

215756

049  
82

LBS 908840

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en *Estadística e I.O.*  
de la *Fac. Matemáticas*  
de esta Universidad desde el día *3-9-92*  
hasta el día *21-9-92*

Sevilla 21 de Septiembre de 1992

EL DIRECTOR DE

Autorizo la  
consulta del  
presente trabajo

PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN MULTI OBJETIVO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al tomo *39* número *130* del libro  
correspondiente. *1 SET. 1992*  
Sevilla,

El Jefe del Registro de Tesis,

Visado en Sevilla

El Director

Francisco R. Fernández García

Memoria que presenta

Emilio Carrizosa Priego

para optar al grado de

Doctor en Matemáticas

Emilio Carrizosa Priego

PROBLEMAS DE LOCALIZACION MULTIOBJETIVO

EMILIO CARRIZOSA

Muchas han sido las personas que han contribuido de una manera u otra a la realización de este trabajo.

En el campo profesional (aunque no sólo profesional es mi relación con ellos) desearía expresar mi más sincera gratitud a los Doctores Fernández García, Puerto Albandoz y al Profesor Conde Sánchez por su apoyo tanto científico como humano en todo momento.

Agradezco asimismo a todo el Euro Working Group sus muchas enseñanzas y aliento.

Dit werk heb ik gedaan tijdens mijn verblijf in België.

Graag wil ik mijn hartelijke dank betuigen aan mijn begeleider, professor Plastria, die veel tijd en energie in mij geïnvesteerd heeft.

En el campo personal, no puedo dejar pasar esta ocasión sin recordar a mi familia, y, muy especialmente, a Meli.

Saben sobradamente que sin su cariño este trabajo no habría sido posible.

Gracias a todos.

*A mi familia*

*A Meli*

## INTRODUCCION

En el problema espacial de localización de un servicio, el objetivo es determinar el punto (o conjunto de puntos) del espacio factible donde localizar un servicio para servir *óptimamente* a un conjunto de puntos de demanda en  $\mathbb{R}^n$ .

Más precisamente, dada una métrica  $d$  en  $\mathbb{R}^n$ , y dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  (*conjunto de puntos de demanda*) y  $S$  (*conjunto de puntos factibles*), se desea determinar las soluciones óptimas del problema  $P(A,S)$ ,

$$P(A,S): \quad \min_{x \in S} (d(a,x) : a \in A)$$

donde la minimización hay que entenderla con respecto a una estructura de preferencias prefijada.

Tradicionalmente se ha impuesto que esta estructura de preferencias venga inducida por una cierta función de utilidad, por lo que el problema anterior queda reducido a la resolución de un problema uniobjetivo de Programación Matemática de la forma

$$\min_{x \in S} \psi((d(a,x) : a \in A))$$

Ejemplos clásicos destacados de esta formulación son el *problema de Weber*:

$$\min_{x \in S} \sum_{a \in A} w_a d(a,x)$$

y el *problema minmax*:

$$\min_{x \in S} \max\{w_a d(a,x) : a \in A\}$$

si bien una gran variedad de modelos pueden ser encontrados en la literatura; (el lector podrá encontrar más de cuarenta en el trabajo de Brandeau y Chiu (1989)). El principal inconveniente de esta aproximación al problema consiste en que el decisor debe determinar la función de utilidad que expresa sus preferencias, lo cual constituye en sí un problema.

En palabras de Erkut y Neuman (1989),

"El proceso de selección de la localización para la facilidad es demasiado complejo para ser representado con precisión usando modelos tratables uniobjetivo".

En contraste con la larga tradición de estos problemas uniobjetivo (los primeros trabajos datan del siglo XVII, con Fermat), la consideración del problema de localización como un problema de naturaleza multiobjetivo es relativamente reciente: exceptuando los primeros trabajos (Kuhn, 1967; Wendell-Hurter, 1973), habrá que esperar hasta finales de los años 70 y la década de los 80 para asistir al desarrollo de resultados relevantes acerca del problema  $P(A,S)$  considerado como un problema de optimización vectorial.

Desde entonces, han ido apareciendo en la literatura multitud de resultados referentes a distintos conjuntos solución (puntos eficientes, débilmente eficientes, propiamente eficientes, quasinúcleos, etc.) para distintas métricas (inducidas por normas  $l_p$ , por gauges poliédricas, por normas estrictamente convexas, etc.).

Como muestra, podemos citar los trabajos de Wendell - Hurter - Lowe (1977), Hansen - Perreux - Thisse (1980), Chalmet - Francis - Kolen (1981), Juel - Love (1983), Plastria (1983, 1984), Lowe - Thisse - Ward - Wendell (1984), Thisse - Ward - Wendell (1984), Durier - Michelot (1985, 1986), Pelegrín - Fernández (1988) y Durier (1990).

Sin embargo, en prácticamente todos estos trabajos se hace la hipótesis de que cualquier punto es factible, lo cual puede ser una aproximación bien poco acertada en problemas reales, debido a la existencia de barreras físicas (montañas, lagos, etc.).

El objetivo del presente trabajo es el estudio de ciertos aspectos del problema multiobjetivo  $P(A,S)$  cuando el conjunto factible  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

Después de revisar ciertos conceptos y resultados básicos en el capítulo I, en el capítulo II caracterizamos los clásicos conjuntos solución para el problema  $P(A,S)$  cuando el espacio factible es un subconjunto cerrado y convexo de  $\mathbb{R}^n$ .

Si bien esta caracterización supone un paso adelante, no podemos considerar esta extensión como definitiva. En palabras de Erkut y Neuman (1989):

"Asumir que la región factible es convexa ignora realidades geográficas y jurídicas".

Con esta motivación, estudiamos en el capítulo III el mismo problema, prescindiendo ahora de la convexidad del espacio factible  $S$ .

Como resultado más significativo, obtenemos una caracterización geométrica del conjunto débilmente eficiente, que conduce a un procedimiento constructivo de obtención de éste cuando  $S$  puede descomponerse en conjuntos poliédricos.

Los resultados obtenidos en estos capítulos son explotados en el capítulo IV para abordar un problema (aparentemente nada relacionado con el anterior) de Localización Competitiva: el cálculo de centroides, para el que proponemos un algoritmo polinomial de resolución.

Estos primeros capítulos parten de la hipótesis de que el servicio es *atractivo*, en tanto en cuanto los puntos de demanda desean el servicio tan próximo a ellos como sea posible. Si bien éste es el caso de ciertos servicios (escuelas, bibliotecas, áreas comerciales,...), existe toda una gama de servicios (centrales nucleares, instalaciones militares, vertederos de basuras,...) que, por su carácter peligroso o contaminante resultan *repulsivos* para los puntos de demanda.

Éste es el contenido del capítulo V, en el que caracterizamos los conjuntos solución del problema multiobjetivo

$$\begin{aligned} & \text{máx } (d(a,x) : a \in A) \\ & x \in S \end{aligned}$$

A excepción del capítulo IV, que es abordado con más generalidad, a lo largo de este trabajo imponemos que la distancia  $d$  es la euclídea. El motivo es simple: la distancia euclídea es, con mucho, la métrica más tratable analíticamente. Este hecho ha motivado en la historia de la teoría de localización que muchos resultados y algoritmos fueran establecidos primero para la distancia euclídea y posteriormente generalizados (con herramientas teóricas más sofisticadas). Éste ha sido el caso, por ejemplo, del algoritmo de Weiszfeld o el teorema de Kuhn.

El lector podrá apreciar que gran parte de los resultados establecidos en este trabajo parecen ser generalizables a otras métricas (por ejemplo las estrictamente convexas).

Esperamos conseguir este objetivo en un futuro no muy lejano.

## INDICE

CAPÍTULO I. Conceptos y resultados preliminares	1
I.1. Eficiencia	2
I.2. Centroides	5
CAPÍTULO II. Problemas multiobjetivo con región factible convexa	8
II.1. Resultados generales	9
II.2. Puntos eficientes	14
II.3. Puntos propiamente eficientes	22
CAPÍTULO III. Problemas multiobjetivo con región factible cerrada	25
III.1. Descomposiciones convexas-cerradas del conjunto factible	26
III.2. Eficiencia débil	31
III.3. Una construcción geométrica del conjunto débilmente eficiente	39

CAPÍTULO IV. Problemas de localización en ambiente competitivo	45
IV.1. Planteamiento del problema	46
IV.2. Evaluación de la función objetivo	48
IV.3. Centroides con gauges poliédricas	59
IV.4. Centroides con la norma euclídea	66
CAPÍTULO V. Localización multiobjetivo de un centro repulsivo	79
V.1. Resultados generales	80
V.2. Caracterización geométrica del conjunto débilmente eficiente	84
V.3. Caracterización geométrica del conjunto eficiente	97
Bibliografía	102

CAPITULO I

CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES

## 1.1. EFICIENCIA

El concepto de *solución óptima* de un problema de optimización escalar P.E.,

$$\text{P.E.:} \quad \min_{x \in S} f(x)$$

$(f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$  no se extiende de manera única a *problemas de optimización vectorial*, es decir: a problemas de optimización en los que la función objetivo no valora las alternativas  $x$  a través de un escalar  $f(x)$ , sino a través de un vector  $(f_a(x): a \in A)$  con cada  $f_a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pueden encontrarse en la literatura diversos conjuntos solución asociados al problema de optimización vectorial P.V.,

$$\text{P.V.:} \quad \min_{x \in S} (f_a(x): a \in A)$$

Mencionemos los más significativos:

**Definición 1.1. (Eficiencia).**

Se dice que un punto  $x \in S$  es una *solución eficiente* de P.V. sii no existe  $y \in S$  que verifique:

- $f_a(y) \leq f_a(x) \quad \forall a \in A$
- $f_a(y) < f_a(x)$  para algún  $a \in A$ .

Denotemos por  $E$  el conjunto de soluciones eficientes del problema P.V.

**Definición 1.2.** (Eficiencia débil).

Se dice que un punto  $x \in S$  es una solución *débilmente eficiente* de P.V. sii no existe  $y \in S$  que verifique:

$$\cdot f_a(y) < f_a(x) \quad \forall a \in A$$

Denotemos por WE el conjunto de soluciones débilmente eficientes de P.V.

**Definición 1.3.** (Eficiencia propia).

Se dice que un punto  $x \in S$  es una solución *propia* eficiente de P.V. sii  $x$  verifica:

•  $x$  es eficiente.

• Existe  $M > 0$  tal que, si  $y \in S$  es tal que  $f_a(y) < f_a(x)$  para algún  $a \in A$ , entonces existe  $b \in A$  tal que  $f_b(x) < f_b(y)$ , y además,

$$f_a(x) - f_a(y) \leq M(f_b(y) - f_b(x))$$

Si denotamos por PE el conjunto de soluciones propiamente eficientes de P.V., de las definiciones anteriores se desprende:

**Teorema 1.**

$$PE \subset E \subset WE$$

Si bien remitimos al lector a los trabajos clásicos de Chankong-Haines (1983), Steuer (1986) o White (1982) para el estudio detallado de estos y otros conjuntos solución asociados a P.V., enunciamos a continuación algunos resultados que serán utilizados frecuentemente en este trabajo.

Dado un conjunto  $X$ , denotemos por  $|X|$  su cardinal.

Teorema 1.2. (Lowe, Thisse, Ward y Wendell, 1984).

Supongamos que  $S$  es un conjunto cerrado convexo y no vacío en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  es finito y cada  $f_a$  es una función convexa definida en  $S$ .

Dado  $x \in S$ , son equivalentes:

i)  $x$  es una solución débilmente eficiente de P.V.

ii) Existe  $\lambda = (\lambda_a)_{a \in A} \in [0, \infty)^{|A|}$ ,  $\lambda \neq 0$  tal que  $x$  es una solución óptima del problema escalar  $\min_{z \in S} \sum_{a \in A} \lambda_a f_a(z)$

Teorema 1.3. (White, 1982)

Si  $S$  es cerrado,  $A$  es finito, y cada  $f_a$  es continua, entonces  $WE$  es cerrado.

Teorema 1.4. (White, 1982).

Si, para cada  $x \in S$ , el conjunto  $\{z \in S: f_a(z) \leq f_a(x)\}$  es compacto, entonces,

$$\forall x \in S \exists y \in E / f_a(y) \leq f_a(x) \quad \forall a \in A$$

Teorema 1.5. (Geoffrion, 1968).

En las hipótesis del teorema 1.2., dado  $x \in S$ , son equivalentes:

i)  $x$  es una solución propiamente eficiente de P.V.

ii) Existe  $\lambda = (\lambda_a)_{a \in A} \in (0, \infty)^{|A|}$  tal que  $x$  es una solución óptima del problema escalar

$$\min_{z \in S} \sum_{a \in A} \lambda_a f_a(z)$$

## 1.2. CENTROIDES

Considérese el problema de optimización vectorial

$$\text{P.V.:} \quad \min_{x \in S} (f_a(x) : a \in A)$$

y supongamos que cada atributo  $a$  lleva asociado un escalar positivo (peso)  $w(a)$ .

Para cada subconjunto  $A' \subset A$ , denotemos por  $w(A')$  el peso del conjunto de atributos de  $A'$ :

$$w(A') = \sum_{a \in A'} w(a)$$

Un concepto de solución asociado al problema P.V. poco estudiado en la literatura de optimización vectorial es el de *centroide* de P.V.:

### Definición 1.4.

Un punto  $x \in S$  se dice un *centroide* para P.V. con vector de pesos  $w \in (0, \infty)^{|A|}$  sii  $x$  es solución óptima del problema de optimización escalar

$$\min_{z \in S} \mu(z)$$

con

$$\mu(z) = \max_{y \in S} w(\{a \in A : f_a(y) < f_a(z)\})$$

Los centroides, también llamados puntos de *Simpson* (Durier, 1989), o puntos *minmax* (Simpson, 1969; Demange, 1983), son las alternativas menos cuestionables de  $S$ , en el sentido de que para cualquier otra alternativa  $z \in S$  existe un mayor consenso en el conjunto de atributos sobre la no-optimalidad de  $z$ .

Como han señalado varios autores (véase, por ejemplo, Schofield, 1985), existe una estrecha relación entre el concepto de centroide y el de eficiencia débil, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Para cada subconjunto no vacío  $A'$  de  $A$ , denotemos por  $WE(A')$  el conjunto de alternativas débilmente eficientes para el problema

$$\min_{x \in S} (f_a(x) : a \in A')$$

**Teorma 1.6.** (Schofield, 1985).

Sea  $x \in S$ . Se tiene que

$$\mu(x) = \text{máx} \{w(A') : A' \subset A, x \notin WE(A')\}$$

Hemos comentado que el concepto de centroide es inusual en teoría de optimización vectorial. No lo es tanto en teoría de localización, donde los centroides admiten una interpretación clara en el contexto de teoría de localización en ambiente competitivo:

Considérese un conjunto finito  $A$  que representa un conjunto de puntos de demanda. Dos empresas,  $F_1$  y  $F_2$ , desean entrar en el mercado  $A$ , localizando secuencialmente un punto de servicio cada una, dentro de una región  $S$  (región factible).

Una vez que  $F_1$  instala su servicio,  $F_2$  localizará el suyo en un punto que le permita conseguir la máxima penetración posible en el mercado.

Se imponen sobre el modelo las siguientes hipótesis:

- La demanda es totalmente *inelástica* con respecto a las distancias, i.e.: el nivel de demanda de un punto no se ve afectado por la distancia a la que se encuentren los puntos de servicio.

- Las preferencias son *binarias*: Todo punto de demanda acude siempre al punto de servicio más cercano; en caso de empate, usa el servicio de  $F_1$ .

En este juego bipersonal, nosotros jugamos el papel de  $F_1$ , luego el objetivo del problema es determinar los *centroides*, que son las localizaciones  $x \in S$  para el servicio de  $F_1$  de modo que  $F_2$  consiga la mínima penetración en el mercado.

CAPITULO II

PROBLEMAS MULTIOBJETIVO

CON REGION FACTIBLE CONVEXA

## 2.1. RESULTADOS GENERALES

El objetivo de este capítulo es caracterizar los conjuntos de soluciones débilmente eficientes ( $WE(A,S)$ ), eficientes ( $E(A,S)$ ) y propiamente eficientes ( $PE(A,S)$ ) del problema de optimización vectorial  $P(A,S)$ :

$$P(A,S) \quad \min_{x \in S} (d(a,x) : a \in A)$$

cuando la métrica  $d$  es la *distancia euclídea*, i.e.:

$$d(x,y) = \langle x-y, x-y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ .

Establezcamos previamente una serie de resultados generales. Dado un conjunto arbitrario  $X \subset \mathbb{R}^n$ , sea  $H(X)$  su cierre convexo.

**Lema 2.1.**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ . Dados  $x,y \in \mathbb{R}^n$ , son equivalentes:

- i)  $d(x,a) < d(y,a) \quad \forall a \in A$ .
- ii)  $d(x,a) < d(y,a) \quad \forall a \in H(A)$ .

**Demostración.**

Evidentemente ii) implica i); para probar el recíproco, considérese la función  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\psi(a) = d^2(a,x) - d^2(a,y) = \langle x,x \rangle - \langle y,y \rangle + 2\langle a, y-x \rangle$$

que es lineal en  $a$ .

Dado  $a^* \in H(A)$ , por el teorema de Carathéodory, existe  $A' \subset A$ ,  $A'$  finito tal que  $a^* \in H(A')$ .

Por ser  $\psi$  lineal y  $H(A')$  un politopo, se sigue (de la hipótesis i)) que

$$\psi(a^*) \leq \max_{a \in A'} \psi(a) < 0$$

i.e.:

$$d(a^*, x) < d(a^*, y)$$

Como  $a^*$  es un elemento arbitrario de  $H(A)$ , se sigue que

$$d(a^*, x) < d(a^*, y) \quad \forall a^* \in H(A)$$

como queríamos demostrar ■

#### Teorema 2.1.

Sean  $A, S \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos no vacíos. Se tiene que

$$WE(A, S) = WE(H(A), S)$$

#### Demostración.

La inclusión  $WE(A, S) \subset WE(H(A), S)$  se sigue de la definición de eficiencia débil. Para el recíproco, razonemos por reducción al absurdo: supongamos que existe  $x \in WE(H(A), S)$ ,  $x \notin WE(A, S)$ . Por definición,

$$\exists y \in S \text{ tal que } d(y, a) < d(x, a) \quad \forall a \in A$$

que, por el lema anterior, implica que

$$d(y, a) < d(x, a) \quad \forall a \in H(A)$$

contradiciendo la hipótesis de que  $x \in WE(H(A), S)$ . Por tanto, se tiene la igualdad ■

Dado un conjunto compacto  $X$ , su cierre convexo  $H(X)$  es un conjunto compacto y convexo, cuyo conjunto de puntos extremos será denotado por  $\text{ext}(X)$ .

**Corolario 2.1.**

Sean  $A$  y  $S$  conjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  compacto.

$$WE(A,S) = WE(\text{ext}(A),S)$$

**Demostración.**

Por el teorema anterior,

$$WE(A,S) = WE(H(A),S) = WE(H(\text{ext}(A)),S) = WE(\text{ext}(A),S)$$

luego se tiene el resultado ■

**Observación 2.1.**

Este tipo de resultados es de gran interés práctico cuando el conjunto de demanda  $A$  es finito, ya que posiblemente  $\text{ext}(A)$  sea de cardinal mucho más reducido que  $A$ .

Algunos resultados de geometría estadística avalan este comentario; por ejemplo, asintóticamente, el cardinal esperado de  $\text{ext}(A)$  es  $O(|A|^{1/3})$  (respectivamente  $O(\log(|A|))$ ) si los puntos de  $A$  son una muestra aleatoria simple procedente de una distribución uniforme sobre un disco (respectivamente sobre un rectángulo) de  $\mathbb{R}^2$ . (Véanse Raynaud, 1970; Bentley et al., 1978).

Denotemos por  $\mathcal{C}(n)$  la familia

$$\mathcal{C}(n) = \{S \subset \mathbb{R}^n : S \neq \emptyset, S \text{ es cerrado y convexo}\}$$

El siguiente teorema extiende a problemas restringidos el resultado clásico que afirma que  $WE(A, \mathbb{R}^n) = E(A, \mathbb{R}^n)$ :

**Teorema 2.2.**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $S \in \mathcal{C}(n)$ . Se tiene que

$$WE(A, S) = E(A, S)$$

**Demostración.**

La inclusión  $E(A, S) \subset WE(A, S)$  se sigue directamente de la definición de eficiencia y eficiencia débil.

La demostración del recíproco es la generalización natural del teorema 2 de Thisse-Ward-Wendell (1984):

Observemos que, fijado  $a \in A$ , la aplicación  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow d^2(a, x)$  es una función estrictamente convexa.

Si existiera  $x \in WE(A, S)$ ,  $x \notin E(A, S)$ , existiría (por definición) un cierto  $y \in S$  tal que

$$d^2(a, y) \leq d^2(a, x) \quad \forall a \in A$$

$$d^2(a, y) < d^2(a, x) \quad \text{para algún } a \in A$$

En particular, se sigue que  $y \neq x$ . Sea  $z = (x+y)/2$ . Por convexidad de  $S$ , se sigue que  $z \in S$ . Por ser  $d^2(a, \cdot)$  una función estrictamente convexa, se tiene que

$$d^2(a, z) < d^2(a, x) \quad \forall a \in A$$

contradiciendo la hipótesis de que  $x \in WE(A, S)$ . Por tanto, se da la igualdad entre  $WE(A, S)$  y  $E(A, S)$  ■

### Observación 2.2.

El resultado anterior deja de ser cierto si se suprime la hipótesis de convexidad sobre el conjunto factible  $S$ , como muestra el siguiente contraejemplo:

Sean  $n=1$ ,  $A = \{a,b\}$ , con  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $S=\mathbb{R}\setminus(0,2)$ . Se sigue que el punto  $x=2$  es débilmente eficiente (de hecho, es solución óptima del problema  $\min_{t \in S} d(b,t)$ ), pero no es eficiente, ya que  $d(a,0) < d(a,x)$ ,  $d(b,0) = d(b,x)$  ■

El resto de este capítulo está dedicado a caracterizar geoméricamente los conjuntos  $WE(A,S)$ ,  $E(A,S)$  y  $PE(A,S)$  del problema  $P(A,S)$  bajo ciertas hipótesis. Mientras no se especifique lo contrario, asumiremos lo siguiente:

- H1:  $A$  es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^n$ .
- H2:  $S \in \mathcal{C}(n)$ , i.e.:  $S$  es un conjunto convexo cerrado no vacío de  $\mathbb{R}^n$ .

En la sección siguiente caracterizamos el conjunto  $E(A,S)$  (que, por el teorema 2.2., coincide con  $WE(A,S)$ ), reservando la última sección del capítulo para caracterizar el conjunto de soluciones propiamente eficientes.

## 2.2. PUNTOS EFICIENTES

Dado un conjunto  $X \in \mathcal{C}(n)$  y un punto  $y \in \mathbb{R}^n$ , denotemos por  $\text{proj}_X(y)$  el punto en  $X$  más próximo a  $y$ , es decir:  $\text{proj}_X(y)$  es la solución óptima del problema de optimización

$$\min_{x \in X} d(x, y)$$

Para un conjunto no vacío  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , denotemos por  $\text{proj}_X(Y)$  el conjunto

$$\text{proj}_X(Y) = \bigcup_{y \in Y} \text{proj}_X(y)$$

Como  $X \in \mathcal{C}(n)$  y la norma euclídea es una norma estrictamente convexa (i.e.: la frontera de sus bolas no contiene segmentos no degenerados), el problema de optimización anterior admite solución única, luego  $\text{proj}_X(\cdot)$  está bien definido.

