interactividad para conjuntos no afectados por la incertidumbre, es posible establecerlas para los conjuntos fuzzy mediante la generalización del concepto de producto cartesiano. Para ello, Dubois y Prade consideran adecuado el acercamiento que realiza Zadeh a los números fuzzy en su artículo "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning" publicado en el volumen 8 de *Information Sciences*. Este acercamiento se realiza en términos de posibilidad, y ya se adelantó en la introducción a los números fuzzy de esta tesis doctoral. Normalmente, un número fuzzy $\tilde{A}$ se define a través de $\mu_{\tilde{A}}$, que asigna a cada elemento de $\tilde{A}$ un valor que indica su grado de pertenencia al conjunto. En el nuevo acercamiento que introdujo Zadeh, $\tilde{A}$ es el conjunto de posibles valores de una variable x, y la función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(A)$ es el grado de posibilidad de elegir $A \in \tilde{A}$ como el valor adecuado de x. Con esta perspectiva, $\mu_{\tilde{A}}$ puede ser renombrada como *función de posibilidad* asociada a x, pudiéndose denotar también como π_x.[3]

Por tanto, análogamente a las propiedades de las funciones de pertenencia de los números fuzzy, $\tilde{A}$ es tal que:

$$\exists a \in \tilde{A} : \mu_{\tilde{A}}(a) = 1 = \pi_x(a)$$

mientras que π_x será tal que:

$$\sup_{a \in \tilde{A}} \pi_x(a) = 1.$$

y permitirá definir a su vez funciones sobre $\tilde{A}$, denominadas *medidas de posibilidad*, Π_x, tales que:

$$\forall \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \quad \Pi_x(\tilde{B}) = \sup_{b \in \tilde{B}} \pi_x(a)$$

[3]Para el caso de las funciones de utilidad fuzzy, su interpretación es bastante adecuada e incluso favorece la comprensión. Identificando los parámetros de las funciones de utilidad como números fuzzy, $\pi_x(\beta)$ será la posibilidad de elegir a β como el verdadero valor de $\tilde{\beta}$, verdadero valor cuya percepción está condicionada por la falta de información y la incertidumbre que llevan a tratarlos como números fuzzy.

Así, $\Pi_x(\tilde{B})$ indica el grado de posibilidad del evento $\tilde{B}$ dado π_x, y satisface los siguientes axiomas análogos a los expuestos con las funciones de pertenencia:

- $\Pi_x(\emptyset) = 0$
- $\Pi_x(\tilde{A}) = 1$
- $\Pi_x(\bigcup_I \tilde{B}_i) = \sup_I \Pi_x(\tilde{B}_i), \tilde{B}_i \subseteq \tilde{A}$

Usando esta perspectiva, es posible generalizar el producto cartesiano al ambiente fuzzy de varias formas, y por ende, establecer distintas definiciones de *interactividad* y *no-interactividad*. Las más extendidas que dan lugar a las expresiones de suma de números fuzzy más usuales se muestran a continuación:

1. No-interactividad

   Una forma de extender el producto cartesiano al ámbito fuzzy es a través de los α-corte. En términos de función de posibilidad, el α-corte de un conjunto fuzzy $\tilde{A}$ viene dado por:

   $$\tilde{A}_\alpha = \{a \in \tilde{A} \mid \pi_x(a) \geq \alpha\} \qquad \forall \alpha \in [0, 1]$$

   Con ello, el producto cartesiano $\tilde{A} \times \tilde{B}$ de dos conjuntos fuzzy $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ viene definido por:

   $$\forall \alpha \in [0, 1] \quad (\tilde{A} \times \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \times \tilde{B}_\alpha$$

   Es decir $\tilde{A} \times \tilde{B}$ es aquel que tiene por α-corte a $\tilde{A}_\alpha \times \tilde{B}_\alpha$, lo que equivale, según demuestran Dubois y Prade en el artículo citado al comienzo de la sección, a decir que $\tilde{A}_\alpha \times \tilde{B}_\alpha$ es tal que:

   $$\mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(a, b) = \text{mín}(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b))$$

   Con esta definición, al igual que en el caso no fuzzy, dos variables x e y cuyos rangos se restringen a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ serán *no-interactivas* si y sólo si (x, y) está restringida a $\tilde{A} \times \tilde{B}$. De la misma forma, los conjuntos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ también pueden ser llamados *no-interactivos*. En términos de distribución de posibilidad:

   $$\pi_{(x,y)}(a, b) = \text{mín}(\pi_x(a), \pi_y(b))$$

donde $\pi_x = \mu_{\tilde{A}}$, $\pi_y = \mu_{\tilde{B}}$

La no interactividad en el ámbito fuzzy conlleva una interpretación similar a la del ambiente de certidumbre. Es decir, los valores de $a \in \tilde{A}$ y $b \in \tilde{B}$ sólo están restringidos por $\tilde{A} \times \tilde{B}$.

Además, si x e y son variables *no-interactivas*, para cualesquiera $\tilde{C}$ y $\tilde{D}$ subconjuntos de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ respectivamente, se tiene que en términos de medidas de posibilidad:

$$\Pi_{(x,y)}(\tilde{C}, \tilde{D}) = \sup_{(a,b)\in(\tilde{C}\times\tilde{D})} \pi_{(x,y)}(a, b) = \text{mín}(\Pi_x(\tilde{C}), \Pi_y(\tilde{D}))$$

2. no-interactividad débil

   Una extensión del producto cartesiano al marco fuzzy menos estricta proviene de establecer que (a, b) pertenezca totalmente al producto cartesiano de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ siempre que a pertenezca totalmente a $\tilde{A}$ y b a $\tilde{B}$. Es decir, este producto cartesiano, denotado por $\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}$, debe satisfacer, para todo $(a, b) \in \tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}$:

   $$\text{si } \mu_{\tilde{A}}(a) = \mu_{\tilde{B}}(b) = 1 \text{ entonces } \mu_{\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}}(a, b) = 1$$

   O, usando α-cortes:

   $$(\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B})_{\alpha=1} = \tilde{A}_{\alpha=1} \times \tilde{B}_{\alpha=1}$$

   Sin embargo[4], si bien ésta es la característica definitoria de esta extensión del producto cartesiano, es necesario establecer algunos axiomas para que $\tilde{\times}$ defina realmente un producto cartesiano:

   a) $\mu_{\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}}(a, b)$ sólo depende de $\mu_{\tilde{A}}(a)$ y $\mu_{\tilde{B}}(b)$ a través de un operador $*$ de forma que: $\mu_{\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}}(a, b) = \mu_{\tilde{A}}(a) * \mu_{\tilde{B}}(b)$
   b) $\emptyset\tilde{\times}\emptyset = \emptyset$, es decir, $0 * 0 = 0$.
   c) $\forall\alpha \in [0, 1], \tilde{C} \subseteq \tilde{A}, \tilde{D} \subseteq \tilde{B}, (\tilde{C}\tilde{\times}\tilde{B})_\alpha = \tilde{C}_\alpha \times \tilde{B}$ y $(\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{D})_\alpha = \tilde{A} \times \tilde{D}_\alpha$.
   d) $\tilde{\times}$ y $*$ cumplen la propiedad asociativa.
   e) $\forall\alpha \in [0, 1]$, si $(a, b) \in (\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B})_\alpha$, entonces, $(b, a) \in (\tilde{B}\tilde{\times}\tilde{A})_\alpha$. Este axioma se puede endurecer más aún estableciendo en la forma $\mu_{\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}}(a, b) = \mu_{\tilde{B}\tilde{\times}\tilde{A}}(b, a)$, lo que implica la conmutatividad del operador $*$.

[4] Como demuestran Dubois y Prade, ciertamente esta extensión del producto cartesiano es más débil que la anterior, ya que $\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \times \tilde{B}$.

f) $\forall B_1, B_2,$ si $B_1 \subseteq B_2 \rightarrow \tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B_1} \subseteq \tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B_2}$
$\forall A_1, A_2,$ si $A_1 \subseteq A_2 \rightarrow \tilde{A}_1\tilde{\times}\tilde{B} \subseteq \tilde{A}_2\tilde{\times}\tilde{B},$
lo que implica que el operador $*$ es no decreciente.

Bajo estos axiomas, $\tilde{A}\tilde{\times}\tilde{B}$ se denomina producto cartesiano débil, y el operador $*$ sólo puede venir definido por una norma triangular $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ con las siguientes propiedades:

$T(a,b) = T(b,a) \quad \forall a,b \in [0,1].$

$T[T(a,b),c] = T[a,T(b,c)] \quad \forall a,b,c \in [0,1].$

$T(a,b) \leq T(c,d), \quad \forall a,b,c,d \in [0,1], \quad a \leq c, \quad b \leq d.$

$T(a,1) = a, \quad \forall a \in [0,1].$

Las normas triangulares más usadas para extender el producto cartesiano a la teoría de conjuntos fuzzy mediante este acercamiento son:

- $* = \text{mín}.$
- $* = \prod.$
- $* = T_m$, tal que $T_m(a,b) = \text{máx}(0, a+b-1).$
- $* = T_w$ tal que $T_w(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1, \\ b & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Con esta definición de producto cartesiano débil, dos variables x e y definidas sobre $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ respectivamente serán *débilmente no-interactivas*, si y sólo si, existe una norma triangular $*$ tal que:

$$\forall a, \in \tilde{A}, b \in \tilde{B} \quad \pi_{(x,y)}(a,b) = \pi_x(a) * \pi_y(b)$$

La no-interacción débil permite ciertas restricciones a la elección de un valor de una variable con independencia del valor de la otra para elementos con bajo grado de pertenencia a los conjuntos fuzzy, mientras que para elementos significativos, esto es, con altos valores de función de pertenencia, los valores de x e y pueden ser elegidos de forma independiente.

