



Teoría de representaciones,
invariantes cohomológicos
y tipos de homotopía propia

Fernando Muro Jiménez

Teoría de representaciones,
invariantes cohomológicos
y tipos de homotopía propia

Fernando Muro Jiménez

*Departamento de Geometría y Topología
de la Universidad de Sevilla*

Sevilla, marzo de 2004.

CERTIFICO que la presente Memoria ha sido realizada bajo mi dirección por Fernando Muro Jiménez, y constituye su Tesis Doctoral.

Sevilla, marzo de 2004.

Fdo.: Fernando Muro Jiménez.

Fdo.: Dr. D. Antonio Quintero Toscano.

*Árbol de viento gris sobre la mar perfecta
A,B,C y D clavadas de coral y de yeso.
La locura que topa del mercurio expectante
compensa ramas bebidas dentro del tubo cándido,
quieta nube en un tubo de cristal hacia el cielo.*

*La nube proyectaba sombra de cocodrilo.
A prima se alargaba doble en el agua quieta.
Un corazón de niño que un bisturí punzaba
bajo las lisas rocas donde el mar se hace daño.*

*El ángulo de peces que llega al horizonte
es igual en distancia, profundidad y sueño
al ángulo invisible que un alfiler trazara
sobre el mar quieto y grande de un ojo de caballo.*

*La lima sumergida dentro de un cubilete
recordaba un mundo de paisajes tendidos.
Hombrecillos al lado de una mosca gigante
tocaban largas flautas de madera de sándalo.*

A, B, C y D señalan un límite a la lira.

*Encima las estrellas crujen látigos quietos.
En el fondo del mar los moluscos sin casa
orientan sus terrores a la copa del árbol.*

*El mar queda tirante bajo el teorema puro.
Se apoya como un cojo dolorido en las playas.
Y el desnudo de un negro con el cuello cortado
flota en la bella curva de un perfil de gritos.*

Teorema en el paisaje, Federico García Lorca.

Agradecimientos

Deseo comenzar estos agradecimientos por Rafael Ayala. Nuestro primer contacto fue en mi cuarto curso de carrera siendo él profesor de Topología II y gracias a su motivación comencé a tomar interés por la investigación. En una de mis visitas a Rafael, su compañero de despacho Antonio Quintero me preguntó si me gustaba el álgebra y me propuso un problema que yo, un poco ingenuamente, creí haber resuelto a la semana siguiente. La resolución de dicho problema nos llevó aproximadamente un año de trabajo y dio lugar no sólo a mi primer artículo de investigación sino al comienzo de una estrecha y gratificante relación director-estudiante entre Antonio y yo.

Son muchas las razones por las que estoy infinitamente agradecido a Antonio pero, parafraseando a un famoso matemático, omito la lista completa ya que “no cabe en el estrecho margen de este libro”. Comenzó aceptando dirigirme un proyecto de tesis dentro de la beca FPU del MECED (AP2000-3330) de la que disfruto e incorporándome a su proyecto de investigación del MCyT (BFM2001-3195-C02-01) gracias a los cuales he podido realizar esta memoria. Asimismo durante estos años Antonio me ha proporcionado la formación científica necesaria para mi trabajo, tanto de forma directa como poniéndome en contacto con otros investigadores y permitiéndome asistir a diversos congresos y cursos avanzados.

Agradezco a Carles Casacuberta su gran interés y su hospitalidad en mis largas estancias en las universidades autónoma y central de Barcelona, donde disfruté de un entorno idóneo para la investigación y tuve la oportunidad de participar en estupendos seminarios y de entablar relación con colegas de los que siempre he recibido apoyo. De entre ellos debo destacar a Ramón Flores, también iniciado en la investigación por Antonio. Fue en una conversación con Ramón donde surgió uno de los ejemplos más estimulantes de esta memoria que me sirvió de motivación para seguir adelante en esa línea.

También deseo agradecer a Hans-Joachim Baues su hospitalidad en el Max-Planck-Institut für Mathematik así como el haberme mostrado su am-

plia perspectiva de la teoría de homotopía, que ha sido fuente inagotable de inspiración en el desarrollo de esta memoria.

Para la realización de este trabajo ha sido sin duda alguna fundamental contar con el apoyo incondicional y el afecto de mis amigos, que tampoco me caben en el “estrecho margen de este libro”; y por supuesto de mi familia, es decir, de mis padres, mi hermana Teresa, mi abuela Soli, mi tía Soli, Valle, mi novia Carmen y nuestro gato Che. El tremendo cariño que me tienen se refleja en los ánimos que siempre me han dado para realizar un proyecto cuyos fines son muy difíciles de comprender para un profano. Por ello, en forma de agradecimiento, quiero dedicar muy especialmente esta memoria a Carmen, a mi familia y a mis amigos.

Índice general

Introducción	17
Teoremas de clasificación de J. H. C. Whitehead	33
A Preliminares	39
1 Fundamentos de teoría de homotopía propia	41
1.1 La estructura de I -categoría	42
1.2 Teoría de homotopía abstracta	47
1.3 Finales de Freudenthal	55
1.4 CW -complejos	57
2 Álgebra controlada en el infinito	61
2.1 Ringoides y módulos	62
2.2 Módulos libres controlados en el infinito	66
2.3 Teorías y modelos	76
2.4 Grupos no abelianos controlados en el infinito	80
3 Invariantes algebraicos en homotopía propia	83
3.1 Módulos de homotopía propia	84
3.2 Complejos de cadenas en categorías aditivas	87
3.3 (Co)homología propia	91
3.4 Teoremas clásicos en homotopía propia	94
4 Teoría de obstrucción	99
4.1 Sistemas de homotopía	99
4.2 Sucesiones exactas para un funtor	103
4.3 Cohomología de categorías	108

B	Nuevos resultados	113
5	Funtores cuadráticos en álgebra controlada	115
5.1	Funtores cuadráticos clásicos	115
5.2	Extensiones al álgebra controlada	120
5.3	Abelianización controlada	131
5.4	El primer módulo de Whitehead no trivial	133
6	Invariantes de James-Hopf y cohomológicos en homotopía propia	141
6.1	Invariantes de James-Hopf	142
6.2	Invariantes cup-producto	149
6.3	Cup-producto y obstrucción	152
6.4	Cup-producto y cohomología de categorías	154
6.5	Cup-producto y co-H-multiplicaciones	157
6.6	Cup-producto y sucesión exacta de Whitehead	160
7	Teoría de representaciones y álgebra controlada	165
7.1	Homomorfismos controlados por árboles con un número finito de finales	168
7.2	R -módulos numerablemente presentados vistos como $\text{RCFM}(R)$ -módulos finitamente presentados	168
7.3	Breve repaso de pro-categorías	170
7.4	Invariantes numéricos de $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados	171
7.5	Clasificación de $\text{RCFM}(k)$ -módulos finitamente presentados .	174
7.6	Representaciones de la aljaba de los n -subespacios	187
7.7	$k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados y n -subespacios de dimensión finita	190
7.8	Clasificación de los $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados . .	197
7.9	Algunos cálculos de grupos $\text{Ext}_{R(\mathfrak{F}(T))}^*$	198
7.10	Funtores cuadráticos y $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados	204
8	Cup-producto de complejos de cadenas y suspensión de complejos cruzados	215
8.1	Notación y breve repaso de teoría de grupos	218
8.2	Un funtor “suspensión” de módulos cruzados a cuadráticos .	220
8.3	Suspensiones de complejos cruzados y cuadráticos	224
8.4	La co-H-estructura de un complejo cuadrático suspendido . .	230
8.5	El homomorfismo natural $H_2X \rightarrow \wedge^2 H_1X$	238
8.6	Cálculo del cup-producto de complejos de cadenas	245

9 Invariantes de Steenrod y clasificación de tipos de homotopía propia	261
9.1 Invariantes de Pontrjagin-Steenrod, cup-producto y cohomología de categorías	262
9.2 Invariantes de Steenrod para espacios con 1 o 2 finales	266
9.3 Invariantes de Steenrod para espacios con 3 finales	268
9.4 Invariantes de Steenrod y sucesión exacta de Whitehead	275
9.5 Modelos algebraicos de tipos de homotopía propia estable	278
9.6 Espacios de Moore en homotopía propia estable	281
Índice alfabético	285
Índice de símbolos	289
Bibliografía	293

Introducción

Tradicionalmente la teoría de homotopía propia se presenta como la más adecuada para el estudio de los espacios no compactos, ya que el tipo de homotopía propia de un espacio no compacto es un invariante mucho más fuerte que el ordinario, y para espacios compactos ambos coinciden. Por ejemplo en [Bro78] se exhibe una importante clase de variedades abiertas (no compactas y sin borde) tal que cada una de ellas está determinada topológicamente por su tipo de homotopía propia, mientras que desde el punto de vista ordinario todas son iguales ya que son contráctiles.

Desde una perspectiva más moderna conviene pensar en la homotopía propia como en una teoría de homotopía que satisface las dos siguientes propiedades:

- El “anillo base” es un anillo (no conmutativo) de matrices infinitas

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0j} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{i0} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j \geq 0;$$

que satisfacen ciertas condiciones de finitud local, como por ejemplo que en cada fila y en cada columna haya a lo sumo un número finito de entradas no nulas.

- Están definidas casi todas las construcciones de una categoría de modelos de Quillen que están del lado de las cofibraciones (cilindros, push-out homotópicos, cofibras homotópicas...), mientras que, en general, las fibras homotópicas no existen.

Aquí con “anillo base” queremos decir aquel sobre el cual son módulos los análogos de los grupos de homotopía y homología que satisfacen versiones de teoremas clásicos como el de Whitehead.

La primera propiedad llamará, seguramente, la atención de un topólogo algebraico. Este tipo de anillos no son del todo nuevos en teoría de homotopía

ya que fueron usados por J. B. Wagoner ([Wag72]) para construir el espectro de la teoría K algebraica de un anillo, sin embargo no habían aparecido antes como “anillos base” de una teoría de homotopía y parece un problema intrigante plantearse cómo funcionará una teoría cuya álgebra subyacente es de esta naturaleza.

Por contra la segunda propiedad resultará, probablemente, poco atractiva al mismo topólogo si no conoce los axiomas de categorías de cofibraciones de H.-J. Baues, especialmente diseñados para estos casos. Concretamente en [Bau89] y [Bau99] Baues demuestra que evitando el uso de las fibraciones es todavía posible desarrollar una teoría de homotopía análoga a la ordinaria, e incluso generalizar construcciones y conceptos que habitualmente involucraban a las fibraciones, tales como por ejemplo la (co)homología con coeficientes locales. De hecho el primer ejemplo topológico relevante de categoría de cofibraciones que no admite una estructura de modelos de Quillen fue la homotopía propia ([ADQ90]) y su desarrollo por parte de Baues y A. Quintero ([BQ01]) motivó al primer autor para avanzar en el estudio abstracto de la teoría de obstrucción en categorías de cofibraciones que poseen objetos homotópicamente análogos a los racimos de esferas ([Bau99]).

Quedó atrás la época en la que los esfuerzos de los topólogos interesados en la homotopía propia se centraban en asentar sus bases adecuadamente. En este sentido podemos decir que hoy en día hay dos corrientes principales, la extrínseca de D. A. Edwards y H. M. Hastings que sumerge a la homotopía propia dentro de la teoría de homotopía de los pro-espacios ([EH76]), y la intrínseca de Baues y Quintero ([BQ01]) que será la que seguiremos en esta memoria. Como se indica en [BQ01] ambas aproximaciones están relacionadas a través de funtores apropiados que son considerados con detalle por L.-J. Hernández en [Her95]. Para una introducción a la teoría de homotopía propia con mayor perspectiva histórica puede consultarse el artículo de T. Porter [Por95].

El problema principal que abordamos en esta memoria consiste en avanzar en el programa presentado por J. H. C. Whitehead en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en 1950 para un estudio combinatorio de la topología. Dicho programa en el contexto de la teoría de homotopía propia consiste en lo siguiente:

- Clasificar los tipos de homotopía propia de los espacios por medio de datos algebraicos adecuados.
- Computar el conjunto de clases de homotopía propia de aplicaciones propias entre dos espacios por medio de los datos algebraicos asociados.

En particular, estudiar el grupo de autoequivalencias de homotopía propia de un espacio.

Estos problemas pueden ser planteados en cualquier categoría donde exista la noción de homotopía. El mismo Whitehead hizo los primeros avances no triviales en su programa en homotopía ordinaria ([Whi48], [Whi49b], [Whi50]). Como cuenta P. J. Hilton ([Hil61]), uno de sus principales discípulos, dichos resultados fueron muy apreciados por la comunidad matemática en aquellos años. De hecho se dice que estando Whitehead exponiéndolos en un congreso H. Whitney se levantó muy sorprendido, diciendo que era imposible que semejante tipo de resultados fuesen ciertos. Desde entonces hasta ahora muy diversos modelos algebraicos de tipos de homotopía ordinaria (estable e inestable) han aparecido en la literatura, pero sin duda ningunos tan sencillos como los de Whitehead para los espacios simplemente conexos de dimensión ≤ 4 . Esta sencillez permitió a su discípulo S. C. Chang resolver el problema de la teoría de representaciones de estos espacios ([Cha50]).

El programa de Whitehead en homotopía ordinaria ha experimentado recientemente notables avances gracias al trabajo de Baues y de sus colaboradores ([BH91], [Bau91] y [Bau96]), y al de H.-W. Henn en el caso estable p -local para p un primo impar ([Hen87] y apéndice de [BD99]). De hecho los problemas de la teoría de representaciones de varias clases de espacios han quedado completamente resueltos gracias a la colaboración de Baues e Y. Drozd ([BD99], [BD00], [BD01a] y [BD01b]).

En teoría de homotopía propia el programa de Whitehead se encuentra aún en su fase inicial. Sólo existen modelos algebraicos para racimos de esferas de una misma dimensión colocadas de manera localmente finita a lo largo de un árbol. Esta es la clase de espacios más elementales, ya que a partir de ellos pueden ser construidos todos los CW -complejos conexos localmente compactos de dimensión finita pegando estos racimos a través de aplicaciones propias.

Los resultados clásicos de Whitehead no se pueden extender directamente a la teoría de homotopía propia ya que se apoyan fuertemente en algunas buenas propiedades algebraicas del “anillo base” de la teoría de homotopía ordinaria, que es el de los enteros \mathbb{Z} , que distan mucho de ser ciertas para los anillos de matrices infinitas relevantes en homotopía propia. Concretamente en sus resultados juega un papel primordial la existencia y unicidad de espacios de Moore así como la existencia de descomposiciones de homología y de invariantes de Pontrjagin-Steenrod, y tanto para construir estos espacios, descomposiciones e invariantes como para demostrar sus propiedades elementales es imprescindible el hecho de que todo subgrupo de un grupo libre

abeliano es libre abeliano a su vez. Estos obstáculos fueron originalmente observados en [Bea93], [ADMQ95] y [ACQ95].

Por todo ello nos propusimos en su día como problema concreto y primordial de nuestro proyecto de tesis la obtención de modelos algebraicos sencillos de tipos de homotopía propia (estable) de CW -complejos localmente compactos 1-conexos de dimensión ≤ 4 . Recordemos que en teoría de homotopía propia un espacio se dice n -conexo si cualquier aplicación que parta de uno de estos CW -complejos de dimensión $\leq n$ y llegue al espacio en cuestión factoriza salvo homotopía propia a través de un árbol.

En esta memoria trabajaremos casi siempre dentro de la clase de espacios formada por los CW -complejos conexos localmente compactos de dimensión finita, así que en esta introducción usaremos la palabra “espacio” para referirnos a los de esta clase.

El invariante más elemental del tipo de homotopía propia de un espacio X es su espacio de finales de Freudenthal $\mathfrak{F}(X)$. Los espacios que aparecen como espacios de finales de otros son exactamente los (homeomorfos a) subespacios cerrados del conjunto de Cantor. De hecho la categoría de homotopía propia de los árboles es equivalente a la categoría topológica de los cerrados del conjunto de Cantor. Debido a esto, para estudiar los tipos de homotopía propia conviene separar de entrada los espacios atendiendo a sus finales, y así consideraremos por separado las categorías \mathbf{CW}^T de espacios, reducidos y normalizados en cierto sentido, y aplicaciones propias bajo un árbol T . En particular el papel que juegan los “puntos base” en teoría de homotopía ordinaria lo juegan los “árboles base” en homotopía propia, ya que es el único modo de preservar en todo momento la información homotópica que aporta el espacio de finales.

El anillo de matrices infinitas relevante para el estudio de la teoría de homotopía propia de \mathbf{CW}^T es denotado $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$. Como se desprende de esta notación el anillo $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ sólo depende del espacio de finales de T . Además es equivalente en el sentido de Morita a la categoría aditiva pequeña $\mathbf{ab}(T)$ de grupos libres abelianos controlados por el árbol T , así que usaremos indistintamente ambos objetos algebraicos según convenga.

Los módulos de homotopía y homología propia de un espacio X en \mathbf{CW}^T ,

$$\Pi_n X \text{ y } \mathcal{H}_n X,$$

residen en la categoría de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos (o equivalentemente de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos), mientras que la cohomología propia de X con coeficientes en un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo \mathcal{M} ,

$$H^n(X, \mathcal{M}),$$

vive en la categoría de grupos abelianos. La (co)homología propia de un espacio X en \mathbf{CW}^T se define a partir de su complejo de cadenas celulares \mathcal{C}_*X que es un complejo de cadenas acotado en $\mathbf{ab}(T)$. También están definidos los módulos de Whitehead \mathbb{I}_nX que encajan en una sucesión exacta larga para el morfismo de Hurewicz en homotopía propia

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}X \xrightarrow{b_{n+1}} \mathbb{I}_nX \xrightarrow{i_n} \mathbb{I}_nX \xrightarrow{h_n} \mathcal{H}_nX \rightarrow \cdots .$$

En esta memoria construimos un diagrama conmutativo de sucesiones exactas de endofuntores cuadráticos de la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos

(a)

$$\begin{array}{ccccc} & \otimes_T^2 & & & \\ & \downarrow W_T & & & \\ \Gamma_T & \xrightarrow{\tau_T} & \otimes_T^2 & \xrightarrow{q_T} & \wedge_T^2 \\ \sigma_T \downarrow & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma}_T & & \parallel \\ - \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_T^2 & \xrightarrow{\bar{q}_T} & \wedge_T^2 \end{array}$$

Con la ayuda del funtor Γ_T calculamos el tercer módulo de Whitehead de un espacio 1-conexo X a partir de su homología

$$\Gamma_T \mathcal{H}_2 X = \mathbb{I}_3 X.$$

También para $n \geq 3$ si X es $(n - 1)$ -conexo obtenemos una identificación natural

$$\mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{I}_{n+1} X.$$

Usando resultados de [Bau99] se ve fácilmente que dados dos espacios 1-conexos X e Y de dimensión ≤ 4 hay una obstrucción θ a la realización por aplicaciones propias bajo T de morfismos entre sus complejos de cadenas celulares, y todo esto salvo homotopía, es decir, hay una sucesión exacta de grupos y conjuntos punteados

(b) $[X, Y]^T \xrightarrow{\mathcal{C}_*} [\mathcal{C}_*X, \mathcal{C}_*Y] \xrightarrow{\theta} H^4(X, \mathbb{I}_T \mathcal{H}_2 Y).$

Si en cambio X e Y son $(n - 1)$ -conexos de dimensión $\leq n + 2$ para cierto $n \geq 3$ tenemos otra sucesión exacta

(c) $[X, Y]^T \xrightarrow{\mathcal{C}_*} [\mathcal{C}_*X, \mathcal{C}_*Y] \xrightarrow{\theta} H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n Y \otimes \mathbb{Z}_2).$

Estos últimos resultados fueron ya esbozados para espacios con un sólo final en [Bea93] y [ADMQ95]. Los operadores de obstrucción θ se comportan como una derivación con respecto a la composición de aplicaciones, así que

definen clases características en la cohomología de la categoría de homotopía ${}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq$ de complejos de cadenas acotados concentrados en dimensiones $\geq n$,

$$\{\theta\} \in H^1({}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^4(-, \Gamma_T H_2)), \text{ si } n = 2;$$

$$(d) \quad \{\theta\} \in H^1({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)), \text{ si } n \geq 3.$$

Se demuestra en este último caso que los grupos y clases de cohomología son independientes del valor de n usando que el funtor suspensión de complejos de cadenas da lugar a identificaciones

$$\Sigma: {}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq \xrightarrow{=} {}_{n+1}\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq.$$

Las clases características $\{\theta\}$ contienen exactamente la información necesaria para resolver el problema de clasificación que nos hemos planteado, por tanto para resolverlo bastará dar una descripción puramente algebraica de las mismas.

En teoría de homotopía ordinaria las clases $\{\theta\}$, que también están definidas, son triviales, ya que las obstrucciones (derivaciones) θ que aparecen en las sucesiones (b) y (c) están determinadas por invariantes, concretamente por los invariantes de Pontrjagin y Steenrod de un espacio. Sin embargo no hay ninguna razón obvia que indique que las clases características $\{\theta\}$ hayan de ser también triviales en el caso “propio” ya que no es posible extender la definición clásica de los invariantes de Pontrjagin y Steenrod a la teoría de homotopía propia.

Usando los funtores \otimes_T^2 y $\hat{\otimes}_T^2$ antes mencionados hemos definido una versión inestable y otra estable del invariante de James-Hopf en homotopía propia

$$\gamma_2: \Pi_3 \Sigma X \longrightarrow \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X;$$

$$\gamma_2^n: \Pi_{n+2} \Sigma^n X \longrightarrow \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n X, \text{ si } n \geq 2.$$

Ayudados de estos morfismos hemos construido invariantes tipo cup-producto en la cohomología propia de un espacio $(n-1)$ -conexo X : el cup-producto

$$\cup_X \in H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X), \text{ si } n = 2;$$

y el cup-producto reducido

$$\hat{\cup}_X \in H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X), \text{ para } n \geq 3.$$

Estos invariantes determinan los operadores de obstrucción en (b) y (c) salvo cambio de coeficientes, concretamente dada una clase de homotopía $\xi: \mathcal{C}_*X \rightarrow \mathcal{C}_*Y$

$$(\tau_T)_*\theta(\xi) = \xi_* \cup_X - \xi^* \cup_Y \in H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y), \text{ si } n = 2;$$

y

$$(\bar{\tau}_T)_*\theta(\xi) = \xi_* \hat{\cup}_X - \xi^* \hat{\cup}_Y \in H^4(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 Y), \text{ si } n \geq 3.$$

Además el cup-producto reducido es estable.

Asimismo hemos definido el invariante cup-producto de un complejo de cadenas acotado \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ concentrado en dimensiones $\geq n$, que es una clase de cohomología

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*).$$

Si $n = 2$ y \mathcal{C}_* tiene dimensión ≤ 4 probamos que esta clase representa la obstrucción a la existencia de un co-H-espacio en homotopía propia con complejo de cadenas \mathcal{C}_* . También sería posible definir estos invariantes para complejos de cadenas de grupos libres abelianos en teoría de homotopía clásica, pero serían siempre triviales debido precisamente a la existencia de invariantes de Pontrjagin y Steenrod en ese caso. En homotopía propia no hay ninguna razón inmediata que demuestre que los cup-productos de complejos de cadenas sean triviales. Además definen clases características en cohomología de categorías

$$(e) \quad \bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

que de nuevo no depende de n .

Nos encontramos pues con dos clases de cohomología $\{\theta\}$ y $\bar{\cup}$ estrechamente relacionadas con el problema principal que pretendemos resolver pero que no sabemos describir de manera puramente algebraica, y menos aún si son o no triviales. El principal motivo de ello es que no es mucho lo que conocemos sobre la categoría en la que vive la homología propia, esto es, la categoría de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos.

El principal resultado de [ACMQ03] demuestra que los $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos de homología propia de un espacio son siempre finitamente presentados, lo cual restringe significativamente la clase de objetos algebraicos a tener en cuenta. Además prueba que $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ tiene dimensión proyectiva 2. El que sea 2 y no más debería ser interpretado como una “buena propiedad” de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$, sin embargo al no ser 1 como en el caso de \mathbb{Z} surge una diferencia esencial que hace inviable la generalización de muchas construcciones clásicas

a la teoría de homotopía propia, aunque por otro lado, como iremos viendo, también da lugar a una riqueza de la homotopía propia que no posee la ordinaria.

Esta memoria amplía notablemente el conocimiento sobre las álgebras $R(\mathfrak{F}(T))$ con un extenso estudio de sus teorías de representaciones, que tiene un gran peso dentro de la misma. Demostramos para un anillo conmutativo R y un árbol no compacto T cualesquiera que la categoría de los $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados contiene a la de los R -módulos numerablemente presentados, por tanto nuestras esperanzas de obtener resultados satisfactorios sobre la clasificación de $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados se reducen al caso $R = k$ un cuerpo. Aunque en un primer momento se podría pensar que tiene escaso interés considerar las álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$ ya que los módulos de homología propia son módulos sobre $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ y \mathbb{Z} no es un cuerpo, hay que observar que el $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo de coeficientes del grupo de cohomología que aparece en (c) es de hecho un $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ -módulo, así que es razonable pensar que pueda ayudar al cálculo de la clase $\{\theta\}$ en (d) y por tanto a la clasificación de tipos de homotopía propia estable.

Nosotros hemos conseguido determinar completamente el tipo de representaciones de $k(\mathfrak{F}(T))$ para un cuerpo cualquiera k atendiendo al cardinal del espacio de finales $\mathfrak{F}(T)$ según indica el siguiente diagrama

card $\mathfrak{F}(T)$	tipo
< 4	finito
$= 4$	manso
> 4	salvaje

Y en los casos finito y manso damos teoremas de clasificación de los $k(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados.

Las álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$ son también de interés en contextos puramente algebraicos, tales como la teoría de anillos y de C^* -álgebras, por ello esperamos que los resultados de clasificación de sus módulos finitamente presentados sean de utilidad también en campos diferentes a la teoría de homotopía propia. Por poner un ejemplo estos resultados pueden usarse para dar una demostración alternativa a [O'M03] de que la k -álgebra $\text{RCFM}(k)$ de matrices finitas por filas y por columnas satisface la propiedad de intercambio. De hecho $\text{RCFM}(k)$ coincide con $k(\mathfrak{F}(T))$ cuando T tiene un sólo final, y en general es posible demostrar que si T tiene un número finito de finales el álgebra $k(\mathfrak{F}(T))$ es de intercambio.

Otro pilar fundamental de esta memoria son los resultados obtenidos sobre el álgebra homotópica de los módulos cruzados y cuadráticos, que nos permiten calcular el invariante cup-producto de un complejo de cadenas

acotado mediante un procedimiento puramente algebraico a partir de sus diferenciales haciendo uso del álgebra cuadrática controlada de los grupos de grado de nilpotencia 2. Estos resultados poseen además diversas aplicaciones en teoría de homotopía y álgebra ordinarias que no incluimos en esta memoria, véase [Mur03].

Un uso extensivo de este procedimiento de cálculo y de los teoremas de clasificación de los $k(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados nos permite realizar los siguientes cálculos cruciales en cohomología de categorías.

El cup-producto de complejos de cadenas módulo 2

$$(f) \quad \hat{p}_* \bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)),$$

se define como la imagen de la clase cup-producto de complejo de cadenas en (e) a través del cambio de coeficientes inducido por la transformación natural $\hat{p}: 1 \rightarrow - \otimes \mathbb{Z}_2$

$$\begin{array}{c} H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n)) \\ \downarrow \hat{p}_* \\ H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \end{array}$$

Si T tiene 1 o 2 finales el grupo de cohomología

$$(g) \quad H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) = 0$$

es cero, luego en estos casos el cup-producto de complejos de cadenas módulo 2 es trivial $\hat{p}_* \bar{\cup} = 0$.

Sin embargo si T tiene 3 finales el cup-producto de complejos de cadenas módulo 2 es el generador del grupo de cohomología al que pertenece

$$(h) \quad 0 \neq \hat{p}_* \bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) = \mathbb{Z}_2,$$

que es cíclico de orden 2.

Por tanto para árboles T con 3 o más finales la clase cup-producto de complejos de cadenas es no nula

$$0 \neq \bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n)),$$

y ello permite probar que, a diferencia de lo que ocurre en teoría de homotopía ordinaria, existen complejos de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ concentrados en grados n , $n+1$ y $n+2$ para los cuales no hay ningún co-H-espacio en homotopía propia cuyo complejo de cadenas celulares sea \mathcal{C}_* .

Si T tiene a lo sumo 3 finales la fila inferior de (a) tensorizada con \mathbb{Z}_2 es exacta corta y escinde de manera no natural para todo $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo finitamente presentado \mathcal{M}

$$(i) \quad \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\bar{\tau}_T} \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\bar{q}_T} \wedge_T^2 \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 .$$

Gracias a ello está definida una sucesión exacta larga de Bockstein

$$(j) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow (\bar{\tau}_T)_* \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \hat{\otimes}_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow (\bar{q}_T)_* \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow \beta \\ H^{k+1}({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

cuyo operador de Bockstein β no es necesariamente trivial ya que si bien (i) escinde, no lo hace de manera natural.

Pues bien, demostramos que la clase de cohomología en (d) asociada a la obstrucción es la imagen del cup-producto de complejos de cadenas módulo 2 en (f) a través del operador de Bockstein de esta sucesión

$$\beta \hat{p}_* \bar{\cup} = \{\theta\} .$$

En particular por (g) si T tiene 1 o 2 finales la clase $\{\theta\} = 0$ es trivial. Es más, si T tiene 3 finales hemos conseguido probar que el cup-producto de complejos de cadenas módulo 2, a pesar de ser no trivial en este caso, véase (h), está en la imagen de $(\bar{q}_T)_*$ en (j), por tanto en estas circunstancias $\{\theta\} = 0$ es también trivial.

Esto demuestra que para árboles T con a lo sumo 3 finales la obstrucción (c) está determinada por invariantes cohomológicos

$$\wp_n(X) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2)$$

que nosotros, por analogía con el caso ordinario, denominamos invariantes de Steenrod. Además si X es un espacio con a lo más 3 finales $(n-1)$ -conexo de dimensión $\leq n+2$ para cierto $n \geq 3$ el par

$$(\mathcal{C}_*X, \wp_n(X))$$

formado por su complejo de cadenas celulares y su invariante de Steenrod determina el tipo de homotopía propia de X . Más aún, para árboles T que tengan como mucho 3 finales, dado un complejo de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ concentrado en grados n , $n+1$ y $n+2$ para cierto $n \geq 3$, y un elemento $\wp \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n \mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2)$ siempre existe un espacio X con los mismos finales que T tal que

$$(\mathcal{C}_*X, \wp_n(X)) = (\mathcal{C}_*, \wp).$$

De este modo queda completamente resuelto el principal problema planteado en nuestro proyecto de tesis para tipos de homotopía propia estable con a lo más 3 finales. Además los modelos algebraicos que construimos son muy simples, en la línea de los resultados clásicos de Whitehead.

Creemos que aún sería posible extender nuestros métodos a espacios con 4 finales, sin embargo para comprobarlo habría que realizar una gran cantidad de cálculos que requerirían un enorme esfuerzo, y por ello no hemos abordado este problema en esta memoria. Para espacios con más de 4 finales chocamos con problemas de complejidad que se derivan del hecho de que las álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$ son salvajes en estos casos, así que no podemos esperar encontrar resultados satisfactorios para estas clases de espacios. También nos tropezamos con dichos problemas de complejidad cuando consideramos el problema en el rango inestable para espacios no compactos con una cantidad arbitraria de finales, ya que la categoría de los $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados contiene a la de grupos abelianos numerables.

Ahora pasamos a describir brevemente la estructura de esta memoria, para más detalles nos remitimos a la introducción de cada capítulo. La memoria está dividida en dos grandes bloques. La Parte A engloba a los cuatro primeros capítulos, eminentemente recopilatorios, en los que se introducen los conceptos básicos de uso habitual, mientras que la Parte B, formada por los cinco últimos, recoge los principales resultados originales.

En el Capítulo 1 repasamos los conceptos básicos de teoría de homotopía propia siguiendo [BQ01]. Para ello se muestra la forma en la que encaja en los axiomas de I -categoría de Baues ([Bau89]) y se hace un resumen de las propiedades homotópicas abstractas de este tipo de categorías. También se recuerda el concepto de espacio de finales de Freudenthal y se recopilan las propiedades básicas de los CW -complejos con las propiedades que antes

mencionamos, haciendo hincapié en la construcción de modelos reducidos y normalizados, en cierto sentido, que serán con los que verdaderamente trabajemos a lo largo de esta memoria.

En el Capítulo 2 se introducen las herramientas algebraicas empleadas en [BQ01] para el estudio de la teoría de homotopía propia, tales como las categorías aditivas $\mathbf{M}_R(T)$ de módulos libres sobre un anillo conmutativo R controlados por un árbol T . Para su uso es necesario conocer la generalización de la teoría de anillos y módulos dada por [Mit72], por ello resumimos algunos de sus principales resultados en la primera sección de este capítulo. También se introducen los anillos de matrices infinitas $R(\mathfrak{F}(T))$, ya mencionados en esta introducción, que son equivalentes en el sentido de Morita a $\mathbf{M}_R(T)$. En lo referente a las categorías $\mathbf{M}_R(T)$ se extienden algunos resultados probados por Baues-Quintero ([BQ01]) en el caso $R = \mathbb{Z}$ a anillos cualesquiera (Proposición 2.2.5 y Corolario 2.2.12) y se demuestra la exactitud de cierto cambio de coeficientes (Proposición 2.2.13). Asimismo se introducen estructuras algebraicas no abelianas controladas por un árbol T y el tipo de categorías que estos objetos forman, las teorías de cogrupos.

Los análogos “propios”, en el sentido de [BQ01], de los grupos de homotopía, de Whitehead y de (co)homología, así como del complejo de cadenas celulares, son recogidos en el Capítulo 3. Dichos invariantes satisfacen teoremas, análogos a otros clásicos bien conocidos (Blakers-Massey, Hurewicz, Whitehead. . .), que recordamos aquí. También se hace énfasis en ciertos aspectos sobre los complejos de cadenas en la categoría aditiva $\mathbf{ab}(T)$, como por ejemplo las propiedades de la sucesión espectral de coeficientes universales para el cálculo de sus cohomologías.

En el Capítulo 4 se introducen herramientas más avanzadas sobre la teoría de obstrucción que serán cruciales en el desarrollo de esta memoria. Dichas herramientas se estudian en [Bau89] y [Bau99] de forma abstracta y general, aunque nosotros aquí las recogemos ya particularizadas al caso que nos interesa, la teoría de homotopía propia. El concepto fundamental que se maneja es el de sistemas de homotopía, que son híbridos entre complejos de cadenas y espacios que permiten dar aproximaciones sucesivas de categorías homotópicas a través de otras más sencillas y de corte más algebraico. Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de obstrucción vista desde la óptica de Baues es el amplio uso de la cohomología de categorías como receptáculo de clases características que contienen la información necesaria para comprender algún fenómeno homotópico. Nosotros adoptamos este enfoque y dedicamos la última sección de este capítulo a dar las nociones básicas de la cohomología de categorías.

Comenzando ya con los resultados originales, en el Capítulo 5 construi-

mos diversos funtores cuadráticos en la categorías de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos que son análogos a otros bien conocidos en la categoría de grupos abelianos (functor de Whitehead, cuadrado exterior, cuadrado tensorial y cuadrado tensorial reducido). Los nuevos funtores desempeñarán un papel en teoría de homotopía propia similar al importante rol que cumplen en homotopía ordinaria sus análogos para grupos abelianos. Las primeras aplicaciones de estos nuevos funtores se obtienen ya en las dos últimas secciones de este capítulo (la extensión lineal (5.3.E); el Teorema 5.4.1; la Observación 5.4.2; y las Proposiciones 5.4.3 a 5.4.7).

Operaciones homotópicas ordinarias del calibre de los invariantes de James-Hopf no tienen un análogo directo en homotopía propia ya que esta categoría carece de las construcciones necesarias para su definición, como son el producto y el producto “smash”. Sin embargo gracias a algunas de las aplicaciones de los funtores cuadráticos construidos en el Capítulo 5 podemos definir en el Capítulo 6 ciertos morfismos naturales que extienden algunos invariantes de James-Hopf ordinarios evitando el uso de construcciones topológicas no disponibles en homotopía propia (Definiciones 6.1.1, 6.1.3, 6.1.5 y 6.1.9). Con ayuda de estos invariantes de James-Hopf construimos invariantes cohomológicos “propios” tipo cup-producto tanto para espacios como para complejos de cadenas (Definiciones 6.2.1, 6.2.4, 6.2.7 y 6.4.3). También demostramos aquí la estrecha relación existente entre estos invariantes y otros aspectos de la teoría de homotopía propia, tales como la teoría de obstrucción (Teorema 6.3.3), la existencia de co-H-estructuras (Proposiciones 6.5.2 y 6.5.3) y la sucesión exacta larga de Whitehead para el morfismo de Hurewicz (Proposiciones 6.6.1, 6.6.2, 6.6.3 y 6.6.4). Estos invariantes cohomológicos constituyen una de las principales aportaciones de esta memoria a la teoría de homotopía propia. De hecho el resto de los resultados obtenidos, a excepción de los del Capítulo 7, se basan de una forma u otra en cálculos explícitos y aplicaciones de estos invariantes.

El Capítulo 7 está dedicado a la teoría de representaciones de las álgebras $R(\mathfrak{F}(T))$. Los primeros resultados que se obtienen son adversos ya que implican que la categoría de los $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados contiene a la de los grupos abelianos numerables (Sección 7.2). Sin embargo si $R = k$ es un cuerpo cualquiera determinamos completamente el tipo de representaciones de $k(\mathfrak{F}(T))$ en función del cardinal de $\mathfrak{F}(T)$ tal como se indicó anteriormente. Es más, Si $\mathfrak{F}(T)$ es un conjunto finito con n elementos obtenemos un teorema de estructura para $k(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados módulo n -subespacios de dimensión finita (Corolario 7.8.5). Más aún, si $n \leq 4$ es bien sabido que existen teoremas de estructura para n -subespacios de dimensión finita, por tanto en estos casos tenemos genuinos

teoremas de estructura para $k(\mathfrak{F}(T))$ -módulos finitamente presentados. Las ocho primeras secciones de este extenso capítulo van encaminadas a la obtención del Corolario 7.8.5 y combinan los lemas más técnicos de esta memoria junto con diversos resultados de interés sobre el álgebra homológica de los $k(\mathfrak{F}(T))$ -módulos. En las últimas dos secciones se obtienen resultados aún más avanzados sobre el álgebra homológica de los $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulos (como por ejemplo las Proposiciones 7.9.4 y 7.9.6), con especial énfasis en los casos $R = \mathbb{Z}$ y \mathbb{F}_2 (Proposición 7.9.10), y se computan diversos valores de los funtores construidos en el Capítulo 5 (cabe destacar el Teorema 7.10.5). Los resultados de este capítulo son sin duda una de las piedras angulares de esta memoria, ya que sin ellos no hubiésemos sido capaces de realizar casi ninguno de los cálculos explícitos que nos han permitido resolver el problema que inicialmente nos planteamos en teoría de homotopía propia estable. Además los resultados negativos de este capítulo demuestran que no es posible avanzar en este proyecto mucho más de lo que aquí ya hacemos, puesto que tropezamos con problemas de complejidad insalvable.

De un lado tenemos los invariantes cohomológicos del Capítulo 6, que como dijimos contienen importante información homotópica, y del otro los potentes resultados del Capítulo 7 sobre las categorías de módulos en las que vive la homología propia. Un importante nexo entre estas herramientas que nos ayuda de forma fundamental a la resolución de los problemas de clasificación de tipos de homotopía propia es el método algebraico para el cálculo del cup-producto de complejos de cadenas dado en el Capítulo 8 (Teorema 8.6.1). Para demostrar su validez hacemos uso de los nuevos resultados sobre el álgebra homotópica de los complejos cruzados y cuadráticos que probamos en las primeras cinco secciones.

Para terminar en el Capítulo 9 combinamos los principales resultados originales probados en los capítulos anteriores para la obtención de modelos algebraicos sencillos (Teorema 9.5.2), basados en invariantes cohomológicos “propios” que llamamos de Steenrod (Definiciones 9.2.5 y 9.3.7), de tipos de homotopía propia estable de espacios 1-conexos de dimensión ≤ 4 con a lo sumo 3 finales, alcanzando así el principal objetivo de esta memoria para esta amplia clase de espacios. Como ya hemos comentado antes pensamos que aún es posible extender estos resultados a espacios con 4 finales, aunque no hemos explorado esa vía ya que los resultados que cabe esperar obtener son del corte de los que ya aquí se prueban para espacios con menos finales y su demostración requeriría una enorme cantidad de cálculos que engrosarían en exceso esta memoria. Para espacios con más de 4 finales ya no es posible extender estos resultados pues nos tropezamos con problemas de complejidad derivados de que las álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$ son salvajes siempre que $\mathfrak{F}(T)$

tenga más de 4 puntos. Además en la Sección 9.4 se calcula la parte inferior de la sucesión exacta larga de Whitehead para el morfismo de Hurewicz en homotopía propia a partir de los invariantes de Steenrod (Proposiciones 9.4.1 y 9.4.2). Por último en la sección final contemplamos el caso particular de los espacios de Moore, que fue la clase de espacios sobre la cual se observó primero las enormes diferencias que existen entre homotopía ordinaria y propia en lo que al programa de Whitehead respecta ([ADMQ95]). Merece la pena destacar las diferencias cualitativas existentes al abordar estos problemas por un lado para los espacios con 1 o 2 finales y por otro para los espacios con 3 finales, a pesar de que los resultados que se obtienen son idénticos. Estas diferencias se derivan del cálculo llevado a cabo en el capítulo anterior de la clase característica en cohomología de categorías dada por el cup-producto de complejos de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ (Teorema 8.6.4).

Ampliamos esta introducción con una segunda parte con título propio en la que se resumen muy brevemente los resultados clásicos de Whitehead a los que nos hemos referido anteriormente sobre la clasificación de tipos de homotopía ordinaria mediante invariantes algebraicos sencillos.

Teoremas de clasificación de J. H. C. Whitehead

J. H. C. Whitehead en sus trabajos fundamentales [Whi49b], [Whi48] y [Whi50] clasificó de forma algebraica los tipos de homotopía de CW -complejos $(n - 1)$ -conexos de dimensión $\leq n + 2$ para todo $n \geq 2$. En el Capítulo I de [Bau91] encontramos demostraciones de estos resultados con un lenguaje más moderno en el que nos basamos para hacer el siguiente resumen.

Son dos los tipos de invariantes algebraicos de un CW -complejo $(n - 1)$ -conexo X que usó Whitehead para obtener sus teoremas de clasificación:

- El *complejo de cadenas celulares* reducido C_*X junto con un invariante cohomológico:

– El *invariante de Pontrjagin*

$$\wp_2(X) \in H^4(X, \Gamma H_2 X)$$

si $n = 2$,

– o el *invariante de Steenrod*

$$\wp_n(X) \in H^{n+2}(X, H_n X \otimes \mathbb{Z}_2)$$

para $n \geq 3$.

- El grupo de homología $H_n X$ junto con la parte inferior de la *sucesión exacta larga de Whitehead* para el homomorfismo de Hurewicz, que es de la forma

$$H_4 X \xrightarrow{b_4} \Gamma H_2 X \xrightarrow{i_3} \pi_3 X \xrightarrow{h_3} H_3 X$$

si $n = 2$, y si $n \geq 3$ es como sigue

$$H_{n+2} X \xrightarrow{b_{n+2}} H_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_{n+1}} \pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} H_{n+1} X.$$

Aquí Γ es un endofunctor de la categoría de grupos abelianos definido por Whitehead en [Whi50] Capítulo II, véase (5.1.2) para más detalles. Con el fin de simplificar la notación escribiremos

$$\Gamma_n^1 = \begin{cases} \Gamma, & \text{si } n = 2; \\ - \otimes \mathbb{Z}_2, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

El invariante de Pontrjagin-Steenrod $\wp_n(X)$ de un CW -complejo $(n-1)$ -conexo X ($n \geq 2$), que siempre supondremos reducido y normalizado, puede ser construido de diversas formas. La que más se adapta al tipo de técnicas que usaremos a lo largo de esta memoria es la siguiente, compárese con [Bau91] I.7.6.

Tomamos una descomposición de homología de X^{n+1} , es decir, una equivalencia de homotopía

$$X^{n+1} \simeq M(H_n X, n) \vee M(H_{n+1} X^{n+1}, n+1).$$

Aquí $M(A, m)$ denota al espacio de Moore con homología A en dimensión $m \geq 2$. Es conocido que

$$\pi_{m+1} M(A, m) = \Gamma_m^1 A.$$

Si $f: M(C_{n+2} X, n+1) \rightarrow X^{n+1}$ es la aplicación de pegamiento de $(n+2)$ -células en X la composición

$$\begin{array}{ccc} M(C_{n+2} X, n+1) & \xrightarrow{f} & X^{n+1} \xrightarrow{\simeq} M(H_n X, n) \vee M(H_{n+1} X^{n+1}, n+1) \\ & & \downarrow (1,0) \\ & & M(H_n X, n) \end{array}$$

induce en π_{n+1} un homomorfismo

$$C_{n+2} X \rightarrow \Gamma_n^1 H_n X$$

que es un cociclo que representa a $\wp_n(X)$.

Definición I. Un A_n^m -poliedro ($m, n \geq 1$) es un CW -complejo $X = X^{m+n}$ de dimensión $\leq m+n$, con $(n-1)$ -esqueleto trivial $X^{n-1} = *$.

Como es sabido todo CW -complejo $(n-1)$ -conexo de dimensión $\leq m+n$ tiene el tipo de homotopía de un A_n^m -poliedro.

La siguiente proposición recoge una de las propiedades fundamentales del invariante de Pontrjagin-Steenrod, compárese con [Bau91] I.8.9.

Proposición II. Sean X e Y dos A_n^2 -poliedros ($n \geq 2$) y $\varphi: C_*X \rightarrow C_*Y$ un morfismo de complejos de cadenas. Existe una aplicación $f: X \rightarrow Y$ que induce φ en cadenas celulares $C_*f = \varphi$ si y sólo si φ es compatible con los invariantes de Pontrjagin-Steenrod de X e Y ; es decir,

$$\varphi_*\varphi_n(X) = \varphi^*\varphi_n(Y) \in H^{n+2}(X, \Gamma_n^1 H_n Y).$$

Este resultado junto con el teorema de Whitehead homológico permite probar el primer teorema de clasificación de Whitehead. Para enunciarlo definimos la siguiente categoría.

Definición III. Un objeto de la categoría \mathbf{P}_n^2 ($n \geq 2$) es un par (C_*, φ) donde C_* es un complejo de cadenas de grupos libres concentrado en dimensiones $n, n+1$ y $n+2$, y $\varphi \in H^{n+2}(C_*, \Gamma_n^1 H_n C_*)$. Un morfismo $\varphi: (C_*, \varphi) \rightarrow (C'_*, \varphi')$ es una clase de homotopía $\varphi: C_* \rightarrow C'_*$ tal que

$$\varphi_*\varphi = \varphi^*\varphi' \in H^{n+2}(C_*, \Gamma_n^1 H_n C'_*).$$

Sea \mathbf{A}_n^2 la categoría de homotopía de los A_n^2 -poliedros.

Teorema IV. El functor $PS: \mathbf{A}_n^2 \rightarrow \mathbf{P}_n^2: X \mapsto (C_*X, \varphi_n(X))$ es suficiente y realizable.

Un functor $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ suficiente y realizable induce una biyección entre las clases de isomorfía de objetos en \mathbf{A} y \mathbf{B} , véase (4.2.1).

Este teorema es un ejemplo de lo que entenderemos por clasificación de tipos de homotopía en función de invariantes algebraicos, es decir, el establecimiento de un functor suficiente y realizable $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ donde \mathbf{A} es una categoría de homotopía de una clase de CW -complejos y \mathbf{B} es una categoría construida a base de objetos algebraicos.

El invariante de Steenrod es estable, es decir, dado un CW -complejo $(n-1)$ -conexo X , si usamos los isomorfismos de suspensión en (co)homología como identificaciones, entonces para $n \geq 3$

$$\varphi_n(X) = \varphi_{n+1}(\Sigma X) \in H^{n+2}(X, H_n X \otimes \mathbb{Z}_2) = H^{n+3}(\Sigma X, H_{n+1} \Sigma X \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Es más, existe un homomorfismo natural $\sigma: \Gamma A \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_2$ tal que

$$\sigma_*\varphi_2(X) = \varphi_3(\Sigma X) \in H^4(X, H_2 X \otimes \mathbb{Z}_2) = H^5(\Sigma X, H_3 \Sigma X \otimes \mathbb{Z}_2).$$

También existe otro homomorfismo natural $\tau: \Gamma A \rightarrow A \otimes A$ tal que

$$\tau_*\varphi_2(X) = 1_{H_2 X} \cup 1_{H_2 X} \in H^4(X, H_2 X \otimes H_2 X).$$

Aquí \cup es el cup-producto habitual y

$$1_{H_2X} \in \text{Hom}(H_2X, H_2X) = H^2(X, H_2X).$$

Tanto σ como τ aparecen definidos en (5.1.2).

Al igual que $\wp_n(X)$, la clase de cohomología $1_{H_2X} \cup 1_{H_2X}$ puede ser construida de forma homotópica, usando en este caso el *invariante de James-Hopf*

$$\gamma_2: \pi_3\Sigma Y \rightarrow H_2\Sigma Y \otimes H_2\Sigma Y,$$

que es un homomorfismo natural en el CW -complejo Y , véase el comienzo de (6.1) para más detalles sobre γ_2 . Más concretamente, $X^3 \simeq \Sigma Z$ para cierto CW -complejo Z y la composición

$$C_4X \xrightarrow{\pi_3 f} \pi_3 X^3 = \pi_3 \Sigma Z \xrightarrow{\gamma_2} H_2 \Sigma Z \otimes H_2 \Sigma Z = H_2 X \otimes H_2 X$$

es un cociclo que representa a $1_{H_2X} \cup 1_{H_2X}$.

El segundo teorema de clasificación de Whitehead hace uso de la sucesión exacta larga de Whitehead de un CW -complejo $(n-1)$ -conexo X ($n \geq 2$), cuya parte inferior

$$H_{n+2}X \xrightarrow{b_{n+2}} \Gamma_n^1 H_n X \xrightarrow{i_{n+1}} \pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} H_{n+1} X$$

está completamente determinada por los grupos de homología

$$H_n X, H_{n+1} X, H_{n+2} X,$$

el *operador borde secundario*

$$b_{n+2} \in \text{Hom}(H_{n+2}X, \Gamma_n^1 H_n X),$$

y la extensión

$$\text{Coker } b_{n+2} \hookrightarrow \pi_{n+1} X \twoheadrightarrow H_{n+1} X,$$

que denotaremos

$$\{\pi_{n+1} X\} \in \text{Ext}^1(H_{n+1} X, \text{Coker } b_{n+2}).$$

Estas observaciones sugieren considerar la siguiente categoría.

Definición V. Los objetos de \mathbf{B}_n^2 ($n \geq 2$) son 5-uplas (H_0, H_1, H_2, b, π) donde H_0, H_1, H_2 son grupos abelianos, H_2 es libre, $b \in \text{Hom}(H_2, \Gamma_n^1 H_0)$ y $\pi \in \text{Ext}^1(\text{Coker } b, H_1)$. Un morfismo $\varphi: (H_0, H_1, H_2, b, \pi) \rightarrow (H'_0, H'_1, H'_2, b', \pi')$ viene dado por tres homomorfismos $\varphi_k: H_k \rightarrow H'_k$ ($k = 0, 1, 2$) tales que $b'\varphi_2 = (\Gamma_n^1 \varphi_0)b \in \text{Hom}(H_2, \Gamma_n^1 H'_0)$, y si $\bar{\varphi}: \text{Coker } b \rightarrow \text{Coker } b'$ es el homomorfismo inducido por $\Gamma_n^1 \varphi_0$ entonces $\bar{\varphi}_* \pi = \varphi_1^* \pi' \in \text{Ext}^1(H_1, \text{Coker } b')$.

Teorema VI. *El funtor*

$$Wh: \mathbf{A}_n^2 \rightarrow \mathbf{B}_n^2: X \mapsto (H_n X, H_{n+1} X, H_{n+2} X, b_{n+2}, \{\pi_{n+1} X\})$$

es suficiente y realizable.

El invariante de Pontrjagin-Steenrod $\wp_n(X) \in H^{n+2}(X, \Gamma_n^1 H_n X)$ determina tanto a b_{n+2} como a $\{\pi_{n+1} X\}$ a través de la sucesión exacta de coeficientes universales

$$\text{Ext}^1(H_{m-1} X, A) \xrightarrow{\phi} H^m(X, A) \xrightarrow{\nu} \text{Hom}(H_m X, A).$$

Proposición VII. *En las condiciones anteriores, si $\bar{i}: \Gamma_n^1 H_n X \rightarrow \text{Coker } b_{n+2}$ es la proyección natural entonces*

$$b_{n+2} = \nu \wp_n(X) \text{ y } \phi \{\pi_{n+1} X\} = -\bar{i}_* \wp_n(X).$$

Esto demuestra que el funtor

$$Wh': \mathbf{P}_n^2 \rightarrow \mathbf{B}_n^2: (C_*, \wp) \mapsto (H_n C_*, H_{n+1} C_*, H_{n+2} C_*, \nu \wp, -\phi^{-1}(\bar{i}_* \wp))$$

donde $\bar{i}: \Gamma_n^1 H_n C_* \rightarrow \text{Coker } \nu \wp$ es la proyección natural, hace conmutativo al siguiente diagrama ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{P}_n^2 \\ & \nearrow PS & \downarrow Wh' \\ \mathbf{A}_n^2 & & \mathbf{B}_n^2 \\ & \searrow Wh & \end{array}$$

En particular Wh' es también suficiente y realizable.

Parte A

Preliminares

Capítulo 1

Fundamentos de teoría de homotopía propia

En este capítulo recopilaremos el material básico para el desarrollo de la teoría de homotopía propia que aparece en [BQ01] y [Bau89].

Para hacer teoría de homotopía con la categoría **Topp** de espacios topológicos y aplicaciones propias usaremos, siguiendo a [BQ01], la estructura de I -categoría de **Topp** en el sentido de [Bau89]. Esta estructura, que se introducirá en la Sección 1.1, proporciona un marco axiomático en el que desarrollar de forma abstracta una teoría de homotopía paralela a la clásica aunque sin hacer uso del concepto de fibración. Los axiomas de Quillen son con diferencia los más usados a la hora de dotar de una estructura homotópica a una categoría y sí contemplan la existencia de fibraciones. Sin embargo Baues, evitando el uso de las fibraciones y usando sólo el concepto dual de cofibración y los cilindros, nos muestra en [Bau89] y [Bau99] cómo es posible generalizar construcciones y resultados de la teoría de homotopía clásica que tradicionalmente involucraban a las fibraciones. Como se observó en [ADQ90], los axiomas de Baues son de especial interés en teoría de homotopía propia ya que la categoría **Topp** no encaja en los axiomas de Quillen. En la Sección 1.2 se resumen los principales resultados sobre teoría de homotopía en I -categorías que usaremos en esta memoria.

La Sección 1.3 está dedicada al invariante más clásico y básico del tipo de homotopía propia de un espacio X , su espacio de finales de Freudenthal $\mathfrak{F}(X)$. Si X satisface ciertas buenas propiedades topológicas, que no afectan al buen desarrollo de la teoría de homotopía propia, entonces $\mathfrak{F}(X)$ es homeomorfo a un cerrado del conjunto de Cantor. Además el espacio $\mathfrak{F}(X)$ puede ser añadido a X para obtener una compactificación de X , la compactificación de Freudenthal, que también se estudiará en esta sección.

Por último en la Sección 1.4 se introducirá el tipo de CW -complejos que usaremos a lo largo de esta memoria. Es sabido en teoría de homotopía ordinaria que todo CW -complejo conexo puede ser reducido y normalizado. Esto es, podemos suponer, salvo equivalencia de homotopía, que el 0-esqueleto está formado únicamente por el punto base y que las aplicaciones de pegamiento de las células son basadas. Para reducir y normalizar un CW -complejo en homotopía propia se usará un árbol base en vez de un punto base, de forma que este árbol recoja toda la información sobre los finales del CW -complejo. Además, como se verá, todo CW -complejo conexo localmente compacto de dimensión finita admite un modelo reducido y normalizado en el sentido “propio”.

1.1 La estructura de I -categoría

Intuitivamente las aplicaciones propias son las aplicaciones continuas que además son continuas en el “infinito”. El concepto de “infinito” de un espacio será estudiado con más detalle en la Sección 1.3, ya que, a pesar de esta idea intuitiva, la definición de aplicación propia no requiere que se precise previamente qué se entiende por “infinito” en un espacio.

Definición 1.1.1. Una aplicación continua entre dos espacios topológicos $f: X \rightarrow Y$ es *propia* si es cerrada y sus fibras $f^{-1}(y)$ son compactas para todo $y \in Y$. Existe otra definición de aplicación propia en la literatura, como aquella aplicación continua tal que para todo compacto $K \subset Y$ su imagen inversa $f^{-1}(K) \subset X$ es también un compacto. Ambas definiciones no son en general equivalentes, sin embargo sí lo son si consideramos sólo espacios de Hausdorff localmente compactos. Esto no supone una restricción muy importante en teoría de homotopía propia ya que entre estos espacios se encuentran los CW -complejos localmente compactos.

Una herramienta clave para el desarrollo de la teoría de homotopía en la categoría **Top** de espacios topológicos y aplicaciones continuas es la existencia de los cilindros.

Definición 1.1.2. En **Top** tenemos el funtor *cilindro* habitual

$$I: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}: X \mapsto IX = I \times X$$

donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad, junto con las siguientes aplicaciones estructurales naturales

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} \\ \xrightarrow{i_1} \end{array} IX \xrightarrow{p} X$$

definidas como $i_k(x) = (k, x)$ ($k = 0, 1$) y $p(t, x) = x$. Este funtor se restringe a la subcategoría $\mathbf{Topp} \subset \mathbf{Top}$ de espacios topológicos y aplicaciones propias ya que el intervalo I es compacto y por tanto las aplicaciones estructurales del cilindro son propias.

El funtor cilindro es el componente fundamental de la estructura de I -categoría de \mathbf{Topp} .

Definición 1.1.3. Una I -categoría es una categoría \mathbf{C} dotada de cierta estructura adicional $(\mathbf{C}, cof, I, \emptyset)$, donde cof es una clase de morfismos en \mathbf{C} llamados *cofibraciones*, I es el *funtor cilindro* y \emptyset es un objeto inicial en \mathbf{C} . Además se satisfacen los siguientes axiomas

- (I1) El funtor cilindro es un funtor $I: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ junto con transformaciones naturales

$$1_{\mathbf{C}} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} \\ \xrightarrow{i_1} \end{array} I \xrightarrow{p} 1_{\mathbf{C}}$$

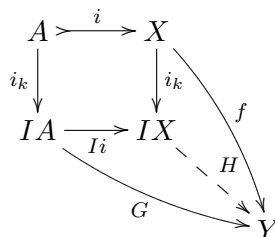
tales que $pi_0 = pi_1 = 1$ es siempre la identidad, y $I\emptyset = \emptyset$.

- (I2) Dada una cofibración $i: B \rightarrow A$ y un morfismo $f: B \rightarrow X$ el siguiente push-out existe

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \text{push} & \downarrow \bar{i} \\ A & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_f A \end{array}$$

y el morfismo inducido \bar{i} es una cofibración. Más aún, el funtor I preserva diagramas de push-out, esto es $I(X \cup_f A) = IX \cup_{If} IA$.

- (I3) Los isomorfismos en \mathbf{C} son cofibraciones, así como los morfismos triviales $\emptyset \rightarrow X$. Por tanto, aplicando (I2), observamos que \mathbf{C} admite coproductos $X \vee Y = X \cup_{\emptyset} Y$. La composición de cofibraciones es una cofibración. Más aún, una cofibración $i: A \rightarrow X$ tiene la *propiedad de extensión de homotopía*, es decir, para $k \in \{0, 1\}$, dado un diagrama conmutativo en \mathbf{C} de flechas sólidas



siempre existe un morfismo H que extiende el diagrama conmutativamente.

- (I4) Dada una cofibración $i: B \rightarrow A$, el morfismo j definido por el siguiente diagrama de push-out es una cofibración

$$\begin{array}{ccc}
 B \vee B & \xrightarrow{i \vee i} & A \vee A \\
 \downarrow (i_0, i_1) & & \downarrow (i_0, i_1) \\
 IB & \xrightarrow{\quad} & A \cup IB \cup A \\
 & \searrow i & \downarrow j \\
 & & IA
 \end{array}$$

- (I5) Para cada objeto X existe un endomorfismo del doble cilindro $T_X: IIX \rightarrow IIX$ llamado *aplicación de intercambio* que verifica $T_X i_k = I(i_k)$ y $T_X I(i_k) = i_k$ ($k \in \{0, 1\}$).

Teorema 1.1.4 ([BQ01] I.3.6). *Las categorías \mathbf{Top} y \mathbf{Topp} con el funtor cilindro de (1.1.2) y definiendo las cofibraciones como aquellos morfismos que satisfacen la propiedad de extensión de homotopía en (1.1.3) (I3) son I -categorías. Ambas poseen aplicaciones de intercambio T_X (1.1.3) (I5) naturales definidas como $T_X(t_1, t_2, x) = (t_2, t_1, x)$.*

Observación 1.1.5. Es de sobra conocido que todos los push-out existen en \mathbf{Top} . Dado un diagrama en \mathbf{Topp}

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow g & & \\
 Y & &
 \end{array}$$

lo más que podemos asegurar es que si existe su push-out en \mathbf{Topp} entonces coincide con el push-out usual en \mathbf{Top} . Es más, si f o g es inyectiva entonces el push-out en \mathbf{Topp} existe. En particular los push-out de diagramas como el de (1.1.3) (I2) existen en \mathbf{Topp} ya que las cofibraciones son inyectivas. Si ninguna de las aplicaciones es inyectiva existen ejemplos en los que el push-out en \mathbf{Topp} no existe, véase [BQ01] I.1.9.

Definición 1.1.6. Dos morfismos $f, g: X \rightarrow Y$ en una I -categoría \mathbf{C} se dicen *homotópicos* $f \simeq g$ si existe $H: IX \rightarrow Y$ tal que $H i_0 = f$ y $H i_1 = g$. “Ser homotópicos” es una relación de equivalencia natural en \mathbf{C} , por tanto está bien definida la categoría cociente \mathbf{C}/\simeq que habitualmente llamaremos

categoría de homotopía de \mathbf{C} . Los conjuntos de morfismos en la categoría de homotopía serán denotados de la siguiente manera

$$[X, Y] = \mathbf{C}(X, Y) / \simeq .$$

La clase de homotopía de un morfismo $f: X \rightarrow Y$ será denotada $[f] \in [X, Y]$, aunque con frecuencia si no da lugar a confusión identificaremos a f con su clase de homotopía $f = [f]$. Una *equivalencia de homotopía* $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathbf{C} que se proyecta a un isomorfismo en \mathbf{C}/\simeq , es decir, tal que existe otro morfismo $g: Y \rightarrow X$ con $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$.