**Lema 2.2.**

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $w = (w_a)_{a \in A} \in [0, \infty)^{|A|}$ ,  $\sum_{a \in A} w_a = 1$ .

Son equivalentes:

i)  $d(x, \sum_{a \in A} w_a a) \leq d(y, \sum_{a \in A} w_a a)$

ii)  $\sum_{a \in A} w_a d(x, a)^2 \leq \sum_{a \in A} w_a d(y, a)^2$

**Demostración.**

Es fácil probar que, para todo  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{a \in A} w_a d(z, a)^2 = d(z, \sum_{a \in A} w_a a)^2 - d(0, \sum_{a \in A} w_a a)^2 + \sum_{a \in A} w_a d(0, a)^2$ . Por tanto,  $\sum_{a \in A} w_a d(x, a)^2 \leq \sum_{a \in A} w_a d(y, a)^2$  sii  $d(x, \sum_{a \in A} w_a a)^2 \leq d(y, \sum_{a \in A} w_a a)^2$ , i.e.:  $d(x, \sum_{a \in A} w_a a) \leq d(y, \sum_{a \in A} w_a a)$  ■.

**Observación 2.3.**

Con la misma demostración, puede probarse que

$d(x, \sum_{a \in A} w_a a) < d(y, \sum_{a \in A} w_a a)$  sii  $\sum_{a \in A} w_a d(x, a)^2 < \sum_{a \in A} w_a d(y, a)^2$

**Teorema 2.3.**

Sean  $X \in \mathcal{C}(n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Son equivalentes:

i) No existe  $y \in X$  tal que

$$d(y, a) < d(x, a) \text{ para todo } a \in A$$

ii) Existe  $a^* \in H(A)$  tal que

$$d(a^*, y) \geq d(a^*, x) \text{ para todo } y \in X$$

**Demostración.**

Evidentemente, la condición i) se verifica sii el conjunto  $Y$ ,

$$Y = \{y \in X : d(y, a)^2 < d(x, a)^2 \quad \forall a \in A\}$$

es vacío. Como cada función  $d(\cdot, a)$  es convexa, por el teorema 4.2.3 de Mangasarian (1969), se tiene que  $Y$  es vacío sii

$$\exists w = (w_a)_{a \in A} \in W / \sum_{a \in A} w_a d(x, a)^2 \leq \min_{y \in X} \sum_{a \in A} w_a d(y, a)^2$$

con  $W = \{\lambda \in [0, \infty)^{|A|}, \sum_{a \in A} \lambda_a = 1\}$ , i.e. (aplicando el lema precedente), sii

$$\exists w \in W / d(x, \sum_{a \in A} w_a a) \leq \min_{y \in X} d(y, \sum_{a \in A} w_a a)$$

i.e.: sii

$$\exists a^* (a^* = \sum_{a \in A} w_a a) \in H(A) / d(x, a^*) \leq \min_{y \in X} d(y, a^*)$$

que es la condición ii).

Por tanto, i) y ii) son equivalentes ■

El teorema de alternativa anterior proporciona una sencilla caracterización del conjunto  $E(A, S)$  tan pronto como  $S \in \mathcal{C}(n)$ , extendiendo a problemas con restricciones el resultado clásico de Kuhn (1967), que afirma que  $E(A, \mathbb{R}^n) = H(A)$ :

#### Teorema 2.4.

Dado un conjunto  $S \in \mathcal{C}(n)$ , se tiene:

$$WE(A, S) = E(A, S) = \text{proj}_S H(A)$$

#### Demostración.

Como  $S \in \mathcal{C}(n)$ , se sigue del teorema 2.2 que  $WE(A, S) = E(A, S)$ .

Sea  $x \in S$ ; por definición de eficiencia débil,

$$x \in WE(A, S) \text{ sii no existe } y \in S / d(y, a) < d(x, a) \quad \forall a \in A$$

Por el teorema previo, esta condición es equivalente a que

$$\exists a^* \in H(A) / d(a^*, y) \geq d(a^*, x) \quad \forall y \in S$$

i.e.: (nótese que  $x \in S$ )

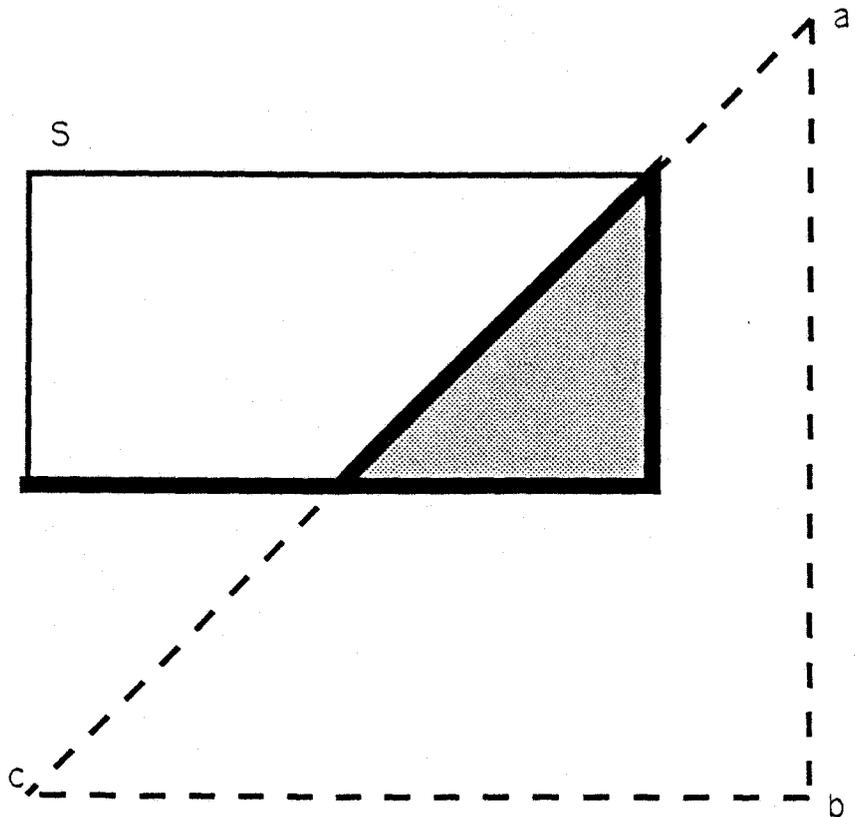
$$\exists a^* \in H(A) \text{ tal que } x = \text{proj}_S(a^*),$$

i.e.:

$$x \in \text{proj}_S (H(A))$$

Por lo tanto, se tiene el resultado ■

Un ejemplo aparece en la figura siguiente:  $S$  es un rectángulo, y  $A=\{a,b,c\}$ .



En esta sección hemos caracterizado el conjunto de soluciones (débilmente) eficientes del problema de localización multiobjetivo

$$P(A,S): \quad \min_{x \in S} (d(a,x): a \in A)$$

bajo las hipótesis:

- A es un conjunto finito.
- S es un conjunto cerrado y convexo no vacío.
- d es la distancia euclídea.

Cabe preguntarse si los resultados obtenidos siguen siendo válidos bajo condiciones más generales.

Consideremos en primer lugar la hipótesis de finitud del conjunto de puntos de demanda A. Evidentemente, será deseable caracterizar  $E(A,S)$  en el caso más general en que A es un conjunto compacto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$ , pues podríamos cubrir así los problemas en los que la demanda no es puntual, sino que está distribuida en una cierta región (una ciudad, por ejemplo).

Vemos a continuación que la fórmula del teorema anterior sigue siendo válida:

Lema 2.3. (Plastria-Carrizosa, 1992)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^p$  un conjunto compacto no vacío, y sea  $\{f_a\}_{a \in A}$  una familia de funciones convexas en  $\mathbb{R}^n$  tales que la aplicación  $a \in A \longrightarrow f_a(x)$  es continua para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dados  $S \in \mathcal{C}(n)$ ,  $x \in S$ , son equivalentes:

i)  $x$  es una solución débilmente eficiente del problema

$$\min_{z \in S} (f_a(z) : a \in A)$$

ii) Existe  $A' \subset A$ ,  $A'$  finito tal que  $x$  es una solución débilmente eficiente del problema

$$\min_{z \in S} (f_a(z) : a \in A')$$

Teorema 2.5.

Sea  $A$  un conjunto compacto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ , y  $S \in \mathcal{C}(n)$ .

$$WE(A, S) = E(A, S) = \text{proj}_S(H(A))$$

Demostración.

En primer lugar, obsérvese que la igualdad  $WE(A, S) = E(A, S)$  fue probada en el teorema 2.2.

Por el lema anterior,

$$WE(A, S) = \bigcup_{A' \subset A, A' \text{ finito}} WE(A', S)$$

Por el teorema 2.4, para cada  $A'$  finito,

$$WE(A', S) = \text{proj}_S(H(A'))$$

Por el teorema de Carathéodory,

$$\bigcup_{A' \subset A, A' \text{ finito}} H(A') = H(A)$$

Por tanto,

$$WE(A, S) = \bigcup_{A' \subset A, A' \text{ finito}} \text{proj}_S(H(A')) = \text{proj}_S(H(A))$$

como queríamos demostrar ■

#### Observación 2.4.

La hipótesis de compacidad del conjunto  $A$  es necesaria en el teorema anterior, como ponen de manifiesto los siguientes ejemplos:

• Sean  $S = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$ ,  $A = \{(t, 1/t) : 0 < t\}$  (cerrado pero no acotado). Se sigue que  $0 \in WE(A, S)$ , pero  $0 \notin \text{proj}_S(H(A))$ .

• Para el mismo  $S$ , y  $A = \{(t, 0) : 0 < t < 1\}$  (acotado, pero no cerrado), se tiene que  $0 \in WE(A, S)$ , pero  $0 \notin \text{proj}_S(H(A))$  ■.

Para conjuntos  $A$  arbitrarios (no necesariamente compactos), podemos dar al menos una inclusión:

#### Teorema 2.6.

Sea  $A$  un conjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $S \in \mathcal{E}(n)$ .

$$\text{proj}_S(H(A)) \subset E(A, S) = WE(H(A), S)$$

#### Demostración.

De los teoremas 2.1 y 2.2, se sigue que

$$WE(A, S) = E(A, S) = E(H(A), S) = WE(H(A), S)$$

Probemos ahora que  $WE(A, S) \supset \text{proj}_S(H(A))$ . Para ello, basta observar que

$$\begin{aligned} \text{proj}_S(H(A)) &= \bigcup_{A' \subset A, A' \text{ finito}} \text{proj}_S(H(A')) = \\ &= \bigcup_{A' \subset A, A' \text{ finito}} WE(A', S) \subset WE(A, S) \end{aligned}$$

Por tanto se tiene lo pedido ■

Discutimos a continuación la posible validez del teorema 2.4 para otras métricas.

Es sabido (véase Plastria, 1984), que en dimensión  $n > 2$ , se tiene

$E(A, \mathbb{R}^n) = H(A)$  sii la métrica es elipsoidal  
i.e.: la métrica es inducida por un producto escalar.

Como el resultado obtenido en el teorema 2.4 generaliza éste, sólo tiene sentido plantearse la extensión del teorema 2.4 a métricas elipsoidales (para  $n > 2$ ).

Denotemos por  $E(A, S; d^*)$  ( $WE(A, S; d^*)$ , respectivamente) el conjunto de puntos eficientes (débilmente eficientes) del problema  $P(A, S)$  con  $S$  como conjunto factible,  $A$  como conjunto de puntos de demanda y las distancias medidas por la métrica elipsoidal  $d^*$ . Denotemos asimismo por  $\text{proj}_{S, d^*}$  la proyección sobre  $S$  según la métrica  $d^*$ . Se tiene:

**Teorema 2.7.**

Sean  $S \in \mathcal{C}(n)$ ,  $A$  un conjunto compacto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ , y  $d^*$  una métrica elipsoidal. Entonces,

$$WE(A, S; d^*) = E(A, S; d^*) = \text{proj}_{S, d^*}(H(A))$$

**Demostración.**

Como  $d^*$  es una métrica elipsoidal, existe una matriz regular  $T$  tal que  $d^*(x, y) = d(Tx, Ty) \quad \forall x, y$ , donde  $d$  representa la distancia euclídea.

El resultado se obtiene aplicando el teorema 2.5., y observando que

$$WE(A, S; d^*) = E(A, S; d^*) = T^{-1} \cdot E(T \cdot A; T \cdot S; d)$$

$$\text{proj}_{S, d^*}(x) = T^{-1} \cdot \text{proj}_{T \cdot S, d}(T \cdot x)$$

La extensión del teorema 2.4 a otras normas en  $\mathbb{R}^2$  es un problema abierto.

Por último, podemos también debilitar las hipótesis de los resultados anteriores a problemas en los que la región factible  $S$  es no convexa, si bien se requieren para ello nuevas herramientas. Discutiremos este problema en el capítulo siguiente.

### 2.3. PUNTOS PROPIAMENTE EFICIENTES

Nuestro próximo teorema representa el conjunto de puntos *propiamente eficientes*,  $PE(A,S)$ , en términos de  $\text{ri } H(A)$ , el interior relativo de  $H(A)$ .

**Teorema 2.8.**

Sea  $S \in \mathcal{C}(n)$ . Se tiene:

$$PE(A,S) = (A \cap S) \cup \text{proj}_S (\text{ri } H(A))$$

**Demostración.**

Para cada  $w = (w_a)_{a \in A} \in W^+ = \{ \lambda \in (0, \infty)^{|A|}, \sum_{a \in A} \lambda_a = 1 \}$ , consideremos los problemas de optimización  $P_1(w)$  y  $P_2(w)$ ,

$$P_1(w): \quad \min_{y \in S} \sum_{a \in A} w_a d(y, a)$$

$$P_2(w): \quad \min_{y \in S} d(y, \sum_{a \in A} w_a a)$$

Para cada  $x \in S \setminus A$ , sea  $\phi_x : W^+ \longrightarrow W^+$  la función que asocia a cada  $w = (w_a)_{a \in A}$  el vector  $\phi_x(w)$ , con

$$(\phi_x(w))_a = \left[ w_a / d(x,a) \right] / \left[ \sum_{b \in A} (w_b / d(x,b)) \right]$$

Es inmediato comprobar que  $\phi_x$  es una biyección.

Probaremos en primer lugar que un punto  $x \in S \setminus A$  es solución óptima del problema  $P_1(w)$  sii  $x$  es solución óptima de  $P_2(\phi_x(w))$ .

Sea  $x \in S \setminus A$ , y sean  $f$  y  $g$  las funciones definidas como sigue:

$$f(y) = \sum_{a \in A} w_a d(y,a)$$

$$g(y) = \sum_{a \in A} (\phi_x(w))_a d(y,a)^2$$

Como  $x \notin A$ , tanto  $f$  como  $g$  son funciones convexas diferenciables en  $x$ . Además, una simple comprobación prueba que

$$\nabla f(x) = \nabla g(x) \cdot \sum_{a \in A} (w_a / 2 d(x,a))$$

Por tanto, para todo vector  $d$ ,  $\langle d, d \rangle = 1$ , las derivadas direccionales de  $f$  y  $g$  en la dirección  $d$  tienen el mismo signo, por lo que  $x$  es una solución óptima de  $P_1(w)$  sii  $g(y) \geq g(x)$  para todo  $y \in S$ , lo que, en virtud del lema 2.2, ocurre sii  $x$  es una solución óptima de  $P_2(\phi_x(w))$ .

Tenemos por tanto que  $x \in S \setminus A$  es solución óptima de  $P_1(w)$  sii  $x$  es solución óptima de  $P_2(\phi_x(w))$  (\*).

Probemos ahora que  $PE(A,S) \subset \text{proj}_S (\text{ri } H(A)) \cup (A \cap S)$ .

Para ello, sea  $x$  un punto arbitrario de  $PE(A,S)$ .

Evidentemente, si  $x \in A$ , no hay nada que probar, por lo que basta considerar el caso  $x \notin A$ .

Como  $x \in PE(A, S)$ , existe  $w \in W^+$  tal que  $x$  es una solución óptima de  $P_1(w)$ . Como  $x \notin A$ , se da (\*), luego  $\exists v (v = \phi_x(w)) \in W^+$  tal que  $x$  es solución óptima de  $P_2(v)$ , i.e.:

$$x = \text{proj}_S(a^*), \text{ con } a^* = \sum_{a \in A} v_a a.$$

Como  $A$  es finito, se tiene (véase, por ejemplo, Brøndsted, 1983) que

$$\text{ri } H(A) = \{ z \in \mathbb{R}^n / z = \sum_{a \in A} \lambda_a a \text{ para algún } \lambda \in W^+ \} (**)$$

Por tanto  $a^* \in \text{ri}(H(A))$ , luego

$$x = \text{proj}_S(a^*) \in \text{proj}_S(\text{ri}(H(A)))$$

Como  $x$  fue elegido arbitrariamente en  $PE(A, S)$ , hemos probado que

$$PE(A, S) \subset \text{proj}_S(\text{ri } H(A)) \cup (A \cap S).$$

Para probar el recíproco, obsérvese primero que el teorema de mayoría de Witzgall (1964) implica que

$$(A \cap S) \subset PE(A, S)$$

Por otro lado, para todo  $x \in \text{proj}_S(\text{ri } H(A))$ ,  $x \notin A$ , (\*\*), implica que

$$\exists v \in W^+ / x \text{ es solución óptima de } P_2(v)$$

Como  $x \notin A$ , (\*) implica que  $x$  es solución óptima de  $P_1(\phi_x(v)^{-1})$ , luego  $x \in PE(A, S)$ . Por tanto,

$$PE(S) \supseteq \text{proj}_S(\text{ri } H(A)) \cup (A \cap S)$$

y con esto queda probado el resultado ■

CAPITULO III

PROBLEMAS MULTIOBJETIVO

CON REGION FACTIBLE CERRADA

### 3.1. DCCs DEL CONJUNTO FACTIBLE

En el capítulo precedente estudiamos el problema multiobjetivo  $P(A,S)$  bajo condiciones de convexidad del espacio factible. El resultado fundamental obtenido afirma que el conjunto de puntos (débilmente) eficientes coincide con la proyección del cierre convexo de los puntos de demanda sobre el espacio factible. Los sencillos contraejemplos siguientes muestran que la hipótesis de convexidad es necesaria:

#### Ejemplo 3.1.

Sean  $S = \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ,  $A = \{a, b\}$ , con  $a = (0, 0)$ ,  $b = (0, -1)$ . Como  $d(x, a) = 1 \ \forall x \in S$ , se sigue que  $WE(A, S) = S$ . En cambio, claramente  $E(A, S) = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ . Por consiguiente,  $E(A, S)$  es un subconjunto propio (y no conexo, a pesar de serlo  $S$ ) de  $WE(A, S)$ .

#### Ejemplo 3.2.

Sean  $S_1 = \{(x, 3) : 0 \leq x \leq 4\}$ ,  $S = S_1 \cup \{(5, 0)\}$ ,  $A = \{a, b\}$ , con  $a = (0, 0)$ ,  $b = (5, 0)$ . Se tiene que

- $b \in E(A, S)$ , pues es la única solución de  $\min_{x \in S} d(x, b)$ .
- El punto  $x = (4, 3)$  no es eficiente, pues  $d(x, a) = d(b, a)$ , pero  $d(x, a) > d(b, a)$ .
- $S_1 \subset E(A, S)$ . En efecto: para todo  $z \in S_1$ ,  $d(a, z) < d(a, b)$ , luego si  $z$  está dominado, debe estarlo por otro punto de  $S_1$ .

Ahora bien: la función  $t \in [0,4] \rightarrow d(a, (t,3))$  es estrictamente creciente, y la función  $t \in [0,4] \rightarrow d(b, (t,3))$  es estrictamente decreciente. Por tanto, todo punto en  $S_1$  es eficiente. En resumen, hemos probado que  $E(A,S) = S_1 \cup \{b\}$ , que no es cerrado.

Los ejemplos precedentes ponen de manifiesto que las propiedades esenciales de  $E(A,S)$  y  $WE(A,S)$  para el caso convexo se pierden para el caso general:

- $E(A,S)$  puede ser un subconjunto propio de  $WE(A,S)$
- $E(A,S)$  y  $WE(A,S)$  pueden ser no conexos, incluso si  $S$  lo es.
- $E(A,S)$  puede no ser cerrado.

El objetivo de este capítulo es extender en la medida de lo posible los resultados del capítulo anterior a situaciones en las que el conjunto factible es un conjunto cerrado no vacío, no necesariamente convexo.

Imponemos las siguientes hipótesis:

- H1:  $A$  es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^n$
- H2:  $S$  es un conjunto cerrado no vacío.

En primer lugar damos una cota conjuntista de  $WE(A,S)$  (y por lo tanto de  $E(A,S)$ ) haciendo uso del teorema 2.4.

Si bien entre las hipótesis de dicho teorema aparece la convexidad de  $S$  (y, como hemos visto, esta hipótesis no es redundante), el teorema puede ser usado descomponiendo la región factible  $S$  en piezas convexas:

**Definición 3.1.**

Sea  $S$  un conjunto no vacío en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que la familia de conjuntos  $\{S_i : i \in I\}$  es una *descomposición convexa cerrada* (dcc) de  $S$  sii se verifican las condiciones siguientes:

- $S_i \in \mathcal{C}(n) \quad \forall i \in I.$
- $S = \bigcup_{i \in I} S_i.$

Obsérvese que todo conjunto no vacío  $S$  admite una dcc: la *dcc trivial*  $\{\{x\} : x \in S\}$ . Los resultados que obtenemos serán de especial interés práctico cuando  $S$  admita dcc's no triviales. Tal es el caso en que  $S$  es un conjunto poligonal (no necesariamente convexo) o es una unión finita de conjuntos convexos.

En la cota conjuntista del teorema siguiente, se usa también el concepto de *visibilidad*:

**Definición 3.2.** (Goldman, 1963).

Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Un punto  $y \in Y$  se dice *visible* desde  $X$  ( $y \in \text{vis}_Y(X)$ ) sii existe un  $x \in X$  tal que  $[x, y] \cap Y = \{y\}$ .

**Teorema 3.1.**

Sea  $S$  un conjunto cerrado no vacío en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\{S_i : i \in I\}$  una dcc de  $S$ . Entonces,

$$\text{WE}(A, S) \subseteq \text{vis}_S H(A) \cap \left( \bigcup_{i \in I} \text{proj}_{S_i} H(A) \right)$$

### Demostración.

Plastria (1983) ha probado que  $WE(A,S) \subseteq \text{vis}_S H(A)$ .