3. La *interacción no-fuzzy.*

   La *interacción no-fuzzy* entre dos variables x e y definidas sobre $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ respectivamente establece que existe una relación entre ambas, de forma que el valor de una determina el de la otra, es decir, $(x,y) \in D, \quad D \cap (\tilde{A} \times \tilde{B}) \neq \tilde{A} \times \tilde{B}$. Es necesario destacar la naturaleza no fuzzy de D[5] lo que implica que la relación entre ambas variables no se ve afectada por un ambiente de incertidumbre.

Según el grado de interactividad de los conjuntos fuzzy, Prade y Dubois aplican el principio de extensión de Zadeh para obtener las siguientes expresiones de distribuciones de posibilidad para operaciones con variables definidas en conjuntos fuzzy:

- Para variables no-interactivas:

$$\pi_z(w) = \sup_{a,b:w=f(a,b)} \min(\pi_x(a), \pi_y(b))$$

- Para variables con no-interactividad débil:

$$\pi_z(w) = \sup_{a,b:w=f(a,b)} \pi_x(a) * \pi_y(b),$$

  donde $*$ es alguna forma de norma triangular.

- Para variables con interactividad no fuzzy:

$$\pi_z(w) = \sup_{(a,b)\in D:w=f(a,b)} \min(\pi_x(a), \pi_y(b))$$

Una vez introducidos los conceptos de interactividad y sus variaciones a través de la extensión del producto cartesiano al ámbito de incertidumbre tratado con teoría de conjuntos fuzzy, es necesario analizar la relación existente entre las funciones de utilidad marginal correspondientes a cada criterio.

En la sección anterior, se determinó la naturaleza aditiva de la función de utilidad total, de forma que ésta se obtiene a través de la suma de las funciones de utilidad marginal correspondientes a cada criterio. Dado que estas funciones de utilidad son números fuzzy, la función de utilidad total es el resultado de una suma finita de números fuzzy, cuya expresión dependerá de la relación de interacción existente entre éstos.

[5]El caso de la *interacción fuzzy*, en que D es también fuzzy ($\tilde{D}$) es analizado por los mismos autores en *Fuzzy Sets: Theory and Aplications to Policy Analysis and Information Systems* , P. P. Wang y S. K. Chang edts.

Si se consideran las variables $y_1, y_2, ..., y_k$, definidas sobre $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, ..., \tilde{U}_k$[6] respectivamente, éstas serán *no-interactivas*, y por ende, también $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, ..., \tilde{U}_k$ si $y_1, y_2, ..., y_k$ está restringido sólo por $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \times ... \times \tilde{U}_k$. En este punto, es necesario señalar otra cuestión de base en este acercamiento. Para el caso que ocupa esta tesis, la función de utilidad marginal, que, como se ha demostrado es un número fuzzy, es decir, un conjunto fuzzy con ciertas propiedades adicionales, puede considerarse como una variable cuyos valores posibles son los elementos que componen dicho conjunto fuzzy (cada uno de ellos con su valor de función de pertenencia o distribución de posibilidad). En otras palabras, y_i es otra forma de representar el número fuzzy $\tilde{U}_i$, y la suma de estas variables no es otra cosa que una forma de representar la suma de los conjuntos en los que están definidas.

Una vez aclarado este punto, y teniendo en cuenta las condiciones del proceso de toma de decisiones planteado en este modelo, es posible concretar que $(y_1, y_2, ..., y_k)$ toma valores en $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \times ... \times \tilde{U}_k$, pues no existe ningún tipo de restricciones, tanto de naturaleza fuzzy como no fuzzy que determinen una relación de interactividad. Es decir, y_i tomará valores en $\tilde{U}_i$ sin ninguna restricción impuesta por los valores que tome y_j en $\tilde{U}_j, j \neq i, j \in K$, y por tanto:

$$\pi_z(u) = \sup_{y_1, y_2 : u = u_1 + u_2} \text{mín}(\pi_{y_1}(u_1), \pi_{y_2}(u_2))$$

donde z es la variable que toma valores en $\tilde{U}$,$u_i \in \tilde{U}_i$, $u \in \tilde{U}$, y $\tilde{U}$ es la función de utilidad fuzzy multicriterio para el caso de que ésta esté compuesta por sólo dos criterios.

En términos de función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}(u) = \sup_{u = u_1 + u_2} \text{mín}(\mu_{\tilde{U}_1}(u_1), \mu_{\tilde{U}_2}(u_2))$$

Para la adición de más de dos números fuzzy caracterizada a través de funciones de pertenencia o distribución de posibilidad es necesario acudir a la propiedad asociativa e ir encadenando operaciones de adición. Es decir, $\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 = (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) + \tilde{U}_3$, volviendo a tener de esta forma expresiones de suma de dos números fuzzy. De la misma forma, este procedimiento puede

[6]Para simplificar la notación, se utilizará en este apartado U_i como $U_i(x_1, x_2; \vec{\beta})$, y $\tilde{U}$ como $\tilde{U}(x_1, x_2; \vec{\tilde{\beta}})$.

seguir encadenando sumas a partir de la asociación para sumar k números fuzzy.

Sin embargo, para seguir el hilo de esta tesis doctoral, se optará por caracterizar a los números fuzzy por sus α-corte y no por su función de pertenencia. A efectos prácticos, la operación de suma de números fuzzy no-interactivos a través de los α-corte es mucho más intuitiva, ya que, como demuestran A. Kaufman y M. M. Gupta en *Introduction to fuzzy arithmetics*, para dos números fuzzy $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, si:

$\tilde{A}[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, y

$\tilde{B}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$,

donde, como ya se definió en el capítulo anterior:

- $a_1(\alpha)$ es el valor a más bajo a partir del cual $\mu_{\tilde{A}}(a) \geq \alpha, \quad a \in \tilde{A}$.
- $a_2(\alpha)$ es el valor a más alto en el que $\mu_{\tilde{A}}(a) \geq \alpha, \quad a \in \tilde{A}$.
- $b_1(\alpha)$ es el valor b más bajo a partir del cual $\mu_{\tilde{B}}(b) \geq \alpha, \quad b \in \tilde{B}$.
- $b_2(\alpha)$ es el valor b más alto en el que $\mu_{\tilde{B}}(b) \geq \alpha, \quad b \in \tilde{B}$.

entonces:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{A} + \tilde{B})[\alpha] &= \tilde{A}[\alpha] + \tilde{B}[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] + [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\
&= [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]
\end{aligned}
$$

Esta expresión será la usada para caracterizar la función de utilidad total fuzzy multicriterio obtenida a través de las relaciones marginales de sustitución fuzzy. Además, la suma de números fuzzy no interactivos da como resultado otro número fuzzy, por lo que la función de utilidad multicriterio será un conjunto de estas características

7.2. Adición de funciones de utilidad fuzzy: la función de utilidad total o utilidad multicriterio

Llegado este punto, se puede resumir que la función de utilidad fuzzy total (o multicriterio) tiene forma aditiva, y que esta adición toma la expresión anteriormente señalada para números fuzzy no interactivos. Por tanto, retomando la notación empleada en la obtención de las funciones de utilidad marginal fuzzy:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i)$$

En caso de especificar la ponderación de cada criterio:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i)$$

Sin embargo, es necesario matizar algunas implicaciones de esta última expresión.

En primer lugar, si la ponderación se normaliza de forma que los pesos de cada atributo sumen uno, ésta normalización deberá hacerse a posteriori, es decir, el decisor deberá asignar, en un principio, las ponderaciones a cada criterio en una escala cardinal sin necesidad de que sumen uno, sino que deberá valorar cada uno de forma independiente asignándole el peso que crea conveniente, aunque obviamente, esta valoración deberá ser relativa, de forma que un criterio el doble de importante que otro tendrá un peso con un valor doble. Una vez asignada estas ponderaciones, será posible normalizarlas para que sumen uno si se cree necesario, de forma que:

$$w_i' = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

Esta restricción metodológica se realiza para conservar la independencia en utilidad necesaria para mantener una estructura de utilidad aditiva como la defendida en esta tesis doctoral, ya que una ponderación previa puede repercutir en la estructura de los preórdenes definidos sobre los criterios.

En segundo lugar, es necesario introducir operaciones del tipo:

$$w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i),$$

donde w_i es un número real positivo y $\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i)$ es un número fuzzy.

De forma genérica, si $\tilde{A}$ es un número fuzzy y w es un escalar positivo, el resultado de este tipo de operaciones es un número fuzzy caracterizado a través de sus α-corte por:

$$w \cdot \tilde{A}[\alpha] = [w \cdot a_1(\alpha), w \cdot a_2(\alpha)]$$

Por tanto, la ponderación se puede incorporar como un elemento de la función de utilidad marginal fuzzy, de forma que la utilidad total pueda expresarse sólo como la suma de éstas.