Observación 1.1.7. Baues también define en [Bau89] el concepto más general de *categoría de cofibraciones*. Una categoría de cofibraciones es un triple $(\mathbf{C}, \text{cof}, \text{we})$ donde \mathbf{C} es una categoría y cof y we son dos clases de morfismos en \mathbf{C} llamados cofibraciones y equivalencias débiles respectivamente. Además se verifican una serie de axiomas, véase [Bau89] I.1.1 para más detalles. Si $(\mathbf{C}, \text{cof}, I, \emptyset)$ es una I -categoría y definimos we como la clase formada por las equivalencias de homotopía entonces $(\mathbf{C}, \text{cof}, \text{we})$ es una categoría de cofibraciones, véase [Bau89] I.3.3. Gran parte de la teoría de homotopía abstracta que se desarrolla en [Bau89] y que resumiremos en la siguiente sección no sólo se aplica a I -categorías sino a categorías de cofibraciones. De hecho en [Bau89] se trabaja la mayor parte del tiempo con categorías de cofibraciones.

A continuación consideraremos un par de ejemplos relevantes de cómo a partir de una I -categoría se puede construir otra.

Definición 1.1.8. dada una categoría cualquiera \mathbf{C} su *categoría de pares* $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ tiene como objetos a los morfismos de \mathbf{C} . Un morfismo $(f_1, f_0): i_A \rightarrow i_X$ en esta categoría es un diagrama conmutativo en \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_X \\ A & \xrightarrow{f_1} & X \end{array}$$

Si \mathbf{C} es una I -categoría decimos que (f_1, f_0) es una cofibración en $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ si f_0 y $(f_1, i_X): A \cup_{f_0} X_0 \rightarrow X$ lo son en \mathbf{C} . Es más, $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ posee un functor cilindro definido de la manera obvia $I(f_1, f_0) = (If_1, If_0)$. Si \emptyset es el objeto inicial de \mathbf{C} entonces $\emptyset \rightarrow \emptyset$ es el de $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$. Un *par cofibrante* es un objeto $i_X: X_0 \rightarrow X$ en $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ que es una cofibración en \mathbf{C} , con frecuencia lo denotaremos simplemente como (X, X_0) . Sea $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$ la categoría de pares cofibrantes.

Proposición 1.1.9 ([BQ01] I.3.8). *Si \mathbf{C} es una I -categoría con aplicación de intercambio natural entonces $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$ con la estructura anterior es de nuevo una I -categoría con aplicación de intercambio natural.*

Observación 1.1.10. (1). En el enunciado de [BQ01] I.3.8, donde se prueba la anterior proposición, se considera la categoría $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ y no la subcategoría llena $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$ formada por los pares cofibrantes. La categoría $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ no satisface por completo el axioma (1.1.3) (I3) ya que dado un objeto $i_X: X_0 \rightarrow X$ el único morfismo $(\emptyset, \emptyset) \rightarrow i_X$ en $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ es una cofibración si y sólo si i_X es un par cofibrante. Sin embargo, salvando esta imprecisión, la demostración de [BQ01] I.3.8 prueba el enunciado de (1.1.9).

(2). La categoría $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ es siempre una categoría de cofibraciones tomando como cofibraciones las definidas en (1.1.8) y como equivalencias débiles los morfismos (f_1, f_0) en $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$ tales que f_1 y f_0 son equivalencias de homotopía en \mathbf{C} , véase [Bau89] II.1.5.

(3). En virtud de (1.1.4) la Proposición 1.1.9 puede ser aplicada a las categorías \mathbf{Top} y \mathbf{Topp} .

Definición 1.1.11. Dado un objeto B de una categoría cualquiera \mathbf{C} , un objeto X es un *objeto bajo B* o *relativo a B* si hemos fijado un morfismo $B \rightarrow X$. Un *morfismo bajo B* $f: X \rightarrow Y$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Denotaremos \mathbf{C}^B a la categoría de objetos y morfismos bajo B . El objeto inicial de esta categoría es B junto con la identidad $1_B: B \rightarrow B$. Si \mathbf{C} es una I -categoría un morfismo bajo B es una cofibración si f lo es en \mathbf{C} . Es más, un objeto bajo B se dice *cofibrante* si el morfismo $B \rightarrow X$ es una cofibración en \mathbf{C} . Sobre la subcategoría llena $\mathbf{C}_c^B \subset \mathbf{C}^B$ de objetos cofibrantes definimos el functor cilindro $I_B: \mathbf{C}_c^B \rightarrow \mathbf{C}_c^B$ de la siguiente manera. Dado un objeto cofibrante bajo B $i_X: B \rightarrow X$ el *cilindro de X relativo a B* se define a través del siguiente diagrama de push-out

$$\begin{array}{ccc} IB & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow i_X & \text{push} & \downarrow \\ IX & \longrightarrow & I_B X \end{array}$$

donde p es uno de los morfismos estructurales del cilindro en \mathbf{C} . El diagrama anterior es natural con respecto a aplicaciones bajo B , por tanto I_B es un funtor.

Proposición 1.1.12. *La categoría \mathbf{C}_c^B con las cofibraciones y el funtor cilindro I_B definidos anteriormente es una I -categoría.*

Si $*$ es un punto \mathbf{Top}_c^* es la categoría habitual de espacios bien punteados. Nosotros estamos especialmente interesados en la categoría \mathbf{Top}_c^T donde T es un árbol.

Observación 1.1.13. (1). En general \mathbf{C}^B no es una I -categoría pero sí es categoría de cofibraciones si tomamos como cofibraciones (resp. equivalencias débiles) los morfismos relativos a B que son cofibraciones (resp. equivalencias de homotopía) en \mathbf{C} , véase [Bau89] II.1.4.

(2). Todo morfismo $f: B \rightarrow D$ en \mathbf{C} induce un funtor de “cambio de base”

$$f_*: \mathbf{C}_c^B \rightarrow \mathbf{C}_c^D$$

que lleva $B \mapsto X$ en $D \mapsto X \cup_f D = f_*X$. Este funtor preserva cilindros $f_*(I_B X) = I_D f_*X$ por tanto induce un funtor entre las respectivas categorías de homotopía

$$f_*: \mathbf{C}_c^B / \simeq \rightarrow \mathbf{C}_c^D / \simeq .$$

Este funtor, salvo equivalencia natural, sólo depende de la clase de homotopía de f . Para comprobarlo puede usarse el “lema del pegamiento” en (1.2.2). En particular si f es una equivalencia de homotopía el funtor f_* es una equivalencia de categorías.

1.2 Teoría de homotopía abstracta

Las I -categorías, o más generalmente las categorías de cofibraciones, satisfacen muchos de los resultados clásicos de la teoría de homotopía de los espacios topológicos. Por ejemplo, en toda I -categoría \mathbf{C} , por ser también categoría de cofibraciones, los diagramas de push-out poseen la siguiente propiedad, véase [Bau89] I.1.1 (C2).

Proposición 1.2.1. *Dado un diagrama de push-out*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \text{push} & \downarrow \bar{i} \\ A & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_f A \end{array}$$

si f (resp. i) es una equivalencia de homotopía entonces también lo es \bar{f} (resp. \bar{i}).

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \xleftarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Y_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ X_0 & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & X_1 \end{array}$$

donde en cada fila al menos uno de los dos morfismos es una cofibración. Tomando push-out en las filas este diagrama da lugar a un morfismo

$$\alpha \cup \beta: Y_0 \cup_Y Y_1 \rightarrow X_0 \cup_X X_1$$

que verifica el siguiente “lema del pegamiento”.

Lema 1.2.2 ([Bau89] II.1.2). *Las siguientes propiedades se satisfacen*

- (1). Si α , β , γ y $(g, \beta): X \cup_Y Y_1 \rightarrow X_1$ son cofibraciones entonces $\alpha \cup \beta$ también lo es.
- (2). Si α , β y γ son equivalencias de homotopía entonces $\alpha \cup \beta$ también.

Otro de los resultados clásicos es el “lema del levantamiento”. Para enunciarlo damos primero la siguiente

Definición 1.2.3. Dada una cofibración $i: B \rightarrow A$ y un par de morfismos $f_0, f_1: A \rightarrow X$ tales que $f_0 i = f_1 i$ decimos que f_0 y f_1 son *homotópicos relativamente a B* $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } B$ si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \cup_B A & \xrightarrow{(i_0, i_1)} & I_B A \\ & \searrow (f_0, f_1) & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

Dado un morfismo $u: B \rightarrow X$ denotamos $\mathbf{C}(A, X)^u$ al conjunto de los morfismos $f: A \rightarrow X$ tales que $f i = u$. “Ser homotópicos relativamente a B ” es una relación de equivalencia en $\mathbf{C}(A, X)^u$, véase [Bau89] I.4.11. El conjunto cociente será denotado

$$[A, X]^u = \mathbf{C}(A, X)^u / \simeq \text{rel } B,$$

o simplemente $[A, X]^B$ cuando se sobrentienda u .

El “lema del levantamiento” dice así, véanse [Bau89] I.3.3 y II.1.11.

Lema 1.2.4. *Dado un diagrama conmutativo de flechas sólidas*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & U \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & V \end{array}$$

donde i es una cofibración y g una equivalencia de homotopía, existe un morfismo h tal que el triángulo superior conmuta y $v \simeq gh$ rel B . Es más, h es única salvo homotopía rel B .

Una de las principales herramientas de cálculo en teoría de homotopía es la sucesión larga de cofibra. Para describir su rica estructura usaremos los conceptos de la siguiente definición.

En lo que sigue denotaremos al objeto inicial de nuestra I -categoría \mathbf{C} como $*$. Esta notación recuerda más al “punto base” de la categoría de espacios punteados, mientras que la anterior se asemejaba más al conjunto vacío, que es el objeto inicial de la categoría de espacios sin puntear.

Definición 1.2.5. Un *objeto basado* $X = (X, 0_X)$ es un par dado por un objeto X de \mathbf{C} y un morfismo $0_X: X \rightarrow *$. Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ entre objetos basados es un *morfismo basado* si $0_Y f = 0_X$, y *basado salvo homotopía* si $0_Y f \simeq 0_X$. Si el objeto inicial de \mathbf{C} es también final entonces todo objeto está basado por el único morfismo $X \rightarrow *$ y todos los morfismos son basados, como en caso de $\mathbf{C} = \mathbf{Top}_c^*$. Si en cambio $*$ es *final salvo homotopía*, es decir $[X, *]$ es siempre un conjunto unitario, entonces todos los objetos se pueden considerar basados de forma que todos los morfismos sean basados salvo homotopía. Como veremos en la Sección 1.4 este será el caso más relevante para nosotros. Dado un par de objetos X y U con X basado el conjunto de clases de homotopía $[X, U]$ está basado por el *morfismo trivial*

$$0: X \xrightarrow{0_X} * \rightarrow U.$$

Si Y está también basado el coproducto $X \vee Y$ está basado canónicamente por el morfismo $(0_X, 0_Y): X \vee Y \rightarrow *$ y la biyección

$$[X \vee Y, U] = [X, U] \times [Y, U]$$

inducida por las inclusiones $X \hookrightarrow X \vee Y$ e $Y \hookrightarrow X \vee Y$ preserva los puntos base.

Dada una cofibración $i: A \hookrightarrow X$ con A basado se define su *cofibra* como

el push-out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0_A} & * \\ \downarrow i & \text{push} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & X/A \end{array}$$

El morfismo $q: X \rightarrow X/A$ de este diagrama se denomina *morfismo cociente* de X/A . Más aún, dado un morfismo en **Pair**(**C**)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_0} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

con f_0 basado, el morfismo inducido $\tilde{f}_1: X/A \rightarrow Y/B$ al tomar push-out se denomina *paso al cociente* de f_1 .

El *cilindro de un morfismo* $f: X \rightarrow Y$ es el push-out

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 \simeq & \text{push} & \downarrow \simeq \\ IX & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z_f = Y \cup_f IX \end{array}$$

El *cono de un objeto basado* A es la cofibra de $i_1: A \rightarrow IA$ que denotaremos CA y que está basado por el paso al cociente de $0_{Ap}: IA \rightarrow *$. Denotaremos también $i_0: A \rightarrow CA$ a la composición de $i_0: A \rightarrow IA$ con el morfismo cociente de CA .

El *cono* o *cofibra de un morfismo* $f: A \rightarrow X$ con A basado es el push-out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i_0 & \text{push} & \downarrow i_f \\ CA & \xrightarrow{\pi_f} & C_f = X \cup_f CA \end{array}$$

que a su vez coincide con la cofibra de la cofibración $\tilde{f}i_1: A \rightarrow Z_f$. Esta definición de cofibra de un morfismo generaliza salvo equivalencia de homotopía natural a la dada anteriormente en el caso en que $f: A \rightarrow X$ es una cofibración. Más concretamente, el paso al cociente de i_f es una equivalencia de homotopía que hace conmutativo al siguiente diagrama natural

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_f} & C_f \\ q \downarrow & & \simeq \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow[\simeq]{\tilde{i}_f} & C_f/CA \end{array}$$

véase [Bau89] II.8 para más detalles.

La sucesión de morfismos

$$(1.2.A) \quad A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i_f} C_f,$$

o equivalentemente

$$(1.2.B) \quad A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} X/A$$

si f es una cofibración, se denomina *sucesión de cofibra* de f .

La *suspensión* ΣA de un objeto basado A es la cofibra de $(i_0, i_1): A \vee A \rightarrow IA$ y está basada por el paso al cociente de $0_{Ap}: IA \rightarrow *$. También puede verse ΣA , salvo equivalencia de homotopía natural, como la cofibra de $i_0: A \rightarrow CA$ o de $0_A: A \rightarrow *$. La equivalencia de homotopía natural $\Sigma A \simeq C_{i_0}$ es el paso al cociente del morfismo cociente de CA . Más aún, por definición $C_{i_0} = C_{0_A}$.

Las suspensiones son *cogrupos* en \mathbf{C}/\simeq , es decir, son objetos basados equipados con morfismos

$$\mu: \Sigma A \rightarrow \Sigma A \vee \Sigma A, \text{ co-H-multiplicación;}$$

$$\nu: \Sigma A \rightarrow \Sigma A, \text{ co-H-inversión;}$$

tales que

$$(0, 1)\mu \simeq 1 \simeq (1, 0)\mu;$$

$$(\mu \vee 1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu;$$

$$(1, \nu)\mu \simeq (\nu, 1)\mu.$$

Estos morfismos son naturales en A y dotan a los conjuntos de clases de homotopía $[\Sigma A, X]$ de estructura natural de grupo definiendo $[f] + [g] = [(f, g)\mu]$, de esta forma $-[f] = [f\nu]$ y $0 = [0]$. Los morfismos μ y ν se construyen de la siguiente forma: consideramos el push-out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0} & IA \\ i_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow \bar{i}_1 \\ IA & \xrightarrow{\bar{i}_0} & IA \cup_A IA \end{array}$$

y tomamos un levantamiento m en el siguiente diagrama en las condiciones de (1.2.4)

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{(\bar{i}_0 i_0, \bar{i}_1 i_1)} & IA \cup_A IA \\ (i_0, i_1) \downarrow & \nearrow m & \simeq \downarrow (p, p) \\ IA & \xrightarrow[p]{\simeq} & A \end{array}$$

Análogamente tomamos un levantamiento n

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{(i_1, i_0)} & IA \\ (i_0, i_1) \downarrow & \nearrow n & \simeq \downarrow p \\ IA & \xrightarrow[p]{} & A \end{array}$$

La cofibra de la siguiente aplicación es $\Sigma A \vee \Sigma A$

$$(\bar{i}_0 i_0, \bar{i}_1 i_1, \bar{i}_1 i_1): A \vee A \vee A \rightarrow IA \cup_A IA$$

con morfismo cociente $(j_1 q, j_2 q): IA \cup_A IA \rightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$ donde $q: IA \rightarrow \Sigma A$ es el morfismo cociente de ΣA y $j_1, j_2: \Sigma A \rightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$ son las inclusiones de ambos factores del coproducto. El morfismo μ es el paso al cociente de m

$$\mu = \tilde{m}: \Sigma A = IA/(A \vee A) \rightarrow (IA \cup_A IA)/(A \vee A \vee A) = \Sigma A \vee \Sigma A$$

y ν el paso al cociente de n

$$\nu = \tilde{n}: \Sigma A = IA/(A \vee A) \rightarrow IA/(A \vee A) = \Sigma A.$$

Dado un morfismo basado $f: A \rightarrow B$ su cofibra está también basada por $(0_B, 0_{CA}): C_f = B \cup_f CA \rightarrow *$, más aún, la cofibra de $i_f: B \rightarrow C_f$ coincide con ΣA a través del paso al cociente de $\pi_f: CA \rightarrow C_f$. De esta forma obtenemos la siguiente sucesión de morfismos en \mathbf{C}

$$(1.2.C) \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{q} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma i_f} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma^2 A \xrightarrow{\Sigma^2 f} \dots$$

que llamaremos *sucesión larga de cofibra* de f . Más aún, existe una *coacción* de ΣA en C_f dada por un morfismo

$$\mu': C_f \rightarrow C_f \vee \Sigma A$$

que satisface

$$(1, 0)\mu' \simeq 1,$$

$$(0, 1)\mu' \simeq q: C_f \rightarrow \Sigma A,$$

$$(1 \vee \mu)\mu' \simeq (\mu' \vee 1)\mu'.$$

Esto da lugar a una acción a derecha natural en el objeto X del grupo $[\Sigma A, X]$ en el conjunto $[C_f, X]$ definida como $[f] + [\alpha] = [(f, \alpha)\mu']$.

Para construir μ' consideramos el siguiente push-out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \bar{i}_0 i_0 \downarrow & \text{push} & \downarrow \\ IA \cup_A IA & \xrightarrow{j} & B \cup_f IA \cup_A IA \end{array}$$

La cofibra de

$$j\bar{i}_1(i_0, i_1): A \vee A \rightarrow B \cup_f IA \cup_A IA$$

es $C_f \vee \Sigma A$ con morfismo cociente $(q', q''): B \cup_f IA \cup_A IA \rightarrow C_f \vee \Sigma A$ donde $q': Z_f = B \cup_f IA \rightarrow C_f$ y $q'': IA \rightarrow \Sigma A$ son los morfismos cociente de la cofibra de f y de la suspensión de A respectivamente. El morfismo μ' es el paso al cociente de $m' = 1_B \cup_f m: Z_f = B \cup_f IA \rightarrow B \cup_f IA \cup_A IA$

$$\mu' = \tilde{m}': C_f = Z_f/A \rightarrow (B \cup_f IA \cup_A IA)/(A \vee A) = C_f \vee \Sigma A.$$

Observación 1.2.6. (1). A lo largo de la Definición 1.2.5 hemos considerado A y B como objetos basados por morfismos $0_A: A \rightarrow *$ y $0_B: B \rightarrow *$. Las definiciones de cofibra, cilindro de un morfismo, cono y suspensión, así como el co-H-producto y la co-H-inversión de una suspensión y la coacción en una cofibra, sólo dependen, salvo equivalencia de homotopía natural, de las clases de homotopía de 0_A y 0_B . Para verlo podemos usar el “lema del pegamiento”(1.2.2). En particular si $*$ es objeto final salvo homotopía en \mathbf{C} el papel del morfismo concreto $X \rightarrow *$ usado para basar un objeto cualquiera X es irrelevante para estas construcciones.

(2). Si $f: A \rightarrow B$ es una cofibración basada, usando la equivalencia de homotopía $X/A \simeq C_f$ obtenemos la siguiente sucesión larga de cofibra equivalente a (1.2.C)

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} B/A \rightarrow \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma B/A \rightarrow \Sigma^2 A \xrightarrow{\Sigma^2 f} \dots$$

Esta sucesión es una prolongación de (1.2.B) mientras que (1.2.C) lo es de (1.2.A).

(3). Si $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$ o \mathbf{Topp} los levantamientos m y n pueden ser escogidos de forma natural. Más concretamente, la aplicación

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): IA \cup_A IA \xrightarrow{\cong} IA$$

dada por $\varphi_1(t, a) = (t/2, a)$ y $\varphi_2(t, a) = ((t+1)/2, a)$ es un homeomorfismo y podemos tomar $m = \varphi^{-1}$. Además podemos definir

$n(t, a) = (1 - t, a)$ y esta n es también un homeomorfismo. Esto es fácilmente generalizable a las categorías $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$ y \mathbf{C}_c^B , donde \mathbf{C} es una de las dos categorías anteriores y B es un espacio cualquiera.

Las propiedades fundamentales de la sucesión larga de cofibra se resumen en la siguiente proposición, véase [Bau89] II.8 y II.9.10.

Proposición 1.2.7. *Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo basado y U un objeto cualquiera de \mathbf{C} . La sucesión larga de cofibra induce una sucesión exacta larga de conjuntos punteados*

$$[A, U] \xleftarrow{f^*} [B, U] \xleftarrow{i_f^*} [C_f, U] \xleftarrow{q^*} [\Sigma A, U] \xleftarrow{\Sigma f^*} [\Sigma B, U] \xleftarrow{\Sigma i_f^*} [\Sigma C_f, U] \xleftarrow{\Sigma q^*} [\Sigma^2 A, U] \cdots$$

que es exacta de grupos abelianos a partir del séptimo término y de grupos a partir del cuarto. El homomorfismo Σq^* es central. Más aún, q^* es equivariante con respecto a la acción del grupo $[\Sigma A, U]$, es decir dados $\alpha, \beta \in [\Sigma A, U]$ $q^*(\alpha + \beta) = q^*(\alpha) + \beta$. La imagen de Σf^* es el grupo de isotropía de la acción de $[\Sigma A, U]$ en el punto base $0 \in [C_f, U]$. Toda esta estructura es natural en f y en U .

A priori existe cierto problema a la hora de pasar al cociente un morfismo entre pares $(f_1, f_0): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tal que f_0 sea sólo basado salvo homotopía. Esta dificultad queda salvada por el siguiente resultado, que es consecuencia de [Bau89] II.9.4.

Lema 1.2.8. *Dado un morfismo $f = (f_1, f_0): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ en $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$ tal que $[\Sigma A, *] = 0$ es el grupo trivial y f_0 está basado salvo homotopía, existe un diagrama conmutativo en $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})/\simeq$*

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X/A, *) & \xrightarrow{f'} & (Y/B, *) \end{array}$$

tal que $f': X/A \rightarrow Y/B$ es único salvo homotopía en \mathbf{C} .

Observación 1.2.9. Este resultado puede ser aplicado a la obtención de un operador suspensión

$$\Sigma: [A, B] \rightarrow [\Sigma A, \Sigma B]$$

cuando A y B son objetos basados y $[A, *] = 0 = [\Sigma A, *]$ son los conjuntos punteados triviales. En efecto, en este caso todo morfismo $f: A \rightarrow B$ está basado salvo homotopía y por tanto existe un morfismo $\Sigma f: \Sigma A \rightarrow \Sigma B$, único

salvo homotopía, tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})/\simeq$

$$\begin{array}{ccc} (IA, A \vee A) & \xrightarrow{If} & (IB, B \vee B) \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ (\Sigma A, *) & \xrightarrow{\Sigma f} & (\Sigma B, *) \end{array}$$

Aquí q es la aplicación cociente de la suspensión. El operador suspensión Σ es natural en A y B , y si $A = \Sigma A'$ es ya una suspensión entonces Σ es un homomorfismo, véase [Bau89] II.9.10 (d).

Esta observación y el lema precedente serán de gran utilidad para nosotros ya que habitualmente trabajaremos en categorías donde el objeto inicial $*$ es también final salvo homotopía.

1.3 Finales de Freudenthal

En teoría de homotopía clásica es habitual definir invariantes algebraicos que están en la categoría de grupos, grupos abelianos, u otras categorías algebraicas similares. Sin embargo, el invariante más básico del tipo de homotopía propia de un espacio, su espacio de finales de Freudenthal, reside en la categoría **Top**. Intuitivamente el espacio de finales de Freudenthal de un espacio X mide las diferentes formas que tiene una sucesión de puntos en X de tender a infinito. Por razones técnicas sólo definiremos este invariante sobre una cierta clase de espacios con “buenas propiedades topológicas”. Esto no supone para nosotros restricción alguna ya que esta clase incluye a los CW -complejos conexos localmente compactos.

Definición 1.3.1. Los *continuos generalizados de Peano* (c. g.) son los espacios localmente compactos, localmente conexos, conexos y metrizable. El espacio de *finales de Freudenthal* de un c. g. X se define como el siguiente límite (inverso)

$$\mathfrak{F}(X) = \lim \{ \pi_0(X - K); K \subset X \text{ compacto} \}.$$

Aquí $\pi_0(X - K)$ denota, como de costumbre, al conjunto (finito en este caso) de componentes conexas por caminos de $X - K$ con la topología discreta. El espacio $\mathfrak{F}(X)$ es compacto, metrizable y de dimensión cero; o lo que es lo mismo, homeomorfo a un subespacio cerrado del conjunto de Cantor. Además $\mathfrak{F}(X) = \emptyset$ si y sólo si X es compacto.

Si llamamos **Cantor** a la categoría de subespacios cerrados del conjunto de Cantor y **Topp**_{c.g.} a la subcategoría llena de **Topp** formada por los c. g.,

es fácil ver que tomar espacio de finales define un funtor

$$\mathfrak{F}: \mathbf{Topp}_{c.g.} \longrightarrow \mathbf{Cantor}.$$

Teorema 1.3.2 ([BQ01] I.9.13). *El funtor \mathfrak{F} factoriza a través de la categoría de homotopía*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Topp}_{c.g.} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbf{Cantor} \\ \downarrow & & \nearrow \mathfrak{F} \\ \mathbf{Topp}_{c.g.}/\simeq & & \end{array}$$

Como se ve en el anterior diagrama también denotaremos \mathfrak{F} a la factorización dada por este teorema.

Definición 1.3.3. Un *árbol* es un *CW-complejo* contráctil de dimensión 1. Nosotros además supondremos siempre que los árboles son localmente compactos, y con frecuencia también supondremos que son no compactos.

Observación 1.3.4. Cualquier cerrado del conjunto de Cantor surge como $\mathfrak{F}(T)$ para un cierto árbol T . Es más, la categoría de homotopía propia de los árboles es equivalente a **Cantor** a través del funtor \mathfrak{F} , véase [BQ01] II.1.10.

El espacio $\mathfrak{F}(X)$ puede ser añadido a X para obtener una compactificación de X de la siguiente manera.

Definición 1.3.5. La *compactificación de Freudenthal* de un c. g. X es la unión disjunta de conjuntos $\hat{X} = X \sqcup \mathfrak{F}(X)$ dotada de una topología que pasamos a describir. Dado un abierto $U \subset X$ denotamos $U^{\mathfrak{F}}$ al conjunto formado por los finales $\varepsilon \in \mathfrak{F}(X)$ tales que existen una componente V de U y $K \subset X$ compacto de forma que V es la imagen de ε a través de la aplicación natural del límite inverso $\mathfrak{F}(X) \rightarrow \pi_0(X - K)$. Los conjuntos $U \sqcup U^{\mathfrak{F}}$ forman una base de la topología de \hat{X} .

Las propiedades elementales de la compactificación de Freudenthal se resumen en la siguiente

Proposición 1.3.6. *Si X es un c. g. su compactificación de Freudenthal \hat{X} es un espacio compacto, conexo, localmente conexo y metrizable. Más aún, la compactificación de Freudenthal da lugar a un funtor*

$$\mathbf{Topp}_{c.g.} \rightarrow \mathbf{Top}: X \mapsto \hat{X}$$

junto con dos inmersiones naturales

$$X \hookrightarrow \hat{X} \hookrightarrow \mathfrak{F}(X).$$

De esta forma identificamos a X con un abierto denso de \hat{X} .

Véase [BQ01] I.9 para más detalles sobre la compactificación de Freudenthal.

1.4 *CW-complejos*

Las piezas elementales con las que se construyen los *CW-complejos* en teoría de homotopía propia se definen de la siguiente forma.

Definición 1.4.1. Un *objeto esférico* n -dimensional S_α^n bajo un árbol T ($n \geq 0$) asociado a una aplicación propia $\alpha: A \rightarrow T$ con A discreto se construye pegando una n -esfera en $\alpha(a)$ por el punto base para cada $a \in A$. Esto es, si consideramos una colección $\{S_a^n\}_{a \in A}$ de n -esferas $S^n = S_a^n$ indexada por A el *CW-complejo* S_α^n es el siguiente push-out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & T \\ \downarrow j & & \downarrow \\ \coprod_{a \in A} S_a^n & \longrightarrow & S_\alpha^n \end{array}$$

Aquí j envía $a \in A$ en el punto base de S_a^n .

Existe una retracción canónica $r: S_\alpha^n \rightarrow T$ de la inclusión $T \subset S_\alpha^n$ definida como $r(S_a^n) = \alpha(a)$. Esto dota a S_α^n de estructura de objeto basado en \mathbf{Top}_c^T de forma tal que $\Sigma S_\alpha^n = S_\alpha^{n+1}$.

Como es sabido todo *CW-complejo* conexo posee un modelo reducido y normalizado con su mismo tipo de homotopía ordinario. Este modelo reducido y normalizado tiene una única 0-célula, que tomamos como punto base, y las aplicaciones de pegamiento de las células de dimensión superior parten de coproductos de esferas basadas y preservan el punto base. Sin embargo estos modelos no son los adecuados para el estudio del tipo de homotopía propia de un *CW-complejo* localmente compacto, ya que, si no es compacto, un modelo suyo reducido y normalizado en el sentido anterior nunca será localmente compacto ni tendrá su mismo tipo de homotopía propia. Con el objetivo de salvar este inconveniente introducimos la siguiente clase de *CW-complejos*.

Definición 1.4.2. Fijado un árbol T , un T -complejo es un CW -complejo X de dimensión finita cuyo 1-esqueleto es un objeto esférico $X^1 = S_{\alpha_1}^1$ y tal que su $(n+1)$ -esqueleto X^{n+1} ($n \geq 1$) es la cofibra de una aplicación $f_{n+1}: S_{\alpha_{n+1}}^n \rightarrow X^n$ en \mathbf{Topp}_c^T . Esta aplicación se llama *aplicación de pegamiento* de las $(n+1)$ -células.

Observación 1.4.3. Siguiendo la terminología de [BQ01] un T -complejo es un CW -complejo de dimensión finita, relativo a T , reducido y normalizado, véase [BQ01] IV.5.3. Estos espacios son conexos y localmente compactos ya que T lo es y las aplicaciones de pegamiento son propias, véase [BQ01] IV.3 para más detalles. Todo T -complejo X , por construcción, es un objeto en \mathbf{Topp}_c^T . Además la inclusión $T \subset X$ induce un homeomorfismo en los finales de Freudenthal que nosotros usaremos como identificación $\mathfrak{F}(T) = \mathfrak{F}(X)$.

Los siguientes resultados demuestran que todo CW -complejo X conexo localmente compacto de dimensión finita posee un modelo reducido y normalizado que es un T -complejo para cierto árbol T con los mismos finales que X .

Lema 1.4.4. *Todo CW -complejo conexo localmente compacto de dimensión finita X contiene un subárbol $T \subset X$ tal que la inclusión induce un homeomorfismo en los finales*

Este lema es consecuencia de [BQ01] II.1.9 y IV.2.5.

Proposición 1.4.5. *Dado un CW -complejo X conexo localmente compacto de dimensión finita y un subárbol $T \subset X$ en las condiciones del lema anterior, existe un T -complejo X' y una equivalencia de homotopía $X \simeq X'$ en \mathbf{Topp}_c^T .*

Véase [BQ01] IV.5 para una demostración de esta proposición.

Observación 1.4.6. El papel del árbol T a la hora de encontrar un modelo reducido y normalizado de X no es del todo relevante, en realidad sólo importa cuál sea el espacio $\mathfrak{F}(X)$. Es más, la categoría $\mathbf{Topp}_c^T / \simeq$ sólo depende, salvo equivalencia de categorías, del espacio de finales $\mathfrak{F}(T)$, véanse (1.1.13) (2) y (1.3.4). En efecto, siguiendo a (1.1.13) (2) toda aplicación propia $f: T \rightarrow T'$ entre dos árboles da lugar a un funtor

$$f_*: \mathbf{Topp}_c^T \longrightarrow \mathbf{Topp}_c^{T'}$$

definido por el siguiente diagrama de push-out natural en Y

$$(1.4.A) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & f_*Y \end{array}$$

Este funtor induce otro entre las respectivas categorías de homotopía

$$(1.4.B) \quad f_*: \mathbf{Topp}_c^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{Topp}_c^{T'} / \simeq$$

que sólo depende, salvo equivalencia natural, de la clase de homotopía propia de $f: T \rightarrow T'$ o lo que es lo mismo, siguiendo (1.3.4), de la aplicación inducida en los finales $\mathfrak{F}(f): \mathfrak{F}(T) \rightarrow \mathfrak{F}(T')$. En particular el funtor f_* en (1.4.B) es una equivalencia de categorías si f induce un homeomorfismo $\mathfrak{F}(T) \cong \mathfrak{F}(T')$. Además en este caso \bar{f} en (1.4.A) es una equivalencia de homotopía propia en virtud de (1.2.1). El funtor f_* envía T -complejos en T' -complejos, véanse (1.4.3) y [BQ01] IV.6.3, y por tanto dado un CW -complejo X conexo localmente compacto de dimensión finita y un árbol T' con $\mathfrak{F}(X) \cong \mathfrak{F}(T')$ es posible encontrar un T' -complejo X' y una equivalencia de homotopía propia $X \simeq X'$ que induzca en los finales el homeomorfismo anterior. Aquí usamos la identificación $\mathfrak{F}(T') = \mathfrak{F}(X')$ en (1.4.3).

La noción de T -subcomplejo de un T -complejo, o simplemente de subcomplejo si no hay lugar a confusión, es inmediata. Diremos que (X, A) es un par de T -complejos si X es un T -complejo y A un T -subcomplejo.

Proposición 1.4.7 ([BQ01] IV.3.16). *La inclusión $A \subset X$ de un T -subcomplejo de un T -complejo es una cofibración $A \hookrightarrow X$ en \mathbf{Topp}_c^T .*

En teoría de homotopía propia también existe un teorema de aproximación celular. La definición de aplicación celular que adoptamos aquí es la clásica.

Teorema 1.4.8 (de aproximación celular propio, [BQ01] IV.3.18). *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación T -complejos en \mathbf{Topp}_c^T que es celular en un subcomplejo $A \subset X$, entonces existe una aplicación celular $g: X \rightarrow Y$ en \mathbf{Topp}_c^T que es homotópica a f rel A .*

Observación 1.4.9. El push-out de un diagrama de T -complejos y aplicaciones celulares en \mathbf{Topp}_c^T

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \downarrow i & & \\ & & X \end{array}$$

donde i es la inclusión de un subcomplejo, es también un T -complejo, véase [BQ01] IV.6.3. Además es funtor cilindro I_T se restringe a la subcategoría $\mathbf{CW}^T \subset \mathbf{Topp}_c^T$ formada por los T -complejos y las aplicaciones celulares, y las aplicaciones naturales $i_0, i_1: X \hookrightarrow I_T X$ son inclusiones de subcomplejos para todo T -complejo X , por tanto las construcciones definidas en (1.2.5)

también se restringen a \mathbf{CW}^T . Además el teorema de aproximación celular propio (1.4.8) demuestra que dos aplicaciones celulares entre T -complejos $f, g: X \rightarrow Y$ homotópicas en \mathbf{Topp}_c^T lo son a través de una homotopía $I_T X \rightarrow Y$ que es además una aplicación celular en \mathbf{CW}^T .

El siguiente resultado prueba que el objeto inicial de \mathbf{CW}^T , el árbol T , es también final salvo homotopía.

Proposición 1.4.10 ([BQ01] IV.6.4). *Si X es un T -complejo el conjunto de clases de homotopía propia relativas al árbol $[X, T]^T$ es unitario.*

En particular todo T -complejo está basado de manera única salvo homotopía en \mathbf{Topp}_c^T . Este no es el caso óptimo en el que el objeto inicial es también final (como en la categoría de espacios punteados) pero aún permite desarrollar de forma cómoda la teoría de homotopía propia de los T -complejos, véanse (1.2.6) (1), (1.2.8) y (1.2.9).

Capítulo 2

Álgebra controlada en el infinito

Para definir los análogos en teoría de homotopía propia de los grupos de homotopía y (co)homología es necesario introducir estructuras algebraicas más generales que los tradicionales grupos y módulos sobre un anillo. Las nuevas estructuras de corte “abeliano” son los ringoides y sus módulos. Los ringoides son generalizaciones de los anillos. Formalmente se definen como categorías cuyos conjuntos de morfismos son grupos abelianos de forma que la composición es bilineal. La categoría de módulos sobre un ringoide es una categoría de funtores que parten del ringoide opuesto y llegan a la categoría de grupos abelianos. Estos conceptos serán tratados más detalladamente en la Sección 2.1 tomando como referencia principal [Mit72].

En la Sección 2.2 se considerarán los ringoides relevantes en teoría de homotopía propia introducidos en [BQ01]. Los objetos de estas categorías son módulos libres sobre un anillo conmutativo cuyas bases están distribuidas a lo largo de un árbol, y los morfismos satisfacen condiciones de control determinadas por el espacio de finales del árbol. Categorías equivalentes a éstas han sido también consideradas en [FW72] y [CP95]. En [ACMQ03], siguiendo el lenguaje de [FW72], probamos ciertas propiedades homológicas de estas categorías que son de interés en teoría de homotopía propia. Nosotros aquí presentamos estos resultados traducidos al lenguaje de [BQ01] junto con algunas de sus consecuencias. En el Capítulo 7 realizamos un estudio más profundo de los módulos sobre estos ringoides, lo que justifica que hayamos optado por exponer minuciosamente las propiedades básicas de los módulos sobre ringoides en la primera sección de este capítulo.

Los análogos no abelianos de los ringoides y sus módulos son las teorías de cogrupos y sus modelos, que se definen en la Sección 2.3. Las teorías de

cogrupos usadas en teorías de homotopía propia se definen en la Sección 2.4 siguiendo [BQ01] de forma similar a los ringoides de la Sección 2.2. Para ello se usan grupos libres no abelianos y estructuras relacionadas en lugar de módulos libres.

2.1 Ringoides y módulos

En esta sección resumiremos los aspectos básicos de la teoría de ringoides y módulos sobre ringoides siguiendo [Mit72].

Definición 2.1.1. Un *ringoide* es una categoría \mathbf{R} cuyos conjuntos de morfismos $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(X, Y)$ poseen estructura natural de grupo abeliano. La naturalidad equivale a decir que la composición es bilineal. El conjunto de endomorfismos $\text{End}_{\mathbf{R}}(X) = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(X, X)$ de un objeto X de \mathbf{R} tiene estructura de anillo con el producto dado por la composición. Recíprocamente cualquier anillo R se identifica con el ringoide \mathbf{R} con un solo objeto $*$ cuyo anillo de endomorfismos es $\text{End}_{\mathbf{R}}(*) = R$. Otro de los ejemplos más importantes de ringoides son las categorías aditivas. Una *categoría aditiva* \mathbf{A} es un ringoide con biproductos finitos y objeto cero. El *biproducto* o *suma directa* de dos objetos X e Y será denotado $X \oplus Y$. Este objeto viene equipado con inclusiones y proyecciones canónicas de los factores

$$X \begin{array}{c} \xleftarrow{p_1} \\ \xrightarrow{i_1} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xleftarrow{p_2} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} Y$$

que satisfacen $p_1 i_1 = 1$, $p_2 i_2 = 1$ y $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1$.

Los ejemplos de categorías aditivas que debemos tener en mente por el momento son las categorías de módulos libres o proyectivos sobre un anillo, con o sin ciertas condiciones sobre el cardinal de un conjunto de generadores (por ejemplo finitamente generados). Estas condiciones van encaminadas a hacer que la categoría fuese pequeña. En la siguiente sección se definirán las categorías aditivas de mayor relevancia para nosotros. También es aditiva la categoría \mathbf{Ab} de grupos abelianos.

Si \mathbf{R} es un ringoide la categoría opuesta \mathbf{R}^{op} también lo es, dotando a los conjuntos de morfismos $\text{Hom}_{\mathbf{R}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(Y, X)$ de la misma estructura de grupo abeliano. Es más, si \mathbf{A} es una categoría aditiva \mathbf{A}^{op} también lo es y tanto el objeto cero como los biproductos coinciden.

Definición 2.1.2. Un funtor entre ringoides $\mathbb{F}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ se dice *aditivo* si las aplicaciones que induce entre los conjuntos de morfismos son homomorfismos de grupos abelianos. Un *\mathbf{R} -módulo a derecha* es un funtor aditivo

$\mathcal{M}: \mathbf{R}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Los morfismos de \mathbf{R} -módulos a derecha son las transformaciones naturales. Si el ringoide \mathbf{R} es pequeño entonces la categoría $\mathbf{mod}(\mathbf{R})$ de \mathbf{R} -módulos a derecha es una categoría abeliana bien definida. Si \mathbf{R} es un ringoide con un sólo objeto $*$ esta categoría coincide con la usual de $\text{End}_{\mathbf{R}}(*)$ -módulos a derecha.

Los \mathbf{R} -módulos a izquierda son los \mathbf{R}^{op} -módulos a derecha, por tanto, “dualizando”, cualquier resultado sobre módulos a derecha tiene su traducción para módulos a izquierda. En el resto de esta sección todos los ringoides serán pequeños y sus módulos serán a derecha, a menos que precisemos lo contrario.

Definición 2.1.3. Existe una inclusión llena de categorías $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{R})$ que envía un objeto X al correspondiente functor representable $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(-, X)$. Nosotros identificaremos X con su imagen a través de esta inclusión $X = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(-, X)$. Estos \mathbf{R} -módulos se denominan *libres finitamente generados* (f. g.) y, en virtud del lema de Yoneda, son proyectivos. Es más, los \mathbf{R} -módulos libres f. g. son un conjunto de generadores proyectivos pequeños de la categoría abeliana $\mathbf{mod}(\mathbf{R})$.

Un \mathbf{R} -módulo se dice *finitamente presentado* (f. p.) si es el conúcleo de un morfismo entre sumas directas finitas de módulos libres f. g. El conúcleo de un morfismo entre módulos f. p. es también f. p. En particular los sumandos directos de módulos f. p. son a su vez f. p. Denotaremos $\mathbf{fp}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{mod}(\mathbf{R})$ a la subcategoría llena de los \mathbf{R} -módulos f. p.

Si \mathbf{A} es una categoría aditiva pequeña todo \mathbf{A} -módulo f. p. \mathcal{M} es el conúcleo en $\mathbf{mod}(\mathbf{A})$ de un morfismo $\varphi: X_1 \rightarrow X_0$ en \mathbf{A} . Es fácil ver que si $\mathcal{N} = \text{Coker}[\psi: Y_1 \rightarrow Y_0]$ es otro \mathbf{A} -módulo f. p. cualquier morfismo $\tau: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ está inducido por un morfismo $\tau_0: X_0 \rightarrow Y_0$ tal que existe $\tau_1: X_1 \rightarrow Y_1$ con $\tau_0\varphi = \psi\tau_1$. Más aún, otro morfismo $\tau'_0: X_0 \rightarrow Y_0$ representa también τ si y sólo si existe $\eta: X_0 \rightarrow Y_1$ con $\tau_0 + \psi\eta = \tau'_0$.

Todo lo anterior puede ser formalizado en la siguiente proposición, para ello consideramos la categoría de pares $\mathbf{Pair}(\mathbf{A})$ definida en (1.1.8). En esta categoría definimos la siguiente relación de equivalencia natural: dos morfismos $\tau = (\tau_0, \tau_1): \varphi \rightarrow \psi$ son equivalentes $\tau \sim \tau'$ si existe $\eta: X_0 \rightarrow Y_1$ con $\tau_0 + \psi\eta = \tau'_0$.

Proposición 2.1.4. *El functor $\text{Coker}: \mathbf{Pair}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{A})$ que envía un morfismo φ de \mathbf{A} a su conúcleo $\text{Coker}\varphi$ en la categoría de \mathbf{A} -módulos factoriza a través de la categoría cociente $\mathbf{Pair}(\mathbf{A})/\sim$ y el functor inducido $\text{Coker}: \mathbf{Pair}(\mathbf{A})/\sim \rightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{A})$ es una equivalencia de categorías.*

Observación 2.1.5. Un funtor aditivo $\mathbb{F}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ da lugar a dos funtores de “cambio de coeficientes”

$$\mathbb{F}^*: \mathbf{mod}(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbb{F}_*: \mathbf{mod}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{S}).$$

El primero viene dado por la composición a derecha con \mathbb{F} , es decir $\mathbb{F}^*\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}^*\tau = \tau\mathbb{F}$. El segundo \mathbb{F}_* se caracteriza por ser adjunto a izquierda de \mathbb{F}^* . Tal adjunto existe y se construye como la extensión aditiva de Kan a izquierda a lo largo de \mathbb{F} , véase [Mit72] 6. Más aún, \mathbb{F}_* encaja en el siguiente diagrama conmutativo

$$(2.1.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\mathbb{F}} & \mathbf{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{mod}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\mathbb{F}_*} & \mathbf{mod}(\mathbf{S}) \end{array}$$

Al ser \mathbb{F}_* un adjunto a izquierda es también exacto a derecha, compárese con el dual de [HS71] II.7.7. En particular tanto \mathbb{F}^* como \mathbb{F}_* se restringen a las subcategorías de módulos f. p. Es más, si \mathbb{F} es fiel y lleno \mathbb{F}_* también lo es y además en este caso $\mathbb{F}^*\mathbb{F}_*$ es naturalmente equivalente a la identidad, véase [Bor94] 3.4.1. Esto puede ser comprobado de forma directa usando que todo módulo admite una resolución proyectiva por sumas directas (arbitrarias) de módulos libres f. g.

Definición 2.1.6. Dos ringoides son *equivalentes Morita* si sus correspondientes categorías de módulos son equivalentes como categorías abelianas.

Es interesante conocer cuándo un ringoide es equivalente Morita a otro con un sólo objeto ya que los anillos son estructuras algebraicas más habituales en la literatura. Las siguientes dos proposiciones nos proporcionan criterios que serán de utilidad más adelante.

Si identificamos el anillo de endomorfismos $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(X)$ de un objeto X en un ringoide \mathbf{R} con la subcategoría llena de \mathbf{R} cuyo único objeto es X el cambio de coeficientes \mathbb{F}^* inducido por la inclusión llena $\mathbb{F}: \mathbf{End}_{\mathbf{R}}(X) \subset \mathbf{R}$ es el funtor de evaluación

$$(2.1.B) \quad ev_X = \mathbb{F}^*: \mathbf{mod}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(X)): \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(X).$$

Proposición 2.1.7. Si \mathbf{R} es la categoría de módulos libres f. g. sobre un anillo R el funtor $ev_R: \mathbf{mod}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{mod}(R)$ es una equivalencia de categorías abelianas.

Esta proposición es bien conocida y su demostración es inmediata. La siguiente es consecuencia de [Mit72] 8.1 y será de mayor utilidad para nosotros.

Proposición 2.1.8. *Si todos los objetos de \mathbf{R} son retracts de un cierto objeto X entonces ev_X es una equivalencia aditiva de categorías abelianas.*

Observación 2.1.9. Supongamos que $\mathbb{F}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ es un funtor aditivo y que existen objetos $X \in Ob\mathbf{R}$ e $Y \in Ob\mathbf{S}$ que satisfacen la proposición anterior. Si consideramos el $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$ - $\text{End}_{\mathbf{S}}(Y)$ -bimódulo $\mathbf{S}(Y, \mathbb{F}X)$ el siguiente diagrama de funtores conmuta salvo equivalencia natural,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{mod}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\mathbb{F}_*} & \mathbf{mod}(\mathbf{S}) \\ ev_X \downarrow \sim & & \sim \downarrow ev_Y \\ \mathbf{mod}(\text{End}_{\mathbf{R}}(X)) & \xrightarrow[-\otimes_{\text{End}_{\mathbf{R}}(X)} \mathbf{S}(Y, \mathbb{F}X)]{} & \mathbf{mod}(\text{End}_{\mathbf{S}}(Y)) \end{array}$$

ya que basta comprobarlo para X , y en este caso

$$\begin{aligned} ev_X(X) \otimes_{\text{End}_{\mathbf{R}}(X)} \mathbf{S}(Y, \mathbb{F}X) &= \text{End}_{\mathbf{R}}(X) \otimes_{\text{End}_{\mathbf{R}}(X)} \mathbf{S}(Y, \mathbb{F}X) \\ &\simeq \mathbf{S}(Y, \mathbb{F}X) \\ &= ev_Y \mathbb{F}_* X. \end{aligned}$$

En un lenguaje más técnico de teoría de categorías la definición de ringoide en (2.1.1) coincide con la de categoría enriquecida sobre la categoría simétrica monoidal \mathbf{Ab} de los grupos abelianos, véase [Bor94] 6.2. La estructura monoidal en \mathbf{Ab} viene dada por el producto tensorial habitual de grupos abelianos. También podemos considerar enriquecimientos sobre la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo cualquiera y definir de esta forma los “ringoides sobre un anillo”. Más explícitamente,

Definición 2.1.10. Dado un anillo conmutativo R un R -ringoide es una categoría \mathbf{R} cuyos conjuntos de morfismos están dotados de estructura de R -módulo de forma que la composición es R -bilineal. Un R -ringoide con un solo objeto es una R -álgebra en el sentido habitual, es más, si \mathbf{R} es un R -ringoide el anillo de endomorfismos $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$ de un objeto X de \mathbf{R} posee estructura de R -álgebra dada por el homomorfismo $R \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(X): r \mapsto r \cdot 1_X$.

Un \mathbb{Z} -ringoide es simplemente un ringoide en el sentido de (2.1.1), es más, todo R -ringoide es también un ringoide ya que todo R -módulo es un grupo abeliano.

Una R -categoría aditiva es un R -ringoide que además es una categoría aditiva. Ejemplos de éstas son las categorías de módulos libres o proyectivos sobre R , con o sin ciertas condiciones sobre el cardinal de un conjunto de generadores (por ejemplo finitamente generados).

Módulos sobre un R -ringoide \mathbf{R} y morfismos entre ellos se definen como en (2.1.2) usando sólo la estructura subyacente de ringoide de \mathbf{R} . También sería razonable definir los \mathbf{R} -módulos como funtores $\mathbf{R}^{op} \rightarrow \mathbf{mod}(R)$ que induzcan homomorfismos de R -módulos en los conjuntos de morfismos. En el apartado (2) de la siguiente observación mostramos que esta definición alternativa es equivalente a la primera.

Observación 2.1.11. (1). El concepto de R -ringoide antes definido coincide con el de R -categoría en [Mit72] 11.

- (2). Los módulos sobre un R -ringoide \mathbf{R} y sus morfismos toman valores de forma natural en la categoría de R -módulos. En efecto, dado un \mathbf{R} -módulo \mathcal{M} y un objeto X de \mathbf{R} el $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$ -módulo $\mathcal{M}(X)$ es también un R -módulo ya que $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$ es una R -álgebra. Si $\tau: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un morfismo de \mathbf{R} -módulos el homomorfismo de grupos abelianos inducido $\tau: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X)$ es también homomorfismo de $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$ -módulos y por tanto de R -módulos. Por último si $\varphi: X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathbf{R} el homomorfismo de grupos abelianos $\mathcal{M}(\varphi): \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ es también un homomorfismo de R -módulos, en efecto dados $y \in \mathcal{M}(Y)$ y $r \in R$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\varphi)(r \cdot y) &= \mathcal{M}(\varphi)\mathcal{M}(r \cdot 1_Y)(y) \\ &= \mathcal{M}(r \cdot 1_Y\varphi)(y) \\ &= \mathcal{M}(r \cdot \varphi)(y) \\ &= \mathcal{M}(\varphi(r \cdot 1_X))(y) \\ &= \mathcal{M}(r \cdot 1_X)\mathcal{M}(\varphi)(y) \\ &= r \cdot \mathcal{M}(\varphi)(y). \end{aligned}$$

2.2 Módulos libres controlados en el infinito

En la sección anterior destacamos como ejemplos de categorías aditivas las de módulos libres sobre un anillo. En esta sección modificamos estas categorías dotando a sus objetos de cierto control en el infinito de un árbol y exigiendo a los homomorfismos que respeten esta estructura adicional. Son estas nuevas categorías aditivas las que juegan un papel relevante en teoría de homotopía propia.

Definición 2.2.1. Sea T un árbol y R un anillo conmutativo. Un R -módulo libre T -controlado es un par $R\langle A \rangle_\alpha$ formado por un R -módulo libre $R\langle A \rangle$ con base el conjunto discreto A y una aplicación propia $\alpha: A \rightarrow T$ llamada *función de altura*. Más generalmente, si α no es necesariamente propia diremos que $R\langle A \rangle_\alpha$ es un R -módulo libre T -controlado grande. Un *homomorfismo controlado* $\varphi: R\langle A \rangle_\alpha \rightarrow R\langle B \rangle_\beta$ es un homomorfismo entre los R -módulos subyacentes tal que para todo entorno U de $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$ en \hat{T} existe otro entorno $V \subset U$ de ε en \hat{T} que satisface

$$\varphi(\alpha^{-1}(V)) \subset R\langle \beta^{-1}(U) \rangle.$$

La categoría $\mathbf{M}_R^g(T)$ de R -módulos libres T -controlados grandes y homomorfismos controlados es una R -categoría aditiva. La suma directa de dos objetos viene dada por

$$R\langle A \rangle_\alpha \oplus R\langle B \rangle_\beta = R\langle A \sqcup B \rangle_{(\alpha, \beta)},$$

donde $A \sqcup B$ es la unión disjunta de las bases y $(\alpha, \beta): A \sqcup B \rightarrow T$ está definida como α sobre A y β sobre B . La estructura de R -módulo en los conjuntos de morfismos de esta categoría viene dada por la estructura habitual en los morfismos de la categoría de R -módulos. La subcategoría llena $\mathbf{M}_R(T)$ formada por los R -módulos libres T -controlados (es decir, no grandes) es una R -categoría aditiva pequeña, por tanto tiene sentido considerar su categoría de módulos.

El *soporte* de un R -módulo libre T -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ se define como el conjunto derivado de $\alpha(A)$ dentro de \hat{T} , es decir $\alpha(A)' \subset \hat{T}$. Al ser A discreto y α propia todos los puntos del soporte son finales de Freudenthal $\alpha(A)' \subset \mathfrak{F}(T)$.

Observación 2.2.2. (1). La categoría $\mathbf{M}_R(T)$ está definida de forma equivalente a la dada aquí en [BQ01] II.4.14, compárese también con [BQ01] III.1.3 y III.4.7. Además es equivalente a la categoría de “módulos libres” sobre el árbol de anillos que vale R en todos los vértices de T y cuyos morfismos de enlace son todos la identidad. Este hecho es un caso particular de la observación hecha en [BQ01] VIII.3.5. Véanse [Tay71] y [FW72] para las definiciones de árboles de anillos y sus módulos. Cuando $R = \mathbb{Z}$ algunas propiedades homológicas de la categoría de módulos libres sobre el anterior árbol de anillos son estudiadas en [ACMQ03]. Las aplicaciones fundamentales de dichos resultados en álgebra controlada se enuncian más adelante (Teorema 2.2.14 y sus corolarios) ya traducidas al lenguaje de módulos sobre el ringoide $\mathbf{M}_R(T)$. Tal traducción de los resultados de [ACMQ03] ha aparecido ya en [BQ01] V.5.

- (2). Tal y como se comenta en la observación que sigue a [BQ01] III.4.7, la categoría $\mathbf{M}_R(T)$ es equivalente a $\mathcal{B}(\hat{T}, \mathfrak{F}(T); R)$ en [CP95]. En particular $\mathbf{M}_R(T)$ sólo depende de $\mathfrak{F}(T)$, salvo equivalencia de categorías aditivas, de hecho de R -categorías aditivas, que preserva soportes, véanse [CP95] 1.23 y 1.24. En la siguiente observación damos una prueba alternativa de este hecho.
- (3). Toda aplicación propia entre árboles $f: T \rightarrow T'$ induce un funtor aditivo

$$\mathbb{F}^f: \mathbf{M}_R^g(T) \longrightarrow \mathbf{M}_R^g(T')$$

definido como $\mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha = R\langle A \rangle_{f\alpha}$ y $\mathbb{F}^f \varphi = \varphi$ para todo homomorfismo controlado φ . Este funtor se restringe a las subcategorías llenas $\mathbf{M}_R(T)$ y $\mathbf{M}_R(T')$, y además es compatible con las estructuras de R -módulo en los conjuntos de morfismos. Más aún, salvo equivalencia natural, el funtor \mathbb{F}^f sólo depende de la clase de homotopía propia de f . En efecto, si $f': T \rightarrow T'$ es homotópica en \mathbf{Topp} a f la equivalencia natural $\mathbb{F}^f \simeq \mathbb{F}^{f'}$ viene dada por el isomorfismo controlado

$$\mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha = R\langle A \rangle_{f\alpha} \simeq R\langle A \rangle_{f'\alpha} = \mathbb{F}^{f'} R\langle A \rangle_\alpha$$

que es la identidad en el R -módulo subyacente $R\langle A \rangle$. Además si $R\langle A \rangle_\alpha$ es un R -módulo libre T -controlado es sencillo comprobar que los soportes de $R\langle A \rangle_\alpha$ y $\mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha$ satisfacen la siguiente relación

$$f(\alpha(A)') = (f\alpha)(A)'.$$

Esto junto con (1.3.4) implica que las categorías $\mathbf{M}_R^g(T)$ y $\mathbf{M}_R(T)$ sólo dependen de $\mathfrak{F}(T)$, salvo equivalencia natural de R -categorías aditivas que preserva soportes.

Claramente el funtor \mathbb{F}^f es fiel. También se puede comprobar de forma sencilla usando la definición de homomorfismo controlado que si f induce una aplicación inyectiva en los finales $\mathfrak{F}(f): \mathfrak{F}(T) \hookrightarrow \mathfrak{F}(T')$ entonces el funtor \mathbb{F}^f es también lleno.

- (4). Si T es un árbol compacto el funtor de olvido que envía un R -módulo libre T -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ a su R -módulo subyacente $R\langle A \rangle$ da lugar a una equivalencia entre $\mathbf{M}_R(T)$ y la categoría de R -módulos libres finitamente generados.
- (5). El soporte de una suma directa $R\langle A \rangle_\alpha \oplus R\langle B \rangle_\beta$ es la unión de los soportes de sus factores, esto es

$$(\alpha(A) \cup \beta(B))' = \alpha(A)' \cup \beta(B)'.$$

- (6). La inclusión llena $\mathbf{M}_R(T) \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T))$ definida en (2.1.3) puede extenderse a un functor fiel $\mathbf{M}_R^g(T) \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T))$ aunque en principio no lleno definiendo la imagen del R -módulo libre T -controlado grande $R\langle A \rangle_\alpha$ como la restricción del functor representable

$$\mathbf{M}_R^g(T)(-, R\langle A \rangle_\alpha)$$

a la subcategoría llena $\mathbf{M}_R(T)^{op} \subset \mathbf{M}_R^g(T)^{op}$. En relación con este nuevo functor tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Dada una aplicación propia entre dos árboles $f: T \rightarrow T'$ el siguiente diagrama de funtores es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_R^g(T) & \xrightarrow{\mathbb{F}^f} & \mathbf{M}_R^g(T') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T)) & \xrightarrow{\mathbb{F}_*^f} & \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T')) \end{array}$$

Compárese este enunciado con (2.1.A). En la demostración de esta proposición usaremos el siguiente

Lema 2.2.4. *Si $f: T \rightarrow T'$ es una aplicación propia entre dos árboles, $R\langle A \rangle_\alpha$ está en $\mathbf{M}_R^g(T)$ y $R\langle B' \rangle_{\beta'}$ está en $\mathbf{M}_R(T')$, dado un homomorfismo controlado $\varphi: R\langle B' \rangle_{\beta'} \rightarrow \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha$, existe un subconjunto $\bar{A} \subset A$ tal que si $\bar{\alpha}$ es α restringida a \bar{A} entonces $R\langle \bar{A} \rangle_{\bar{\alpha}}$ está en $\mathbf{M}_R(T)$ y si $i: R\langle \bar{A} \rangle_{\bar{\alpha}} \hookrightarrow R\langle A \rangle_\alpha$ es la inclusión, que admite retracción, φ factoriza a través del monomorfismo $\mathbb{F}^f i$.*

Demostración. Si definimos $\bar{A} \subset A$ como el menor subconjunto tal que $\varphi(B') \subset R\langle \bar{A} \rangle$ basta con comprobar que $R\langle \bar{A} \rangle_{\bar{\alpha}}$ está en $\mathbf{M}_R(T)$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $t \in T$ tal que $\bar{\alpha}^{-1}(t)$ contiene un subconjunto infinito numerable $\{a_n\}_{n \geq 0}$, entonces podemos tomar una sucesión $\{b_n\}_{n \geq 0} \subset B'$ tal que la expansión lineal de $\varphi(b_n)$ tiene a a_n con coeficiente no nulo ($n \geq 0$). Al ser $\beta': T' \rightarrow T'$ propia podemos suponer sin pérdida de generalidad, tomando subsucesiones si fuera necesario, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta'(b_n) = \varepsilon \in \mathfrak{F}(T')$. Usando la definición de homomorfismo controlado es fácil ver que esto implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f\alpha(a_n) = \varepsilon \in \mathfrak{F}(T')$, pero $f\alpha(a_n) = f(t) \in T'$ para todo $n \geq 0$, con lo cual llegamos a una contradicción. \square

Demostración de (2.2.3). Sea $R\langle A \rangle_\alpha$ un objeto cualquiera de $\mathbf{M}_R^g(T)$ y

$$\mathbf{M}_R(T) \downarrow R\langle A \rangle_\alpha$$

la categoría cuyos objetos son los homomorfismos controlados $R\langle B \rangle_\beta \rightarrow R\langle A \rangle_\alpha$ que parten de un objeto en $\mathbf{M}_R(T)$. Los morfismos son sencillamente triángulos conmutativos de homomorfismos controlados

$$\begin{array}{ccc} R\langle B \rangle_\beta & \xrightarrow{\quad} & R\langle \bar{B} \rangle_{\bar{\beta}} \\ & \searrow & \swarrow \\ & R\langle A \rangle_\alpha & \end{array}$$

Esta categoría no es necesariamente filtrante, a diferencia de otras similares que consideramos en (5.2.6), ya que $\mathbf{M}_R(T)$ no tiene todos los coequalizadores, sin embargo esta dificultad no es relevante. Es más, si para todo ringoide \mathbf{R} denotamos $Y: \mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{R})$ a la inclusión llena de (2.1.3) y $F: \mathbf{M}_R(T) \downarrow R\langle A \rangle_\alpha \rightarrow \mathbf{M}_R(T)$ es el funtor que envía $R\langle B \rangle_\beta \rightarrow R\langle A \rangle_\alpha$ a $R\langle B \rangle_\beta$, entonces como es bien sabido

$$R\langle A \rangle_\alpha = \text{colim } YF.$$

Análogamente podemos considerar la categoría $\mathbf{M}_R(T') \downarrow \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha$ y el funtor $F': \mathbf{M}_R(T') \downarrow \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha \rightarrow \mathbf{M}_R(T')$ de forma que

$$\mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha = \text{colim } YF'.$$

Por ser \mathbb{F}^f exacto a derecha preserva colímites, en particular

$$\mathbb{F}_*^f R\langle A \rangle_\alpha = \text{colim } \mathbb{F}_*^f YF = \text{colim } Y\mathbb{F}^f F,$$

aquí usamos (2.1.A) para la segunda igualdad.