Por otro lado, por el teorema 2.4., aplicado a cada  $S_i$  (que es cerrado y convexo), se tiene que

$$WE(A,S) \subseteq \bigcup_{i \in I} WE(A,S_i) = \bigcup_{i \in I} \text{proj}_{S_i} H(A)$$

El resultado se obtiene tomando la intersección de las dos cotas superiores obtenidas ■

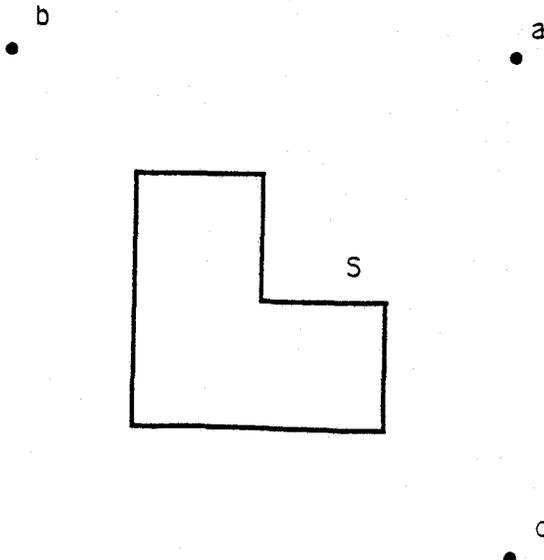
### Observación 3.1.

Como  $\text{proj}_{\{x\}}(H(A)) = \{x\}$ , se sigue que  $\bigcup_{x \in S} \text{proj}_{\{x\}} H(A) = S$ .

Por tanto, la cota obtenida para la dcc trivial coincide con la propuesta por Plastria (1983). Éste no es el caso general cuando  $S$  admite dcc's no triviales, como muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3.3.

Considérese el ejemplo representado en la figura siguiente: Sean  $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^2$ , con  $a = (3, 3)$ ,  $b = (-1, 3)$ ,  $c = (3, -1)$ ,  $S = S_1 \cup S_2$ , con  $S_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ,  $S_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ .



Denotemos respectivamente por  $T_1$  y  $T_2$  los triángulos de vértices  $\{(0,2),(1,2),(1,1)\}$  y  $\{(1,1),(2,1),(2,0)\}$ , y sea  $l$  el segmento  $\{(1,y): 0 \leq y \leq 1\}$ .

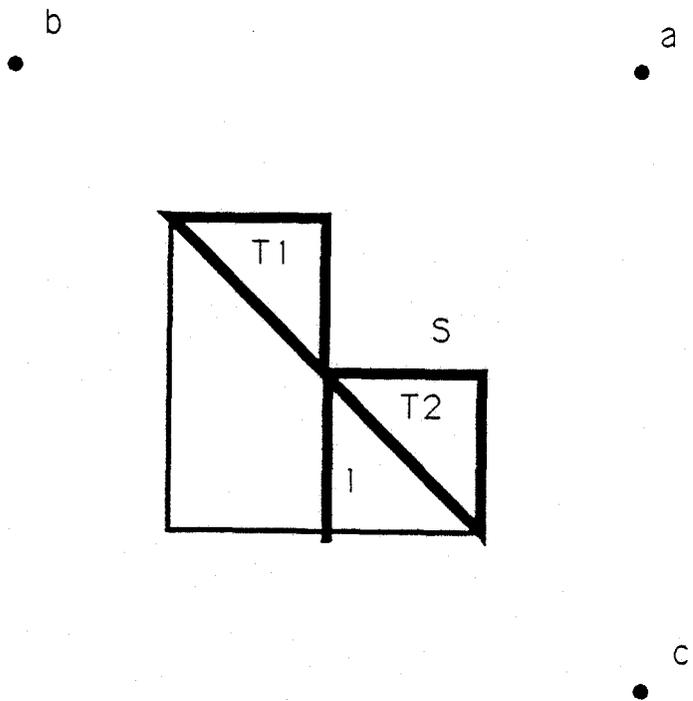
Se sigue que

$$\text{vis}_S(H(A)) = T_1 \cup T_2 \cup \text{bd}(S)$$

Para la dcc  $\{S_1, S_2\}$  de  $S$ , se sigue que

$$\text{proj}_{S_1}(H(A)) \cup \text{proj}_{S_2}(H(A)) = T_1 \cup T_2 \cup l$$

como aparece en la figura siguiente:



En este caso, la cota resultante del teorema anterior es  $T_1 \cup T_2$ , que coincide con  $\text{WE}(A,S)$ , ya que, por el teorema precedente,

$$\text{WE}(A,S) \subset T_1 \cup T_2 \subset H(A) \cap S = \text{WE}(A, \mathbb{R}^2) \cap S \subset \text{WE}(A,S)$$

### 3.2. EFICIENCIA DEBIL Y DCCs

En esta sección caracterizamos el conjunto  $WE(A,S)$  en términos de las dcc's de  $S$ .

Para ello, necesitamos notación previa: Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \neq \emptyset$ , denotemos por  $B(x;Y)$  el conjunto

$$B(x;Y) = \{ z \in \mathbb{R}^n : d(x,z) \leq d(x,y) \forall y \in Y \}$$

i.e.:  $B(x;Y)$  es la bola centrada en  $x$  tangente al conjunto  $Y$ .

Dado un conjunto no vacío  $X \subset \mathbb{R}^n$ , sea  $B(X;Y)$  el conjunto

$$B(X;Y) = \bigcup_{x \in X} B(x;Y)$$

Veamos en primer lugar algunas propiedades topológicas de interés acerca de los conjuntos  $B(X;Y)$ :

#### Teorema 3.2.

Sean  $Y \in \mathcal{C}(n)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$ .

i)  $B(X;Y) \cap Y = \text{proj}_Y(X)$

ii) Si  $X$  es conexo, entonces  $B(X;Y)$  es conexo.

iii) Si  $X$  es compacto, entonces  $B(X;Y)$  es compacto.

#### Demostración.

i) es evidente; probemos conjuntamente ii) y iii). Sea  $\Gamma$  la aplicación punto-conjunto definida como

$$\Gamma: x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \Gamma(x) = B(x;Y) \subset \mathbb{R}^n$$

Evidentemente, para  $x$  fijo,  $\Gamma(x)$  es conexo, compacto y no vacío.

En virtud de los teoremas 2.1 y 3.1 de Hiriart-Urruty (1985), basta probar que  $\Gamma$  es semicontinua superiormente, i.e.: basta probar que, para todo cerrado  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\Gamma_{\cap}^{-1}(F)$  es un conjunto cerrado, donde

$$\Gamma_{\cap}^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma(x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Sea  $F$  un conjunto cerrado no vacío; probemos que  $\Gamma_{\cap}^{-1}(F)$  contiene todos sus puntos de acumulación.

Para ello, sea  $\{x_k\} \subset \Gamma_{\cap}^{-1}(F)$ , convergente a un cierto  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que  $x \in \Gamma_{\cap}^{-1}(F)$ .

Por definición de  $\Gamma_{\cap}^{-1}(F)$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists z_k \in F / d(x_k, z_k) \leq \min_{y \in Y} d(x_k, y) \quad (*)$$

Como  $\{x_k\}$  converge a  $x$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_k\| \leq \|x\| + 1 \quad \forall k \geq k_0 \quad (**)$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídea.

Dado  $y_0 \in Y$ , por la desigualdad triangular, (\*) y (\*\*),

$$\|z_k\| \leq 2\|x_k\| + \|y_0\| \leq 2\|x\| + 2 + \|y_0\| \quad \forall k \geq k_0$$

por lo que la sucesión  $\{z_k : k \geq k_0\}$  está contenida en el compacto

$$\{z \in F : \|z\| \leq 2\|x\| + 2 + \|y_0\|\}$$

Se sigue que la sucesión  $\{z_k\}$  tiene una subsucesión convergente a un cierto  $z \in F$ . Por continuidad de la función distancia,

$$d(x, z) \leq d(x, y) \quad \forall y \in Y$$

i.e.:

$$z \in B(x, Y) \cap F = \Gamma(x) \cap F$$

Por tanto,  $x \in \Gamma_{\cap}^{-1}(F)$ , y con esto termina la prueba ■

Cuando los conjuntos  $X$  e  $Y$  tienen estructura especial, es posible determinar explícitamente  $B(X;Y)$ , como muestran los siguientes resultados:

**Teorema 3.3.**

Sean  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$ .

$$B(H(X);\{y\}) = B(X;\{y\})$$

**Demostración.**

De la definición se desprende que  $B(X;\{y\}) \subset B(H(X);\{y\})$ .

Probemos el recíproco por reducción al absurdo, suponiendo que existe  $z \in B(H(X);\{y\})$ ,  $z \notin B(X;\{y\})$ .

Por definición,

$$\exists x^* \in H(X) \text{ tal que } d(x^*, z) \leq d(x^*, y) \quad (*)$$

y además,

$$d(x, z) > d(x, y) \quad \forall x \in X \quad (**)$$

Como  $x^* \in H(X)$ , se sigue (usando el teorema de Carathéodory) que existen  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in X$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$  tales que  $x^* = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ .

Por el lema 2.2., (\*) implica que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i d(x_i, z)^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i d(x_i, y)^2$$

lo que contradice (\*\*). Por tanto, se tiene el resultado ■

En particular, se tiene

**Corolario 3.1.**

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_p, y \in \mathbb{R}^n$ .

$$B(H(\{x_1, x_2, \dots, x_p\});\{y\}) = \bigcup_{i=1}^p B(x_i;\{y\})$$

### Teorema 3.4.

Sea  $h$  un semiplano cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $\ell = H(\{a, b\})$  un segmento no degenerado tal que  $\ell \cap i(h) = \emptyset$ .

Sea  $\sigma$  la simetría axial cuyo eje es la recta generada por  $\ell$ .

Se tiene que

$$B(\ell; h) = B(a; h) \cup B(b; h) \cup H(\{a', b', \sigma(a'), \sigma(b')\})$$

donde  $a' = \text{proj}_h(a)$ ,  $b' = \text{proj}_h(b)$ .

Demostración.

Sea  $r$  la recta generada por  $\ell$ . El resultado es trivial si  $r$  es paralela a  $bd(h)$ .

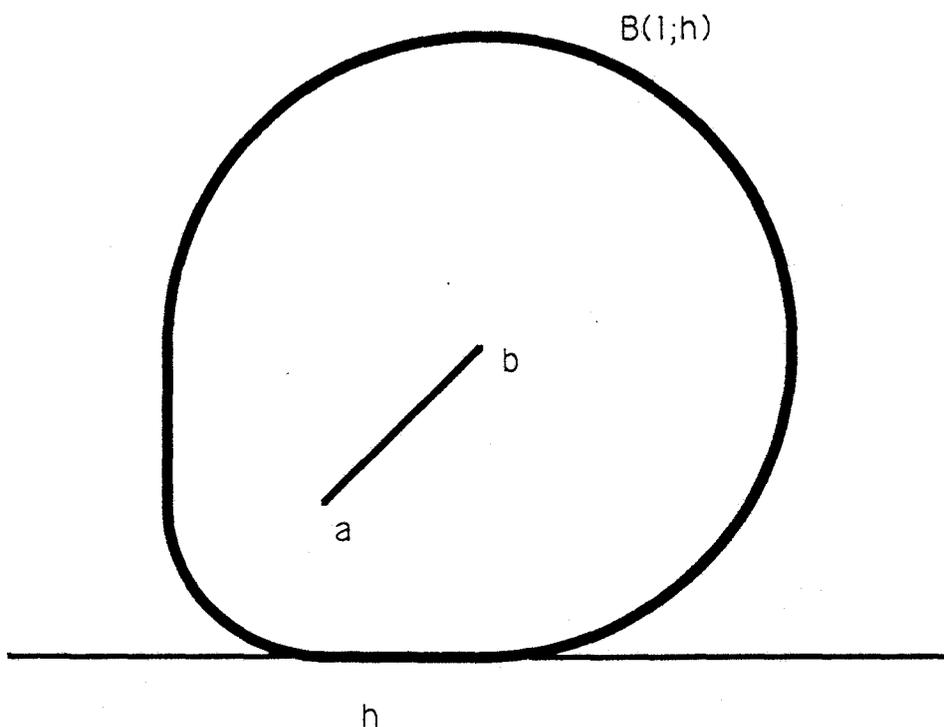
Si  $r$  y  $bd(h)$  no son paralelas, el resultado se sigue de la siguiente observación:

Sea  $O$  el punto  $r \cap bd(h)$ . Como, por hipótesis,  $\ell$  es no degenerado, al menos uno de sus puntos extremos es distinto de  $O$ ; supongamos que  $d(a, O) \geq d(b, O)$ , con  $d(a, O) > 0$ .

Cada bola  $B(c; h)$  con  $c \in H(\{a, b\})$  es homotética, con razón de homotecia positiva a la bola  $B(a; h)$ . Más aún: la familia  $\{B(c; \ell) : c \in H(\{a, b\})\}$  (cuya unión es  $B(\ell; h)$ ) coincide con la familia de bolas homotéticas a la bola  $B(a; h)$  para homotecias con centro en  $O$ , y razón de homotecia  $\lambda$ , cuando  $\lambda$  varía en el intervalo  $\{t : d(O, b)/d(O, a) \leq t \leq 1\}$ .

El resultado es ahora evidente ■

Una ilustración aparece en la figura de la página siguiente.



El siguiente teorema muestra que el problema de determinación de  $WE(A,S)$  puede ser siempre reducido al cálculo de intersecciones de conjuntos de la forma  $B(X;Y)$ .

**Teorema 3.5.**

Sea  $S$  un conjunto arbitrario no vacío en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\{S_i : i \in I\}$  una dcc de  $S$ . Entonces

$$WE(A,S) = \bigcap_{i \in I} B(H(A); S_i) \cap S$$

**Demostración.**

Sea  $x \in S = \bigcup_{i \in I} S_i$ . Por definición, se tiene que  $x \in WE(\bigcup_{i \in I} S_i, A)$  sii el conjunto  $\{y \in S_i : d(y,a) < d(x,a) \quad \forall a \in A\}$  es vacío para todo  $i \in I$ . Por el teorema 2.3, esto es equivalente a que

$$\forall i \in I, \exists a_i \in H(A) / d(a_i, x) \leq \min_{y \in S_i} d(a_i, y),$$

i.e.:

$$\forall i \in I, \exists a_i \in H(A) / x \in B(a_i; S_i)$$

i.e.:

$$\forall i \in I, x \in B(H(A); S_i)$$

i.e.:

$$x \in \bigcap_{i \in I} B(H(A); S_i)$$

Luego  $WE(A, S) = (\bigcap_{i \in I} B(H(A); S_i)) \cap S$ , como queríamos demostrar ■

El teorema 3.5 reduce el problema de determinación de  $WE(A, S)$  al problema de determinación de conjuntos de la forma  $B(X; Y)$ . Los teoremas 3.3 y 3.4 indican cómo determinar estos conjuntos en circunstancias muy particulares.

Enunciamos a continuación un resultado que, como veremos en la sección próxima, reduce el cálculo de ciertos  $B(\cdot; \cdot)$  al cálculo de conjuntos  $B(X; Y)$  bajo las hipótesis de los teoremas precedentes.

### Definición 3.3.

Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \in \mathcal{C}(n)$ ,  $Y$  cerrado y no vacío. Un punto  $y \in Y$  se dice  $Y$ -remoto desde  $X$  si

$$\{ z \in Y / y \in [z, \text{proj}_X(z)] \} = \{y\}$$

Por simplicidad en la notación, denotaremos mientras no haya lugar a confusión por  $R(X)$  el conjunto de puntos  $H(A)$ -remotos desde  $X$ .

**Observación 3.2.**

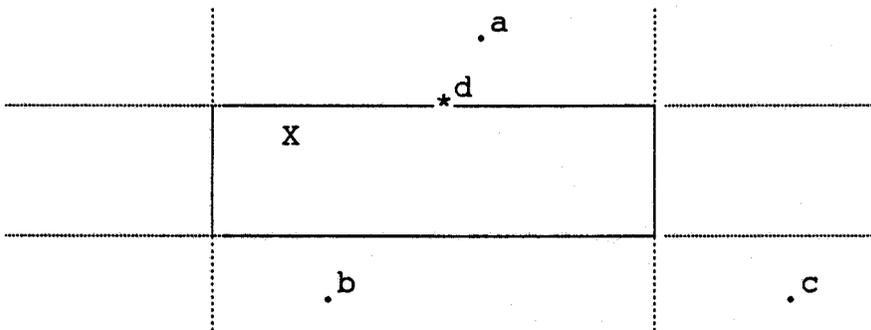
Un punto  $a \in H(A)$  es un punto  $H(A)$ -remoto desde  $X$  (i.e.:  $a \in R(X)$ ) sii  $a$  no pertenece a ningún camino más corto desde  $H(A) \setminus \{a\}$  hacia  $X$ .

En particular, los puntos de  $H(A)$  interiores a  $X$  son elementos de  $R(X)$ .

**Ejemplo 3.4.**

En la figura siguiente,  $X$  es el rectángulo encerrado por líneas gruesas, y  $A = \{a, b, c\}$ . En este caso, se tiene:

$$R(X) = (H(A) \cap iX) \cup [a, d] \cup [b, c] \cup [a, c]$$



**Teorema 3.6.**

Sea  $X \in \mathcal{C}(n)$ . Se tiene:

$$B(H(A); X) = (H(A) \cap X) \cup B(R(X) \setminus X; X)$$

**Demostración.**

Por definición de  $B(\cdot; \cdot)$  y  $R(X)$ , y dado que  $B(a; X) = \{a\} \forall a \in X$ , basta probar que

$$B(H(A); X) \setminus (H(A) \cap X) \subseteq B(R(X) \setminus X; X)$$

Sea  $x$  un punto arbitrario de  $B(H(A); X) \setminus (H(A) \cap X)$ . Por

definición, existe  $a \in H(A)$  tal que  $x \in B(a; X)$ . Además,  $a \notin X$  (en caso contrario,  $x \in B(a; X) = \{a\}$ , luego  $x \in H(A) \cap X$ , que contradice la hipótesis).

Si  $a \in R(X) \setminus X$ , no hay nada que probar. En otro caso,  $a \in R(X)$ , luego, por definición de  $R(X)$ , existe  $b \in H(A)$ ,  $b \neq a$ , tal que  $a \in [b, \text{proj}_X(b)]$ .

Consideremos el rayo  $r = \{(1-t)a + tb : t \geq 0\}$ . Se sigue que

$$\text{proj}_X(a) = \text{proj}_X(b) = \text{proj}_X(c) \quad \forall c \in r$$

Además, es fácil probar que

$$B(a; X) \subset B(c; X) \text{ para todo } c \in r \quad (*)$$

Como  $H(A)$  es compacto, se sigue que  $r \cap R(X)$  no es vacío.

Dado  $c \in r \cap R(X)$ ; entonces  $c \notin X$ . En efecto: en caso contrario, por convexidad de  $X$ , y por darse que  $\{c, \text{proj}_X(a)\} \subset X$ , y  $a \in [c, \text{proj}_X(a)]$ , se tendría que  $a \in X$ , contrariamente a la hipótesis que estamos haciendo. Por tanto,  $c \in r \cap (R(X) \setminus X)$ .

Por (\*), se tiene que  $x \in B(c; X)$ , luego

$$B(H(A); X) \setminus (H(A) \cap X) \subseteq B(R(X) \setminus X; X)$$

y esto completa la prueba ■

### Observación 3.3.

En la práctica, otras expresiones pueden ser usadas.

Por ejemplo, en la próxima sección se utiliza

$$B(H(A); X) = (H(A) \cap X) \cup B(R(X) \setminus i(X); X)$$

cuya validez es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

### 3.3. UNA CONSTRUCCION GEOMETRICA DE WE(A,S)

Los resultados obtenidos en la sección anterior posibilitan una construcción explícita del conjunto WE(A,S) para problemas con estructura especial. En esta sección, consideramos las siguientes hipótesis:

H1: A es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^2$ .

H2: S admite una dcc poliédrica finita  $\{S_j: 1 \leq j \leq p\}$  i.e.:  $\{S_j: 1 \leq j \leq p\}$  es una dcc de S de modo que cada  $S_j$  es un poliedro no vacío en  $\mathbb{R}^2$ .

Por simplicidad, asumimos también

H3:  $S_j$  tiene interior no vacío para todo  $j=1, \dots, p$

Por el teorema 3.5,  $WE(A,S) = \bigcap_{j=1}^p B(H(A); S_j) \cap S$ , luego sólo necesitamos saber cómo calcular conjuntos de la forma  $B(H(A); X)$ , siendo X un poliedro en  $\mathbb{R}^2$  con interior no vacío.

Dado un poliedro X con interior no vacío, denotemos por  $\mathcal{F}(X)$  el conjunto de caras f de X,  $0 \leq \dim(f) \leq 2$ .

Para cada  $f \in \mathcal{F}(X)$ , sea  $\Pi(f)$  el poliedro

$$\Pi(f) = \text{cl} (\{ x \in \mathbb{R}^2 : \text{proj}_X(x) \in \text{ri}(f) \})$$

donde  $\text{cl}(\cdot)$  es el operador clausura.

Claramente  $\{\Pi(f): f \in \mathcal{F}(X)\}$  es una subdivisión poliédrica plana con la siguiente propiedad:

Para cada cara  $f \in \mathcal{F}(X)$  y cada  $x \in \Pi(f)$ ,

$$\text{proj}_X(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \dim f = 2 \text{ (i.e.: si } f = X) \\ \text{el pie desde } x \text{ sobre } f, & \text{si } \dim f = 1 \\ f, & \text{si } \dim f = 0 \text{ (i.e.: si } f \text{ es un v\u00e9rtice de } X) \end{cases}$$

Por la observaci\u00f3n 3.3,

$$B(H(A); X) = (H(A) \cap X) \cup B(R(X) \setminus i(X); X)$$

luego el problema se reduce a determinar  $B(R(X) \setminus i(X); X)$ .

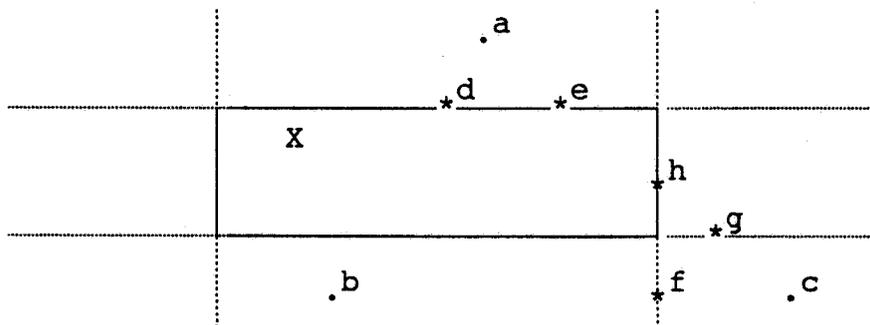
Otra reducci\u00f3n en el problema se obtiene observando que el conjunto  $R(X) \setminus i(X)$  puede descomponerse en un conjunto finito de segmentos cerrados, (todos ellos contenidos en  $\text{bd}(H(A))$ ), de modo que cada uno de ellos est\u00e1 incluido en una de las regiones de  $\Pi(f)$ .

De hecho, la determinaci\u00f3n de  $R(X)$  es inmediata una vez que  $\{\Pi(f) : f \in \mathcal{F}(X)\}$  es conocido.

Esta idea est\u00e1 plasmada en la figura que aparece a continuaci\u00f3n;  $X$  es el rect\u00e1ngulo encerrado por las l\u00edneas gruesas, y  $A = \{a, b, c\}$ . Es evidente que

$$R(X) \setminus i(X) = [a, d] \cup [b, f] \cup [f, c] \cup [c, g] \cup [g, h] \cup [a, e]$$

y cada uno de los segmentos anteriores est\u00e1 contenido en alg\u00fan  $\Pi(f)$ .