A continuación, siguiendo el hilo de esta tesis doctoral, se obtendrán las expresiones de utilidad total a través de las utilidades marginales fuzzy más comunes analizadas en el capítulo anterior, siendo -como se señaló en ese mismo capítulo-, esta metodología extensible a otras posibles expresiones de funciones de utilidad.

En este punto, es necesario considerar dos posibilidades: que los bienes tengan una misma relación en todos los criterios, o bien, que se comporten de forma diferente en cada uno de ellos. Así, es posible que dos bienes tengan una función de utilidad con una misma forma (aunque con distintos parámetros) en todos los criterios, o bien se representen mediante expresiones funcionales diferentes en todos o en algunos de ellos. De esta forma, una función de utilidad total podría ser, por ejemplo, la adición de varias funciones de utilidad CES si es esta la expresión que adoptan en cada uno de los criterios, o bien, la adición de una o varias funciones de utilidad CES, una o varias Cobb-Douglas, y una o varias funciones de utilidad no analizadas anteriormente con otra expresión posible.

Función de utilidad total CES

Esta función se obtiene de la agregación de k funciones de utilidad fuzzy CES correspondientes a cada uno de los criterios. En este caso, la función de utilidad marginal fuzzy tiene la expresión:

$$\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i) = (x_1^{\tilde{\beta}_i} + x_2^{\tilde{\beta}_i})^{1/\tilde{\beta}_i}, \quad 0 < \tilde{\beta}_i \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

y vienen caracterizadas en sus α-corte por:

$$\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i)[\alpha] = [u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)]$$
$$= [(x_1^{b_{i1}(\alpha)} + x_2^{b_{i1}(\alpha)})^{1/b_{i1}(\alpha)}, (x_1^{b_{i2}(\alpha)} + x_2^{b_{i2}(\alpha)})^{1/b_{i2}(\alpha)}]$$

$0 < b_{i1}(\alpha) \leq 1, \quad 0 < b_{i2}(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

Por lo que la utilidad total vendrá dada por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i) = \sum_{i=1}^{k} w_i (x_1^{\tilde{\beta}_i} + x_2^{\tilde{\beta}_i})^{1/\tilde{\beta}_i},$$

$0 < \tilde{\beta}_i \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

expresada a través de sus α-corte por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), \sum_{i=1}^{k} w_i u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)]$$

$$= [\sum_{i=1}^{k} w_i (x_1^{b_{i1}(\alpha)} + x_2^{b_i 1(\alpha)})^{1/b_{i1}(\alpha)}, \sum_{i=1}^{k} w_i (x_1^{b_{i2}(\alpha)} + x_2^{b_{i2}(\alpha)})^{1/b_{i2}(\alpha)}]$$

$0 < b_{i1}(\alpha) \leq 1, \quad 0 < b_{i2}(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

Como ha podido apreciarse, la adición de funciones de utilidad fuzzy CES se ha realizado para la expresión en la que no se presuponen preferencias previas (un sólo parámetro), es decir, para la función CES simplificada. Esto es debido a que, como se demostró en el capítulo anterior, no se puede asegurar que la función CES de tres parámetros obtenida a través de la relación marginal de sustitución fuzzy sea un número fuzzy.

Función de utilidad total Cobb-Douglas

A diferencia de la función de utilidad fuzzy CES simplificada, la función de utilidad de Cobb-Douglas tiene la peculiaridad respecto a ésta de tener más de un parámetro, debiendo tratar con un vector de parámetros fuzzy $\tilde{\vec{\beta}}_i = (\tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i)$ al introducir la incertidumbre en el decisor mediante esta técnica. Sin embargo, los componentes de este vector se combinan en una forma funcional que da lugar a un número fuzzy unidimensional representado por la función de utilidad marginal fuzzy:

$$\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i) = x_1^{\tilde{\beta}_i} x_2^{\tilde{\gamma}_i}$$
$$0 < \tilde{\beta}_i \leq 1, \quad 0 < \tilde{\gamma}_i \leq 1, \quad \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

y vienen caracterizadas en sus α-corte por:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i)[\alpha] &= [u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)] \\ &= [x_1^{b_{i1}(\alpha)} x_2^{g_{i1}(\alpha)}, x_1^{b_{i2}(\alpha)} x_2^{g_{i2}(\alpha)}]\end{aligned}$$

$b_{i1}(\alpha), g_{i1}(\alpha) \in (0, 1), \quad b_{i1}(\alpha) + g_{i1}(\alpha) = 1$

$b_{i2}(\alpha), g_{i2}(\alpha) \in (0, 1), \quad b_{i2}(\alpha) + g_{i2}(\alpha) = 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

Por lo que la utilidad total vendrá dada por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i) = \sum_{i=1}^{k} w_i x_1^{\tilde{\beta}_i} x_2^{\tilde{\gamma}_i},$$

$$0 < \tilde{\beta}_i \leq 1, \quad 0 < \tilde{\gamma}_i \leq 1, \quad \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

expresada a través de sus α-corte por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), \sum_{i=1}^{k} w_i u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)]$$

$$= [\sum_{i=1}^{k} w_i x_1^{b_{i1}(\alpha)} x_2^{g_{i1}(\alpha)}, \sum_{i=1}^{k} w_i x_1^{b_{i2}(\alpha)} x_2^{g_{i2}(\alpha)}]$$

$b_{i1}(\alpha), g_{i1}(\alpha) \in (0, 1), \quad b_{i1}(\alpha) + g_{i1}(\alpha) = 1$

$b_{i2}(\alpha), g_{i2}(\alpha) \in (0, 1), \quad b_{i2}(\alpha) + g_{i2}(\alpha) = 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

Función de utilidad total mixta

Una función de utilidad fuzzy total o multicriterio será la resultante de agregar de forma aditiva criterios con diferentes expresiones de funciones de utilidad marginal fuzzy. En este caso, la expresión genérica, al igual que en los casos anteriores vendrá dada por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i), \tilde{\vec{\beta}}_i \in \mathbf{D}_i$$

expresada a través de sus α-corte por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), \sum_{i=1}^{k} w_i u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)]$$

$\vec{b}_{i1}(\alpha), \vec{b}_{i2}(\alpha) \in \mathbf{D}_i$

Un caso concreto que sirve como ejemplo es la obtención de una función de utilidad fuzzy total para dos bienes que toman una función de utilidad marginal fuzzy CES en un criterio y una Cobb-Douglas en otro. Por tanto:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \tilde{U}_i(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}_i) = w_1(x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}} + w_2 x_1^{\tilde{\lambda}} x_2^{\tilde{\gamma}}$$

$$0 < \tilde{\beta} \leq 1$$

$$0 < \tilde{\lambda} \leq 1, \quad 0 < \tilde{\gamma} \leq 1, \quad \tilde{\lambda} + \tilde{\gamma} = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

expresada a través de sus α-corte por:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})[\alpha] = [\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i1}(x_1, x_2; \alpha), \sum_{i=1}^{k} w_i u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)]$$

con:

$\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i1}(x_1, x_2; \alpha) = w_1(x_1^{b_1(\alpha)} + x_2^{b_1(\alpha)})^{1/b_1(\alpha)} + w_2 x_1^{l_1(\alpha)} x_2^{g_1(\alpha)}$

$\sum_{i=1}^{k} w_i u_{i2}(x_1, x_2; \alpha)] = w_1(x_1^{b_2(\alpha)} + x_2^{b_2(\alpha)})^{1/b_2(\alpha)} + w_2 x_1^{l_2(\alpha)} x_2^{g_2(\alpha)}$

$0 < b_1(\alpha) \leq 1, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1$

$l_1(\alpha), g_1(\alpha) \in (0, 1), \quad l_1(\alpha) + g_1(\alpha) = 1$

$l_2(\alpha), g_2(\alpha) \in (0, 1), \quad l_2(\alpha) + g_2(\alpha) = 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

7.3. Consideración de utilidad total unicriterio

Una vía alternativa al desarrollo de una función de utilidad fuzzy al expuesto durante el deasarrollo de esta tesis doctoral surge al considerar que el decisor es capaz de valorar relaciones marginales de sustitución entre dos bienes divisibles de una forma global en vez de criterio a criterio. Es decir, el decisor aporta valoraciones sobre cuántas unidades de un producto intercambiaría por otro manteniendo la misma utilidad teniendo en cuenta todos los criterios que toman parte en el proceso de decisión.

Este planteamiento es el más adecuado cuando el consumidor puede no ser capaz de distinguir los distintos criterios que influyen en su decisión pero ser capaz de valorar la relación marginal de sustitución total entre dos bienes, lo que puede acercarse más a la realidad en la forma de operar de un consumidor ante la compra de determinados bienes.

De nuevo, la hipótesis subyacente es la falta de información o sesgo de ésta a la hora de valorar la relación marginal de sustitución entre dos bienes, así como la adecuación de que el decisor se pronuncie sobre ésta en vez de la utilidad total[7], por lo que en este caso se partirá de la expresión:

$$\widetilde{RMS}_{21} = \frac{\partial \tilde{U}/\partial x_1}{\partial \tilde{U}/\partial x_2} = F(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}),$$

Sobre esta nueva ecuación en derivadas parciales se deberá aplicar el procedimiento expuesto para buscar una solución de Buckley-Feuring, de forma que una función $\tilde{Y}(x_1, x_2)$, es solución de Buckley-Feuring si cumple conjuntamente las siguientes condiciones:

1. $\tilde{Y}(x_1, x_2)$ es diferenciable.
2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}})$.
3. $\tilde{Y}(x_1, x_2)$ cumpla las condiciones iniciales establecidas en cada caso.