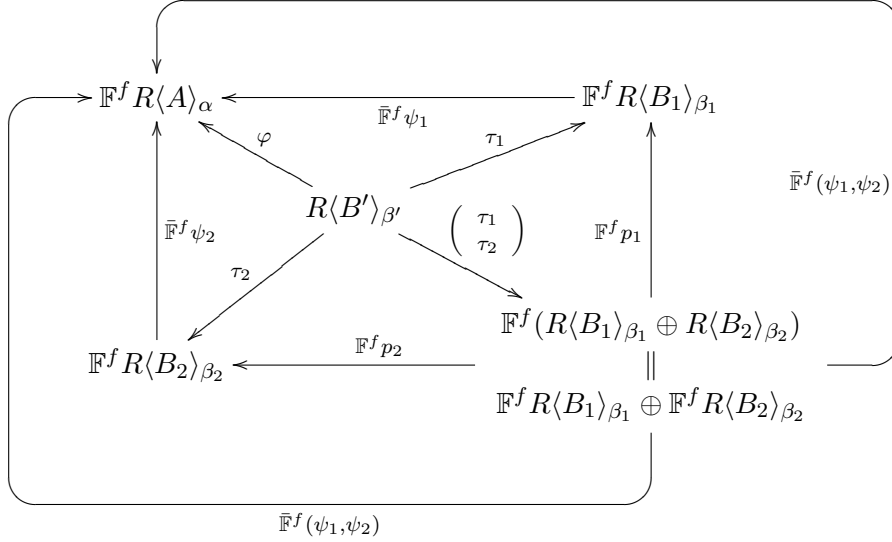
Se ve claramente que \mathbb{F}^f da lugar a un funtor $\bar{\mathbb{F}}^f: \mathbf{M}_R(T) \downarrow R\langle A \rangle_\alpha \rightarrow \mathbf{M}_R(T') \downarrow \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha$ que satisface $F'\bar{\mathbb{F}}^f = \mathbb{F}^f F$. Este funtor es final en el sentido de la primera definición de [CP89] 2.3. En efecto, en virtud del lema anterior, dado un objeto cualquiera $\varphi: R\langle B' \rangle_{\beta'} \rightarrow \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha$ en la llegada de $\bar{\mathbb{F}}^f$ existe un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R\langle B' \rangle_{\beta'} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}^f R\langle \bar{A} \rangle_{\bar{\alpha}} \\ & \searrow \varphi & \swarrow \bar{\mathbb{F}}^f i = \mathbb{F}^f i \\ & \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha & \end{array}$$

por tanto la categoría $\varphi \downarrow \bar{\mathbb{F}}^f$ considerada en [CP89] es no vacía. Más aún, al ser \mathbb{F}^f aditivo todo diagrama conmutativo de homomorfismos controlados

$$\begin{array}{ccccc} & & R\langle B' \rangle_{\beta'} & & \\ & \swarrow \tau_1 & \downarrow \varphi & \searrow \tau_2 & \\ \mathbb{F}^f R\langle B_1 \rangle_{\beta_1} & \xrightarrow{\bar{\mathbb{F}}^f \psi_1} & \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_\alpha & \xleftarrow{\bar{\mathbb{F}}^f \psi_2} & \mathbb{F}^f R\langle B_2 \rangle_{\beta_2} \end{array}$$

puede ser extendido de la siguiente manera



así que la categoría $\varphi \downarrow \bar{\mathbb{F}}^f$ es conexa, con lo cual terminamos de ver que $\bar{\mathbb{F}}^f$ es final tal como dijimos. Aplicando ahora [CP89] 2.3 Proposición 1 obtenemos una identificación canónica

$$\mathbb{F}_*^f R\langle A \rangle_{\alpha} = \operatorname{colim} Y \mathbb{F}^f F = \operatorname{colim} Y F' \bar{\mathbb{F}}^f = \operatorname{colim} Y F' = \mathbb{F}^f R\langle A \rangle_{\alpha},$$

y el resultado se sigue. \square

La siguiente proposición muestra que los R -módulos libres T -controlados están clasificados por el rango de sus R -módulos libres subyacentes y por su soporte.

Proposición 2.2.5. *Dos R -módulos libres T -controlados $R\langle A \rangle_{\alpha}$ y $R\langle B \rangle_{\beta}$ son isomorfos si y sólo si las dos siguientes condiciones se satisfacen:*

- (1). *Los R módulos subyacentes tienen el mismo rango $A \approx B$.*
- (2). *Ambos objetos tienen el mismo soporte $\alpha(A)' = \beta(B)'$.*

Si los soportes de ambos objetos son no vacíos la condición (1) se satisface de manera automática. Es más, cualquier conjunto compacto $K \subset \mathfrak{F}(T)$ es el soporte de algún R -módulo libre T -controlado.

En la prueba de esta proposición usaremos el siguiente

Lema 2.2.6. *Dado un homomorfismo controlado inyectivo $\varphi: R\langle A \rangle_{\alpha} \rightarrow R\langle B \rangle_{\beta}$ se tiene que $\alpha(A)' \subset \beta(B)'$.*

Demostración. Para cualquier $e \in \alpha(A)'$ podemos tomar una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(a_n) = e$. Al ser φ inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún $b_n \in B$ que aparece con coeficiente no nulo en $\varphi(a_n)$. Por definición de homomorfismo controlado $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(b_n) = e$, por tanto $e \in \beta(B)'$ y la inclusión del enunciado se tiene. \square

Demostración de (2.2.5). El caso $R = \mathbb{Z}$ se sigue de [BQ01] II.4.5 y II.4.15. En general la condición (1) es necesaria, ya que todo isomorfismo controlado es un isomorfismo entre los R -módulos subyacentes. Más aún, la condición (2) es necesaria por (2.2.6).

Si $\alpha(A)' = \alpha(B)' = \emptyset$ entonces A y B son ambos finitos y si tienen el mismo cardinal cualquier isomorfismo $R\langle A \rangle \simeq R\langle B \rangle$ es un isomorfismo controlado $R\langle A \rangle_\alpha \simeq R\langle B \rangle_\beta$. Si $\alpha(A)' = \alpha(B)' \neq \emptyset$ entonces A y B son infinitos numerables, por tanto $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ y $\mathbb{Z}\langle B \rangle$ tienen el mismo rango. Como la proposición es cierta para $R = \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo controlado $\varphi: \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \simeq \mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta$. Ahora es sencillo comprobar que $\varphi \otimes R: R\langle A \rangle_\alpha \simeq R\langle B \rangle_\beta$ es un isomorfismo de R -módulos libres T -controlados.

Finalmente dado $K \subset \mathfrak{F}(T)$ compacto, si $\mathbb{Z}\langle C \rangle_\gamma$ es un \mathbb{Z} -módulo libre T -controlado con soporte K entonces el soporte de $R\langle C \rangle_\gamma$ es también K ya que sólo depende de γ . Con esto concluye la prueba de (2.3). \square

El siguiente resultado se sigue directamente de la Observación 2.2.2 (3) y la Proposición 2.2.5.

Corolario 2.2.7. *Dado un árbol no compacto T , salvo isomorfismo, la R -álgebra de endomorfismos de un R -módulo libre T -controlado arbitrario con soporte $\mathfrak{F}(T)$ sólo depende del espacio de finales $\mathfrak{F}(T)$.*

Definición 2.2.8. Como consecuencia del corolario anterior podemos definir la R -álgebra $R(\mathfrak{F})$ para $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$ y T un árbol no compacto como la R -álgebra de endomorfismos de un R -módulo libre T -controlado cualquiera con soporte \mathfrak{F} . El álgebra $R(\mathfrak{F})$ está por tanto bien definida para todo subespacio cerrado no vacío \mathfrak{F} del conjunto de Cantor, véase (1.3.4). Para el conjunto vacío definimos $R(\emptyset) = R$.

Observación 2.2.9. El álgebra $R(\mathfrak{F})$ puede ser descrita como una R -álgebra de matrices infinitas de la siguiente manera. Sea $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ el conjunto discreto de los enteros no negativos. Podemos identificar \mathbb{N}_0 con el conjunto (numerable) de los vértices del árbol T . La R -álgebra $R(\mathfrak{F})$ está formada por las matrices cuadradas indexadas por \mathbb{N}_0 con entradas en R , $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$, tales que si $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}_0$ son sucesiones de vértices de T convergentes en \hat{T} a puntos diferentes entonces el vector

$(a_{i_n j_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ tiene a lo más un número finito de entradas no nulas. El producto en $R(\mathfrak{F})$ es el producto ordinario de matrices. Lo mismo ocurre con el producto de una matriz por un escalar de R . Esta descripción se sigue de que si $\delta: \mathbb{N}_0 \subset T$ es la inclusión del conjunto de vértices entonces el R -módulo libre T -controlado $R\langle \mathbb{N}_0 \rangle_\delta$ tiene soporte \mathfrak{F} .

Si $\mathfrak{F} = *$ es un solo punto podemos tomar $T = \mathbb{R}_+$ una semirrecta cuyo conjunto de vértices es \mathbb{N}_0 y la anterior descripción prueba que $R(*)$ coincide con la R -álgebra $\text{RCFM}(R)$ de matrices finitas por filas y por columnas (o localmente finitas) con entradas en R . Una matriz $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ es *finita por filas y por columnas* o *localmente finita* si para todo $i \in \mathbb{N}_0$ los vectores $(a_{in})_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $(a_{ni})_{n \in \mathbb{N}_0}$ tiene a lo más un número finito de entradas no nulas. El anillo $\text{RCFM}(R)$ es objeto de estudio en trabajos recientes sobre teoría de anillos y C^* -álgebras, véanse [Sim98], [APP01] y las referencias allí citadas. También fue usado por Wagoner ([Wag72]) para construir el Ω -espectro de la teoría K de un anillo.

Como consecuencia de (2.2.2) (5) y (2.2.5) obtenemos la siguiente curiosa propiedad de las R -álgebras $R(\mathfrak{F})$ con $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Proposición 2.2.10. *Si $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ todo $R(\mathfrak{F})$ -módulo libre f, g es isomorfo a $R(\mathfrak{F})$.*

Este resultado contrasta fuertemente con el caso $\mathfrak{F} = \emptyset$ y $R(\emptyset) = R$ ya que todo R -módulo libre está caracterizado salvo isomorfía por su rango.

Los siguientes resultados demuestran que la categoría aditiva pequeña $\mathbf{M}_R(T)$ es equivalente Morita al anillo $R(\mathfrak{F})$ para un árbol no compacto cualquiera T con $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$. Para un árbol T compacto esto se sigue de (2.1.7) y (2.2.2) (4).

Proposición 2.2.11. *Todo R -módulo libre T -controlado es retracto de otro cualquiera cuyo soporte sea $\mathfrak{F}(T)$.*

Demostración. Recordemos que en virtud de (2.3) todos los objetos con soporte $\mathfrak{F}(T)$ son isomorfos. Para $R = \mathbb{Z}$ esta proposición está contenida en la prueba de [BQ01] V.3.4. El resultado para un anillo arbitrario se sigue del caso especial $R = \mathbb{Z}$. Más concretamente, dado un R -módulo libre T -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ si el soporte de $R\langle B \rangle_\beta$ es $\mathfrak{F}(T)$ entonces $\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$ es retracto de $\mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta$ (los soportes sólo dependen de las funciones de altura). Así podemos obtener una retracción de $R\langle B \rangle_\beta$ sobre $R\langle A \rangle_\alpha$ simplemente tensorizando por R . \square

Usando esta proposición y (2.1.8) obtenemos las siguientes equivalencias de categorías que, de ahora en adelante, usaremos como identificaciones.

Corolario 2.2.12. *El funtor de evaluación en un R -módulo libre T -controlado con soporte $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$ induce una equivalencia aditiva de categorías abelianas*

$$\mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T)) \simeq \mathbf{mod}(R(\mathfrak{F}))$$

que se restringe a otra equivalencia de categorías aditivas

$$\mathbf{fp}(\mathbf{M}_R(T)) \simeq \mathbf{fp}(R(\mathfrak{F})).$$

En la siguiente proposición probamos una importante propiedad de los funtores \mathbb{F}^f definidos en (2.2.2) (3).

Proposición 2.2.13. *Dada una aplicación propia $f: T \rightarrow T'$ entre árboles no compactos tal que $\mathfrak{F}(f): \mathfrak{F}(T) \hookrightarrow \mathfrak{F}(T')$ es inyectiva, el cambio de coeficientes*

$$\mathbb{F}_*^f: \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{M}_R(T'))$$

es exacto.

Demostración. Podemos suponer que $\mathfrak{F}(f): \mathfrak{F}(T) \subset \mathfrak{F}(T')$ es de hecho una inclusión. Como comentamos en (2.2.2) (3) el funtor \mathbb{F}^f es pleno en este caso, por tanto $R(\mathfrak{F}(T))$ es la R -álgebra de endomorfismos de un R -módulo libre T' -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ con soporte $\mathfrak{F}(T)$. Sea $R\langle B \rangle_\beta$ otro R -módulo libre T' -controlado con soporte $\mathfrak{F}(T')$. En virtud de (2.1.9) para probar la proposición es necesario y suficiente ver que el $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulo a izquierda $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_R(T')}(R\langle B \rangle_\beta, R\langle A \rangle_\alpha)$ es plano. Para ello usaremos el Test de Planaridad ([BK00] 3.2.9) que asegura que basta probar la igualdad

$$\mathfrak{a} \otimes_{R(\mathfrak{F}(T))} \mathcal{M} = \mathfrak{a}\mathcal{M}$$

para todo ideal a derecha finitamente generado $\mathfrak{a} \subset R(\mathfrak{F}(T))$. La multiplicación siempre induce una epiyección

$$\mathfrak{a} \otimes_{R(\mathfrak{F}(T))} \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{a}\mathcal{M}: a \otimes m \mapsto am,$$

así que sólo hay que probar que este homomorfismo es también inyectivo. Usando (2.2.10) observamos que \mathfrak{a} es necesariamente un ideal principal que estará generado por un cierto endomorfismo controlado $\psi: R\langle A \rangle_\alpha \rightarrow R\langle A \rangle_\alpha$. En particular todo elemento de $\mathfrak{a} \otimes_{R(\mathfrak{F}(T))} \mathcal{M}$ es de la forma $\psi \otimes \varphi$ para cierto $\varphi: R\langle B \rangle_\beta \rightarrow R\langle A \rangle_\alpha$. Consideramos el conjunto

$$\bar{B} = \{b \in B; \varphi(b) \neq 0\}.$$

Por ser φ un homomorfismo controlado tenemos que $\beta(\bar{B})' \subset \mathfrak{F}(T)$, compárese con la demostración de (2.2.6). Si $\bar{\beta}$ es la restricción de β a \bar{B} el R -módulo

libre T' -controlado $R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}}$ es un retracto de $R\langle A\rangle_{\alpha}$, es decir, existe un diagrama de homomorfismos controlados

$$R\langle A\rangle_{\alpha} \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{i} \end{array} R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}}$$

con $ri = 1$, aquí usamos que \mathbb{F}^f es fiel, lleno y preserva soportes ((2.2.2) (3)), (2.2.5) y (2.2.11). También podemos definir una retracción $\bar{r}: R\langle B\rangle_{\beta} \rightarrow R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}}$ de la inclusión $R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}} \hookrightarrow R\langle B\rangle_{\beta}$ como $\bar{r}(b) = 0$ si $b \in B - \bar{B}$. Llamamos $\bar{\varphi}$ a la restricción de φ a $R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}}$. Es claro que la siguiente composición coincide con φ

$$\varphi: R\langle B\rangle_{\beta} \xrightarrow{\bar{r}} R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}} \xrightarrow{i} R\langle A\rangle_{\alpha} \xrightarrow{r} R\langle\bar{B}\rangle_{\bar{\beta}} \xrightarrow{\bar{\varphi}} R\langle A\rangle_{\alpha}.$$

Si $\psi\phi = 0$ entonces $\psi\bar{\varphi} = 0$ ya que $\bar{\varphi}$ es restricción de φ , por tanto

$$\begin{aligned} \psi \otimes \varphi &= \psi \otimes \bar{\varphi} r i \bar{r} \\ &= \psi \bar{\varphi} r \otimes i \bar{r} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la proposición. \square

Para $R = \mathbb{Z}$ las categorías $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}^g(T)$ y $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(T)$ son versiones controladas en el infinito por T de la categoría de grupos libres abelianos, es por ello que también denotaremos

$$\mathbf{ab}^g(T) = \mathbf{M}_{\mathbb{Z}}^g(T)$$

y

$$\mathbf{ab}(T) = \mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(T).$$

Una importante característica de esta última categoría viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.2.14. *El núcleo de un morfismo entre $\mathbf{ab}(T)$ -módulos libres finitamente generados es también libre finitamente generado.*

Como ya comentamos en (2.2.2) (1) este resultado se demuestra en [ACMQ03] con un lenguaje diferente al usado aquí. Concretamente (2.2.14) se corresponde con [ACMQ03] 3.2. Algunas consecuencias relevantes de (2.2.14) son las siguientes.

Corolario 2.2.15. *Todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. tiene dimensión proyectiva ≤ 2 .*

Corolario 2.2.16. *Todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo proyectivo f. g. es libre f. g.*

Corolario 2.2.17. *$\mathbf{ab}(T)$ es equivalente a la categoría de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos proyectivos f. g.*

Usando también (2.2.2) (5) y (2.2.5) obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.18. *$K_0(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))) = 0$ para todo árbol no compacto T .*

Aquí observamos de nuevo una diferencia radical entre las propiedades de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ según sea T compacto o no. Para T compacto $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)) = \mathbb{Z}(\emptyset) = \mathbb{Z}$ y $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Observación 2.2.19. Las únicas propiedades de \mathbb{Z} que usamos en [ACMQ03] para demostrar el resultado correspondiente a (2.2.14) son que

- todo submódulo de un \mathbb{Z} -módulo libre es libre,
- todo submódulo f. g. de un \mathbb{Z} -módulo libre de torsión es libre.

Estas propiedades son compartidas por cualquier dominio de ideales principales R , por tanto (2.2.14) y sus corolarios son ciertos también para la categoría $\mathbf{M}_R(T)$ y el anillo $R(\mathfrak{F}(T))$.

2.3 Teorías y modelos

La versión no abeliana de las categorías aditivas son las teorías de cogrupos. De igual forma que en la Sección 2.1 definimos los módulos sobre una categoría aditiva aquí consideraremos los modelos sobre una teoría de cogrupos. Estos modelos generalizan a la categoría de grupos no abelianos de la misma forma que los módulos sobre una categoría aditiva eran una generalización de los grupos abelianos.

Nosotros aquí siempre trabajaremos con teorías con objeto cero. Es por ello que no daremos la definición más general en la que sólo se presupone la existencia de un objeto inicial, véase [BQ01] V.1.1.

Definición 2.3.1. Una *teoría* es una categoría \mathbf{T} con objeto cero 0 y coproductos finitos que denotamos $X \vee Y$. Asimismo denotaremos como de costumbre $i_1: X \rightarrow X \vee Y$ e $i_2: Y \rightarrow X \vee Y$ a las inclusiones de los factores. Un *morfismo de teorías* es un funtor $\mathbb{G}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ que preserve coproductos y objeto cero. Un *cogrupo* en una teoría es un objeto X dotado de un par de morfismos

$$\mu = \mu_X: X \rightarrow X \vee X, \text{ coproducto;}$$

$$\nu = \nu_X: X \rightarrow X, \text{ coinversión;}$$

que satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}(0, 1)\mu &= 1 = (1, 0)\mu, \\ (\mu \vee 1)\mu &= (1 \vee \mu)\mu, \\ (1, \nu)\mu &= 0 = (\nu, 1)\mu.\end{aligned}$$

Un morfismo $\varphi: X \rightarrow Y$ entre dos cogrupos de una teoría es *lineal* si es compatible con los morfismos estructurales, es decir

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \varphi)\mu_X &= \mu_Y \varphi, \\ \varphi \nu_X &= \nu_Y \varphi.\end{aligned}$$

Una *teoría de cogrupos* es una teoría tal que todos sus objetos están dotados de estructura de cogrupo de forma que las inclusiones de los factores de un coproducto son lineales. Un *morfismo de teorías de cogrupos* es un morfismo de teorías $\mathbb{G}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ que además preserva los morfismos estructurales de los objetos

$$\begin{aligned}\mathbb{G}(\mu_X) &= \mu_{\mathbb{G}X}, \\ \mathbb{G}(\nu_X) &= \nu_{\mathbb{G}X}.\end{aligned}$$

Ejemplos 2.3.2. (1). Una categoría aditiva \mathbf{A} es una teoría de cogrupos. El coproducto es la suma directa y los morfismos estructurales de un objeto X son

$$\begin{aligned}i_1 + i_2: X &\rightarrow X \oplus X, \\ -1_X: X &\rightarrow X.\end{aligned}$$

Todos los morfismos de \mathbf{A} son lineales. Los morfismos de teorías entre dos categorías aditivas son exactamente los funtores aditivos, véase [HS71] II.9.5.

(2). Dado un conjunto A denotamos $\langle A \rangle$ al grupo libre (no abeliano) con base A . La categoría \mathbf{gr} de grupos libres es una teoría de cogrupos. Su objeto cero es el grupo trivial, cuya base es el conjunto vacío. El coproducto de dos grupos libres es el producto libre

$$\langle A \rangle * \langle B \rangle = \langle A \sqcup B \rangle$$

cuya base es la unión disjunta de las bases de los factores. Los morfismos estructurales de $\langle A \rangle$ se definen de la siguiente manera ($a \in A$)

$$\begin{aligned}\mu: \langle A \rangle \rightarrow \langle A \rangle * \langle A \rangle: a &\mapsto i_1 a + i_2 a, \\ \nu: \langle A \rangle \rightarrow \langle A \rangle: a &\mapsto -a.\end{aligned}$$

- (3). Recordemos que dado un grupo cualquiera G su *serie central inferior* es una sucesión decreciente natural de subgrupos

$$G = \Gamma_0 G \supset \Gamma_1 G \supset \Gamma_2 G \supset \cdots \supset \Gamma_n G \supset \cdots,$$

donde $\Gamma_{n+1}G$ ($n \geq 0$) se define como el subgrupo de G generado por los *conmutadores* $[a, b] = -a - b + a + b$ con $a \in \Gamma_n G$ y $b \in G$.

Un grupo G es *nilpotente* de grado 2 si $\Gamma_3 G = 0$, es decir, si satisface la ley $[[X_1, X_2], X_3] = 0$, compárese con [Neu67] Capítulo 1 Sección 2. El objeto libre con base A en la categoría de grupos de grado de nilpotencia 2 es

$$\langle A \rangle^{nil} = \frac{\langle A \rangle}{\Gamma_3 \langle A \rangle},$$

véase [Neu67] Capítulo 1 Sección 3. El coproducto de dos grupos libres de grado de nilpotencia 2 es libre con base la unión disjunta de las de los factores

$$\langle A \rangle^{nil} \vee \langle B \rangle^{nil} = \langle A \sqcup B \rangle^{nil},$$

véase [Neu67] Capítulo 1 Sección 8.

La categoría **nil** de grupos libres de grado de nilpotencia 2 es también una teoría de cogrupos. Los morfismos estructurales de los objetos se definen como en (2).

- (4). El funtor de *abelianización* que envía un grupo cualquiera G a $G^{ab} = G/\Gamma_2 G$ da lugar a dos morfismos llenos de teorías de cogrupos,

$$ab: \mathbf{gr} \longrightarrow \mathbf{ab},$$

$$ab: \mathbf{nil} \longrightarrow \mathbf{ab}.$$

Aquí **ab** es la categoría aditiva de los grupos libres abelianos.

De forma similar el funtor de *nilización* que envía un grupo G a $G^{nil} = G/\Gamma_3 G$ se restringe a un morfismo lleno de teorías de cogrupos

$$nil: \mathbf{gr} \longrightarrow \mathbf{nil}.$$

Estos funtores son compatibles en el siguiente sentido, existe una identificación natural

$$G^{ab} = (G^{nil})^{ab}.$$

- (5). Si \mathbf{C} es una I -categoría cuyo objeto inicial es también final salvo homotopía entonces su categoría de homotopía \mathbf{C}/\simeq es una teoría. Más

aún, si $\Sigma\mathbf{C} \subset \mathbf{C}$ es la subcategoría llena cuyos objetos son las suspensiones $\Sigma\mathbf{C}/\simeq$ es una teoría de cogrupos, véase lo referente a las suspensiones en (1.2.5). Esto mismo se aplica a cualquier subcategoría llena de \mathbf{C} que sea cerrada bajo coproductos.

- (6). Un caso particular del anterior ejemplo son las subcategorías llenas $\mathbf{S}^n(T) \subset \mathbf{Top}_c^T/\simeq$ formadas por los objetos esféricos n -dimensionales bajo un árbol T . La categoría $\mathbf{S}^n(T)$ es una teoría para todo $n \geq 0$, y un teoría de cogrupos para todo $n \geq 1$. Más aún, como consecuencia de (3.1.1) para $n \geq 2$ la categoría $\mathbf{S}^n(T)$ es aditiva. Además dada una aplicación propia entre dos árboles $f: T \rightarrow T'$ los funtores ($n \geq 0$)

$$f_*: \mathbf{S}^n(T) \rightarrow \mathbf{S}^n(T')$$

definidos en (1.1.13) (2) (véase también (1.4.6)) son siempre morfismos de teorías, de hecho morfismos de teorías de cogrupos para $n \geq 1$.

Definición 2.3.3. Un *modelo* de una teoría \mathbf{T} es un funtor que llega a la categoría de conjuntos punteados

$$\mathcal{M}: \mathbf{T}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^*$$

y que preserva productos y objeto cero, es decir, las inclusiones de los factores de un coproducto en \mathbf{T}

$$X \xrightarrow{i_1} X \vee Y \xleftarrow{i_2} Y$$

inducen una biyección

$$(\mathcal{M}(i_1), \mathcal{M}(i_2)): \mathcal{M}(X \vee Y) \approx \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y),$$

y además $\mathcal{M}(0) = *$ es un conjunto unitario. Un *morfismo de modelos* es una transformación natural $\tau: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Si X es un cogrupos de \mathbf{T} el conjunto $\mathcal{M}(X)$ tiene estructura de grupo. La suma viene dada por la aplicación

$$\mathcal{M}(\mu): \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X),$$

el elemento neutro es el punto base de $\mathcal{M}(X)$ y el inverso de $x \in \mathcal{M}(X)$ es $-x = \mathcal{M}(\nu)(x)$. La aplicación $\tau: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X)$ inducida por un morfismo $\tau: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo de grupos. Es más, si $\varphi: X \rightarrow Y$ es un morfismo lineal entre dos cogrupos de \mathbf{T} entonces $\mathcal{M}(\varphi): \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ es también un homomorfismo.

Si \mathbf{T} es una teoría pequeña tiene sentido considerar la categoría $\mathbf{model}(\mathbf{T})$ de modelos de \mathbf{T} . Existe una inclusión llena de categorías $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{model}(\mathbf{T})$ que envía un objeto X de \mathbf{T} al correspondiente functor representable $\mathbf{T}(-, X)$, compárese con (2.1.3). Al igual que en dicha referencia identificaremos a X con su imagen a través de esta inclusión llena $X = \mathbf{T}(-, X)$. Los objetos de \mathbf{T} son proyectivos dentro de $\mathbf{model}(\mathbf{T})$ en virtud del lema de Yoneda.

Un morfismo de teorías $\mathbb{G}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ da lugar a un functor

$$\mathbb{G}^*: \mathbf{model}(\mathbf{T}') \rightarrow \mathbf{model}(\mathbf{T})$$

dado por composición a derecha con \mathbb{G} como en (2.1.5). Además si \mathbb{G} es un morfismo de teorías de cogrupos, \mathcal{M} es un modelo de \mathbf{T}' y $X \in \mathit{Ob}\mathbf{T}$, las dos estructuras de grupo definidas en $\mathcal{M}(\mathbb{G}X) = (\mathbb{G}^*\mathcal{M})(X)$ coinciden.

Ejemplo 2.3.4. (1). Como vimos en (2.3.2) (1) toda categoría aditiva \mathbf{A} es una teoría de cogrupos. Si además es pequeña la categoría de modelos de \mathbf{A} coincide de forma canónica con la de \mathbf{A} -módulos

$$\mathbf{mod}(\mathbf{A}) = \mathbf{model}(\mathbf{A}).$$

En efecto, todo modelo $\mathcal{M}: \mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}^*$ factoriza de manera única a través del functor fiel de olvido $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}^*$ que envía un grupo abeliano a su conjunto subyacente basado en el elemento neutro. Aquí usamos la estructura de grupo en los valores del modelo $\mathcal{M}(X)$, $X \in \mathit{Ob}\mathbf{A}$, definida en (2.3.3), que en este caso es abeliana, véase [BQ01] V.2.3 para más detalles.

- (2). La categoría de modelos de la teoría de los grupos libres finitamente generados es equivalente a la categoría de grupos. La equivalencia en cuestión envía un modelo \mathcal{M} al grupo $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, véase [BQ01] V.1.7, compárese también con (2.1.7). De forma análoga se puede probar que la categoría de modelos de la teoría de grupos libres finitamente generados de grado de nilpotencia 2 es equivalente a la categoría de grupos de grado de nilpotencia 2.

2.4 Grupos no abelianos controlados en el infinito

La categoría que consideramos en la siguiente definición es la versión no abeliana obvia de $\mathbf{ab}(T) = \mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(T)$, compárese con (2.2.1).

Definición 2.4.1. Dado un árbol T , un *grupo libre T -controlado* es un par $\langle A \rangle_{\alpha}$ dado por un grupo libre $\langle A \rangle$ con base el conjunto discreto A y una

aplicación propia $\alpha: A \rightarrow T$. Un *homomorfismo controlado* $\varphi: \langle A \rangle_\alpha \rightarrow \langle B \rangle_\beta$ es un homomorfismo entre los grupos libres subyacentes tal que para todo entorno U de $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$ en \hat{T} existe otro entorno $V \subset U$ de ε en \hat{T} que satisface

$$\varphi(\alpha^{-1}(V)) \subset \langle \beta^{-1}(U) \rangle.$$

La categoría $\mathbf{gr}(T)$ de grupos libres T -controlados es una teoría de cogrupos pequeña. El coproducto de dos objetos es

$$\langle A \rangle_\alpha \vee \langle B \rangle_\beta = \langle A \sqcup B \rangle_{(\alpha, \beta)},$$

y los morfismos estructurales vienen dados por los de (2.3.2) (2).

De forma completamente análoga se define la teoría de cogrupos pequeña $\mathbf{nil}(T)$ de *grupos libres de grado de nilpotencia 2 T -controlados* $\langle A \rangle_\alpha^{\mathbf{nil}}$, compárese con (2.3.2) (3).

Ejemplo 2.4.2. (1). La categoría $\mathbf{gr}(T)$ aparece definida en [BQ01] II.4.3 de forma ligeramente diferente pero equivalente a la dada aquí.

(2). Una aplicación propia entre dos árboles $f: T \rightarrow T'$ da lugar a un morfismo de teorías de cogrupos

$$\mathbb{F}^f: \mathbf{gr}(T) \rightarrow \mathbf{gr}(T')$$

definido como en (2.2.2) (3). Al igual que en aquel caso \mathbb{F}^f sólo depende, salvo equivalencia natural, de la clase de homotopía propia de f . En particular $\mathbf{gr}(T)$ sólo depende, salvo equivalencia de categorías, del espacio de finales $\mathfrak{F}(T)$. Lo mismo ocurre con $\mathbf{nil}(T)$.

(3). Si T es un árbol compacto el funtor de olvido que envía un grupo libre T -controlado al grupo subyacente da lugar a una equivalencia entre $\mathbf{gr}(T)$ y la categoría de grupos libres finitamente generados. Y análogamente para grupos de grado de nilpotencia 2. Compárese con (2.2.2) (4).

(4). La abelianización y nilización definidas en (2.3.2) (4) dan lugar a un diagrama conmutativo de morfismos llenos de teorías de cogrupos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{gr}(T) & \xrightarrow{ab} & \mathbf{ab}(T) \\ & \searrow nil & \nearrow ab \\ & & \mathbf{nil}(T) \end{array}$$

Este diagrama es compatible con los funtores \mathbb{F}^f inducidos por aplicaciones propias $f: T \rightarrow T'$, véanse (2.2.2) (4) y (2.4.2) (3). El funtor $nil: \mathbf{nil}(T) \rightarrow \mathbf{ab}(T)$ será estudiado con más detalle en (5.3).

Capítulo 3

Invariantes algebraicos en homotopía propia

Una vez introducidas en el Capítulo 2 las estructuras algebraicas necesarias, pasamos a definir en este capítulo, siguiendo [BQ01], los invariantes algebraicos en teoría de homotopía propia. En la literatura encontramos también otros invariantes definidos usando otros tipos de estructuras algebraicas tales como pro-categorías, véanse [FW72] y [EH76]. Estas estructuras son más comunes en geometría algebraica ([AM69]) y teoría de la forma ([MS82]). En general los invariantes definidos en unas y otras categorías coinciden a través de ciertos funtores que existen entre ellas, véanse [BQ01] V.3.10 y [Her95]. Diferentes tipos de invariantes se corresponden con distintos modos de acercarse a la teoría de homotopía propia: por un lado usando su estructura de I -categoría siguiendo [BQ01], que ha sido tratada en el Capítulo 1; y por otro sumergiendo la categoría propia en la categoría (de modelos de Quillen) de los pro-espacios como en [EH76]. Nosotros hemos optado por el acercamiento de [BQ01] ya que es intrínseco, es decir, no requiere que “amplíemos” los objetos de la categoría **Topp**.

Se verán tres clases de invariantes: homotópicos (Sección 3.1), homológicos y cohomológicos (Sección 3.3). Las dos primeras clases de invariantes, entre las que se incluyen los análogos de los grupos de homotopía, de Whitehead y de homología ordinarios, vivirán en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos, o equivalentemente de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos, para un cierto árbol T que hará el papel del punto base. Sin embargo la cohomología continuará viviendo en la categoría de grupos abelianos, aunque sus coeficientes sí serán $\mathbf{ab}(T)$ -módulos.

Con el objetivo de fundamentar adecuadamente la (co)homología en homotopía propia, en la Sección 3.2 hacemos un repaso de las propiedades

esenciales de la categoría de complejos de cadenas en una categoría aditiva, incluyendo su estructura homotópica y la sucesión espectral de coeficientes universales.

Los invariantes algebraicos que consideramos en este capítulo son adecuados, en el sentido de que, como se prueba en [BQ01], satisfacen versiones “propias” de teoremas clásicos de Blakers y Massey, Hurewicz, y Whitehead. Estos resultados aparecen recogidos en la Sección 3.4.

3.1 Módulos de homotopía propia

Sin duda uno de los puntos fundamentales del diccionario que la topología algebraica establece entre topología y álgebra es la identificación de las esferas de dimensión $n \geq 1$ con el grupo abeliano \mathbb{Z} , o más generalmente, de la categoría homotópica de racimos de esferas de dimensión n con la categoría algebraica de grupos libres, si $n = 1$, o grupos libres abelianos, si $n \geq 2$. El resultado análogo en topología algebraica propia es la siguiente proposición, véanse [BQ01] II.4.15 y II.4.20. Aquí, como en (2.3.2) (6), denotamos $\mathbf{S}^n(T)$ a la categoría de homotopía propia de los objetos esféricos de dimensión n bajo un árbol T .

Proposición 3.1.1. *Para todo árbol T están definidos isomorfismos de teorías de cogrupos*

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^1(T) &\simeq \mathbf{gr}(T); \\ \mathbf{S}^n(T) &\simeq \mathbf{ab}(T), \quad n \geq 2;\end{aligned}$$

que envían un objeto esférico S_α^n con $\alpha: A \rightarrow T$ a

$$\pi_n(S_\alpha^n/T, *)_\alpha = \begin{cases} \langle A \rangle_\alpha, & \text{si } n = 1; \\ \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Más aún, estos isomorfismos encajan en el siguiente diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{S}^1(T) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbf{S}^2(T) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbf{S}^3(T) & \xrightarrow{\Sigma} & \dots \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & \swarrow \simeq & \swarrow \simeq & \swarrow \simeq & \dots \\ \mathbf{gr}(T) & \xrightarrow{ab} & \mathbf{ab}(T) & & & & \end{array}$$

Observación 3.1.2. En el enunciado anterior, sin que sirva de precedente, denotamos S_α^n/T al cociente en \mathbf{Top}_c^* , es decir, al resultado de colapsar el árbol T a un punto $*$. El cociente S_α^n/T en \mathbf{Top}_c^T coincide con S_α^n ya que T es el objeto inicial de esta categoría.

Los isomorfismos de la proposición anterior serán usados de ahora en adelante como identificaciones. Esto nos permitirá, entre otras cosas, incluir todos los modelos de homotopía propia de orden superior que pasamos a definir en una misma categoría de módulos.

Definición 3.1.3. Los *modelos de homotopía propia* de un espacio X en \mathbf{Topp}_c^T son modelos de las teorías $\mathbf{S}^n(T)$ y se definen de la siguiente forma ($n \geq 1$)

$$\Pi_n X = [-, X]^T : \mathbf{S}^n(T) \longrightarrow \mathbf{Set}^*.$$

Usando las identificaciones de (3.1.1), (2.2.12) y (2.3.4) (1) podemos ver al *modelo fundamental propio* $\Pi_1 X$ como un modelo de $\mathbf{gr}(T)$ y a los modelos de homotopía propia de orden superior $\Pi_n X$ ($n \geq 2$) como $\mathbf{ab}(T)$ -módulos o $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos. Es por ello que también llamaremos a éstos últimos *módulos de homotopía propia*. También merece la pena notar que el conjunto subyacente a $\Pi_n X$ ($n \geq 2$) visto como $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo es el conjunto de clases de homotopía propia $[S_\delta^n, X]^T$ donde $\delta: T^0 \subset T$ es la inclusión del conjunto de vértices, véase (2.2.8).

Es inmediato ver que los modelos de homotopía propia dan lugar a funtores

$$\Pi_n : \mathbf{Topp}_c^T / \simeq \rightarrow \mathbf{model}(\mathbf{S}^n(T)) = \begin{cases} \mathbf{model}(\mathbf{gr}(T)), & \text{si } n = 1; \\ \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \\ \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

El espacio X se dice *0-conexo* si la aplicación $T \rightarrow X$ induce una epiyección en los finales de Freudenthal, y *n-conexo* ($n \geq 1$) si $T \rightarrow X$ induce una biyección en los finales y además $\Pi_k(X) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

De forma similar podemos definir los *modelos de homotopía propia* de un par cofibrante (X, A) en \mathbf{Topp}_c^T ($n \geq 1$)

$$\Pi_{n+1}(X, A) : \mathbf{S}^n(T) \longrightarrow \mathbf{Set}^*,$$

$$\Pi_{n+1}(X, A)(S_\alpha^n) = [(CS_\alpha^n, S_\alpha^n), (X, A)]^T.$$

También estos modelos son funtoriales

$$\Pi_{n+1} : \mathbf{Pair}_c(\mathbf{Topp}_c^T) / \simeq \rightarrow \mathbf{model}(\mathbf{S}^n(T)) = \begin{cases} \mathbf{model}(\mathbf{gr}(T)), & \text{si } n = 1; \\ \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \\ \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

El par (X, A) es *0-conexo* si la inclusión $A \hookrightarrow X$ induce una epiyección en los finales de Freudenthal, y *n-conexo* ($n \geq 1$) si esta inclusión induce una biyección en los finales, un epimorfismo $\Pi_1 A \rightarrow \Pi_1 X$ y además $\Pi_k(X, A) = 0$ para todo $2 \leq k \leq n$.

La siguiente sucesión larga de cofibra natural en $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{Topp}_c^T)$ ($n \geq 0$)

$$\cdots \rightarrow (S_\alpha^n, T) \rightarrow (S_\alpha^n, S_\alpha^n) \rightarrow (CS_\alpha^n, S_\alpha^n) \rightarrow (S_\alpha^{n+1}, T) \rightarrow \cdots$$

induce una sucesión exacta en $\mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)))$ de módulos de homotopía propia ($n \geq 2$)

$$\cdots \rightarrow \Pi_{n+1} X \xrightarrow{j} \Pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Pi_n A \rightarrow \Pi_n X \rightarrow \cdots$$

Esta sucesión puede ser prolongada inferiormente a $n = 1$ usando el funtor $ab^*: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \rightarrow \mathbf{model}(\mathbf{gr}(T))$ inducido por el funtor de abelianización $ab: \mathbf{gr}(T) \rightarrow \mathbf{ab}(T)$ en (2.4.2) (4). Sin embargo nosotros no estamos interesados en esta prolongación ya que habitualmente trabajaremos con espacios 1-conexos.

Todo T -complejo X es 0-conexo ya que sus finales coinciden con los del árbol, véase (1.4.3). En particular los pares de T -complejos (X, A) son 0-conexos. Más aún, por aproximación celular propia (1.4.8), si además $X^n \subset A$ entonces (X, A) es n -conexo ($n \geq 1$). El siguiente resultado es un recíproco de este hecho salvo tipo de homotopía propia.

Proposición 3.1.4. *Dado un par de T -complejos (X, A) n -conexo ($n \geq 1$) existe otro (Y, A) con $Y^n \subset A$ y una equivalencia de homotopía propia $X \simeq Y \text{ rel } A$. Más aún, podemos suponer que la dimensión de Y/A no excede el máximo entre $n + 2$ y la dimensión de X/A .*

La demostración de esta proposición en [BQ01] IV.7.2 sigue argumentos clásicos que se remontan a J. H. C. Whitehead. En el enunciado de [BQ01] IV.7.2 no se recoge lo referente a la dimensión de Y/A , sin embargo esto se deduce de un cuidadoso seguimiento de su prueba.

Si aplicamos (3.1.4) al par (X, T) formado por un T -complejo X y su árbol base obtenemos el siguiente

Corolario 3.1.5. *Dado un T -complejo n -conexo X ($n \geq 1$) existe otro Y con $Y^n = T$ y una equivalencia de homotopía $X \simeq Y$ en \mathbf{Topp}_c^T . Además podemos suponer que la dimensión de Y no excede el máximo entre la de X y $n + 2$.*

Definición 3.1.6. Un T -complejo X se dice *n-reducido* ($n \geq 1$) si su n -esqueleto es trivial $X^n = T$. Por convención diremos que todos los T -complejos son 0-reducidos.

Según esta definición el Corolario 3.1.5 asegura que la categoría de los T -complejos n -conexos es equivalente a la de los n -reducidos. En (3.4.12) demostraremos un resultado aún más específico.

Como en teoría de homotopía ordinaria podemos definir los módulos de Whitehead de un T -complejo en homotopía propia a partir de los módulos de homotopía de sus esqueletos de la siguiente manera.

Definición 3.1.7. Dado un T -complejo X su n -ésimo módulo de Whitehead $\mathbb{I}_n X$ ($n \geq 2$) se define como la imagen

$$\mathbb{I}_n X = \text{Im}[\Pi_n X^{n-1} \rightarrow \Pi_n X^n].$$

Es claro que el teorema de aproximación celular propio demuestra que \mathbb{I}_n es un funtor en la categoría de homotopía de los T -complejos

$$\mathbb{I}_n: \mathbf{CW}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))).$$

Más aún, el Corolario 3.1.5 prueba que

Proposición 3.1.8. Si X es un T -complejo $(n-1)$ -conexo $\mathbb{I}_k X = 0$ para todo $2 \leq k \leq n$.

3.2 Complejos de cadenas en categorías aditivas

Son bien conocidas las propiedades elementales de los complejos de (co)cadenas de grupos abelianos o módulos y sus (co)homologías. Nosotros aquí repasaremos las propiedades homotópicas básicas de los complejos de cadenas en una categoría aditiva siguiendo [Bau99]. También indicaremos cómo se construye la sucesión espectral de coeficientes universales para el cálculo de la cohomología a partir de la homología. En todo momento debemos tener presente que estos resultados serán aplicados en esta memoria a la categoría aditiva $\mathbf{ab}(T)$.

Definición 3.2.1. Un complejo de cadenas C_* en una categoría aditiva \mathbf{A} es una sucesión de morfismos $d_n = d_n^{C_*}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

con $d_n d_{n+1} = 0$. Se dice que C_* está *acotado inferiormente* (resp. *superiormente*) si existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $C_n = 0$ para todo $n \leq N$ (resp. $N \geq n$). Si C_* está acotado tanto superiormente como inferiormente diremos simplemente que C_* está *acotado*. Un morfismo de complejos de cadenas $f: C_* \rightarrow C'_*$

es una colección de morfismos $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ ($n \in \mathbb{Z}$) en \mathbf{A} tales que $d_n f_n = f_{n-1} d_n$.

El cilindro IC_* de un complejo de cadenas C_* viene dado por las siguientes fórmulas ($n \in \mathbb{Z}$)

$$IC_n = i_0 C_n \oplus sC_{n-1} \oplus i_1 C_n,$$

donde $i_0 C_n$, sC_n e $i_1 C_n$ son copias de C_n , y

$$d_n^{IC_*} = \begin{pmatrix} d_n^{C_*} & -1 & 0 \\ 0 & -d_{n-1}^{C_*} & 0 \\ 0 & 1 & d_n^{C_*} \end{pmatrix} : IC_n \rightarrow IC_{n-1}.$$

Las inclusiones $i_0, i_1: C_* \rightarrow IC_*$ se definen de la manera obvia y la proyección $p: IC_* \rightarrow C_*$ es el único morfismo que satisface $pi_0 = 1 = pi_1$ y $p_n(sC_{n-1}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una cofibración $f: C_* \rightarrow C'_*$ es un morfismo formado por inclusiones de sumandos directos en \mathbf{A} , $f_n = i_1: C_n \rightarrow C'_n = C_n \oplus \bar{C}'_n$.

En general un diagrama en \mathbf{A} de la forma siguiente es un push-out

$$(3.2.A) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_1} & C \oplus \bar{C}' \\ g \downarrow & \text{push} & \downarrow g \oplus 1 \\ C'' & \xrightarrow{i_1} & C'' \oplus \bar{C}' \end{array}$$

Y por tanto para todo diagrama de complejos de cadenas como el que sigue su push-out existe

$$\begin{array}{ccc} C_* & \twoheadrightarrow & C'_* \\ \downarrow & & \\ C''_* & & \end{array}$$

y viene dado nivel a nivel por diagramas como (3.2.A), compárese con (1.1.3) (I2). Más aún,

Proposición 3.2.2 ([Bau99] III.9.2). *La categoría $\mathbf{chain}^+(\mathbf{A})$ de complejos de cadenas en \mathbf{A} acotados inferiormente con las cofibraciones y el cilindro arriba definidos es una I-categoría.*

Observación 3.2.3. La relación de homotopía a la que da lugar el funtor cilindro en la categoría de complejos de cadenas en \mathbf{A} puede ser descrita alternativamente de la siguiente forma: dos morfismos $f, g: C_* \rightarrow C'_*$ son homotópicos si existen morfismos $\alpha_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ en \mathbf{A} tales que

$$-f_n + g_n = \alpha_{n-1} d_n + d_{n+1} \alpha_n.$$

Definición 3.2.4. Si \mathbf{A} es una categoría aditiva pequeña la *homología* de un complejo de cadenas en \mathbf{A} se define como su homología en la categoría abeliana $\mathbf{mod}(\mathbf{A})$, usando para ello la inclusión llena de categorías $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A})$ en (2.1.3),

$$H_n C_* = \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n+1}} \in \text{Ob} \mathbf{mod}(\mathbf{A}), \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Sin embargo la *cohomología* de C_* con coeficientes en un \mathbf{A} -módulo \mathcal{M} son los grupos abelianos obtenidos como los grupos de cohomología del siguiente complejo de cocadenas de grupos abelianos

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}}(C_*, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(C_*),$$

esto es

$$H^n(C_*, \mathcal{M}) = H^n \text{Hom}_{\mathbf{A}}(C_*, \mathcal{M}) = H^n \mathcal{M}(C_*) = \frac{\text{Ker } \mathcal{M}(d_{n+1})}{\text{Im } \mathcal{M}(d_n)} \in \text{Ob} \mathbf{Ab}.$$

Es inmediato comprobar que estas (co)homologías dan lugar a funtores ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} H_n: \mathbf{chain}^+(\mathbf{A})/\simeq &\longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A}), \\ H^n: (\mathbf{chain}^+(\mathbf{A})/\simeq)^{op} \times \mathbf{mod}(\mathbf{A}) &\longrightarrow \mathbf{Ab}. \end{aligned}$$

La homología y la cohomología son capaces de detectar equivalencias de homotopía entre complejos de cadenas.

Teorema 3.2.5 ([Bau99] III.9.6). *Dado un morfismo $f: C_* \rightarrow C'_*$ en $\mathbf{chain}^+(\mathbf{A})$ los siguientes apartados son equivalentes:*

- (1). f es una equivalencia de homotopía,
- (2). f induce isomorfismos de \mathbf{A} -módulos en homología ($n \in \mathbb{Z}$)

$$f_*: H_n C_* \xrightarrow{\simeq} H_n C'_*,$$

- (3). para todo \mathbf{A} -módulo \mathcal{M} el morfismo f induce isomorfismos en cohomología ($n \in \mathbb{Z}$)

$$f^*: H^n(C'_*, \mathcal{M}) \xrightarrow{\simeq} H^n(C_*, \mathcal{M}).$$

Observación 3.2.6. La sucesión de cofibra asociada a una cofibración de complejos de cadenas

$$(3.2.B) \quad C_* \twoheadrightarrow C'_* \rightarrow C_*/C'_*$$

al ser vista dentro de $\mathbf{mod}(\mathbf{A})$ a través de la inclusión llena $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A})$ se convierte en una sucesión exacta corta escindible por niveles y por tanto da lugar a una sucesión exacta larga de \mathbf{A} -módulos en homología ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}C_*/C'_* \rightarrow H_nC_* \rightarrow H_nC'_* \rightarrow H_nC_*/C'_* \rightarrow \cdots .$$

Análogamente evaluando un \mathbf{A} -módulo \mathcal{M} en (3.2.B) obtenemos una sucesión exacta corta escindible por niveles de complejos de cocadenas de grupos abelianos que induce a su vez una sucesión exacta larga en cohomología con coeficientes en \mathcal{M}

$$\cdots \rightarrow H^n(C_*/C'_*, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(C'_*, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(C_*, \mathcal{M}) \rightarrow H^{n+1}(C_*/C'_*, \mathcal{M}) \rightarrow \cdots .$$

Ambas sucesiones exactas satisfacen las propiedades de naturalidad obvias.

El siguiente resultado nos proporciona una herramienta para calcular la cohomología de un complejo de cadenas en \mathbf{A} a partir de su homología y de los funtores derivados de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}$ en la categoría de \mathbf{A} -módulos.

Proposición 3.2.7 (Coeficientes universales). *Dado un complejo de cadenas C_* en $\mathbf{chain}^+(\mathbf{A})$ y un \mathbf{A} -módulo \mathcal{M} hay definida una sucesión espectral natural*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathbf{A}}^p(H_q C_*, \mathcal{M}) \Rightarrow H^{p+q}(C_*, \mathcal{M}).$$

Observación 3.2.8. (1). Dada una resolución inyectiva de \mathcal{M} en $\mathbf{mod}(\mathbf{A})$

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}^n \rightarrow \cdots$$

la sucesión espectral de (3.2.7) es la del bicomplejo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(C_*, \mathcal{D}^*),$$

véase [McC85] 3.2.1.

(2). Cuando $\mathbf{A} = \mathbf{ab}(T)$ la sucesión espectral de coeficientes universales puede ser también obtenida de la siguiente forma. Definimos el complejo de cadenas $C_*^{(n)}$ como el único que coincide con C_* en dimensiones $\leq n$, es trivial en dimensiones $\geq n+2$ y $H_{n+1}C_*^{(n)} = 0$, esto es

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathrm{Ker} d_n^{C_*} \hookrightarrow C_n \xrightarrow{d_n^{C_*}} C_{n-1} \rightarrow \cdots .$$

Esto es un complejo de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ en virtud de (2.2.14). Consideramos el único morfismo $f^{(n)}: C_* \rightarrow C_*^{(n)}$ que induce la identidad

en dimensiones $\leq n$ y definimos el complejo de cocadenas de grupos abelianos

$$F^n \mathcal{M}(C_*) = \text{Im } \mathcal{M}(f^{(n)}).$$

Estos complejos de cocadenas dan lugar a una filtración creciente de $\mathcal{M}(C_*)$

$$\cdots \subset F^n \mathcal{M}(C_*) \subset F^{n+1} \mathcal{M}(C_*) \subset \cdots \subset \mathcal{M}(C_*)$$

y la sucesión espectral de coeficientes universales coincide con la asociada a este complejo filtrado, véase [McC85] 2.2.1.

Es más, (2.2.14) implica que la homología de un complejo de cadenas C_* en $\mathbf{ab}(T)$ es finitamente presentada como $\mathbf{ab}(T)$ -módulos ya que tenemos sucesiones exactas ($n \in \mathbb{Z}$)

$$C_{n+1} \rightarrow \text{Ker } d_n^{C_*} \rightarrow H_n C_*.$$

Además, como todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. tiene dimensión proyectiva ≤ 2 (2.2.15) la sucesión espectral de coeficientes universales da lugar a sucesiones exactas naturales de 6 términos ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \text{Ker } \nu_n \hookrightarrow H^n(C_*, \mathcal{M}) \xrightarrow{\nu_n} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(H_n C_*, \mathcal{M}) \xrightarrow{d_2} \\ \text{Ext}_{\mathbf{A}}^2(H_{n-1} C_*, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Ker } \nu_{n+1} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{A}}^1(H_n C_*, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Aquí $d_2: E_2^{0,n} \rightarrow E_2^{2,n-1}$ es una de las diferenciales de la sucesión espectral.

3.3 (Co)homología propia

Supongamos que X es un T -complejo con $X^1 = S_{\alpha_1}^1$ y aplicaciones de pegamiento de $(n+1)$ -células $f_{n+1}: S_{\alpha_{n+1}}^n \rightarrow X^n$.

Definición 3.3.1. El *complejo de cadenas celulares* del T -complejo X es un complejo de cadenas $\mathcal{C}_* X$ en $\mathbf{ab}(T)$ que se define de la siguiente forma usando los isomorfismos de (3.1.1) como identificaciones: $\mathcal{C}_n X = S_{\alpha_n}^n$ si $n \geq 1$ y 0 en caso contrario, $d_3 = \Sigma f_2$ y para $n \geq 3$ la diferencial d_{n+1} coincide con la siguiente composición

$$S_{\alpha_{n+1}}^n \xrightarrow{f_{n+1}} X^n \rightarrow X^n / X^{n-1} = S_{\alpha_n}^n.$$

Este complejo de cadenas da lugar a un funtor de la categoría de T -complejos y aplicaciones celulares a la categoría de complejos de cadenas acotados en $\mathbf{ab}(T)$

$$\mathcal{C}_*: \mathbf{CW}^T \longrightarrow \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$$

que preserve cilindros, cofibraciones y los push-out de diagramas en los que una de las flechas sea la inclusión de un subcomplejo. En particular \mathcal{C}_* preserva todas las construcciones homotópicas definidas en (1.2.5) e induce un funtor entre las correspondientes categorías de homotopía

$$\mathcal{C}_*: \mathbf{CW}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq .$$

Véase [BQ01] VI.3 para más detalles. Allí y en [BQ01] VI.4 encontramos también la siguiente noción de (co)homología de un T -complejo.

Definición 3.3.2. La *homología propia* y la *cohomología propia* de un T -complejo X se definen como las de su complejo de cadenas celulares \mathcal{C}_*X , véanse (3.2.4), ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\mathcal{H}_n X = H_n \mathcal{C}_* X,$$

$$H^n(X, \mathcal{M}) = H^n(\mathcal{C}_* X, \mathcal{M}).$$

Aquí \mathcal{M} es un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo (o equivalentemente un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo) cualquiera. Además ambas definen funtores

$$\mathcal{H}_n: \mathbf{CW}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))),$$

$$H^n: (\mathbf{CW}^T / \simeq)^{op} \times \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \\ \parallel \\ \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))) \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

que son triviales en dimensiones $n \leq 0$.

Observación 3.3.3. Las propiedades arriba enunciadas del funtor \mathcal{C}_* y (3.2.6) prueban la existencia de sucesiones exactas largas asociadas a una sucesión de cofibra en \mathbf{CW}^T

$$A \twoheadrightarrow X \rightarrow X/A$$

tanto en homología ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+1} X/A \rightarrow \mathcal{H}_n A \rightarrow \mathcal{H}_n X \rightarrow \mathcal{H}_n X/A \rightarrow \cdots$$

como en cohomología

$$\cdots \rightarrow H^n(X/A, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(A, \mathcal{M}) \rightarrow H^{n+1}(X/A, \mathcal{M}) \rightarrow \cdots .$$

Es más, dada una aplicación cualquiera $f: X \rightarrow Y$ en \mathbf{CW}^T , considerando el diagrama conmutativo de sucesiones de cofibra cuyas flechas verticales

son equivalencias de homotopía

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\simeq} & Z_f & \longrightarrow & C_f \\ \parallel & & \uparrow \simeq & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\simeq} & C_f \end{array}$$

podemos obtener sucesiones exactas largas en (co)homología para la sucesión de cofibra inferior

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}C_f \rightarrow \mathcal{H}_nX \xrightarrow{f_*} \mathcal{H}_nY \rightarrow \mathcal{H}_nC_f \rightarrow \cdots, \\ \cdots \rightarrow H^n(C_f, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(Y, \mathcal{M}) \xrightarrow{f^*} H^n(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^{n+1}(C_f, \mathcal{M}) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Aplicando esto a la sucesión de cofibra

$$X \rightarrow T \rightarrow \Sigma X$$

obtenemos isomorfismos de suspensión en (co)homología

$$\mathcal{H}_{n+1}\Sigma X \simeq \mathcal{H}_nX,$$

$$H^n(X, \mathcal{M}) \simeq H^{n+1}(\Sigma X, \mathcal{M}).$$

Aquí usamos que $\mathcal{C}_*T = 0$.

Como se comenta en (3.2.8) (2) el Teorema 2.2.14 prueba que

Proposición 3.3.4. *Los $\mathbf{ab}(T)$ -módulos de homología de un T -complejo son finitamente presentados.*

Usando además (2.2.15) y la sucesión espectral de coeficientes universales (véanse (3.2.7) y (3.2.8) (2)) tenemos que

Proposición 3.3.5 (Coeficientes universales). *Existe una sucesión espectral natural para calcular la cohomología de un T -complejo X con coeficientes en un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} a partir de su homología*

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^p(\mathcal{H}_qX, \mathcal{M}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{M})$$

que da lugar a sucesiones exactas naturales de 6 términos ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \text{Ker } \nu_n \hookrightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\nu_n} \text{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathcal{H}_nX, \mathcal{M}) \xrightarrow{d_2} \\ \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{H}_{n-1}X, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Ker } \nu_{n+1} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_nX, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

3.4 Teoremas clásicos en homotopía propia

Sin duda el primer resultado que avala la importancia de los invariantes algebraicos en teoría de homotopía ordinaria es el conocido teorema de Whitehead. La versión propia de este resultado es la siguiente.

Teorema 3.4.1 (de Whitehead, [BQ01] IV.8.2). *Una aplicación propia bajo T entre dos T -complejos $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía propia si y sólo si induce isomorfismos $f_*: \Pi_n X \rightarrow \Pi_n Y$ entre todos los modelos de homotopía propia ($n \geq 1$).*

Para clasificar tipos de homotopía propia en función de invariantes algebraicos, que es el objetivo fundamental de esta memoria, será fundamental la teoría de obstrucción que se desarrollará en las dos primeras secciones del siguiente capítulo. Dichos resultados en teoría de homotopía propia son consecuencias de análogos más generales que son obtenidos en [Bau99] para categorías de cofibraciones con cierta estructura adicional, las *categorías de cofibraciones homológicas*. La clave para aplicarlos en teoría de homotopía propia es la siguiente generalización del teorema de Blakers-Massey de escisión en homotopía.

Teorema 3.4.2 (de Blakers-Massey, [BQ01] IV.7.3). *Dados dos pares de T -complejos (X, A) m -conexo e (Y, A) n -conexo para ciertos $m, n \geq 0$, el par $(X \cup_A Y, Y)$ es m -conexo y la inclusión de pares $(X, A) \rightarrow (X \cup_A Y, Y)$ induce morfismos entre los modelos de homotopía propia*

$$\Pi_k(X, A) \longrightarrow \Pi_k(X \cup_A Y, Y)$$

que son isomorfismos para $k < m + n$ y un epimorfismo para $k = m + n$.

Este resultado y [Bau99] V.1.2 prueban que

Corolario 3.4.3. *La categoría \mathbf{Topp}^T es una categoría de cofibraciones homológicas bajo la teoría de cogrupos $\mathbf{S}^1(T)$.*

En particular tenemos la siguiente versión propia del teorema de Whitehead homológico, véanse [BQ01] VI.6.2, [Bau99] IX.6 y (3.2.5).

Teorema 3.4.4 (de Whitehead homológico). *Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ en \mathbf{CW}^T entre T -complejos 1-conexos es una equivalencia de homotopía propia si y sólo si algunas de las siguientes tres condiciones equivalentes se satisface:*

- (1). *el morfismo inducido entre los complejos de cadenas celulares $f_*: \mathcal{C}_* X \rightarrow \mathcal{C}_* Y$ es una equivalencia de homotopía,*

(2). f induce isomorfismos de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos en homología propia ($n \geq 1$)

$$f_*: \mathcal{H}_n X \longrightarrow \mathcal{H}_n Y,$$

(3). para todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} la aplicación f induce isomorfismos en cohomología propia ($n \geq 1$)

$$f^*: H^n(Y, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}).$$

Otras consecuencias del teorema de Blakers-Massey en homotopía propia son las siguientes, compárese con [Whi78] VII.7.12 y VII.7.13.

Corolario 3.4.5. *Dado un par de T -complejos m -conexo (X, A) tal que A es n -conexo ($m, n \geq 1$) la aplicación cociente $X \rightarrow X/A$ induce morfismos ($k \geq 1$)*

$$\Pi_k(X, A) \longrightarrow \Pi_k(X/A)$$

que son isomorfismos para $k < m+n+1$ y un epimorfismo para $k = m+n+1$.

Corolario 3.4.6 (Teorema de suspensión de Freudenthal). *Si X es un T -complejo m -conexo ($m \geq 1$) el morfismo de suspensión en módulos de homotopía propia*

$$\Sigma: \Pi_k X \longrightarrow \Pi_{k+1} \Sigma X$$

es un isomorfismo para $k < 2m + 1$ y un epimorfismo para $k = 2m + 1$.