Por lo tanto, el problema ha quedado reducido a la determinación de conjuntos de la forma  $B(\ell; X)$ , donde  $\ell$  es un segmento no degenerado, digamos  $\ell = [a, b]$ , con  $\ell \cap i(X) = \emptyset$ , y  $\ell \subset \Pi(f)$  para alguna cara  $f$  de  $X$ , con dimensión  $0 \leq \dim(f) \leq 1$ .

Estudiemos separadamente los casos  $\dim(f)=0$  y  $\dim(f)=1$ :

Caso 1  $\dim(f)=0$

Se tiene que  $v$  es un vértice de  $X$ . Por el corolario 3.1,

$$B(\ell; X) = B([a, b]; \{v\}) = B(\{a, b\}; \{v\})$$

i.e.:  $B(\ell; X)$  es la unión de las bolas centradas en  $a$  y  $b$ , y que contienen a  $v$  en la frontera.

Caso 2  $\dim(f) = 1$

Sea  $h$  el semiplano cerrado que contiene a  $f$  en su frontera y tal que  $\ell \cap i(h) = \emptyset$ . Como, por hipótesis,  $\ell \subset \Pi(f)$ , se sigue que,  $B(\ell; f) = B(\ell; h)$ . Aplicando el teorema 3.4, se sigue que

$$B(\ell; X) = B(a; \{a'\}) \cup B(b; \{b'\}) \cup H(\{a', b', \sigma(a'), \sigma(b')\})$$

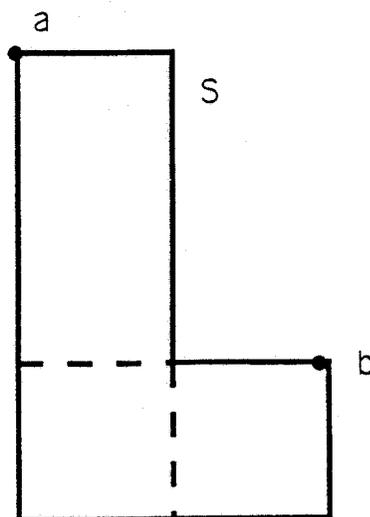
donde  $a' = \text{proj}_f(a)$ ,  $b' = \text{proj}_f(b)$ , y  $\sigma$  es la simetría axial cuyo eje es la recta que contiene al segmento no degenerado  $\ell$ .

Para concluir esta sección, resumimos el proceso de determinación de  $WE(A, S)$  cuando  $S = \bigcup_{k=1}^p S_k$  y cada  $S_k$  es un poliedro con interior no vacío en  $\mathbb{R}^2$ :

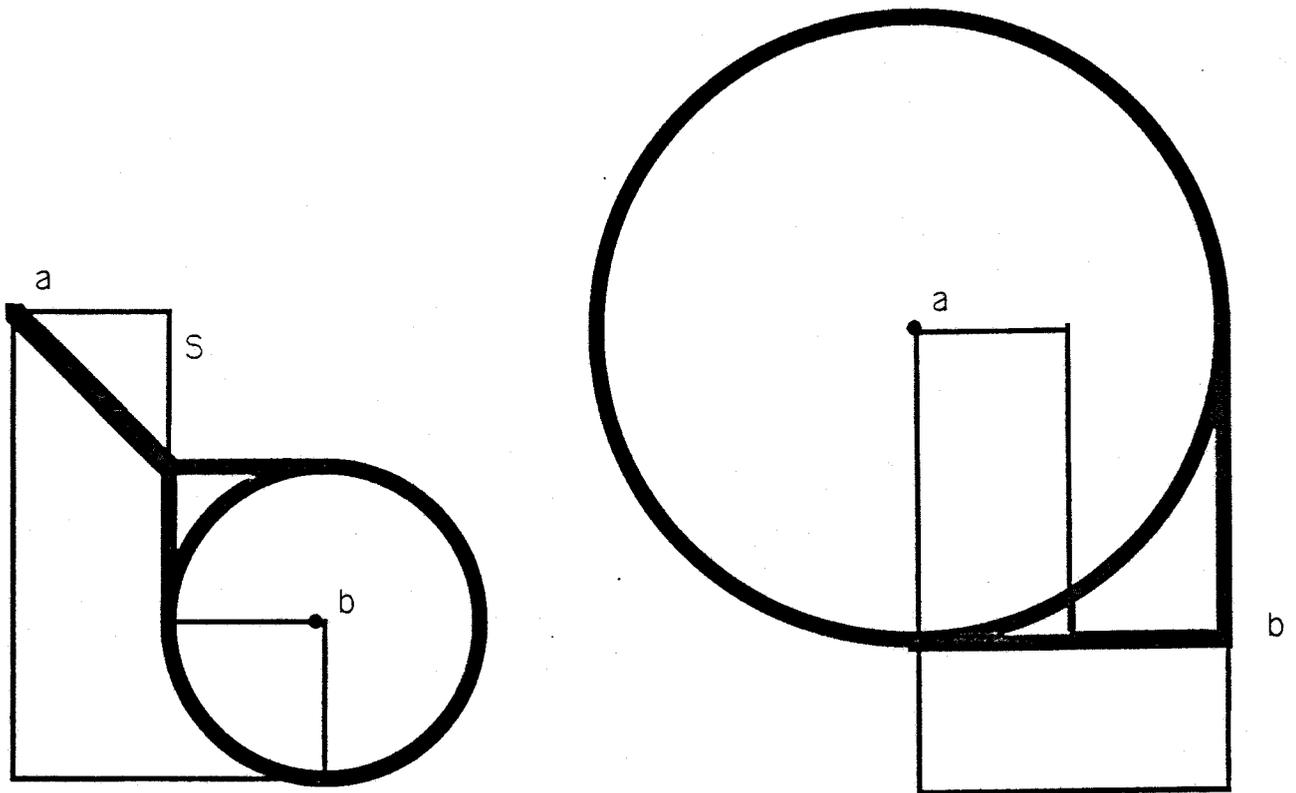
- Para cada  $k, 1 \leq k \leq p$  hacer
  - Hallar  $\mathcal{F}(S_k)$ , el conjunto de caras de  $S_k$
  - Hallar  $\{\Pi(f) : f \in \mathcal{F}(S_k)\}$
  - Descomponer  $R(S_k) \setminus i(S_k)$  en una familia finita  $\mathcal{L}_k$  de segmentos cerrados, cada uno de los cuales contenidos en algún  $\Pi(f)$ .
  - Para cada  $l \in \mathcal{L}_k$ , hallar  $B(l; S_k)$
  - $B(H(A); S_k) \longleftarrow \bigcup_{l \in \mathcal{L}_k} B(l; S_k)$
- $WE(A, S) \longleftarrow \{ H(A) \cup ( \bigcap_{k=1}^p B(H(A); S_k) ) \} \cap S$

Como aplicación, considérese el ejemplo representado en la siguiente figura.

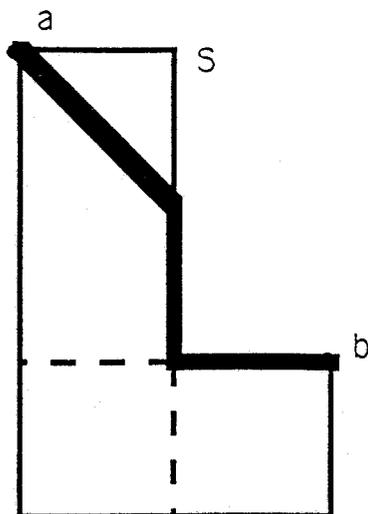
$S = S_1 \cup S_2$ , con  $S_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$ ,  $S_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ . El conjunto factible  $A$  es  $\{a, b\}$ , con  $a = (0, 3)$ ,  $b = (2, 1)$ .



Para la dcc  $\{S_1, S_2\}$ , aplicando los teoremas anteriores, obtenemos los correspondientes  $B(H(A); S_i)$ , representados en las figuras siguientes:



Al tomar la intersección de los conjuntos anteriores con  $S$ , se obtiene el conjunto débilmente eficiente, como aparece en la siguiente figura:



#### Observación 3.4.

La construcción geométrica de  $WE(A,S)$  puede ser adaptada a dcc's  $\{S_i: i \in I\}$  arbitrarias, tan pronto como los correspondientes conjuntos  $B(\ell; S_i)$  puedan ser determinados explícitamente.

Tal es el caso, por ejemplo, de los discos: es fácil probar que si  $X$  es un disco, entonces  $B(\ell; X)$  es una región encerrada por una curva formada por unos arcos de circunferencia, que pueden ser construidos explícitamente.

CAPITULO IV

PROBLEMAS DE LOCALIZACION

EN AMBIENTE COMPETITIVO

## 4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  el conjunto de puntos de demanda, que imponemos que sea finito y no vacío.

Asociemos a cada  $a \in A$  un escalar positivo  $w(a)$ , que representa la población (peso) del punto de demanda  $a$ .

Para  $A' \subset A$ , denotemos por  $w(A')$  el peso de  $A'$ , i.e.:

$$w(A') = \sum_{a \in A'} w(a)$$

En este capítulo establecemos una serie de resultados que, junto con los obtenidos en el capítulo 2, permiten determinar bajo ciertas hipótesis el conjunto de centroides del problema

$$\min_{x \in S} (d^a(a, x) : x \in S)$$

donde  $\{d^a(\cdot, \cdot) : a \in A\}$  es una familia de métricas, esto es: buscamos el conjunto de soluciones óptimas del problema

$$\min_{x \in S} \mu_S(x)$$

con

$$\mu_S(x) = \max_{y \in S} w(\{a \in A : d^a(y, a) < d^a(x, a)\})$$

Hacemos especial hincapié en los aspectos algorítmicos del problema, que, en nuestra opinión, han recibido mucha menos atención que los mismos bajo otras estructuras

métricas, como son los grafos (véase, e.g., Hansen-Labbé, 1988).

Imponemos en el problema las hipótesis siguientes:

- H1: A es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^2$ .
- H2:  $S \in \mathcal{C}(2)$ .
- H3: Para cada  $a \in A$ , la métrica  $d^a$  está inducida por una gauge en  $\mathbb{R}^2$ , i.e.: para cada  $a \in A$  existe un conjunto compacto convexo  $B_a$  tal que  $0 \in \text{int}(B_a)$ , y

$$d^a(x,y) = \inf \{t > 0 : y \in x + tB_a\}$$

#### Observación 4.1.

Toda gauge es una función convexa (Rockafellar, 1970); si, además, el correspondiente conjunto  $B_a$  es simétrico respecto al origen, entonces es una norma.

El uso de gauges mixtas en el problema (i.e.: distintos puntos de demanda pueden medir las distancias a través de gauges diferentes) ha sido suficientemente justificado en la literatura (véase, e.g. Wendell - Hurter, 1973; Hansen - Perreux - Thisse, 1980).

## 4.2. EVALUACION DE LA FUNCION OBJETIVO

Un paso previo al objetivo de optimizar la función  $\mu_S$  debe ser cómo evaluarla, a ser posible eficientemente.

La caracterización geométrica del conjunto débilmente eficiente propuesta por Plastria y Carrizosa (1992) para problemas convexos puede ser adaptada a este contexto:

Dado  $x \in S$ , denotemos por  $N_S(x)$  el cono normal a  $S$  en  $x$  (véase, e.g., Rockafellar, 1970),

$$N_S(x) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \langle u, y-x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S\}$$

**Teorema 4.1.** (Plastria-Carrizosa, 1992)

Sea  $\{f_a : a \in A\}$  un conjunto finito de funciones convexas en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $S \in \mathcal{C}(n)$ . Dado  $x \in S$ , son equivalentes:

i)  $x$  es una solución débilmente eficiente del problema multiobjetivo  $\min_{z \in S} (f_a(z) : a \in A)$ .

ii)  $H(\bigcup_{a \in A} \partial f_a(x)) \cap (-N_S(x)) \neq \emptyset$ .

Para cada  $a \in A$ , denotemos por  $d_a(\cdot)$  la función

$$d_a(\cdot) : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow d_a(x) = d^a(x, a)$$

que es (por la hipótesis H3) una función convexa, cuyo subdiferencial en  $x$  se denotará  $\partial d_a(x)$ .

**Teorema 4.2.**

Sea  $x \in S$ . Se tiene que

$$\mu_S(x) = \text{máx} \{w(A') : A' \subset A, H(\bigcup_{a \in A'} \partial d_a(x)) \cap (-N_S(x)) = \emptyset\}$$

**Demostración.**

Como las funciones  $d_a$  son convexas, el teorema anterior aplica; en virtud del teorema 1.6, se tiene el resultado ■

Es bien sabido (véase, por ejemplo, Durier-Michelot, 1985), que  $\partial d_a(x)$  coincide con  $B_a^0$ , la bola polar de  $B_a$  sii  $x=a$ ; en caso contrario,  $\partial d_a(x)$  es un segmento cerrado (eventualmente degenerado a un punto) contenido en  $\text{bd}(B_a^0)$ .

El teorema anterior reduce el problema de evaluación de  $\mu_S$  al siguiente problema geométrico, PG:

**PG:** Considérese un cono  $C$  cerrado y convexo con vértice en  $0$ ,  $C \neq \mathbb{R}^2$ . Sea  $\{\Lambda(a) : a \in A\}$  una colección finita de segmentos cerrados (degenerados o no) en el plano; asociamos a cada  $a \in A$  un peso estrictamente positivo  $w(a)$ . Calcular

$$\text{máx} \{w(A') : A' \subset A, H(\bigcup_{a \in A'} \Lambda(a)) \cap C = \emptyset\}$$

El siguiente algoritmo resuelve el problema geométrico PG; usamos la siguiente notación:

• Para cada  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , sea  $u_x$  el vector unitario normal a  $x$  tal que  $\{x, u_x\}$  está orientado positivamente, y sea  $K(x)$  el conjunto

$$K(x) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, u_x \rangle > 0, \text{ o bien } (\langle z, u_x \rangle = 0, \langle z, x \rangle > 0)\}$$

• Sea  $C$  un cono convexo cerrado con vértice en  $0$ ,  $C \neq \mathbb{R}^2$ , y  $C$  no es una recta. Entenderemos por ordenar circularmente según  $C$  lo siguiente:

Si  $C = \{0\}$ , diremos que un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  están ordenados circularmente según  $C$  si están ordenados en orden no decreciente de su argumento en coordenadas polares, tomando como argumento  $0$  en los puntos del semieje real positivo.

Si  $C \neq \{0\}$ , como, por hipótesis,  $C \neq \mathbb{R}^2$  y  $C$  no es una recta,  $C$  es un cono con vectores unitarios extremos (eventualmente coincidentes, pero nunca opuestos)  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$ , de modo que  $\Xi_2 \in K(\Xi_1)$ .

Diremos en este caso que los puntos de un conjunto finito de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  están ordenados circularmente según  $C$  si están ordenados en orden no-decreciente de su argumento en coordenadas polares, donde el argumento  $0$  se fija para los puntos de la semirrecta  $\{t\Xi_2 : t > 0\}$ .

#### Algoritmo 4.1.

Entrada:  $\{\Lambda(a) : a \in A\}$ , (un conjunto finito de segmentos cerrados en  $\mathbb{R}^2$ ),  $C$  (un cono convexo cerrado con vértice en el origen,  $C \neq \mathbb{R}^2$ ).

Salida:  $\mu^* = \text{máx} \{w(A') : A' \subset A, H(\bigcup_{a \in A'} \Lambda(a)) \cap C = \emptyset\}$ .

PASO 1:

Hacer  $A^* \leftarrow \{a \in A : \Lambda(a) \cap C = \emptyset\}$ .

Si  $A^* = \emptyset$ , hacer  $\mu^* \leftarrow 0$ . Parar.

Si  $C$  es una recta, hacer

{

Sean  $h_1$  y  $h_2$  los dos semiplanos abiertos, con

$$\text{bd}(h_1) = \text{bd}(h_2) = C$$

Hacer  $\mu^* \leftarrow w(\{a \in A^* : \text{ext}(\Lambda(a)) \subset h_1\})$

Hacer  $\mu^* \leftarrow \text{máx}\{\mu^*, w(\{a \in A^* : \text{ext}(\Lambda(a)) \subset h_2\})\}$

Parar.

}

Ordenar circularmente según  $C$  el conjunto

$$\bigcup_{a \in A^*} \text{ext}(\Lambda(a))$$

Construir la lista  $\mathcal{L} = \{(\xi_0, a_0), (\xi_1, a_1), \dots, (\xi_t, a_t)\}$ ,

donde  $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t\}$  es el conjunto  $\bigcup_{a \in A^*} \text{ext}(\Lambda(a))$

ordenado circularmente según  $C$ , y, para cada  $i$ ,

$\xi_i \in \text{ext}(\Lambda(a_i))$ .

Hacer  $i \leftarrow 0$ ,  $\mu^* \leftarrow -1$ ,  $l(a) \leftarrow 0 \forall a \in A^*$

Si  $C \cap K(\xi_0) = \emptyset$ , hacer:

{

Para cada  $(\xi, a) \in \mathcal{L}$  tal que  $\xi \in K(\xi_0)$ , hacer

$l(a) \leftarrow l(a) + 1$ .

Hacer  $\mu \leftarrow w(\{a \in A^* : l(a) = 0\})$ .

Hacer  $\mu^* \leftarrow \mu$ ,  $i \leftarrow 1$ .

}

PASO 2:

Mientras  $i \leq t$  y  $C \cap K(\xi_i) = \emptyset$ , hacer

{

Si  $\xi_i \in K(\xi_{i-1})$ , hacer:

{

Si  $l(a_{i-1}) = 0$ , hacer  $\mu \leftarrow \mu - w(a_{i-1})$ .

Hacer  $l(a_{i-1}) \leftarrow l(a_{i-1}) + 1$ .

Para cada  $(\xi, a) \in \mathcal{L}$  tal que  $\xi \in K(\xi_i)$ ,  $\xi \notin K(\xi_{i-1})$ , hacer

{

Hacer  $l(a) \leftarrow l(a) - 1$ .

Si  $l(a) = 0$ , hacer  $\mu \leftarrow \mu + w(a)$ .

}

}

Si  $\xi_i \notin K(\xi_{i-1})$ , hacer:

{

Hacer  $l(a) \leftarrow 0 \quad \forall a \in A^*$ .

Para cada  $(\xi, a) \in \mathcal{L}$  tal que  $\xi \in K(\xi_i)$ , hacer

$l(a) \leftarrow l(a) + 1$ .

Hacer  $\mu \leftarrow w(\{a \in A^* : l(a) = 0\})$ .

}

Hacer  $\mu^* \leftarrow \max(\mu^*, \mu)$

Si  $i \leq t$ , ir al paso 3. En caso contrario, parar.

PASO 3:

Sean  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$  los vectores extremos unitarios de  $C$ , con  $\Xi_2 \in K(\Xi_1)$ .

Hacer  $\mu \leftarrow w(\{a \in A^* : \Lambda(a) \subset K(\xi_i) \setminus K(\Xi_1)\})$ .

Hacer  $\mu^* \leftarrow \max(\mu^*, \mu)$ .

Parar.

**Teorema 4.3.**

El algoritmo anterior resuelve PG en tiempo  $O(|A| \log(|A|))$  con espacio  $O(|A|)$ .

### Demostración.

Probemos en primer lugar la validez del algoritmo. El resultado es evidente si  $C$  es una recta. Probemos la validez del algoritmo cuando  $C$  no es una recta, i.e.:  $C$  es de uno de los dos tipos siguientes:

I:  $C = \{0\}$ .

II:  $C$  es el cono con vectores extremos unitarios (eventualmente coincidentes, pero nunca opuestos),  $\Xi_1, \Xi_2$ , con  $\Xi_2 \in K(\Xi_1)$ .

Sea  $\mu^*$  la salida del programa, y sea  $A_1$  una solución óptima del problema  $\max \{w(A') : A' \in \mathcal{A}\}$ , con

$$\mathcal{A} = \{A' \subset A : H(\bigcup_{a \in A'} \Lambda(a)) \cap C = \emptyset\}$$

Evidentemente,  $A_1 \subset A^*$ . Para probar que  $w(A_1) = \mu^*$ , obsérvese en primer lugar que, por construcción,  $\mu^* = w(A')$  para algún  $A' \in \mathcal{A}$ , luego  $\mu^* \leq w(A_1)$  (\*)

Si  $A_1 = \emptyset$ , evidentemente, se tiene la igualdad en (\*). Si  $A_1 \neq \emptyset$ , sea  $C'$  el cono punteado con vértice en cero y generado por  $\bigcup_{a \in A_1} \text{ext}(\Lambda(a))$ .

Por ser  $A_1$  de peso máximo, se sigue que

$$A_1 = \{a \in A^* : \Lambda(a) \subset C'\}$$

$C'$  es un cono que tiene como vectores extremos ciertos  $\xi_1, \xi_j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq t$ , con  $(\xi_1, a_1), (\xi_j, a_j)$  tales que  $\xi_1 \in \text{ext}(\Lambda(a_1)), \xi_j \in \text{ext}(\Lambda(a_j))$ , y  $\{a_1, a_j\} \subset A_1$ . Por tanto,

$$A_1 \subset K(\xi_1) \text{ o } A_1 \subset K(\xi_j)$$

Supongamos que  $A_1 \subset K(\xi_1)$  (para  $A_1 \subset K(\xi_j)$  se usaría el mismo razonamiento). Pueden darse dos casos:

i)  $K(\xi_1) \cap C = \emptyset$ .

En el paso 2, se hace  $\mu^* \geq w(\{a \in A^* : \Lambda(a) \subset K(\xi_1)\})$ , luego

$$\mu^* \geq w(A_1)$$

ii)  $K(\xi_1) \cap C \neq \emptyset$ .

En particular,  $C \neq \{0\}$ , i.e.:  $C$  es del tipo II, por lo que

$$A_1 \subset K(\xi_1) \setminus K(\Xi_1)$$

Sea  $l = \min \{k : K(\xi_k) \cap C \neq \emptyset\}$ . Se tiene que  $0 \leq l \leq i$  y  $K(\xi_1) \setminus K(\Xi_1) \supset K(\xi_l) \setminus K(\Xi_1)$  (recuérdese que la lista está ordenada según  $C$ ). Por consiguiente, en el paso 3 se hace  $\mu^* \geq w(\{a \in A^* : \Lambda(a) \subset K(\xi_1) \setminus K(\Xi_1)\}) \geq w(\{a \in A^* : \Lambda(a) \subset K(\xi_l) \setminus K(\Xi_1)\}) \geq w(A_1)$

En resumen, siempre se tiene que  $\mu^* \geq w(A_1)$ , y, por (\*), se da la igualdad. Por tanto, el algoritmo es válido.

Analícemos a continuación su complejidad: Evidentemente, realizar todas las etapas (salvo la ordenación) del paso 1 requiere  $O(|A|)$  tiempo y  $O(|A|)$  espacio. La ordenación de la lista del paso 1 requiere  $O(|A| \log(|A|))$  tiempo y  $O(|A|)$  espacio, luego ésta es la complejidad del paso 1.

En el paso 2, cada vez que se verifique la condición  $\xi_1 \notin K(\xi_{i-1})$ , la reinicialización de las variables  $l(a)$  y el cómputo del correspondiente  $\mu$  requieren  $O(|A|)$  tiempo y espacio. Ahora bien: esta condición puede darse a lo sumo una vez, ya que los puntos están ordenados circularmente según  $C$ .

Por otro lado, el que los puntos estén ordenados según  $C$ , permite realizar (mediante un algoritmo trivial) el resto de las etapas de los pasos 2 y 3 en tiempo y espacio  $O(|A|)$ .