Obviamente, estas condiciones serán válidas bajo las asunciones expuestas para la obtención de las funciones de utilidad fuzzy marginal, usándose un

[7]Las argumentaciones de estas hipótesis ya se expusieron al comienzo de la Parte II de esta tesis doctoral.

desarrollo y una notación análoga. Como prueba de ello, se incluye a modo de ejemplo la obtención de una función de utilidad total a partir de una relación marginal de sustitución fuzzy CES simplificada, que como se puede comprobar sigue los mismos pasos, y obviamente obtiene los mismos resultados pero a nivel total en vez de marginal, que la desarrollada para obtener la función de utilidad correspondiente a un sólo criterio partiendo de una misma relación marginal de sustitución.

En este caso, la ecuación en derivadas parciales de partida prescinde de los subíndices referentes a los criterios:

$$\frac{\partial\tilde{U}/\partial x_1}{\partial\tilde{U}/\partial x_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

donde, correspondiéndose con la notación usada:

- $\tilde{\vec{\beta}}$ es unidimensional, correspondiéndose con $\tilde{\beta}$. A partir de sus α-corte, es posible expresar $\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, donde:
  - $b_1(\alpha)$ es el valor de β más bajo a partir del cual $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta) \geq \alpha, \quad \beta \in \tilde{\beta}$.
  - $b_2(\alpha)$ es el valor de β más alto en el que $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta) \geq \alpha, \quad \beta \in \tilde{\beta}$.
- $\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}$

  y
- $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})U(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) \longrightarrow \dfrac{\partial\tilde{U}/\partial x_1}{\partial\tilde{U}/\partial x_2}$,

Además, es necesario recordar que x_1 y x_2 se corresponden con las cantidades de los productos X_1 y X_2 y están definidas en los intervalos I_1 e I_2 descritos en el capítulo anterior.

Obviamente, al igual que en el caso marginal, resolviendo la ecuación en derivadas parciales exacta (sin considerar al parámetro como fuzzy), se obtiene la función de utilidad CES:

$$U(x_1, x_2; \beta) = G(x_1, x_2; \beta) = (x_1^\beta + x_2^\beta)^{1/\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

Siguendo la metodología expuesta para encontrar soluciones de Buckley-Feuring en este tipo de expresiones, la fuzzificación de esta solución sería:

$$\tilde{G}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) = \tilde{Y}(x_1, x_2) = (x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

que se constituiye en candidata a solución de Buckley-Feuring.

A partir de aquí es posible definir:

$\tilde{Y}(x_1, x_2)[\alpha] = [y_1(x_1, x_2; \alpha), y_2(x_1, x_2; \alpha)]$, y

$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta})[\alpha] = [f_1(x_1, x_2; \alpha), f_2(x_1, x_2; \alpha)], \forall \alpha.$

Por definición se tiene:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{G(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; b_1(\alpha)),$

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{G(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = G(x_1, x_2; b_2(\alpha))$ y,

$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \text{mín}\{F(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; b_1(\alpha)),$

$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \text{máx}\{F(x_1, x_2; \beta), \quad \beta \in \tilde{\beta}[\alpha]\} = F(x_1, x_2; b_2(\alpha)),$

$\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, \alpha$

y, por tanto, de nuevo sustituyendo por sus expresiones:

$y_1(x_1, x_2; \alpha) = (x_1^{b_1(\alpha)} + x_2^{b_1(\alpha)})^{1/b_1(\alpha)}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

$y_2(x_1, x_2; \alpha) = (x_1^{b_2(\alpha)} + x_2^{b_2(\alpha)})^{1/b_2(\alpha)}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

$f_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

$f_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$

De nuevo, para comprobar la condición de diferenciabilidad es necesario obtener $\Gamma(x_1, x_2; \alpha) = [\varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_1(x_1, x_2; \alpha), \varphi(D_{x_1}, D_{x_2}) y_2(x_1, x_2; \alpha)]$ y ver si realmente $\Gamma(x_1, x_2; \alpha)$ define un α-corte de un número fuzzy para cada par $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

Para el caso de la función de utilidad fuzzy CES se obtiene que:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}, \quad 0 < b_1(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}, \quad 0 < b_2(\alpha) \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Es sobre estas expresiones donde se debe comprobar si cumple las condiciones para definir un número fuzzy, y se razonará con procedimiento idéntico al expuesto para obtener la función de utilidad marginal. Estas condiciones son:

1. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(\alpha)-1}$ es una función creciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

   Si se tiene en cuenta que $b_1(\alpha)$ se define a partir de un α-corte de un número fuzzy triangular, como es el caso de $\tilde{\beta}$, entonces, satisface que es creciente en α. Además, como se aclaró sin pérdida de generalidad que las relaciones marginales de sustitución se definirían para $x_1 > x_2; (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$, es obvio que $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; \alpha)$ es creciente en α y cumple esta condición.

2. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(\alpha)-1}$ es una función decreciente en α, para cada $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

   De nuevo, siguiendo el razonamiento anterior y del capítulo anterior, al tener en cuenta que $b_2(\alpha)$ se define a partir de un α-corte de un número fuzzy triangular, como es el caso de $\tilde{\beta}$, y como tal, satisface que es decreciente en α. Esto unido a la relación $x_1 > x_2; (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ conlleva que $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; \alpha)$ es decreciente en α y cumple esta condición.

3. $\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_1(x_1, x_2; 1) \leq \varphi(D_{x_1}, D_{x_2})y_2(x_1, x_2; 1) \quad \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. En este caso:

   $$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

   Una vez más, como $\tilde{\beta}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ se define para un número fuzzy triangular, deberá cumplirse que $b_1(1) \leq b_2(1)$, y por tanto,

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_1(1)-1} \leq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{b_2(1)-1} \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$$

Por tanto, se está en condiciones de afirmar que

$$\tilde{Y}(x_1, x_2) = (x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

es diferenciable y sigue siendo una buena candidata a solución de Buckley-Feuring. Para serlo, debe cumplir que:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}(x_1, x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2.$$

Para el caso de la función de utilidad fuzzy CES:

$$\varphi(D_{x_1}, D_{x_2})\tilde{Y}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1} \text{ y,}$$

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tilde{\beta}) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\tilde{\beta}-1}$$

Por tanto se demuestra que la función de utilididad simplificada CES fuzzyficada es solución de la ecuación en derivadas parciales producida por la relación marginal de sustitución fuzzy, y por tanto la función de utilidad total del consumidor con una relación marginal de sustitución fuzzy como la expuesta es:

$$\tilde{U}(x_1, x_2; \beta) = \tilde{Y}(x_1, x_2) = (x_1^{\tilde{\beta}} + x_2^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{\beta}}, \quad 0 < \tilde{\beta} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,$$

y conforme a ella toma las decisiones de consumo.

Parte III

La decisión de consumo en un marco fuzzy

Esta parte final de la tesis plantea cómo toma finalmente la decisión de consumo un consumidor con una función de utilidad fuzzy como la obtenida a través de la metodología expuesta. En la teoría clásica del consumidor, éste tomará la decisión de consumo de manera que maximice su utilidad, pero teniendo como limitación su presupuesto. Es decir, se enfrenta a un problema de programación matemática del tipo:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1, x_2} & U(x_1, x_2; \vec{\beta}) \\ s.a. & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \\ & x_i \in I_i \end{array}$$

Donde p_1 representa el precio del bien X_1, p_2 el precio del bien X_2 y R la renta de que dispone el individuo. La solución a este problema de programación no lineal es bien conocida. La combinación de bienes óptima es aquella para la que la relación marginal de sustitución se iguala al cociente de precios:

$$RMS_{21} = \frac{p_1}{p_2}$$

Este resultado se hace más comprensible al analizar gráficamente las curvas de indiferencia y la restricción presupuestaria:

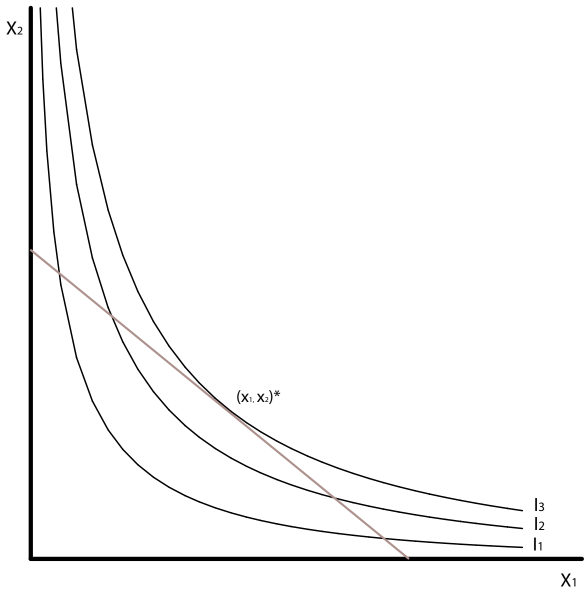

Figura 7.1: El equilibrio del consumidor

Obviamente, el consumidor sólo puede acceder a los puntos que se encuentran bajo la recta presupuestaria, cuya pendiente es p_1/p_2, pues por encima de ésta, cualquier combinación de bienes es demasiado costosa. Bajo la hipótesis de racionalidad, el decisor siempre prefiere un mayor nivel de utilidad, por lo que preferirá un nivel de utilidad como el proporcionado por I_2 a I_1, y I_3 al proporcionado por I_2. Es por ello que siempre se situará en la curva de indiferencia correspondiente al mayor nivel de utilidad posible con su restricción presupuestaria, esto es, cuando las pendientes de curva de indiferencia y restricción presupuestaria coincidan.