Definición 3.4.7. El morfismo de Hurewicz en homotopía propia es un morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos ($n \geq 2$)

$$h_n: \Pi_n X \longrightarrow \mathcal{H}_n X$$

natural en el T -complejo X que se define de la siguiente forma: dado un grupo abeliano libre T -controlado $\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$ el homomorfismo de grupos abelianos obtenido al evaluar la transformación natural h_n en el objeto $\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$ está inducido por el funtor \mathcal{H}_n en (3.3.2)

$$h_n: \Pi_n X(\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha) = [S_\alpha^n, X]^T \xrightarrow{\mathcal{H}_n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha, \mathcal{H}_n X) = \mathcal{H}_n X(\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha).$$

Al igual que en teoría de homotopía ordinaria si X es un T -complejo 1-conexo podemos construir una “cierta sucesión exacta” de Whitehead como en [Whi50] para el morfismo de Hurewicz en homotopía propia.

Teorema 3.4.8 (sucesión exacta de Whitehead). *Dado un T -complejo 1-conexo X existe una sucesión exacta natural de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos ($n \geq 2$)*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+1} X \xrightarrow{b_{n+1}} \Pi_n X \xrightarrow{i_n} \Pi_n X \xrightarrow{h_n} \mathcal{H}_n X \rightarrow \cdots$$

que acaba en un epimorfismo $h_2: \Pi_2 X \twoheadrightarrow \mathcal{H}_2 X$.

Esbozaremos aquí una demostración de este teorema, véase [BQ01] VI.5 para más detalles. La clave está en el siguiente par de lemas.

Lema 3.4.9 ([BQ01] VI.5.5). *Dado un T -complejo 1-conexo X , para todo $n \geq 2$ el siguiente morfismo inducido por la aplicación cociente $X^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$ es un isomorfismo*

$$\Pi_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \Pi_n(X^n/X^{n-1}) = \mathcal{C}_n X$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{j\partial} & \Pi_n(X^n, X^{n-1}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{C}_{n+1} X & \xrightarrow{d_{n+1}} & \mathcal{C}_n X \end{array}$$

Aquí ∂ y j son morfismos que forman parte de la sucesión exacta larga de un par en homotopía propia.

Lema 3.4.10. *Una sucesión de morfismos de módulos sobre un ringoide ($n \in \mathbb{Z}$)*

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} \dots$$

exacta en los B_n da lugar a un complejo de cadenas B_* con diferencial $d_n = \alpha_{n-1}\beta_n$ y una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_{n+1} B_* \xrightarrow{b_{n+1}} \Gamma_n \xrightarrow{i_n} \pi_n \xrightarrow{h_n} H_n B_* \rightarrow \dots$$

donde $\Gamma_n = \text{Ker } \alpha_n$ y $\pi_n = \text{Coker } \beta_{n+1}$.

El morfismo i_n es la composición $\Gamma_n \hookrightarrow A_n \rightarrow \pi_n$, mientras que h_n y b_{n+1} son los únicos morfismos que hacen conmutativos a los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & B_n \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \text{Ker } \alpha_{n-1}\beta_n \\ & \downarrow & \downarrow \\ \pi_n & \xrightarrow{h_n} & H_n B_* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & A_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Ker } \alpha_n\beta_{n+1} & \longrightarrow & \Gamma_n \\ \downarrow & \nearrow b_{n+1} & \downarrow \\ H_{n+1} B_* & & \end{array}$$

La demostración de (3.4.10) para el caso de grupos abelianos está en [Whi50] I.1. La generalización a módulos sobre un ringoide es inmediata.

Demostración de (3.4.8). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es 1-reducido, véase (3.1.5), y entonces basta aplicar el Lema 3.4.10 a $A_n = \Pi_n X^n$ y $B_n = \Pi_n(X^n, X^{n-1})$ si $n \geq 2$, $A_n = B_n = 0$ si $n \leq 1$ y la siguiente sucesión

$$\dots \xrightarrow{j} \Pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial} \Pi_n X^n \xrightarrow{j} \Pi_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

En este caso $H_n B_* = \mathcal{H}_n X$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ en virtud de (3.4.9). Es más, es sencillo comprobar que $\pi_n = \Pi_n X$ y $\Gamma_n = \mathbb{I}_n X$ usando la exactitud de la sucesión exacta de un par en homotopía propia y el teorema de aproximación celular propio. También es fácil ver que h_n es aquí el morfismo de Hurewicz antes definido. \square

Usando (3.1.8) y (3.4.8) es sencillo probar la siguiente versión propia del conocido teorema de Hurewicz, véase [BQ01] VI.5.2.

Teorema 3.4.11 (de Hurewicz). *Si X es un T -complejo 1-conexo entonces X es $(n-1)$ -conexo ($n \geq 2$) si y sólo si $\mathcal{H}_k X = 0$ para todo $k < n$. Además en este caso el morfismo de Hurewicz es un isomorfismo en dimensión n*

$$h_n: \Pi_n X \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_n X,$$

y un epimorfismo en dimensión $n+1$

$$h_{n+1}: \Pi_{n+1} X \twoheadrightarrow \mathcal{H}_{n+1} X.$$

Como aplicación de las versiones “propias” de ciertos resultados clásicos vistas en este capítulo, así como de otros resultados específicos de teoría de homotopía propia, daremos aquí el siguiente resultado cuya versión en teoría de homotopía ordinaria se remonta a J. H. C. Whitehead, véase [BQ01] VI.6.3.

Proposición 3.4.12. *La categoría de homotopía de los T -complejos n -conexos de dimensión $\leq m+n$ ($m \geq 1, n \geq 0$) es equivalente a la de los T -complejos n -reducidos de dimensión $\leq m+n$.*

Demostración. Para $n = 0$ no hay nada que demostrar. Si $m \geq 2$ el resultado se sigue de (3.1.5). Por último si $n \geq 1$ y $m = 1$ el $(n+1)$ -ésimo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo de homología de un T -complejo X en las condiciones del enunciado es libre f. g. por (2.2.14), $\mathcal{H}_{n+1} X = \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$. El teorema de Hurewicz prueba que $h_{n+1}: \Pi_{n+1} X \simeq \mathcal{H}_{n+1} X$ es un isomorfismo, por tanto existe una aplicación $S_\alpha^{n+1} \rightarrow X$ en \mathbf{Top}_c^T que induce un isomorfismo en \mathcal{H}_{n+1} . Esta aplicación es una equivalencia de homotopía por el teorema de Whitehead homológico, lo cual concluye esta prueba. \square

Capítulo 4

Teoría de obstrucción

Como se ha visto en el capítulo anterior el complejo de cadenas celulares o la homología propia son invariantes algebraicos “sencillos” del tipo de homotopía propia de un CW -complejo que son capaces de detectar las equivalencias de homotopía propia. Sin embargo esto no es suficiente para clasificar tipos de homotopía propia ya que una equivalencia entre los invariantes algebraicos no tiene porqué estar inducida por otra a nivel topológico. La teoría de obstrucción estudia éste y otros problemas similares de realización.

En las dos primeras secciones de este capítulo resumiremos los principales resultados de [Bau99] sobre teoría de obstrucción. En dicha referencia Baues va más allá en el desarrollo de la teoría de obstrucción en categorías de cofibraciones iniciado en [Bau89]. Nosotros aquí no recogemos sus resultados en la más amplia generalidad sino aplicados al ejemplo concreto de la categoría de espacios bajo un árbol y aplicaciones propias.

La teoría de obstrucción está estrechamente relacionada con la cohomología de categorías. Por ello en la Sección 4.3 se introduce la noción de cohomología de una categoría pequeña con coeficientes en un bimódulo, en el sentido de Baues-Wirsching [BW85], haciendo énfasis en ciertos aspectos que nos ayudarán a obtener algunos de nuestros principales resultados sobre clasificación de tipos de homotopía propia estable en el Capítulo 9.

4.1 Sistemas de homotopía

En esta sección se definen los sistemas de homotopía en homotopía propia, que son objetos de una categoría que está a medio camino entre la de T -complejos y la de complejos de cadenas acotados en $\mathbf{ab}(T)$. La definición más general de sistema de homotopía en una categoría de cofibraciones homológica aparece en [Bau99] V.1, aunque aquí sólo consideramos el caso

1-reducido, por ello nuestros sistemas de homotopía se parecen más a los usados en [Bau89] IX y [Bau96] 4.2.

Definición 4.1.1. Un *sistema de homotopía* de orden $n + 1$ ($n \geq 2$) es un triple $\underline{X}_{n+1} = (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n)$ tal que \mathcal{C}_* es un complejo de cadenas acotado en $\mathbf{ab}(T)$, X^n es un T -complejo 1-reducido de dimensión $\leq n$ tal que \mathcal{C}_*X coincide con \mathcal{C}_* en dimensiones $\leq n$, y por último f_{n+1} es un morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos $f_{n+1}: \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow \Pi_n X^n$ que además es un cociclo $f_{n+1}d_{n+2} = 0$ y tal que la siguiente composición coincide con la diferencial d_{n+1} del complejo de cadenas \mathcal{C}_*

$$d_{n+1}: \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \Pi_n X^n \xrightarrow{j} \Pi_n(X^n, X^{n-1}) = \mathcal{C}_n,$$

véase (3.4.9) para la última igualdad. Obsérvese que

$$f_{n+1} \in \text{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathcal{C}_{n+1}, \Pi_n X^n) = (\Pi_n X^n)(\mathcal{C}_{n+1}) = [S_{\alpha_{n+1}}^n, X^n]^T,$$

donde $S_{\alpha_{n+1}}^n$ es el objeto esférico correspondiente a \mathcal{C}_{n+1} a través de los isomorfismos de (3.1.1).

Un *morfismo* de sistemas de homotopía de orden $n + 1$

$$(\xi, \eta): (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n) \longrightarrow (\mathcal{C}'_*, g_{n+1}, Y^n)$$

viene dado por un morfismo de complejos de cadenas $\xi: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$ y una aplicación $\eta: X^n \rightarrow Y^n$ tal que $\mathcal{C}_*\eta$ coincide con ξ en dimensiones $\leq n$ y el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{\xi_{n+1}} & \mathcal{C}'_{n+1} \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow g_{n+1} \\ \Pi_n X^n & \xrightarrow{\eta_*} & \Pi_n Y^n \end{array}$$

es decir

$$\eta f_{n+1} = g_{n+1} \xi_{n+1} \in [S_{\alpha_{n+1}}^n, Y^n]^T.$$

El *cilindro* de un sistema de homotopía

$$I\underline{X}_{n+1} = (I\mathcal{C}_*, \bar{f}_{n+1}, (IX^n)^n)$$

viene dado por el cilindro del complejo de cadenas \mathcal{C}_* , el n -esqueleto de cilindro de X^n , que coincide con el siguiente push-out

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} \vee X^{n-1} & \xrightarrow{(i_0, i_1)} & IX^{n-1} \\ \downarrow & \text{push} & \downarrow \\ X^n \vee X^n & \xrightarrow{(i_0, \bar{i}_1)} & (IX^n)^n \end{array}$$

y el morfismo

$$\bar{f}_{n+1} = ((\tilde{i}_0)_* f_{n+1}, w_*, (\tilde{i}_1)_* f_{n+1}): \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n \oplus \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow \Pi_n(IX^n)^n,$$

donde $w: S_{\alpha_n}^n \rightarrow (IX^n)^n$ es la aplicación de pegamiento de $(n+1)$ -células de IX^n . Considerando la sucesión exacta larga de cofibra del pegamiento de n -células $S_{\alpha_n}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ y (1.2.7) tenemos además que $\tilde{i}_0 + w = \tilde{i}_1$, véase [Bau99] III.4.2.

Este cilindro da lugar a una relación de equivalencia natural \simeq (*homotopía*) en la categoría \mathbf{H}_{n+1}^T de sistemas de homotopía de orden $n+1$, en particular tiene sentido considerar la categoría cociente $\mathbf{H}_{n+1}^T / \simeq$. Al igual que en el caso de complejos de cadenas (3.2.3) la relación de homotopía en \mathbf{H}_{n+1}^T puede ser descrita alternativamente de la siguiente manera:

Dos morfismos

$$(\xi, \eta), (\xi', \eta'): (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n) \longrightarrow (\mathcal{C}'_*, g_{n+1}, Y^n)$$

son *homotópicos* $(\xi, \eta) \simeq (\xi', \eta')$ si existen morfismos $\alpha_m: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}'_{m+1}$ ($m \in \mathbb{Z}$) en $\mathbf{ab}(T)$ tales que

$$-\xi_m + \xi'_m = \alpha_{m-1} d_m + d_{m+1} \alpha_m$$

y además

$$\eta + g_{n+1} \alpha_n = \eta' \in [X^n, Y^n]^T.$$

Aquí usamos la acción a derecha del grupo $[S_{\alpha_n}^n, Y^n] = (\Pi_n Y^n)(\mathcal{C}_{n+1})$ en el conjunto $[X^n, Y^n]^T$ dada por la aplicación de pegamiento de n -células $S_{\alpha_n}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, véase (1.2.7).

Las categorías \mathbf{H}_{n+1}^T han de ser contempladas como aproximaciones sucesivas desde la categoría algebraica de complejos de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ a la categoría topológica ${}_2\mathbf{CW}^T$ de T -complejos 1-reducidos.

Tenemos funtores ($n \geq 3$)

$$r_n: {}_2\mathbf{CW}^T \longrightarrow \mathbf{H}_n^T$$

que se definen como

$$r_n X = (\mathcal{C}_* X, f_n, X^{n-1})$$

siendo f_n la aplicación de pegamiento de n -células en X . También hay funtores

$$\lambda_{n+1}: \mathbf{H}_{n+1}^T \longrightarrow \mathbf{H}_n^T$$

definidos como

$$\lambda_{n+1}(\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n) = (\mathcal{C}_*, f_n, X^{n-1})$$

donde f_n es la aplicación de pegamiento de n -células en X^n .

Sea ${}^2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$ la categoría de complejos de cadenas acotados \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ con $\mathcal{C}_n = 0$ para todo $n < 2$ (1-reducidos). El funtor *complejo de cadenas* ($n \geq 2$)

$$\mathcal{C}_* : \mathbf{H}_{n+1}^T \longrightarrow {}^2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$$

envía un sistema de homotopía $\underline{X}_{n+1} = (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n)$ a $\mathcal{C}_*\underline{X}_{n+1} = \mathcal{C}_*$. La (co)homología de \underline{X}_{n+1} se define como la de su complejo de cadenas ($m \in \mathbb{Z}$)

$$\mathcal{H}_m \underline{X}_{n+1} = H_m \mathcal{C}_* \underline{X}_{n+1},$$

$$H^m(\underline{X}_{n+1}, \mathcal{M}) = H^m(\mathcal{C}_* \underline{X}_{n+1}, \mathcal{M}).$$

Aquí \mathcal{M} es un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo (o equivalentemente un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo) cualquiera. Estas (co)homologías satisfacen las mismas propiedades de functorialidad que las de los T -complejos. Compárese con (3.3.2).

Los funtores r , λ y \mathcal{C}_* antes definidos satisfacen las siguientes relaciones obvias ($n \geq 3$)

$$\lambda_{n+1} r_{n+1} = r_n,$$

$$\mathcal{C}_* \lambda_n = \mathcal{C}_*,$$

$$\mathcal{C}_* r_n = \mathcal{C}_*.$$

Además preservan cilindros, por tanto inducen funtores entre las respectivas categorías de homotopía

$$r_n : {}^2\mathbf{CW}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{H}_n^T / \simeq,$$

$$\lambda_{n+1} : \mathbf{H}_{n+1}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{H}_n^T / \simeq,$$

$$\mathcal{C}_* : \mathbf{H}_n^T / \simeq \longrightarrow {}^2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq.$$

Más aún, la siguiente proposición se sigue de (3.1.1)

Proposición 4.1.2. *El funtor*

$$\mathcal{C}_* : \mathbf{H}_3^T / \simeq \longrightarrow {}^2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq$$

es un isomorfismo de categorías.

Diremos que un sistema de homotopía de orden $n + 1$

$$\underline{X}_{n+1} = (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n)$$

es $(k - 1)$ -reducido ($k \geq 2$) si el T -complejo X^n lo es, y denotaremos ${}_k\mathbf{H}_{n+1}^T$ a la categoría formada por estos sistemas de homotopía. Análogamente denotaremos ${}_k\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$ a la categoría de complejos de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ con $\mathcal{C}_m = 0$ para todo $m < k$, que también llamaremos complejos de cadenas $(k - 1)$ -reducidos. Es más, como ocurre con (4.1.2) la Proposición 3.1.1 implica el siguiente resultado más general.

Proposición 4.1.3. *El funtor*

$$\mathcal{C}_*: {}_n\mathbf{H}_{n+1}^T / \simeq \longrightarrow {}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq$$

es un isomorfismo de categorías para todo $n \geq 2$.

4.2 Sucesiones exactas para un funtor

En esta sección se estudiarán las propiedades de los funtores λ entre categorías de sistemas de homotopía que se han visto en la sección anterior en términos de las propiedades que pasamos a definir.

Definición 4.2.1. Dado un funtor $\lambda: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ decimos que $B \in \mathit{Ob}\mathbf{B}$ es un *objeto realizable* si es isomorfo a un objeto en la imagen de λ , es decir $B \simeq \lambda A$ para cierto $A \in \mathit{Ob}\mathbf{A}$. Un morfismo $f: \lambda A \rightarrow \lambda A'$ en \mathbf{B} es un *morfismo realizable* si $f = \lambda f'$ para cierto $f': A \rightarrow A'$ en \mathbf{A} . El funtor λ es *realizable en los objetos* (resp. *morfismos*) si todo objeto de \mathbf{B} (resp. morfismo $f: \lambda A \rightarrow \lambda A'$ en \mathbf{B}) es realizable. Si λ es realizable tanto en los objetos como en los morfismos diremos simplemente que es *realizable*. Más aún, decimos que λ es *suficiente* si dado un morfismo f en \mathbf{A} tal que λf es un isomorfismo entonces f es necesariamente un isomorfismo. El funtor λ se dice *detectante* si es suficiente y realizable. Un funtor detectante $\lambda: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ induce una biyección entre las clases de isomorfía de objetos en \mathbf{A} y en \mathbf{B} , véase [Bau89] IV.1.5. La terminología de funtor suficiente y funtor realizable se debe a J. H. C. Whitehead, véase [Whi50] Capítulo 14.

La noción dada por Baues de sucesión exacta para un funtor que se introduce en la siguiente definición es una rica estructura que aporta gran cantidad de información sobre la realizabilidad en los morfismos. La definición que damos aquí es un caso particular de la que aparece en [Bau99] VI.5.4, véase también [Bau99] VI.5.1.

Definición 4.2.2. Dada una categoría cualquiera \mathbf{C} un *\mathbf{C} -bimódulo* D es un funtor

$$D: \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Dado un funtor $\lambda: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ y dos \mathbf{B} -bimódulos D y H una *sucesión exacta* para λ

$$D \xrightarrow{+} \mathbf{A} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{B} \xrightarrow{\theta} H$$

consiste en lo siguiente:

- (a) Para todo morfismo $f: X \rightarrow Y$ en \mathbf{A} el grupo abeliano $D(\lambda X, \lambda Y)$ actúa transitivamente en el conjunto de morfismos $\lambda^{-1}(\lambda f) \subset \mathbf{A}(X, Y)$.

- (b) La acción anterior satisface la siguiente propiedad (ley de distributividad lineal)

$$(f_0 + \alpha)(g_0 + \beta) = f_0 g_0 + f_* \beta + g^* \alpha.$$

Aquí $f_0: Y \rightarrow Z$ y $g_0: X \rightarrow Y$ son morfismos en \mathbf{A} , $f = \lambda f_0$, $g = \lambda g_0$, $f_* = D(1, f)$, $g^* = D(g, 1)$, $\alpha \in D(\lambda Y, \lambda Z)$ y $\beta \in D(\lambda X, \lambda Y)$.

- (c) Para todo par de objetos X e Y en \mathbf{A} y morfismo $f: \lambda X \rightarrow \lambda Y$ en \mathbf{B} está definido un elemento $\theta_{X,Y}(f) \in H(\lambda X, \lambda Y)$ que es nulo si y sólo si el morfismo f es realizable.

- (d) El *operador de obstrucción* θ es una derivación, es decir, dados morfismos

$$\lambda X \xrightarrow{f} \lambda Y \xrightarrow{g} \lambda Z$$

se cumple la siguiente fórmula

$$\theta_{X,Z}(gf) = g_* \theta_{X,Y}(f) + f^* \theta_{Y,Z}(g).$$

Aquí $g_* = H(1, g)$ y $f^* = H(f, 1)$.

- (e) Dado un objeto X de \mathbf{A} y $\alpha \in H(\lambda X, \lambda X)$ existe otro $Y \in \text{Ob} \mathbf{A}$ tal que $\lambda X = \lambda Y$ y $\theta_{X,Y}(1_{\lambda X}) = \alpha$. En estas condiciones denotaremos $X = Y + \alpha$.

Se puede comprobar de forma sencilla usando (d) que el funtor λ es necesariamente suficiente.

Para describir las sucesiones exactas en las que se sumergen los funtores λ de la sección anterior definimos los siguientes funtores en las categorías de sistemas de homotopía.

Definición 4.2.3. El funtor ($n \geq 3$)

$$\mathbb{I}_n: {}_2\mathbf{CW}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)))$$

definido en (3.1.7) factoriza a través de r_n . Dicha factorización

$$\mathbb{I}_n: \mathbf{H}_n^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) = \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)))$$

envía un sistema de homotopía $\underline{X}_n = (\mathcal{C}_*, f_n, X^{n-1})$ al $\mathbf{ab}(T)$ -modulo

$$\mathbb{I}_n \underline{X}_n = \mathbb{I}_n C_{f_n},$$

véase [Bau99] VI.1.10.

Teorema 4.2.4. *Están definidas sucesiones exactas para los funtores λ_{n+1} ($n \geq 3$) como siguen*

$$H^n(-, \mathbb{I}_n-) \xrightarrow{+} \mathbf{H}_{n+1}^T / \simeq \xrightarrow{\lambda_{n+1}} \mathbf{H}_n^T / \simeq \xrightarrow{\theta} H^{n+1}(-, \mathbb{I}_n-).$$

Nosotros estamos especialmente interesados en la construcción del operador de obstrucción θ . Dados dos sistemas de homotopía $\underline{X} = (\mathcal{C}_*, f_{n+1}, X^n)$ e $\underline{Y} = (\mathcal{C}'_*, g_{n+1}, Y^n)$ y una clase de homotopía

$$(\xi, \eta): \lambda \underline{X} = (\mathcal{C}_*, f_n, X^{n-1}) \longrightarrow (\mathcal{C}'_*, g_n, Y^{n-1}) = \lambda \underline{Y},$$

la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\xi_n} & \mathcal{C}'_n \\ f_n \downarrow & & \downarrow g_n \\ \Pi_{n-1} X^{n-1} & \xrightarrow{\eta_*} & \Pi_{n-1} Y^{n-1} \end{array}$$

asegura la existencia de una extensión $\bar{\eta}: X^n \rightarrow Y^n$ de η . Sin embargo el cuadrado superior del siguiente diagrama no tiene por qué ser conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{\xi_{n+1}} & \mathcal{C}'_{n+1} & & \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow g_{n+1} & & \\ & & \Pi_n X^n & \xrightarrow{\bar{\eta}_*} & \Pi_n Y^n & & \\ & & \downarrow & & \downarrow j & & \\ \mathcal{C}_n & \xrightarrow{d_{n+1}} & \Pi_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\xi_n = (\bar{\eta}, \eta)_*} & \Pi_n(Y^n, Y^{n-1}) & \xrightarrow{d_{n+1}} & \mathcal{C}'_n \end{array}$$

aunque sí lo son el cuadrado inferior y los triángulos laterales. Usando que ξ es un morfismo de complejos de cadenas se deduce además de forma inmediata que el morfismo $-g_{n+1}\xi_{n+1} + \bar{\eta}f_{n+1}$ factoriza de manera única a través de $\text{Ker } j = \mathbb{I}_n Y^n = \mathbb{I}_n \lambda \underline{Y}$

$$(4.2.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{-g_{n+1}\xi_{n+1} + \bar{\eta}f_{n+1}} & \Pi_n Y^n \\ & \searrow \alpha & \nearrow \hookrightarrow \\ & \mathbb{I}_n \lambda \underline{Y} & \end{array}$$

Más aún, α es un cociclo ya que

$$\begin{aligned} (-g_{n+1}\xi_{n+1} + \bar{\eta}f_{n+1})d_{n+2} &= -g_{n+1}\xi_{n+1}d_{n+2} \\ &= -g_{n+1}d_{n+2}\xi_{n+2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí usamos que f_{n+1} y g_{n+1} son cociclos. El cociclo α es un representante de la clase de cohomología

$$\theta_{\underline{X}, \underline{Y}}(\xi, \eta) \in H^{n+1}(\lambda \underline{X}, \mathbb{I}_n \lambda \underline{Y}).$$

En lo que respecta a la realizabilidad en los objetos de los funtores λ tenemos el siguiente resultado general.

Teorema 4.2.5. *Sea $\underline{X}_n = (\mathcal{C}_*, f_n, X^{n-1})$ un sistema de homotopía de orden $n \geq 3$. Hay un elemento bien definido*

$$\theta_n(\underline{X}_n) \in H^{n+2}(\underline{X}_n, \mathbb{I}_n \underline{X}_n)$$

tal que los siguientes apartados son equivalentes,

- (1). $\theta_n(\underline{X}_n) = 0$,
- (2). \underline{X}_n es realizable a través de λ_{n+1} ,
- (3). existe un sistema de homotopía \underline{X}_{n+1} de orden $n+1$ tal que $\lambda_{n+1} \underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n$.

Además este elemento es natural, es decir, dado un morfismo $f: \underline{X}_n \rightarrow \underline{Y}_n$ en \mathbf{H}_n^T se tiene que

$$f_* \theta_n(\underline{X}_n) = f^* \theta_n(\underline{Y}_n) \in H^{n+2}(\underline{X}_n, \mathbb{I}_n \underline{Y}_n).$$

La equivalencia (1) \Leftrightarrow (3) se sigue de [Bau99] VI.9.1 y (2) \Leftrightarrow (3) de [Bau99] VI.8.5. Por último la naturalidad es consecuencia de [Bau99] VI.9.2.

El elemento $\theta_n(\underline{X}_n)$ se construye de la siguiente manera. Consideramos el siguiente diagrama cuya fila es parte de la sucesión exacta del par (C_{f_n}, X^{n-1})

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{C}_{n+1} & & \\ & & & & \downarrow d_{n+1} & & \\ \Pi_n X^{n-1} & \xrightarrow{i_*} & \Pi_n C_{f_n} & \xrightarrow{j} & \Pi_n(C_{f_n}, X^{n-1}) = \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\partial=f_n} & \Pi_{n-1} X^{n-1}, \end{array}$$

aquí usamos también (3.4.9) para la igualdad. Al ser el $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{C}_{n+1} proyectivo y $f_n d_{n+1} = 0$ existe $\varphi: \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow \Pi_n C_{f_n}$ tal que $j\varphi = d_{n+1}$. Más aún, como $d_{n+1} d_{n+2} = 0$ el morfismo φd_{n+2} factoriza de manera única a través de la imagen de i_* , que es $\mathbb{I}_n \underline{X}_n$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+2} & \xrightarrow{\varphi} & \Pi_n C_{f_n} \\ & \searrow \beta & \nearrow \hookrightarrow \\ & \mathbb{I}_n \underline{X}_n & \end{array}$$

El cociclo β representa a $\theta_n(\underline{X}_n)$.

El siguiente resultado, aplicación de (4.2.5), es particular de la categoría de espacios bajo un árbol y aplicaciones propias, ya que depende fundamentalmente de (2.2.14).

Proposición 4.2.6. *Dado un complejo de cadenas $(n-2)$ -reducido \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ ($n \geq 2$) siempre existe un sistema de homotopía \underline{X}_{n+1} de orden $n+1$ con complejo de cadenas $\mathcal{C}_* \underline{X}_{n+1} = \mathcal{C}_*$.*

Demostración. Consideremos el sistema de homotopía de orden n $\underline{X}_n = (\mathcal{C}_*, d_n, S_{\alpha_{n-1}}^{n-1})$ tal que $S_{\alpha_{n-1}}^{n-1}$ es el objeto esférico correspondiente a \mathcal{C}_{n-1} . En virtud de (4.1.3) y (4.2.5) el enunciado de esta proposición equivale a probar que $\theta_n(\underline{X}_n) = 0$. Calculemos pues $\theta_n(\underline{X}_n)$ siguiendo las instrucciones anteriores. La sucesión exacta del par $(C_{f_n}, S_{\alpha_{n-1}}^{n-1})$ toma en este caso la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Ker } d_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & \mathcal{C}_{n+1} & \\ & & & \uparrow h_n & \searrow l & \downarrow d_{n+1} & \\ \Pi_n S_{\alpha_{n-1}}^{n-1} & \xrightarrow{i_*} & \Pi_n C_{f_n} & \xrightarrow{j} & \Pi_n (C_{f_n}, S_{\alpha_{n-1}}^{n-1}) = \mathcal{C}_n & \xrightarrow{d_n} & \Pi_{n-1} S_{\alpha_{n-1}}^{n-1} = \mathcal{C}_{n-1}. \end{array}$$

Aquí h_n y l son la imagen de j , y d'_{n+1} la factorización de d_{n+1} a través del núcleo de d_n . En virtud de (2.2.14) $\text{Ker } d_n$ es un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo libre f. g. y por tanto existe una sección s de h_n , luego podemos tomar $\varphi = sd'_{n+1}$. Con esta elección $\varphi d_{n+2} = 0$ ya que l es un monomorfismo y por tanto $d'_{n+1} d_{n+2} = 0$, así que $\beta = 0$ y $\theta_n(\underline{X}_n) = 0$. \square

Definición 4.2.7. Dado un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} un *espacio de Moore* de tipo (\mathcal{M}, n) ($n \geq 2$) es un T -complejo 1-conexo X cuyo único $\mathbf{ab}(T)$ -módulo de homología propia no trivial es $\mathcal{H}_n X = \mathcal{M}$. En estas condiciones diremos que n es el *grado* de X .

Los problemas de existencia y unicidad de espacios de Moore ya han sido considerados por diversos autores, véanse por ejemplo [Bea93], [ADMQ95], [ACQ95] y [Cab98]. Los resultados que aparecen en dichos trabajos se basan a la versión del Teorema 2.2.14 para árboles con un sólo final que apareció en [Her87], aunque probada allí incorrectamente. Una vez encontrada en [ACMQ03] una prueba correcta de dicho resultado, válida además para árboles cualesquiera, podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 4.2.8. *Para todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} y $n \geq 2$ existe un espacio de Moore X de tipo (\mathcal{M}, n) que es $(n-1)$ -reducido y de dimensión $\dim X \leq n+2$. En general podemos tomar X de dimensión $\dim X = n + \text{proj dim } \mathcal{M}$ aunque nunca menor.*

Demostración. Usando (2.2.14) vemos que existe un complejo de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathcal{C}_n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

cuyo único $\mathbf{ab}(T)$ -módulo de homología no nulo es $H_n \mathcal{C}_* = \mathcal{M}$. Usando (4.2.6) obtenemos un sistema de homotopía de orden $n + 2$ $\underline{X}_{n+2} = (\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1})$ por tanto $X = C_{f_{n+2}}$ es un espacio de Moore del tipo deseado. Si \mathcal{M} fuera de dimensión proyectiva 1 entonces la imagen de d_{n+1} sería un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo proyectivo f. p. y por tanto libre por (2.2.16), luego que podríamos tomar un complejo de cadenas \mathcal{C}_* con las propiedades anteriores y $\mathcal{C}_{n+2} = 0$, y así el espacio de Moore X que obtendríamos sería de dimensión $n + 1$, como ocurre en teoría de homotopía ordinaria. Por último si \mathcal{M} fuera un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo proyectivo por (2.2.16) \mathcal{M} sería libre y el correspondiente objeto esférico de dimensión n asociado, véase (3.1.1), sería un espacio de Moore del tipo que buscamos. \square

4.3 Cohomología de categorías

En esta sección se repasan los conceptos básicos sobre la cohomología de una categoría pequeña \mathbf{C} con coeficientes en un \mathbf{C} -bimódulo. Esto es un caso particular de la cohomología con coeficientes en un sistema natural de grupos abelianos en el sentido de Baues-Wirsching ([BW85]) aunque ya había sido considerada con anterioridad por Mitchell ([Mit72]). Nosotros aquí seguiremos la exposición en [Bau89] IV.5 particularizándola al caso concreto de coeficientes en un bimódulo, véase [Bau89] IV.5.13.

Definición 4.3.1. Un n -símplice $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ($n \geq 1$) en una categoría pequeña \mathbf{C} es una sucesión de morfismos

$$A_0 \xleftarrow{\sigma_1} A_1 \xleftarrow{\sigma_2} \cdots \xleftarrow{\sigma_n} A_n.$$

Un 0-símplice es simplemente un objeto de \mathbf{C} . Si D es un \mathbf{C} -bimódulo una n -cocadena ($n \geq 1$) de \mathbf{C} con coeficientes en D es una función f que envía cada n -símplice σ a un elemento $f(\sigma) \in D(A_n, A_0)$. Una 0-cocadena es una función que envía cada objeto A de \mathbf{C} a un elemento $f(A) \in D(A, A)$. El conjunto $F^n(\mathbf{C}, D)$ ($n \geq 0$) de n -cocadenas de \mathbf{C} con coeficientes en D es un grupo abeliano con las operaciones obvias. Es más, $F^*(\mathbf{C}, D)$ es un complejo de cocadenas con la diferencial δ que pasamos a definir. Dada una

$(n - 1)$ -cocadena f ($n \geq 2$) se define

$$\begin{aligned} (\delta f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \sigma_{1*} f(\sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(\sigma_1, \dots, \sigma_i \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \\ &\quad + (-1)^n \sigma_n^* f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

Si f es una 0-cocadena y $\sigma_1: A_1 \rightarrow A_0$ un 1-símplice se define

$$(\delta f)(\sigma_1) = \sigma_{1*} f(A_1) - \sigma_1^* f(A_0).$$

La *cohomología* de \mathbf{C} con coeficientes en D se define como la de este complejo de cocadenas ($n \geq 0$)

$$H^n(\mathbf{C}, D) = H^n F^*(\mathbf{C}, D).$$

El *pull-back* del \mathbf{C} -bimódulo D a lo largo de un funtor $\varphi: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ entre categorías pequeñas se define como el siguiente \mathbf{B} -bimódulo

$$\varphi^* D: \mathbf{B}^{op} \times \mathbf{B} \xrightarrow{\varphi^{op} \times \varphi} \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \xrightarrow{D} \mathbf{Ab}.$$

Análogamente el pull-back de una transformación natural $t: D \rightarrow D'$ entre \mathbf{C} -bimódulos a lo largo de φ es

$$\varphi^* t = t(\varphi^{op} \times \varphi): \varphi^* D \longrightarrow \varphi^* D'.$$

El funtor φ da lugar a un morfismo de complejos de cocadenas

$$\varphi^*: F^*(\mathbf{C}, D) \longrightarrow F^*(\mathbf{B}, \varphi^* D)$$

que envía una n -cocadena f a

$$(\varphi^* f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_n)).$$

Este morfismo induce homomorfismos en cohomología ($n \geq 0$)

$$\varphi^*: H^n(\mathbf{C}, D) \longrightarrow H^n(\mathbf{B}, \varphi^* D).$$

Una transformación natural $t: D \rightarrow D'$ entre dos \mathbf{C} -bimódulos también da lugar a un morfismo de complejos de cocadenas

$$t_*: F^*(\mathbf{C}, D) \longrightarrow F^*(\mathbf{C}, D')$$

definido como

$$(t_* f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = t(f(\sigma_1, \dots, \sigma_n))$$

que induce homomorfismos

$$t_*: H^n(\mathbf{C}, D) \longrightarrow H^n(\mathbf{C}, D').$$

Para describir la funtorialidad de la cohomología de categorías consideramos la categoría \mathbf{Nat} cuyos objetos son pares (\mathbf{C}, D) formados por una categoría pequeña \mathbf{C} y un \mathbf{C} -bimódulo D . Un morfismo $(\varphi, t): (\mathbf{C}, D) \rightarrow (\mathbf{B}, D')$ es un functor $\varphi: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ junto con una transformación natural $t: \varphi^* D \rightarrow D'$. La composición de morfismos en la categoría \mathbf{Nat} se define de la siguiente manera

$$(\psi, u)(\varphi, t) = (\varphi\psi, u(\psi^*t)): (\mathbf{C}, D) \xrightarrow{(\varphi, t)} (\mathbf{B}, D') \xrightarrow{(\psi, u)} (\mathbf{A}, D'').$$

La cohomología de categorías es un functor ($n \geq 0$)

$$H^n: \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

El homomorfismo inducido por un morfismo $(\varphi, t): (\mathbf{C}, D) \rightarrow (\mathbf{B}, D')$ en \mathbf{Nat} es

$$H^n(\varphi, t) = t_*\varphi^*: H^n(\mathbf{C}, D) \longrightarrow H^n(\mathbf{B}, D').$$

Además se tiene el siguiente resultado, véase [Bau89] IV.5.8.

Teorema 4.3.2. *Si $\varphi: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ es una equivalencia de categorías entonces para todo \mathbf{C} -bimódulo D y $n \geq 0$ el homomorfismo*

$$\varphi^*: H^n(\mathbf{C}, D) \xrightarrow{\cong} H^n(\mathbf{B}, \varphi^* D)$$

es un isomorfismo.

Observación 4.3.3. (1). Es sencillo comprobar de la forma habitual que toda sucesión exacta corta de \mathbf{C} -bimódulos

$$D \xrightarrow{\varphi} D' \xrightarrow{\psi} D$$

induce una sucesión exacta larga de Bockstein en cohomología de categorías

$$\dots \rightarrow H^n(\mathbf{C}, D) \xrightarrow{\varphi_*} H^n(\mathbf{C}, D') \xrightarrow{\psi_*} H^n(\mathbf{C}, D'') \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(\mathbf{C}, D) \rightarrow \dots,$$

véase [Bau91] VI.1.6.

(2). Sea \mathbf{A} una categoría aditiva pequeña y D un \mathbf{A} -bimódulo aditivo en la primera variable, es decir, dados X, Y y $Z \in \mathit{Ob}\mathbf{A}$ cualesquiera

$$(p_1^*, p_2^*): D(X, Z) \oplus D(Y, Z) \simeq D(X \oplus Y, Z).$$

Diremos que una 0-cocadena f de \mathbf{A} con coeficientes en D es *aditiva* si

$$f(X \oplus Y) = p_1^* i_{1*} f(X) + p_2^* i_{2*} f(Y) \in D(X \oplus Y, X \oplus Y).$$

Es sencillo probar que todo 0-cociclo es aditivo. Esto es además consecuencia de resultados mucho más generales probados en [BT96] y conecta la cohomología de categorías con la teoría de representaciones, véase la introducción al Capítulo 7.

(3). Sea

$$H \xrightarrow{+} \mathbf{A} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{B} \xrightarrow{\theta} D$$

una sucesión exacta para un funtor λ entre categorías pequeñas. Podemos suponer que la aplicación inducida en los conjuntos de objetos por este funtor $\lambda: Ob\mathbf{A} \rightarrow Ob\mathbf{B}$ es sobreyectiva, ya que de no ser así podríamos restringir la sucesión anterior a la subcategoría llena de \mathbf{B} formada por los objetos en la imagen de λ . En estas condiciones el operador de obstrucción θ da lugar a una clase de cohomología

$$\{\theta\} \in H^1(\mathbf{B}, D)$$

de la siguiente manera, compárese con [Bau89] IV.7. Escogemos una sección $s: Ob\mathbf{B} \hookrightarrow Ob\mathbf{A}$ de λ y definimos la 1-cocadena \tilde{s} de \mathbf{B} con coeficientes en D como

$$\tilde{s}(f: X \rightarrow Y) = \theta_{sX, sY}(f) \in D(X, Y).$$

Usando (4.2.2) (d) se comprueba fácilmente que \tilde{s} es un 1-cociclo cuya clase de cohomología $\{\theta\}$ no depende de la sección s escogida. De hecho cualquier 1-cociclo que represente a $\{\theta\}$ puede ser obtenido como \tilde{s} para una sección s adecuada. El tratamiento de la obstrucción θ desde este punto de vista cohomológico juega un importante papel en esta memoria a la hora de obtener uno de nuestros principales resultados, concretamente la clasificación de tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión 4 con a lo más 3 finales que establecemos en el Capítulo 9.

Parte B

Nuevos resultados

Capítulo 5

Funtores cuadráticos en álgebra controlada

Un functor cuadrático, hablando grosso modo, es un functor entre categorías aditivas que no es necesariamente aditivo, pero que el posible fallo en la aditividad es bilineal. El papel de este tipo de funtores en teoría de homotopía ordinaria es crucial, véase [Bau96], donde se hace un uso muy extenso de ellos. En este capítulo construimos diversos funtores cuadráticos en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos. Estos funtores son generalizaciones de otros bien conocidos en la categoría de grupos abelianos que repasamos en la Sección 5.1. La construcción de los nuevos funtores se realiza en la Sección 5.2. Como se irá viendo a lo largo de esta memoria el papel de los nuevos funtores en teoría de homotopía propia será similar al de sus análogos en teoría de homotopía ordinaria. En la Sección 5.4 damos las primeras aplicaciones en homotopía propia, mientras que en la Sección 5.3 los aplicamos a un estudio más profundo del functor de abelianización $ab: \mathbf{nil}(T) \rightarrow \mathbf{ab}(T)$ en (2.4.2) (4).

5.1 Funtores cuadráticos clásicos

Definición 5.1.1. Una función $f: A \rightarrow B$ entre dos grupos abelianos es *cuadrática* si la función

$$\Delta_f: A \times A \rightarrow B: (a, b) \mapsto f(a + b) - f(a) - f(b)$$

es bilineal. Nótese que los homomorfismos son las funciones para las cuales $\Delta_f = 0$.

Un functor $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ entre categorías aditivas es un *functor cuadrático* si las funciones definidas por F entre los conjuntos de morfismos de \mathbf{A} y \mathbf{B}

son cuadráticas.

Si la categoría de llegada \mathbf{B} es abeliana podemos definir el *efecto cuadrático cruzado* $F(X|Y)$ de dos objetos $X, Y \in \text{Ob}\mathbf{A}$ como el siguiente objeto imagen en \mathbf{B}

$$F(X|Y) = \text{Im}[\Delta_F(i_1p_1, i_2p_2): F(X \oplus Y) \rightarrow F(X \oplus Y)].$$

En particular $\Delta_F(i_1p_1, i_2p_2)$ factoriza canónicamente de la siguiente manera

$$\Delta_F(i_1p_1, i_2p_2): F(X \oplus Y) \xrightarrow{r_{12}} F(X|Y) \xrightarrow{i_{12}} F(X \oplus Y).$$

Esta construcción da lugar a un funtor

$$F(-|-): \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

que mide el posible fallo en la aditividad de F . Además tenemos un isomorfismo

$$(F(i_1), i_{12}, F(i_2)): F(X) \oplus F(X|Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{\cong} F(X \oplus Y)$$

con inverso

$$\begin{pmatrix} F(p_1) \\ r_{12} \\ F(p_2) \end{pmatrix}: F(X \oplus Y) \xrightarrow{\cong} F(X) \oplus F(X|Y) \oplus F(Y),$$

y otro isomorfismo

$$T: F(X|Y) \xrightarrow{\cong} F(Y|X)$$

inducido por

$$F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: F(X \oplus Y) \xrightarrow{\cong} F(Y \oplus X),$$

que satisface $TT = 1$.

Obsérvese que en este caso el funtor F es aditivo si y sólo si todos sus efectos cuadráticos cruzados se anulan, y es cuadrático si y sólo si el funtor $F(-|-)$ es biaditivo.

Ejemplos 5.1.2. A continuación recordamos varios de los funtores cuadráticos en la categoría de grupos abelianos que son de interés en teoría de homotopía ordinaria junto con algunas de sus principales aplicaciones.

- (1). El *funtor Γ de Whitehead*. Dado un grupo abeliano A se define ΓA como el cociente del grupo libre con base $\{\gamma(a); a \in A\}$ por el subgrupo generado por los elementos $(a, b, c \in A)$

$$\gamma(a) - \gamma(-a),$$

$$\gamma(a + b + c) - \gamma(a + b) - \gamma(a + c) - \gamma(b + c) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c),$$

véase [Whi50] II.1. Su efecto cuadrático cruzado es naturalmente equivalente al producto tensorial

$$i_{12}: A \otimes B \hookrightarrow \Gamma(A \oplus B): a \otimes b \mapsto \gamma(i_1 a + i_2 b) - \gamma(i_1 a) - \gamma(i_2 b).$$

Es conocido en teoría de homotopía clásica que la aplicación de Hopf $\eta: S^3 \rightarrow S^2$ genera $\pi_3 S^2 \simeq \mathbb{Z}$ y verifica la siguiente regla de composición en $\pi_3(S^2 \vee S^2)$

$$(i_1 + i_2)\eta = i_1\eta + i_2\eta + [i_1, i_2].$$

Aquí $i_1, i_2: S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2$ son las inclusiones de los factores del coproducto y el corchete denota el producto de Whitehead, que es bilineal. Además si $-1: S^2 \rightarrow S^2$ es una aplicación de grado -1 se sabe que $(-1)\eta = \eta \in \pi_3 S^2$, por tanto para todo CW -complejo X está bien definido el siguiente homomorfismo natural inducido por la composición a derecha con la aplicación de Hopf

$$\eta_0: \Gamma\pi_2 X \rightarrow \Gamma_3 X: \gamma(a) \mapsto a\eta.$$

En [Whi50] II.13 se prueba que de hecho η_0 es una equivalencia natural.

- (2). El *cuadrado tensorial* $\otimes^2 A = A \otimes A$ tiene a $\otimes^2(A|B) = (A \otimes B) \oplus (B \otimes A)$ como efecto cuadrático cruzado.
- (3). El *cuadrado exterior* \wedge^2 se define como el cociente

$$\wedge^2 A = A \otimes A / D,$$

donde D es el subgrupo generado por los elementos diagonales $a \otimes a$ ($a \in A$). La imagen de $a \otimes b$ ($a, b \in A$) en el cuadrado exterior se denota $a \wedge b$. El efecto cuadrático cruzado de \wedge^2 es naturalmente equivalente al producto tensorial

$$i_{12}: A \otimes B \hookrightarrow \wedge^2(A \oplus B): a \otimes b \mapsto i_1 a \wedge i_2 b.$$

El functor \wedge^2 calcula la segunda cohomología de un grupo abeliano A cualquiera

$$\wedge^2 A \simeq H_2 A.$$

Este isomorfismo natural está inducido por el producto de Pontrjagin, véase [Bro82] V.6.4.

(4). El functor *cuadrado tensorial reducido* es

$$\hat{\otimes}^2 A = A \otimes A / S.$$

Aquí S es el subgrupo generado por los elementos simétricos $a \otimes b + b \otimes a$ ($a, b \in A$). La proyección de $a \otimes b$ en el cuadrado tensorial reducido se denota $a \hat{\otimes} b$. Este functor tiene también al producto tensorial como efecto cuadrático cruzado

$$i_{12}: A \otimes B \hookrightarrow \hat{\otimes}^2(A \oplus B): a \otimes b \mapsto i_1 a \hat{\otimes} i_2 b.$$

(5). El producto tensorial $- \otimes \mathbb{Z}_2$ es un functor aditivo. Es conocido que las suspensiones de la aplicación de Hopf $\Sigma^{n-2}\eta: S^{n+1} \rightarrow S^n$ generan $\pi_{n+1}S^n = \mathbb{Z}_2$ ($n \geq 3$), por tanto para todo CW -complejo X están bien definidos los homomorfismos naturales ($n \geq 3$)

$$\eta_{n-2}: \pi_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \Gamma_{n+1} X: a \otimes 1 \mapsto a(\Sigma^{n-2}\eta),$$

Es más, si X es $(n-1)$ -conexo esto es un isomorfismo, véase [Whi48].

Todos estos funtores encajan en el siguiente diagrama conmutativo natural en A

$$(5.1.A) \quad \begin{array}{ccccc} \otimes^2 A & & & & \\ \downarrow W & & & & \\ \Gamma A & \xrightarrow{\tau} & \otimes^2 A & \xrightarrow{q} & \wedge^2 A \\ \downarrow \sigma & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma} & & \parallel \\ A \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \hat{\otimes}^2 A & \xrightarrow{\bar{q}} & \wedge^2 A \end{array}$$

cuyas filas y columna son exactas. Los homomorfismos que aparecen en el diagrama son los siguientes:

- $W: \otimes^2 A \simeq \Gamma(A|A) \xrightarrow{i_{12}} \Gamma(A \oplus A) \xrightarrow{\Gamma(1_A, 1_A)} \Gamma A$ es el *producto de Whitehead algebraico*, que envía un generador $a \otimes b$ en el elemento $W(a \otimes b) = [a, b] = \gamma(a + b) - \gamma(a) - \gamma(b)$,
- $\tau: \Gamma A \xrightarrow{\Gamma(i_1 + i_2)} \Gamma(A \oplus A) \xrightarrow{r_{12}} \Gamma(A|A) \simeq \otimes^2 A: \gamma(a) \mapsto a \otimes a$,
- $\sigma: \Gamma A \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_2: \gamma(a) \mapsto a \otimes 1$,
- $\bar{\tau}: A \otimes \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 A: a \otimes 1 \mapsto a \hat{\otimes} a$,
- $q: \otimes^2 A \rightarrow \wedge^2 A$ es la proyección al cociente,

- al igual que $\bar{\sigma}: \otimes^2 A \rightarrow \hat{\otimes}^2 A$,
- y finalmente $\bar{q}: \hat{\otimes} A \rightarrow \wedge^2 A: a \hat{\otimes} b \mapsto a \wedge b$.

En ΓA se tiene la igualdad $\gamma(na) = n^2\gamma(a)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$, en consecuencia tenemos que $W\tau = 1_A + 1_A = 2 \cdot 1_A$. La inyectividad de $\bar{\tau}$ es bien conocida, a pesar de ello la demostraremos en el siguiente lema para que pueda ser contrastada con el resultado similar en álgebra controlada (7.10.6).

Lema 5.1.3. *El homomorfismo natural $\bar{\tau}$ es inyectivo, más aún, admite una retracción (no natural).*

Demostración. Sea A un grupo abeliano cualquiera. Aplicando la naturalidad de $\bar{\tau}$ a la proyección natural $p: A \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_2, p(a) = a \otimes 1$, obtenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \hat{\otimes}^2 A \\ p \otimes \mathbb{Z}_2 \parallel & & \downarrow \hat{\otimes}^2 p \\ (A \otimes \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \hat{\otimes}^2 (A \otimes \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

por tanto basta probar el lema para el grupo abeliano $A \otimes \mathbb{Z}_2$. Tomamos una base B de $A \otimes \mathbb{Z}_2$ como \mathbb{F}_2 -espacio vectorial y escogemos un orden total \preceq en B . Es inmediato comprobar que el conjunto $\hat{\otimes}^2 B = \{a \hat{\otimes} b; a \preceq b \in B\}$ es una base de $\hat{\otimes}^2 (A \otimes \mathbb{Z}_2)$ y que el homomorfismo

$$\xi: \hat{\otimes}^2 (A \otimes \mathbb{Z}_2) \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_2$$

definido sobre los elementos de $\hat{\otimes}^2 B$ como $\xi(a \otimes a) = a$ y $\xi(a \otimes b) = 0$, ($a \prec b \in B$), es una retracción de $\bar{\tau}$, esto es $\xi\bar{\tau} = 1$. \square

El producto de Whitehead algebraico definido arriba determina el producto de Whitehead en homotopía ordinaria a través del siguiente diagrama conmutativo natural en el CW -complejo X

(5.1.B)

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma\pi_2 X \\ & \nearrow W & \downarrow \simeq \eta_0 \\ \pi_2 X \otimes \pi_2 X & & \Gamma_3 X \\ & \searrow [-, -] & \end{array}$$

El homomorfismo σ encaja en el siguiente diagrama conmutativo natural, donde Σ denota a los homomorfismos de suspensión en grupos de homotopía y grupos de Whitehead

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\pi_2 X & \xrightarrow{\sigma} & \pi_2 X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\Sigma \otimes \mathbb{Z}_2} \pi_3 \Sigma X \otimes \mathbb{Z}_2 . \\ \eta_0 \downarrow \simeq & & \downarrow \eta_1 \\ \Gamma_3 X & \xrightarrow{\Sigma} & \Gamma_4 \Sigma X \end{array}$$

En particular, si X es 1-conexo, σ equivale a $\Sigma: \Gamma_3 X \rightarrow \Gamma_4 \Sigma X$, ya que en este caso η_1 y $\Sigma: \pi_2 X \rightarrow \pi_3 \Sigma X$ son isomorfismos.

Observación 5.1.4. Sea E un conjunto cualquiera con un orden total \preceq . Los conjuntos

$$\Gamma E = \{\gamma(e), [e_1, e_2]; e, e_1, e_2 \in E, e_1 \succ e_2\},$$

$$\wedge^2 E = \{e_1 \wedge e_2; e_1 \prec e_2 \in E\},$$

son bases de los grupos abelianos libres $\Gamma\mathbb{Z}\langle E \rangle$ y $\wedge^2\mathbb{Z}\langle E \rangle$, respectivamente. Es también conocido que la base del producto tensorial de dos grupos abelianos libres es el producto de las bases

$$\mathbb{Z}\langle A \rangle \otimes \mathbb{Z}\langle B \rangle = \mathbb{Z}\langle A \times B \rangle.$$

De esta forma es inmediato comprobar que para un grupo abeliano libre $\mathbb{Z}\langle E \rangle$ el homomorfismo natural

$$\tau: \Gamma\mathbb{Z}\langle E \rangle \hookrightarrow \otimes^2\mathbb{Z}\langle E \rangle$$

es una inyección y admite retracción. Estas observaciones serán usadas a la hora de construir funtores análogos a los anteriores en álgebra controlada.

5.2 Extensiones al álgebra controlada

Para construir versiones controladas de los funtores del Ejemplo 5.1.2 damos primero las siguientes definiciones técnicas.

Definición 5.2.1. Un *arco* en un espacio topológico es un subespacio homeomorfo a un intervalo compacto de la recta real. Dos puntos cualesquiera de un árbol $u, v \in T$ son los extremos de un único arco que denotaremos \overline{uv} . Es más, si $w \in \overline{uv}$ la unión de \overline{uw} y \overline{wv} por el extremo común es \overline{uv} .

Existe una única distancia métrica d en T tal que la distancia entre los dos vértices de una arista vale 1 y todo arco \overline{uv} es isométrico al intervalo $[0, d(u, v)] \subset \mathbb{R}$.

Fijado un punto base $v_0 \in T$ definimos la aplicación continua

$$\ell = \ell_{v_0}: T \times T \longrightarrow T$$

como la única que satisface las siguientes propiedades ($u, v \in T$),

$$\ell(u, v) \in \overline{uv},$$

$$d(v_0, \ell(u, v)) = \min_{w \in \overline{uv}} d(v_0, w).$$

En efecto, el mínimo de la derecha se alcanza en un único punto $w_1 \in \overline{uv}$ ya que si también se alcanzara en otro $w_2 \in \overline{uv}$ con $w_1 \neq w_2$ entonces el árbol T contendría al ciclo no trivial formado por la unión de los arcos $\overline{v_0 w_1}$, $\overline{w_1 w_2}$ y $\overline{w_2 v_0}$.

Pasamos a definir las versiones controladas de los funtores Γ , \wedge^2 y \otimes en la categoría de grupos abelianos libres T -controlados grandes. Para ello hacemos uso de las bases descritas en (5.1.4) así como de la función ℓ en (5.2.1).

Definición 5.2.2. El *functor de Whitehead T -controlado*

$$\Gamma_T: \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{ab}^g(T)$$

se define en los objetos como $\Gamma_T \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha = \mathbb{Z}\langle \Gamma A \rangle_{\Gamma\alpha}$, donde la función de altura $\Gamma\alpha: \Gamma A \rightarrow T$ viene dada de la siguiente manera ($a, a_1, a_2 \in A; a_1 \succ a_2$),

$$(\Gamma\alpha)(\gamma(a)) = \alpha(a),$$

$$(\Gamma\alpha)([a_1, a_2]) = \ell(\alpha(a_1), \alpha(a_2)).$$

En los morfismos Γ_T coincide con el funtor Γ de Whitehead ordinario en los grupos abelianos subyacentes.

Análogamente definimos el *cuadrado exterior T -controlado*

$$\wedge_T^2: \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{ab}^g(T)$$

como

$$\wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha = \mathbb{Z}\langle \wedge^2 A \rangle_{\wedge^2 \alpha}$$

donde $\wedge^2 \alpha: \wedge^2 A \rightarrow T$ se define como ($a_1 \prec a_2 \in A$)

$$(\wedge^2 \alpha)(a_1 \wedge a_2) = \ell(\alpha(a_1), \alpha(a_2)).$$

En los morfismos \wedge_T^2 coincide con el cuadrado exterior ordinario \wedge^2 en los grupos abelianos subyacentes.

El *producto tensorial T -controlado* es el funtor

$$- \otimes_T -: \mathbf{ab}^g(T) \times \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{ab}^g(T)$$

definido como

$$\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \otimes \mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta = \mathbb{Z}\langle A \times B \rangle_{\alpha \otimes \beta}.$$

Aquí $\alpha \otimes \beta: A \times B \rightarrow T$ es la función de altura dada por

$$(\alpha \otimes \beta)(a, b) = \ell(\alpha(a), \beta(b)).$$

Al igual que en los dos casos anteriores el producto tensorial T -controlado coincide en los morfismos con el producto tensorial ordinario $- \otimes -$ en los grupos abelianos subyacentes.

El *cuadrado tensorial T -controlado* es el funtor

$$\otimes_T^2: \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{ab}^g(T)$$

dado por

$$\otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha = \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha.$$

Los funtores Γ_T , \wedge_T^2 y \otimes_T^2 son cuadráticos y $- \otimes_T -$ biaditivo, ya que sus análogos ordinarios, con los cuales coinciden a nivel de grupos subyacentes, satisfacen dichas propiedades. Además existen homomorfismos controlados naturales

$$W_T: \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \longrightarrow \Gamma_T \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha,$$

$$\tau_T: \Gamma_T \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \hookrightarrow \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha,$$

$$q_T: \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \twoheadrightarrow \wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha,$$

que coinciden con W , τ y q en (5.1.A) en los grupos abelianos subyacentes.

Observación 5.2.3. (1). Los funtores arriba definidos no dependen, salvo equivalencia natural, del punto base $v_0 \in T$ escogido para la definición de ℓ en (5.2.1). Dicha equivalencia natural viene dada en todos los casos por el homomorfismo controlado que coincide con la identidad en los grupos abelianos subyacentes. Ese homomorfismo es controlado ya que si $v_1 \in T$ es otro posible punto base entonces para cualesquiera $u, v \in T$ tenemos la siguiente cota uniforme

$$d(\ell_{v_0}(u, v), \ell_{v_1}(u, v)) \leq d(v_0, v_1).$$

- (2). De forma similar se comprueba que los funtores y las transformaciones naturales de (5.2.2) son compatibles con los funtores de cambio de árbol base de (2.2.2) (3)

$$\mathbb{F}^f : \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{ab}^g(T')$$

inducidos por una aplicación propia $f: T \rightarrow T'$, es decir, tenemos equivalencias naturales

$$\mathbb{F}^f \Gamma_T = \Gamma_{T'} \mathbb{F}^f,$$

$$\mathbb{F}^f \wedge_T^2 = \wedge_{T'}^2 \mathbb{F}^f,$$

$$\mathbb{F}^f(- \otimes_T -) = (\mathbb{F}^f -) \otimes_{T'} (\mathbb{F}^f -),$$

inducidas todas ellas por la identidad en los grupos abelianos subyacentes, y además, usando estas equivalencias naturales como identificaciones tenemos que

$$\mathbb{F}^f W_T = W_{T'} \mathbb{F}^f,$$

$$\mathbb{F}^f \tau_T = \tau_{T'} \mathbb{F}^f,$$

$$\mathbb{F}^f q_T = q_{T'} \mathbb{F}^f.$$

- (3). A través del functor fiel $\mathbf{ab}^g(T) \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$ en (2.2.2) (6) podemos suponer que los funtores de (5.2.2) toman valores en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos, es más, si los restringimos en sus dominios a la subcategoría llena $\mathbf{ab}(T) \subset \mathbf{ab}^g(T)$ obtenemos funtores

$$\Gamma_T, \wedge_T^2 : \mathbf{ab}(T) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)),$$

$$- \otimes_T - : \mathbf{ab}(T) \times \mathbf{ab}(T) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)).$$

Es inmediato comprobar que estos funtores satisfacen las propiedades que se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 5.2.4. *Los funtores Γ_T y \wedge_T^2 en (5.2.3) (3) son cuadráticos, y el producto tensorial T -controlado $- \otimes_T -$, también en (5.2.3) (3), biaditivo. Es más, los efectos cuadráticos cruzados de Γ_T y \wedge_T^2 son naturalmente equivalentes al producto tensorial T -controlado a través de los homomorfismos controlados i_{12} que coinciden con los de (5.1.2) (1) y (3) en los grupos abelianos subyacentes. Más aún, la siguiente sucesión natural de morfismos de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos es exacta corta escindible*

$$\Gamma_T \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \xrightarrow{\tau_T} \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \xrightarrow{q_T} \wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha,$$

y $\tau_T = r_{12} \Gamma_T(i_1 + i_2)$.

El siguiente paso consiste en extender los funtores de (5.2.3) (3) a toda la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos. La extensión se llevará a cabo usando el resultado que sigue a la definición que pasamos a dar.

Definición 5.2.5. Un funtor cualquiera (no necesariamente aditivo ni cuadrático) $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ entre dos categorías abelianas se dice *exacto a derecha* si para toda sucesión exacta en \mathbf{A}

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

la siguiente sucesión es exacta en \mathbf{B}

$$F(X) \oplus F(X|Y) \xrightarrow{\zeta} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z),$$

donde $\zeta = (F(f), F(f, 1)i_{12}) = (F(f), F(1, 1)i_{12}F(f|1))$.

Proposición 5.2.6. Sea $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un funtor de una categoría aditiva pequeña \mathbf{A} a una categoría abeliana cocompleta \mathbf{B} . El funtor F se extiende a través de la inclusión llena $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A})$ a un funtor $\tilde{F}: \mathbf{mod}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$ exacto a derecha que preserva colímites filtrados. Esta extensión es única salvo equivalencia natural. Más aún, si $G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es otro funtor toda transformación natural $\nu: F \rightarrow G$ se extiende de manera única a una transformación natural $\tilde{\nu}: \tilde{F} \rightarrow \tilde{G}$ entre las extensiones de F y G .

Demostración. El funtor F se extiende a las categorías de pares de la manera obvia

$$F': \mathbf{Pair}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{Pair}(\mathbf{B}).$$

F' es compatible con la relación de equivalencia \sim definida en el párrafo anterior a (2.1.4). Al ser \mathbf{B} abeliana tiene sentido considerar el funtor

$$\text{Coker}: \mathbf{Pair}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathbf{B}: \varphi \mapsto \text{Coker } \varphi.$$

Este funtor factoriza a través de \sim , por tanto, en virtud de (2.1.4) existe un funtor \bar{F} , único salvo equivalencia natural, que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Pair}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{F'} & \mathbf{Pair}(\mathbf{B}) \\ \text{Coker} \downarrow & & \downarrow \text{Coker} \\ \mathbf{fp}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbf{B} \end{array}$$

En particular \bar{F} extiende a F .