Se sigue por tanto que la complejidad del algoritmo viene dada por el paso 1, i.e.:  $O(|A| \log(|A|))$  tiempo y  $O(|A|)$  espacio, como queríamos demostrar ■

**Corolario 4.1.**

Dados  $x \in S$ ,  $N_S(x)$  y  $\{\text{ext}(\partial d_a(x)) : a \in A, a \neq x\}$ , el algoritmo geométrico anterior calcula  $\mu_S(x)$  en  $O(|A| \log(|A|))$  tiempo y  $O(|A|)$  espacio.

**Observación 4.2.**

El algoritmo anterior requiere como entrada  $N_S(x)$  y  $\{\text{ext}(\partial d_a(x)) : a \in A, a \neq x\}$ .

Para conjuntos  $S$  con estructura especial,  $N_S(x)$  puede determinarse fácilmente; tal es el caso, por ejemplo, si  $S$  es un poliedro. En efecto:

Fijado  $x \in S$ , denotemos por  $F(x)$  la cara de  $S$  que contiene al punto  $x$  y es de dimensión mínima (i.e.:  $F(x)$  es la única cara de  $S$  tal que  $x \in \text{int}(F(x))$ ).

$N_S(x)$  es siempre un cono cerrado convexo plano con vértice en cero, cuya forma depende de la dimensión  $\dim(F(x))$  de la cara  $F(x)$ . Estudiemos en primer lugar el caso en que  $S$  es un poliedro con interior no vacío.

• Caso  $\dim F(x) = 2$ :

$x$  es un punto interior de  $S$ , luego  $N_S(x) = \{0\}$ .

• Caso  $\dim F(x) = 1$ :

$N_S(x)$  es el rayo con vértice en 0, ortogonal a  $F(x)$ , y apuntando hacia el exterior de  $S$ .

• Caso  $\dim F(x) = 0$ :

Se tiene que  $x$  es un vértice de  $S$ .  $N_S(x)$  es el cono convexo de vértice 0, cuyas direcciones extremas son los rayos ortogonales a las caras adyacentes al vértice  $x$ , y que apuntan hacia el exterior de  $S$ .

Si  $S$  es un segmento no degenerado o un rayo, se sigue que  $N_S(x)$  es la recta  $r$  por el origen ortogonal a  $S$  si  $\dim F(x)=1$ ; si  $\dim F(x)=0$ , (i.e.:  $x$  es un vértice de  $S$ ), entonces  $N_S(x)$  es el semiplano  $h$  por el origen tal que  $\text{bd}(h) = r$ , y además  $(h+x) \cap S = \{x\}$ .

En cuanto a  $\{\text{ext}(\partial d_a(x) : a \in A, a \neq x)\}$ , (la otra entrada en el algoritmo), en general, no se puede obtener exactamente.

Sí es posible hacerlo, por el contrario, en algunos casos de interés, como es el caso en que cada  $d^a$  viene inducida por una gauge poliédrica (véase la sección siguiente). Para la norma euclídea, el cálculo de los (sub)diferenciales involucra el uso de raíces cuadradas. No obstante, el algoritmo geométrico puede usarse también si sustituimos cada (sub)gradiente por un múltiplo positivo de él. Así, podemos dar como entrada  $\nabla d_a^2(x) = x - a$  en lugar de  $\nabla d_a(x)$ .

Los resultados anteriores permiten asimismo establecer cotas sobre la variación de la función objetivo cuando varía el vector de pesos.

Fijado  $w=(w_a)_{a \in A} \in W=(0, +\infty)^{|A|}$ , sea  $\mu_{S,w}(\cdot)$  la función

$$\mu_{S,w}(x) = \max_{y \in S} \sum_{a \in A} w(a) \delta_a(x,y)$$

donde  $\delta_a(x,y)$  es la función de preferencias binarias,

$$\delta_a(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_a(y) < d_a(x) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**Teorema 4.4.**

Para  $x \in S$ , sea  $T(x)$  el conjunto

$$T(x) = \{ t \in \{0,1\}^{|A|} : (-N_S(x)) \cap H(\bigcup_{a \in A: t_a=1} \partial d_a(x)) = \emptyset \}$$

Dadas una norma  $\|\cdot\|$  y su dual  $\|\cdot\|^\circ$  en  $\mathbb{R}^{|A|}$ , se tiene:

$$|\mu_{S,w}(x) - \mu_{S,v}(x)| \leq \|w-v\| \max_{t \in T(x)} \|t\|^\circ \quad \forall v, w \in W$$

**Demostración.**

$$\mu_{S,w}(x) - \mu_{S,v}(x) = \max_{t \in T(x)} \langle w, t \rangle - \max_{t \in T(x)} \langle v, t \rangle$$

Sea  $t^* \in T(x)$  tal que  $\langle w, t^* \rangle = \max_{t \in T(x)} \langle w, t \rangle$ . Aplicando la

desigualdad de Cauchy-Schwartz, se sigue que

$$\mu_{S,w}(x) - \mu_{S,v}(x) \leq \langle w-v, t^* \rangle \leq \|w-v\| \|t^*\|^\circ \leq \|w-v\| \max_{t \in T(x)} \|t\|^\circ$$

Análogamente se prueba que

$$\mu_{S,v}(x) - \mu_{S,w}(x) \leq \|w-v\| \max_{t \in T(x)} \|t\|^\circ$$

con lo que se tiene lo pedido ■

**Observación 4.3.**

Este resultado es particularmente útil cuando  $\|\cdot\|^0$  es una norma monótona, i.e.:  $\|u\|^0 \leq \|v\|^0 \forall u, v \in [0, +\infty)^{|A|}, u \leq v$ .

(Por ejemplo, toda norma  $l_p$  es monótona).

Para normas  $\|\cdot\|^0$  monótonas, se sigue que

$$\max_{t \in T(x)} \|t\|^0 = \max_{t \in E(x)} \|t\|^0$$

donde  $E(x)$  es el conjunto de puntos de  $T(x)$  no dominados en  $T(x)$ , esto es:

$$E(x) = \{t \in T(x) : \text{no existe } t^* \in T(x) \text{ tal que } t \leq t^*, t \neq t^*\}$$

Obsérvese que los puntos de  $E(x)$  son construidos en alguna de las etapas del algoritmo 4.1, y contiene a lo sumo  $2|A|$  elementos. El algoritmo anterior se puede adaptar fácilmente para que también devuelva el valor  $\max_{t \in E(x)} \|t\|^0$ , lo

que será de gran interés práctico para conocer las posibles variaciones en la función objetivo cuando los pesos sean obtenidos a través de estimaciones, luego puedan venir afectados por errores.

**Ejemplo 4.1.**

Acotemos la posible variación de  $\mu_{S,w}(x)$  cuando  $w$  varía en el conjunto  $W = \{w \in (0, +\infty)^{|A|} : |w_i - w_i^*| \leq \delta_i w_i^*, 1 \leq i \leq |A|\}$  para unos ciertos  $w^* \in (0, +\infty)^{|A|}$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{|A|}) \in (0, 1)^{|A|}$ .

Sea  $\|\cdot\|$  la norma dada por  $\|u\| = \max_i \{|u_i| / (w_i^* \delta_i)\}$ .

Es fácil comprobar que  $\|\cdot\|^0$  viene dada por

$$\|u\|^0 = \sum_{i=1}^n w_i^* \delta_i |u_i| \quad \forall u \in \mathbb{R}^{|A|}$$

que, evidentemente, es una norma monótona. Por consiguiente,

$$|\mu_{S,w}(x) - \mu_{S,w^*}(x)| \leq \|w - w^*\| \max_{t \in E(x)} \|t\|^0 = \max_{t \in E(x)} \sum_{a \in A} w_a^* \delta_a t_a$$

### 4.3. CENTROIDES CON GAUGES POLIEDRICAS

El objetivo de esta sección es determinar un centroide para el problema

$$\min_{x \in S} (d^a(a, x) : a \in A)$$

cuando  $S$  es un poliedro de  $\mathbb{R}^2$  y cada punto de demanda mide las distancias a través de una *gauge poliédrica*, i.e.: cada distancia está inducida por una gauge cuya bola unidad es un poliedro.

El resultado fundamental es el corolario 4.5, que reduce la búsqueda de un centroide a un conjunto finito de puntos, que podrán ser evaluados usando el algoritmo 4.1. de la sección precedente.

La herramienta teórica utilizada es el concepto de *conjunto convexo elemental*, desarrollado por Durier y Michelot. Referimos al lector a los trabajos de estos autores (e.g. Durier-Michelot, 1985; Durier, 1990) para una mejor comprensión de los resultados.

**Definición 4.1.** (Durier-Michelot, 1985).

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto finito no vacío, y, para cada  $a \in A$ , sea  $d^a$  una métrica inducida por una gauge poliédrica con bola unidad  $B_a$ . Se dice que un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es un *conjunto convexo elemental* (c.c.e.) sii es de la forma

$$C = \bigcap_{a \in A} (a + N(p_a))$$

donde, para cada  $a \in A$ ,  $p_a \in B_a^0$  (la bola polar de  $B_a$ ), y  $N(p_a)$  es el cono normal a  $B_a^0$  en  $p_a$ .

El concepto de conjunto convexo elemental ha sido ampliamente usado para abordar el problema de la eficiencia en problemas sin restricciones. Nosotros proponemos una extensión natural de este concepto para problemas con restricciones poliédricas, conservándose las propiedades del caso sin restricciones.

#### Definición 4.2.

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto finito no vacío,  $\{d^a: a \in A\}$  una familia de métricas en  $\mathbb{R}^n$  inducidas por gauges poliédricas, y sea  $S$  un poliedro no vacío de  $\mathbb{R}^n$ .

• Se dice que un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es un *conjunto convexo elemental en  $S$*  (c.c.e. en  $S$ ) sii es de la forma

$$C = C^* \cap F$$

para algún  $C^*$ , c.c.e. (según la definición 4.1), y una cara  $F$  de  $S$ .

• Se dice que un punto  $x \in S$  es un *punto de intersección en  $S$*  sii es un punto extremo de algún c.c.e. en  $S$ .

#### Observación 4.5.

En el plano, el conjunto  $I$  de puntos de intersección en  $S$  tiene una sencilla representación: para cada  $a \in A$ , y cada  $e \in \text{ext}(B_a)$ , sea  $r(a, e)$  el rayo

$$r(a, e) = \{x \in \mathbb{R}^2: x = a + te, t \geq 0\}$$

Se sigue que el conjunto  $I$  consta de los siguientes puntos:

i)  $A \cap S$ .

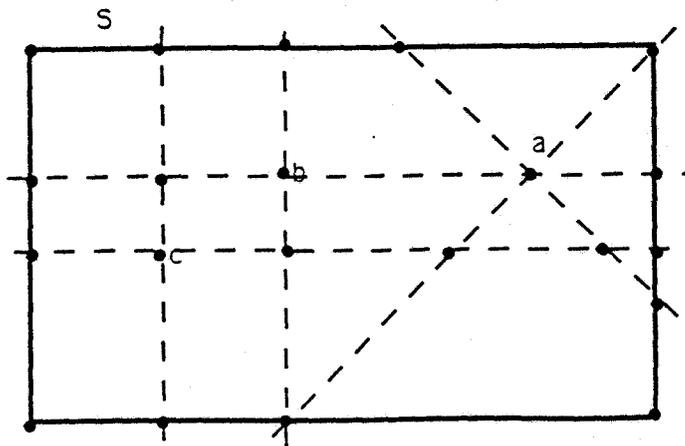
ii)  $\text{ext}(S)$ .

iii) Los puntos extremos de los conjuntos (posiblemente degenerados a un punto) de la forma  $r(a, e) \cap S$  para  $a \in A$ ,  $e \in \text{ext}(B_a)$ .

iv) Los puntos extremos de los conjuntos (posiblemente degenerados a un punto) de la forma  $r(a_1, e_1) \cap r(a_2, e_2) \cap S$  con  $a_1, a_2 \in A$ ,  $e_i \in \text{ext}(B_{a_i})$ ,  $i=1, 2$ .

En particular, si  $|\text{ext}(B_a)| = O(r) \quad \forall a \in A$ , entonces  $|I| = O(|A|^2 r^2 + \text{ext}(S))$ .

Un ejemplo aparece en la figura siguiente:  $S$  es el rectángulo, y  $A = \{a, b, c\}$ , siendo  $d^a$  la norma  $l_\infty$ , y  $d^b = d^c$  la norma  $l_1$ .



Para cada  $a \in A$ , denotemos por  $d_a$  la función  $d(a, \cdot)$ .

**Teorema 4.5.**

Sea  $S$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  un conjunto finito en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{d^a : a \in A\}$  una familia de métricas en  $\mathbb{R}^n$  inducidas por gauges poliédricas.

El conjunto de centroides  $\Sigma(S)$  para el problema

$$\min_{x \in S} (d_a(x) : a \in A)$$

es una unión de c.c.e.'s en  $S$  acotados.

**Demostración.**

Basta probar que para todo centroide  $x$  existe un c.c.e.  $D$  en  $S$  acotado tal que  $x \in D \subset \Sigma(S)$ .

Sea  $x$  un centroide. Para cada  $a \in A$ , sea  $V(a)$  el conjunto de puntos extremos de  $B_a^0$ , y sea  $V^*(a)$  el conjunto

$$V^*(a) = \{v \in V(a) : d_a(x) = \langle v, x-a \rangle\}$$

El conjunto  $C$ ,

$$C = \{z \in \mathbb{R}^n : d_a(x) = \langle v, x-a \rangle \forall v \in V(a) \forall a \in A\}$$

es un c.c.e. en  $\mathbb{R}^n$  (i.e.: según la definición 4.1) (véase Durier-Michelot, 1985).

Como  $x \in S$ , existe una única cara  $F$  de  $S$  tal que  $x \in \text{ri}(F)$  (véase, e.g., Brøndsted, 1983).

Evidentemente, el conjunto  $C \cap F$  es un c.c.e. en  $S$ .

Probemos que  $C \cap F$  está contenido en  $\Sigma(S)$ . En efecto: sea  $\mathcal{A} = \{A' \subset A : x \in \text{WE}(A', S)\}$ . Por el teorema 1.6., para probar que  $C \cap F \subset \Sigma(S)$ , basta probar que

$$C \cap F \subset \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} \text{WE}(A', S)$$

En primer lugar, del teorema 6.2. de Durier (1990), se sigue que  $x \in \text{ri}(C)$ , luego

$$x \in \text{ri}(C) \cap \text{ri}(F)$$

por lo que, como cada  $d_a$  es lineal en  $C$ ,

$$\partial d_a(x) \subset \partial d_a(y) \quad \forall y \in C \cap F \quad (*)$$

$$N_S(x) \subset N_S(y) \quad \forall y \in C \cap F \quad (**)$$

Dado  $A' \in \mathcal{A}$ , del teorema 4.1 se sigue que

$$(-N_S(x)) \cap H\left(\bigcup_{a \in A'} \partial d_a(x)\right) \neq \emptyset$$

luego, por (\*) y (\*\*),

$$(-N_S(y)) \cap H\left(\bigcup_{a \in A'} \partial d_a(y)\right) \neq \emptyset \quad \forall y \in C \cap F$$

i.e.: (usando de nuevo el teorema 4.1.)

$$C \cap F \subset \text{WE}(A', S)$$

Como  $C \cap F \subset \text{WE}(A', F) \quad \forall A' \in \mathcal{A}$ , se sigue del teorema 1.6 que  $C \cap F \subset \Sigma(S)$ . Además,  $C \cap F$  es acotado, ya que  $\Sigma(S)$  lo es (por serlo  $\text{WE}(A, S)$ : véase, e.g. Plastria, 1983).

Se tiene por tanto que

$$\forall x \in \Sigma(S) \exists D, \text{ c.c.e. en } S \text{ acotado} / x \in D \subset \Sigma(S)$$

luego se tiene el resultado ■

#### Corolario 4.2.

En las hipótesis del teorema precedente, el conjunto  $I$  de puntos de intersección en  $S$  contiene al menos un centroide del problema  $\min_{x \in S} (d_a(x) : a \in A)$ .

**Demostración.**

El conjunto de centroides es no vacío. Dado  $x \in \Sigma(S)$ , del teorema anterior se sigue que existe un c.c.e.  $D$  en  $S$  acotado tal que  $x \in D \subset \Sigma(S)$ .

Por ser  $D$  acotado, tiene al menos un vértice, que es

necesariamente también un centroide ■

El teorema anterior establece la validez del algoritmo siguiente:

Algoritmo 4.2.

Entrada:  $S$  (poliedro),  $A \subset \mathbb{R}^n$ , finito no vacío;  $\{d^a: a \in A\}$  (una familia de métricas inducidas por gauges poliédricas),  $w \in (0, \infty)^{|A|}$ .

Salida:  $(x^*, \mu^*)$ , siendo  $x^*$  un centroide para el problema  $\min_{x \in S} (d_a(x): a \in A)$  con peso  $w$ , y  $\mu^* = \mu_S(x)$ .

PASO 1:

Calcular  $I$ , el conjunto de puntos de intersección en  $S$ .

Tomar  $x_0 \in I$ .

Hacer  $\mu^* \leftarrow \mu_S(x_0)$ ,  $x^* \leftarrow x_0$

PASO 2:

Para cada  $y \in I$ ,  $y \neq x$ , hacer:

{

Hacer  $\mu \leftarrow \mu_S(y)$

Si  $\mu^* > \mu$ , hacer  $\mu^* \leftarrow \mu_S(y)$ ,  $x^* \leftarrow y$

}

Parar.

Para poder utilizar el algoritmo anterior, es necesario un procedimiento de evaluación de  $\mu_S(\cdot)$  en cada punto de intersección en  $S$ .

Cuando la dimensión del espacio es 2, el algoritmo de la sección anterior permite obtener el siguiente resultado:

**Teorema 4.6.**

Sea  $S$  un poliedro en  $\mathbb{R}^2$ , dado por  $v$  restricciones lineales, y sea  $A$  un conjunto finito no vacío en  $\mathbb{R}^2$ .

Si cada  $d^a$  viene inducida por una gauge poliédrica, con bola unidad  $B_a$  dada por  $\text{ext}(B_a)$ , y  $|\text{ext}(B_a)| = O(r) \forall a \in A$ , el algoritmo anterior encuentra un centroide en tiempo

$$O((|A|^2 r^2 + v)(|A| \log(|A|r) + \log(v)))$$

**Demostración.**

En primer lugar, realizamos las siguientes tareas:

- Para cada  $a \in A$ , hallar y ordenar circularmente  $\text{ext}(B_a)$ .
- Determinar las restricciones no redundantes para  $S$ , ordenando sus vectores normales circularmente.
- Hallar un punto en  $\text{ri}(S)$ .

Estas tareas pueden realizarse (véase Preparata-Shamos, 1985) en tiempo  $O(|A|r \log(r) + v \log(v))$ .

Con esta información, un algoritmo trivial calcula  $\{(x, N_S(x)) : x \in I\}$  en tiempo  $O(|A|^2 r^2 \log(v) + v)$ .

El conjunto  $I$  de puntos de intersección en  $S$  tiene cardinal  $O(|A|^2 r^2 + v)$ . Para cada  $x \in I$ , podemos hallar  $\{\partial d_a(x) : a \in A\}$  en tiempo  $O(|A| \log(r))$ , y determinar  $\mu_S(x)$  en tiempo  $O(|A| \log(|A|))$  (usando el algoritmo 4.1.).

Por lo tanto, todo el paso 2 puede realizarse en tiempo  $O((|A|^2 r^2 + v) |A| \log(|A|r))$ .

Sumando los tiempos de procesamiento de ambos pasos, se tiene lo pedido ■

#### 4.4. CENTROIDES CON LA NORMA EUCLIDEA

El caso particular mejor estudiado del problema de determinación de centroides para

$$\min_{x \in S} (d^a(a, x) : a \in A)$$

es bajo las hipótesis de que  $S = \mathbb{R}^2$  y existe sólo una métrica (i.e.:  $d^a = d \ \forall a \in A$ ), estando ésta inducida por una norma estrictamente convexa.

Bajo estos supuestos, se tiene (véase Drezner, 1982, y especialmente Durier, 1990):

**Teorema 4.7.** (Drezner, 1982)

Dado  $w \in (0, \infty)^{|A|}$ , el conjunto de centroides del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (d(a, x) : a \in A)$$

para el peso  $w$  cuando  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia euclídea puede determinarse en tiempo  $O(|A|^2 \log^2(|A|))$  con  $O(|A|)$  espacio.

**Teorema 4.8.** (Durier, 1990).

Sea  $d(\cdot, \cdot)$  inducida por una norma estrictamente convexa.

Dado  $w \in (0, \infty)^{|A|}$ , el conjunto de centroides para el problema  $\min_{x \in \mathbb{R}^2} (d(a, x) : a \in A)$  con peso  $w$  coincide con el de centroides para la distancia euclídea.

Las propiedades anteriores hacen del problema  $P_{\mathbb{R}^2}$ ,

$$P_{\mathbb{R}^2}: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \mu_{\mathbb{R}^2}(x)$$

un problema muy atractivo. Por un lado, puede resolverse exactamente con una complejidad moderada (un tiempo  $O(|A|^2 \log^2(|A|))$  es suficiente); más aún: por el teorema 4.8, los resultados y algoritmos propuestos son independientes de la métrica usada en  $\mathbb{R}^2$ , tan pronto como ésta sea inducida por una norma estrictamente convexa.

Esta propiedad de robustez frente a la distancia es de sumo interés, pues evita el costoso (y posiblemente inexacto) procedimiento de aproximación de distancias reales por una cierta norma (véase Brimberg-Love, 1991).

Sin embargo, asumir que el espacio factible es todo el plano (i.e.:  $S = \mathbb{R}^2$ ) puede ser una hipótesis muy poco ajustada en algunos problemas reales (véase, e.g., la discusión en Hansen-Peeters-Thisse, 1982).

En esta sección estudiamos el problema  $P_S$ ,

$$P_S: \quad \min_{x \in S} \mu_S(x)$$

bajo las hipótesis siguientes:

- H1:  $A$  es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^2$ .
- H2:  $S \in \mathcal{C}(2)$
- H3:  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia euclídea.

Estudiemos en primer lugar la relación entre los problemas  $P_{\mathbb{R}^2}$  y  $P_S$ .

La resolución de  $P_S$  parece a primera vista tarea más difícil que la de  $P_{\mathbb{R}^2}$ , en tanto en cuanto muchas de las propiedades de  $\mu_{\mathbb{R}^2}$  y  $\Sigma(\mathbb{R}^2)$  no se generalizan a conjuntos convexos cerrados arbitrarios, como ponen de manifiesto los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 4.2.**

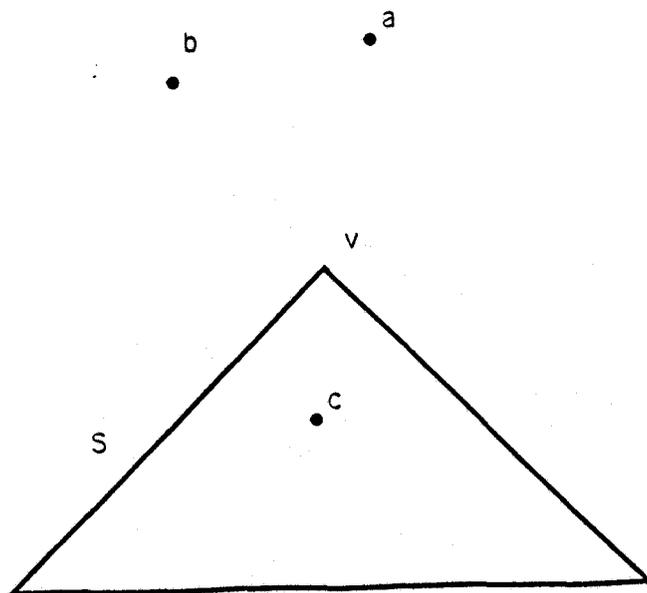
Sea  $A$  el conjunto  $A=\{a,b,c\}$  de la figura, y  $S$  el triángulo marcado con línea gruesa. Para los pesos  $w(a) = w(b) = 1/4$ ,  $w(c)=1/2$ , es fácil comprobar que  $\Sigma(\mathbb{R}^2) = \{c\}$ .