En un ambiente fuzzy, este problema de decisión pasa a enmarcarse en el ámbito de la programación matemática fuzzy, ya que adquiere la forma genérica:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & \tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}}) \\ s.a. & p_1x_1+p_2x_2 \leq R \\ & x_i \in I_i \end{array}$$

La programación matemática fuzzy ha sido objeto de numerosos artículos y libros, enfocados principalmente al caso multiobjetivo lineal y a la comparación con la programación estocástica, a veces bajo los nombres de programación flexible, programación inexacta o programación posibilística. Esta gran producción es debido al gran número de formatos que puede presentar un problema de este tipo. Así, por ejemplo, un problema de programación puede presentar elementos fuzzy en parámetros de la función objetivo, en cualquiera de los parámetros que definen las restricciones, e incluso, en el propio carácter de la relación que determina cada restricción.

Además, existen numerosas aproximaciones a los problemas de programación matemática fuzzy. La que se va a usar en esta tesis doctoral[8] extrae elementos del trabajo de Jaroslav Ramík y Milan Vlach en *Generalized concavity in fuzzy optimization and fuzzy analysis*, Kluwer academic publishers, 2002.

Un análisis intuitivo puede acercar a las primeras conclusiones. Los parámetros que forman parte de la función de utilidad determinan la forma de las curvas de indiferencia. Así, unos determinados valores de estos parámetros

[8] Este capítulo final de la tesis intenta invitar a la reflexión sobre la pretendida modelización matemática de los comportamientos humanos, tan propia de la ciencia económica. Es por ello que no comporta el cuerpo de la tesis y no se adentrará tanto en el desarrollo matemático, remitiendo cuando sea necesario a los trabajos de otros autores para demostraciones e intentando proceder a un razonamiento más alejado de formalismos matemáticos de los resultados.

conllevan unos niveles de convexidad diferentes a otros posibles valores. Al introducir un elemento de incertidumbre tratando a estos parámetros como números fuzzy con sus respectivas funciones de pertenencia, se amplía enormemente el abanico de posibilidades. En un contexto como éste, existen tantas formas de curva de indiferencia como elementos contenga el número fuzzy (no debe olvidarse que un número fuzzy es un conjunto fuzzy con determinadas características añadidas), cada una de ellas con su respectiva función de pertenencia.

Es decir, ahora existen tantas familias de curvas de indiferencias como posibles valores del parámetro y, en cada familia de curvas, el decisor se situará en la más alejada posible siempre que no sobrepase la restricción presupuestaria. Así, la solución de este problema será un conjunto fuzzy dado por los puntos tangentes de la recta de restricción presupuestaria con las distintas familias de curvas de indiferencia asociadas a cada posible valor del parámetro. Cada una de estas soluciones lleva aparejada la función de pertenencia del parámetro fuzzy correspondiente al valor de éste que determina su familia de curvas de indiferencia.

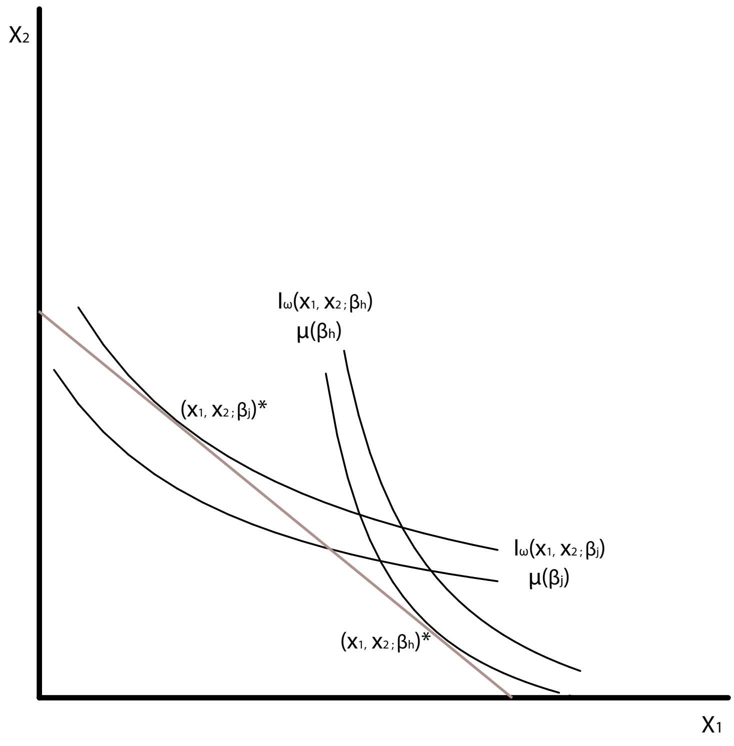

Figura 7.2: El equilibrio del consumidor en ambiente fuzzy

El gráfico anterior ayuda a mostrar la explicación anterior. Para ello, se considera que el parámetro fuzzy de la función de utilidad es unidimensional, $\tilde{\vec{\beta}} = \tilde{\beta}$. En la posterior formalización matemática se abordará el caso de que el parámetro sea multidimensional. El gráfico muestra como para $\beta_j \in \tilde{\beta}$ y $\beta_h \in \tilde{\beta}$, $\beta_j \neq \beta_h$ se generan dos familias de curvas de indiferencias de diferente convexidad: $I_\omega(x_1, x_2; \beta_j)$ y $I_\omega(x_1, x_2; \beta_h)$. Cada una de estas familias de curvas tiene una función de pertenencia que coincide con la del valor del parámetro que las ha generado, $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta_j)$ y $\mu_{\tilde{\beta}}(\beta_h)$. Como existen tantas familias de curvas de indiferencia como elementos de $\tilde{\beta}$, el óptimo del consumidor será el conjunto de puntos de cada una de estas familias de curvas de indiferencia tangentes a la recta presupuestaria. En el gráfico, los óptimos vienen dados por $(x_1, x_2; \beta_j)^*$ y $(x_1, x_2; \beta_h)^*$, pero habrá tantos como familias de curvas de indiferencia generen los elementos de $\tilde{\beta}$. Por tanto, el conjunto de soluciones será un conjunto fuzzy cuyos elementos llevan asociados la función de pertenencia del elemento de $\tilde{\beta}$ que lo ha generado. Formalmente, con los elementos del gráfico:

$$(x_1, x_2; \beta_j)^* \in (x_1, x_2; \tilde{\beta})^* \longrightarrow \mu_{(x_1,x_2;\tilde{\beta})^*}(x_1, x_2; \beta_j)^* = \mu_{\tilde{\beta}}(\beta_j)$$

$$(x_1, x_2; \beta_h)^* \in (x_1, x_2; \tilde{\beta})^* \longrightarrow \mu_{(x_1,x_2;\tilde{\beta})^*}(x_1, x_2; \beta_h)^* = \mu_{\tilde{\beta}}(\beta_h)$$

A estas conclusiones se pueden llegar de un modo formal partiendo de la formulación general de un problema de programación matemática fuzzy:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & \tilde{f}(\vec{x}; \tilde{\vec{\beta}}) \\ s.a. & \tilde{g}_i(\vec{x}; \tilde{\vec{a}}_i)\tilde{R}_i\tilde{d}_i \quad i \in \mathcal{M} \end{array}$$

donde:

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables a optimizar.

- $\tilde{\vec{\beta}}$ es un conjunto fuzzy multidimensional con función de pertenencia $\mu_{\tilde{\vec{\beta}}} = (\mu_{\tilde{\beta}_1}(\beta_1), \mu_{\tilde{\beta}_2}(\beta_2), ..., \mu_{\tilde{\beta}_n}(\beta_n))$.

  Sin embargo, es necesario unificar estas funciones de pertenencia en una que indique una pertenencia global del punto $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, para lo que se puede usar una norma triangular como operador de agregación, de forma que:

$$\mu_{\tilde{\vec{\beta}}}(\beta) = T[\mu_{\tilde{\beta}_1}(\beta_1), ..., T(\mu_{\tilde{\beta}_{n-1}}(\beta_{n-1}), \mu_{\tilde{\beta}_n}(\beta_n))]$$

obteniendo así una función de pertenencia unidimensional que representa la pertenencia global o agregada del vector paramétrico fuzzy.

- $\tilde{\vec{a}}_i$ es un conjunto fuzzy multidimensional que engloba los coeficientes de la restricción i-ésima, $i \in \mathcal{M}$ con función de pertenencia $\mu_{\tilde{\vec{a}}_i}$. De la misma forma que el vector de parámetros, es necesario usar un operador de agregación, preferentemente una norma triangular para reducir la función de pertenencia vectorial a unidimensional.

- $\tilde{d}_i$ es un conjunto fuzzy unidimensional con función de pertenencia $\mu_{\tilde{d}_i}$, $i \in \mathcal{M}$ y representa los límites que deben cumplir las restricciones del problema.