Para cada \mathbf{A} -módulo \mathcal{M} consideramos la categoría $\mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M}$, pequeña y filtrante, de \mathbf{A} -módulos f. p. sobre \mathcal{M} . Sus objetos son morfismos de \mathbf{A} -módulos $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ con \mathcal{N} f. p. y sus morfismos son triángulos conmutativos en $\mathbf{mod}(\mathbf{A})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Un morfismo de \mathbf{A} -módulos $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ da lugar a un funtor

$$f_*: \mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M}'$$

que envía $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ a la composición

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}'.$$

Sea $J_{\mathcal{M}}: \mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{A})$ el funtor que envía $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ al \mathbf{A} -módulo \mathcal{N} . Definimos

$$\tilde{F}\mathcal{M} = \operatorname{colim} \bar{F}J_{\mathcal{M}}.$$

El siguiente diagrama de funtores es conmutativo

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M} & \xrightarrow{f_*} & \mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M}' \\ & \searrow J_{\mathcal{M}} & \swarrow J_{\mathcal{M}'} \\ & \mathbf{fp}(\mathbf{A}) & \end{array}$$

por tanto f_* induce un morfismo $\tilde{F}f$ entre los siguientes colímites

$$\tilde{F}f: \tilde{F}\mathcal{M} = \operatorname{colim} \bar{F}J_{\mathcal{M}} \longrightarrow \tilde{F}\mathcal{M}' = \operatorname{colim} \bar{F}J_{\mathcal{M}'}$$

De esta forma queda definido el funtor \tilde{F} . Este funtor extiende a \bar{F} ya que si \mathcal{M} es f. p. la identidad $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es objeto final de $\mathbf{fp}(\mathbf{A}) \downarrow \mathcal{M}$ y por tanto

$$\tilde{F}\mathcal{M} = \operatorname{colim} \bar{F}J_{\mathcal{M}} = \bar{F}J_{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}) = \bar{F}\mathcal{M}.$$

En particular \tilde{F} extiende a F , como se pretendía. Se ve claramente que, por construcción, el funtor \tilde{F} satisface las propiedades del enunciado.

Ahora pasamos a extender la transformación natural $\nu: F \rightarrow G$. Es evidente que ν induce una transformación natural $\nu': F' \rightarrow G'$ entre las extensiones de F y G a las categorías de pares, que a su vez da lugar a otra transformación natural $\bar{\nu}: \bar{F} \rightarrow \bar{G}$ bien definida por la siguiente propiedad

$$\bar{\nu}(\operatorname{Coker}) = (\operatorname{Coker})\nu',$$

véase el diagrama (a). Una vez extendida ν mediante $\bar{\nu}$ a los funtores que parten de la categoría de \mathbf{A} -módulos finitamente presentados, para cada \mathbf{A} -módulo cualquiera \mathcal{M} podemos considerar la transformación natural

$$\bar{\nu}J_{\mathcal{M}}: \bar{F}J_{\mathcal{M}} \longrightarrow \bar{G}J_{\mathcal{M}}.$$

Tomando colímite obtenemos un morfismo natural de \mathbf{A} -módulos

$$\tilde{\nu}: \tilde{F}\mathcal{M} \longrightarrow \tilde{G}\mathcal{M}$$

que define la transformación natural buscada. Para ver que $\tilde{\nu}$ extiende a $\bar{\nu}$, y en particular a ν , basta usar el argumento del objeto final, como en la construcción de \tilde{F} ; y para comprobar la naturalidad de $\tilde{\nu}$ se usaría de nuevo la conmutatividad de (b). \square

Observación 5.2.7. Es inmediato comprobar que si el funtor F , en el enunciado de la proposición anterior, es cuadrático o aditivo entonces su extensión \tilde{F} también lo es.

Definición 5.2.8. Definimos el *funtor de Whitehead T -controlado*

$$\Gamma_T: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

como la extensión del funtor Γ_T en (5.2.3) (3) a la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos dada por (5.2.6).

Al *producto tensorial T -controlado*

$$- \otimes_T -: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \times \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

lo definimos como el efecto cuadrático cruzado de Γ_T , en particular es biaditivo, y además es exacto a derecha y preserva colímites filtrados en cada variable.

Llamaremos *cuadrado tensorial T -controlado* al funtor

$$\otimes_T^2: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

definido como

$$\otimes_T^2 \mathcal{M} = \mathcal{M} \otimes_T \mathcal{M}.$$

Las propiedades del producto tensorial T -controlado prueban que este funtor es cuadrático exacto a derecha y preserva colímites filtrados.

Por último definimos el *cuadrado exterior T -controlado*

$$\wedge_T^2: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

como el conúcleo de la transformación natural $\tau_T = r_{12}\Gamma_T(i_1 + i_2)$,

$$\Gamma_T\mathcal{M} \xrightarrow{\tau_T} \otimes_T^2\mathcal{M} \xrightarrow{q_T} \wedge_T^2\mathcal{M}.$$

Este functor es cuadrático exacto a derecha y preserva colímites filtrados, ya que tanto el functor Γ_T como el cuadrado tensorial T -controlado satisfacen las mismas propiedades.

En virtud de (5.2.4) el producto tensorial T -controlado, el cuadrado exterior T -controlado, y las transformaciones naturales τ_T y q_T coinciden con los definidos en (5.2.2) cuando el $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} es libre finitamente generado. En particular el functor \wedge_T^2 que acabamos de definir coincide, salvo equivalencia natural, con la extensión del functor \wedge_T^2 en (5.2.3) (3) dada por (5.2.6), y su efecto cuadrático cruzado es el producto tensorial T -controlado.

Definición 5.2.9. El “producto tensorial por \mathbb{Z}_2 ” T -controlado es el functor aditivo

$$- \otimes \mathbb{Z}_2: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

definido por composición a izquierda con el functor $- \otimes \mathbb{Z}_2$ en la categoría de grupos abelianos

$$\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2: \mathbf{ab}(T)^{op} \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathbf{Ab} \xrightarrow{- \otimes \mathbb{Z}_2} \mathbf{Ab}.$$

Es inmediato comprobar que este functor coincide con el conúcleo de la transformación natural

$$2 = 1_{\mathcal{M}} + 1_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},$$

y que es exacto a derecha y preserva colímites filtrados.

Proposición 5.2.10. Si definimos $W_T = (\Gamma_T(1, 1))_{i_{12}}$ hay una sucesión exacta natural

$$\otimes_T^2\mathcal{M} \xrightarrow{W_T} \Gamma_T\mathcal{M} \xrightarrow{\sigma_T} \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2.$$

Demostración. En virtud de (5.2.6) es suficiente probar este resultado para $\mathbf{ab}(T)$ -módulos libres f. g.

Dado un grupo abeliano libre T -controlado $\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$ definimos el epimorfismo no natural

$$\sigma'_T: \Gamma_T\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha$$

de la siguiente manera. Si \preceq es un orden total en A , dados a, a_1 y $a_2 \in A$ con $a_1 \succ a_2$ entonces $\sigma'_T(\gamma(a)) = a$ y $\sigma'_T([a_1, a_2]) = 0$. Consideremos ahora el epimorfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos

$$\sigma_T: \Gamma_T\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \otimes \mathbb{Z}_2$$

que evaluado en $\mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta \in \text{Ob}\mathbf{ab}(T)$ viene dado por la siguiente composición

$$\begin{array}{c} \mathbf{ab}^g(T)(\mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta, \Gamma_T \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha) \\ \downarrow (\sigma'_T)_* \\ \mathbf{ab}^g(T)(\mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta, \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha) \\ \downarrow \\ \mathbf{ab}^g(T)(\mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta, \mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha) \otimes \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Aquí la flecha inferior es la proyección natural. Ahora, usando la exactitud de la columna en el diagrama natural de grupos abelianos (5.1.A), es sencillo comprobar que el epimorfismo σ_T es natural y hace exacta a la sucesión del enunciado. \square

Después de dar esta proposición sólo nos falta un ingrediente para terminar de construir la versión controlada de (5.1.A).

Definición 5.2.11. Definimos el functor *cuadrado tensorial reducido T-controlado*

$$\hat{\otimes}_T^2: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$$

como el push-out del siguiente diagrama natural

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_T \mathcal{M} & \xrightarrow{\tau_T} & \otimes_T^2 \mathcal{M} \\ \sigma_T \downarrow & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma}_T \\ \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{M} \end{array}$$

En particular $\hat{\otimes}_T^2$ es un functor cuadrático exacto a derecha que preserva colímites filtrados y encaja en el siguiente diagrama conmutativo natural de filas y columna exactas

$$(5.2.A) \quad \begin{array}{ccccc} & & \otimes_T^2 \mathcal{M} & & \\ & & \downarrow W_T & & \\ & & \Gamma_T \mathcal{M} & \xrightarrow{\tau_T} & \otimes_T^2 \mathcal{M} & \xrightarrow{q_T} & \wedge_T^2 \mathcal{M} \\ & & \downarrow \sigma_T & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma}_T & & \parallel \\ \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{M} & \xrightarrow{\bar{q}_T} & \wedge_T^2 \mathcal{M} & & \end{array}$$

Pasamos ahora a realizar un análisis más profundo del functor $- \otimes \mathbb{Z}_2$ en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos definido en (5.2.9). Tensorizar con \mathbb{Z}_2 da lugar a un functor aditivo

$$(5.2.B) \quad - \otimes \mathbb{Z}_2: \mathbf{ab}^g(T) \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}^g(T)$$

definido como $\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha$, que a su vez se restringe a otro

$$(5.2.C) \quad - \otimes \mathbb{Z}_2: \mathbf{ab}(T) \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T).$$

Estos funtores son claramente llenos y biyectivos en los objetos, es más, los homomorfismos que inducen entre los conjuntos de morfismos dan lugar a isomorfismos

$$(5.2.D) \quad \mathbf{ab}^g(T)(\mathbb{Z}\langle A \rangle_\alpha, \mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}^g(T)(\mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha, \mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta).$$

Siguiendo la terminología de [Mit72] esto equivale a decir que $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}^g(T) = \mathbf{ab}^g(T) \otimes \mathbb{Z}_2$ y $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T) = \mathbf{ab}(T) \otimes \mathbb{Z}_2$, donde \otimes es aquí el producto tensorial de ringoides en [Mit72] 2, y los funtores $- \otimes \mathbb{Z}_2$ en (5.2.B) y (5.2.C) son las proyecciones naturales.

Proposición 5.2.12. *Los cambios de coeficientes*

- (1). $(- \otimes \mathbb{Z}_2)^*: \mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$,
- (2). $(- \otimes \mathbb{Z}_2)_*: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T))$,

son llenos. Es más, el primero es fiel y la siguiente composición coincide con el funtor $- \otimes \mathbb{Z}_2$ en (5.2.9) de manera natural

$$(3). \quad - \otimes \mathbb{Z}_2: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \xrightarrow{(- \otimes \mathbb{Z}_2)^*} \mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)) \xrightarrow{(- \otimes \mathbb{Z}_2)_*} \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)).$$

Más aún, el siguiente diagrama de funtores es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ab}^g(T) & \xrightarrow{- \otimes \mathbb{Z}_2} & \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}^g(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) & \xrightarrow{(- \otimes \mathbb{Z}_2)_*} & \mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)) \end{array}$$

Aquí las flechas verticales son los funtores fieles de (2.2.2) (6).

Demostración. Los funtores aditivos (1) y (2) son ambos exactos a derecha, por tanto para ver que son llenos o fieles basta comprobarlo sobre las subcategorías llenas de los módulos libres finitamente generados. Esto para (2) se sigue de que (5.2.C) es lleno y de la conmutatividad de (2.1.A). Por otro lado cualquier morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos

$$\varphi: \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)(- \otimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)(- \otimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta)$$

está unívocamente determinado por $\varphi(1_{\mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha}): \mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha \rightarrow \mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta$ lo cual prueba que (1) es fiel y lleno. Aquí hemos usado que el funtor $- \otimes \mathbb{Z}_2$ en (5.2.C) induce una biyección entre los conjuntos de objetos.

Como todos los funtores que aparecen en (3) son exactos a derecha basta probar la igualdad $- \otimes \mathbb{Z}_2 = (- \otimes \mathbb{Z}_2)^*(- \otimes \mathbb{Z}_2)_*$ en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos finitamente generados, pero esto se sigue de (5.2.D).

Ahora la conmutatividad del diagrama del enunciado se sigue de (5.2.D) así como de las propiedades ya probadas de (1) y (3). \square

De ahora en adelante identificaremos la categoría $\mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T))$ con la imagen en $\mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$ de la inclusión llena (5.2.12) (1), al igual que suele identificarse a la categoría de \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales con la de grupos abelianos de exponente 2.

Proposición 5.2.13. *Dados dos $\mathbf{ab}(T)$ -módulos \mathcal{M} y \mathcal{N} la proyección natural $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}_2$ induce un isomorfismo*

$$(\mathcal{M} \otimes_T \mathcal{N}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathcal{M} \otimes_T (\mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Demostración. Al ser $\mathcal{M} \otimes_T -$ aditivo y exacto a derecha aplicándolo a la sucesión exacta

$$\mathcal{N} \xrightarrow{2} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}_2$$

obtenemos otra

$$\mathcal{M} \otimes_T \mathcal{N} \xrightarrow{1 \otimes_T 2} \mathcal{M} \otimes_T \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_T (\mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}_2),$$

pero

$$1 \otimes_T 2 = 2: \mathcal{M} \otimes_T \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_T \mathcal{N},$$

de donde se sigue el resultado. \square

Corolario 5.2.14. *Dados un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} la proyección natural $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$ induce isomorfismos*

$$(\wedge_T^2 \mathcal{M}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \wedge_T^2 (\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2),$$

$$(\hat{\otimes}_T^2 \mathcal{M}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \hat{\otimes}_T^2 (\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Observación 5.2.15. (1). Los dos últimos resultados prueban que los funtores \otimes_T , \wedge_T^2 y $\hat{\otimes}_T^2$ se restringen a la categoría de $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)$ -módulos.

(2). En virtud de (2.2.3), (5.2.2) (2) y (5.2.6) los funtores Γ_T , \otimes_T^2 , \wedge_T^2 , $- \otimes \mathbb{Z}_2$ y $\hat{\otimes}_T^2$, así como las transformaciones naturales τ_T , W_T , σ_T , q_T , $\bar{\tau}_T$, $\bar{\sigma}_T$ y \bar{q}_T , ya definidos en la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos para un árbol cualquiera T , son compatibles con los cambios de coeficientes

$$\mathbb{F}_*^f: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T'))$$

a los que da lugar un funtor de cambio de árbol base

$$\mathbb{F}^f : \mathbf{ab}(T) \longrightarrow \mathbf{ab}(T')$$

inducido por una aplicación propia $f: T \rightarrow T'$ entre dos árboles.

- (3). A lo largo de esta sección hemos trabajado con las categorías pequeñas $\mathbf{ab}(T)$ y $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T)$ y no con los anillos $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ y $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$) que son equivalentes Morita a éstas, respectivamente. Hemos elegido esta opción por ser la más cómoda para la construcción de los funtores Γ_T , \otimes_T^2 , \wedge_T^2 , $-\otimes \mathbb{Z}_2$, $\hat{\otimes}_T^2$, y de las transformaciones naturales τ_T , W_T , σ_T , q_T , $\bar{\tau}_T$, $\bar{\sigma}_T$, \bar{q}_T ; sin embargo, a través de las equivalencias en (2.2.12), estos funtores y transformaciones naturales tienen sus versiones correspondientes en las categorías de módulos sobre $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ y/o $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ que denotaremos $\Gamma_{\mathfrak{F}}$, $\otimes_{\mathfrak{F}}^2$, $\wedge_{\mathfrak{F}}^2$, $-\otimes \mathbb{Z}_2$, $\hat{\otimes}_{\mathfrak{F}}^2$; y $\tau_{\mathfrak{F}}$, $W_{\mathfrak{F}}$, $\sigma_{\mathfrak{F}}$, $q_{\mathfrak{F}}$, $\bar{\tau}_{\mathfrak{F}}$, $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}$, $\bar{q}_{\mathfrak{F}}$; respectivamente. En virtud de (2) esta notación es coherente ya que, salvo equivalencia natural, estos últimos funtores y transformaciones naturales sólo dependen de $\mathfrak{F}(T)$, véase 2.2.2 (3). Además en virtud de (2.1.9) los cambios de coeficientes en (5.2.12) (1) y (2) se corresponden con los inducidos por la proyección natural $p: \mathbb{Z}(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ a la que da lugar el homomorfismo de anillos $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$

$$p^* : \mathbf{mod}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F})),$$

$$-\otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}) : \mathbf{mod}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F})) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})).$$

De forma equivalente a como hemos dicho antes identificaremos a la categoría $\mathbf{mod}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}))$ con su imagen a través de inclusión llena p^* , por tanto para todo $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo \mathcal{M} tenemos que $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$.

5.3 Abelianización controlada

En (2.3.2) (4) se definió el funtor “abelianización” de la categoría de grupos de grado de nilpotencia 2 libres en la de grupos abelianos libres

$$(5.3.A) \quad ab : \mathbf{nil} \longrightarrow \mathbf{ab}.$$

Más adelante en (2.4.2) (4) vimos que este funtor se extendía a las respectivas categorías de objetos libres controlados por un árbol

$$(5.3.B) \quad ab : \mathbf{nil}(T) \longrightarrow \mathbf{ab}(T).$$

En esta sección describiremos cierta estructura adicional del funtor (5.3.A) y observaremos que dicha estructura tiene también una versión T -controlada para el funtor (5.3.B).

Definición 5.3.1. Una *extensión lineal* de la categoría \mathbf{B} por el \mathbf{B} -bimódulo D

$$D \xrightarrow{+} \mathbf{A} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{B}$$

es lo mismo que una sucesión exacta para λ en el sentido de (4.2.2)

$$D \xrightarrow{+} \mathbf{A} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{B} \longrightarrow 0$$

donde 0 es el \mathbf{B} -bimódulo trivial, y además λ es biyectivo en los objetos y las acciones en (4.2.2) (a) son efectivas. Obsérvese que λ es necesariamente lleno.

Este concepto, al igual que el de sucesión exacta de funtores, puede ser definido de forma más general, véanse [Bau99] VI.5.3 y VI.5.1. Es más, si \mathbf{B} es pequeña las extensiones lineales de \mathbf{B} por D están clasificadas por el grupo de cohomología $H^2(\mathbf{B}, D)$, véase [Bau89] IV.6.

Consideramos el \mathbf{ab} -bimódulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \wedge^2)$. Para el funtor (5.3.A) tenemos una extensión lineal

$$(5.3.C) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \wedge^2) \xrightarrow{+} \mathbf{nil} \xrightarrow{ab} \mathbf{ab},$$

véase [BHP97] 5.2. La acción $+$ se define como sigue. Para cada grupo de grado de nilpotencia 2 libre $\langle A \rangle^{nil}$ tenemos una extensión central natural

$$(5.3.D) \quad \wedge^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle \xrightarrow{s} \langle A \rangle^{nil} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}\langle A \rangle$$

donde p es la proyección natural sobre la abelianización y $s(a \otimes b) = [a, b]$, ($a, b \in A$). Aquí el corchete denota el producto conmutador en el grupo $\langle A \rangle^{nil}$, como en (2.3.2) (3). Dados dos homomorfismos $f: \langle A \rangle^{nil} \rightarrow \langle B \rangle^{nil}$ y $\varphi: \mathbb{Z}\langle A \rangle \rightarrow \wedge^2 \mathbb{Z}\langle B \rangle$ se define ($x \in \langle A \rangle^{nil}$)

$$(f + \varphi)(x) = f(x) + s\varphi p(x).$$

La extensión \wedge_T^2 del funtor clásico \wedge^2 a la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos construida en la sección anterior sugiere considerar el $\mathbf{ab}(T)$ -bimódulo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(-, \wedge_T^2).$$

En efecto tenemos una extensión lineal para el funtor (5.3.B)

$$(5.3.E) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(-, \wedge_T^2) \xrightarrow{+} \mathbf{nil}(T) \xrightarrow{ab} \mathbf{ab}(T),$$

que se define a partir de (5.3.C) como sigue. Sea $f: \langle A \rangle_{\alpha}^{nil} \rightarrow \langle B \rangle_{\beta}^{nil}$ un homomorfismo controlado. Un elemento $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathbb{Z}\langle A \rangle_{\alpha}, \wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle B \rangle_{\beta})$ es un homomorfismo controlado en $\mathbf{ab}^g(T)$

$$\varphi: \mathbb{Z}\langle A \rangle_{\alpha} \rightarrow \wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle B \rangle_{\beta}.$$

Recordemos que tanto f como φ están dados por homomorfismos entre los correspondientes grupos subyacentes, y que el grupo subyacente a $\wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle B \rangle_\beta$ es $\wedge^2 \mathbb{Z}\langle B \rangle$ por tanto tiene sentido considerar el homomorfismo

$$(f + \varphi): \langle A \rangle^{nil} \rightarrow \langle B \rangle^{nil}$$

en **nil** dado por (5.3.C). Es sencillo comprobar que $f + \varphi$ define un homomorfismo controlado

$$(f + \varphi): \langle A \rangle_\alpha^{nil} \rightarrow \langle B \rangle_\beta^{nil},$$

con lo que queda definida la extensión lineal (5.3.E).

El método utilizado aquí para extender (5.3.C) al álgebra controlada es semejante al usado en [Bau91] VI.2 para extender (5.3.C) a categorías de grupos con operadores.

5.4 El primer módulo de Whitehead no trivial

En [Whi50] y [Whi48] J. H. C. Whitehead calculó functorialmente el primer módulo de Whitehead no trivial $\Gamma_{n+1}X$ de un CW -complejo $(n-1)$ -conexo X ($n \geq 2$) en función de su homología. Dichos resultados se derivan de los mencionados en (5.1.2) (1) y (5) junto con el teorema de Hurewicz. Nosotros generalizamos aquí estos resultados a la teoría de homotopía propia haciendo uso de los funtores en álgebra controlada definidos en la Sección 5.3. Las técnicas usadas en la demostración del siguiente teorema son ya clásicas, se remontan a J. H. C. Whitehead ([Whi50] Capítulo 13). También son usadas por Baues en [Bau89] IX.4.5, que las aplica además a teorías de homotopía diferentes de la ordinaria, con un lenguaje más moderno que adaptamos aquí. Por tanto lo novedoso del siguiente resultado no reside en dichas técnicas, sino en la construcción de los funtores adecuados que encajen en su enunciado. Estos funtores, en el contexto de la aproximación dada por Baues y Quintero ([BQ01]) a la teoría de homotopía propia, aparecen por primera vez en esta memoria. Para el caso concreto de espacios $(n-1)$ -conexos para un cierto $n \geq 3$ y con un sólo final un resultado equivalente al que aquí damos, aunque en la aproximación pro-categoría de Edwards y Hastings ([EH76]) a la homotopía propia, aparece en [Bea93] y [ADMQ95]. La adecuación de los funtores definidos en la Sección 5.3 se debe a que modelan algebraicamente $\Pi_{n+1}S_\alpha^n$ ($n \geq 2$) a través de las equivalencias de categorías en (3.1.1). Para realizar esta traducción de la topología al álgebra usamos [BQ01] II.2.15.

Teorema 5.4.1. *Para todo T -complejo $(n-1)$ -conexo X existe un isomorfismo natural de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos*

$$\mathbb{I}_{n+1}X = \begin{cases} \Gamma_T \mathcal{H}_2 X, & \text{si } n = 2; \\ \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Más aún, estos isomorfismos encajan en los siguientes diagramas conmutativos: para $n = 2$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_T \mathcal{H}_2 X & \xrightarrow{\sigma_T} & \mathcal{H}_2 X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\simeq]{\Sigma \otimes \mathbb{Z}_2} \mathcal{H}_3 \Sigma X \otimes \mathbb{Z}_2 \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \simeq \\ \mathbb{I}_3 X & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{I}_4 \Sigma X \end{array}$$

y para $n \geq 3$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow[\simeq]{\Sigma \otimes \mathbb{Z}_2} & \mathcal{H}_{n+1} \Sigma X \otimes \mathbb{Z}_2 \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \simeq \\ \mathbb{I}_{n+1} X & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{I}_{n+2} \Sigma X \end{array}$$

Demostración. Si X es un objeto esférico n -dimensional el resultado se sigue de [BQ01] II.2.15 y de las definiciones de los funtores Γ_T y $- \otimes \mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbf{ab}(T)$ -módulos libres finitamente generados; véanse (5.2.2) y (5.2.9). En general podemos suponer que el T -complejo X es $(n-1)$ -reducido, véase (3.1.5), y que $\dim X \leq n+1$ ya que siempre $\mathbb{I}_{n+1} X^{n+1} = \mathbb{I}_{n+1} X$, véase (3.1.7), por tanto X es la cofibra de una cierta aplicación $f: S_\beta^n \rightarrow S_\alpha^n$, esto es, tenemos un diagrama de push-out en \mathbf{Top}_c^T

$$\begin{array}{ccc} S_\beta^n \vee S_\alpha^n & \xrightarrow{\quad} & C S_\beta^n \vee S_\alpha^n \\ (f,1) \downarrow & & \downarrow \pi \\ X^n = S_\alpha^n & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

La sucesión exacta larga de un par en homotopía prueba que

$$\mathbb{I}_{n+1} X = \text{Coker}[\partial: \mathbb{I}_{n+2}(X, S_\alpha^n) \rightarrow \mathbb{I}_{n+1} S_\alpha^n].$$

Es más, usando [Bau99] IV.5.5 vemos que

$$\pi_*: \mathbb{I}_{n+2}(C S_\beta^n \vee S_\alpha^n, S_\beta^n \vee S_\alpha^n) \rightarrow \mathbb{I}_{n+2}(X, S_\alpha^n)$$

es un epimorfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos, y además el siguiente diagrama con fila exacta es conmutativo, véase (3.1.1) donde se prueba que la categoría

de homotopía de objetos esféricos de dimensión n es aditiva para $n \geq 2$ y (5.1.1) para la definición de los efectos cuadráticos cruzados

$$\begin{array}{ccccc}
 \Pi_{n+2}(X, S_\alpha^n) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n+1}S_\alpha^n & & \\
 \uparrow \pi_* & & \uparrow (f,1)_* & & \\
 \Pi_{n+2}(CS_\beta^n \vee S_\alpha^n, S_\beta^n \vee S_\alpha^n) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n+1}(S_\beta^n \vee S_\alpha^n) & \xrightarrow{(0,1)_*} & \Pi_{n+1}S_\alpha^n \\
 \downarrow \simeq & \nearrow (i_{1*}, i_{12}) & & & \\
 \Pi_{n+1}S_\beta^n \oplus \Pi_{n+1}(S_\beta^n | S_\alpha^n) & & & &
 \end{array}$$

Por tanto

$$\mathbb{I}_{n+1}X = \text{Coker}[(f_*, (f, 1)_* i_{12}): \Pi_{n+1}S_\beta^n \oplus \Pi_{n+1}(S_\beta^n | S_\alpha^n) \rightarrow \Pi_{n+1}S_\alpha^n].$$

La sucesión exacta de Whitehead prueba que el funtor Π_{n+1} coincide con \mathbb{I}_{n+1} en la categoría de objetos esféricos n -dimensionales, entonces al ser los funtores Γ_T y $-\otimes \mathbb{Z}_2$ exactos a derecha en el sentido de (5.2.5), el resultado general se sigue del caso particular ya visto de los objetos esféricos n -dimensionales. \square

Observación 5.4.2. El teorema anterior prueba que el pull-back del $({}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq)$ -bimódulo $H^k(-, \Gamma_T H_2)$ a lo largo del isomorfismo de categorías en (4.1.2) es el (\mathbf{H}_3^T/\simeq) -bimódulo $H^k(-, \mathbb{I}_3-)$, ($k \in \mathbb{Z}$); por tanto la sucesión exacta de funtores en (4.2.4) para $n = 3$ se traduce a través de dicho isomorfismo en una sucesión exacta de funtores tal como sigue

$$H^3(-, \Gamma_T H_2) \xrightarrow{+} \mathbf{H}_4^T/\simeq \xrightarrow{\mathcal{C}_*} {}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq \xrightarrow{2\theta} H^4(-, \Gamma_T H_2).$$

También demuestra (5.4.1) que el pull-back del $({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq)$ -bimódulo $H^k(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)$ a lo largo del isomorfismo de categorías en (4.1.3) coincide con el $({}_n\mathbf{H}_{n+1}^T/\simeq)$ -bimódulo $H^k(-, \mathbb{I}_{n+1}-)$, ($n \geq 3, k \in \mathbb{Z}$); y así, a través de este isomorfismo, la restricción de la sucesión exacta para el funtor λ_{n+2} en (4.2.4) a los objetos $(n-1)$ -reducidos se traduce en la siguiente, ($n \geq 3$),

$$H^{n+1}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{+} {}_n\mathbf{H}_{n+2}^T/\simeq \xrightarrow{\mathcal{C}_*} {}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq \xrightarrow{n\theta} H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Las clases de cohomología a las que dan lugar los operadores de obstrucción de estas sucesiones exactas de funtores de la manera que se indicó en (4.3.3)

$$\{2\theta\} \in H^1({}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^4(-, \Gamma_T H_2));$$

$$\{n\theta\} \in H^1({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)), \quad (n \geq 3);$$

jugarán un importante papel a la hora de tratar en el Capítulo 9 los problemas de clasificación de tipos de homotopía propia que nos planteamos. Es sencillo comprobar usando (5.4.1) que, si usamos los isomorfismos de categorías ($n \geq 2$)

$$({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq) = ({}_{n+1}\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq),$$

definidos por la suspensión de complejos de cadenas, como identificaciones, entonces

$$\sigma_{T*} \{2\theta\} = \{3\theta\} = \{4\theta\} = \cdots = \{n\theta\} = \cdots, \quad (n \geq 3),$$

por ello habitualmente denotaremos simplemente $n\theta = \theta$ olvidándonos del subíndice, a menos que haya lugar a confusión.

En lo que resta de sección daremos algunas aplicaciones del Teorema 4.1 que serán de utilidad en el siguiente capítulo. La primera de ellas guarda similitud con un resultado clásico, véase [Whi78] XI.1.7.

Proposición 5.4.3. *Dados dos T -complejos 1-conexos X e Y la siguiente sucesión es exacta corta escindible*

$$\mathcal{H}_2 X \otimes_T \mathcal{H}_2 Y \xrightarrow{i_3 i_{12}} \Pi_3(X \vee Y) \xrightarrow{\xi} \Pi_3 X \oplus \Pi_3 Y.$$

$\swarrow \quad \zeta \quad \searrow$

Aquí $\xi = \begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix}$ y $\zeta = (i_{1*}, i_{2*})$, donde i_k y p_k ($k = 1, 2$) son las inclusiones y retracciones del primer y segundo factor del coproducto $X \vee Y$; i_3 es uno de los morfismos que componen la sucesión exacta de Whitehead e i_{12} es la inclusión del efecto cuadrático cruzado de Γ_T .

Demostración. Este resultado se deduce fácilmente de un seguimiento cui-

dadoso del siguiente diagrama conmutativo de fila y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccc}
 \Pi_4(X \vee Y) & \xrightarrow{\xi} & \Pi_4 X \oplus \Pi_4 Y & & \\
 \downarrow h_4 & \swarrow \zeta & \downarrow h_4 \oplus h_4 & & \\
 \mathcal{H}_4(X \vee Y) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{H}_4 X \oplus \mathcal{H}_4 Y & & \\
 \downarrow b_4 & & \downarrow b_4 \oplus b_4 & & \\
 \mathcal{H}_2 X \otimes_T \mathcal{H}_2 Y \xrightarrow{i_{12}} \Gamma_T(\mathcal{H}_2 X \oplus \mathcal{H}_2 Y) & \twoheadrightarrow & \Gamma_T \mathcal{H}_2 X \oplus \Gamma_T \mathcal{H}_2 Y & & \\
 \downarrow i_3 & & \downarrow i_3 \oplus i_3 & & \\
 \Pi_3(X \vee Y) & \xrightarrow{\xi} & \Pi_3 X \oplus \Pi_3 Y & & \\
 \downarrow h_3 & \swarrow \zeta & \downarrow h_3 \oplus h_3 & & \\
 \mathcal{H}_3(X \vee Y) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{H}_3 X \oplus \mathcal{H}_3 Y & &
 \end{array}$$

□

La siguiente proposición aporta datos sobre el núcleo del homomorfismo de suspensión en módulos de homotopía propia bajo condiciones en las que el teorema de suspensión de Freudenthal solamente asegura que es un epimorfismo. En homotopía ordinaria este resultado puede obtenerse como consecuencia de conocidos resultados de Blakers y Massey en [BM51], [BM52] y [BM53a].

Proposición 5.4.4. *Dado un T -complejo 1-conexo X la siguiente sucesión es exacta*

$$\otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X \xrightarrow{i_3 W_T} \Pi_3 X \xrightarrow{\Sigma} \Pi_4 \Sigma X.$$

Demostración. Para comprobar la exactitud de la sucesión del enunciado basta seguir cuidadosamente el siguiente diagrama conmutativo de filas y columna exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X & & & & \\
 & & \downarrow W_T & & & & \\
 \mathcal{H}_4 X & \xrightarrow{b_4} & \Gamma_T \mathcal{H}_2 X & \xrightarrow{i_3} & \Pi_3 X & \xrightarrow{h_3} & \mathcal{H}_3 X \\
 \Sigma \downarrow \simeq & & \sigma_T \downarrow & & \Sigma \downarrow & & \Sigma \downarrow \simeq \\
 \mathcal{H}_5 \Sigma X & \xrightarrow{b_5} & \mathcal{H}_2 X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_4} & \Pi_4 \Sigma X & \xrightarrow{h_4} & \mathcal{H}_4 \Sigma X
 \end{array}$$

Aquí usamos el isomorfismo de suspensión en homología propia $\mathcal{H}_2 X \simeq \mathcal{H}_3 \Sigma X$ como identificación. □

El siguiente resultado es una herramienta para calcular conjuntos de clases de homotopía propia partiendo de un T -complejo $(n-1)$ -conexo de dimensión $n+1$ ($n \geq 2$).

Proposición 5.4.5. *Dado un T -complejo X^2 de dimensión ≤ 2 y otro T -complejo Z cualquiera hay definidas extensiones centrales naturales ($n \geq 1$)*

$$H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \Pi_{n+2} Z) \xrightarrow{j} [\Sigma^n X^2, Z]^T \rightarrow H^{n+1}(\Sigma^n X^2, \Pi_{n+1} Z).$$

Demostración. La sucesión larga de cofibra de la aplicación de pegamiento $f: S_{\alpha_2}^1 \rightarrow S_{\alpha_1}^1$ de 2-células en X^2 aporta las columnas exactas que encajan en los siguientes diagramas conmutativos ($n \geq 1$)

$$\begin{array}{ccc} [S_{\alpha_1}^{n+2}, Z]^T & \xlongequal{\quad} & (\Pi_{n+2} Z)(\mathcal{C}_{n+1} \Sigma^n X^2) \\ (\Sigma^{n+1} f)^* \downarrow & & \downarrow d_{n+2}^* \\ [S_{\alpha_2}^{n+2}, Z]^T & \xlongequal{\quad} & (\Pi_{n+2} Z)(\mathcal{C}_{n+2} \Sigma^n X^2) \\ (\Sigma^n q)^* \downarrow & & \\ [\Sigma^n X^2, Z]^T & & \\ \downarrow & & \\ [S_{\alpha_1}^{n+1}, Z]^T & \xlongequal{\quad} & (\Pi_{n+1} Z)(\mathcal{C}_{n+1} \Sigma^n X^2) \\ (\Sigma^n f)^* \downarrow & & \downarrow d_{n+2}^* \\ [S_{\alpha_2}^{n+1}, Z]^T & \xlongequal{\quad} & (\Pi_{n+1} Z)(\mathcal{C}_{n+2} \Sigma^n X^2) \end{array}$$

donde $(\Sigma^n q)^*$ es siempre central, véase (1.2.7). De aquí se sigue el resultado. \square

La siguiente proposición es una generalización del teorema de suspensión de Freudenthal y (5.4.4) en la línea del resultado anterior.

Proposición 5.4.6. *Dados dos T -complejos X^2 y Z con $\dim X^2 \leq 2$ y Z 1-conexo la siguiente sucesión natural es exacta*

$$H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Z) \xrightarrow{j(i_3 W_T)^*} [\Sigma X^2, Z]^T \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X^2, \Sigma Z]^T.$$

Más aún, el operador suspensión induce isomorfismos ($n \geq 2$)

$$\Sigma: [\Sigma^n X^2, \Sigma^{n-1} Z]^T \simeq [\Sigma^{n+1} X^2, \Sigma^n Z]^T.$$

Demostración. Las extensiones centrales naturales de la proposición anterior, los morfismos de suspensión en homotopía y (co)homología, y el isomorfismo de Hurewicz dan lugar al siguiente diagrama conmutativo de columnas exactas

$$\begin{array}{ccc}
H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \Pi_{n+2}\Sigma^{n-1}Z) & \longrightarrow & H^{n+3}(\Sigma^{n+1}X^2, \Pi_{n+3}\Sigma^n Z) \\
\downarrow j & & \downarrow j \\
[\Sigma^n X^2, \Sigma^{n-1}Z]^T & \longrightarrow & [\Sigma^{n+1}X^2, \Sigma^n Z]^T \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{n+1}(\Sigma^n X^2, \mathcal{H}_{n+1}\Sigma^{n-1}Z) & \xrightarrow{\simeq} & H^{n+2}(\Sigma^{n+1}X^2, \mathcal{H}_{n+2}\Sigma^n Z)
\end{array}$$

Más aún, en virtud del teorema de suspensión de Freudenthal el homomorfismo $\Sigma_*: \Pi_{n+2}\Sigma^{n-1}Z \rightarrow \Pi_{n+3}\Sigma^n Z$ es un isomorfismo para $n \geq 2$, por tanto la flecha horizontal superior del diagrama anterior es un isomorfismo en este rango, y se sigue la segunda parte del enunciado. Por otro lado para $n = 1$ al ser $\dim \Sigma X^2 \leq 3$ el funtor $H^3(\Sigma X^2, -)$ de la categoría de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos en la de grupos abelianos es exacto a derecha, en particular aplicándolo a la sucesión en (5.4.4) obtenemos una sucesión exacta

$$H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Z) \xrightarrow{(i_3 W_T)^*} H^3(\Sigma X^2, \Pi_3 Z) \rightarrow H^3(\Sigma X^2, \Pi_4 \Sigma Z).$$

Un seguimiento cuidadoso del diagrama formado al encajar esta sucesión exacta en el diagrama anterior para $n = 1$ demuestra la primera parte del enunciado. \square

Por último probamos la siguiente extensión de (5.4.3).

Proposición 5.4.7. *Dados tres T -complejos X^2 , Y y Z con $\dim X^2 \leq 2$ e Y y Z 1-conexos tenemos una extensión central natural*

$$H^3(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 Y \otimes_T \mathcal{H}_2 Z) \xrightarrow{j(i_3 i_{12})^*} [\Sigma X^2, Y \vee Z]^T \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})} [\Sigma X^2, Y]^T \times [\Sigma X^2, Z]^T.$$

Demostración. Evaluando la extensión central de (5.4.5) para $n = 1$ en las retracciones del coproducto $p_1: Y \vee Z \rightarrow Y$, $p_2: Y \vee Z \rightarrow Z$ y usando el isomorfismo de Hurewicz como identificación obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas

$$\begin{array}{ccc}
H^3(\Sigma X^2, \Pi_3(Y \vee Z)) & \longrightarrow & H^3(\Sigma X^2, \Pi_3 Y) \oplus H^3(\Sigma X^2, \Pi_3 Z) \\
\downarrow j & & \downarrow j \\
[\Sigma X^2, Y \vee Z]^T & \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})} & [\Sigma X^2, Y]^T \times [\Sigma X^2, Z]^T \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2(Y \vee Z)) & \xlongequal{\quad} & H^2(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 Y) \oplus H^2(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 Z)
\end{array}$$

Además al ser $\dim \Sigma X^2 \leq 3$ el funtor $H^3(\Sigma X^2, -)$ es exacto a derecha, luego evaluando este funtor en la sucesión de (5.4.3) obtenemos una sucesión exacta

$$H^3(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 Y \otimes_T \mathcal{H}_2 Z) \xrightarrow{(i_3 i_{12})^*} H^3(\Sigma X, \Pi_3(Y \vee Z)) \twoheadrightarrow H^3(\Sigma X, \Pi_3 Y \oplus \Pi_3 Z).$$

Encajando esta sucesión exacta en el diagrama anterior obtenemos un diagrama de cuyo seguimiento cuidadoso se sigue el resultado. \square

Capítulo 6

Invariantes de James-Hopf y cohomológicos en homotopía propia

Para la definición de las operaciones homotópicas primarias en teoría de homotopía ordinaria se usan construcciones tales como el producto y el producto “smash” de espacios punteados, véase por ejemplo [Bau96] Página 477. Como ya comentamos en el Capítulo 1, en teoría de homotopía propia no existen análogos adecuados de dichas construcciones y, por tanto, la existencia de análogos “propios” de estas operaciones no es inmediata. Sin embargo, como veremos en la primera sección de este capítulo, es posible definir ciertos invariantes tipo James-Hopf en teoría de homotopía propia usando el producto tensorial controlado construido en el capítulo anterior. Este funtor algebraico es capaz de jugar el papel que en teoría de homotopía ordinaria tendría cierto grupo de homotopía de un producto “smash”, véase por ejemplo (5.4.3), lo que permite que sea usado para construir un invariante de James-Hopf “propio”. Además como veremos el invariante que construimos generaliza al clásico. También daremos una versión estable de este invariante de James-Hopf en homotopía propia.

A partir de los invariantes de James-Hopf de la Sección 6.1 definiremos en la Sección 6.2 un invariante cohomológico de tipo cup-producto, cuya versión estable llamaremos cup-producto reducido. Como veremos en la Sección 6.3, la importancia de estos invariantes reside en que determinan, salvo cambio de coeficientes, el operador de obstrucción de las sucesiones exactas de funtores en (5.4.2). Este hecho crucial junto con otros resultados de corte más algebraico nos permitirán en el Capítulo 9 clasificar los tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión 4 con a lo más

3 finales, uno de los principales resultados de esta memoria.

Los invariantes cup-producto dan lugar a una clase de cohomología de dimensión cero en categorías homotópicas de complejos de cadenas acotados sobre $\mathbf{ab}(T)$, como veremos en la Sección 6.4. En la Sección 6.5 probamos que el cup-producto de un T -complejo X 1-conexo de dimensión ≤ 4 se anula si y sólo si X es un co-H-espacio.

Por último en la Sección 6.6 estudiaremos la relación entre el invariante cup-producto y la sucesión exacta larga de Whitehead en homotopía propia.

6.1 Invariantes de James-Hopf

En la teoría de homotopía ordinaria de espacios punteados, dado un CW -complejo X reducido y normalizado, tenemos definido el invariante de James-Hopf

$$\pi_3 \Sigma X = [\Sigma S^2, \Sigma X] \xrightarrow{\gamma_2} [\Sigma S^2, \Sigma X \wedge X] = \otimes^2 H_2 \Sigma X,$$

véase [Bau96] A.2.4. Para la identificación de la derecha usamos el teorema de Hurewicz, la fórmula de Künneth y el isomorfismo de suspensión en homología

$$(6.1.A) \quad \pi_3(\Sigma X \wedge X) = H_3(\Sigma X \wedge X) = H_2(X \wedge X) = \otimes^2 H_1 X = \otimes^2 H_2 \Sigma X.$$

Dicho invariante satisface la siguiente propiedad para todo $f \in \pi_3 \Sigma X$, véanse [Bau96] A.10.2 (b) y [Bau81] (1.7),

$$i_1 f + i_2 f = \mu f + (-[i_2, i_1]) \gamma_2(f) \in \pi_3(\Sigma X \vee \Sigma X).$$

Aquí $\mu: \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ es la co-H-multiplicación de la suspensión ΣX , véase (1.2.5). El producto de Whitehead $[i_2, i_1] \in [\Sigma X \wedge X, \Sigma X \vee \Sigma X]$ está definido en [Bau96] A.1. El teorema de suspensión de Freudenthal asegura que $\gamma_2(f)$ es una suspensión, por tanto

$$(-[i_2, i_1]) \gamma_2(f) = -[i_2, i_1] \gamma_2(f).$$

Usando la sobreyectividad del homomorfismo de Hurewicz $h_1: \pi_1 X \rightarrow H_1 X$ tenemos que la identificación $\otimes^2 H_1 X = \pi_3 \Sigma X \wedge X$ contenida en (6.1.A) envía un generador arbitrario $h_1(a) \otimes h_1(b)$ a $\Sigma a \wedge b: S^3 = \Sigma S^1 \wedge S^1 \rightarrow \Sigma X \wedge X$, compárese con [BM53b] Sección 5 y [AGP02] 6.3.16. Además la naturalidad del producto de Whitehead en [Bau96] A.1 implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma S^1 \wedge S^1 & \xrightarrow{\Sigma a \wedge b} & \Sigma X \wedge X \\ [i_2, i_1] \downarrow & & \downarrow [i_2, i_1] \\ \Sigma S^1 \vee \Sigma S^1 & \xrightarrow[\Sigma a \vee \Sigma b]{} & \Sigma X \vee \Sigma X \end{array}$$

Aquí $[i_2, i_1] \in [\Sigma S^1 \wedge S^1, \Sigma S^1 \vee \Sigma S^1] = \pi_3(S^2 \vee S^2)$ es el producto de Whitehead ordinario de las inclusiones de ambos factores del coproducto $S^2 \vee S^2$. En particular es conocido que $[i_2, i_1] = [i_1, i_2] \in \pi_3(S^2 \vee S^2)$. Todo esto implica que $[i_2, i_1]\gamma_2(f)$ es la imagen de $\gamma_2(f)$ a través de la composición

$$\begin{array}{ccc} \otimes^2 H_2 \Sigma X = \otimes^2 \pi_2 \Sigma X & \xrightarrow{i_{1*} \otimes i_{2*}} & \otimes^2 \pi_2(\Sigma X \vee \Sigma X) \\ & & \downarrow [-, -] \\ & & \Gamma_3(\Sigma X \vee \Sigma X) \xrightarrow{i_3} \pi_3(\Sigma X \vee \Sigma X). \end{array}$$

Aquí $[-, -]$ es el producto de Whitehead ordinario. Usando (5.1.2) (1) y (5.1.B) es sencillo comprobar que la anterior composición coincide con la siguiente

$$\otimes^2 H_2 \Sigma X \xrightarrow{i_{12}} \Gamma(H_2 \Sigma X \oplus H_2 \Sigma X) \xrightarrow{i_3} \pi_3(\Sigma X \vee \Sigma X),$$

así que en definitiva

$$\mu f - i_2 f - i_1 f = i_3 i_{12} \gamma_2(f).$$

Esta identidad y (5.4.3) nos permiten dar la siguiente generalización del invariante de James-Hopf ordinario que acabamos de considerar.

Definición 6.1.1. Dado un T -complejo X definimos su *invariante de James-Hopf* como el único morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos

$$\gamma_2: \Pi_3 \Sigma X \longrightarrow \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X$$

tal que si $i_1, i_2, \mu: \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ son las inclusiones de los factores del coproducto y la co-H-multiplicación de ΣX , respectivamente, entonces

$$i_3 i_{12} \gamma_2 = \mu_* - i_{2*} - i_{1*}: \Pi_3 \Sigma X \longrightarrow \Pi_3(\Sigma X \vee \Sigma X).$$

Este morfismo γ_2 es natural en X .

Proposición 6.1.2. Dado un T -complejo X el siguiente diagrama natural es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_T \mathcal{H}_2 \Sigma X & \xrightarrow{\tau_T} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X \\ & \searrow i_3 & \nearrow \gamma_2 \\ & \Pi_3 \Sigma X & \end{array}$$

Demostración. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} i_3 i_{12} \gamma_2 i_3 &= (\Pi_3 \mu - \Pi_3 i_2 - \Pi_3 i_1) i_3 \\ &= i_3 (\Gamma_T \mathcal{H}_2 \mu - \Gamma_T \mathcal{H}_2 i_2 - \Gamma_T \mathcal{H}_2 i_1) \\ &= i_3 (\Gamma_T (i_1 + i_2) - \Gamma_T i_2 - \Gamma_T i_1). \end{aligned}$$

En la primera igualdad usamos la definición de γ_2 , en la segunda la naturalidad de la sucesión exacta de Whitehead y (5.4.1), y en la tercera las identificaciones naturales $\mathcal{H}_2(\Sigma X \vee \Sigma X) = \mathcal{H}_2 \Sigma X \oplus \mathcal{H}_2 \Sigma X$, $\mathcal{H}_2 \mu = i_1 + i_2$, $\mathcal{H}_2 i_k = i_k$, ($k = 1, 2$).

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad i_3 i_{12} \tau_T &= i_3 i_{12} r_{12} \Gamma_T (i_1 + i_2) \\ &= i_3 (\Gamma_T (i_1 p_1 + i_2 p_2) - \Gamma_T (i_1 p_1) - \Gamma_T (i_2 p_2)) \Gamma_T (i_1 + i_2) \\ &= i_3 (\Gamma_T (i_1 + i_2) - \Gamma_T i_1 - \Gamma_T i_2). \end{aligned}$$

En la primera igualdad usamos la definición de τ_T en (5.2.8), en la segunda las definiciones de i_{12} y r_{12} en (5.1.1), y en la tercera las propiedades de los morfismos estructurales de una suma directa en (2.1.1).

Ahora la proposición se sigue de ser $i_3 i_{12}$ un monomorfismo, véase (5.4.3). \square

Este resultado nos permite definir la siguiente versión estable del invariante de James-Hopf en homotopía propia.

Definición 6.1.3. Dado un T -complejo X y $n \geq 2$ definimos el *invariante de James-Hopf estable* como el único morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos γ_2^n que encaja en el siguiente diagrama conmutativo ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{n+2} \Sigma^n X & \xrightarrow{\gamma_2^n} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n X \\ \uparrow \Sigma^{n-1} & & \uparrow \bar{\sigma}_T \\ \Pi_3 \Sigma X & \xrightarrow{\gamma_2} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X \\ \uparrow i_3 W_T & & \uparrow \tau_T W_T \\ \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X & \xlongequal{\quad} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma X \end{array}$$

Aquí usamos el isomorfismo de suspensión en homología $\mathcal{H}_2 \Sigma X = \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n X$ como una identificación. La conmutatividad del cuadrado inferior se sigue de (6.1.2). Es más, el morfismo γ_2^n existe por ser la columna izquierda exacta, véanse (5.4.4) y (3.4.6), y por ser $\bar{\sigma}_T \tau_T W_T = \bar{\tau}_T \sigma_T W_T = 0$, véase (5.2.A).

Como consecuencia de (6.1.2), (5.2.A) y (5.4.1) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.1.4. *Dado un T -complejo X el siguiente diagrama natural es conmutativo para todo $n \geq 2$*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{n+1}\Sigma^n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1}\Sigma^n X \\ & \searrow^{i_{n+2}} & \nearrow^{\gamma_2^n} \\ & \Pi_{n+2}\Sigma^n X & \end{array}$$

En la siguiente definición construimos un nuevo invariante de James-Hopf definido sobre grupos de clases de homotopía propia más generales que los que definen a los módulos de homotopía propia.

Definición 6.1.5. Dados dos T -complejos X^2 e Y con $\dim X^2 \leq 2$ definimos el *invariante de James-Hopf* de $f: \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Y$ como el único elemento

$$\gamma_2(f) \in H^3(\Sigma X^2, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y)$$

tal que la siguiente igualdad se satisface en $[\Sigma X^2, \Sigma Y \vee \Sigma Y]^T$, véase (5.4.7),

$$\mu f = i_1 f + i_2 f + j(i_3 i_{12})_* \gamma_2(f).$$

Aquí $i_1, i_2, \mu: \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ son las inclusiones de los factores del coproducto y la co-H-multiplicación.

Se puede demostrar, argumentando de forma similar a la introducción de esta sección, que este invariante de James-Hopf en homotopía propia generaliza al definido en homotopía ordinaria en [Bau96] A.2.

La aplicación

$$\gamma_2: [\Sigma X^2, \Sigma Y] \longrightarrow H^3(\Sigma X^2, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y)$$

coincide con la definida en (6.1.1) para $X = S_\alpha^2$ un objeto esférico de dimensión 2. Sin embargo esta aplicación de aquí no es en general un homomorfismo, sino una función cuadrática en el sentido de (5.1.1). Para comprobarlo definimos la siguiente nueva operación homotópica propia.

Definición 6.1.6. Dados tres T -complejos X^2, Y y Z con $\dim X^2 \leq 2$ y un par de aplicaciones $f: \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Y, g: \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Z$ se define su *cup-producto interior*

$$f \cup g \in H^3(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 \Sigma Y \otimes_T \mathcal{H}_2 \Sigma Z)$$

como el único elemento que satisface la siguiente igualdad en $[\Sigma X^2, \Sigma Y \vee \Sigma Z]^T$, véase (5.4.7),

$$i_2 f + i_1 g = i_1 f + i_2 g + j(i_3 i_{12})_*(f \cup g),$$

o lo que es lo mismo

$$j(i_3 i_{12})_*(f \cup g) = [i_2 f, i_1 g].$$

Aquí el corchete es el producto conmutador en el grupo $[\Sigma X^2, \Sigma Y \vee \Sigma Z]^T$. Usando (5.4.5) y el teorema de Hurewicz es fácil ver que el cup-producto interior es bilineal y factoriza por un homomorfismo

$$H^2(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 \Sigma Y) \otimes H^2(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 \Sigma Z) \xrightarrow{\cup} H^3(\Sigma X^2, \mathcal{H}_2 \Sigma Y \otimes_T \mathcal{H}_2 \Sigma Z).$$

Gracias a los isomorfismos de suspensión en (co)homología propia podemos contemplar este homomorfismo de la siguiente manera

$$H^1(X^2, \mathcal{H}_1 Y) \otimes H^1(X^2, \mathcal{H}_1 Z) \xrightarrow{\cup} H^2(X^2, \mathcal{H}_1 Y \otimes_T \mathcal{H}_1 Z).$$

Es más, usando [Ark64] se puede ver que este homomorfismo generaliza al cup-producto habitual en cohomología ordinaria.

Proposición 6.1.7. *Dados dos T -complejos X^2 e Y con $\dim X^2 \leq 2$ y dos aplicaciones $f, g: \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Y$ la siguiente igualdad se satisface*

$$\gamma_2(f + g) = \gamma_2(f) + \gamma_2(g) + f \cup g \in H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y).$$

Demostración. El resultado se sigue de las siguientes igualdades en $[\Sigma X^2, \Sigma Y \vee \Sigma Y]^T$,

$$\begin{aligned} & i_1(f + g) + i_2(f + g) \\ + j(i_3 i_{12})_*(\gamma_2(f) + \gamma_2(g) + f \cup g) &= i_1 f + i_1 g + i_2 f + i_2 g \\ & \quad + j(i_3 i_{12})_*(\gamma_2(f) + \gamma_2(g) + f \cup g) \\ &= i_1 f + i_2 f + i_1 g + i_2 g \\ & \quad + j(i_3 i_{12})_*(\gamma_2(f) + \gamma_2(g)) \\ &= \mu f + \mu g \\ &= \mu(f + g). \end{aligned}$$

Aquí usamos que j en (5.4.5) es central, así como las definiciones del invariante de James-Hopf en (6.1.5) y del cup-producto interior en (6.1.6). \square

Este resultado junto con [Bau96] A.10.2 (f) puede ser usado para probar, argumentando como en la introducción a esta sección, que el cup-producto interior en homotopía propia generaliza al correspondiente en homotopía ordinaria, que aparece por ejemplo en [Bau96] A.1.18.

Proposición 6.1.8. *Dados dos T -complejos X^2 e Y con $\dim X^2 \leq 2$ el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} H^3(\Sigma X^2, \Gamma_T \mathcal{H}_2 \Sigma Y) & \xrightarrow{i_{3*}} & H^3(\Sigma X^2, \Pi_3 \Sigma Y) \\ \tau_{T*} \downarrow & & \downarrow j \\ H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y) & \xleftarrow{\gamma_2} & [\Sigma X^2, \Sigma Y]^T \end{array}$$

Demostración. Dado $a \in H^3(\Sigma X^2, \Gamma_T \mathcal{H}_2 \Sigma Y)$ se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} j(i_{3i_{12}})_* \gamma_2(ji_{3*}(a)) &= -i_2 j i_{3*}(a) - i_1 j i_{3*}(a) + \mu j i_{3*}(a) \\ &= j[i_3(-\Gamma_T i_2 - \Gamma_T i_1 + \Gamma_T(i_1 + i_2))]_*(a) \\ &= j(i_{3i_{12}} \tau_T)_*(a) \\ &= j(i_{3i_{12}})_*(\tau_T)_*(a) \end{aligned}$$

Aquí en la primera igualdad usamos la definición de γ_2 en (6.1.5); en la segunda la naturalidad de j en (5.4.5) y de la sucesión exacta de Whitehead, así como (5.4.1); en la tercera usamos (a) en la demostración de (6.1.2).

El homomorfismo j es inyectivo por (5.4.5) e $(i_{3i_{12}})_*$ es inyectivo por ser $i_{3i_{12}}$ un monomorfismo que admite retracción, véase (5.4.3), por tanto la proposición se sigue de las igualdades anteriores. \square

De forma análoga a (6.1.3) esta proposición nos permite definir una versión estable del invariante de James-Hopf en (6.1.5).

Definición 6.1.9. *Dados dos T -complejos X^2 e Y con $\dim X^2 \leq 2$ definimos el invariante de James-Hopf estable γ_2^n ($n \geq 2$) como la única aplicación que encaja en el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma^n X^2, \Sigma^n Y]^T & \xrightarrow{\gamma_2^n} & H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Y) \\ \Sigma^{n-1} \uparrow & & \uparrow (\bar{\sigma}_T)_* \\ [\Sigma X^2, \Sigma Y]^T & \xrightarrow{\gamma_2} & H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y) \\ j(i_{3W_T})_* \uparrow & & \uparrow (\tau_T W_T)_* \\ H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y) & \xlongequal{\quad} & H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y) \end{array}$$

La conmutatividad del cuadrado inferior se sigue de (6.1.8). La columna izquierda es exacta por (5.4.6), la composición de la columna derecha es cero por (5.2.A), y la existencia de γ_2^n es consecuencia de (6.1.7) y de las propiedades del cup-producto interior en (6.1.6). De nuevo γ_2^n ($n \geq 2$) generaliza al dado en (6.1.3) para $X^2 = S_\alpha^2$ un objeto esférico de dimensión 2, sin embargo el γ_2^n definido aquí no es en general un homomorfismo, sino una aplicación cuadrática, para comprobarlo definimos el siguiente concepto

Definición 6.1.10. Dados tres T -complejos X^2 , Y y Z con $\dim X^2 \leq 2$ y aplicaciones $f: \Sigma^n X^2 \rightarrow \Sigma^n Y$, $g: \Sigma^n X^2 \rightarrow \Sigma^n Z$ ($n \geq 2$) definimos su *cup-producto interior*

$$f \cup g \in H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Y \otimes_T \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Z)$$

como el cup-producto interior $f' \cup g'$ en el sentido de (6.1.6) de dos aplicaciones $f': \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Y$, $g': \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Z$ con $\Sigma^{n-1} f' = f$ y $\Sigma^{n-1} g' = g$, usando los isomorfismos de suspensión en (co)homología propia como identificaciones. Las propiedades del cup-producto interior en (6.1.6) junto con (5.4.6) aseguran que el dado aquí está bien definido, es bilineal, y factoriza usando (5.4.5) y el teorema de Hurewicz a través de un homomorfismo

$$\begin{array}{c} H^{n+1}(\Sigma^n X^2, \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Y) \otimes H^{n+1}(\Sigma^n X^2, \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Z) \\ \downarrow \cup \\ H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Y \otimes_T \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Z) \end{array}$$

Además de (6.1.7) y (6.1.9) se deduce el siguiente resultado.

Proposición 6.1.11. *Dados dos T -complejos X^2 e Y con $\dim X^2 \leq 2$ y dos aplicaciones $f, g: \Sigma^n X^2 \rightarrow \Sigma^n Y$ ($n \geq 2$) la siguiente igualdad se satisface*

$$\gamma_2^n(f + g) = \gamma_2^n(f) + \gamma_2^n(g) + (\bar{\sigma}_T)_*(f \cup g) \in H^{n+2}(\Sigma^n X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n).$$

Por último estudiaremos el comportamiento de los invariantes de James-Hopf definidos en (6.1.5) y (6.1.9) con respecto a la composición de aplicaciones.

Proposición 6.1.12. *Dados tres T -complejos X^2 , Y^2 y Z con $\dim X^2, \dim Y^2 \leq 2$ y aplicaciones $f: \Sigma X^2 \rightarrow \Sigma Y^2$, $g: \Sigma Y^2 \rightarrow \Sigma Z$ se satisface la siguiente igualdad*

$$\gamma_2(gf) = f^* \gamma_2(g) + g_* \gamma_2(f) \in H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Z).$$

Aquí $f^* = H^3(f, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Z)$ y $g_* = H^3(\Sigma X^2, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 g)$.

Demostración. Basta tener en cuenta la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad (i_1 + i_2)gf &= (i_1g + i_2g + j(i_3i_{12})_*\gamma_2(g))f \\
\text{(b)} &= (i_1g + i_2g)f + j(i_3i_{12})_*f^*\gamma_2(g) \\
&= (g \vee g)(i_1 + i_2)f + j(i_3i_{12})_*f^*\gamma_2(g) \\
\text{(c)} &= (g \vee g)(i_1f + i_2f + j(i_3i_{12})_*\gamma_2(f)) + j(i_3i_{12})_*f^*\gamma_2(g) \\
\text{(d)} &= i_1gf + i_2gf + j(i_3i_{12})_*g_*\gamma_2(f) + j(i_3i_{12})_*f^*\gamma_2(g).
\end{aligned}$$

Aquí en (a) y (d) usamos la definición de γ_2 en (6.1.5), y en (b) y (c) usamos (5.4.5) y la naturalidad de j y i_3i_{12} en (5.4.5) y (5.4.3), respectivamente. \square

Corolario 6.1.13. *Dados tres T -complejos X^2, Y^2 y Z con $\dim X^2, \dim Y^2 \leq 2$ y aplicaciones $f: \Sigma^n X^2 \rightarrow \Sigma^n Y^2, g: \Sigma^n Y^2 \rightarrow \Sigma^n Z$ se satisface la siguiente igualdad ($n \geq 2$)*

$$\gamma_2^n(gf) = f^*\gamma_2^n(g) + g_*\gamma_2^n(f) \in H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Z).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} \Sigma^n Z)$ y $g_* = H^{n+2}(\Sigma^n X^2, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} g)$.

6.2 Invariantes cup-producto

Usando los diversos invariantes tipo James-Hopf en homotopía propia definidos en la sección anterior, pasamos a definir en ésta nuevos invariantes cohomológicos del tipo de homotopía propia de un T -complejo: los cup-productos, en sus versiones estable e inestable. Estos invariantes jugarán un papel preeminente y fundamental en el resto de esta memoria. De hecho, exceptuando el Capítulo 7, todo lo que viene a partir de ahora se puede considerar como un estudio en profundidad de estos invariantes y sus aplicaciones.