En cambio, puede probarse (por ejemplo, usando la metodología que desarrollaremos en esta sección), que  $\Sigma(S)=\{c,v\}$ : un conjunto no conexo.

Para los mismos conjuntos  $A$  y  $S$ , pero con vector de pesos  $w(a)=1/3$ ,  $w(b)=2/9$ ,  $w(c)=4/9$ , se tiene que

$$\Sigma(\mathbb{R}^2) = \{c\} , \Sigma(S) = \{v\}$$

luego  $\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap \Sigma(S) = \emptyset$ .



### Ejemplo 4.3.

Consideremos ahora el problema en el que  $A=\{a\}$ , y  $S$  es un conjunto convexo cerrado arbitrario tal que  $a \in S$ .

Evidentemente  $\Sigma(\mathbb{R}^2) = \{a\}$ , y  $\Sigma(S) = \{\text{proj}_S(a)\}$ . Si la métrica euclídea es sustituida por otra métrica inducida por otra norma estrictamente convexa, el correspondiente  $\Sigma(S)$  será la proyección de  $a$  sobre  $S$ ; al depender ésta de la norma, se sigue que no se generaliza a problemas con restricciones el resultado antes mencionado de invariancia con respecto a la métrica.

Los ejemplos anteriores ponen en evidencia que los problemas  $P_S$  y  $P_{\mathbb{R}^2}$  son esencialmente distintos. Sin embargo, como veremos en los siguientes resultados, existe una estrecha relación entre ellos; de hecho, el algoritmo de resolución que proponemos para problemas restringidos no hace otra cosa que resolver el problema sin restricciones y evaluar  $\mu_S$  en un conjunto finito de puntos.

El resultado clave que permite resolver el problema  $P_S$  es el teorema 2.4., que caracteriza el conjunto  $WE(A,S)$  como la proyección sobre  $S$  de  $H(A)$ .

Se tiene:

#### Teorema 4.9.

$$\mu_S(x) = \text{máx} \{w(A') : A' \subset A, x \in \text{proj}_S H(A')\}$$

Demostración.

Inmediata a partir de los teoremas 1.6 y 2.4 ■

**Teorema 4.10.**

i)  $\mu_S(x) \leq \mu_{\mathbb{R}^2}(x) \quad \forall x \in S$

ii)  $\mu_S(x) = \mu_{\mathbb{R}^2}(x) \quad \forall x \in i(S)$

**Demostración.**

i) se sigue directamente de la definición de  $\mu_S$  y  $\mu_{\mathbb{R}^2}$ .

Para probar ii), sea  $x \in i(S)$ , el interior de  $S$ . Por el apartado i), basta probar que  $\mu_S(x) \geq \mu_{\mathbb{R}^2}(x)$ . Sea  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \neq x$ ; por convexidad de  $S$ , existe un punto  $z \in i(S)$  contenido en el segmento abierto  $(x, y)$  de extremos  $x$  e  $y$ .

Por convexidad de las funciones  $d_a(\cdot)$ , se sigue que

$$\{a \in A: d(a, y) < d(a, x)\} \subset \{a \in A: d(a, z) < d(a, x)\}$$

Por lo tanto,

$$w(\{a \in A: d(a, y) < d(a, x)\}) \leq w(\{a \in A: d(a, z) < d(a, x)\}) \leq \mu_S(x)$$

de donde se deduce que ( $y$  era un punto arbitrario en  $\mathbb{R}^2$ ,  $y \neq x$ )

$$\max_{y \in \mathbb{R}^2} w(\{a \in A: d(a, y) < d(a, x)\}) = \max_{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}} w(\{a \in A: d(a, y) < d(a, x)\})$$

$\leq \mu_S(x)$ , luego se cumple lo pedido ■

**Teorema 4.11.**

Si  $\Sigma(S) \cap i(S) \neq \emptyset$ , entonces

i)  $\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap S \subset \Sigma(S)$

ii)  $\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap i(S) = \Sigma(S) \cap i(S)$

**Demostración.**

Por hipótesis, existe  $x \in \Sigma(S) \cap i(S)$ . Por el teorema anterior,  $\mu_S(x) = \mu_{\mathbb{R}^2}(x)$ .

i): Para todo  $y \in \Sigma(\mathbb{R}^2) \cap S$ , se tiene (haciendo uso del

teorema anterior y de la definición de  $\Sigma(\cdot)$ ):

$$\mu_S(Y) \leq \mu_{\mathbb{R}^2}(Y) \leq \mu_{\mathbb{R}^2}(x) = \mu_S(x) = \min_{z \in S} \mu_S(z)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\mu_S(Y) = \min_{z \in S} \mu_S(z) \quad \forall y \in S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$$

luego se da i).

ii): En virtud de i), basta demostrar que  $\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap i(S) \supset \Sigma(S) \cap i(S)$ . Lo probaremos por reducción al absurdo: supongamos que existe  $y \in i(S) \cap \Sigma(S)$ ,  $y \notin \Sigma(\mathbb{R}^2)$ .

Por consiguiente, existe un cierto  $z \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\max \{w(A') : A' \subset A, z \in H(A')\} = \mu_{\mathbb{R}^2}(z) < \mu_{\mathbb{R}^2}(Y)$$

Dada la familia  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} = \{A' \subset A : w(A') \geq \mu_{\mathbb{R}^2}(Y)\}$$

se sigue que  $z \in WE(A', \mathbb{R}^2) = H(A') \quad \forall A' \in \mathcal{A}$ , i.e.:

$$z \in \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} H(A')$$

Por consiguiente (usando el teorema 2.4.),

$$\text{proj}_S(z) \in \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} \text{proj}_S(H(A')) = \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} WE(A', S) \quad (*)$$

Como

$$\mu_S(\text{proj}_S(z)) = \max \{w(A') : A' \subset A, \text{proj}_S(z) \in WE(A', S)\}$$

se sigue que

$$\mu_S(\text{proj}_S(z)) < \mu_{\mathbb{R}^2}(Y)$$

Como  $y \in i(S)$ , por el teorema anterior,  $\mu_{\mathbb{R}^2}(Y) = \mu_S(Y)$ , luego

$$\mu_S(\text{proj}_S(z)) < \mu_S(Y)$$

contradiciendo la hipótesis de que  $y \in \Sigma(S)$ . Con esto, queda probado ii) ■

**Corolario 4.3.**

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  definidos como sigue:

$$\alpha = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \mu_{\mathbb{R}^2}(x), & \text{si } \Sigma(\mathbb{R}^2) \cap i(S) \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\beta = \min_{x \in \text{bd}(S)} \mu_S(x)$$

Se tiene:

- i) Si  $\alpha < \beta$ , entonces  $\Sigma(S) = \Sigma(\mathbb{R}^2) \cap S$ .
- ii) Si  $\alpha = \beta$ , entonces  $\Sigma(S) = (\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap S) \cup (\Sigma(S) \cap \text{bd}(S))$
- iii) Si  $\alpha > \beta$ , entonces  $\Sigma(S) \subset \text{bd}(S)$ .

**Demostración.**

i): Si  $\alpha < \beta$ , en particular  $i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$ . Por definición de  $\beta$ , se tiene que  $\mu_{\mathbb{R}^2}(x) < \mu_S(y) \quad \forall y \in \text{bd}(S)$ . Por el teorema 4.11.,  $\mu_{\mathbb{R}^2}(x) = \mu_S(x)$ , luego  $\Sigma(S) \subset i(S)$ , i.e.:

$$\Sigma(S) = i(S) \cap \Sigma(S)$$

Como  $\Sigma(S) \neq \emptyset$  ( $\mu_S(\cdot)$  toma un conjunto finito de valores), estamos en las hipótesis del teorema precedente. Por la parte ii) de dicho teorema,

$$i(S) \cap \Sigma(S) = i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$$

Por otro lado, aplicando i) del teorema anterior,

$$i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \subset S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \subset \Sigma(S)$$

Uniendo la cadena de inclusiones anteriores,

$$\Sigma(S) \subset S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \subset \Sigma(S)$$

por lo que se verifica i).

Partes ii) y iii) se prueban análogamente, por lo que no serán demostradas ■

En virtud del teorema precedente, podemos seguir el siguiente esquema de optimización de  $P_S$ :

- Resolver  $P_{R^2}$ :  $\min_{x \in R^2} \mu_{R^2}(x)$ .
- Resolver  $Q_S$ :  $\min_{y \in bd(S)} \mu_S(y)$
- Aplicar el teorema anterior.

El problema  $P_{R^2}$  puede ser resuelto utilizando el algoritmo propuesto por Drezner (1982).

Para la resolución de  $Q_S$ , podemos usar la metodología de la sección anterior, reduciendo el problema, como mostramos a continuación, a evaluar un conjunto  $\mathcal{D}(S)$  finito de puntos, con  $|\mathcal{D}(S)| = O(|A|^2)$  (cada uno de estos puntos podrá evaluarse evidentemente usando el algoritmo 4.1.).

En efecto: en virtud de los teoremas 1.6. y 4.1., cada conjunto de nivel  $L_S(\alpha) = \{x \in S: \mu_S(x) \leq \alpha\}$  es la intersección de conjuntos de la forma  $WE(A', S) = \text{proj}_S(H(A'))$  para ciertos  $A' \subset A$ .

Evidentemente, cada conjunto  $bd(S) \cap \text{proj}_S H(A')$  (y por tanto sus intersecciones) consta de un número finito de arcos cerrados, cuyos puntos extremos pertenecen al conjunto

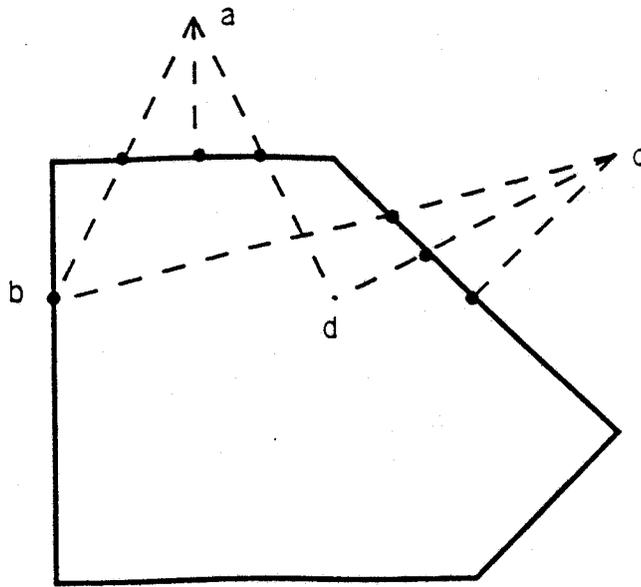
$$\text{proj}_S(A' \setminus i(S)) \cup \{\text{ext}(H(\{a, b\}) \cap bd(S)) : a, b \in A', a \neq b\}$$

Considérese el conjunto  $\mathcal{D}(S)$ , definido como sigue:

$$\mathcal{D}(S) = \text{proj}_S(A \setminus i(S)) \cup \{\text{ext}(H(\{a, b\}) \cap bd(S)) : a, b \in A, a \neq b\}$$

que es un conjunto con cardinal  $O(|A|^2)$ .

Un ejemplo aparece en la figura siguiente:



Se tiene:

**Teorema 4.12.**

Si  $D(S) = \emptyset$ , entonces  $\Sigma(S) = S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$ . En caso contrario,  $D(S)$  contiene al menos una solución óptima de  $Q_S$ .

**Demostración.**

Si  $D(S) = \emptyset$ , se sigue que  $A \in i(S)$ . Como  $S$  es cerrado y convexo, es  $H(A) \in i(S)$ , por lo que se tiene:

$$\emptyset \neq \Sigma(S) \subset WE(A, S) = \text{proj}_S(H(A)) = H(A) \subset i(S)$$

Por el teorema 4.11.,  $(i(S) \cap \Sigma(S) \neq \emptyset)$ ,

$$\Sigma(S) = i(S) \cap \Sigma(S) = i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \subset S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) \subset \Sigma(S)$$

Por lo tanto,  $\Sigma(S) = S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$ , luego se tiene lo pedido.

Si  $D(S) \neq \emptyset$ , la construcción de  $D(S)$  y los comentarios previos al teorema prueban que  $D(S)$  tiene al menos una solución óptima de  $Q_S$  ■

El conjunto  $\mathcal{D}(S)$  es un conjunto finito dominante para el problema  $Q_S$ .

La estructura del conjunto  $bd(S) \cap \Sigma(S)$  confiere a  $\mathcal{D}(S)$  un papel más importante aún: como veremos a continuación, a partir de  $\mathcal{D}(S)$  podemos obtener no sólo una sino todas las soluciones óptimas del problema  $Q_S$ .

Para ello, introducimos la siguiente notación: dados dos puntos  $x, y \in \mathcal{D}(S)$ , y un punto  $z \in bd(S) \setminus \{x, y\}$ , denotemos por  $\text{arc}(x, z, y)$  el único arco en  $bd(S)$  que contiene a  $z$  y cuyos extremos son  $x$  e  $y$ .

Se tiene:

**Teorema 4.13.**

Sean  $x, y \in \mathcal{D}(S)$ . Sea  $z^* \in bd(S) \setminus \{x, y\}$  tal que

$$\text{arc}(x, z^*, y) \cap \mathcal{D}(S) = \{x, y\}$$

Si  $z^*$  es una solución óptima de  $Q_S$ , entonces todo punto  $z \in \text{arc}(x, z^*, y)$  es solución óptima de  $Q_S$ .

**Demostración.**

Sea  $\mathcal{A} = \{A' \subset A : w(A') > \mu_S(z^*)\}$ . Se sigue que

$$z^* \in \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} WE(A', S) = \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} \text{proj}_S(H(A'))$$

Por construcción de  $\mathcal{D}(S)$ , y debido al hecho de que  $\text{arc}(x, z^*, y) \cap \mathcal{D}(S) = \{x, y\}$ , se sigue que

$$\text{arc}(x, z^*, y) \subset \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} \text{proj}_S(H(A')) = \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} WE(A', S)$$

luego se tiene el resultado ■

El siguiente algoritmo calcula todos los centroides del problema  $\min_{x \in S} (d_a(x) : a \in A)$

para un peso  $w$  dado:

**Algoritmo 4.3.**

Entrada:  $A$  (finito no vacío en  $\mathbb{R}^2$ ),  $S \in \mathcal{C}(2)$ .

Salida:  $(\mu^*, \Sigma^*)$ , con  $\mu^* = \min_{x \in S} \mu_S(x)$ ,  $\Sigma^* = \Sigma(S)$ , el conjunto

de centroides. es.

PASO 1:

Hallar  $\mathcal{D}(S)$ .

Si  $\mathcal{D}(S) = \emptyset$ , hacer  $\beta \leftarrow +\infty$ . Ir al paso 3

PASO 2:

Hallar  $\{x \in \mathcal{D}(S) : \mu_S(x) = \min_{y \in \mathcal{D}(S)} \mu_S(y)\}$ .

Hacer  $\beta \leftarrow \min_{y \in \mathcal{D}(S)} \mu_S(y)$ .

PASO 3:

Hallar  $\Sigma(\mathbb{R}^2)$

Si  $i(S) \cap \Sigma(\mathbb{R}^2) = \emptyset$ , hacer  $\alpha \leftarrow +\infty$ .

En caso contrario, hacer:

{

Hacer  $\alpha \leftarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2} \mu_{\mathbb{R}^2}(x)$ .

Si  $\alpha < \beta$ , hacer  $\Sigma^* \leftarrow S \cap \Sigma(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mu^* \leftarrow \alpha$ . Parar.

Hallar  $I = \{x \in \text{bd}(S) : \mu_S(x) = \beta\}$ .

Hacer  $\mu^* \leftarrow \beta$ ,  $\Sigma^* \leftarrow I$

Si  $\alpha = \beta$ , hacer  $\Sigma^* \leftarrow \Sigma^* \cup (\Sigma(\mathbb{R}^2) \cap S)$

Parar.

}

**Teorema 4.14.**

Sea  $S$  un poliedro en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $v$  restricciones lineales.

El algoritmo anterior describe  $\Sigma(S)$  en tiempo

$$O(|A|^3 \log(|A|) + |A|^2 v + v \log(v))$$

**Demostración.**

La validez del algoritmo es consecuencia de los teoremas anteriores. Estudiemos su complejidad:

En el paso 1, son necesarias las siguientes tareas:

- Para cada  $a \in A$ , hallar  $\text{proj}_S(a)$ .
- Para cada par  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ , hallar  $\text{ext}([a, b] \cap S)$ .

Identificando previamente las restricciones no redundantes de  $S$ , ordenando circularmente los vectores normales a éstas, y hallando un punto en  $\text{ri}(S)$ , un algoritmo trivial permite realizar el paso 1 en  $O(|A|^2 v + v \log(v))$  tiempo.

Se obtiene así el conjunto  $\mathcal{D}(S)$ , con  $O(|A|^2)$  elementos, para cada  $x$  de los cuales hay que hacer:

- Calcular  $N_S(x)$
- Calcular  $\{\partial d_a(x) : a \in A, a \neq x\}$
- Evaluar  $\mu_S(x)$

y finalmente hay que calcular el máximo de  $O(|A|^2)$  elementos.

Evaluando  $\mu_S$  con el algoritmo 4.1. y usando algoritmos triviales para el resto de las tareas, se sigue que los pasos 1-2 pueden realizarse conjuntamente en tiempo

$$O(|A|^3 \log(|A|) + |A|^2 v + v \log(v))$$

En el paso 3, hallar  $\Sigma(\mathbb{R}^2)$  requiere  $O(|A|^2 \log^2(|A|))$  tiempo (Drezner, 1982), y  $\Sigma(\mathbb{R}^2)$  es un politopo con  $O(|A|)$  vértices (Drezner, 1982).

Como la intersección de dos poliedros puede hacerse en tiempo y espacio lineal en la suma del número de vértices (ver O'Rourke et al., 1982), se sigue que  $\alpha$  puede obtenerse en tiempo

$$O(|A|^2 \log^2(|A|) + v)$$

Si  $\alpha \geq \beta$ , hay que calcular  $I$ . Por el teorema precedente, esta tarea puede hacerse del modo siguiente:

- Hacer  $I = \emptyset$ .
- Ordenar circularmente los elementos de  $\mathcal{D}(S)$ .
- Recorrer  $\mathcal{D}(S)$  en sentido contrario a las agujas del reloj. Para cada dos puntos  $x, y \in \mathcal{D}(S)$ , adyacentes en  $\mathcal{D}(S)$ , tales que  $\{x, y\} \subset \{z \in \mathcal{D}(S) : \mu_S(z) = \beta\}$ , determinar un punto  $z$  intermedio, i.e.: hallar  $z$  tal que  $\text{arc}(x, z, y) \cap \mathcal{D}(S) = \{x, y\}$ ; evaluar  $\mu_S(z)$  y añadir  $\text{arc}(x, z, y)$  si  $\mu_S(z) = \beta$ .

Como  $|\mathcal{D}(S)| = O(|A|^2)$ , se sigue que  $I$  puede construirse con tiempo no superior a la cota obtenida para los pasos anteriores. En definitiva, el algoritmo puede ejecutarse en el tiempo anunciado ■

CAPITULO V

LOCALIZACION MULTIOBJETIVO

DE UN CENTRO REPULSIVO

## 5.1. RESULTADOS GENERALES

En los capítulos anteriores hemos estudiado diversos aspectos del problema multiobjetivo de localización de un punto de servicio  $P(A,S)$ :  $\min_{x \in S} (d(a,x) : a \in A)$ .

En los modelos considerados, buscamos el conjunto de soluciones que *minimizaran* el vector de distancias  $(d(a,x) : a \in A)$ ; se partía por tanto de la hipótesis de que el servicio es *atractivo*, i.e.: todos los puntos de demanda desean la facilidad tan próxima a ellos como sea posible.

Si bien éste es el caso de ciertos servicios, como escuelas, hospitales, centros comerciales, hay toda una gama de facilidades (vertederos de basura, centrales nucleares, instalaciones militares, etc.) que, por su naturaleza contaminante o peligrosa resultan *repulsivas* para los puntos de demanda, que desean la facilidad tan alejada de ellos como sea posible.

En este capítulo estudiamos esta situación, conocida en la literatura como *Localización de centros repulsivos* (véanse los trabajos de Goldman-Dearing, 1975; Chatterji, 1987; Erkut-Neuman, 1989), a través de la determinación del conjunto de soluciones (débilmente) eficientes del problema multiobjetivo  $P^-(A,S)$ :

$$P^-(A,S) \quad \max_{x \in S} (d(a,x) : a \in A)$$

bajo las hipótesis siguientes:

- H1: A es un conjunto finito no vacío de  $\mathbb{R}^2$ .
- H2: S es un conjunto compacto no vacío.

Denotaremos por  $WE^-(A,S)$  (respectivamente por  $E^-(A,S)$ ) el conjunto de soluciones débilmente eficientes (respec. eficientes) del problema  $P^-(A,S)$ .

Entendemos que el estudio del problema  $P^-(A,S)$  está plenamente justificado: En el trabajo de Erkut y Neuman (1989) se dice:

"El proceso de decisión de localización de un servicio repulsivo debería constar de dos fases. En la primera, (generación de localizaciones) se identificaría un conjunto pequeño de posibles localizaciones, y en la segunda fase (selección) debería finalmente seleccionarse la localización"

La determinación de los conjuntos  $WE^-(A,S)$  y  $E^-(A,S)$  corresponde, evidentemente, a la primera fase del proceso de decisión: eliminamos aquellas (y sólo aquellas) alternativas para las cuales exista otra que es mejor componente a componente, dejando al decisor la última palabra (segunda fase).