- $\tilde{R}_i$ es una relación fuzzy con función de pertenencia $\mu_{\tilde{R}_i} \quad i \in \mathcal{M}$. Una relación fuzzy representa el grado en que se da una relación entre dos conjuntos fuzzy, que en este caso se corresponden con ambos lados de la restricción i-ésima. Más concretamente, por la naturaleza del problema planteado, esta relación fuzzy se considerará una extensión fuzzy de la relación R_i, lo que implica que $\mu_{\tilde{R}_i} = \mu_{R_i}$. La función de pertenencia sobre una restricción viene dada por:

$$\begin{aligned}
&\mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{a}}_i), \tilde{d}_i) \\
&= T[\mu_{R_i}(u,v), T(\mu_{\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{a}}_i)}(u), \mu_{\tilde{d}_i}(v))] \\
&= T[\mu_{\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{a}}_i)}(u), \mu_{\tilde{d}_i}(v)] \quad | \, uR_iv
\end{aligned}$$

donde T es una norma triangular que sirve como operador agregador.

- $\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})$ es el valor de la función objetivo para un elemento de $\tilde{\vec{\beta}}$ Su función de pertenencia $\mu_{\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})}(z)$ viene determinado por:

$$\mu_{\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})} = \begin{cases} \mu_{\tilde{\vec{\beta}}}(\vec{\beta}) \mid \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}, \quad f(\vec{x};\vec{\beta}) = z & \text{si } f(\vec{x};z)^{-1} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- $\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{a}}_i)$ es el valor de la restricción i-ésima para un elemento de $\tilde{\vec{a}}_i$. Su función de pertenencia $\mu_{\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{g}}_i)}(z)$ viene determinado por:

$$\mu_{\tilde{g}_i(\vec{x};\tilde{\vec{a}}_i)} = \begin{cases} \mu_{\tilde{\vec{a}}_i}(\vec{a}_i) \mid \vec{a}_i \in \tilde{\vec{a}}_i, \quad g_i(\vec{x};\vec{a}_i) = z & \text{si } g_i(\vec{x};z)^{-1} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con todo ello, es posible definir el subconjunto fuzzy $\tilde{X}$ de $\mathbb{R}^n$ que representa el conjunto factible del problema, como aquel que tiene como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{X}}(\vec{x}) = A(\mu_{\tilde{R_1}}(\tilde{g_1}(\vec{x};\tilde{\vec{a_1}}),\tilde{d_1}),...,\mu_{\tilde{R_m}}(\tilde{g_m}(\vec{x};\tilde{\vec{a_m}}),\tilde{d_m})$$

En esta definición, el operador A se define como un operador cualquiera de agregación, como puede ser una norma triangular. Los elementos de un α-corte se denominan α-soluciones factibles. Asímismo, la expresión $\mu_{\tilde{R_i}}(\tilde{g_i}(\vec{x};\tilde{\vec{a_i}}),\tilde{d_i})$ puede interpretarse como el grado de satisfacción de la restricción i-ésima, $i \in \mathcal{M}$.

Ahora es posible definir el conjunto de soluciones factibles para un problema de decisión del consumidor como el que ocupa esta tesis doctoral donde no existe ningún elemento fuzzy en las restricciones. Es decir, son del tipo:

$$g_i(\vec{x};\vec{a_i})R_i d_i$$

Al no haber ningún elemento fuzzy:

$$\mu_{\tilde{g_i}(\vec{x};\tilde{\vec{a_i}})} = \chi_{g_i(\vec{x};\vec{a_i})}, \quad \forall i \in \mathcal{M}$$

$$\mu_{\tilde{d_i}} = \chi_{d_i}$$

donde χ representa la función característica[9] de $g_i(\vec{x};\vec{a_i})$

y, por tanto, al ser $\tilde{R_i}$ una extensión fuzzy de R_i, aplicando la expresión de la función de pertenencia de $\tilde{R_i}$:

$$\mu_{\tilde{R_i}}(\tilde{g_i}(\vec{x};\tilde{\vec{a_i}}),\tilde{d_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_i(\vec{x};\vec{a_i})R_i d_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aplicando la norma triangular A se obtiene:

$$\mu_{\tilde{X}}(\vec{x}) = A(\mu_{\tilde{R_1}}(\tilde{g_1}(\vec{x};\tilde{\vec{a_1}}),\tilde{d_1}),...,\mu_{\tilde{R_m}}(\tilde{g_m}(\vec{x};\tilde{\vec{a_m}}),\tilde{d_m}) = \chi_X(\vec{x})$$

[9] La función característica de un conjunto A es la que indica la pertenencia al conjunto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto factible de un problema de programación matemática fuzzy sin elementos fuzzy en las restricciones es el mismo conjunto X que el del problema de programación matemática estándard.

El siguiente paso una vez delimitado el conjunto factible es definir la solución óptima. Es aquí donde surgen más interpretaciones y acercamientos posibles en la programación matemática fuzzy. El más generalista que no necesita ningún tipo de valoración externa a posteriori establece que el conjunto de soluciones óptimas $\tilde{X}^*$es aquel cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = A_g(\mu_{\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})}(\vec{x}), \mu_{\tilde{X}}(\vec{x})),$$

donde, de nuevo, A_g representa un operador agregador del tipo norma triangular. A los elementos de los α-corte de este conjunto se les denomina α-soluciones óptimas.

De nuevo, en un problema de programación matemática fuzzy como el originado en esta tesis doctoral, en el cual las restricciones carecen de elementos fuzzy:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = A_g(\mu_{\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})}(\vec{x}), \chi_X(\vec{x}))$$

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = \begin{cases} \mu_{\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})}(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in X, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con sólo sustituir, se tiene que el resultado para el problema de programación matemática fuzzy

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & \tilde{U}(x_1, x_2; \tilde{\vec{\beta}}) \\ s.a. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R \\ & x_i \in I_i \end{array}$$

tiene por solución el conjunto fuzzy cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x_1, x_2) = \begin{cases} \mu_{\tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}})}(x_1, x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in \tilde{X}, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu_{\tilde{\vec{\beta}}}(\vec{\beta}) \mid \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}, \quad f(\vec{x};\vec{\beta}) = z & \text{si } f(\vec{x};z)^{-1} \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, este conjunto de soluciones óptimas recoge los mismos elementos que el conjunto factible, por lo que proporciona escasa información haciendo gala de la imprecisión que representan los números fuzzy. En la práctica, existen varias posibilidades para acotar este conjunto de soluciones, entre ellas las dos expuestas a continuación.

Una posibilidad es la adoptada anteriormente en el desarrollo intuitivo y gráfico y parte de un conocimiento anterior del problema de optimización fuera del ámbito fuzzy. Es necesario partir de una idea clara de lo que representa el problema y aplicar esos conocimientos previos para acotar el conjunto de soluciones óptimas. En el caso que ocupa esta tesis, ese conocimiento previo lleva a afirmar que los mayores niveles de utilidad posible se conseguirán sobre la recta de restricción presupuestaria, por lo que es posible modificar a posteriori y utilizando un criterio algo subjetivo el conjunto de soluciones factibles para obtener sólo puntos sobre la recta presupuestaria:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & \tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}}) \\ s.a. & p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ & x_i \in I_i \end{array}$$

que tendrá por soluciones factibles (X) sólo el conjunto de puntos sobre la recta de restricción presupuestaria.

De esta forma, las soluciones óptimas ya coinciden con las adelantadas en el análisis gráfico anterior a la formalización matemática, pues el conjunto de soluciones óptimas seguirá dado por el conjunto fuzzy con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x_1,x_2) = \begin{cases} \mu_{\tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}})}(x_1,x_2) & \text{si } (x_1,x_2) \in X, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu_{\tilde{\vec{\beta}}}(\vec{\beta}) \mid \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}}, \quad f(\vec{x};\vec{\beta}) = z & \text{si } f(\vec{x};z)^{-1} \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde ahora X sólo contiene puntos sobre la recta presupuestaria.

Otra posibilidad para reducir el número de elementos del conjunto de soluciones óptimas de un problema de programación matemática fuzzy ha sido ampliamente aceptada y aplicada por numerosos autores en el campo de la optimización fuzzy. Este método introduce de forma externa y arbitraria una nueva cantidad $\tilde{d}_0$ denominada *objetivo fuzzy* que sirve como referencia para comparar los valores de $\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})$ a través de la relación fuzzy $\tilde{R}_0$, obteniendo una nueva restricción $\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}})\tilde{R}_0\tilde{d}_0$ que asegura obtener puntos que superen ese valor de referencia.

Con todos estos elementos, el conjunto de soluciones óptimas vendrá dado por el subconjunto fuzzy con funcion de pertenencia asociada para los puntos que lo componen:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = A_g[\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}}), \tilde{d}_0), \mu_{\tilde{X}}(\vec{x})],$$

donde, A_g es una norma triangular que actúa como operador de agregación $\mu_{\tilde{X}}(\vec{x})$ es la función de pertenencia de solución factible, que como se demostró, en caso de que no contenga ningún elemento fuzzy, coincide con la función característica $\chi_X(\vec{x})$. Por lo que, para el problema que ocupa:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & \tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}}) \\ s.a. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R \\ & x_i \in I_i \end{array}$$

se tiene:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = A_g[\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{f}(\vec{x};\tilde{\vec{\beta}}), \tilde{d}_0), \chi_X(\vec{x})]$$

$$= \begin{cases} T[\mu_{\tilde{U}(x_1,x_2;\tilde{\vec{\beta}})}(u), \mu_{\tilde{d}_0}(v)] \mid u \geq v & \text{si } (x_1,x_2) \in X, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T[\mu_{\tilde{\vec{\beta}}}(\beta), \mu_{\tilde{d}_0}(v)], \quad \begin{array}{l} \vec{\beta} \in \tilde{\vec{\beta}} \\ U(x_1,x_2;\vec{\beta}) = u \\ U^{-1}(x_1,x_2;u) \neq \emptyset \mid u \geq v \end{array} & \text{si } (x_1,x_2) \in X, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con T y A_g normas triangulares que actúan como operadores de agregación.