Definición 6.2.1. Sea X un T -complejo 1-reducido con aplicaciones de pegamiento de células $f_n: S_{\alpha_n}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ ($n \geq 2$). La aplicación $f_3: S_{\alpha_3}^2 \rightarrow S_{\alpha_2}^2$ es la suspensión de cierta $f'_3: S_{\alpha_3}^1 \rightarrow S_{\alpha_2}^1$, véanse (3.1.1) y (2.4.2) (4), por tanto $X^3 = \Sigma C_{f'_3}$. Usando esta estructura de suspensión en X^3 definimos el *invariante cup-producto* de X como la clase de cohomología

$$\cup_X \in H^4(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 X)$$

representada por el cociclo

$$\gamma_2(f_4) \in (\hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 X)(\mathcal{C}_4 X),$$

o lo que es lo mismo, por la siguiente composición,

$$\mathcal{C}_4 X \xrightarrow{f_4} \Pi_3 X^3 \xrightarrow{\gamma_2} \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X.$$

Esto es un cociclo ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo cuyas flechas verticales son isomorfismos, véase (3.4.9),

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_5 X & \xrightarrow{d_5} & \mathcal{C}_4 X & \xrightarrow{f_4} & \Pi_3 X^3 \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow & & \parallel \\ \Pi_5(X^5, X^4) & \longrightarrow & \Pi_4 X^4 & \longrightarrow & \Pi_4(X^4, X^3) \longrightarrow \Pi_3 X^3 \end{array}$$

y la fila inferior es exacta en $\Pi_4(X^4, X^3)$.

El invariante cup-producto es natural, es decir,

Proposición 6.2.2. *Dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre T -complejos 1-reducidos se satisface la siguiente igualdad*

$$f_* \cup_X = f^* \cup_Y \in H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y).$$

Aquí $f^* = H^4(f, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y)$ y $f_* = H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 f)$.

Demostración. La aplicación $f: X \rightarrow Y$ da lugar al siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía

$$\begin{array}{ccc} S_{\alpha_4}^3 & \xrightarrow{f_4} & X^3 \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f \\ S_{\beta_4}^3 & \xrightarrow{g_4} & Y^3 \end{array}$$

donde f_4 y g_4 son las aplicaciones de pegamiento de 4-células en X y en Y , respectivamente; la flecha vertical derecha es restricción de f a los 3-esqueletos y la izquierda se corresponde con el morfismo $f_{\#}: \mathcal{C}_4 X \rightarrow \mathcal{C}_4 Y$ inducido por f . En particular tenemos que $\gamma_2(g_4 f_{\#}) = \gamma_2(f f_4)$. Ahora bien, usando (6.1.12) y que $\gamma_2(f_{\#}) = 0$ ya que $\mathcal{H}_2 S_{\beta_4}^3 = 0$ tenemos que

$$\gamma_2(g_4 f_{\#}) = f_{\#}^* \gamma_2(g_4) + g_{4*} \gamma_2(f_{\#}) = f_{\#}^* \gamma_2(g_4),$$

$$\gamma_2(f f_4) = f_4^* \gamma_2(f) + f_* \gamma_2(f_4).$$

Además $f_4^* \gamma_2(f)$ es un coborde ya que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & (\otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y)(\mathcal{C}_3 X) & \\ & \swarrow d_4^* & \downarrow \\ (\otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y)(\mathcal{C}_4 X) & \xleftarrow{f_4^*} & H^3(X^3, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 Y) \end{array}$$

Aquí la flecha vertical es la proyección al cociente. Con esto queda probado el resultado. \square

Corolario 6.2.3. *El invariante cup-producto de un T -complejo 1-reducido no depende de la estructura de suspensión escogida en su 3-esqueleto para definirlo.*

Para T -complejos con mayor grado de conectividad definimos e siguiente invariante cohomológico.

Definición 6.2.4. Sea X un T -complejo $(n-1)$ -reducido ($n \geq 3$) con aplicaciones de pegamiento de células $f_m: S_{\alpha_m}^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$ ($m \geq 2$). La aplicación $f_{n+1}: S_{\alpha_{n+1}}^n \rightarrow X^n = S_{\alpha_n}^n$ es la suspensión $(n-1)$ -ésima de cierta $f'_{n+1}: S_{\alpha_{n+1}}^1 \rightarrow S_{\alpha_n}^1$, véanse (3.1.1) y (2.4.2) (4), por tanto $X^{n+1} = \Sigma^{n-1}C_{f'_{n+1}}$. Haciendo uso de esta estructura de suspensión $(n-1)$ -ésima en X^{n+1} definimos el *invariante cup-producto reducido* de X como la clase de cohomología

$$\hat{U}_X \in H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X)$$

representada por

$$\gamma_2^{n-1}(f_{n+2}) \in (\hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X)(\mathcal{C}_{n+2} X),$$

o equivalentemente por la siguiente composición

$$\mathcal{C}_{n+2} X \xrightarrow{f_{n+2}} \Pi_{n+1} X^{n+1} \xrightarrow{\gamma_2^{n-1}} \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X.$$

Se puede comprobar de forma totalmente análoga al caso no reducido (6.2.1) que esta composición es en efecto un cociclo. Además usando (6.1.13) se ve como en (6.2.2) que el invariante cup-producto reducido es natural, es decir,

Proposición 6.2.5. *Dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre T -complejos $(n-1)$ -reducidos ($n \geq 3$) se satisface la siguiente igualdad*

$$f_* \hat{U}_X = f^* \hat{U}_Y \in H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n Y).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n Y)$ y $f_* = H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n f)$.

Corolario 6.2.6. *El invariante cup-producto reducido de un T -complejo $(n-1)$ -reducido no depende de la estructura de suspensión $(n-1)$ -ésima escogida en su $(n+1)$ -esqueleto para definirlo ($n \geq 3$).*

Definición 6.2.7. Para un T -complejo 1-reducido X podemos definir su *invariante cup-producto reducido* sencillamente como el cambio de coeficientes por $\bar{\sigma}_T$ en (5.2.A) de su invariante cup-producto

$$\hat{U}_X = (\bar{\sigma}_T)_* \cup_X \in H^4(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_2 X).$$

Como consecuencia directa de (6.2.2) este invariante es natural, es decir, (6.2.5) se satisface también para $n = 2$. Además esta definición convierte al cup-producto reducido en un invariante cohomológico del tipo de homotopía propia estable de un T -complejo, esto es,

Proposición 6.2.8. *Usando los isomorfismos de suspensión en (co)homología propia como identificaciones, dado un T -complejo $(n - 1)$ -reducido X ($n \geq 2$) se tiene que*

$$\hat{U}_X = \hat{U}_{\Sigma X} \in H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X) = H^{n+3}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_{n+1} X).$$

Este resultado se deriva de forma inmediata de la definición de los invariantes cup-producto reducidos (6.2.4) y (6.2.7), así como de la definición del invariante de James-Hopf estable en (6.1.3).

6.3 Cup-producto y obstrucción

En la definición del cup-producto de un T -complejo 1-reducido X dada en (6.2.1) se observa que éste sólo depende de su sistema de homotopía de orden 4 asociado $r_4 X$, es más, podemos definir

Definición 6.3.1. El *invariante cup-producto* de un sistema de homotopía de orden 4 $\underline{X}_4 = (\mathcal{C}_*, f_4, X^3)$ es la clase de cohomología

$$\cup_{\underline{X}_4} \in H^4(\mathcal{C}_*, \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}_*)$$

representada por el cociclo

$$\gamma_2(f_4) \in (\otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}_*)(\mathcal{C}_4),$$

o lo que es lo mismo, por la siguiente composición,

$$\mathcal{C}_4 \xrightarrow{f_4} \Pi_3 X^3 \xrightarrow{\gamma_2} \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}_*.$$

Aquí usamos la estructura de suspensión $X^3 = \Sigma C_{f'_3}$ donde $f'_3: S_{\alpha_3}^1 \rightarrow S_{\alpha_2}^1$ es una aplicación tal que $\Sigma f'_3 = d_3$ es la tercera diferencial de \mathcal{C}_* a través de los isomorfismos en (3.1.1).

Análogamente el invariante cup-producto reducido de un T -complejo $(n - 1)$ -reducido X ($n \geq 3$) sólo depende de su sistema de homotopía de orden $n + 2$ asociado $r_{n+2} X$ y definimos como en (6.3.1)

Definición 6.3.2. El *invariante cup-producto reducido* de un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ $\underline{X}_{n+2} = (\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1})$ ($n \geq 3$) es la clase de cohomología

$$\hat{\cup}_{\underline{X}_{n+2}} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \otimes_T^2 H_n \mathcal{C}_*)$$

representada por el cociclo

$$\gamma_2^{n-1}(f_{n+2}) \in (\otimes_T^2 H_n \mathcal{C}_*)(\mathcal{C}_{n+2}),$$

o lo que es lo mismo, por la siguiente composición,

$$\mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \Pi_{n+1} X^{n+1} \xrightarrow{\gamma_2^{n-1}} \otimes_T^2 H_n \mathcal{C}_*.$$

Aquí usamos la estructura de suspensión $(n-1)$ -ésima $X^3 = \Sigma^{n-1} C_{f'_{n+1}}$ donde $f'_{n+1}: S_{\alpha_{n+1}}^1 \rightarrow S_{\alpha_n}^1$ es tal que $\Sigma^{n-1} f'_{n+1} = d_{n+1}$ es la $(n+1)$ -ésima diferencial de \mathcal{C}_* a través de los isomorfismos en (3.1.1).

También podemos definir como en (6.2.7) el invariante cup-producto reducido de un sistema de homotopía de orden 4 $\underline{X}_4 = (C_*, f_4, X^3)$ como

$$\hat{\cup}_{\underline{X}_4} = (\bar{\sigma}_T)_* \cup_{\underline{X}_4} \in H^4(C_*, \hat{\otimes}_T^2 H_2 \mathcal{C}_*).$$

Estos invariantes satisfacen las mismas propiedades que sus análogos de la sección anterior, es decir, son naturales, no dependen de las estructuras de suspensión escogidas para definirlos, y el cup-producto reducido es estable. Las pruebas de estos resultados son exactamente las dadas en la Sección 6.2, ya que sólo se usaron allí los resultados básicos sobre los invariantes de James-Hopf contenidos en la Sección 6.1.

Una de las propiedades fundamentales de los cup-productos de sistemas de homotopía es la que se establece en el siguiente teorema.

Teorema 6.3.3. *Dados dos sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ $\underline{X}_{n+2} = (\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1})$ e $\underline{Y}_{n+2} = (\mathcal{C}'_*, g_{n+2}, Y^{n+1})$, y un morfismo de complejos de cadenas $\xi: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$, se tienen las siguientes fórmulas para los operadores de obstrucción θ de la sucesiones exactas de funtores en (5.4.2).*

- Si $n = 2$

$$(\tau_T)_* \theta_{\underline{X}_4, \underline{Y}_4}(\xi) = \xi_* \cup_{\underline{X}_4} - \xi^* \cup_{\underline{Y}_4} \in H^4(\mathcal{C}_*, \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}'_*).$$

- Si $n \geq 3$

$$(\bar{\tau}_T)_* \theta_{\underline{X}_{n+2}, \underline{Y}_{n+2}}(\xi) = \xi_* \hat{\cup}_{\underline{X}_{n+2}} - \xi^* \hat{\cup}_{\underline{Y}_{n+2}} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \hat{\otimes}_T^2 H_n \mathcal{C}'_*).$$

Demostración. Veámoslo para $n = 2$. Con la notación que sigue al enunciado del Teorema 4.2.4 la clase de cohomología $\theta_{\underline{X}_4, \underline{Y}_4}(\xi)$ está representada por un cociclo α que se caracteriza por encajar en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_4 & \xrightarrow{-g_4\xi_4 + \bar{\eta}f_4} & \Pi_3 Y^3 \\ & \searrow \alpha & \nearrow i_3 \\ & \Gamma_T H_2 \mathcal{C}'_* & \end{array}$$

donde $\bar{\eta}: X^3 \rightarrow Y^3$ es una aplicación que induce ξ en dimensiones ≤ 3 . En virtud de (6.1.2) el cambio de coeficientes $(\tau_T)_* \theta_{\underline{X}_4, \underline{Y}_4}(\xi)$ está representado por el cociclo

$$\begin{aligned} \gamma_2(-g_4\xi_4 + \bar{\eta}f_4) &= -\gamma_2(g_4\xi_4) + \gamma_2(\bar{\eta}f_4) \\ &= -\xi_4^* \gamma_2(g_4) + f_4^* \gamma_2(\bar{\eta}) + \xi_* \gamma_2(f_4). \end{aligned}$$

Aquí para la segunda igualdad usamos (6.1.12) y que $\gamma_2(\xi_4) = 0$ por cuestiones de dimensión, como pasa con $f_{\#}$ en la prueba de (6.2.2). Además el cociclo $f_4^* \gamma_2(\bar{\eta})$ es un coborde, ya que el siguiente diagrama es conmutativo, compárese con la demostración de (6.2.2),

$$\begin{array}{ccc} & (\otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}'_*)(\mathcal{C}_3) & \\ & \swarrow d_4^* & \downarrow \\ (\otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}'_4)(\mathcal{C}_4) & \xleftarrow{f_4^*} & H^3(X^3, \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}'_*) \end{array}$$

por tanto el caso $n = 2$ se sigue de la definición de cup-producto en (6.3.1). El caso $n \geq 3$ se obtiene de forma análoga usando (6.1.4) en vez de (6.1.2), y (6.1.13) en lugar de (6.1.12). \square

6.4 Cup-producto y cohomología de categorías

Como se vio en (5.4.2) los operadores de obstrucción de las sucesiones exactas de funtores allí consideradas determinan clases de cohomología

$$\{ {}_2\theta \} \in H^1({}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^4(-, \Gamma_T H_2));$$

$$\{ {}_n\theta \} \in H^1({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)), \quad (n \geq 3);$$

que juegan un papel crucial en los problemas de clasificación de tipos de homotopía propia, véase el Capítulo 9 para más detalles. El primer resultado que obtenemos sobre estas clases es el siguiente:

Proposición 6.4.1. *Las clases de cohomología anteriores satisfacen*

$$(\tau_T)_* \{2\theta\} = 0 \text{ y } (\bar{\tau}_T)_* \{n\theta\} = 0$$

para todo $n \geq 3$.

Esta proposición es consecuencia directa de (6.3.3).

Para enunciar otra destacada consecuencia de (6.3.3) recordemos que, como se vio de forma general en (4.2.2) (e), dado un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ $\underline{X}_{n+2} = (\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1})$ y un elemento α perteneciente bien a $H^4(\mathcal{C}_*, \Gamma_T H_2 \mathcal{C}_*)$ si $n=2$, o bien a $H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n \mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2)$ si $n \geq 3$, existe otro sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ $\underline{X}_{n+2} + \alpha = (\mathcal{C}_*, g_{n+2}, Y^{n+1})$, bien definido salvo tipo de homotopía, con el mismo complejo de cadenas \mathcal{C}_* que \underline{X}_{n+2} , y que se caracteriza por la igualdad $\theta_{\underline{X}_{n+2} + \alpha, \underline{X}_{n+2}}(1_{\mathcal{C}_*}) = \alpha$.

Proposición 6.4.2. *En las condiciones del párrafo anterior, si $n=2$*

$$\cup_{\underline{X}_4 + \alpha} = \cup_{\underline{X}_4} + (\tau_T)_*(\alpha) \in H^4(\mathcal{C}_*, \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}_*),$$

y si $n \geq 3$

$$\cup_{\underline{X}_{n+2} + \alpha} = \cup_{\underline{X}_{n+2}} + (\bar{\tau}_T)_*(\alpha) \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \hat{\otimes}_T^2 H_n \mathcal{C}_*).$$

Este resultado nos permite realizar la siguiente definición.

Definición 6.4.3. El *invariante cup-producto* $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$ de un complejo de cadenas $(n-1)$ -reducido \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ ($n \geq 2$) se construye de la siguiente manera. En virtud de (4.2.6) existe un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ \underline{X}_{n+2} con complejo de cadenas \mathcal{C}_* y entonces podemos definir

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = (\bar{q}_T)_* \hat{\cup}_{\underline{X}_{n+2}} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*).$$

Gracias a (6.4.2) y a la exactitud de la fila inferior de (5.2.A) esta clase de cohomología no depende del sistema de homotopía escogido para definirla, es más,

Proposición 6.4.4. *El cup-producto es natural en la categoría de complejos de cadenas $(n-1)$ -reducidos, es decir, dado un morfismo $\xi: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$*

$$\xi_* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = \xi^* \bar{\cup}_{\mathcal{C}'_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}'_*),$$

donde $\xi^* = H^{n+2}(\xi, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*)$ y $\xi_* = H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \xi)$. Por tanto define clases de cohomología ($n \geq 2$)

$${}_n \bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

que además son de orden 2

$$2 \cdot {}_n \bar{\cup} = 0.$$

Demostración. Sean \underline{X}_{n+2} e \underline{Y}_{n+2} sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ con complejos de cadenas \mathcal{C}_* y \mathcal{C}'_* , respectivamente. Entonces usando (6.3.3) y (5.2.A) tenemos para $n \geq 3$ que

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{q}_T)_*(\bar{\tau}_T)_*\theta_{\underline{X}_{n+2}, \underline{Y}_{n+2}}(\xi) \\ &= (\bar{q}_T)_*(\xi_* \hat{\cup}_{\underline{X}_{n+2}} - \xi^* \hat{\cup}_{\underline{Y}_{n+2}}) \\ &= \xi_* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} - \xi^* \bar{\cup}_{\mathcal{C}'_*}, \end{aligned}$$

y para $n = 2$

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{q}_T)_*(\bar{\tau}_T)_*(\sigma_T)_*\theta_{\underline{X}_4, \underline{Y}_4}(\xi) \\ &= (\bar{q}_T)_*(\bar{\sigma}_T)_*(\tau_T)_*\theta_{\underline{X}_4, \underline{Y}_4}(\xi) \\ &= (\bar{q}_T)_*(\bar{\sigma}_T)_*(\xi_* \cup_{\underline{X}_4} - \xi^* \cup_{\underline{Y}_4}) \\ &= (\bar{q}_T)_*(\xi_* \hat{\cup}_{\underline{X}_4} - \xi^* \hat{\cup}_{\underline{Y}_4}) \\ &= \xi_* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} - \xi^* \bar{\cup}_{\mathcal{C}'_*}. \end{aligned}$$

Para ver que ${}_n\bar{\cup}$ tiene orden 2 basta considerar ξ como la multiplicación por 2 en todas las dimensiones ya que en este caso es fácil comprobar que $\xi^* = 2$ y $\xi_* = 2^2 = 4$, luego la naturalidad de $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$ ya probada implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} - \xi^* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \\ &= 4\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} - 2\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \\ &= 2\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}. \end{aligned}$$

□

El cup-producto de complejos de cadenas es un invariante estable. Más explícitamente,

Proposición 6.4.5. *Dado un complejo de cadenas $(n-1)$ -reducido \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$, si usamos los isomorfismos de suspensión en (co)homología como identificaciones, se tiene la igualdad*

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = \bar{\cup}_{\Sigma\mathcal{C}_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*) = H^{n+3}(\Sigma\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_{n+1} \Sigma\mathcal{C}_*).$$

Por tanto si usamos los isomorfismos de categorías ($n \geq 2$)

$$\Sigma: {}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq \xrightarrow{=} {}_{n+1}\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq,$$

como identificaciones, entonces para todo ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} {}_n\bar{\cup} = {}_{n+1}\bar{\cup} &\in H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n)) \\ &\quad \parallel \\ &H^0({}_{n+1}\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+3}(-, \wedge_T^2 H_{n+1})) \end{aligned}$$

Esta proposición es consecuencia de la estabilidad del cup-producto reducido. De ahora en adelante denotaremos sencillamente ${}_n\bar{\cup} = \bar{\cup}$ si no hay lugar a confusión.

6.5 Cup-producto y co-H-multiplicaciones

Definición 6.5.1. Recordemos que una *co-H-multiplicación* en un T -complejo X es una aplicación

$$\mu: X \longrightarrow X \vee X$$

con $(1, 0)\mu \simeq 1 \simeq (0, 1)\mu$. Un T -complejo X junto con una co-H-multiplicación se denomina un *co-H-espacio*.

Como se vio en (1.2.5) las suspensiones son co-H-espacios. Es sencillo comprobar usando el teorema de suspensión de Freudenthal que todo T -complejo $(n - 1)$ -reducido de dimensión $\leq n + 2$ es una suspensión para todo $n \geq 3$. El siguiente resultado prueba que para $n = 2$ la existencia de co-H-estructuras está determinada por el invariante cup-producto.

Proposición 6.5.2. *Un T -complejo 1-reducido X de dimensión ≤ 4 posee estructura de co-H-espacio si y sólo si $0 = \cup_X \in H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X)$.*

Demostración. Sea $f_n: S_{\alpha_n}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ la aplicación de pegamiento de n -células en X ($n \geq 2$). Escogemos $f'_3: S_{\alpha_3}^1 \rightarrow S_{\alpha_2}^1$ tal que $\Sigma f'_3 = f_3$ y consideramos la estructura de suspensión $X^3 = \Sigma C_{f'_3}$ para la definición del invariante de James-Hopf. La co-H-multiplicación dada por esta estructura se denotará $\mu: X^3 \rightarrow X^3 \vee X^3$. Supongamos que $\cup_X = 0$, entonces existe $\alpha \in (\otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X)(\mathcal{C}_3 X)$ tal que $\gamma_2(f_4) = \alpha d_4$. Si denotamos $\tilde{\alpha}$ a la imagen de α por la proyección

$$(\otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X)(\mathcal{C}_3 X) \twoheadrightarrow H^3(X^3, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X),$$

la igualdad $\gamma_2(f_4) = \alpha d_4$ equivale a decir que $\gamma_2(f) = f_4^*(\tilde{\alpha})$, compárese con la demostración de (6.2.2). Usando (5.4.7) se ve fácilmente que $-j(i_3 i_{12})_*(\tilde{\alpha}) + \mu$ es también una co-H-multiplicación en X^3 . Además si μ' es la co-H-multiplicación de $S_{\alpha_4}^3$ (que es única salvo homotopía) la definición de γ_2 implica que

$$\begin{aligned} (-j(i_3 i_{12})_*(\tilde{\alpha}) + \mu)f_4 &= -j(i_3 i_{12})_* f_4^*(\tilde{\alpha}) + \mu f_4 \\ &= i_1 f_4 + i_2 f_4 - \mu f_4 + \mu f_4 \\ &= i_1 f_4 + i_2 f_4 \\ &= (f_4 \vee f_4)\mu', \end{aligned}$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía,

$$\begin{array}{ccc} X^3 & \xrightarrow{-j(i_3 i_{12})_*(\bar{\alpha}) + \mu} & X^3 \vee X^3 \\ f_4 \uparrow & & \uparrow f_4 \vee f_4 \\ S_{\alpha_4}^3 & \xrightarrow{\mu'} & S_{\alpha_4}^3 \vee S_{\alpha_4}^3 \end{array}$$

Este diagrama induce una aplicación (una aplicación principal en el sentido de [Bau89] V.2) entre las cofibras de las flechas verticales que es una co-H-multiplicación en X .

Recíprocamente supongamos que X posee una co-H-multiplicación $\mu: X \rightarrow X \vee X$. En las siguientes cadenas de igualdades usaremos las inclusiones $i_1, i_2: X \rightarrow X \vee X$ y las proyecciones $p_1 = (1, 0), p_2 = (0, 1): X \vee X \rightarrow X$ de los factores del coproducto; las inclusiones $i_1, i_2: \mathcal{H}_2 X \rightarrow \mathcal{H}_2 X \oplus \mathcal{H}_2 X$ y las proyecciones $p_1, p_2: \mathcal{H}_2 X \oplus \mathcal{H}_2 X \rightarrow \mathcal{H}_2 X$ de los factores de la suma directa; las identificaciones naturales $\mathcal{H}_2(X \vee X) = \mathcal{H}_2 X \oplus \mathcal{H}_2 X$, $\mathcal{H}_2 i_1 = i_1$, $\mathcal{H}_2 i_2 = i_2$, $\mathcal{H}_2 \mu = i_1 + i_2$, $\mathcal{H}_2 p_1 = p_1$ y $\mathcal{H}_2 p_2 = p_2$; y la naturalidad del cup-producto. Tenemos que

$$\begin{aligned} \cup_{X \vee X} &= p_1^* i_{1*} \cup_X + p_2^* i_{2*} \cup_X \\ &= p_1^* (\otimes_T^2 i_1)_* \cup_X + p_2^* (\otimes_T^2 i_2)_* \cup_X, \end{aligned}$$

compárese con (4.3.3) (2). Por otro lado usando estas igualdades

$$\begin{aligned} (\otimes_T^2 (i_1 + i_2))_* \cup_X &= \mu_* \cup_X \\ &= \mu^* \cup_{X \vee X} \\ &= (\otimes_T^2 i_1)_* \cup_X + (\otimes_T^2 i_2)_* \cup_X, \end{aligned}$$

esto es

$$0 = (i_1 \otimes_T i_2)_* \cup_X + (i_2 \otimes_T i_1)_* \cup_X \in H^4(X, \otimes_T^2 (\mathcal{H}_2 X \oplus \mathcal{H}_2 X)),$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1 \otimes_T p_2)_* ((i_1 \otimes_T i_2)_* \cup_X + (i_2 \otimes_T i_1)_* \cup_X) \\ &= (p_1 i_1 \otimes_T p_2 i_2)_* \cup_X + (p_1 i_2 \otimes_T p_2 i_1)_* \cup_X \\ &= \cup_X. \end{aligned}$$

Así la proposición queda probada. \square

El invariante cup-producto de un complejo de cadenas determina en ciertas condiciones si existe un co-H-espacio con dicho complejo de cadenas.

Proposición 6.5.3. *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ 1-reducido de dimensión ≤ 4 , entonces existe un co-H-espacio X con $\mathcal{C}_*X = \mathcal{C}_*$ si y sólo si $0 = \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \in H^4(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_2 \mathcal{C}_*)$.*

Demostración. Al ser \mathcal{C}_* de dimensión ≤ 4 la siguiente sucesión es exacta, véase (5.2.A),

$$H^4(\mathcal{C}_*, \Gamma_T H_2 \mathcal{C}_*) \xrightarrow{(\tau_T)_*} H^4(\mathcal{C}_*, \otimes_T^2 H_2 \mathcal{C}_*) \xrightarrow{(q_T)_*} H^4(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_2 \mathcal{C}_*).$$

Sea \underline{X}_4 un sistema de homotopía de orden 4 con complejo de cadenas \mathcal{C}_* , véase (4.2.6). Por definición

$$(q_T)_* \cup_{\underline{X}_4} = (\bar{q}_T)_* (\bar{\sigma}_T)_* \cup_{\underline{X}_4} = (\bar{q}_T)_* \hat{\cup}_{\underline{X}_4} = \bar{\cup}_{\mathcal{C}_*},$$

por tanto $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = 0$ si y sólo si existe $\alpha \in H^4(\mathcal{C}_*, \Gamma_T H_2 \mathcal{C}_*)$ tal que $(\tau_T)_* \alpha = \cup_{\underline{X}_4}$. Caso de existir este α , usando (6.4.2) vemos que $\cup_{\underline{X}_4} - \alpha = 0$, así que si X es un T -complejo con $r_4 X = \underline{X}_4 - \alpha$ entonces usando (6.5.2) se observa que X es un co-H-espacio, y además por construcción $\mathcal{C}_* X = \mathcal{C}_*$.

Recíprocamente si X es un co-H-espacio con $\mathcal{C}_* X = \mathcal{C}_*$ tenemos que $\cup_X = 0$, por (6.5.2), luego

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = (\bar{q}_T)_* \hat{\cup}_{r_4 X} = (\bar{q}_T)_* (\bar{\sigma}_T)_* \cup_X = 0.$$

□

Observación 6.5.4. En teoría de homotopía ordinaria es bien conocido que para cualquier complejo de cadenas 1-reducido C_* de grupos libres abelianos existe un CW -complejo X reducido y normalizado con complejo de cadenas $C_* X = C_*$. Concretamente podemos tomar $X = \vee_{n \geq 2} M(H_n C_*, n)$, donde $M(A, n)$ es un espacio de Moore cuya homología reducida es el grupo abeliano A concentrado en grado n . Los espacios de Moore ordinarios de grados ≥ 2 son suspensiones, y en particular co-H-espacios. Esto se deriva del hecho bien conocido de que todo subgrupo de un grupo libre abeliano es libre abeliano a su vez, luego cualquier grupo abeliano A admite una resolución libre f. g. de longitud 1 que puede ser tomada como el complejo de cadenas celulares de un espacio de Moore $M(A, n)$ ($n \geq 2$).

En cambio en teoría de homotopía propia nada de esto es cierto debido a que, en general, un submódulo de un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo libre f. g. no tiene porqué ser siquiera proyectivo. La existencia de espacios de Moore en homotopía propia fue observada en (4.2.8), sin embargo no hay ninguna razón evidente que asegure que el complejo de cadenas de un espacio de Moore propio de grado 2 (o lo que es lo mismo, una resolución libre de su homología) tenga invariante cup-producto trivial, por tanto a la luz de (6.5.3) es

desconocido a priori si dado un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. existe un co-H-espacio de Moore con dicha homología en grado 2. Este problema nos mueve a estudiar la clase de cohomología de categorías $\bar{\cup}$ definida en (6.4.4). En el Capítulo 8 describiremos esta clase de manera puramente algebraica, obteniendo una receta para el cálculo de $\bar{\cup}$ para T un árbol cualquiera, y se observarán diferencias muy significativas con la teoría de homotopía ordinaria. Este cálculo de $\bar{\cup}$ será también fundamental para resolver los problemas de clasificación de tipos de homotopía propia estable que abordamos en el Capítulo 9.

6.6 Cup-producto y sucesión exacta de Whitehead

En esta sección exploramos la relación entre la parte inferior de la sucesión exacta de Whitehead de un T -complejo $(n-1)$ -conexo X , véanse (3.4.8), (3.1.8) y (5.4.1),

$$(6.6.A) \quad \cdots \rightarrow \mathcal{H}_4 X \xrightarrow{b_4} \Gamma_T \mathcal{H}_2 X \xrightarrow{i_3} \Pi_3 X \xrightarrow{h_3} \mathcal{H}_3 X, \text{ si } n = 2;$$

$$(6.6.B) \quad \cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+2} X \xrightarrow{b_{n+2}} \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_{n+1}} \Pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} \mathcal{H}_{n+1} X, \text{ si } n \geq 3;$$

con el invariante cup-producto,

$$\cup_X \in H^4(X, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X), \text{ si } n = 2;$$

o cup-producto reducido,

$$\hat{\cup}_X \in H^{n+2}(X, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X), \text{ si } n \geq 3.$$

Para ello usaremos el siguiente diagrama de sucesiones exactas ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{H}_n X, \mathcal{M}) & & \\ \downarrow & & \\ \text{Ker } \nu_{n+2} \hookrightarrow H^{n+2}(X, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\phi} & H^{n+2}(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\nu_{n+2}} \text{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathcal{H}_{n+2} X, \mathcal{M}) \\ \downarrow \zeta & & \\ \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1} X, \mathcal{M}) & & \end{array}$$

que están contenidas en las sucesiones exactas de 6 términos de coeficientes universales en (3.3.5).

Antes que nada observamos que tanto la sucesión (6.6.A) como la sucesión (6.6.B) dan lugar a una extensión de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos ($n \geq 2$)

$$(6.6.C) \quad \text{Coker } b_{n+2} \xrightarrow{i'_{n+1}} \Pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} \mathcal{H}_{n+1} X,$$

cuya clase de equivalencia en el correspondiente grupo $\text{Ext}_{\text{ab}(T)}^1$ denotaremos

$$\{\Pi_{n+1}X\} \in \text{Ext}_{\text{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1}X, \text{Coker } b_{n+2}).$$

Proposición 6.6.1. *Si X es un T -complejo 1-conexo el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_4X & \xrightarrow{b_4} & \Gamma_T\mathcal{H}_2X \\ & \searrow \nu_4 \cup_X & \downarrow \tau_T \\ & & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2X \end{array}$$

Demostración. En las condiciones de la definición (6.2.1), usando las indicaciones dadas después del Lema 3.4.10 para la construcción de los morfismos implicados en la sucesión exacta de Whitehead, así como (6.1.2), vemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_4 = \Pi_4(X^4, X^3) & \xrightarrow{\partial=f_4} & \Pi_3X^3 & \xrightarrow{\gamma_2} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2X \\ \uparrow & & \uparrow i_3 & \nearrow \tau_T & \\ \text{Ker } d_4 & \longrightarrow & \Gamma_T\mathcal{H}_2X & & \\ \downarrow & \nearrow b_4 & & & \\ \mathcal{H}_4X & & & & \end{array}$$

por tanto al ser $\gamma_2(f_4)$ un cociclo representante de \cup_X se tiene el resultado. \square

La siguiente proposición se demuestra de forma completamente análoga a la anterior, pero usando aquí (6.1.4) donde allí usábamos (6.1.2).

Proposición 6.6.2. *Si X es un T -complejo $(n-1)$ -conexo para cierto $n \geq 3$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{n+2}X & \xrightarrow{b_{n+2}} & \mathcal{H}_nX \otimes \mathbb{Z}_2 \\ & \searrow \nu_{n+2} \cup_X & \downarrow \bar{\tau}_T \\ & & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_nX \end{array}$$

En las condiciones de (6.6.1) existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_4X & \xrightarrow{b_4} & \Gamma_T\mathcal{H}_2X & \xrightarrow{p'} & \text{Coker } b_4 \\ \parallel & & \downarrow \tau_T & & \downarrow \tilde{\tau} \\ \mathcal{H}_4X & \xrightarrow{\nu_4 \cup_X} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2X & \xrightarrow{p} & \text{Coker } \nu_4 \cup_X \end{array}$$

En relación con el elemento $\{\Pi_3X\}$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.6.3. *Si X es un T -complejo 1-conexo tenemos la siguiente igualdad*

$$-\zeta\phi^{-1}p_*\cup_X = \tilde{\tau}_* \{\Pi_3 X\} \in \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_3 X, \text{Coker } \nu_4 \cup_X).$$

Demostración. Usando (2.2.14) vemos que si $d'_4: \mathcal{C}_4 X \rightarrow \text{Ker } d_3$ es la factorización de $d_4: \mathcal{C}_4 X \rightarrow \mathcal{C}_3 X$ entonces la sucesión exacta

$$(a) \quad \text{Ker } d_4 \hookrightarrow \mathcal{C}_4 X \xrightarrow{d'_4} \text{Ker } d_3 \twoheadrightarrow \mathcal{H}_3 X$$

es una resolución proyectiva de $\mathcal{H}_3 X$. En las condiciones de (6.2.1), el elemento $\zeta\phi^{-1}p_*\cup_X$ está representado por la composición

$$(b) \quad \mathcal{C}_4 X \xrightarrow{f_4} \Pi_3 X^3 \xrightarrow{\gamma_2} \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X \xrightarrow{p} \text{Coker } \nu_4 \cup_X .$$

Un cociclo representante de $\{\Pi_3 X\}$ puede ser construido de la siguiente manera, compárese con [HS71] IV.9: como $\text{Ker } d_3$ es proyectivo escogemos una sección $s: \text{Ker } d_3 \hookrightarrow \Pi_3 X^3$ para el siguiente epimorfismo h_3

$$(c) \quad \Gamma_T \mathcal{H}_2 X \xrightarrow{i_3} \Pi_3 X^3 \xrightarrow{h_3} \mathcal{H}_3 X^3 = \text{Ker } d_3.$$

Si denotamos $j: X^3 \subset X$ a la inclusión, la naturalidad del morfismo de Hurewicz h_3 demuestra que existe un único morfismo $\alpha: \mathcal{C}_4 X \rightarrow \text{Coker } b_4$ tal que $i'_3 \alpha = j_* s d'_4$, ya que (6.6.C) es exacta y

$$\begin{aligned} h_3 j_* s d'_4 &= j_* h_3 s d'_4 \\ &= j_* d'_4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para la última igualdad usamos que este último $j_* = \mathcal{H}_3 j$ coincide con la proyección natural $j_*: \text{Ker } d_3 = \mathcal{H}_3 X^3 \twoheadrightarrow \mathcal{H}_3 X$ al conúcleo de d'_4 en (a). El morfismo α es un cociclo que representa a $\{\Pi_3 X\}$.

Es bien conocido que existe una única retracción $r: \Pi_3 X^3 \twoheadrightarrow \Gamma_T \mathcal{H}_2 X$ de i_3 en (c) tal que $1_{\Pi_3 X^3} = i_3 r + s h_3$, en particular, usando la conmutatividad del siguiente diagrama de flechas sólidas, véase (6.1.2),

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker } d_3 & & & & \\ & & \uparrow \scriptstyle h_3 & \curvearrowright \scriptstyle s & & & \\ \mathcal{C}_4 X & \xrightarrow{f_4} & \Pi_3 X^3 & \xrightarrow{\gamma_2} & \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 X & \xrightarrow{p} & \text{Coker } \nu_4 \cup_X \\ & & \uparrow \scriptstyle i_3 & \nearrow \scriptstyle \tau_T & & \nearrow \scriptstyle \tilde{\tau} & \\ & & \Gamma_T \mathcal{H}_2 X & \xrightarrow{p'} & \text{Coker } b_4 & & \end{array}$$

obtenemos las siguientes igualdades para el cociclo (b)

$$p\gamma_2 f_4 = p\gamma_2(i_3 r + sh_3)f_4 = \tilde{\tau} p' r f_4 + p\gamma_2 s d'_4,$$

de donde se deduce que $\tilde{\tau} p' r f_4$ también representa a $\zeta \phi^{-1} p_* \cup_X$. Por otro lado, usando además la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \Pi_3 X^3 & \xrightarrow{j_*} & \Pi_3 X \\ i_3 \uparrow & & \uparrow i'_3 \\ \Gamma_T \mathcal{H}_2 X & \xrightarrow[p']{\twoheadrightarrow} & \text{Coker } b_4 \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= j_* f_4 \\ &= j_*(i_3 r + sh_3)f_4 \\ &= j_* i_3 r f_4 + j_* s d'_4 \\ &= i'_3 p' r f_4 + j_* s d'_4. \end{aligned}$$

Al ser i'_3 un monomorfismo, esto implica que el cociclo α , antes construido, que representa a $\{\Pi_3 X\}$ satisface $\alpha = -p' r f_4$, por tanto $\tilde{\tau}_* \{\Pi_3 X\}$ está representado por $\tilde{\tau} \alpha = -\tilde{\tau} p' r f_4$, de donde se sigue el resultado. \square

Análogamente, en las condiciones de (6.6.2), hay un diagrama conmutativo

$$(6.6.D) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_{n+2} X & \xrightarrow{b_{n+2}} & \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{p}'} & \text{Coker } b_{n+2} \\ \parallel & & \downarrow \bar{\tau}_T & & \downarrow \tilde{\tau} \\ \mathcal{H}_{n+2} X & \xrightarrow{\nu_{n+2} \hat{\cup}_X} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X & \xrightarrow{\bar{p}} & \text{Coker } \nu_{n+2} \hat{\cup}_X \end{array}$$

y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.6.4. *Si X es un T -complejo $(n-1)$ -conexo para cierto $n \geq 3$ entonces se da la siguiente igualdad*

$$-\zeta \phi^{-1} \bar{p}_* \hat{\cup}_X = \tilde{\tau}_* \{\Pi_{n+1} X\} \in \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1} X, \text{Coker } \nu_{n+2} \hat{\cup}_X).$$

La demostración de esta proposición transcurre de forma completamente paralela a la de (6.6.3), al igual que ocurría con (6.6.1) y (6.6.2), y no la daremos aquí.

Capítulo 7

Teoría de representaciones y álgebra controlada

Las bases teóricas de las estructuras algebraicas que modelan los invariantes algebraicos para el estudio de la teoría de homotopía propia descritos en el Capítulo 3 están sólidamente establecidas en la literatura, como se vio en el Capítulo 2. Sin embargo ¿qué podemos decir sobre la estructura de los $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulos f. p.? Sería conveniente obtener una respuesta adecuada a esta pregunta ya que la homología propia, siguiendo [BQ01], vive en categorías constituidas por estos módulos, y el papel crucial que juega esta teoría de homología en lo concerniente a la clasificación de tipos de homotopía propia se ha hecho patente en los Capítulos 3, 4 y 6. Conviene recordar en este punto la importancia que tiene en teoría de homotopía ordinaria el conocido teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados. ¿Cabría obtener algún resultado del mismo tipo para $R(\mathfrak{F}(T))$ -módulos f. p.? Esta es la pregunta fundamental que se plantea la teoría de representaciones.

Recordemos que la teoría de representaciones considera el *problema de las descomposiciones* en una categoría aditiva pequeña \mathbf{A} . Una solución a este problema consiste en un conjunto de objetos (que llamaremos *objetos elementales*) y un conjunto de isomorfismos (*isomorfismos elementales*) entre sumas directas finitas de objetos elementales. Estos conjuntos deben satisfacer las siguientes propiedades:

- Cualquier objeto de \mathbf{A} es isomorfo a una suma directa finita de objetos elementales.
- Cualquier relación de isomorfía entre dos de tales sumas directas se puede derivar de los isomorfismos elementales.

Nótese que esto es exactamente obtener una presentación del monoide abeliano $\text{Iso}(\mathbf{A})$ de clases de isomorfía de objetos en \mathbf{A} con la suma inducida por la suma directa. La solución trivial consiste en tomar todos los objetos como objetos elementales y todos los isomorfismos como isomorfismos elementales, por contra una solución óptima será aquella que minimice los cardinales de los conjuntos de objetos e isomorfismos elementales.

Diremos que \mathbf{A} tiene *tipo de representaciones finito* si existe un conjunto finito de objetos elementales, o equivalentemente si $\text{Iso}(\mathbf{A})$ es finitamente presentado. El tipo de representaciones de \mathbf{A} es *salvaje* si una solución del problema de las descomposiciones en \mathbf{A} daría lugar a una solución de dicho problema en la categoría de módulos de dimensión finita sobre una k -álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas. En otro caso decimos que \mathbf{A} tiene tipo de representaciones *manso*. Si \mathbf{A} tiene tipo de representaciones salvaje el problema de la palabra para grupos finitamente presentados, que es indecible, puede ser sumergido en el problema de las descomposiciones en \mathbf{A} , por tanto no se puede esperar obtener una solución satisfactoria en este caso. El tipo de representaciones de un álgebra A es por definición el de la categoría $\mathbf{fp}(A)$ de A -módulos (a derecha) finitamente presentados. Ejemplos de álgebras con tipos de representaciones finito y manso son, respectivamente, un cuerpo k y un dominio de ideales principales; en particular \mathbb{Z} y la categoría de grupos abelianos f. g. tienen tipo de representaciones manso.

En la Sección 7.2 probamos que si \mathfrak{F} es el espacio de finales de un árbol no compacto cualquiera entonces el problema de las descomposiciones para $R(\mathfrak{F})$ incluye al problema de las descomposiciones para la categoría de R -módulos numerablemente presentados. Esto prueba, en particular, que no merece la pena plantearse el problema para los anillos $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ ya que todo grupo abeliano numerable es numerablemente presentado, y reduce nuestras esperanzas de encontrar soluciones satisfactorias al caso $R = k$ un cuerpo. Por ello a partir de la segunda sección y por el resto de este capítulo nos concentraremos en la teoría de representaciones de las álgebras $k(\mathfrak{F})$.

El objetivo de calcular para un cuerpo arbitrario k el tipo de representaciones de las k -álgebras $k(\mathfrak{F})$ es finalmente alcanzado en la Sección 7.8, véanse (7.8.4) y (7.6.6), en función del cardinal de \mathfrak{F} tal como se indica en la siguiente tabla.

card \mathfrak{F}	tipo
< 4	finito
$= 4$	manso
> 4	salvaje

En los casos finito y manso construimos presentaciones explícitas de

$\text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathfrak{F})))$, véanse (7.8.5), (7.6.7) y (7.6.8). Más aún, en (7.8.5) también se prueba que para \mathfrak{F} finito hay presentaciones de $\text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathfrak{F})))$ con un número finito de isomorfismos elementales, que calculamos. Concretamente para \mathfrak{F} finito la presentación de $\text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathfrak{F})))$ en (7.8.5) tiene conjuntos de objetos e isomorfismos elementales con los siguientes cardinales.

card \mathfrak{F}	módulos	isomorfismos
1	6	6
2	12	12
3	21	18
≥ 4	$\geq \aleph_0$	$6 \text{ card } \mathfrak{F}$

Hay dos pasos claves para la obtención de estas presentaciones. El primero, dado en la Sección 7.5, es resolver el problema de las descomposiciones para los $\text{RCFM}(k)$ -módulos finitamente presentados, véase el Teorema 7.5.1, donde se clasifican estos módulos. El segundo, en la Sección 7.7, consiste en relacionar el problema de las descomposiciones en $\mathbf{fp}(k(\mathfrak{F}))$, donde $\text{card } \mathfrak{F} = n$ finito, con los problemas de las descomposiciones en la categoría $\mathbf{fp}(\text{RCFM}(k))$ y en la de n -subespacios de dimensión finita, véase (7.7.10).

Los invariantes que detectan la clase de isomorfía de los $k(\mathfrak{F})$ -módulos f. p. se construyen en la Sección 7.4 haciendo uso de la pro-categoría de espacios vectoriales y del funtor límite inverso. Las propiedades elementales de esta pro-categoría se repasan en la Sección 7.3.

En la Sección 7.6 se recoge la definición y teoría de representaciones de la aljaba¹ de los n -subespacios. También definimos allí los n -subespacios rígidos, que jugarán un papel importante en el resto del capítulo.

La Sección 7.9 está dedicada al cálculo de grupos $\text{Ext}_{R(\mathfrak{F})}^*$ de pares de $R(\mathfrak{F})$ -módulos finitamente presentados para $R = k$ o \mathbb{Z} ; y en la Sección 7.10 se calculan los valores de los funtores cuadráticos definidos en el Capítulo 5 sobre algunos $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulos f. p. para \mathfrak{F} de cardinal finito. Estos resultados, si bien bastante técnicos, son nuestra principal motivación para el estudio de la teoría de representaciones de las álgebras $k(\mathfrak{F})$, ya que en ellos se apoyan de manera fundamental los principales resultados homotópicos de esta memoria.

¹ *quiver* en inglés.

7.1 Homomorfismos controlados por árboles con un número finito de finales

Dado un anillo conmutativo cualquiera R y un árbol T con un número finito de finales hay una descripción alternativa de los morfismos en la categoría $\mathbf{M}_R(T)$ definida en (2.2.1). Esta descripción resulta más conveniente para los propósitos de este capítulo.

En primer lugar, dado que la categoría $\mathbf{M}_R(T)$ no depende de la estructura de árbol T sino sólo de su espacio de finales de Freudenthal, véase (2.2.2) (2), fijaremos el siguiente modelo concreto T_n de árbol con n finales. El conjunto de vértices de T_n es

$$T_n^0 = \{v_0\} \cup \{v_m^1, \dots, v_m^n\}_{m \geq 1},$$

y las aristas de T_n unen v_0 a v_1^i y v_m^i a v_{m+1}^i ($1 \leq i \leq n, m \geq 1$). El espacio topológico $\mathfrak{F}(T_n) = \mathbf{n}$ es un conjunto discreto con n puntos. Para $n = 1$ el árbol $T_1 = [0, \infty)$ es la semirrecta y su conjunto de vértices $T_1^0 = \mathbb{N}_0$ los enteros no negativos.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad, y así lo haremos a lo largo de este capítulo, que para todo R -módulo T_n -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ la imagen de $\alpha: A \rightarrow T_n$ está contenida en el conjunto de vértices $\alpha(A) \subset T_n^0$, compárese con la prueba de [BQ01] V.3.4. Para cualquier función de altura $\alpha: A \rightarrow T_n^0 \subset T_n$ definimos los siguientes conjuntos ($1 \leq i \leq n, j \geq 1$)

$$(7.1.A) \quad A_j^i = \bigcup_{l \geq j} \alpha^{-1}(v_l^i).$$

Un morfismo $\varphi: R\langle B \rangle_\beta \rightarrow R\langle A \rangle_\alpha$ en $\mathbf{M}_R(T_n)$ es controlado si y sólo si para todo $m \geq 1$ existe $M \geq 1$ tal que $\varphi(B_M^i) \subset R\langle A_M^i \rangle$ para cualquier $1 \leq i \leq n$. Omitiremos el superíndice i cuando $n = 1$. Es más, para las próximas secciones de este capítulo fijamos la siguiente notación ($m \geq 0$)

$$(7.1.B) \quad {}_m A = \alpha^{-1}(v_0) \cup \left[\bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{l \leq m} \alpha^{-1}(v_l^i) \right], \quad {}_m A_j^i = {}_m A \cap A_j^i.$$

7.2 R -módulos numerablemente presentados vistos como RCFM(R)-módulos finitamente presentados

Hay una inclusión llena y exacta de categorías abelianas

$$i: \mathbf{mod}(R) \longrightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{RCFM}(R))$$

definida por $iM = \text{Hom}_R(R\langle\mathbb{N}_0\rangle, M)$. El anillo $\text{RCFM}(R)$ actúa en iM por endomorfismos de $R\langle\mathbb{N}_0\rangle$.

Sea $f: \mathbf{M}_R(T_1) \rightarrow \mathbf{mod}(R)$ el funtor de olvido que envía un R -módulo libre T_1 -controlado a su R -módulo subyacente. El $\text{RCFM}(R)$ -módulo iM puede ser considerado como el funtor $iM = \text{Hom}_R(f, M): \mathbf{M}_R(T_1)^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Proposición 7.2.1. *El funtor i tiene un adjunto a izquierda exacto τ tal que τi es naturalmente equivalente al funtor identidad. Es más, τ puede ser escogido como el funtor de evaluación en un R -módulo libre T_1 -controlado con un sólo generador.*

Demostración. Sea $R\langle e \rangle_\phi$ un R -módulo libre T_1 -controlado cuya base es un conjunto unitario $\{e\}$ (todos estos objetos son isomorfos en $\mathbf{M}_R(T_1)$ por (2.2.5)). El anillo de endomorfismos de este objeto es R , por tanto el funtor de evaluación $ev_{R\langle e \rangle_\phi}$ en (2.1.B) toma valores en la categoría de R -módulos. Veamos que el funtor exacto $ev_{R\langle e \rangle_\phi}$ es adjunto a izquierda a i . En virtud de [Bor94] 3.3 existe un adjunto a izquierda de i que precisamente por ser adjunto a izquierda preserva colímites, así que sólo tenemos que comprobar que $\text{Hom}_{\mathbf{M}_R(T_1)}(R\langle A \rangle_\alpha, iM) = \text{Hom}_R(ev_{R\langle e \rangle_\phi} R\langle A \rangle_\alpha, M)$ para cualquier R -módulo libre T_1 -controlado $R\langle A \rangle_\alpha$ de forma natural. Esto se sigue de la identificación natural $ev_{R\langle e \rangle_\phi} R\langle A \rangle_\alpha = R\langle A \rangle$ y el lema de Yoneda. \square

Corolario 7.2.2. *Si M es un R -módulo y \mathcal{N} un $\text{RCFM}(R)$ -módulo entonces hay isomorfismos naturales ($n \geq 0$)*

$$\text{Ext}_{\text{RCFM}(R)}^n(\mathcal{N}, iM) \simeq \text{Ext}_R^n(\tau\mathcal{N}, M).$$

En particular si $R = k$ es un cuerpo los $\text{RCFM}(k)$ -módulos iM son todos inyectivos.

Un R -módulo es *numerablemente presentado* si es el conúcleo de un morfismo entre R -módulos libres con bases numerables. Obviamente el conúcleo de un morfismo entre R -módulos numerablemente presentados es numerablemente presentado también. En particular los sumandos directos de R -módulos numerablemente presentados son numerablemente presentados.

Proposición 7.2.3. *El funtor i envía R -módulos numerablemente presentados a $\text{RCFM}(R)$ -módulos finitamente presentados.*

En la prueba de esta proposición usaremos las matrices finitas por filas y por columnas A y B definidas como

- $a_{i+1,i} = 1$ ($i \in \mathbb{N}_0$) y $a_{ij} = 0$ en caso contrario,

- $b_{\frac{n(n+1)}{2}+i, \frac{(n-1)n}{2}+i} = 1$ para cualquier $n > 0$ y $0 \leq i < n$, y $b_{ij} = 0$ en otro caso,

y contemplaremos a $\text{RCFM}(R)$ como la R -álgebra de endomorfismos del R -módulo libre T_1 -controlado $R\langle\mathbb{N}_0\rangle_\delta$ donde $\delta: \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ es la inclusión, véase (2.2.9).

Demostración de (7.2.3). Como \mathbf{i} es exacto será suficiente probar la proposición para los R -módulos numerablemente presentados R y $R\langle\mathbb{N}_0\rangle$. Recordemos que $\text{Hom}_{\mathbf{M}_R(T_1)}(R\langle\mathbb{N}_0\rangle_\delta, \mathbf{i}M) = \text{Hom}_R(R\langle\mathbb{N}_0\rangle, M)$ para cualquier R -módulo M . Los $\text{RCFM}(R)$ -módulos $\mathbf{i}R$ y $\mathbf{i}R\langle\mathbb{N}_0\rangle$ son los conúcleos de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ respectivamente, donde $\mathbf{I} \in \text{RCFM}(R)$ es la matriz identidad. Las proyecciones naturales sobre los conúcleos vienen dadas por los homomorfismos $R\langle\mathbb{N}_0\rangle \rightarrow R$ y $R\langle\mathbb{N}_0\rangle \rightarrow R\langle\mathbb{N}_0\rangle$ definidos sobre los generadores por $n \mapsto 1$ ($n \geq 0$) y $\frac{n(n+1)}{2} + i \mapsto i$ ($n \geq i \geq 0$) respectivamente. \square

Corolario 7.2.4. *El problema de las descomposiciones para los R -módulos numerablemente presentados está contenido dentro del problema de las descomposiciones para los $R(\mathfrak{F})$ -módulos finitamente presentados, donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$ es el espacio de finales de Freudenthal de un árbol no-compacto cualquiera.*

Este corolario es consecuencia de las Proposiciones 7.2.1 y 7.2.3, ya que al ser $R(T_1) = \text{RCFM}(R)$ usando (2.2.2) (3), (1.3.4) y (2.1.5) podemos incluir el problema de las descomposiciones en la categoría de $\text{RCFM}(R)$ -módulos f. p. en dicho problema para la categoría de $R(\mathfrak{F})$ -módulos f. p. siempre que \mathfrak{F} sea no vacío.

7.3 Breve repaso de pro-categorías

Cualquier conjunto parcialmente ordenado Λ puede ser considerado como una categoría pequeña con un único morfismo $u \rightarrow v$ si $u \geq v$; $u, v \in \Lambda$. Un conjunto parcialmente ordenado Λ es *dirigido* si dados $u, v \in \Lambda$ existe $w \in \Lambda$ con $w \geq u, v$. Es más, Λ es *cofinito* si el conjunto $\{u \in \Lambda; u \leq v\}$ es finito para todo $v \in \Lambda$.

Un *pro-objeto* o *sistema inverso* X_\bullet sobre una categoría \mathbf{C} es un functor $X_\bullet: \Lambda \rightarrow \mathbf{C}$ donde Λ es un conjunto parcialmente ordenado dirigido y cofinito. Si $u \in \Lambda$ denotaremos habitualmente $X_u = X_\bullet(u)$. Los morfismos $X_\bullet(u \rightarrow v)$ ($u, v \in \Lambda, u \geq v$) se denominan *morfismos de enlace* de X_\bullet , y Λ *conjunto de índices* del sistema inverso.

La categoría $\text{pro-}\mathbf{C}$ tiene por objetos a los sistemas inversos sobre \mathbf{C} . Los conjuntos de morfismos vienen dados por la siguiente fórmula

$$(7.3.A) \quad \text{Hom}_{\text{pro-}\mathbf{C}}(X_\bullet, Y_\bullet) = \lim_v \text{colim}_u \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_u, Y_v).$$

Identificaremos cualquier objeto de \mathbf{C} con el sistema inverso cuyo conjunto de índices es unitario $\Lambda = *$. Esto define una inclusión llena categorías $\mathbf{C} \subset \text{pro-}\mathbf{C}$. Esta inclusión tiene un adjunto a derecha, el functor límite (inverso) $\text{lim: pro-}\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $\text{lim } X_\bullet = \lim_u X_u$.

La categoría $\text{pro-}\mathbf{C}$ es abeliana si \mathbf{C} lo es, véase [CP89] 6.4. Este será siempre el caso a lo largo de este capítulo ya que sólo usaremos en este contexto la categoría $\mathbf{C} = \mathbf{mod}(k)$ de k -espacios vectoriales. Denotaremos lim^1 al primer functor derivado del límite. Una condición suficiente para la anulación de este primer derivado es la llamada condición de Mittag-Leffler, véanse [CP89] 6.4 Proposición 4 y 6.6 Proposición 2. Si V es un espacio vectorial y X_\bullet un sistema inverso de espacios vectoriales entonces por (7.3.A)

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathbf{mod}(k)}(V, X_\bullet) = \lim_v \text{Hom}_k(V, X_v) = \text{Hom}_k(V, \text{lim } X_\bullet).$$

Por tanto, como $\text{Hom}_k(V, -)$ es un functor exacto la categoría de espacios vectoriales, la sucesión espectral de Grothendieck (véase [HS71] VIII.9.3) da lugar a un isomorfismo

$$(7.3.B) \quad \text{Ext}_{\text{pro-}\mathbf{mod}(k)}^1(V, X_\bullet) = \text{Hom}_k(V, \text{lim}^1 X_\bullet).$$

7.4 Invariantes numéricos de $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados

En esta sección definiremos invariantes de la clase de isomorfía de un $k(\mathbf{n})$ -módulo f. p. que vivirán en los monoides abelianos $\mathbb{N}_{\infty, n}$ ($n \geq 1$), donde el monoide abeliano $\mathbb{N}_{\infty, n}$ tiene $n + 1$ generadores

$$1, \infty_1, \dots, \infty_n$$

y $2n$ relaciones

$$1 + \infty_i = \infty_i, \quad \infty_i + \infty_i = \infty_i, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Como conjunto $\mathbb{N}_{\infty, n}$ es

$$\mathbb{N}_{\infty, n} = \mathbb{N}_0 \sqcup \left\{ \infty_S = \sum_{i \in S} \infty_i; \emptyset \neq S \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Por simplicidad si $n = 1$ denotaremos $\mathbb{N}_{\infty,1} = \mathbb{N}_{\infty}$ e $\infty_1 = \infty$.

Sea $\varphi: k\langle B \rangle_{\beta} \rightarrow k\langle A \rangle_{\alpha}$ un morfismo en $\mathbf{M}_k(T_n)$. Definimos el elemento $\lambda_{\varphi} \in \mathbb{N}_{\infty,n}$ de la siguiente forma, véase (7.1.A): si el espacio vectorial

$$L_{\varphi} = \frac{k\langle A \rangle}{\bigcap_{m \geq 1} \sum_{i=1}^n [k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)]},$$

es de dimensión finita entonces $\lambda_{\varphi} = \dim L_{\varphi}$, y si no $\lambda_{\varphi} = \infty_S$, donde $S \subset \{1, \dots, n\}$ es el mayor subconjunto tal que si $i \notin S$ entonces existe $M \geq 1$ con $k\langle A_M^i \rangle \subset \varphi(k\langle B \rangle)$.

Proposición 7.4.1. *El elemento λ_{φ} sólo depende de la clase de isomorfía del $k(\mathbf{n})$ -módulo $f. p.$ Coker φ , y $\lambda_{\varphi \oplus \psi} = \lambda_{\varphi} + \lambda_{\psi}$.*

Demostración. Es sencillo comprobar usando la descripción alternativa de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 que la correspondencia $\varphi \mapsto \Upsilon(\varphi) = L_{\varphi}$ define un funtor aditivo Υ de $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ a la categoría de k -espacios vectoriales. Es más, si $V_{\bullet}^{\varphi,i}$ es el sistema inverso de k -espacios vectoriales indexado por \mathbb{N} y dado por ($1 \leq i \leq n$)

$$V_m^{\varphi,i} = \frac{k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)},$$

y las inclusiones obvias como morfismos de enlace, véase (7.1.A), las correspondencias $\varphi \mapsto \Theta_i(\varphi) = V_{\bullet}^{\varphi,i}$ también definen funtores aditivos Θ_i de $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ a la categoría de pro-espacios vectoriales. Más aún, es fácil ver que los funtores Υ y Θ_i ($1 \leq i \leq n$) factorizan a través de la relación de equivalencia natural \sim en $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$, por tanto la primera parte del enunciado de la proposición se sigue de (2.1.4) y el hecho de que λ_{φ} está definido como $\dim \Upsilon(\varphi)$ siempre que este espacio vectorial sea de dimensión finita, y en otro caso $\lambda_{\varphi} = \infty_S$ donde $S = \{i \in \{1, \dots, n\} ; \Theta_i(\varphi) \neq 0\}$. La segunda parte del enunciado se sigue de la aditividad de los funtores Υ , Θ_i ($1 \leq i \leq n$). \square

Si el siguiente espacio vectorial tiene dimensión finita, véase (7.1.A),

$$M_{\varphi}^i = \frac{\bigcap_{m \geq 1} [k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)]}{\bigcap_{m \geq 1} \left\{ [k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right] \right\}},$$

el elemento $\mu_{\varphi}^i \in \mathbb{N}_{\infty}$ ($1 \leq i \leq n$) se define como $\mu_{\varphi}^i = \dim M_{\varphi}^i$, en otro caso $\mu_{\varphi}^i = \infty$.

Proposición 7.4.2. *Los elementos μ_{φ}^i ($1 \leq i \leq n$) sólo dependen de la clase de isomorfía del $k(\mathbf{n})$ -módulo $f. p.$ Coker φ , y $\mu_{\varphi \oplus \psi}^i = \mu_{\varphi}^i + \mu_{\psi}^i$.*

Demostración. Usando la caracterización de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 es sencillo comprobar que las correspondencias $\varphi \mapsto M_\varphi^i$ definen funtores aditivos de $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ a la categoría de k -espacios vectoriales. Es más, estos funtores factorizan a través de la relación de equivalencia natural \sim , por tanto la proposición se sigue de (2.1.4). \square

Para definir los elementos $\nu_\varphi^i \in \mathbb{N}_\infty$ ($1 \leq i \leq n$) introducimos los siguientes sistemas inversos de k -espacios vectoriales $U_{\bullet}^{\varphi,i}$, indexados por el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden parcial producto, dados por

$$U_{pq}^{\varphi,i} = \frac{k\langle A_p^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}{k\langle A_p^i \rangle \cap \varphi(k\langle B_q^i \rangle)},$$

véase (7.1.A), y con morfismos de enlace inducidos por las inclusiones obvias de espacios vectoriales. Si el límite de $U_{\bullet}^{\varphi,i}$ es de dimensión finita definimos $\nu_\varphi^i = \dim \lim U_{\bullet}^{\varphi,i}$, y en otro caso $\nu_\varphi^i = \infty$.