Además, por ser S un conjunto compacto y no vacío, se tiene que las alternativas de  $WE^-(A,S)$  y  $E^-(A,S)$  dominan al conjunto S:

### Teorema 5.1.

Se tiene:

i)  $\forall x \in S \setminus E^-(A, S) \exists y \in E^-(A, S)$  tal que

$$d_a(y) \geq d_a(x) \quad \forall a \in A$$

$$d_a(y) > d_a(x) \text{ para algún } a \in A$$

ii)  $\forall x \in S \setminus WE^-(A, S) \exists y \in WE^-(A, S)$  tal que

$$d_a(y) > d_a(x) \quad \forall a \in A$$

Demostración.

i) se sigue del teorema 1.4. Para ii), considérese  $x \in S \setminus WE^-(A, S)$ . Por definición, existe  $y \in S$  tal que

$$d_a(y) > d_a(x) \quad \forall a \in A$$

Si  $y \in WE^-(A, S)$ , se tiene el resultado. En caso contrario,  $y \in E^-(A, S)$ . Aplicando i), existe  $z \in E^-(A, S)$  (luego  $z \in WE^-(A, S)$ ) tal que

$$d_a(z) \geq d_a(y) > d_a(x) \quad \forall a \in A$$

por lo que  $z$  cumple lo pedido ■

### Observación 5.1.

El resultado del teorema anterior deja de ser cierto tan pronto como se suprime la hipótesis de acotación de  $S$ . En efecto: en tal caso, podríamos construir una sucesión  $\{x_k\}$  en  $S$  tal que

$$\forall x \in S \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } d_a(x_k) > d_a(x) \quad \forall a \in A$$

Para ello, dado  $x \in S$ , basta tomar  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(0, x_k) > \max_{a \in A} 2d(0, a) + d(0, x)$$

con lo que se tendría que  $\emptyset = WE^-(A, S) = E^-(A, S)$ .

Bajo las hipótesis anteriores, si  $|A|=1$ , (i.e.:  $A=\{a\}$ ), la determinación de  $WE^-(A,S)$  y  $E^-(A,S)$  es elemental, (al menos en teoría) ya que se reduce a determinar el conjunto de soluciones óptimas del problema

$$\begin{array}{l} \text{máx } d(a,x) \\ x \in S \end{array}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{l} \text{máx } d^2(a,x) \\ x \in S \end{array}$$

Dada una dcc  $\{S_j: j \in J\}$  de  $S$ , como  $d^2(a, \cdot)$  es una función estrictamente convexa y cada  $S_j$  es un conjunto convexo cerrado y no vacío,  $d^2(a, \cdot)$  sólo puede alcanzar su máximo (restringida a  $S_j$ ) en puntos extremos de  $S_j$ . Se tiene por tanto el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.**

Sea  $\{S_j: j \in J\}$  una dcc de  $S$ , y sea  $V^*$  el conjunto

$$V^* = \{v^* \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j) : d(a, v^*) = \text{máx}_{v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)} d(a, v)\}.$$

Se tiene:

$$WE^-(\{a\}, S) = E^-(\{a\}, S) = V^*$$

Con el ánimo de simplificar los enunciados, evitamos en todo el capítulo esta caso trivial, imponiendo la hipótesis adicional:

- H3:  $|A| \geq 2$ .

## 5.2. CARACTERIZACION GEOMETRICA DE $WE^-(A,S)$

En primer lugar, probemos que  $WE^-(A,S)$  sólo depende de  $A$  a través del conjunto de sus puntos extremos,  $\text{ext}(A)$ . El interés práctico de este tipo de resultados fue mencionado en el capítulo 3.

Se tiene:

Teorema 5.3.

$$WE^-(A,S) = WE^-(H(A),S)$$

Demostración.

Análoga a la del teorema 2.1. ■

Corolario 5.1.

$$WE^-(A,S) = WE^-(\text{ext}(A),S)$$

Demostración.

Por el teorema anterior,

$$WE^-(A,S) = WE^-(H(A),S) = WE^-(H(\text{ext}(A)),S) = WE^-(\text{ext}(A),S)$$

luego se tiene lo pedido ■

Para cada  $a \in A$ , sea  $N_{H(A)}(a)$  el cono normal al poliedro  $H(A)$  en el punto  $a$ :

$$N_{H(A)}(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, b-a \rangle \leq 0 \ \forall b \in H(A)\}$$

Como la función  $b \rightarrow \langle x, b-a \rangle$  es lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} N_{H(A)}(a) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, b-a \rangle \leq 0 \quad \forall b \in A\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, b-a \rangle \leq 0 \quad \forall b \in \text{ext}(A)\} \end{aligned}$$

### Observación 5.2.

Como mencionamos en el capítulo 3,  $N_{H(A)}(\cdot)$  tiene una sencilla representación. De hecho, la familia  $\{N_{H(A)}(a) : a \in A\}$  puede obtenerse en tiempo  $O(|A| \log(|A|))$  con  $O(|A|)$  espacio.

En efecto: dado el conjunto  $A$ , podemos construir su cierre convexo, determinar sus puntos extremos y ordenar éstos en sentido de las agujas del reloj en tiempo  $O(|A| \log(|A|))$  con espacio  $O(|A|)$  (véase, e.g., Preparata-Shamos, 1985).

Con esta estructura, la caracterización dada en el capítulo 3 permite calcular cada  $N_{H(A)}(a)$  en tiempo constante. Por tanto, la familia  $\{N_{H(A)}(a) : a \in A\}$  puede obtenerse en tiempo  $O(|A| \log(|A|))$  con espacio  $O(|A|)$ .

La familia  $\{N_{H(A)}(a) : a \in A\}$  juega un papel crucial en la determinación de  $WE^-(A, S)$ , como ponen de manifiesto los siguientes resultados. Dada una dcc de  $S$   $\{S_j : j \in J\}$ , para cada  $x \in S$ ,  $a \in A$ ,  $j \in J$ , denotemos por  $V_j(x, a)$  el conjunto de puntos extremos del compacto convexo (posiblemente vacío)  $S_j \cap (x + N_{H(A)}(a))$ , i.e:

$$V_j(x, a) = \text{ext}(S_j \cap (x + N_{H(A)}(a)))$$

Obsérvese que, dado que  $S_j$  es convexo y cerrado, el conjunto  $V_j(x,a)$  consta a lo sumo de los siguientes elementos:

- El propio  $x$ .
- $\text{ext}(S_j) \cap (x + N_{H(A)}(a))$ .
- Los puntos extremos de los segmentos (posiblemente degenerados) de la forma

$$S_j \cap \{x + td : t \geq 0\}$$

para algún  $d$ , vector extremo del cono  $N_{H(A)}(a)$ .

Evidentemente, si  $S_j$  es un poliedro,  $V_j(x,a)$  es un conjunto finito, con  $|V_j(x,a)| \leq 2 + |\text{ext}(S_j)|$ . Más aún:

$$|\bigcup_{j \in J, a \in A} V_j(x,a)| \leq |J| (2 + \sup_j |\text{ext}(S_j)|)$$

#### Teorema 5.4.

Sea  $\{S_j : j \in J\}$  una dcc de  $S$ , y sea  $x \in S$ . Son equivalentes:

- i)  $x \in \text{WE}^-(A, S)$
- ii)  $d(x,a) \geq d(y,a) \quad \forall y \in V_j(x,a), \forall a \in \text{ext}(A), \forall j \in J$ .

**Demostración.**

Por el corolario 5.1.,  $\text{WE}^-(A, S) = \text{WE}^-(\text{ext}(A), S)$ . Sea  $x \in S$ .

Considérese, para cada  $a \in \text{ext}(A)$ , la función  $\psi_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\psi_a(y) = d(y,a)^2 - d(x,a)^2 = \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle y-x, a \rangle$$

Por definición,  $x \in \text{WE}^-(\text{ext}(A), S)$  sii

$$\forall j \in J, \forall y \in S_j, \exists a \in \text{ext}(A) \text{ tal que } d(y,a) \leq d(x,a)$$

i.e.:

$$\forall j \in J, \forall y \in S_j, \exists a \in \text{ext}(A) \text{ tal que } \psi_a(y) \leq 0$$

i.e.:

$$\sup_{j \in J} \max_{y \in S_j} \min_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(y) \leq 0 \quad (*)$$

Ahora bien: dados  $b \in \text{ext}(A)$ ,  $y \in S$ ,  $\psi_b(y) = \min_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(y)$

sii  $\|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle y-x, b \rangle \leq \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle y-x, a \rangle \quad \forall a \in \text{ext}(A)$ , lo que ocurre sii  $y \in x + N_{H(A)}(b)$ . Por (\*), se tiene que

$$x \in \text{WE}^-(A, S) \text{ sii } 0 \geq \sup_{j \in J} \max_{a \in \text{ext}(A)} \max \{ \psi_a(y) : y \in S_j \cap (x + N_{H(A)}(a)) \}$$

Evidentemente,  $\psi_a(\cdot)$  es una función convexa, y cada  $S_j \cap (x + N_{H(A)}(a))$  es un conjunto compacto convexo, luego  $\psi_a(\cdot)$  alcanza el máximo del problema (restringido a  $S_j \cap (x + N_{H(A)}(a))$ ) en algún punto extremo del conjunto factible, i.e.: en algún  $y \in V_j(x, a)$ .

Se tiene por tanto que

$$x \in \text{WE}^-(A, S) \text{ sii } 0 \geq \sup_{j \in J} \max_{a \in \text{ext}(A)} \max \{ \psi_a(y) : y \in V_j(x, a) \}$$

lo que ocurre sii se da ii) ■

Por definición, un punto  $x \in S$  es débilmente eficiente para el problema multiobjetivo  $P^-(A, S)$  sii

$$S \subset \bigcup_{a \in A} \{ z \in \mathbb{R}^2 : d(a, z) \leq d(a, x) \}$$

Es decir:  $x \in \text{WE}^-(A, S)$  sii el conjunto de bolas centradas en los puntos de  $A$  y con  $x$  en la frontera cubren el conjunto factible  $S$ .

Los resultados anteriores permiten establecer el siguiente test de eficiencia, finito cuando  $S$  admite una dcc poliédrica finita:

### Algoritmo 5.1.

Entrada:  $A$  (finito no vacío),  $\{S_j: j \in J\}$  (una dcc de  $S$ ),  $x$ .

Salida: cierto, si  $x \in WE^-(A, S)$ ; falso, si  $x \notin WE^-(A, S)$ .

PASO 0. Determinar  $\text{ext}(A)$  y  $\{N_{H(A)}(a): a \in \text{ext}(A)\}$ .

PASO 1. Determinar  $V_j(x, a)$  para cada  $a \in \text{ext}(A)$ ,  $j \in J$ .

PASO 2. Si  $\exists a \in \text{ext}(A)$ ,  $j \in J$ ,  $y \in V_j(x, a)$  tal que  $d(x, a) < d(y, a)$ , devolver falso; en caso contrario, devolver cierto.

El objetivo de esta sección es mucho más ambicioso que obtener un test de eficiencia como el anterior: queremos caracterizar (y dar un procedimiento constructivo de determinación) todo el conjunto  $WE^-(A, S)$  cuando  $S$  es un conjunto arbitrario compacto.

El teorema 5.4. proporciona una caracterización de  $WE^-(A, S)$  que, como veremos a continuación, permite obtener analíticamente dicho conjunto.

Para cada lado  $\ell$  no degenerado de  $H(A)$ ,  $\ell = H(\{a, b\})$ ,  $a, b \in \text{ext}(A)$ ,  $a \neq b$ , denotemos por  $\text{Dir}(\ell)$  el conjunto de vectores unitarios extremos de  $N_{H(A)}(a) \cap N_{H(A)}(b)$ .

Evidentemente, si  $H(A)$  tiene interior vacío (i.e.:  $H(A) = \ell$ ), entonces  $\text{Dir}(\ell)$  consta de los dos vectores unitarios (opuestos) normales a  $\ell$ ; si  $H(A)$  tiene interior no vacío, entonces  $\text{Dir}(\ell)$  es el vector unitario  $d$ , normal a  $\ell$ , tal que

$$\langle d, c-a \rangle \leq 0 \quad \forall c \in H(A)$$

Para cada lado  $\ell = H(\{a, b\})$  de  $H(A)$ , y  $d \in \text{Dir}(\ell)$ , establecemos la siguiente notación:

•  $r(\ell)$  es la recta que contiene al lado  $\ell$

•  $h(\ell, d)$  es el semiplano  $\{x: \langle x-a, d \rangle \geq 0\}$ , i.e.:  $h(\ell, d)$  es el semiplano cerrado con  $bd(H(\ell, d)) = r(\ell)$ , y  $d$  apuntando hacia él.

•  $\sigma_\ell$  es la simetría axial de eje  $r(\ell)$ .

Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , denotemos por  $(x, y)$  el segmento abierto (eventualmente vacío) cuyos extremos son  $x$  e  $y$ .

### Teorema 5.5.

Sea  $\{S_j: j \in J\}$  una dcc de  $S$ , y sea  $x \in S$ .  $x \in WE^-(A, S)$  sii se da alguna de las dos condiciones siguientes:

i)  $\exists v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)$  tal que  $d(a, v) > d(a, x) \quad \forall a \in \text{ext}(A)$ .

ii)  $\exists \ell$ , lado no degenerado de  $H(A)$ ,  $\exists d \in \text{Dir}(\ell)$  tal que  $x \in K(\ell, d)$ , donde  $K(\ell, d)$  es el conjunto

$$K(\ell, d) = \{z \in S: z \in (y, \sigma_\ell(y)) \text{ para algún } y \in bd(\bigcup_{j \in J} S_j) \cap h(\ell, d)\}$$

### Demostración.

Por el corolario 5.1.,  $WE^-(A, S) = WE^-(\text{ext}(A), S)$ . Probemos el resultado por doble implicación. Sea  $x \in S$ ,  $x \in WE^-(A, S)$ ; por el teorema 5.3., existen  $a \in \text{ext}(A)$ ,  $j \in J$ ,  $z \in V_j(x, a)$  tales que

$$d(x, a) < d(z, a) = \min_{b \in \text{ext}(A)} d(z, b) \quad (*)$$

Ahora bien: los elementos de  $V_j(x, a)$  pueden ser de uno de los tres tipos siguientes:

I: El propio  $x$ .

II: Los puntos extremos de  $S_j$  contenidos en  $N_{H(A)}(a)$

III: Los puntos extremos de intersección de los rayos  $\{x+td: t > 0\}$  con  $bd(S_j)$ , para algún  $d$ , vector unitario extremo del cono  $N_{H(A)}(a)$ .

Evidentemente, el punto  $z=x$  no verifica la condición (\*), luego (\*) es verificada por un punto  $z$  de los tipos II o III.

Si  $z$  es del tipo II, por (\*) se tiene la condición i).

Veamos a continuación que si  $z$  es del tipo III, se tiene la condición ii) del enunciado.

Por ser  $z$  del tipo III,  $z \in \text{bd}(S_j)$ , existe  $d$ , vector extremo unitario de  $N_{H(A)}(a)$ , y existe  $t > 0$  tales que  $z=x+td$ .

Como  $d$  es un vector extremo unitario de  $N_{H(A)}(a)$ , se tiene que  $d \in \text{Dir}(\ell)$  para algún lado  $\ell$  (no degenerado) de  $H(A)$ , adyacente al vértice de  $H(A)$  a (recordemos que  $a \in \text{ext}(A)$ ).

Consideremos la simetría axial  $\sigma_\ell$ . Se tiene ( $z=x+td$ ) que  $z$ ,  $x$  y  $\sigma_\ell(z)$  están alineados. Por (\*),

$$d(a, \sigma_\ell(z)) = d(a, z) > d(a, x)$$

Además, por ser  $d_a(\cdot)$  una función convexa, se sigue que  $x \in (z, \sigma_\ell(z))$ .

Esto implica que existe  $\lambda > 0$  tal que  $\sigma_\ell(z) = x + \lambda(x - z)$ .

Por tanto,

$$z - \sigma_\ell(z) = z - x - \lambda(x - z) = (1 + \lambda)(z - x) = (1 + \lambda)td$$

Como  $(1 + \lambda)t > 0$ , se sigue que  $z - \sigma_\ell(z)$  es paralelo a  $d$ , con constante de proporcionalidad positiva, luego  $z \in \text{eh}(\ell, d)$ , y con esto queda probado que se verifica ii).

Probemos a continuación el recíproco.

Sea  $x \in S$ ,  $x$  verificando i) o ii). Veamos que  $x \in \text{WE}^-(\text{ext}(A), S) = \text{WE}^-(A, S)$ .

El resultado es trivial si se da i), luego suponemos que sólo se da ii).

Sean  $\ell$ , lado no degenerado de  $H(A)$ ,  $d \in \text{Dir}(\ell)$ ,  $j \in J$ ,  $y \in \text{bd}(S_j) \cap h(\ell, d)$  tales que  $x \in (y, \sigma_\ell(y))$ . Probemos que  $d(a, x) < d(a, y) \quad \forall a \in \text{ext}(A)$ .

Sea  $a^* \in \text{ext}(\ell) \subset A$ . Por definición de  $h(\ell, d)$ , se tiene que

$$\langle y - a^*, d \rangle \geq 0 \quad (*)$$

Asimismo, por definición de  $\text{Dir}(\ell)$ , se sigue que

$$\langle a - a^*, d \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A \quad (**)$$

Sea  $u$  un vector director de la recta  $r(\ell)$ . Por (\*), y por ser  $x \in (y, \sigma_\ell(y))$ , se tiene que

$$\exists \alpha, \beta, \beta > 0 \quad \text{tal que } y = a^* + \alpha u + \beta d$$

$$\exists \lambda, |\lambda| < \beta \quad \text{tal que } x = a^* + \alpha u + \lambda d$$

Sea  $a \in A$ ; por (\*\*), se tiene que

$$\exists \nu, \tau, \tau \leq 0 \quad \text{tal que } a = a^* + \nu u + \tau d$$

Por tanto,

$$d^2(a, x) - d^2(a, y) = (\tau - \lambda)^2 - (\tau - \beta)^2$$

Como  $\tau \leq 0$ ,  $\beta > 0$  y  $|\lambda| < \beta$ , se sigue que

$$d^2(a, x) - d^2(a, y) = (\tau - \lambda)^2 - (\tau - \beta)^2 < 0$$

Como  $a$  era un elemento arbitrario en  $A$ , se sigue que

$$d(x, a) < d(y, a) \quad \forall a \in A$$

como queríamos demostrar ■

Recapitulamos los resultados obtenidos en esta sección dando un algoritmo de determinación de  $WE^-(A, S)$ , finito cuando se tiene una dcc  $\{S_j; j \in J\}$  finita poliédrica de  $S$ :

### Algoritmo 5.2.

Entrada:  $A, \{S_j: j \in J\}$  (una dcc de  $S$ )

Salida:  $WE^-(A, S)$

Si  $|A|=1, A=\{a\}$ , hacer:

{

Hallar  $v$ ,

$$V = \{v^* \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j) : d(a, v^*) = \max_{v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)} d(a, v)\}$$

Hacer  $WE^-(A, S) \leftarrow V$ . Parar

}

En caso contrario, hacer:

{

Determinar  $\text{ext}(A)$

Hacer  $T \leftarrow S$

Para cada lado no degenerado  $\ell$  de  $H(A)$ , y cada vector  $d \in \text{Dir}(\ell)$ , hacer  $T \leftarrow T \setminus K(\ell, d)$

Para cada  $v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)$ , hacer

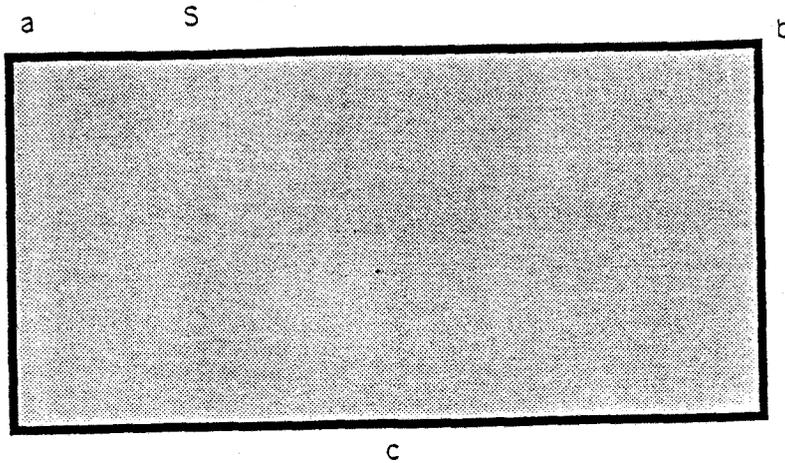
$$T \leftarrow T \cap \bigcup_{a \in \text{ext}(A)} \{z \in \mathbb{R}^2 : d(z, a) \geq d(v, a)\}$$

Hacer  $WE^-(A, S) \leftarrow T$ . Parar.

}

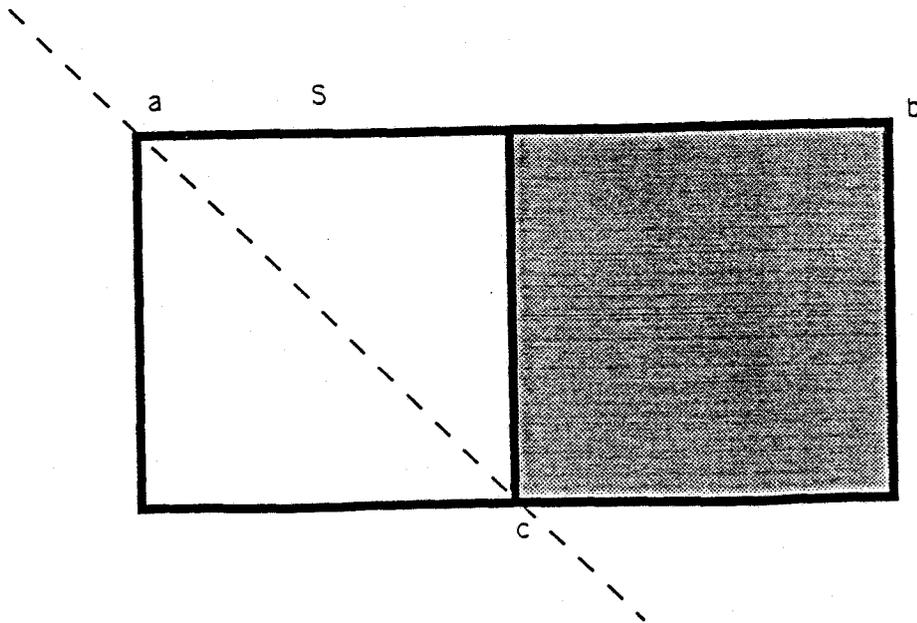
### Ejemplo 5.1.

Considérese el ejemplo de la primera figura de la página siguiente:  $S = \{(x, y) : |x| \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$  y  $A = \{a, b, c\}$ , con  $a = (-3, 3)$ ,  $b = (3, 3)$ ,  $c = (0, 0)$ .



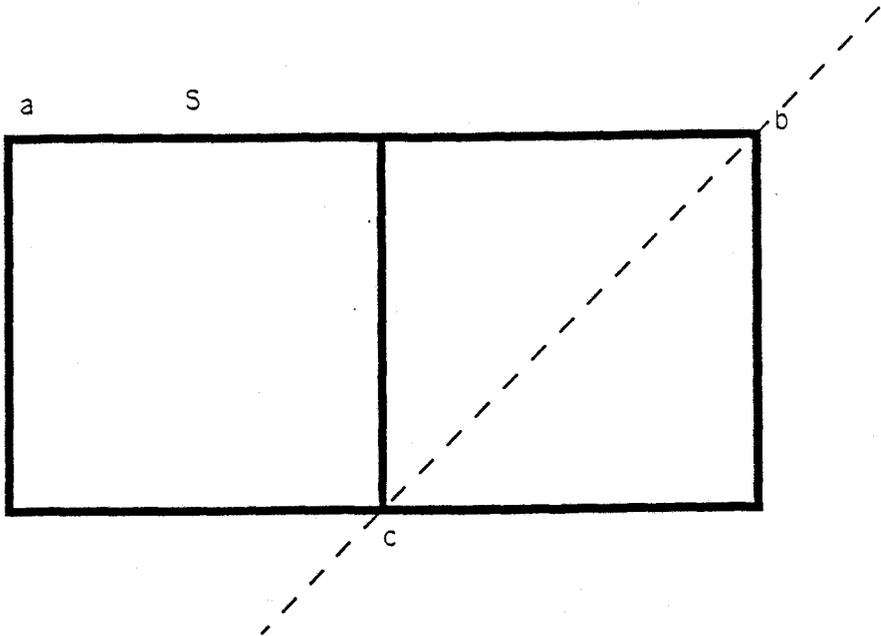
En el algoritmo 5.2. partimos haciendo  $T \leftarrow S$ . Sea  $\ell_1 = H(\{a, b\})$ , y  $d_1$  el vector de  $\text{Dir}(\ell_1)$ . Evidentemente,  $K(\ell_1, d_1) = \emptyset$ . Sea  $\ell_2 = H(\{a, c\})$ , y  $d_2$  el vector de  $\text{Dir}(\ell_2)$ .