Para α, los elementos del α-corte $\tilde{X}^*_\alpha$ se denominan α soluciones óptimas del problema de programación. Además, dentro de estas soluciones es posible definir las *max-soluciones óptimas* , que son aquellas con la propiedad:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(\vec{x}) = \sup(\mu_{\tilde{X}^*})$$

donde $\sup(\mu_{\tilde{X}^*}) = 1$ en el problema que ocupa esta tesis doctoral, ya que los parámetros de la función objetivo son números fuzzy, lo que garantiza que al menos un elemento del conjunto alcanza el máximo valor en la función de pertenencia.

Capítulo 8

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Esta tesis doctoral propone la introducción de la incertidumbre en el modelo básico de toma de decisiones del consumidor. Este modelo microeconómico se presenta como el más simple de los posibles. Múltiples modificaciones se han añadido sobre éste para ir incorporando los múltiples elementos que influyen en la decisión del consumidor y los posibles marcos de decisión. Es este carácter, unido al enfoque metodológico usado en esta tesis, el que hace que esta aproximación pueda aplicarse también a las distintas ampliaciones del modelo como la consideración de más de dos bienes en el problema de consumo. Además, sólo se ha considerado el carácter fuzzy de elementos que componen la función de utilidad del consumidor, pero la última parte deja una vía abierta para considerar la incertidumbre mediante elementos fuzzy en otros elementos del problema de decisión final. Por todo ello, es necesario destacar que el enfoque propuesto abre una rica línea de investigación en el análisis microeconómico en condiciones de incertidumbre. Los siguientes pasos deben ser una generalización de las condiciones de optimalidad incorporando elementos fuzzy en las restricciones presupuestarias, la ampliación a funciones de utilidad de más de dos bienes y la inclusión de otras restricciones que acerquen el modelo a la realidad, como una cuota de ahorro en el consumidor, que también puede contener elementos modelizables mediante la teoría de conjuntos fuzzy.

Además, esta tesis propone de forma justificada un planteamiento inverso al de la microeconomía neoclásica. En el planteamiento normal, se parte de una estimación de la función de utilidad en primer lugar, mientras que la relación marginal de sustitución se obtiene a partir de ella. En esta tesis se justifica un camino inverso, es decir, la estimación en primer lugar de la relación marginal de sustitución, para después obtener una función de utilidad. Este planteamiento plenamente justificado conlleva el uso de un aparato matemático más complejo, como pueden ser las ecuaciones en derivadas parciales, acentuado aún más por el carácter fuzzy de los parámetros introducidos.

Este carácter fuzzy ha requerido la utilización de casi todas las parcelas de la teoría de conjuntos fuzzy, de las cuales se han ido introduciendo elementos necesarios durante toda la tesis. Esta teoría se constituye como una potente herramienta para reflejar la incertidumbre y la imprecisión de la representación matemática de situaciones donde interviene la imposibilidad humana de contar con toda la información.

El ser humano es demasiado complejo como para delimitar sus acciones mediante precisas ecuaciones matemáticas. Las matemáticas deben ser un instrumento que ayuden a comprender cómo se toman decisiones, pero nunca debe pretender encarrilarlas mediante enfoques deterministas. El uso de la teoría de conjuntos fuzzy puede ser una alternativa para huir de este enfoque. Como se muestra en el último capítulo, el decisor puede encontrarse con varios puntos óptimos al decidir, y cada uno de ellos con una función de pertenencia, la cual puede ser interpretada como la posibilidad de que el consumidor se sitúe en ella, pues no existe un sólo nivel de utilidad posible para cada combinación de bienes, lo cual se aleja de la idea de precisión que reflejan las condiciones de equilibrio en microeconomía clásica.

Bibliografía

[1] Adams, E.W.: A model of riskless choice, *Behavioral Science, vol. 4(1).* 1959.

[2] Allahviranloo, T.: Diference methods for fuzzy partial diferential equations, *Computational Methods in Applied Mathematics, vol. 2 (3).*2002.

[3] Altrock, C.V., Krause, B.: Multi-criteria decision-making in German automotive industry using fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems vol.63.* 1994.

[4] Andrews, R.W.: Methods of estimating a power utility function, *Working Paper 126, Graduate School of Business Administration*, University of Michigan, Michigan. 1976.

[5] Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., Matarazzo, B.: Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research, vol. 158.* 2004.

[6] Bana e Costa, De Corte, J-M., C.A., Vasnick, J-C.: MACBETH, *London School of Economics Operations Research Working Paper 03.56.*

[7] Bell, D. E., Raiffa, H., Tversky, A. (edits): *Decision Making.* Cambridge University Pres. 1988.

[8] Beuthe, M., Scanella, G.: Comparative analysis of UTA multicriteria methods, *European Journal of Operational Research, vol. 130.* 2001.

[9] Brans, J. P., Vincke, P.H., A preference ranking organization method, the PROMETHEE method, Management Science, vol. 31. 1985.

[10] Buckley, J.J.: A generalized extension principle, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 33.* 1989.

[11] Buckley, J.J., Feuring, T.: Introduction to fuzzy partial diferential equations, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 105.* 1999.

[12] Buckley, J.J., Feuring, T.: Fuzzy diferential equations, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 110.* 2000.

[13] Carlsson, C., Fullér, R.: Fuzzy multiple criteria decision making: recent developments, *Fuzzy Sets and Systems, vol 78.* 1996.

[14] Cascales, B., Lucas, P., Mira, J. M., y otros: *LATEX, una imprenta en tus manos.* Aula Documental de Investigación. 2000.

[15] Chen, L., Chen, Y-H., Wang, T-C.: Method for evaluating IS outsourcing suppliers, *Fuzzy Systems and Knoledge Discovery, vol. 3.* 2008.

[16] Cheng, C.H., Mon, D.-L.; Evaluating weapon system by analytical hierarchy process based on fuzzy scales, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 63.* 1994.

[17] Chikán, A. (edit.): *Progress in decision, utility and risk theory.* Kluwer Academic Publishers. 1991.

[18] Choquet, G.: Theories of capacities, *Annales de l'institut Fourier, vol. 5.* 1953.

[19] Colin, A., Trivedi, P.: *Microeconometrics. Methods and Applications.* Cambridge University Press. 2005.

[20] Debreu, G.: Topological methods in cardinal utility theory, *Mathematical Methods in the Social Sciences. Cowles Foundation paper 156.* 1960.

[21] Dean, P.-K. et al.: Product and cost estimation with fuzzy multiattribute utility theory, *The Engineering Economist, vol. 44(4).* 1999.

[22] Dias, L.C., Mosseau, V.: Fuzzy outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures, *DIMACS Research Report 2001-27*, Rutges University. 2001.

[23] Diaz, B., Morillas, A., González, J.: Análisis de concordancia comparativa difusa, *Estadística Española, vol. 39.* 1997.

[24] Dubois, D., Prade, H.: Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science, vol. 9(6).* 1978.

[25] Dubois, D., Prade, H.: Additions of interactive fuzzy numbers, *IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26(4).* 1981.

[26] Dug, H., Hoyong, K.: A note to the sum of fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 93*. 1998.

[27] Dyer, J. S., Rakesh, K. S.: Measurable multiattribute value functions, *Operations Research, vol. 27(4)*. 1979.

[28] Delgado, M., Valdegaray, J.L.: Fuzzy numbers, definitions and properties, *Mathware and Soft Computing, vol. 1*. 1994.

[29] Duncan, R., Tukey, J. W.: Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement, *Journal of Mathematical Psychology, vol. 1*. 1964.

[30] Dyer, J. S., Rakesh, K. S.: Measurable multiattribute value functions, *Operations Research, vol. 27(4)*. 1979.

[31] Edward, W. (Edit): *Utility Theories: Measurements and applications (Edit. Edwards, W.)*, Kluwer Academic Publishers. 1992.

[32] Edwards, W., Von Winterfeld, D.: *Decision analysis and behavioral research*. Cambridge University Press. 1986.

[33] Ertugrul, I., Karakasoglu, N.: Comparison of fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods for facility location selection, *International Journal of Advance Mnufacturing Technology, vol. 39*. 2008.

[34] Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M. (edits.): *Multiple Criteria Decision Analysis. State of the art surveys*. Springer. 2005.

[35] Fishburn, P.: Independence in utility theory with whole product sets, *Operations Research, Vol. 13(3)*. 1965.

[36] Fishburn, P.: Methods of estimating additive utilities , *Management Sciences, vol. 13*. 1967.

[37] Fishburn, P.C.: Dominance in SSB utility theory, *Journal of Economic Theory*, vol. 34. 1984.

[38] Fodor, J., De Baets, B., Perny, P. (edits.): *Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge*. Springer-Verlag. 2000.