Proposición 7.4.3. *Los elementos ν_φ^i ($1 \leq i \leq n$) sólo dependen de la clase de isomorfía del $k(\mathbf{n})$ -módulo $f. p.$ Coker φ , y $\nu_{\varphi \oplus \psi}^i = \nu_\varphi^i + \nu_\psi^i$.*

Demostración. Es sencillo comprobar usando la descripción de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 que las correspondencias $\varphi \mapsto U_{\bullet}^{\varphi,i}$ son funtores aditivos de $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ a la categoría de pro-espacios vectoriales, y estos funtores factorizan a través de la relación de equivalencia natural \sim , por tanto la proposición se sigue de (2.1.4). \square

Las proposiciones anteriores de esta sección se resumen en el siguiente

Corolario 7.4.4. *Hay morfismos bien definidos de monoïdes abelianos ($n \in \mathbb{N}$)*

$$\Phi_n: \text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathbf{n}))) \longrightarrow \mathbb{N}_{\infty,n} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_\infty \times \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_\infty$$

que envían la clase de isomorfía $[\mathcal{M}]$ de un $k(\mathbf{n})$ -módulo $f. p.$ $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi$ a

$$\Phi_n([\mathcal{M}]) = \left(\lambda_\varphi, (\mu_\varphi^i)_{i=1}^n, (\nu_\varphi^i)_{i=1}^n \right).$$

De ahora en adelante denotaremos $\lambda_{\mathcal{M}} = \lambda_\varphi$, $\mu_{\mathcal{M}}^i = \mu_\varphi^i$ y $\nu_{\mathcal{M}}^i = \nu_\varphi^i$ ($1 \leq i \leq n$) si $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi$ y omitiremos el superíndice i cuando $n = 1$.

Observación 7.4.5. Denotaremos $\mathbb{F}^i: \mathbf{M}_R(T_1) \rightarrow \mathbf{M}_R(T_n)$ al funtor lleno $\mathbb{F}^i = \mathbb{F}^{f_i}$ inducido por la aplicación propia $f_i: T_1 \rightarrow T_n$ que identifica $T_1 = \mathbb{R}_+$ con la i -ésima rama del árbol T_n , en particular $f_i(0) = v_0$ y $f_i(n) = v_n^i$ para $n > 0$; véase (2.2.2) (3).

La siguiente proposición es una mera comprobación que puede ser realizada fácilmente usando la conmutatividad de (2.1.A) y la exactitud a derecha de los funtores \mathbb{F}_*^i .

Proposición 7.4.6. *Si \mathcal{M} es un $k(\mathbf{1})$ -módulo f. p. entonces para todo $1 \leq i \leq n$*

- $\lambda_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}}$ si $\lambda_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$, y $\lambda_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}} = \infty_i$ en otro caso,
- $\mu_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}}^i = \mu_{\mathcal{M}}$ y $\mu_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}}^j = 0$ si $j \neq i$,
- $\nu_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}}^i = \nu_{\mathcal{M}}$ y $\nu_{\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}}^j = 0$ si $j \neq i$.

7.5 Clasificación de $\text{RCFM}(k)$ -módulos finitamente presentados

En (2.2.9) vimos que la k -álgebra $k(\mathbf{1})$ coincide con la k -álgebra $\text{RCFM}(k)$ de matrices $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ con entradas en k tal que toda fila y toda columna tiene a lo sumo un número finito de entradas no triviales (matrices finitas por filas y por columnas). Estas matrices representan a los endomorfismos del k -espacio vectorial T_1 -controlado $k\langle \mathbb{N}_0 \rangle_\delta$, donde $\delta: \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ es la inclusión del conjunto de vértices. El elemento unidad de la k -álgebra $\text{RCFM}(k)$ es la matriz identidad \mathbf{I} con $i_{ii} = 1$ ($i \in \mathbb{N}_0$) e $i_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por simplicidad abreviaremos $\mathcal{R} = \text{RCFM}(k)$.

Consideremos las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} usadas en la prueba de (7.2.3), recordemos que están definidas como

- $\mathbf{a}_{i+1,i} = 1$ ($i \in \mathbb{N}_0$) y $\mathbf{a}_{ij} = 0$ en otro caso,
- $\mathbf{b}_{\frac{n(n+1)}{2}+i, \frac{(n-1)n}{2}+i} = 1$ para cualquier $n > 0$ y $0 \leq i < n$, y $\mathbf{b}_{ij} = 0$ en caso contrario.

Definimos los siguientes \mathcal{R} -módulos

- $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{R}}{\mathbf{A}\mathcal{R}}$,
- $\mathcal{B} = \frac{\mathcal{R}}{(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathcal{R}}$,
- $\mathcal{C} = \frac{\mathcal{R}}{(\mathbf{I}-\mathbf{A}^t)\mathcal{R}}$,
- $\mathcal{B}_\infty = \frac{\mathcal{R}}{(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathcal{R}}$,
- $\mathcal{C}_\infty = \frac{\mathcal{R}}{(\mathbf{I}-\mathbf{B}^t)\mathcal{R}}$.

El principal resultado de esta sección es el siguiente

Teorema 7.5.1 (Clasificación de los RCFM(k)-módulos f. p.). *Hay una solución del problema de las descomposiciones en la categoría de RCFM(k)-módulos f. p. dada por los siguientes módulos elementales*

$$\mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_\infty, \mathcal{C}, \mathcal{C}_\infty,$$

y los isomorfismos elementales

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{R} \simeq \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \simeq \mathcal{R}, \quad \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}_\infty \simeq \mathcal{B}_\infty,$$

$$\mathcal{B}_\infty \oplus \mathcal{B}_\infty \simeq \mathcal{B}_\infty, \quad \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}_\infty \simeq \mathcal{C}_\infty, \quad \mathcal{C}_\infty \oplus \mathcal{C}_\infty \simeq \mathcal{C}_\infty.$$

Este teorema es consecuencia directa de los dos próximos resultados. Usaremos la siguiente notación, dado $n \in \mathbb{N}_0$ denotamos \mathcal{A}_n , \mathcal{B}_n y \mathcal{C}_n a la suma directa de n copias de \mathcal{A} , \mathcal{B} o \mathcal{C} , respectivamente, y $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{R}$.

Teorema 7.5.2. *Para todo \mathcal{R} -módulo f. p. \mathcal{M} hay un isomorfismo*

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}}.$$

Proposición 7.5.3. *Tenemos las siguientes igualdades:*

- $\Phi_1(\mathcal{A}) = (1, 0, 0)$,
- $\Phi_1(\mathcal{B}) = (0, 1, 0)$,
- $\Phi_1(\mathcal{C}) = (0, 0, 1)$,
- $\Phi_1(\mathcal{R}) = (\infty, 0, 0)$,
- $\Phi_1(\mathcal{B}_\infty) = (0, \infty, 0)$,
- $\Phi_1(\mathcal{C}_\infty) = (0, 0, \infty)$.

En particular tenemos que

Corolario 7.5.4. *El morfismo de monoides*

$$\Phi_1 : \text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathbf{1}))) \longrightarrow \mathbb{N}_\infty \times \mathbb{N}_\infty \times \mathbb{N}_\infty$$

es un isomorfismo.

La prueba de la Proposición 7.5.3 se dará más adelante. El Teorema 7.5.2 es consecuencia directa de los Lemas 7.5.18, 7.5.19, 7.5.20 y 7.5.22 que siguen. Estos son los resultados más arduos de probar del presente capítulo. De hecho el resto de esta larga sección es extremadamente técnico y está exclusivamente enfocado a probar el Teorema 7.5.2, aunque también obtendremos algunos corolarios interesantes sobre el álgebra homológica de los \mathcal{R} -módulos finitamente presentados.

El siguiente resultado es un cálculo sencillo.

Lema 7.5.5. *Las siguientes igualdades son ciertas en \mathcal{R} :*

- (1). $A^t A = 1$,
- (2). $B^t B = 1$.

El siguiente lema se sigue directamente de (2.2.5).

Lema 7.5.6. *Dos k -espacios vectoriales T_1 -controlados $k\langle A \rangle_\alpha$, $k\langle B \rangle_\beta$ son isomorfos en $\mathbf{M}_k(T_1)$ si y sólo si A y B tienen el mismo cardinal.*

Lema 7.5.7. *El \mathcal{R} -módulo \mathcal{A} es isomorfo a cualquier k -espacio vectorial T_1 -controlado de dimensión 1.*

Demostración. Si $k\langle e \rangle_\phi$ es un k -espacio vectorial T_1 -controlado de dimensión 1 el conúcleo de A viene dado por el homomorfismo controlado $\varphi: k\langle \mathbb{N}_0 \rangle_\delta \rightarrow k\langle e \rangle_\phi$ definido sobre los elementos básicos como $0 \mapsto e$ y $n \mapsto 0$ para $n > 0$. □

La demostración de la Proposición 7.5.3 es como sigue.

Demostración de 7.5.3. En esta demostración omitimos algunos cálculos laboriosos pero triviales. Denotaremos \mathbb{N}_p ($p \geq 1$) al conjunto de los naturales $\geq p$.

El \mathcal{R} -módulo \mathcal{R} corresponde al k -espacio vectorial T_1 -controlado $k\langle \mathbb{N}_0 \rangle_\delta$ donde $\delta: \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ es la inclusión, por tanto es el conúcleo del morfismo trivial $0: 0 \rightarrow k\langle \mathbb{N}_0 \rangle_\delta$, y las igualdades $\lambda_{\mathcal{R}} = \infty$, $\mu_{\mathcal{R}} = 0$ se siguen inmediatamente, es más, $U_{m,n}^0 = k\langle \mathbb{N}_m \rangle$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, y dados $M \geq m$, $N \geq n$ el correspondiente homomorfismo de enlace en U_\bullet^0 es la inclusión $U_{M,N}^0 = k\langle \mathbb{N}_M \rangle \subset k\langle \mathbb{N}_m \rangle = U_{m,n}^0$, por lo tanto $\lim U_\bullet^0 = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} k\langle \mathbb{N}_m \rangle = 0$ y $\nu_{\mathcal{R}} = 0$.

En virtud de (7.5.7) el $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulo \mathcal{A} es el conúcleo del morfismo trivial $0 \rightarrow k\langle e \rangle_\phi$ donde $k\langle e \rangle_\phi$ es un k -espacio vectorial T_1 -controlado de dimensión 1, de aquí se sigue fácilmente la igualdad $\Phi_1(\mathcal{A}) = (1, 0, 0)$.

Es fácil comprobar que $k\langle\mathbb{N}_n\rangle + (I - A)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) = k\langle\mathbb{N}_0\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $k\langle\mathbb{N}_0\rangle/(I - A)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) \simeq k$ está generado por la clase de cualquier $n \in \mathbb{N}_0$, así que $\lambda_{\mathcal{B}} = 0$ y $\mu_{\mathcal{B}} = 1$. Es más, $k\langle\mathbb{N}_n\rangle \cap (I - A)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) = (I - A)(k\langle\mathbb{N}_n\rangle)$ y por tanto $U_{n,n}^{(I-A)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $\lim U_{\bullet}^{(I-A)} = 0$ ya que el subconjunto diagonal $\{(n, n); n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es cofinal, luego $\nu_{\mathcal{B}} = 0$.

Es fácil ver que $(I - A^t)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) = k\langle\mathbb{N}_0\rangle$, por tanto $\lambda_{\mathcal{C}} = 0 = \mu_{\mathcal{C}}$, es más $(I - A^t)(k\langle\mathbb{N}_n\rangle)$ está generado por el conjunto $\{m - (m - 1)\}_{m \geq n}$, luego $U_{n-1,n}^{(I-A^t)} \simeq k$ está generado por la clase de cualquier $m \geq n - 1$ y el homomorfismo de enlace $U_{n,n+1}^{(I-A^t)} \rightarrow U_{n-1,n}^{(I-A^t)}$ es un isomorfismo, así que, de nuevo por cofinalidad, vemos que $\lim U_{\bullet}^{(I-A^t)} \simeq k$, en particular $\nu_{\mathcal{C}} = 1$.

El espacio vectorial $k\langle\mathbb{N}_n\rangle + (I - B)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle)$ es $k\langle\mathbb{N}_0\rangle$, así que $\lambda_{\mathcal{B}_{\infty}} = 0$, es más, una base de $k\langle\mathbb{N}_0\rangle/(I - B)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle)$ está formada por las clases de los elementos básicos $\left\{\frac{n(n+3)}{2}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, luego $\mu_{\mathcal{B}_{\infty}} = \infty$. Es sencillo comprobar que $k\langle\mathbb{N}_n\rangle \cap (I - B)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) = (I - B)(k\langle\mathbb{N}_n\rangle)$, por tanto $U_{n,n}^{(I-B)} = 0$, $\lim U_{\bullet}^{(I-B)} = 0$ y $\nu_{\mathcal{B}_{\infty}} = 0$.

Finalmente $(I - B^t)(k\langle\mathbb{N}_0\rangle) = k\langle\mathbb{N}_0\rangle$, así que $\lambda_{\mathcal{C}_{\infty}} = 0 = \mu_{\mathcal{C}_{\infty}}$, y hay isomorfismos ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$U_{\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\right)}^{(I-B^t)} \simeq k \left\langle \frac{n(n+1)}{2}, \dots, \frac{n(n+1)}{2} + n \right\rangle,$$

es más, el homomorfismo de enlace ($n > 0$)

$$U_{\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\right)}^{(I-B^t)} \longrightarrow U_{\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{(n-1)n}{2}\right)}^{(I-B^t)}$$

envía $\frac{n(n+1)}{2} + m$ a $\frac{(n-1)n}{2} + m$ si $m < n$ y $\frac{n(n+1)}{2} + n$ al elemento trivial, así que $\lim U_{\bullet}^{(I-B^t)} = \prod_{\mathbb{N}_0} k$ es el producto directo de una cantidad infinita numerable de copias de k y la igualdad $\nu_{\mathcal{C}_{\infty}} = \infty$ se tiene. \square

Lema 7.5.8. *Hay un isomorfismo de \mathcal{R} -módulos $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{B}\mathcal{R}} \simeq \mathcal{R}$.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}_0$ el subconjunto infinito $A = \left\{\frac{n(n+3)}{2}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, y $\alpha: A \subset \mathbb{N}_0$ la inclusión. La siguiente sucesión, donde φ es la proyección obvia, es exacta

$$k\langle\mathbb{N}_0\rangle_{\delta} \xrightarrow{B} k\langle\mathbb{N}_0\rangle_{\delta} \xrightarrow{\varphi} k\langle A\rangle_{\alpha}.$$

Por tanto el lema se sigue de (7.5.6). \square

Lema 7.5.9. *La multiplicación a izquierda por una de las siguientes matrices*

$$A, (I - A), (I - A^t), (I - B), (I - B^t),$$

induce un homomorfismo inyectivo de \mathcal{R} -módulos a derecha $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

Demostración. La matriz A tiene una inversa a izquierda en \mathcal{R} en virtud de (7.5.5). Las otras matrices tienen inversa a izquierda bien en la k -álgebra $\text{CFM}(k)$ de matrices finitas por columna o bien en la k -álgebra $\text{RFM}(k)$ de matrices finitas por filas. Ambas k -álgebras contienen a \mathcal{R} , es más, $\mathcal{R} = \text{CFM}(k) \cap \text{RFM}(k)$. La k -álgebra $\text{CFM}(k)$ es el anillo de endomorfismos del k -espacio vectorial $k\langle\mathbb{N}_0\rangle$, y hay un isomorfismo $\text{RFM}(k) \simeq \text{CFM}(k)^{op}$ dado por la transposición. Más concretamente, sean C y D las matrices de $\text{RFM}(k)$ definidas como $c_{ij} = 1$ si $i \geq j$ y cero en otro caso, y $d_{\binom{m-1}{2}m+i, \binom{n-1}{2}n+i} = 1$ ($m \geq n > i \geq 0$) y trivial en caso contrario. Es sencillo comprobar que $C(1-A) = 1$, $C^t(1-A^t) = 1$, $D(1-B) = 1$ y $D^t(1-B^t) = 1$, por tanto el lema se tiene. \square

Proposición 7.5.10. *Hay extensiones de \mathcal{R} -módulos*

- (1). $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$,
- (2). $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{B}_\infty \twoheadrightarrow \mathcal{C}_\infty$.

Demostración. Usando (7.5.5), (7.5.8) y (7.5.9) obtenemos las siguientes igualdades, isomorfismos y sucesiones exactas cortas, que se corresponden con las extensiones del enunciado

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{A}\mathcal{R}} &\simeq \frac{(1-A^t)\mathcal{R}}{(1-A^t)\mathcal{A}\mathcal{R}} = \frac{(1-A^t)\mathcal{R}}{(1-A)\mathcal{R}} \hookrightarrow \frac{\mathcal{R}}{(1-A)\mathcal{R}} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{R}}{(1-A^t)\mathcal{R}}, \\ \mathcal{R} &\simeq \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{B}\mathcal{R}} \simeq \frac{(1-B^t)\mathcal{R}}{(1-B^t)\mathcal{B}\mathcal{R}} = \frac{(1-B^t)\mathcal{R}}{(1-B)\mathcal{R}} \hookrightarrow \frac{\mathcal{R}}{(1-B)\mathcal{R}} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{R}}{(1-B^t)\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

\square

La prueba de la siguiente proposición está contenida en la demostración de (7.2.3).

Proposición 7.5.11. *Dado un k -espacio vectorial V , si $\dim V < \aleph_0$ entonces $iV = \mathcal{B}_{\dim V}$, e $iV = \mathcal{B}_\infty$ si $\dim V = \aleph_0$.*

El siguiente corolario se sigue de (7.5.11) y (7.2.2).

Corolario 7.5.12. *El \mathcal{R} -módulo \mathcal{B}_d es inyectivo para todo $d \in \mathbb{N}_\infty$.*

En el lema siguiente probamos que es posible adaptar la base de un espacio vectorial numerablemente generado a una filtración decreciente del mismo.

Lema 7.5.13. *Sea $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset V_{n+1} \supset \dots$ una sucesión decreciente de k -espacios vectoriales tal que V_0 es la unión $V_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V_0^n$ de una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita $V_0^0 \subset V_0^1 \subset \dots \subset V_0^n \subset V_0^{n+1} \subset \dots$. Si definimos $V_0^{-1} = 0$, $V_m^n = V_0^n \cap V_m$ ($n+1, m \in \mathbb{N}_0$), $V_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} V_n$ y escogemos conjuntos (siempre finitos y posiblemente vacíos) $\{a_{nm}^l; 1 \leq l \leq r_{nm}\} \subset V_m^n$ tales que los conjuntos*

$$\left\{ a_{nm}^l + (V_m^{n-1} + V_{m+1}^n); 1 \leq l \leq r_{nm} \right\}$$

son bases de $V_m^n / (V_m^{n-1} + V_{m+1}^n)$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$), entonces dados $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ con $m \leq p$

- (1). $\left\{ a_{ij}^{l_{ij}} + V_p^n; i \leq n, m \leq j < p, 1 \leq l_{ij} \leq r_{ij} \right\}$ es una base de V_m^n / V_p^n ,
- (2). $\left\{ a_{ij}^{l_{ij}} + V_\infty; i \leq n, m \leq j, 1 \leq l_{ij} \leq r_{ij} \right\}$ es una base de $(V_m^n + V_\infty) / V_\infty$,
- (3). $\left\{ a_{ij}^{l_{ij}} + V_\infty; i \in \mathbb{N}_0, m \leq j, 1 \leq l_{ij} \leq r_{ij} \right\}$ es una base de V_m / V_∞ .

Demostración. Como V_0^n es un espacio vectorial de dimensión finita es artiniiano y la sucesión decreciente $V_0^n \supset V_1^n \supset \dots \supset V_m^n \supset V_{m+1}^n \supset \dots$ se estabiliza, es decir, existe $M_n \in \mathbb{N}_0$ tal que $V_m^n = V_{M_n}^n$ para todo $m \geq M_n$, en particular $V_{M_n}^n = V_0^n \cap V_\infty$. Si escogemos para todo $n \in \mathbb{N}_0$ el mínimo M_n que satisface esta condición entonces $M_n \leq M_{n+1}$ ya que

$$V_{M_{n+1}}^n = V_{M_{n+1}}^n \cap V_{M_{n+1}}^{n+1} = V_0^n \cap V_{M_{n+1}} \cap V_0^{n+1} \cap V_\infty = V_0^n \cap V_\infty = V_{M_n}^n.$$

Obsérvese que (1) es trivial para $m \geq M_n$ pues $V_m^n = V_p^n = V_{M_n}^n$ y $\{a_{ij}^l; 1 \leq l \leq r_{ij}\} = \emptyset$ siempre que $p \geq m \geq M_n$, $i \leq n$ y $j \geq M_n$. Por tanto los únicos elementos (n, m, p) para los cuales aún tenemos que probar (1) están en el conjunto $S = \{(n, m, p); n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq M_n, p \geq m\}$. Ordenemos este conjunto de la siguiente forma

$$(n, m, p) \leq (n', m', p') \Leftrightarrow \begin{cases} n < n' \\ \circ \\ n = n' \text{ y } m > m' \\ \circ \\ n = n', m = m' \text{ y } p \leq p'. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que esto es un buen orden en S , ya que la segunda coordenada está acotada superiormente (de forma dependiente de la primera). El mínimo de S es $(0, M_0, M_0)$, es más si $m < M_n$ el elemento (n, m, m) es el supremo de $\{(n, m+1, p); p > m\}$, y dado $n > 0$ el elemento

(n, M_n, M_n) es el supremo del conjunto $\{(n-1, m, p); m \leq M_{n-1}, p \geq m\}$. Cualquier otro elemento de S es un sucesor. Ya hemos comprobado (1) para los elementos $(n, M_n, p) \in S$, es más, (1) es trivial para $(n, m, m) \in S$, por tanto (1) se tiene para el mínimo y todos los elementos límite de S . Un sucesor genérico en S tiene la forma $(n, m, p+1)$ para algún $p \geq m$. Obsérvese que también hemos comprobado ya (1) para algunos sucesores, concretamente para aquellos con $m = M_n$. Ahora procederemos por inducción, esto es, probaremos (1) para todo sucesor en S con $m < M_n$ suponiendo que (1) se tiene para todos los elementos estrictamente menores. Distinguimos tres casos:

Para $(0, m, p+1)$ (1) se sigue de la exactitud de la sucesión

$$\frac{V_p^0}{V_{p+1}^0} \hookrightarrow \frac{V_m^0}{V_{p+1}^0} \twoheadrightarrow \frac{V_m^0}{V_p^0},$$

la igualdad $V_0^{-1} = 0$ y la desigualdad $(0, m, p) < (0, m, p+1)$, y bien la desigualdad $(0, p+1, p) < (0, m, p+1)$ si $p < M_0$ o bien las igualdades $V_p^0 = V_{p+1}^0 = V_{M_0}^0$ y $\{a_{0p}^l; 1 \leq l \leq r_{0p}\} = \emptyset$ si $p \geq M_0$.

Para $(n, m, m+1)$ con $n > 0$ (1) es consecuencia de la exactitud de la sucesión

$$\frac{V_m^{n-1} + V_{m+1}^n}{V_{m+1}^n} \hookrightarrow \frac{V_m^n}{V_{m+1}^n} \twoheadrightarrow \frac{V_m^n}{V_m^{n-1} + V_{m+1}^n},$$

el isomorfismo obvio

$$\frac{V_m^{n-1}}{V_{m+1}^{n-1}} \simeq \frac{V_m^{n-1} + V_{m+1}^n}{V_{m+1}^n},$$

y la desigualdad $(n-1, m, m+1) < (n, m, m+1)$ si $m < M_{n-1}$, o las igualdades $V_m^{n-1} = V_{m+1}^{n-1} = V_{M_{n-1}}^{n-1}$ y $\{a_{in}^l; 1 \leq l \leq r_{in}\} = \emptyset$ si $i \leq n-1$ y $m \geq M_{n-1}$.

Para $(n, m, p+1)$ con $n > 0$ y $p > m$ (1) se sigue de la exactitud de la sucesión

$$\frac{V_p^n}{V_{p+1}^n} \hookrightarrow \frac{V_m^n}{V_{p+1}^n} \twoheadrightarrow \frac{V_m^n}{V_p^n},$$

la desigualdad $(n, m, p) < (n, m, p+1)$, y bien la desigualdad $(n, p, p+1) < (n, m, p+1)$ si $p < M_n$ o bien las igualdades $V_p^n = V_{p+1}^n = V_{M_n}^n$ y $\{a_{ip}^l; 1 \leq l \leq r_{ip}\} = \emptyset$ si $i \leq n$ y $p \geq M_n$.

Una vez comprobado que (1) se tiene, (2) es consecuencia de (1) para $p = M_n$, el isomorfismo $(V_m^n + V_\infty)/V_\infty \simeq V_m^n/V_{M_n}^n$, y el hecho de que $\{a_{ij}^l; 1 \leq l \leq r_{ij}\} = \emptyset$ es el conjunto vacío para $i \leq n$ y $j \geq M_n$. Finalmente (3) se sigue de (2) y la igualdad $V_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V_m^n$. \square

La siguiente proposición es una interesante consecuencia del lema anterior que no sería cierta en general si el anillo base no fuera un cuerpo, compárese con [ACMQ03].

Proposición 7.5.14. *La imagen de un morfismo entre $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos libres finitamente generados es libre finitamente generada.*

Demostración. Sea $\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ un morfismo en $\mathbf{M}_k(T_1)$. Si definimos los k -espacios vectoriales $V_0 = \varphi(k\langle B \rangle)$, $V_n = \varphi(k\langle B_n \rangle) \subset k\langle A \rangle$ ($n \in \mathbb{N}$) y $V_0^n = \varphi(k\langle_n B \rangle)$ ($n \geq 0$), véanse (7.1.A) y (7.1.B), podemos aplicar el Lema 7.5.13. Es más, con la notación de dicho lema $V_\infty = 0$ ya que para todo $n \geq 1$ existe $N_n \geq 1$ tal que $V_{N_n} \subset k\langle A_n \rangle$ y $\bigcap_{n \geq 1} k\langle A_n \rangle = 0$. Definimos el conjunto $\underline{B} = \{a_{ij}^l; i, j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l \leq r_{ij}\}$ y la función $\underline{\beta}: \underline{B} \rightarrow \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ como $\underline{\beta}(a_{nm}^l) = m$. En virtud de (7.5.13) (3) el conjunto \underline{B} es a base de V_0 y \underline{B}_m una base de V_m ($m \geq 1$) ya que $V_\infty = 0$. La función $\underline{\beta}$ es una función de altura ya que el cardinal de $\underline{\beta}^{-1}(m)$ es $\dim V_m/V_{m+1} < \aleph_0$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Es más, la inclusión $k\langle \underline{B} \rangle = \varphi(k\langle B \rangle) \subset k\langle A \rangle$ y la proyección $k\langle B \rangle \twoheadrightarrow \varphi(k\langle B \rangle) = k\langle \underline{B} \rangle$ dan lugar a homomorfismos controlados $k\langle \underline{B} \rangle_\beta \hookrightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ y $k\langle B \rangle_\beta \twoheadrightarrow k\langle \underline{B} \rangle_\beta$ que son un monomorfismo y un epimorfismo de $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos, respectivamente, y su composición es φ , por tanto $k\langle \underline{B} \rangle_\beta$ junto con estos morfismos es la imagen de φ . \square

Corolario 7.5.15. *Cualquier $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulo finitamente presentado es el conúcleo de un monomorfismo entre $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos libres finitamente generados.*

Corolario 7.5.16. *Los \mathcal{R} -módulos finitamente presentados tienen dimensión proyectiva ≤ 1 .*

Corolario 7.5.17. *Tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{C}_d) = 0$ para cualquier \mathcal{R} -módulo f. p. \mathcal{M} y $d \in \mathbb{N}_\infty$.*

Demostración. En virtud de (7.5.16) el funtor $\text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{M}, -)$ es exacto a derecha, por tanto el corolario se sigue de (7.5.10) y (7.5.12). \square

Ahora comenzamos con los lemas que prueban el Teorema 7.5.2.

Lema 7.5.18. *Dado un \mathcal{R} -módulo f. p. cualquiera \mathcal{M} , existe otro \mathcal{R} -módulo f. p. \mathcal{N} con $\lambda_{\mathcal{N}} = 0$ tal que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi$ para algún $\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ en $\mathbf{M}_k(T_1)$. Consideremos la sucesión decreciente de k -espacios vectoriales dados por $V_0 = k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$ y

$$V_n = \frac{k\langle A_n \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

véase (7.1.A). El espacio vectorial V_0 es la unión de la siguiente sucesión de k -espacios vectoriales de dimensión finita ($n \in \mathbb{N}_0$), véase (7.1.B),

$$V_0^n = \frac{k\langle nA \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Si $\{a_{nm}^l; 1 \leq l \leq r_{nm}\} \subset V_m^n$ es un conjunto como en (7.5.13) podemos suponer que $a_{nm}^l = e_{nm}^l + \varphi(k\langle B \rangle)$ para algún $e_{nm}^l \in k\langle nA_m \rangle$, véase (7.1.B), aquí usamos el siguiente isomorfismo obvio

$$\frac{k\langle nA_m \rangle}{k\langle nA_m \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)} \simeq \frac{k\langle nA_m \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)} = V_m^n.$$

Consideramos el conjunto $C = \{a_{nm}^{l_{nm}} + V_\infty; n, m \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l_{nm} \leq r_{nm}\}$ y la función $\gamma: C \rightarrow \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ con $\gamma(a_{nm}^{l_{nm}} + V_\infty) = m$. Esta función es una función de altura, ya que el conjunto

$$\gamma^{-1}(m) = \{a_{nm}^{l_{nm}} + V_\infty; n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l_{nm} \leq r_{nm}\}$$

es biyectivo con una base de V_m/V_{m+1} por (7.5.13) (3), y tenemos la siguiente sobreyección e isomorfismos

$$\frac{k\langle A_m \rangle}{k\langle A_{m+1} \rangle} \twoheadrightarrow \frac{k\langle A_m \rangle}{k\langle A_{m+1} \rangle + [\varphi(k\langle B \rangle) \cap k\langle A_m \rangle]} \simeq \frac{k\langle A_m \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{k\langle A_{m+1} \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)} \simeq \frac{V_m}{V_{m+1}},$$

y $\dim k\langle A_m \rangle/k\langle A_{m+1} \rangle = \text{card } \alpha^{-1}(m) < \aleph_0$. El k -espacio vectorial subyacente de $k\langle C \rangle_\gamma$ es V_0/V_∞ , es más la proyección natural

$$(a) \quad k\langle A \rangle \twoheadrightarrow \frac{k\langle A \rangle}{\bigcap_{n \geq 1} [k\langle A_n \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)]} \simeq \frac{V_0}{V_\infty} = k\langle C \rangle$$

da lugar a un homomorfismo T_1 -controlado $v_0: k\langle A \rangle_\alpha \rightarrow k\langle C \rangle_\gamma$ con $v_0\varphi = 0$, por tanto v_0 induce un morfismo $v: \mathcal{M} \rightarrow k\langle C \rangle_\gamma$. Más aún, la sección $V_0/V_\infty \hookrightarrow k\langle A \rangle$ que envía $a_{nm}^l + V_\infty$ a e_{nm}^l determina otro homomorfismo T_1 -controlado $\tau_0: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ con $v_0\tau_0 = 1$, en particular si $\tau: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow \mathcal{M}$ es el morfismo inducido por τ_0 tenemos que $v\tau = 1$, por tanto $\mathcal{M} \simeq k\langle C \rangle_\gamma \oplus \mathcal{N}$ donde $\mathcal{N} = \text{Coker } \tau$. Obsérvese que el morfismo $(\varphi, \tau_0): k\langle B \rangle_\beta \oplus k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ es una presentación finita de \mathcal{N} , y en virtud de (a) tenemos la siguiente igualdad e inclusiones para todo $m \geq 1$

$$k\langle A \rangle = \bigcap_{n \geq 1} [k\langle A_n \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \oplus \tau(k\langle C \rangle) \subset k\langle A_m \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) + \tau(k\langle C \rangle) \subset k\langle A \rangle,$$

luego $\lambda_{\mathcal{N}} = 0$.

Obsérvese también que en virtud de (7.5.6) y (7.5.7) $k\langle C \rangle_\gamma$ es isomorfo al k -espacio vectorial T_1 -controlado correspondiente a \mathcal{R} siempre que $\lambda_{\mathcal{M}} = \infty$, y a la suma directa de $\lambda_{\mathcal{M}}$ copias de \mathcal{A} en otro caso. \square

Lema 7.5.19. *Dado un \mathcal{R} -módulo $f. p. \mathcal{M}$ con $\lambda_{\mathcal{M}} = 0$, existe otro \mathcal{R} -módulo $f. p. \mathcal{N}$ con $\lambda_{\mathcal{N}} = \mu_{\mathcal{N}} = 0$ tal que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{N}$.*

Demostración. Supongamos que \mathcal{M} es el conúcleo de $\varphi: k\langle B \rangle_{\beta} \rightarrow k\langle A \rangle_{\alpha}$ en $\mathbf{M}_k(T_1)$. Como $\lambda_{\mathcal{M}} = 0$ tenemos que $k\langle A \rangle = k\langle A_m \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea V_{\bullet} el sistema inverso indexado por $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y dado por

$$V_{mn} = \frac{k\langle A_m \rangle}{k\langle A_m \rangle \cap \varphi(k\langle B_n \rangle)},$$

con homomorfismos de enlace inducidos por las inclusiones obvias de espacios vectoriales. Hay inclusiones $U_{mn}^{\varphi} \subset V_{mn}$ con cocientes

$$\frac{k\langle A_m \rangle}{k\langle A_m \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)} \simeq \frac{k\langle A_m \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)} = \frac{k\langle A \rangle}{\varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Esto determina una sucesión exacta corta en la categoría de pro-espacios vectoriales

$$(a) \quad U_{\bullet}^{\varphi} \hookrightarrow V_{\bullet} \twoheadrightarrow \frac{k\langle A \rangle}{\varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Aquí contemplamos $k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$ como un sistema inverso indexado por un conjunto unitario.

El espacio vectorial U_{mn}^{φ} es siempre de dimensión finita ya que está contenido en $\varphi(k\langle B \rangle) / \varphi(k\langle B_n \rangle) \simeq \varphi(k\langle_{n-1} B \rangle)$ y $_{n-1} B$ es un conjunto finito, véase (7.1.B). Como los espacios vectoriales de dimensión finita son artinianos es sencillo ver que U_{\bullet}^{φ} es un sistema inverso con la propiedad de Mittag-Leffler, en particular $\lim^1 U_{\bullet}^{\varphi} = 0$ y por tanto en virtud de (7.3.B) $\text{Ext}^1(k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle), U_{\bullet}^{\varphi}) = 0$, así que la sucesión (a) admite una sección $s: k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle) \hookrightarrow V_{\bullet}$. Esta sección esta dada por secciones

$$s_{mn}: k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle) \hookrightarrow V_{mn}$$

de las proyecciones naturales $V_{mn} \twoheadrightarrow k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$ compatibles con los homomorfismos de enlace de V_{\bullet} .

Sea \tilde{C} una base de $k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$. Esta base es finita $\tilde{C} = \{b_1, \dots, b_{\mu_{\mathcal{M}}}\}$ si $\mu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$, o infinita numerable $\tilde{C} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si $\mu_{\mathcal{M}} = \infty$. Es más, como φ es controlado existe una sucesión creciente de números naturales $\{l_n\}_{n \geq 1}$ con $\varphi(k\langle B_{l_n} \rangle) \subset k\langle A_n \rangle$. Escogemos elementos $b_m^{n-1} \in k\langle A_n \rangle$ e $y_m^{n-1} \in k\langle B_{l_n} \rangle$ tales que $b_m^{n-1} + \varphi(k\langle B_{l_n} \rangle) = s_{n, l_n}(b_m) \in V_{n, l_n} = k\langle A_n \rangle / \varphi(k\langle B_{l_n} \rangle)$ y $\varphi(y_m^{n-1}) = b_m^n - b_m^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y m en el rango correspondiente. Más aún, definimos conjuntos ${}^n C \subset k\langle A_{n+1} \rangle$ y C de la siguiente forma: ${}^n C = \{b_1^n, \dots, b_{\mu_{\mathcal{M}}}^n\}$ y $C = \coprod_{n \in \mathbb{N}_0} {}^n C$ si $\mu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$, y ${}^n C = \{b_0^n, \dots, b_n^n\} \cup \{b_m^n; m > n\}$ y

$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} {}^n C = \{b_m^n; n \geq m \geq 0\}$ si $\mu_{\mathcal{M}} = \infty$. Sea $\gamma: C \rightarrow \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ la función de altura dada por $\gamma(b_m^n) = n$ y ψ el endomorfismo de $k\langle C \rangle_\gamma$ dado por $\psi(b_m^n) = b_m^{n+1} - b_m^n$.

Es sencillo comprobar que $\text{Coker } \psi = \text{i}(k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle))$ y la proyección natural $k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow \text{i}(k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle))$ está dada por el homomorfismo $p_1: k\langle C \rangle \rightarrow k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle) = k\langle \tilde{C} \rangle$ definido por $p_1(b_m^n) = b_m$. Para esto usamos las presentaciones finitas construidas en la demostración de (7.2.3) y, si $\mu_{\mathcal{M}} = \infty$, la biyección $\mathbb{N}_0 \approx C$ que envía $m \in \mathbb{N}_0$, con $\frac{n(n-1)}{2} \leq m < \frac{(n+1)n}{2}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$, a $b_{m - \frac{n(n-1)}{2}}^{n-1}$. Es más, por (7.5.11) $\text{Coker } \psi = \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}}$.

El homomorfismo $\tau_0: k\langle C \rangle \rightarrow k\langle A \rangle$ inducido por las inclusiones ${}^n C \subset k\langle A_{n+1} \rangle \subset k\langle A \rangle$ determina un homomorfismo controlado $\tau_0: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$. Más aún, el homomorfismo $\tau_1: k\langle C \rangle \rightarrow k\langle B \rangle$ dado por $\tau_1(b_m^n) = y_m^n$ define un homomorfismo controlado $\tau_1: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle B \rangle_\beta$ con $\varphi\tau_1 = \tau_0\psi$, por tanto τ_0 da lugar a un morfismo de $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos $\tau: \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}} \rightarrow \mathcal{M}$.

Veamos que τ es un monomorfismo. Dado un espacio vectorial T_1 -controlado $k\langle D \rangle_\phi$ el lema de Yoneda da lugar a una identificación natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(k\langle D \rangle_\phi, \text{i}(k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle))) = \text{Hom}_k(k\langle D \rangle, k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)).$$

Esta identificación lleva un morfismo $v: k\langle D \rangle_\phi \rightarrow \text{i}(k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle))$ representado por $v_0: k\langle D \rangle_\phi \rightarrow k\langle C \rangle_\gamma$ al homomorfismo de espacios vectoriales $p_1 v_0$. Si $p_2: k\langle A \rangle \rightarrow k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$ es la proyección natural entonces $p_2 \varphi = 0$ y $p_1 = p_2 \tau_0$. Es más $\tau v = 0$ si y sólo si $\tau_0 v_0 = \varphi \eta$ para algún homomorfismo controlado $\eta: k\langle D \rangle_\phi \rightarrow k\langle B \rangle_\beta$, así que en este caso $p_1 v_0 = p_2 \tau_0 v_0 = p_2 \varphi \eta = 0$, esto es, $v = 0$, por tanto τ es un monomorfismo.

En virtud de (7.5.12) si $\mathcal{N} = \text{Coker } \tau$ entonces $\mathcal{M} \simeq \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{N}$. El morfismo $(\varphi, \tau_0): k\langle B \rangle_\beta \oplus k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ es una presentación finita de \mathcal{N} y por construcción $\varphi(k\langle B \rangle) + \tau_0(k\langle C \rangle) = k\langle A \rangle$, esto es $\lambda_{\mathcal{N}} = \mu_{\mathcal{N}} = 0$. \square

Lema 7.5.20. *Sea \mathcal{M} el \mathcal{R} -módulo f. p. con $\lambda_{\mathcal{M}} = \mu_{\mathcal{M}} = 0$ entonces existe otro \mathcal{N} con $\lambda_{\mathcal{N}} = \mu_{\mathcal{N}} = \nu_{\mathcal{N}} = 0$ tal que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{N}$.*

En la prueba de este lema usaremos el siguiente.

Lema 7.5.21. *Sea $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de enteros con $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$. Consideremos el conjunto $A = \{(n, m); n \in \mathbb{N}, m \leq d_n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la función de altura $\alpha: A \rightarrow \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ con $\alpha(n, m) = n$, y el endomorfismo φ de $k\langle A \rangle_\alpha$ con $\varphi(n, m) = (n, m)$ si $n = 1$ o $n > 1$ y $m > d_{n-1}$, y $\varphi(n, m) = (n, m) - (n-1, m)$ en otro caso. Entonces $\text{Coker } \varphi$ es isomorfo a \mathcal{C}_∞ .*

Demostración. Consideremos los subconjuntos infinitos numerables

$$A_1 = \{(1, m); 1 \leq m \leq d_1\} \cup \{(n, m); n > 1, d_{n-1} < m \leq d_n\} \subset A,$$

$A_2 = A - A_1$, $B_1 = \{(n+1)n/2\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}_0$ y $B_2 = \mathbb{N}_0 - B_1$. El orden lexicográfico por la izquierda en A es un buen orden sin elementos límites ya que la segunda coordenada de un elemento $(n, m) \in A$ está acotada por d_n , por tanto la restricción de este orden a los subconjuntos A_1 y A_2 induce enumeraciones $A_1 = \{e_1^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $A_2 = \{e_2^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. De forma similar el orden usual en \mathbb{N}_0 induce enumeraciones en los subconjuntos $B_1 = \{f_1^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $B_2 = \{f_2^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ahora el teorema se sigue de la biyección $\mathbb{N}_0 \approx A$ que envía f_i^n a e_i^n ($i = 1, 2; n \in \mathbb{N}_0$). \square

Demostración de (7.5.20). Si $\mathcal{M} = \text{Coker}[\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha]$ las igualdades $\lambda_{\mathcal{M}} = \mu_{\mathcal{M}} = 0$ equivalen a $\varphi(k\langle B \rangle) = k\langle A \rangle$. Sea $\phi: \lim U_\bullet^\varphi \rightarrow U_\bullet^\varphi$ el pro-morfismo canónico. Este pro-morfismo está dado por los homomorfismos de espacios vectoriales $\phi_{mn}: \lim U_\bullet^\varphi \rightarrow U_{mn}^\varphi$ que son compatibles con los homomorfismos de enlace de U_\bullet^φ . Como φ es controlado hay una sucesión creciente de números naturales $\{m_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\varphi(k\langle B_{m_n} \rangle) \subset k\langle A_n \rangle$, véase la Sección 7.1.

Si $\nu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$ y $\{a_1, \dots, a_{\nu_{\mathcal{M}}}\}$ es una base de $\lim U_\bullet^\varphi$ definimos ${}^n C = \{a_1^n, \dots, a_{\nu_{\mathcal{M}}}^n\} \subset k\langle A_n \rangle$ como un conjunto tal que $\phi_{n, m_n}(a_i) = a_i^n + \varphi(k\langle B_{m_n} \rangle)$ ($1 \leq i \leq \nu_{\mathcal{M}}$), y escogemos elementos $y_i^n \in k\langle B_{m_{n-1}} \rangle$ si $n > 1$ e $y_i^1 \in k\langle B \rangle$ con $a_i^n - a_i^{n-1} = \varphi(y_i^n)$ ($n > 1$) y $a_i^1 = \varphi(y_i^1)$. Si $\nu_{\mathcal{M}} = \infty$ tomamos ${}^n C = \{a_i^n\}_{i=1}^{d_n} \subset k\langle A_n \rangle$ tal que $\{a_i^n + \varphi(k\langle B_{m_n} \rangle)\}_{i=1}^{d_n}$ es una base de $\phi_{n, m_n}(\lim U_\bullet^\varphi)$, aquí usamos que U_\bullet^φ es un sistema inverso de espacios vectoriales de dimensión finita, compárese con la demostración de (7.5.19). Los homomorfismos de enlace de U_\bullet^φ inducen sobreyecciones $\phi_{n+1, m_{n+1}}(\lim U_\bullet^\varphi) \rightarrow \phi_{n, m_n}(\lim U_\bullet^\varphi)$, por tanto $d_n \leq d_{n+1}$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen $y_i^n \in k\langle B_{m_{n-1}} \rangle$ ($n > 1$) e $y_i^1 \in k\langle B \rangle$ tales que $a_i^n - a_i^{n-1} = \varphi(y_i^n)$ si $n > 1$ e $i \leq d_{n-1}$, y $a_i^n = \varphi(y_i^n)$ si $n > 1$ y $d_{n-1} < i \leq d_n$ o $n = 1$ e $i \leq d_1$.

Definimos la función de altura $\gamma: C = \coprod_{n \geq 1} {}^n C \rightarrow \mathbb{N}_0 \subset [0, +\infty)$ como $\gamma(a_i^n) = n$, y los homomorfismos controlados $\tau_0: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$, $\tau_1: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle B \rangle_\beta$, $\psi: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow k\langle C \rangle_\gamma$ como $\tau_0(a_i^n) = a_i^n$, $\tau_1(a_i^n) = y_i^n$, y $\psi(a_i^n) = a_i^n - a_i^{n-1}$ si $n > 1$, y $\nu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$ o $\nu_{\mathcal{M}} = \infty$ e $i \leq d_{n-1}$, y $\psi(a_i^n) = a_i^n$ en otro caso. Es sencillo comprobar usando la biyección $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_0: n \mapsto n-1$ si $\nu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$ o (7.5.21) si $\nu_{\mathcal{M}} = \infty$, que $\text{Coker } \psi \simeq \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}}$. Es más, $(\tau_1, \tau_0): \psi \rightarrow \varphi$ es un morfismo en $\text{Pair}(\mathbf{M}_k(T_1))$ que induce un morfismo de \mathcal{R} -módulos $\tau: \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}} \rightarrow \mathcal{M}$.

Para comprobar que τ es un monomorfismo de $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos vamos a demostrar primero que ϕ es un monomorfismo de pro-espacios vectoriales si $\nu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0$. En este caso $\text{Ker } \phi$ es un sistema inverso de espacios vectoriales de dimensión finita, en particular satisface la propiedad de Mittag-Leffler.

Si aplicamos el funtor exacto a izquierda \lim a la sucesión exacta de pro-espacios vectoriales

$$\text{Ker } \phi \hookrightarrow \lim U_{\bullet}^{\varphi} \xrightarrow{\phi} U_{\bullet}^{\varphi}$$

obtenemos otra

$$\lim \text{Ker } \phi \hookrightarrow \lim \lim U_{\bullet}^{\varphi} \xrightarrow{=} \lim U_{\bullet}^{\varphi},$$

luego $\lim \text{Ker } \phi = 0$ y por tanto $\text{Ker } \phi = 0$ en virtud de [MS82] II.6.2 Lema 2, así que ϕ es un monomorfismo. En particular existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que ϕ_{n,m_n} es un homomorfismo inyectivo para todo $n \geq N$. Definimos $N = 1$ si $\nu_{\mathcal{M}} = \infty$. Ahora es fácil ver que la inyección $\psi_n: k\langle C_{n+1} \rangle \hookrightarrow k\langle C_n \rangle$ dada por la restricción de ψ es el núcleo de la siguiente composición siempre que $n \geq N$

$$k\langle C_n \rangle \xrightarrow{\tau_0} k\langle A_n \rangle \rightarrow \frac{k\langle A_n \rangle}{\varphi(k\langle B_{m_n} \rangle)} = U_{n,m_n}^{\varphi}.$$

Sea ahora $v: k\langle D \rangle_{\chi} \rightarrow \text{Coker } \psi \simeq \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}}$ un morfismo representado por el homomorfismo controlado $v_0: k\langle D \rangle_{\chi} \rightarrow k\langle C \rangle_{\gamma}$. Supongamos que $\tau v = 0$. Esto significa que existe otro homomorfismo controlado $\eta: k\langle D \rangle_{\chi} \rightarrow k\langle B \rangle_{\beta}$ con $\tau_0 v_0 = \varphi \eta$. Por la caracterización alternativa de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 vemos que existe una sucesión creciente de números naturales $\{p_n\}_{n \geq 1}$ tal que $v_0(k\langle D_{p_n} \rangle) \subset k\langle C_n \rangle$ y $\eta(k\langle D_{p_n} \rangle) \subset k\langle B_{m_n} \rangle$, por tanto si $n \geq N$ entonces existe un único homomorfismo $\sigma_n: k\langle D_{p_n} \rangle \rightarrow k\langle C_{n+1} \rangle$ tal que $\psi_n \sigma_n: k\langle D_{p_n} \rangle \rightarrow k\langle C_n \rangle$ es la restricción de v_0 . Si $\sigma': k\langle_{p_{N-1}} D \rangle \rightarrow k\langle C \rangle$ es cualquier homomorfismo tal que $\psi \sigma'$ coincide con la restricción de v_0 a $k\langle_{p_{N-1}} D \rangle$ definimos el homomorfismo controlado $\sigma: k\langle D \rangle_{\chi} \rightarrow k\langle C \rangle_{\gamma}$ como $\sigma(d) = \sigma_n(d)$ si $d \in {}_{p_{n+1}-1} D_{p_n}$ ($n \geq N$) y $\sigma(d) = \sigma'(d)$ si $d \in {}_{p_{N-1}} D$. Este homomorfismo controlado satisface $\psi \sigma = v_0$ luego $v = 0$ y τ es un monomorfismo.

Como τ es un monomorfismo si definimos $\mathcal{N} = \text{Coker } \tau$ obtenemos en virtud de (7.5.17) que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}} \oplus \mathcal{N}$. Ahora es sencillo comprobar que $\lambda_{\mathcal{N}} = \mu_{\mathcal{N}} = \nu_{\mathcal{N}} = 0$ usando que $\mathcal{N} = \text{Coker}[(\varphi, \tau_0): k\langle B \rangle_{\beta} \oplus k\langle C \rangle_{\gamma} \rightarrow k\langle A \rangle_{\alpha}]$. \square

Lema 7.5.22. *Si \mathcal{M} es un \mathcal{R} -módulo f. p. con $\lambda_{\mathcal{M}} = \mu_{\mathcal{M}} = \nu_{\mathcal{M}} = 0$ entonces $\mathcal{M} = 0$.*

Demostración. Si $\mathcal{M} = \text{Coker}[\varphi: k\langle B \rangle_{\beta} \rightarrow k\langle A \rangle_{\alpha}]$ las hipótesis del enunciado equivalen a $\varphi(k\langle B \rangle) = k\langle A \rangle$ y $\lim U_{\bullet}^{\varphi} = 0$. En la demostración de (7.5.19) vimos que U_{\bullet}^{φ} satisface la propiedad de Mittag-Leffler, por tanto $U_{\bullet}^{\varphi} = 0$ es un pro-espacio vectorial trivial en virtud de [MS82] II.6.2 Lema 2. Esto significa que si $\{m_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente tal que $\varphi(k\langle B_{m_n} \rangle) \subset k\langle A_n \rangle$

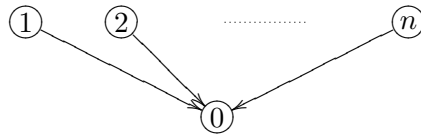
(véase la Sección 7.1) entonces existe otra sucesión creciente $\{p_n\}_{n \geq 1}$ tal que los siguientes homomorfismos de enlace son triviales

$$U_{p_{n+1}, m_{p_{n+1}}}^\varphi = \frac{k\langle A_{p_{n+1}} \rangle}{\varphi(k\langle B_{m_{p_{n+1}}} \rangle)} \xrightarrow{0} \frac{k\langle A_{p_n} \rangle}{\varphi(k\langle B_{m_{p_n}} \rangle)} = U_{p_n, m_{p_n}}^\varphi.$$

Esto es, $k\langle A_{p_{n+1}} \rangle \subset \varphi(k\langle B_{m_{p_n}} \rangle)$. Por tanto podemos definir el homomorfismo controlado $\psi: k\langle A \rangle_\alpha \rightarrow k\langle B \rangle_\beta$ que envía $a \in {}_{p_{n+2}-1}A_{p_{n+1}}$ ($n \geq 1$) a cualquier elemento $b \in B_{m_{p_n}}$ tal que $\varphi(b) = a$, y si $a \in {}_{p_2-1}A$ tomamos cualquier $\psi(a) = b \in k\langle B \rangle$ tal que $\varphi(b) = a$. Este morfismo satisface $\varphi\psi = 1$ luego φ es un epimorfismo y $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi = 0$. \square

7.6 Representaciones de la aljaba de los n -subespacios

Una *aljaba* (*quiver* en inglés) es sencillamente un grafo dirigido. La *aljaba de los n -subespacios* Q_n es el siguiente grafo dirigido



Fijado un cuerpo cualquiera k , una *representación* \underline{V} de Q_n es un diagrama de k -espacios vectoriales indexado por Q_n , esto es, $n + 1$ espacios vectoriales V_0, V_1, \dots, V_n junto con homomorfismos $V_i \rightarrow V_0$ ($1 \leq i \leq n$). Los morfismos de representaciones son diagramas conmutativos. La categoría \mathbf{rep}_{Q_n} de representaciones de Q_n es una categoría abeliana equivalente a la categoría de kQ_n -módulos, donde kQ_n es el álgebra de caminos de Q_n , cuya dimensión es $\dim kQ_n = 2n + 1$. Se dice que una representación es de dimensión finita si V_i es un espacio vectorial de dimensión finita para todo $0 \leq i \leq n$. Los kQ_n -módulos finitamente presentados (o equivalentemente de dimensión finita) se corresponden con las representaciones de dimensión finita bajo dicha equivalencia y las representaciones indescomponibles son de dimensión finita, por tanto en virtud del teorema clásico de Krull-Schmidt el monoide $\text{Iso}(\mathbf{rep}_{Q_n}^{\text{fin}})$ de clases de isomorfía de representaciones de dimensión finita de Q_n es el monoide libre abeliano generado por las (clases de isomorfía de) representaciones indescomponibles. El tipo de representaciones de la aljaba Q_n es el de su álgebra de caminos. Para todo lo referente a la teoría de representaciones de aljabas véase [CB92].

Un *n -subespacio* \underline{V} es una representación de Q_n tal que los homomorfismos $V_i \rightarrow V_0$ son inclusiones de subespacios $V_i \subset V_0$ ($1 \leq i \leq n$). La

categoría \mathbf{sub}_n (resp. $\mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$) de n -subespacios (de dimensión finita) es una subcategoría aditiva llena de \mathbf{rep}_{Q_n} (resp. $\mathbf{rep}_{Q_n}^{\text{fin}}$). De hecho los sumandos directos en \mathbf{rep}_{Q_n} de n -subespacios son también n -subespacios, por tanto

Proposición 7.6.1. *Iso($\mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$) es el monoide libre abeliano generado por las clases de isomorfía de los n -subespacios indescomponibles.*

Salvo isomorfismo hay exactamente n representaciones indescomponibles de Q_n que no son n -subespacios, concretamente aquellas con $V_i = k$ para algún $1 \leq i \leq n$ y $V_j = 0$ si $j \neq i$, por tanto

Proposición 7.6.2. *El tipo de representaciones de $\mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$ es el mismo que el de la aljaba de los n -subespacios.*

Decimos que un n -subespacio \underline{V} es *rígido* si $V_0 = \sum_{i=1}^n V_i$ y $V_i \subset \sum_{j \neq 0, i} V_j$ ($1 \leq i \leq n$). Como antes, la categoría $\mathbf{sub}_n^{\text{rig}}$ (resp. $\mathbf{sub}_n^{\text{fr}}$) de n -subespacios rígidos (de dimensión finita) es una subcategoría aditiva llena (pequeña) de \mathbf{sub}_n (resp. $\mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$) y los sumandos directos de los n -subespacios rígidos son también rígidos, así que

Proposición 7.6.3. *Iso($\mathbf{sub}_n^{\text{fr}}$) es el monoide libre abeliano generado por las clases de isomorfía de n -subespacios indescomponibles rígidos.*

Hay un funtor aditivo de “rigidificación”

$$\mathbf{sub}_n \longrightarrow \mathbf{sub}_n^{\text{rig}} : \underline{V} \mapsto \underline{V}^{\text{rig}}$$

dado por $V_i^{\text{rig}} = V_i \cap \left(\sum_{j \neq 0, i} V_j \right)$ ($1 \leq i \leq n$) y $V_0^{\text{rig}} = \sum_{i=1}^n V_i^{\text{rig}}$, que es adjunto a derecha a la inclusión $\mathbf{sub}_n^{\text{rig}} \subset \mathbf{sub}_n$ y preserva objetos de dimensión finita. La unidad de esta adjunción es la inclusión natural obvia $\underline{V}^{\text{rig}} \subset \underline{V}$, que es una igualdad si y sólo si \underline{V} es rígrado.

Para determinar los n -subespacios indescomponibles rígidos consideraremos las inclusiones llenas de categorías aditivas $\mathbb{F}^i : \mathbf{sub}_1 \rightarrow \mathbf{sub}_n$ ($1 \leq i \leq n$) que envían un 1-subespacio \underline{W} al n -subespacio $\mathbb{F}^i \underline{W} = {}^i \underline{W}$ con ${}^i W_0 = W_0$, ${}^i W_i = W_1$ y ${}^i W_j = 0$ en otro caso.

Proposición 7.6.4. *La inclusión natural $\underline{V}^{\text{rig}} \subset \underline{V}$ admite una retracción (no natural) en \mathbf{sub}_n . Concretamente, existen 1-subespacios \underline{V}^i ($1 \leq i \leq n$) y un isomorfismo $\underline{V} \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}^i \underline{V}^i \right) \oplus \underline{V}^{\text{rig}}$ tal que la inclusión natural $\underline{V}^{\text{rig}} \subset \underline{V}$ se corresponde con la inclusión del sumando directo.*

Demostración. Usando la definición de $\underline{V}^{\text{rig}}$ vemos que hay una sucesión exacta corta de espacios vectoriales

$$\bigoplus_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i^{\text{rig}}} \hookrightarrow \frac{V_0}{V_0^{\text{rig}}} \twoheadrightarrow \frac{V_0}{\sum_{i=1}^n V_i}.$$

Definimos los 1-subespacios \underline{V}^i ($1 \leq i \leq n$) como $V_0^1 = \frac{V_0}{\sum_{i=1}^n V_i} \oplus \frac{V_1}{V_1^{\text{rig}}}$, $V_1^1 = \frac{V_1}{V_1^{\text{rig}}}$ y $V_0^i = V_1^i = \frac{V_i}{V_i^{\text{rig}}}$ si $1 < i \leq n$. Ahora el isomorfismo del enunciado se sigue de la sucesión exacta anterior. \square

En virtud de esta proposición un n -subespacio indescomponible es rígido a menos que sea isomorfo a $\mathbb{F}^i \underline{V}$ para algún 1-subespacio indescomponible \underline{V} y $1 \leq i \leq n$. Es bien conocido que tal \underline{V} debe ser bien $k \rightarrow k$ o bien $0 \rightarrow k$, así que hay exactamente $2n$ n -subespacios indescomponibles que no son rígidos, y $3n$ representaciones indescomponibles de Q_n que no son n -subespacios rígidos, en particular

Proposición 7.6.5. *La categoría sub_n^{fr} tiene el mismo tipo de representaciones que la aljaba de los n -subespacios.*

Observación 7.6.6. El tipo de representaciones de la aljaba de los n -subespacios es bien conocido. Es finito para $n < 4$, manso para $n = 4$ y salvaje si $n > 4$, véanse [Gab72] y [Naz73].

En [Gab72] los conjuntos finitos de representaciones indescomponibles de Q_n están descritos para $n < 4$ por tanto descartando las $3n$ representaciones indescomponibles anteriormente mencionadas que no son n -subespacios rígidos obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.6.7. *Las siguientes son listas completas de (representantes de las clases de isomorfía de) los n -subespacios indescomponibles rígidos para $n < 4$*

- $n = 1$, ninguno,
- $n = 2$, $\underline{V}^{(2,1)} = (k \rightarrow k \leftarrow k)$,
- $n = 3$,

$$\underline{V}^{(3,1)} = \begin{pmatrix} k \\ \downarrow \\ k \rightarrow k \leftarrow 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{V}^{(3,2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \downarrow \\ k \rightarrow k \leftarrow k \end{pmatrix},$$

$$\underline{V}^{(3,3)} = \begin{pmatrix} k \\ \downarrow \\ 0 \rightarrow k \leftarrow k \end{pmatrix}, \quad \underline{V}^{(3,4)} = \begin{pmatrix} k \\ \downarrow \\ k \rightarrow k \leftarrow k \end{pmatrix},$$

$$\underline{V}^{(3,5)} = \begin{pmatrix} k\langle x+y \rangle \\ \downarrow \\ k\langle x \rangle \rightarrow k\langle x,y \rangle \leftarrow k\langle y \rangle \end{pmatrix}.$$

Observación 7.6.8. En [Naz73] hay una lista (no finita) de representaciones indescomponibles de Q_4 . No incluimos esta lista aquí porque es bastante laboriosa de describir, sin embargo es sencillo encontrar en dicha lista y descartar las 12 representaciones indescomponibles de Q_4 que no son 4-subespacios rígidos, obteniéndose de esta forma una lista completa de los 4-subespacios indescomponibles rígidos.