Al hacer  $T \leftarrow T \setminus K(\ell_2, d_2)$ , se obtiene el conjunto siguiente:

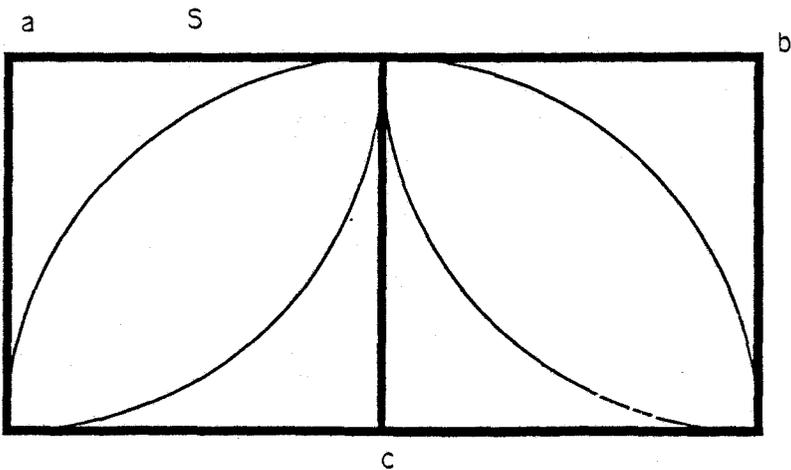


Sea  $\ell_3 = H(\{b, c\})$ , y  $d_3$  el vector de  $\text{Dir}(\ell_3)$ .

Al hacer  $T \leftarrow T \setminus K(\ell_3, d_3)$ , se obtiene:



Los conjuntos de la forma  $\bigcup_{a \in \text{ext}(A)} \{z \in \mathbb{R}^2 : d_a(z) \geq d_a(v)\}$  no eliminan nuevos puntos de  $T$ , como muestra la figura siguiente:



Tras estas operaciones, el algoritmo se detiene dando el conjunto de puntos débilmente eficientes:

$$WE^-(A, S) = bd(S) \cup \{(0, t) : 0 \leq t \leq 3\}$$

### Observación 5.3.

Cuando  $S$  admite una dcc poliédrica finita, la caracterización anterior permite calcular un centroide para el problema

$$\max_{x \in S} (d(a, x) : a \in A)$$

En efecto: siguiendo un razonamiento análogo al descrito en el capítulo precedente, es fácil identificar un conjunto *finito dominante*, i.e.: un conjunto finito que contiene al menos un centroide, obtenido tomando intersecciones de segmentos y circunferencias.

La evaluación de la función objetivo en cada uno de estos puntos puede hacerse fácilmente utilizando el teorema de caracterización anterior, y siguiendo la metodología del algoritmo 4.1. para seleccionar tan sólo subconjuntos  $A'$  *maximales*.

Si bien la determinación de centroides para problemas de localización de centros repulsivos no está justificada en el contexto de localización competitiva, sí lo está en el contexto de localización por votación, como ha sugerido Labbé (1990) en su trabajo sobre grafos.

### 5.3. CARACTERIZACION GEOMETRICA DE $E^-(A,S)$

En esta sección damos una caracterización geométrica de  $E^-(A,S)$  bajo las mismas hipótesis de la sección precedente.

Por definición,  $E^-(A,S) \subset WE^-(A,S)$ . Si bien para el problema multiobjetivo con centro atractivo vimos que  $WE(A,S) = E(A,S)$ , éste no es el caso para el problema que estamos considerando, como muestra el siguiente contraejemplo:

#### Ejemplo 5.2

Sean  $S = \{(t,0) : 0 \leq t \leq 2\}$ ,  $A = \{a,b\}$ , con  $a = (0,0)$  y  $b = (1,0)$ .

El punto  $a$  es solución óptima del problema  $\max_{x \in S} d(x,b)$ ,

por lo que  $a \in WE^-(A,S)$ . En cambio,  $d(a,a) = 0 < d(a,(2,0))$ , y  $d(b,a) = 1/2 = d(b,(2,0))$ . Luego  $a \notin E^-(A,S)$  ■

La construcción geométrica propuesta en la sección anterior para determinar  $WE^-(A,S)$  puede ser usada también para determinar el conjunto  $E^-(A,S)$ .

En primer lugar, vemos que  $E^-(A,S)$  sólo depende de  $A$  a través de  $\text{ext}(A)$ :

**Teorema 5.6.**

$$E^-(A,S) = E^-(\text{ext}(A),S)$$

**Demostración.**

Análoga a la del teorema 2.1 ■

Siguiendo la notación del teorema 5.5., se tiene:

**Teorema 5.7.**

Sea  $\{S_j : j \in J\}$  una dcc de  $S$ , y sea  $x \in S$ .

$x \in E^-(A, S)$  sii se da alguna de las tres condiciones siguientes:

i)  $x \notin WE^-(A, S)$ .

ii)  $\exists v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)$  tal que

$$d(a, v) \geq d(a, x) \quad \forall a \in \text{ext}(A)$$

$$d(a, v) > d(a, x) \quad \text{para algún } a \in \text{ext}(A)$$

iii)  $A$  no es colineal, y  $\exists \ell$ , faceta de  $H(A)$ ,  $\exists d \in \text{Dir}(\ell)$  tales que  $x \in K^*(\ell, d)$ , donde  $K^*(\ell, d)$  es el conjunto

$$K^*(\ell, d) = \{z \in S : z = \sigma_\ell(y) \text{ para algún } y \in \bigcup_{j \in J} \text{bd}(S_j) \cap i(h(\ell, d))\}$$

**Demostración.**

Probemos el resultado por doble implicación. Sea  $x \in E^-(A, S) = E^-(\text{ext}(A), S)$ , y supongamos que no se verifican las condiciones i) ni ii), i.e.: suponemos que  $x \in WE^-(A, S)$ , y  $x$  no está dominado por ningún punto de  $\bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)$ . Por definición de  $E^-(\text{ext}(A), S)$ , existen  $j \in J$ ,  $y \in S_j$  tal que  $d(a, y) \geq d(a, x)$   $\forall a \in \text{ext}(A)$ ,  $d(a, y) > d(a, x)$  para algún  $a \in \text{ext}(A)$ .

Definiendo, para cada  $a \in \text{ext}(A)$ , la función  $\psi_a : z \rightarrow d^2(a, z) - d^2(a, x)$ , se sigue que

$$\min_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(y) \geq 0, \quad \max_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(y) > 0 \quad (*)$$

Sea  $b \in \text{ext}(A)$  tal que  $\psi_b(y) = \min_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(y)$ . Se tiene que

$$y \in (x + N_{H(A)}(b)) \cap S_j$$

Por ser  $x \in WE^-(\text{ext}(A), S)$ , y por el hecho de que

$$\psi_b(z) = \min_{a \in \text{ext}(A)} \psi_a(z) \quad \forall z \in x + N_{H(A)}(b)$$

se sigue que

$$0 \geq \max \{ \psi_b(z) : z \in (x + N_{H(A)}(b)) \cap S_j \} \geq \psi_b(y) \geq 0$$

i.e.:

$$\max \{ \psi_b(z) : z \in (x + N_{H(A)}(b)) \cap S_j \} = \psi_b(y) = 0 \quad (**)$$

Ahora bien: la función  $\psi_b$  es estrictamente convexa, luego alcanza su máximo sólo en puntos extremos del compacto convexo  $(x + N_{H(A)}(b)) \cap S_j$ . Por tanto,  $y \in V_j(x, b) \setminus \{x\} \subset \text{bd}(S_j)$ .

Por hipótesis,  $y \notin \text{ext}(S_j)$ , (en otro caso, se verificaría ii)) luego  $\exists d$ , vector unitario extremo de  $N_{H(A)}(b)$ ,  $\exists t > 0$  tales que  $y = x + td$  (\*\*).

Sea  $\ell$  el lado no degenerado de  $H(A)$  que tiene a  $b$  como uno de sus puntos extremos y a  $d$  como vector normal.

Por (\*\*),  $\psi_b(y) = 0$ , i.e.:  $d(b, y) = d(b, x)$ . Por tanto, (usando (\*\*)), se tiene que

$$y = \sigma_\ell(x) \quad (****)$$

Por consiguiente,  $(y - x = td, t > 0)$   $y \in i(h(\ell, d))$ , luego  $x \in K^*(\ell, d)$ .

Veamos por último que  $A$  no es colineal. En efecto: si  $A$  fuese colineal, sería  $H(A) = \ell$ ; por (\*\*\*\*), sería

$$d(a, y) = d(a, x) \quad \forall a \in \ell = H(A)$$

contradiciendo (\*). Se tiene pues que  $A$  no es colineal, luego hemos probado que se verifica la condición iii).

La demostración del recíproco es análoga a la realizada en el teorema 5.5, por lo que no será repetida aquí ■

Sencillos contraejemplos muestran que  $E^-(A,S)$  no es, en general, un conjunto cerrado, lo que resulta conflictivo si se desea integrar este conjunto en una metodología multicriterio de decisión.

Parece razonable aproximar en la práctica  $E^-(A,S)$  por  $WE^-(A,S)$ , que tiene mejores propiedades topológicas y es más fácil de obtener. El siguiente y último teorema muestra que esta aproximación es ajustada, en términos de medida de Lebesgue:

**Teorema 5.8.**

Supongamos que  $S$  admite una dcc  $\{S_j: j \in J\}$  poliédrica finita. Entonces  $WE^-(A,S) \setminus E^-(A,S)$  es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

**Demostración.**

Probemos que  $WE^-(A,S) \setminus E^-(A,S)$  está contenido en un conjunto  $K$  de medida de Lebesgue  $m(K)$  nula. Dado  $x \in WE^-(A,S) \setminus E^-(A,S)$ , en  $x$  tienen que darse los casos ii) o iii) del teorema 5.7.

Para el caso ii), como  $x \in WE^-(A,S)$ , necesariamente han de existir  $j \in J$ ,  $v \in \text{ext}(S_j)$  tales que

$$d(a,x) = d(a,v) \quad \text{para algún } a \in \text{ext}(A)$$

i.e.:  $x \in K_1$ , con

$$K_1 = \{z \in S: \exists a \in \text{ext}(A), v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j): d(a,x) = d(a,v)\}$$

Por el contrario, si se da iii), entonces  $x \in K_2$ , con

$$K_2 = \{z \in S: z = \sigma_\ell(y) \text{ para algún } \ell, j \in J, y \in \text{bd}(S_j)\}$$

Por tanto,  $WE^-(A,S) \setminus E^-(A,S) \subset K_1 \cup K_2$ . Como tanto  $K_1$  como  $K_2$  tienen medida nula, se tiene lo pedido ■

Los resultados anteriores garantizan la validez del algoritmo siguiente de determinación de  $E^-(A,S)$ . Definimos:

• Dado  $v \in \mathbb{R}^2$ , sea  $D(v)$  el conjunto

$$D(v) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d_a(z) \leq d_a(v) \ \forall a \in \text{ext}(A), \exists a \in \text{ext}(A) / d_a(z) < d_a(v)\}$$

• Para cada lado  $\ell = H(\{a,b\})$  no degenerado de  $H(A)$ , y cada  $d \in \text{Dir}(\ell)$ , sea  $L(\ell,d) = K(\ell,d) \cup K^*(\ell,d)$ .

### Algoritmo 5.3.

Entrada:  $A, \{S_j : j \in J\}$  (una dcc de  $S$ )

Salida:  $E^-(A,S)$ .

Si  $|A|=1, A=\{a\}$ , hacer:

{

Hallar  $V$ ,

$$V = \{v^* \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j) : d_a(v^*) = \max_{v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)} d_a(v)\}$$

Hacer  $E^-(A,S) \leftarrow V$ . Parar.

}

Hacer  $T \leftarrow S$ .

Si  $A$  no es colineal, hacer:

{

Para cada lado no degenerado  $\ell$  de  $H(A)$ , y cada vector  $d \in \text{Dir}(\ell)$ , hacer  $T \leftarrow T \setminus L(\ell,d)$ .

}

Si  $A$  es colineal, hacer  $T \leftarrow T \setminus \bigcup_{d \in \text{Dir}(H(A))} K(H(A),d)$

Para cada  $v \in \bigcup_{j \in J} \text{ext}(S_j)$ , hacer  $T \leftarrow T \setminus D(v)$ .

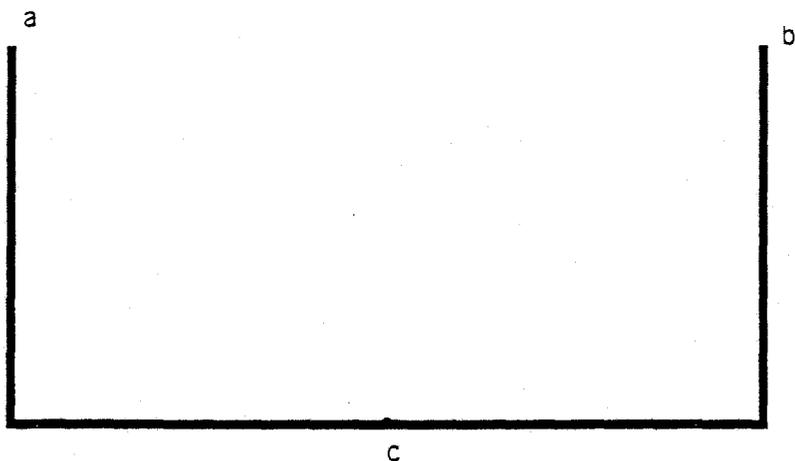
Hacer  $E^-(A,S) \leftarrow T$ . Parar.

**Ejemplo 5.3.**

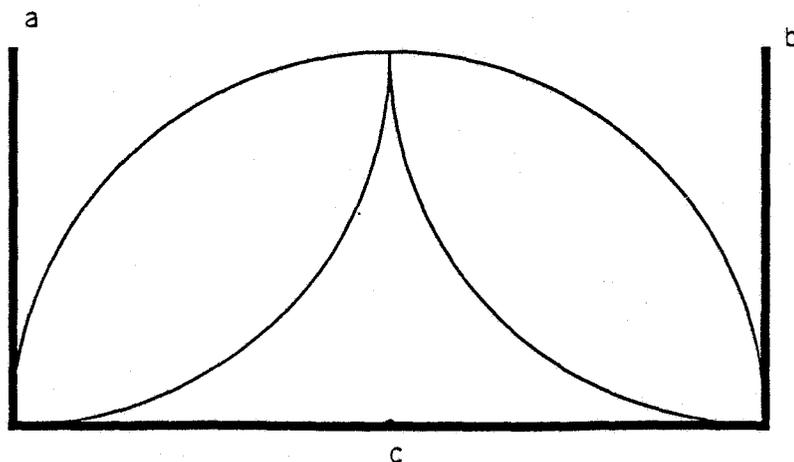
Consideremos como aplicación los conjuntos del ejemplo 5.1. Siguiendo la notación de dicho ejemplo, denotemos por  $\ell_1 = H(\{a,b\})$ ,  $\ell_2 = H(\{a,c\})$ ,  $\ell_3 = H(\{b,c\})$ , y, para cada  $i$ , sea  $d_i$  el vector de  $\text{Dir}(\ell_i)$ .

Partimos de  $T=S$ . Como  $A$  no es colineal, hay que eliminar de  $T$  los conjuntos  $L(\ell_1, d_1)$ ,  $L(\ell_2, d_2)$  y  $L(\ell_3, d_3)$ .

El conjunto resultante aparece en la figura siguiente:



Los conjuntos  $D(v)$  no cortan a  $T$ , como se aprecia en la figura siguiente:



Por tanto,  $E^-(A,S) = \{(x,y) \in S : x=-3 \text{ ó } x=3 \text{ ó } y=0\}$

## BIBLIOGRAFIA

- BENTLEY, J.L., KUNG, H.T., SCHOLNICK, M. y THOMPSON, C.D.,  
"On the average number of maxima in a set of vectors",  
*J. ACM* 25 (1978) 536-543.
- BRANDEAU, M. y CHIU, S.L. "An overview of representative  
problems in Location research", *Management Science* 35  
(1989) 645-674.
- BRIMBERG, J. y LOVE, R.F. "Estimating travel distances by the  
weighted  $l_p$  norm", *Naval Res. Logistics* 38 (1991)  
241-259.
- BRØNDSTED, A. *An introduction to Convex Polytopes*. Springer-  
Verlag, New York, 1983
- CHALMET, L.G., FRANCIS, R.L. y KOLEN, A. "Finding efficient  
solutions for rectilinear distance location problems  
efficiently", *EJOR* 6 (1981) 117-124.
- CHANKONG, V. y HAIMES, Y.Y. *Multiobjective Decision Making:  
Theory and Methodology*. North-Holland, 1983.
- CHATTERJI, M. *Hazardous material disposal: Sitting and  
Management*. Gower Publishing, Co. 1987.
- DEMANGE, G. "Spatial Models of Collective Choice", en  
*Locational Analysis of Public Facilities* (editan J.F.  
Thisse y H.G. Zoller). *Stud. Math. Managerial Econom.* 31  
(1983) 153-182.

- DREZNER, Z. "Competitive location strategies for two facilities", *Regional Science and Urban Economics* 12 (1982) 485-493.
- DURIER, R. "Continuous location theory under the majority rule", *Mathematics of Operations Research* 14 (1989) 258-274.
- DURIER, R. "On Pareto optima, the Fermat-Weber problem and polyhedral gauges", *Mathematical Programming* 47 (1990) 65-79.
- DURIER, R. y MICHELOT, C. "Geometrical properties of the Fermat-Weber problem", *EJOR* 20 (1985) 332-343.
- DURIER, R. y MICHELOT, C. "Sets of efficient points in a normed space". *Journal of Math. Analysis and Applications* 117 (1986) 506-528.
- EDELSBRUNNER, H. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1987.
- ERKUT, E. y NEUMAN, S. "Analytical models for locating undesirable facilities", *EJOR* 40 (1989) 275-291.
- GEOFFRION, A.M. "Proper efficiency and the theory of vector maximization", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22 (1968) 618 - 630
- GOLDMAN, A.P. "A theorem on Convex Programming", MAA meeting, Indianapolis, 1963.
- GOLDMAN, A.J. y DEARING, P.M. "Concepts of optimal locations for partially noxious facilities", *Bull. of the Operational Research Society of America* 23/1, B85, 1985

- HAKIMI, S.L. "On locating new facilities in a competitive environment", *EJOR* 12 (1983) 29-35.
- HAKIMI, S.L. "Competitive location and games", en *Discrete Location Theory*, (Mirchandani y Francis, eds.), Wiley, 1990.
- HANSEN, P. y LABBÉ, M. "Algorithms for voting and competitive location on a network" *Transportation Science* 22 (1988) 278-288.
- HANSEN, P., PEETERS, D. y THISSE, J.F. "An algorithm for a constrained Weber problem", *Management Science* 28 (1982) 1285-1295.
- HANSEN, P., PERREUR, J. y THISSE, J.F. "Location Theory, dominance and convexity: Some further results", *Operations Research* 28 (1980) 1241-1250.
- HIRIART-URRUTY, J.B. "Images of connected sets by semicontinuous functions", *J. of Mathematical Analysis and Applications* 111 (1985) 407-422.
- JUEL, H. y LOVE, R.F. "Hull properties in location problems", *EJOR* 12 (1983) 262-265.
- KRAMER, G.H. "A dynamical model of political equilibrium", *Journal Econom. Theory* 16 (1977) 310-314.
- KUHN, H.W. "On a pair of dual nonlinear programs", en: J. Abadie (ed.), *Nonlinear programming*, Wiley, New York, 1967
- LABBÉ, M. "Location of an obnoxious facility on a network: a voting approach", *Networks* 20 (1990) 197-207.

- LOWE, T.J., THISSE, J.F., WARD, J.E. y WENDELL, R.E., "On efficient solutions to multiple objective mathematical programs", *Management Science* 30 (1984) 1346-1349.
- MANGASARIAN, O.L. *Nonlinear Programming*, McGraw - Hill, New York, 1969
- O'ROURKE, J., CHIEN, C.B., OLSON, T. y NADDOR, D. "A new linear time algorithm for intersecting convex polygons", *Comput. Graph. Image Porcess.* 19 (1982) 384-391.
- PELEGRIN, B. y FERNANDEZ, F.R. "Determination of Efficient points in multiple-objective location problems", *Naval Research Logistic* 35 (1988) 697-705.
- PLASTRIA, F. *Continuous location problems and cutting plane algorithms*. Tesis doctoral. Vrije Universiteit Brussel, 1983.
- PLASTRIA, F. "Localization in single facility location", *EJOR* 18 (1984) 215-219.
- PLASTRIA, F. y CARRIZOSA, E. "A geometrical characterization of weakly efficient points", Working Paper, Vrije Universiteit Brussel, 1992.
- PREPARATA, F.P. y SHAMOS, M.I. *Computational Geometry - an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- RAYNAUD, H. "Sur l'enveloppe convexe des nuages des points aléatoires dans  $\mathbb{R}^n$ ", *J. Appl. Prob.* 7 (1970) 35-48.
- ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*. Princeton Press, 1970.
- SCHOFIELD, N.J. *Social choice and democracy*. Springer-Verlag, 1985.

- SIMPSON, P. "On defining areas of voter choice: Professor Tullock on Stable Voting", *Quarterly J. Econom.* 83 (1969) 478-490.
- STEUER, R.E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, computation and applications.* Wiley, 1986.
- THISSE, J.F., WARD, J.E. y WENDELL, R.E. "Some properties of Location problems with block and round norms", *Operations Research* 32 (1984) 1309 - 1327.
- WENDELL, R.E. y HURTER, A.P. "Location theory, dominance and convexity", *Operations Research* 21 (1973) 314-320.
- WENDELL, R.E., HURTER, A.P. y LOWE, T.J. "Efficient points in Location problems", *AIEE Trans.* 9 (1977) 238-246.
- WHITE, D.J. *Optimality and Efficiency.* Wiley, 1982.
- WITZGALL, C. "Optimal location of a central facility, mathematical models and concepts", National Bureau of Standards Report 8388, 1964

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los señores presentes  
en el día de la fecha, para otorgar la tesis Doctoral de  
D. Amelio Carrizosa Insausti  
sobre el problema de localización (muchos se lo)

concedo agradece la ex. lencia de  
ACTO Cum Laude

Sevilla, 27 de octubre de 1972

El Vocal,



El Presidente

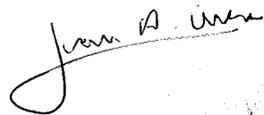
El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Doctorado,