[39] Fodor, J. C., Roubens, M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multi-Criteria Decision Aid*. Kluwer Academic Publishers. 1994.

[40] Frey, B., Benz, M., Stutzer, M.: Introducing procedural utility: not only what, but also how matters, *Journal of Institutional and Theoretical Economics, vol. 160 (3).*2004.

[41] Giarlotta, A. : Passive and active compensability multicriteria analysis (PACMAN), *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol 7(4).* 1998.

[42] Goetschel Jr. R., Voxman, W.: Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 18.* 1986.

[43] Gonzalez, A., Pons, O., Vila, M. A.: Dealing with uncertainty and imprecision by means of fuzzy numbers, *International Journal of Approximate Reasoning, vol. 21.* 1999.

[44] Greco, S.: A new PCCA method: IDRA, *European Journal of Operational Research, vol. 98.3.* 1997.

[45] Gupta, M. M., Regade, R. K., Yager, R. R. (edits.): *Advances in fuzzy sets theory and its applications.* North Holland. 1979.

[46] Herrero, C.: Teorías alternativas a la utilidad esperada: una interpretación en términos de bienestar social, *Investigaciones Económicas, vol. 11(3).* 1987.

[47] Hicks, J. R.: *Value and capital: An inquiry into some fundamental principles of economic theory.* Clarendon Press. 1939.

[48] Hokkanen, J., Salminen, P.: ELECTRE III and IV decision aids in an environmental problem , *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 6(4).* 1997.

[49] Hong, Q.Y., Yao, H., Dewey, J..: A general method for calculating functions of fuzzy numbers, *Applied Mathematics Letters, vol. 5 (6).* 1992.

[50] Inuiguchi, M., Ramík, J.: Probabilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparision with stochastic programming in portfolio selection problem, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 111.* 2000.

[51] Jacket-Lagreze, E., Siskos, J.: Assessing a set of additive utility function for multicriteria decision making, the UTA method, *European Journal of Operational Research, vol. 10.* 1982.

[52] Jiménez, M. et al.: Approximate resolution of an imprecise goal programming model with nonlinear membership functions, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 150*. 2005.

[53] Kaufmann, A. Gupta, M. M.: *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications*. Van Nostrand Reinhold. 1985.

[54] Keeney, R. L.: Public values and public policy, *Decision Science and Technology: Reflections on the contributions of Wards Edwards (Edts: Shanteau, J., Mellers, B.A., Schum, D. A.)*. 1999.

[55] Keeney, R. L. Raiffa, H.: *Decisions with multiple objectives : preferences and value trade offs*. John Wiley and Sons. 1976.

[56] Krantz, D.H.: Conjoint measurement: The Luce-Tukey axiomatization and some extensions, *Journal of Mathematical Psychology, vol. 1*. 1964.

[57] Krantz, D. H., et al.: *Foundations of measurement*. Academic Press. 1971.

[58] Leysen, J., Pastijn, H.: Constructing an outranking relation with ORESTE, *Mathematical and Computer modelling, vol. 12(10-11)*. 1989.

[59] Lipsey, R. G.: *Introducción a la economía positiva*. Vicens-Vives. 1999.

[60] Lootsma, F. A.: The REMBRANDT system for multi-criteria decision analysis via pairwise comparisons or direct ratin, *Report 92-05, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology*. Delft, Netherlands. 1992.

[61] Lootsma, F. A.: *Fuzzy logic for planning and decision making*. Kluwer Academic Publishers. 1997.

[62] López, J. M., De Paz, S.: Más allá de la utilidad esperada: una introducción a la utilidad del proceso, *XIII Jornadas de ASEPUMA*. 2005.

[63] Ma, M., Kandell, A., Friedman, M.: Representing and comparing two kinds of fuzzy numbers, *IEEE Transactions on Systems, Mandagement and cybernetics, vol. 28(4)*. 1998.

[64] Mareschal, B.: Stochastic multicriteria decision making and uncertainty, *European Journal of Operational Research, vol. 26*. 1986.

[65] Mareschal B., Brans, J.P.: Geometrical representations for MCDA. The GAIA Module, *European Journal of Operational Research, vol. 33.*1988.

[66] Matarazzo, B.: A pairwise Criterion Comparison Approach: The MAP-PAC and PRAGMA methods, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Spinger Verlag, Berlin, 1990.

[67] McDaniels, T. L.: A multiattribute index for evaluating environmental impacts of electric utilities, *Journal of Environmental Management, vol. 46.* 1996.

[68] Miyamoto, J. M., Wakker, P.: Multiattribute utility theory without expected utility foundations, *Operations Research, vol.44 (2).* 1996.

[69] Mora, J. J.: *Introducción a la teoría del consumidor : de las preferencias a la estimación.* Universidad ICESI. 2002.

[70] Morillas, A. *Introducción al análisis de datos difusos.* Edición electrónica. Texto completo en www.eumed.net/libros/2006b/amr/ . 2006.

[71] T., Mousseau, V.: Using assignment examples to infer category limits for the ELECTRE TRI method, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 11(1).* 2002.

[72] Nahmias, S.: Fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 1.* 1978.

[73] Orlovsky, S.A.: On formalization of a general fuzzy mathematical problem, *Fuzzy Sets and Systems, vol. 3.* 1980.

[74] Puri, M.L., Ralescu, D.A.: Differentials of fuzzy functions, *Journal of Mathematical Analysis and applications, vol. 91.* 1983.

[75] Pindyck, R. S. Rubinfeld, D. L.: *Microeconomía.* Prentice-Hall international. 1998.

[76] Ramík, J. Vlach, M.: *Generalizad concavity in fuzzy optimization and decision analysis.* Kluwer Academic Publishers. 2002.

[77] Rauschmayer, F.: Reflections on ethics and MCA in environmental decisions, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 10(2).* 2001.

[78] Rothbard, M. N.: *Historia del pensamiento económico. Vol. 1, El pensamiento económico hasta Adam Smith.* Unión Editorial. 1999.

[79] Roy, B.: The outranking approach and the Foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decisions, vol. 31(1).* 1991.

[80] Saaty, T. L.: A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology, vol. 15.* 1977.

[81] Saaty, T. L.: Axiomatic foundation of the Analytic Hierarchy Process", *Management Science, vol. 32(7).* 1986.

[82] Schoemaker P. J.: The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations, *Journal of Economic Literature, vol. 20.* 1982.

[83] Siskos, J., Yannacopoulos, D.: UTASTAR-An ordinal regresion method for building additive value functions, *Investigaçao Operational, vol. 5(1).* 1985.

[84] Stewart, T. J.: Simplified approaches for multi-criteria decision making under uncertainty, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 4(4).* 1995.

[85] Stewart, T. J.: Robustneess of additivevalue function methods in MCDM, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 5(4).* 1996.

[86] Szidarovszky, F., Zarghami, M.: Stochastic-fuzzy multi criteria decision making for robust water resources management, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, recurso on line.* 2008.

[87] Varian, H. R.: *Microeconomía intermedia: un enfoque moderno.* Antoni Bosch. 2001.

[88] Van Den Honert, R. C.: Stochastic Pairwise Comparative Judgements and Direct Ratings of Alternatives in the REMBRANDT System, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 7.* 1998.

[89] Vasnick, J-C.: On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research, vol. 24.* 1986.

[90] Von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and economics behaviour.* Princeton University Press. 1944.

[91] Zadeh, L.A.: Fuzzy sets, *Information and Control, vol. 8.* 1965.

[92] Zadeh, L.A.: The concept of Linguistic variables and its applications to approximate reasoning. Part I, *Information Sciences, vol. 8 (3).* 1975.

[93] Zadeh, L.A.: The concept of Linguistic variables and its applications to approximate reasoning. Part II, *Information Sciences, vol. 8 (4)*. 1975.

[94] Zadeh, L.A.: The concept of Linguistic variables and its applications to approximate reasoning. Part III, *Information Sciences, vol. 9 (1)*. 1975.

[95] Zanakis, H. S., Solomon, A., Wishart, N., Dublish, S.: Multi-attribute decision making: A simulation comparision of select methods, *European Journal of Operational Research, vol. 107.* 1998.

[96] Zimmermann, H.J.: Fuzzy mathematical programming, *Computers and Operations Research, vol. 4*. 1983.

[97] Zimmermann, H. J.: *Fuzzy set theory and its applications*. Kluwer Academic Publishers. 1991.

[98] Zopounidis, C, y Doumpos, M.: A multicriteria decision aid methodology for the assessment of country risk, *European Research on Management and Business Economic vol. 3.* 1997.

[99] Zopounidis, C, y Doumpos, M.: Building additive utilities for multigroup hierarchical discrimination: The MHDIS method, *Optimization Methods and Software vol. 14.* 2000.

[100] Zopounidis, C, y Doumpos, M.: A preference disaggregation decision support system for financial classification problems, *European Journal of Operations Research vol. 130.* 2001.

[101] Zopounidis, C, y Doumpos, M.: *Multicriteria decisin aid classification methods*. Kluwer Academic Publishers. 2002.

Recursos electrónicos más usados:

- *http://fama.us.es*
- *http://bib.us.es/recursos/recursos_e.asp*
- *www.decisionarium.tkk.fi/*
- *http://www.unesco.org.uy/red-m/glosariom.htm*
- *www.lamsade.dauphine.fr*