7.7 $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados y n -subespacios de dimensión finita

Dado un n -subespacio \underline{V} definimos $\mathbb{M}\underline{V}: \mathbf{M}_k(T_n)^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ como el funtor aditivo que envía un objeto $k\langle A \rangle_\alpha$ al subespacio vectorial $\mathbb{M}\underline{V}(k\langle A \rangle_\alpha) \subset \text{Hom}_k(k\langle A \rangle, V_0)$ formado por los homomorfismos $\phi: k\langle A \rangle \rightarrow V_0$ tales que existe $M \geq 1$ dependiente de ϕ que satisface $\phi(A_M^i) \subset V_i$ ($1 \leq i \leq n$). Esta construcción define una inclusión exacta y llena de categorías aditivas

$$(7.7.A) \quad \mathbb{M}: \mathbf{sub}_n \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{M}_k(T_n)).$$

Proposición 7.7.1. *Si \underline{V} es un n -subespacio de dimensión finita entonces el $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulo $\mathbb{M}\underline{V}$ es finitamente presentado.*

Demostración. Sea $\{w_1, \dots, w_d\}$ una base de V_0 , $\{w_1^i, \dots, w_{d_i}^i\}$ una base de V_i ($1 \leq i \leq n$), y $\phi_i: V_i \rightarrow V_0$ la inclusión. Definimos los conjuntos $D = \{mw_1^i, \dots, mw_{d_i}^i; 1 \leq i \leq n, m \geq 1\}$ y $C = D \sqcup \{w_1, \dots, w_d\}$, y las funciones de altura $\gamma: C \rightarrow T_n^0$ y $\delta: D \rightarrow T_n^0$ con $\gamma(w_j) = v_0$ ($1 \leq j \leq d$) y $\gamma(mw_j^i) = \delta(mw_j^i) = v_m^i$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d_i, m \geq 1$). Sea $\rho: k\langle D \rangle_\delta \rightarrow k\langle C \rangle_\gamma$ el homomorfismo controlado definido como $\rho(mw_j^i) = mw_j^i - m_{-1}w_j^i$ si $m > 1$ y $\rho(1w_j^i) = 1w_j^i - \phi_i(w_j^i)$ en otro caso, y $p: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow \mathbb{M}\underline{V}$ el morfismo de $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulos determinado por el homomorfismo de k -espacios vectoriales $p_0: k\langle C \rangle \rightarrow V_0$ con $p_0(w_j) = w_j$ y $p_0(mw_j^i) = \phi_i(w_j^i)$. Aquí usamos que $\text{Hom}(k\langle C \rangle_\gamma, \mathbb{M}\underline{V}) = \mathbb{M}\underline{V}(k\langle C \rangle_\gamma)$ en virtud del lema de Yoneda. Ahora es inmediato comprobar que $\mathbb{M}\underline{V} = \text{Coker } \rho$ y p es la proyección natural. \square

Usando las presentaciones finitas construidas en la demostración de la anterior proposición es sencillo comprobar que para el morfismo de monoides Φ_n en (7.4.4)

Corolario 7.7.2. *Si \underline{V} es un n -subespacio de dimensión finita rígido entonces $\Phi_n([\mathbb{M}\underline{V}]) = 0$.*

En virtud de (7.7.1) el funtor aditivo en (7.7.A) se restringe a un funtor $\mathbb{M}: \mathbf{sub}_n^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{M}_k(T_n))$. Ahora pasamos a construir un funtor en dirección contraria. Para ello si $\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ es un morfismo en $\mathbf{M}_k(T_n)$

definimos los k -espacios vectoriales ($1 \leq i \leq n$), véase (7.1.A),

$$W_i^\varphi = \frac{\bigcap_{m \geq 1} \left\{ [k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right] \right\}}{\varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Proposición 7.7.3. *El espacio vectorial W_i^φ es de dimensión finita ($1 \leq i \leq n$).*

Esta proposición es consecuencia inmediata del siguiente

Lema 7.7.4. *Para cualquier $m \geq 1$*

$$\dim \frac{[k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{\varphi(k\langle B \rangle)} < \aleph_0.$$

Demostración. Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} & [k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right] = \\ & k\langle A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right] + \varphi(k\langle B \rangle), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{[k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{\varphi(k\langle B \rangle)} \simeq \\ & \frac{k\langle A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}. \end{aligned}$$

Como φ es un homomorfismo controlado existe $M \geq 1$ tal que $\varphi(B_M^i) \subset k\langle A_m^i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$), véase la Sección 7.1, por tanto

$$\text{(b)} \quad \sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) = \sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle_{M-1} B \rangle) + \varphi(k\langle B_M^i \rangle).$$

El conjunto $_{M-1}B$ es finito, véase (7.1.B), así que existe $N \geq 0$ suficientemente grande tal que $\varphi(_{M-1}B) \subset k\langle_N A \rangle$. Comprobemos que el siguiente homomorfismo inducido por la inclusión ${}_N A_m^i \subset A_m^i$ es un isomorfismo

$$\text{(c)} \quad \frac{k\langle_N A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{k\langle_N A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)} \rightarrow \frac{k\langle A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}.$$

La inyectividad es obvia. Ahora por (b) un elemento arbitrario en el rango de (c) está representado por un elemento $a_i \in k\langle A_m^i \rangle$ tal que hay $a_j \in k\langle A_m^j \rangle$ ($j \neq i$), $a'_i \in k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)$, $b \in \varphi(k\langle M_{-1}B \rangle)$, y $b_i \in \varphi(k\langle B_M^i \rangle)$ que satisfacen

$$\sum_{j \neq i} a_j + b + b_i = a_i + a'_i,$$

pero $a_i + a'_i - b_i \in k\langle A_m^i \rangle$, $(\oplus_{j=1}^n k\langle A_m^j \rangle) \cap k\langle NA \rangle = \oplus_{j=1}^n k\langle NA_m^j \rangle$, y $\sum_{j \neq i} a_j - (a_i + a'_i - b_i) = b \in k\langle NA \rangle$, por lo tanto $a_j, a_i + a'_i - b_i \in k\langle NA \rangle$ ($j \neq i$), y $a'_i - b_i \in k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi\langle B \rangle$, así que $a_i + a'_i - b_i$ representa el mismo elemento que a_i en el rango de (c), luego el homomorfismo (c) es sobreyectivo. Ahora la proposición se sigue de los isomorfismos (a) y (c), y de la finitud del conjunto ${}_N A_m^i$. \square

En virtud de (7.7.3) el espacio vectorial $W_0^\varphi = \sum_{i=1}^n W_i^\varphi$ junto con los subespacios $W_1^\varphi, \dots, W_n^\varphi$ definen un n -subespacio de dimensión finita \underline{W}^φ .

Proposición 7.7.5. *Hay un funtor aditivo $\mathbb{S}: \mathbf{fp}(\mathbf{M}_k(T_n)) \rightarrow \mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$ que envía $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi$ a $\mathbb{S}\mathcal{M} = \underline{W}^\varphi$.*

Demostración. Usando la descripción alternativa de los homomorfismos controlados en $\mathbf{M}_k(T_n)$ dada en la Sección 7.1 es sencillo comprobar que la correspondencia $\varphi \mapsto \underline{W}^\varphi$ es un funtor de $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ a la categoría de n -subespacios. Más aún, este funtor factoriza a través de la relación de equivalencia natural \sim , por tanto la proposición se sigue de (2.1.4). \square

Es más, es inmediato comprobar que

Proposición 7.7.6. *El n -subespacio $\mathbb{S}\mathcal{M}$ es rígido para todo $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulo $f. p. \mathcal{M}$. Más aún, dado un n -subespacio de dimensión finita \underline{V} hay un isomorfismo natural $\mathbb{S}\mathbb{M}\underline{V} \simeq \underline{V}^{\text{rig}}$.*

Para la segunda parte del enunciado de la anterior proposición usamos las presentaciones finitas construidas en la demostración de (7.7.1).

Corolario 7.7.7. *La imagen del funtor \mathbb{S} es la categoría de n -subespacios de dimensión finita rígidos.*

Corolario 7.7.8. *Para todo $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulo $f. p. \mathcal{M}$ hay un isomorfismo natural $\mathbb{S}\mathbb{M}\mathbb{S}\mathcal{M} \simeq \mathbb{S}\mathcal{M}$.*

Como destacamos en la introducción de este capítulo un paso clave para obtener una presentación de $\text{Iso}(\mathbf{fp}(\mathbf{M}_k(T_n)))$ es relacionar el problema de las descomposiciones en $\mathbf{fp}(\mathbf{M}_k(T_n))$ con el problema de las descomposiciones en $\mathbf{fp}(\mathbf{M}_k(T_1))$ y $\mathbf{sub}_n^{\text{fin}}$. Esto es lo que haremos en las dos siguientes proposiciones.

Proposición 7.7.9. *Para cualquier $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulo $f. p. \mathcal{M}$ existe otro \mathcal{N} con $\mathcal{S}\mathcal{N} = 0$ tal que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N} \oplus \text{MISM}$.*

Demostración. Supongamos que \mathcal{M} es el conúcleo de $\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha$ en $\mathbf{M}_k(T_n)$. En virtud de la descripción alternativa de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 podemos escoger una sucesión creciente de números naturales $\{M_m\}_{m \geq 1}$ con $\varphi(B_{M_m}^i) \subset k\langle A_m^i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$). Definimos los sistemas inversos de espacios vectoriales $X_\bullet^i, Y_\bullet^i, Z_\bullet^i$ ($1 \leq i \leq n$) indexados por \mathbb{N} de la siguiente manera

$$X_m^i = \frac{\varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B_{M_m}^i \rangle)},$$

$$Y_m^i = \frac{[k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap [\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)]}{\varphi(k\langle B_{M_m}^i \rangle)},$$

$$Z_m^i = \frac{[k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap [\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)]}{\varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Los homomorfismos de enlace están inducidos por las inclusiones obvias de espacios vectoriales. Las sucesiones exactas cortas $X_m^i \hookrightarrow Y_m^i \xrightarrow{p_i^m} Z_m^i$ son compatibles con los homomorfismos de enlace, así que dan lugar a sucesiones exactas cortas $X_\bullet^i \hookrightarrow Y_\bullet^i \xrightarrow{p_i} Z_\bullet^i$ en la categoría abeliana de pro-espacios vectoriales. Es más, $\lim Z_\bullet^i = \cap_{m \geq 1} Z_m^i = W_i^\varphi$. Sea $\psi_i: W_i^\varphi \rightarrow Z_\bullet^i$ el pro-morfismo canónico, que está inducido por las inclusiones $W_i^\varphi \subset Z_m^i$. Aquí consideramos W_i^φ como el sistema inverso indexado por un conjunto unitario.

Los homomorfismos de enlace del sistema inverso X_\bullet^i son sobreyectivos, por tanto $\lim^1 X_\bullet^i = 0$, y por (7.3.B) $\text{Ext}^1(W_i^\varphi, X_\bullet^i) = 0$, así que existe un pro-morfismo $\tilde{\psi}_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & W_i^\varphi \\ & \tilde{\psi}_i \swarrow & \downarrow \psi_i \\ X_\bullet^i \hookrightarrow & Y_\bullet^i & \xrightarrow{p_i} Z_\bullet^i \end{array}$$

El pro-morfismo $\tilde{\psi}_i$ está representado por una sucesión de homomorfismos $\tilde{\psi}_i^m: W_i^\varphi \rightarrow Y_m^i$ ($m \geq 1$) que son compatibles con los homomorfismos de enlace de Y_\bullet^i , y tales que la composición $p_i^m \tilde{\psi}_i^m: W_i^\varphi \subset Z_m^i$ es la inclusión.

Si $\{a_1^i, \dots, a_{d_i}^i\}$ es una base de W_i^φ podemos elegir elementos ($m \geq 1$)

$$\{m a_1^i, \dots, m a_{d_i}^i\} \subset k\langle A_m^i \rangle$$

tales que $\tilde{\psi}_i^m(a_j^i) = m a_j^i + \varphi(k\langle B_{M_m}^i \rangle)$. En particular, como los homomorfismos $\tilde{\psi}_i^m$ son compatibles con los homomorfismos de enlace de Y_\bullet^i , vemos que hay elementos ${}_{m+1}b_j^i \in k\langle B_{M_m}^i \rangle$ que satisfacen ${}_{m+1}a_j^i - m a_j^i = \varphi({}_{m+1}b_j^i)$. Es más, sea $\{a_1, \dots, a_d\}$ una base de W_0^φ , $\sigma: k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle) \hookrightarrow k\langle A \rangle$ una sección de la proyección natural, y ${}_1b_j^i \in k\langle B \rangle$ elementos tales que $\varphi({}_1b_j^i) = {}_1a_j^i - \sigma({}_1a_j^i + \varphi(k\langle B \rangle))$.

Si ρ es la presentación finita de MISM construida en la demostración de (7.7.1), hay un morfismo $\tau: \rho \rightarrow \varphi$ en $\mathbf{Pair}(\mathbf{M}_k(T_n))$ dado por $\tau_0(w_i) = \sigma(a_i)$, $\tau_0({}_m w_j^i) = m a_j^i$, y $\tau_1({}_m w_j^i) = {}_m b_j^i$. Este morfismo induce un morfismo de $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulos $\tau: \text{MISM} \rightarrow \mathcal{M}$. Ahora construiremos una retracción de τ .

En virtud de (7.7.4) Z_m^i es siempre de dimensión finita y $W_i^\varphi = \bigcap_{m \geq 1} Z_m^i$, por tanto existe $N \geq 1$ tal que $W_i^\varphi = Z_N^i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea \underline{V} el n -subespacio dado por $V_0 = k\langle A \rangle / \varphi(k\langle B \rangle)$ y $V_i = [k\langle A_N^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] / \varphi(k\langle B \rangle)$. Claramente $\text{SM} = \underline{V}^{\text{rig}} \subset \underline{V}$, así que por (7.6.4) hay una retracción $r: \underline{V} \rightarrow \text{SM}$. Por el lema de Yoneda $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(k\langle A \rangle_\alpha, \underline{MV}) = \underline{MV}(k\langle A \rangle_\alpha)$. La proyección natural $k\langle A \rangle \rightarrow V_0$ da lugar a un morfismo de $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulos $v_0: k\langle A \rangle_\alpha \rightarrow \underline{MV}$ tal que $v_0\varphi = 0$. Es más, como $\mathcal{M} = \text{Coker } \varphi$ entonces $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \underline{MV}) = \text{Ker } \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\varphi, \underline{MV})$, en particular v_0 determina un morfismo de $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulos $v: \mathcal{M} \rightarrow \underline{MV}$. Es sencillo comprobar que la composición $(\text{Mr})v_0\tau_0$ coincide con la proyección natural $p: k\langle C \rangle_\gamma \rightarrow \text{MISM} = \text{Coker } \rho$ definida en la demostración de (7.7.1), por tanto $(\text{Mr})v\tau = 1$ es la identidad en MISM , y $(\text{Mr})v$ es la deseada retracción de τ . Ahora si tomamos \mathcal{N} como el conúcleo de τ la proposición se sigue ya que $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \text{MISM}$, y por (7.7.8) $\text{SM} = \text{SN} \oplus \text{SMSM} \simeq \text{SN} \oplus \text{SM}$ luego $\text{SN} = 0$. Aquí usamos que el monoide $\text{Iso}(\mathbf{sub}_n^{\text{fin}})$ es libre y por tanto cancelativo, compárese con la Sección 7.6. \square

En la siguiente proposición usamos los funtores $\mathbb{F}^i: \mathbf{M}_R(T_1) \rightarrow \mathbf{M}_R(T_n)$ considerados en (7.4.5).

Proposición 7.7.10. *Dado un $\mathbf{M}_k(T_n)$ -módulo f. p. \mathcal{M} , $\text{SM} = 0$ si y sólo si existen $\mathbf{M}_k(T_1)$ -módulos f. p. \mathcal{M}_i ($1 \leq i \leq n$) con $\mathcal{M} \simeq \mathbb{F}_*^1 \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_*^n \mathcal{M}_n$.*

Demostración. Es fácil ver que $\text{S}\mathbb{F}_*^i = 0$ ($1 \leq i \leq n$), y S es aditivo, así que la implicación “ \Leftarrow ” se tiene. Supongamos que $\mathcal{M} = \text{Coker } [\varphi: k\langle B \rangle_\beta \rightarrow k\langle A \rangle_\alpha]$ y $\text{SM} = 0$. Como los espacios vectoriales de dimensión finita son artinianos, por (7.7.4) existe $m \geq 1$ suficientemente grande tal que para todo $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{[k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)] \cap \left[\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle + \varphi(k\langle B \rangle) \right]}{\varphi(k\langle B \rangle)} = 0,$$

esto es, la siguiente igualdad se tiene (el isomorfismo de la derecha es válido en general)

$$\frac{\sum_{i=1}^n k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)} = \bigoplus_{i=1}^n \frac{k\langle A_m^i \rangle + \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B \rangle)} \simeq \bigoplus_{i=1}^n \frac{k\langle A_m^i \rangle}{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}.$$

Esto es equivalente a decir que

$$(a) \quad \left[\bigoplus_{i=1}^n k\langle A_m^i \rangle \right] \cap \varphi(k\langle B \rangle) = \bigoplus_{i=1}^n [k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)].$$

Por la caracterización de los homomorfismos controlados dada en la Sección 7.1 existe $M \geq 1$ con $\varphi(B_M^i) \subset k\langle A_m^i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$). Sea K el núcleo del homomorfismo de espacios vectoriales subyacente a φ , esto es $K = \varphi^{-1}(0)$. Hay un conjunto finito $\{b_1, \dots, b_d\} \subset k\langle B \rangle$ que se proyecta sobre una base de

$$\frac{K + (\bigoplus_{i=0}^n k\langle B_M^i \rangle)}{\bigoplus_{i=0}^n k\langle B_M^i \rangle} \simeq \frac{K}{K \cap (\bigoplus_{i=0}^n k\langle B_M^i \rangle)},$$

ya que este espacio vectorial está contenido en

$$\frac{k\langle B \rangle}{\bigoplus_{i=0}^n k\langle B_M^i \rangle} \simeq k\langle_{M-1} B \rangle,$$

y $_{M-1}B$ es finito, véase (7.1.B).

Hay también un conjunto finito $\{a_1^i, \dots, a_{d_i}^i\} \subset k\langle B \rangle$ que se proyecta a una base de

$$\frac{\varphi^{-1}(k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle))}{k\langle B_M^i \rangle + K},$$

porque φ induce un isomorfismo

$$\frac{\varphi^{-1}(k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle))}{k\langle B_M^i \rangle + K} \simeq \frac{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B_M^i \rangle)},$$

y siempre

$$(b) \quad k\langle A_m^i \rangle \cap \left(\sum_{j \neq i} k\langle A_m^j \rangle \right) = 0,$$

así que $k\langle A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j=1}^n \varphi(k\langle B_M^j \rangle) \right] = \varphi(k\langle B_M^i \rangle)$, y por tanto

$$\frac{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}{\varphi(k\langle B_M^i \rangle)} = \frac{k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)}{k\langle A_m^i \rangle \cap \left[\sum_{j=1}^n \varphi(k\langle B_M^j \rangle) \right]} \subset \frac{\varphi(k\langle B \rangle)}{\sum_{i=1}^n \varphi(k\langle B_M^i \rangle)} \simeq \varphi(k\langle_{M-1} B \rangle).$$

Por (b) tenemos que

$$\varphi^{-1}(k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)) \cap \left[\sum_{j \neq i} \varphi^{-1}(k\langle A_m^j \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)) \right] = K,$$

por tanto el conjunto $\left[\sqcup_{i=1}^n \left(B_M^i \sqcup \{a_j^i\}_{j=1}^{d_i} \right) \right] \sqcup \{b_i\}_{i=1}^d$ es linealmente independiente en $k\langle B \rangle$. Es más, es una base de $\sum_{i=1}^n \varphi^{-1}(k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle))$, así que para completarla a una base \underline{B} de $k\langle B \rangle$ sólo tenemos que añadir un conjunto finito $\{b'_1, \dots, b'_d\} \subset k\langle B \rangle$ que se proyecte a una base del siguiente espacio vectorial

$$\frac{k\langle B \rangle}{\sum_{i=1}^n \varphi^{-1}(k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle))},$$

que es de dimensión finita pues es isomorfo a

$$(c) \quad \frac{\varphi(k\langle B \rangle)}{\bigoplus_{i=1}^n k\langle A_m^i \rangle \cap \varphi(k\langle B \rangle)} \subset \frac{k\langle A \rangle}{\bigoplus_{i=1}^n k\langle A_m^i \rangle} \simeq k\langle_{m-1} A \rangle.$$

La inclusión (c) se sigue de (a). Sea $\{a_1, \dots, a_e\} \subset k\langle A \rangle$ una base de

$$\frac{k\langle A \rangle}{\varphi(k\langle B \rangle) + \left(\bigoplus_{i=1}^n k\langle A_m^i \rangle \right)}.$$

Por (c) $\underline{A} = \left(\sqcup_{i=1}^n A_m^i \right) \sqcup \{\varphi(b'_i)\}_{i=1}^d \sqcup \{a_i\}_{i=1}^e$ es una base de $k\langle A \rangle$. Sean $\underline{\alpha}: \underline{A} \rightarrow T_n^0$, $\underline{\beta}: \underline{B} \rightarrow T_n^0$ las funciones de altura definidas como α y β sobre $\sqcup_{i=1}^n A_m^i$ y $\sqcup_{i=1}^n B_M^i$ respectivamente, y constante v_0 sobre el resto de elementos. Las identidades $k\langle A \rangle = k\langle \underline{A} \rangle$ y $k\langle B \rangle = k\langle \underline{B} \rangle$ inducen isomorfismos controlados $\phi_1: k\langle A \rangle_\alpha \simeq k\langle \underline{A} \rangle_{\underline{\alpha}}$ y $\phi_2: k\langle B \rangle_\beta \simeq k\langle \underline{B} \rangle_{\underline{\beta}}$, así que si definimos $\psi = \phi_1 \varphi \phi_2^{-1}$ entonces $\mathcal{M} \simeq \text{Coker } \psi$. Pero si definimos los conjuntos ${}^1 \underline{A} = A_m^1 \sqcup \{\varphi(b'_i)\}_{i=1}^d \sqcup \{a_i\}_{i=1}^e$, ${}^i \underline{A} = A_m^i$ ($1 < i \leq n$), ${}^1 \underline{B} = B_M^1 \sqcup \{a_j^1\}_{j=1}^{d_1} \sqcup \{b_i\}_{i=1}^d \sqcup \{b'_i\}_{i=1}^{d'}$, ${}^i \underline{B} = B_M^i \sqcup \{a_j^i\}_{j=1}^{d_i}$ ($1 < i \leq n$), y las funciones de altura ${}^i \underline{\alpha}$ y ${}^i \underline{\beta}$ como las restricciones de $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$ a ${}^i \underline{A}$ y ${}^i \underline{B}$ respectivamente ($1 \leq i \leq n$), entonces observamos que ($1 \leq i \leq n$)

$${}^i \underline{\alpha}({}^i \underline{A}), {}^i \underline{\beta}({}^i \underline{B}) \subset \{v_0\} \cup \{v_m^i\}_{m \geq 1} \subset T_n^0,$$

$$\psi({}^i \underline{B}) \subset k\langle {}^i \underline{A} \rangle, \quad \underline{A} = \sqcup_{i=1}^n {}^i \underline{A}, \quad \underline{B} = \sqcup_{i=1}^n {}^i \underline{B},$$

y la proposición se tiene. □

7.8 Clasificación de los $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados

En esta sección damos una clasificación de los $k(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados. Para ello el resultado fundamental es el siguiente teorema donde calculamos el monoide $\text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathbf{n})))$ en términos del monoide libre abeliano $\text{Iso}(\mathbf{sub}_n^{\text{fr}})$.

Teorema 7.8.1. *El siguiente morfismo de monoides es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$(\Phi_n, \text{Iso}(\mathbb{S})) : \text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathbf{n}))) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{N}_{\infty, n} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_{\infty} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_{\infty} \times \text{Iso}(\mathbf{sub}_n^{\text{fr}}).$$

Este teorema se sigue de los resultados más potentes de este capítulo ya demostrados. Más concretamente, la sobreyectividad de $(\Phi_n, \text{Iso}(\mathbb{S}))$ es consecuencia de (7.4.6), (7.5.3), (7.7.2), (7.7.7), (7.7.8) y (7.7.10). Más aún, este morfismo es inyectivo en virtud del próximo teorema. Para enunciarlo introducimos la siguiente notación. Dado $d \in \mathbb{N}_{\infty, n}$ el $k(\mathbf{n})$ -módulo \mathcal{A}_d es $\mathbb{F}_*^1 \mathcal{A}_d$ si $d \in \mathbb{N}_0$ y $\bigoplus_{i \in S} \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}$ si $d = \infty_S$ para algún $\emptyset \neq S \subset \{1, \dots, n\}$.

Teorema 7.8.2. *Cualquier $k(\mathbf{n})$ -módulo $f. p. \mathcal{M}$ se descompone de la siguiente forma*

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{M}}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_{\mu_{\mathcal{M}}^i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_{\nu_{\mathcal{M}}^i} \right) \oplus \text{MSM}.$$

Este teorema se sigue de (7.4.6), (7.5.2), (7.7.9), (7.7.10), y del siguiente

Lema 7.8.3. *Dados dos $k(\mathbf{1})$ -módulos $f. p. \mathcal{M}$ y \mathcal{N} existe un isomorfismo de $k(\mathbf{n})$ -módulos $\mathbb{F}_*^i \mathcal{M} \simeq \mathbb{F}_*^j \mathcal{N}$ ($1 \leq i, j \leq n$) si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:*

- $i = j$ y $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$,
- $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_m$ para algún $m \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. La implicación “ \Rightarrow ” se sigue de (7.4.6), (7.5.3) y (7.5.4). Por otro lado si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ entonces obviamente $\mathbb{F}_*^i \mathcal{M} \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{N}$. Es más, $\mathbb{F}_*^i \mathcal{A}_m$ y $\mathbb{F}_*^j \mathcal{A}_m$ son isomorfos ($m \in \mathbb{N}_0$) porque ambos módulos son isomorfos a un k -espacio vectorial T_n -controlado cuya base es un conjunto de m elementos, compárese con (7.5.7). \square

Como consecuencia de la Proposición 7.6.5 y el Teorema 7.8.1 obtenemos el siguiente

Corolario 7.8.4. *El álgebra $k(\mathbf{n})$ tiene el mismo tipo de representaciones que la aljaba de los n -subespacios.*

En virtud de (7.4.6), (7.5.3), (7.8.1) y (7.8.2) obtenemos la siguiente presentación del monoide $\text{Iso}(\mathbf{fp}(k(\mathbf{n})))$.

Corolario 7.8.5 (Clasificación de los $k(\mathbf{n})$ -módulos f. p.). *Denotemos $\left\{ \underline{V}^{(n,j)} \right\}_{j \in J_n}$ al conjunto de los n -subespacios indescomponibles rígidos. Hay una solución al problema de las descomposiciones en la categoría de los $k(\mathbf{n})$ -módulos f. p. dada por los siguientes $1 + 5n + \text{card } J_n$ módulos elementales ($1 \leq i \leq n, j \in J_n$)*

$$\mathbb{F}_*^1 \mathcal{A}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty, \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty, \mathbb{M}\underline{V}^{(n,j)},$$

y $6n$ isomorfismos elementales ($1 \leq i \leq n$)

$$\mathbb{F}_*^1 \mathcal{A} \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{R} \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{R} \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{R} \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B} \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty,$$

$$\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty, \mathbb{F}_*^i \mathcal{C} \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty, \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty \oplus \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty \simeq \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty.$$

7.9 Algunos cálculos de grupos $\text{Ext}_{R(\mathfrak{F}(T))}^*$

Sea \mathcal{R} la k -álgebra $\text{RCFM}(k)$, como en la Sección 7.5. Dados dos \mathcal{R} -módulos elementales $\mathcal{R}/Y\mathcal{R}$ ($Y \neq 0$) y $\mathcal{R}/Z\mathcal{R}$, véase (7.5.1), es sencillo comprobar usando (7.5.9) y resultados bien conocidos de álgebra homológica que hay un isomorfismo de k -espacios vectoriales

$$(7.9.A) \quad \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{R}/Y\mathcal{R}, \mathcal{R}/Z\mathcal{R}) \simeq \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}Y + Z\mathcal{R}}.$$

Esta fórmula es también cierta para $Z = 0$, es más, en este caso esto es un isomorfismo de \mathcal{R} -módulos a izquierda.

Lema 7.9.1. *Tenemos las siguientes identidades*

- (1). $A\mathcal{R} = \{\mathcal{R} \in \mathcal{R}; r_{0j} = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0\}$,
- (2). $(I - A)\mathcal{R} = \{\mathcal{R} \in \mathcal{R}; \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_{ij} = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0\}$,
- (3). $(I - A^t)\mathcal{R} = \{\mathcal{R} \in \mathcal{R}; \text{dado cualquier } i \in \mathbb{N}_0, \sum_{n \geq i} r_{nj} = 0 \text{ para casi todo } j \in \mathbb{N}_0\}$,
- (4). $(I - B^t)\mathcal{R} = \{\mathcal{R} \in \mathcal{R}; \text{dados } m \in \mathbb{N}_0 \text{ e } i \leq m, \sum_{n \geq m} r_{i+\frac{n(n+1)}{2}, j} = 0 \text{ para casi todo } j \in \mathbb{N}_0\}$.

Demostración. Es sencillo comprobar que los conjuntos que aparecen en el enunciado a la derecha son ideales, así que para probar las inclusiones “ \subset ” basta demostrar que las matrices que definen los ideales de la izquierda pertenecen a los correspondientes conjuntos de la derecha. Esto puede ser probado a través de un cálculo laborioso pero trivial. Supongamos ahora que R es una matriz en el conjunto de la derecha del apartado (1), (2), (3), o (4), entonces es fácil ver que la matriz C^1 , C^2 , C^3 o C^4 definida como $c_{0j}^1 = 0$, $c_{i+1,j}^1 = r_{ij}$, $c_{ij}^2 = \sum_{n=0}^i r_{nj}$, $c_{ij}^3 = \sum_{n \geq i} r_{nj}$ ($i, j \in \mathbb{N}_0$), $c_{i+\frac{m(m+1)}{2},j}^4 = \sum_{n \geq m} r_{i+\frac{n(n+1)}{2},j}$ ($i, j \in \mathbb{N}_0, m \geq i$), pertenece a \mathcal{R} y satisface $AC^1 = R$, $(I - A)C^2 = R$, $(I - A^t)C^3 = R$ o $(I - B^t)C^4 = R$, siempre que estemos en el caso (1), (2), (3) o (4). De aquí se sigue el resultado. \square

Usando el Lema 7.9.1 y la involución del k -espacio vectorial \mathcal{R} dada por la trasposición de matrices es sencillo comprobar que

Lema 7.9.2. *Tenemos las siguientes igualdades*

- (1). $\mathcal{R}(I - A) = \{R \in \mathcal{R}; \text{dado cualquier } j \in \mathbb{N}_0, \sum_{n \geq j} r_{in} = 0 \text{ para casi todo } i \in \mathbb{N}_0\}$,
- (2). $\mathcal{R}(I - A^t) = \left\{R \in \mathcal{R}; \sum_{j \in \mathbb{N}_0} r_{ij} = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0\right\}$,
- (3). $\mathcal{R}(I - B) = \{R \in \mathcal{R}; \text{dados } m \in \mathbb{N}_0 \text{ y } j \leq m, \sum_{n \geq m} r_{i,j+\frac{n(n+1)}{2}} = 0 \text{ para casi todo } i \in \mathbb{N}_0\}$.

El siguiente lema da una idea del tamaño de las k -álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$.

Lema 7.9.3. *Para todo árbol T no compacto $\dim k(\mathfrak{F}(T)) = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. El k -espacio vectorial de todas las matrices $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ es el producto directo de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ copias de k , y es bien conocido que $\dim \prod_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} k = 2^{\aleph_0}$, luego $\dim k(\mathfrak{F}(T)) \leq 2^{\aleph_0}$. Más aún, para todo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \prod_{\mathbb{N}_0} k$ la matriz diagonal $(b_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ con $b_{nn} = a_n$ pertenece a $k(\mathfrak{F}(T))$, por tanto $k(\mathfrak{F}(T))$ contiene un subespacio isomorfo a $\prod_{\mathbb{N}_0} k$, y $\dim \prod_{\mathbb{N}_0} k = 2^{\aleph_0}$ también, así que la igualdad del enunciado se tiene. \square

Proposición 7.9.4. *Tenemos que*

- (1). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{R}) = 2^{\aleph_0}$,
- (2). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{C}, \mathcal{R}) = 2^{\aleph_0}$,
- (3). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{B}_\infty, \mathcal{R}) = 2^{\aleph_0}$,
- (4). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{C}_\infty, \mathcal{R}) = 2^{\aleph_0}$,

- (5). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$,
 (6). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = 1$,
 (7). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{B}_{\infty}, \mathcal{A}) = 0$,
 (8). $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1(\mathcal{C}_{\infty}, \mathcal{A}) = \aleph_0$.

Demostración. Es sencillo comprobar usando (7.9.2) (1), (7.9.1) (1) y (7.9.2) (2), y (7.9.1) (1) y (7.9.2) (3), que los siguientes son isomorfismos de k -espacios vectoriales

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}(I - A)} \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}_0} k / \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} k, \quad \mathcal{R} + \mathcal{R}(I - A) \mapsto \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} r_{ij} \right)_{i \in \mathbb{N}_0} + \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} k;$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}(I - A^t) + A\mathcal{R}} \simeq k, \quad \mathcal{R} + (\mathcal{R}(I - A^t) + A\mathcal{R}) \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}_0} r_{0j};$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}(I - B^t) + A\mathcal{R}} \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} k, \quad \mathcal{R} + (\mathcal{R}(I - B^t) + A\mathcal{R}) \mapsto \left(\sum_{n \geq j} r_{0, j + \frac{n(n+1)}{2}} \right)_{j \in \mathbb{N}_0};$$

así que (1), (6) y (8) se sigue de (7.9.A).

Para todo par de \mathcal{R} -módulos f. p. elementales la desigualdad $\dim \text{Ext}_{\mathcal{R}}^1 \leq 2^{\aleph_0}$ se sigue de (7.9.A) y (7.9.3). Ahora (2) es consecuencia de (1) y (7.5.10) (1). La igualdad (3) sigue de (1) y del hecho de que \mathcal{B} es un sumando directo de \mathcal{B}_{∞} , véase (7.5.1), y (4) es consecuencia de (3) y (7.5.10) (2).

Dada una matriz cualquiera $R \in \mathcal{R}$, si $R^1, R^2 \in \mathcal{R}$ son las matrices definidas como $r_{0j}^1 = r_{0j}$, $r_{ij}^2 = r_{ij}$ ($i > 0$), y $r_{ij}^n = 0$ en otro caso, entonces $R = R^1 + R^2$, $R^1 \in \mathcal{R}(I - B)$ y $R^2 \in A\mathcal{R}$, por (7.9.1) (1) y (7.9.2) (3), por tanto $\mathcal{R} = \mathcal{R}(I - B) + A\mathcal{R}$ y (7) se sigue de (7.9.A). Es más, como \mathcal{B} es un sumando directo de \mathcal{B}_{∞} por (7.5.1) entonces (5) también se sigue. \square

Por (7.5.1), (7.5.12) y (7.5.17) el grupo $\text{Ext}_{\mathcal{R}}^1$ de cualquier otro par de \mathcal{R} -módulos f. p. elementales es cero, así que los grupos $\text{Ext}_{\mathcal{R}}^1$ están completamente calculados para todo par de \mathcal{R} -módulos finitamente presentados. Además usando (7.9.4) también podemos calcular algunos grupos $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1$ para pares de $k(\mathbf{n})$ -módulos f. p. elementales ($n \geq 1$) a través del siguiente resultado.

Proposición 7.9.5. *Dado un $k(\mathbf{1})$ -módulo \mathcal{M} y un $k(\mathbf{n})$ -módulo \mathcal{N} ambos finitamente presentados hay un isomorfismo ($m \geq 0, 1 \leq i \leq n$)*

$$\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{M}, (\mathbb{F}^i)^* \mathcal{N}).$$

En particular dados dos RCFM(k)-módulos f. p. tenemos isomorfismos naturales

$$\text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{M}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{N}).$$

En el enunciado aparecen los funtores $\mathbb{F}_*^i: \mathbf{mod}(k(\mathbf{1})) \rightarrow \mathbf{mod}(k(\mathbf{n}))$ y $(\mathbb{F}^i)^*: \mathbf{mod}(k(\mathbf{n})) \rightarrow \mathbf{mod}(k(\mathbf{1}))$, inducidos por el funtor lleno \mathbb{F}^i en (7.4.5), que son exactos como se ha visto en (2.1.5) y (2.2.13). La proposición se sigue de la conmutatividad de (2.1.A) ya que el adjunto a derecha $(\mathbb{F}^i)^*$ de \mathbb{F}_*^i satisface $(\mathbb{F}^i)^* \mathbb{F}_*^i = 1$, véase (2.1.5).

Para el cálculo del grupo $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1$ de los pares de $k(\mathbf{n})$ -módulos f. p. elementales que están en la imagen del funtor \mathbb{M} se puede usar el siguiente resultado.

Proposición 7.9.6. *Para cualquier par de n -subespacios de dimensión finita hay un isomorfismo natural*

$$\text{Ext}_{kQ_n}^1(\underline{V}, \underline{W}) \simeq \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\underline{V}, \mathbb{M}\underline{W}).$$

Demostración. Las representaciones proyectivas de Q_n son sumas directas (arbitrarias) de los siguientes $n + 1$ n -subespacios indescomponibles,

$$\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k); \mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \quad (1 \leq i \leq n),$$

véase el párrafo anterior a (7.6.4) para la definición de estos funtores \mathbb{F}^i . Como \mathbb{M} es una inclusión exacta y llena de categorías y cualquier representación de dimensión finita de Q_n admite una resolución proyectiva de longitud 1 por representaciones proyectivas de dimensión finita es suficiente comprobar que

- (1). $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k)) = 0$;
- (2). $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k)) = 0, \quad (1 \leq i \leq n)$;
- (3). $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k)) = 0, \quad (1 \leq i \leq n)$;
- (4). $\text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^j(k \rightarrow k)) = 0, \quad (1 \leq i, j \leq n)$.

Las resoluciones construidas en la demostración de (7.7.1) demuestran que $\mathbb{M}\mathbb{F}^i(0 \rightarrow k)$ es en todo caso un $k(\mathbf{n})$ -módulo proyectivo isomorfo a un k -espacio vectorial T_n -controlado de dimensión 1, por tanto (1) y (2) se tienen.

Usando las resoluciones proyectivas construidas en la prueba de (7.7.1) se ve de manera inmediata que sobre los 1-subespacios de dimensión finita $\mathbb{M}\mathbb{F}^i = \mathbb{F}_*^i \mathbb{M}$, $\mathbb{M}(k \rightarrow k) = \mathcal{B}$ y $\mathbb{M}(0 \rightarrow k) = \mathcal{A}$, por tanto

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^1(0 \rightarrow k)) &= \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{A}) \\ &= \text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego (3) se verifica. Aquí usamos (7.9.5) para la segunda igualdad y (7.9.4) (5) para la tercera. Es más,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k)) &= \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}) \\ &= \text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por tanto se tiene (4) si $i = j$. Aquí usamos (7.9.5) para la segunda igualdad y (7.5.12) para la tercera. Si $i \neq j$ no es difícil comprobar que $\mathcal{A} = (\mathbb{F}^i)^* \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}$. Concretamente esta identificación viene dada por el adjunto del morfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_*^i \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}_*^j \mathcal{B} \in \text{Hom}_{k(\mathbf{n})}(\mathbb{F}_*^i \mathcal{A}, \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}) &= \text{Hom}_{k(\mathbf{n})}(\mathbb{F}_*^j \mathcal{A}, \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}) \\ &= \text{Hom}_{k(\mathbf{1})}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ &= \text{Hom}_k(k, k) \end{aligned}$$

correspondiente a la identidad en k . Aquí para la primera igualdad hemos usado (7.8.3); para la segunda que \mathbb{F}_*^i es fiel y lleno, véanse (7.4.5) y (2.2.2) (3); y para la tercera (7.5.7) y (7.5.11). Por tanto

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{M}\mathbb{F}^i(k \rightarrow k), \mathbb{M}\mathbb{F}^j(k \rightarrow k)) &= \text{Ext}_{k(\mathbf{n})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}) \\ &= \text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{B}, (\mathbb{F}^i)^* \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}) \\ &= \text{Ext}_{\text{RCFM}(k)}^1(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí para la segunda igualdad usamos (7.9.5) y para la cuarta (7.9.4) (5). Con esto (4) queda definitivamente probado y el resultado se tiene. \square

Esta proposición es especialmente útil ya que se dispone de una potente herramienta para el cálculo del k -espacio vectorial $\text{Ext}_{kQ_n}^1$ de un par de n -subespacios de dimensión finita. Esta herramienta es la forma bilineal de Q_n .

Definición 7.9.7. La *forma bilineal de la aljaba Q_n* es la forma bilineal entera

$$\langle -, - \rangle_{Q_n} : (\oplus_0^n \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus_0^n \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

definida de la siguiente forma: dados $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ y \underline{b} en $\oplus_0^n \mathbb{Z}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle_{Q_n} = \sum_{i=0}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i b_0.$$

El *vector de dimensión* de un n -subespacio de dimensión finita \underline{V} es

$$\underline{\dim} \underline{V} = (\dim V_0, \dots, \dim V_n) \in \oplus_0^n \mathbb{Z}.$$

El siguiente resultado relaciona la forma bilineal de Q_n y los vectores de dimensión con el cálculo de $\text{Ext}_{kQ_n}^1$, véase [CB92] página 8 Consecuencia (3).

Proposición 7.9.8. *Dado un par $\underline{V}, \underline{W}$ de n -subespacios de dimensión finita se satisface la siguiente igualdad*

$$\langle \underline{\dim} \underline{V}, \underline{\dim} \underline{W} \rangle_{Q_n} = \dim \text{Hom}_{kQ_n}(\underline{V}, \underline{W}) - \dim \text{Ext}_{kQ_n}^1(\underline{V}, \underline{W}).$$

Merece la pena destacar que para valores pequeños de n el cálculo de $\dim \text{Hom}_{kQ_n}(\underline{V}, \underline{W})$ es fácil de hacer a mano para todo par \underline{V} y \underline{W} de n -subespacios indescomponibles.

Por último para $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T)$ el espacio de finales de un árbol no-compacto T cualquiera vamos a calcular algunos grupos Ext^* en la categoría de $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulos en términos de grupos Ext^* en la categoría de $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulos, para los cuales ya hemos desarrollado varias técnicas de cálculo. El punto de partida consiste en considerar, como se hizo en (5.2.15) (3), a $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ como una $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -álgebra a través de la proyección natural $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ a la que da lugar $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$. Al ser $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ libre de torsión como grupo abeliano tenemos la siguiente resolución proyectiva de longitud 1 de $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ como $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo

$$\mathbb{Z}(\mathfrak{F}) \xrightarrow{2} \mathbb{Z}(\mathfrak{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}).$$

En particular vemos que $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ es un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo finitamente presentado. Más aún, se tiene de manera inmediata el siguiente resultado.

Proposición 7.9.9. *Dado un $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulo \mathcal{M} hay isomorfismos naturales de $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulos*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}) &= \mathcal{M}; \\ \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})) &= \mathcal{M}; \\ \text{Tor}_m^{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})) &= 0, (m \geq 2). \end{aligned}$$

Dados un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo \mathcal{M} y un $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulo \mathcal{N} está definida una sucesión espectral de cambio de coeficientes

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^q(\text{Tor}_p^{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})), \mathcal{N}) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}^{p+q}(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

véase [McC85] 10.2. Esta sucesión junto con (2.2.15) y el hecho de que $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ tiene dimensión proyectiva 1 como $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo da lugar al siguiente resultado.

Proposición 7.9.10. *Para todo $\mathbb{Z}(\mathfrak{F})$ -módulo f. p. \mathcal{M} y $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulo \mathcal{N} tenemos isomorfismos y una sucesión exacta corta, todos naturales, como siguen*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}), \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathcal{N});$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^1(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}), \mathcal{N}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})), \mathcal{N});$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}^2(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^1(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathbb{F}_2(\mathfrak{F})), \mathcal{N});$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^m(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}), \mathcal{N}) = 0, (m \geq 2).$$

Combinando (7.9.9) con (7.9.10) obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.9.11. *Todo $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulo f. p. \mathcal{M} tiene dimensión proyectiva ≤ 1 . Es más, si \mathcal{N} es otro $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulo existe una sucesión exacta corta y un isomorfismo, ambos naturales, como siguen*

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F})}^2(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

7.10 Funtores cuadráticos y $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulos finitamente presentados

En esta última sección calculamos los valores que toman los funtores cuadráticos $\otimes_{\mathbf{n}}^2$, $\hat{\otimes}_{\mathbf{n}}^2$, $\wedge_{\mathbf{n}}^2$ y las transformaciones naturales entre ellos definidas en (5.2.8) y (5.2.11), véase (5.2.15) (3), sobre algunos $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulos f. p. elementales en (7.8.5) ($n \in \mathbb{N}$).

Primero los calculamos sobre los $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulos provenientes de n -subespacios de dimensión finita a través del funtor \mathbb{M} en (7.7.A). Los funtores \otimes^2 , $\hat{\otimes}^2$ y \wedge^2 en la categoría de grupos abelianos definidos en (5.1.2) se restringen a la categoría de \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales, es más, preservan espacios vectoriales de dimensión finita. En general todo endofunctor de la categoría de espacios vectoriales (de dimensión finita) se extiende de la manera obvia a la categoría de n -subespacios (de dimensión finita). Lo mismo ocurre con las transformaciones naturales. De esta forma el diagrama (5.1.A) da lugar a un diagrama conmutativo de sucesiones exactas naturales en el n -subespacio

\underline{V} ,

$$\begin{array}{ccc} & \otimes^2 \underline{V} & \\ & \tau W \downarrow & \\ & \otimes^2 \underline{V} & \xrightarrow{q} \wedge^2 \underline{V} \\ & \bar{\sigma} \downarrow & \parallel \\ \underline{V} \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 \underline{V} & \xrightarrow{\bar{q}} & \wedge^2 \underline{V} \end{array}$$

En la siguiente proposición demostramos que este diagrama es compatible con (5.2.A) a través del functor \mathbb{M} .

Proposición 7.10.1. *Existe un isomorfismo de diagramas conmutativos natural en el n -subespacio de dimensión finita \underline{V} sobre \mathbb{F}_2 ($n \in \mathbb{N}$)*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} \otimes^2 \underline{V} & & \otimes_n^2 \mathbb{M}\underline{V} \\ \mathbb{M}(\tau W) \downarrow & & \tau_n W_n \downarrow \\ \mathbb{M} \otimes^2 \underline{V} & \xrightarrow{\mathbb{M}q} & \mathbb{M} \wedge^2 \underline{V} & = & \otimes_n^2 \mathbb{M}\underline{V} & \xrightarrow{q_n} & \wedge_n^2 \mathbb{M}\underline{V} \\ \mathbb{M}\bar{\sigma} \downarrow & & \parallel & & \bar{\sigma}_n \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{M}\underline{V} \hookrightarrow \mathbb{M}\hat{\otimes}^2 \underline{V} & \xrightarrow{\mathbb{M}\bar{q}} & \mathbb{M} \wedge^2 \underline{V} & & \mathbb{M}\underline{V} \xrightarrow{\bar{\tau}_n} & \hat{\otimes}_n^2 \mathbb{M}\underline{V} & \xrightarrow{\bar{q}_n} & \wedge_n^2 \mathbb{M}\underline{V} \end{array}$$

Demostración. En la demostración de (7.7.1) construimos una presentación finita $\rho: \mathbb{F}_2\langle D \rangle_\delta \rightarrow \mathbb{F}_2\langle C \rangle_\gamma$ de $\mathbb{M}\underline{V}$ como $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_n)$ -módulo. La proyección al conúcleo $p: \mathbb{F}_2\langle C \rangle_\gamma \rightarrow \mathbb{M}\underline{V}$ viene dada por un homomorfismo de \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales $p_0: \mathbb{F}_2\langle C \rangle \rightarrow V_0$ también dado en dicha prueba.

Usando la exactitud a derecha del el functor \wedge_n^2 en el sentido de (5.2.5) así como (5.1.4), (5.2.2), (5.2.4), (5.2.9) y (5.2.14); obtenemos que $\wedge_n^2 \mathbb{M}\underline{V}$ es el conúcleo del homomorfismo controlado

$$\zeta = (\wedge^2 \rho, (\wedge^2(\rho, 1))i_{12}): \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 D \rangle_{\wedge^2 \delta} \oplus \mathbb{F}_2\langle D \times C \rangle_{\delta \otimes \gamma} \longrightarrow \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 C \rangle_{\wedge^2 \gamma}.$$

Consideremos el homomorfismo de \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales $\wedge^2 p_0: \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 C \rangle = \wedge^2 \mathbb{F}_2\langle C \rangle \rightarrow \wedge^2 V_0$ y el morfismo de $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_n)$ -módulos $\tilde{p}: \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 C \rangle_{\wedge^2 \gamma} \rightarrow \mathbb{M} \wedge^2 \underline{V}$ que envía un homomorfismo controlado $\psi: \mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta \rightarrow \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 C \rangle_{\wedge^2 \gamma}$ que parte de un $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_n)$ -módulo libre f. g. $\mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta$ al morfismo $\mathbb{F}_2\langle B \rangle_\beta \rightarrow \mathbb{M} \wedge^2 V_0$ dado por la composición $(\wedge^2 p_0)\psi$. Es sencillo comprobar que \tilde{p} es también el conúcleo de ζ , de donde obtenemos el isomorfismo natural

$$\wedge_n^2 \mathbb{M}\underline{V} = \mathbb{M} \wedge^2 \underline{V}.$$

El resto de los isomorfismos naturales se construyen de manera análoga, y la compatibilidad de las transformaciones naturales resulta ser inmediata. \square

En el siguiente resultado calculamos los valores de $\otimes_{\mathbf{1}}^2$, $\hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2$ y $\wedge_{\mathbf{1}}^2$ sobre los $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F})$ -módulos en la imagen de la inclusión llena y exacta $\mathbf{i}: \mathbf{mod}(\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbb{F}_2(\mathbf{1}))$ definida en la Sección 7.2.

Proposición 7.10.2. *Existe un isomorfismo de diagramas conmutativos natural en el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial V de dimensión $\leq \aleph_0$*

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{i} \otimes^2 V & & \\
 \mathbf{i}(\tau W) \downarrow & & \\
 \mathbf{i} \otimes^2 V & \xrightarrow{\mathbf{i}q} & \mathbf{i} \wedge^2 V \\
 \mathbf{i}\bar{\sigma} \downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{i}V \xrightarrow{\mathbf{i}\bar{\tau}} \mathbf{i}\hat{\otimes}^2 V & \xrightarrow{\mathbf{i}\bar{q}} & \mathbf{i} \wedge^2 V
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 \otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V & & \\
 \tau_1 W_1 \downarrow & & \\
 \otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V & \xrightarrow{q_1} & \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V \\
 \bar{\sigma}_1 \downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{i}V \xrightarrow{\bar{\tau}_1} \hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V & \xrightarrow{\bar{q}_1} & \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V
 \end{array}
 \end{array}$$

Demostración. Si V es de dimensión finita observando las definiciones de los funtores \mathbf{i} y \mathbf{M} en la Sección 7.2 y (7.7.A) se comprueba que $\mathbf{i}V = \mathbf{M}(V \rightarrow V)$ con lo cual este caso se sigue de la proposición anterior. Si $\dim V = \aleph_0$, pongamos $V = \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$, en la demostración de (7.2.3) construimos una sucesión exacta

$$\mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle_{\delta} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle_{\delta} \xrightarrow{p} \mathbf{i}\mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$$

donde $\varphi = (1 - B)$ y p viene dado por un homomorfismo $p_0: \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$. Los funtores cuadráticos del enunciado son exactos a derecha en el sentido de (5.2.5) así que por ejemplo para el caso de $\wedge_{\mathbf{1}}^2$ tenemos que $\wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}\mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ es el conúcleo de

$$\zeta = (\wedge^2 \varphi, (\wedge^2(\varphi, 1))i_{12}): \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 \mathbb{N}_0 \rangle_{\wedge^2 \delta} \oplus \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rangle_{\delta \otimes \delta} \rightarrow \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 \mathbb{N}_0 \rangle_{\wedge^2 \delta},$$

véanse (5.1.4), (5.2.2), (5.2.4), (5.2.9) y (5.2.14). Consideremos el morfismo de \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales $\wedge^2 p_0: \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 \mathbb{N}_0 \rangle = \wedge^2 \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle \rightarrow \wedge^2 \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ y el morfismo de $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_1)$ -módulos $\tilde{p}: \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 \mathbb{N}_0 \rangle_{\wedge^2 \delta} \rightarrow \mathbf{i} \wedge^2 \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ que envía un homomorfismo controlado $\psi: \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} \rightarrow \mathbb{F}_2\langle \wedge^2 \mathbb{N}_0 \rangle_{\wedge^2 \delta}$, que parte de un $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_1)$ -módulo libre f. g. $\mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha}$, al morfismo $\mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} \rightarrow \mathbf{i} \wedge^2 \mathbb{F}_2\langle \mathbb{N}_0 \rangle$ dado por la composición $(\wedge^2 p_0)\psi$. Es sencillo comprobar que \tilde{p} también es el conúcleo de ζ , de donde se obtiene el isomorfismo deseado

$$\wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathbf{i}V = \mathbf{i} \wedge^2 V.$$

El resto de los isomorfismos se construye de manera análoga. Obsérvese que estos argumentos son idénticos a los utilizados en la demostración de (7.10.1). \square

Ahora pasamos a calcular los valores de $\otimes_{\mathbf{1}}^2$, $\hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2$ y $\wedge_{\mathbf{1}}^2$ sobre algunos $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulos f. p. elementales en (7.5.1).

Proposición 7.10.3. *Tenemos las siguientes identidades inducidas por los morfismos naturales del diagrama (5.2.A)*

$$(1). \mathcal{A} = \hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{A} = \otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{A}, \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{A} = 0;$$

$$(2). \mathcal{B} = \hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B} = \otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B}, \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B} = 0;$$

$$(3). \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{C} = 0.$$

Las siguientes identidades también son ciertas aunque no vienen dadas por los morfismos de (5.2.A)

$$(4). \mathcal{B}_{\infty} = \hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B}_{\infty} = \otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B}_{\infty} = \wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{B}_{\infty}.$$

Demostración. (1) es consecuencia de (7.10.1) y de la igualdad $\mathcal{A} = \mathbb{M}(0 \rightarrow \mathbb{F}_2)$ ya observada en la demostración de (7.9.6); (2) se sigue de (7.10.2) y de la igualdad $\mathcal{B} = i\mathbb{F}_2$, véase (7.5.11); (3) se ve fácilmente usando la sucesión exacta corta (7.5.10) (1) y la exactitud a derecha de $\wedge_{\mathbf{1}}^2$. Por último dado un \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de dimensión infinita numerable V los espacios $\hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 V$, $\otimes_{\mathbf{1}}^2 V$ y $\wedge^2 V$ son también de dimensión infinita numerable, así que (4) se sigue de (7.5.11) y (7.10.2). \square

No nos hará falta calcular explícitamente los valores que toman sobre \mathcal{C}_{∞} los funtores $\otimes_{\mathbf{1}}^2$, $\hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2$ y $\wedge_{\mathbf{1}}^2$, sin embargo sí haremos uso de la información que nos aporta el siguiente resultado.

Proposición 7.10.4. *Para todo $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulo f. p. \mathcal{M} y $d \in \mathbb{N}_0$ se tiene que el funtor $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{1})}^1(\mathcal{M}, -)$ aplicado a $\otimes_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{C}_d$, $\hat{\otimes}_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{C}_d$ y $\wedge_{\mathbf{1}}^2 \mathcal{C}_d$ da como resultado el grupo trivial.*

Esta proposición se sigue de la exactitud a derecha de los funtores que aparecen en su enunciado, así como de (7.5.10), (7.5.12) y (7.10.3); ya que todo $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulo f. p. tiene dimensión proyectiva ≤ 1 , véase (7.9.11).

Una de las principales motivaciones que nos movieron a la hora de estudiar la teoría de representaciones de las álgebras $k(\mathfrak{F}(T))$ fue la obtención del próximo resultado y de su corolario, que son unas de las piezas clave para alcanzar el teorema de clasificación de tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión ≤ 4 con a lo más tres finales en el Capítulo 9.

Teorema 7.10.5. *Dado un $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulo f. p. \mathcal{M} , si $n \leq 3$ entonces el morfismo natural $\bar{\tau}_{\mathbf{n}}: \mathcal{M} \rightarrow \hat{\otimes}_{\mathbf{n}}^2 \mathcal{M}$ es un monomorfismo y además admite una retracción.*

Demostración. Basta comprobarlo para \mathcal{M} un $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulo f. p. elemental. Comencemos probándolo para $n = 1$. Si $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ o \mathcal{B} entonces se sigue de (7.10.3). Si $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{\infty}$ es consecuencia de (7.10.2), ya que $\mathcal{B}_{\infty} = iV$ si V es un \mathbb{F}_2 -espacio vectorial con $\dim V = \aleph_0$, véase (7.5.11).

Dado un grupo abeliano T_1 -controlado $\mathbb{Z}\langle A \rangle_{\alpha}$ al ser $-\otimes_{\mathbb{Z}_2}$ en (5.2.9) un funtor exacto a derecha, en virtud de (5.2.12) y (5.2.14) el siguiente diagrama es un push-out

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_{T_1} \mathbb{Z}\langle A \rangle_{\alpha}) \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_{T_1} \otimes \mathbb{Z}_2} & \otimes_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} \\ \sigma_{T_1} \otimes \mathbb{Z}_2 \downarrow & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma}_{T_1} \\ \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} & \xrightarrow{\bar{\tau}_{T_1}} & \hat{\otimes}_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} \end{array}$$

Fijado un orden total \preceq en el conjunto A , una base del \mathbb{F}_2 -espacio vectorial $\hat{\otimes}_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle$ viene dada por el conjunto

$$\hat{\otimes}^2 A = \{a \hat{\otimes} b; a \preceq b \in A\},$$

y si definimos $\hat{\otimes}^2 \alpha: \hat{\otimes}^2 A \rightarrow T_1$ como

$$(\hat{\otimes}^2 \alpha)(a \otimes b) = (\alpha \otimes \alpha)(a, b),$$

donde $\alpha \otimes \alpha$ está en (5.2.2), entonces es sencillo comprobar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_{T_1} \mathbb{Z}\langle A \rangle_{\alpha}) \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_{T_1} \otimes \mathbb{Z}_2} & \otimes_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} \\ \sigma_{T_1} \otimes \mathbb{Z}_2 \downarrow & \text{push} & \downarrow \bar{\sigma} \\ \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \mathbb{F}_2\langle \hat{\otimes}^2 A \rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha} \end{array}$$

es también un push-out, luego $\hat{\otimes}_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha} = \mathbb{F}_2\langle \hat{\otimes}^2 A \rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha}$. Aquí $\bar{\sigma}$ y $\bar{\tau}$ son los homomorfismos controlados definidos por los homomorfismos de grupos abelianos considerados en (5.1.2). Con esto vemos que el funtor $\hat{\otimes}_{T_1}^2$ no sólo se restringe a la categoría $\mathbf{mod}(\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}(T_1))$ como se comentó (5.2.15) (1), sino también a su subcategoría $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_2}^g(T_1)$ a través de la inclusión en (2.2.2) (6); y también vemos que el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial subyacente a $\hat{\otimes}_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_{\alpha}$ coincide con $\hat{\otimes}_{T_1}^2 \mathbb{F}_2\langle A \rangle$ de manera natural. Ahora es fácil comprobar que $\bar{\tau}_{T_1}$ admite una retracción en este caso, dada por ejemplo por el homomorfismo

controlado $\mathbb{F}_2\langle\hat{\otimes}^2 A\rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha} \rightarrow \mathbb{F}_2\langle A\rangle_\alpha$ definido sobre los elementos de la base por $a\hat{\otimes}a \mapsto a$ y $a\hat{\otimes}b \mapsto 0$ si $a \neq b$. Esto demuestra el caso $\mathcal{M} = \mathcal{R}$.

Para probar el caso $\mathcal{M} = \mathcal{C}_\infty$ consideramos el \mathbb{F}_2 -módulo libre T_1 -controlado $\mathbb{F}_2\langle A\rangle_\alpha$ con $A = \{a_{mn}; 0 < n \leq m\}$ y $\alpha(a_{mn}) = m$, y un endomorfismo suyo φ definido como

$$\varphi(a_{mn}) = \begin{cases} a_{mm}, & \text{si } n = m; \\ a_{mn} + a_{m-1,n}, & \text{si } n < m. \end{cases}$$

En virtud de (7.5.21) $\mathcal{C}_\infty = \text{Coker } \varphi$, para ello recordamos que ahora estamos trabajando sobre los enteros módulo 2. Consideramos el orden total en A dado por

$$a_{mn} \preceq a_{pq} \Leftrightarrow \begin{cases} m < p, \\ \text{o bien} \\ m = p \text{ y } n \leq q. \end{cases}$$

Al ser el cuadrado tensorial reducido T_1 -controlado un functor exacto a derecha en el sentido de (5.2.5) tenemos que $\hat{\otimes}_1^2 \mathcal{C}_\infty$ es el conúcleo del homomorfismo controlado

$$\zeta: \mathbb{F}_2\langle\hat{\otimes}^2 A\rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha} \oplus \mathbb{F}_2\langle A \times A\rangle_{\alpha \otimes \alpha} \longrightarrow \mathbb{F}_2\langle\hat{\otimes}^2 A\rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha}$$

definido sobre los elementos básicos como

$$\zeta(a_{mn}\hat{\otimes}a_{pq}) = \begin{cases} a_{mm}\hat{\otimes}a_{pp}, & \text{si } n = m \text{ y } q = p; \\ a_{mm}\hat{\otimes}a_{pq} + a_{mm}\hat{\otimes}a_{p-1,q}, & \text{si } n = m \text{ y } m, q < p; \\ a_{mn}\hat{\otimes}a_{pp} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{pp}, & \text{si } n < m \text{ y } q = p; \\ a_{mn}\hat{\otimes}a_{pq} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{pq} \\ + a_{mn}\hat{\otimes}a_{p-1,q} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{p-1,q}, & \text{si } n < m \text{ y } m, q < p; \\ a_{mn}\hat{\otimes}a_{mq} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{mq} \\ + a_{m-1,q}\hat{\otimes}a_{mn} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{m-1,q}, & \text{si } p = m > q \geq n. \end{cases}$$

$$\zeta(a_{mn}, a_{pq}) = \begin{cases} a_{mm}\hat{\otimes}a_{pq}, & \text{si } n = m \text{ y } m < p; \\ a_{mq}\hat{\otimes}a_{mm}, & \text{si } n = m = p; \\ a_{mn}\hat{\otimes}a_{pq} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{pq}, & \text{si } n < m < p, \\ & \text{o bien } p = m > n \\ & \text{y } n \leq q; \\ a_{mq}\hat{\otimes}a_{mn} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{mq}, & \text{si } p = m > n > q; \\ a_{pq}\hat{\otimes}a_{mn} + a_{pq}\hat{\otimes}a_{m-1,n}, & \text{si } n < m \text{ y } p < m - 1, \\ & \text{o bien } p = m - 1 \\ & \text{y } q < n < m; \\ a_{m-1,q}\hat{\otimes}a_{mn} + a_{m-1,n}\hat{\otimes}a_{m-1,q}, & \text{si } n < m, p = m - 1 \\ & \text{y } n \leq q. \end{cases}$$

Es más, ζ encaja en el siguiente diagrama conmutativo de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha & \xrightarrow{i_1 \bar{\tau}_{T_1}} & \mathbb{F}_2\langle \hat{\otimes}^2 A \rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha} \oplus \mathbb{F}_2\langle A \times A \rangle_{\alpha \otimes \alpha} \\
 \downarrow \varphi & \swarrow \bar{s}_1 & \downarrow \zeta \\
 \mathbb{F}_2\langle A \rangle_\alpha & \xrightarrow{\bar{\tau}_{T_1}} & \mathbb{F}_2\langle \hat{\otimes}^2 A \rangle_{\hat{\otimes}^2 \alpha} \\
 & \swarrow \bar{s}_0 &
 \end{array}$$

de forma que, si encontramos retracciones s_1 y s_0 de las flechas horizontales sólidas de este diagrama con $\varphi s_1 = s_0 \zeta$, obtendremos tomando conúcleo la deseada retracción de $\bar{\tau}_I: \mathcal{C}_\infty \rightarrow \hat{\otimes}_I^2 \mathcal{C}_\infty$. Recordemos que $\bar{\tau}_{T_1}(a_{mn}) = a_{mn} \hat{\otimes} a_{mn}$. Con todo esto no es difícil comprobar que podemos tomar s_1 y s_0 de la siguiente manera

$$s_1(a_{mn} \hat{\otimes} a_{pq}) = \begin{cases} a_{mn}, & \text{si } p = m \geq n = q; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$$s_0(a_{mn} \hat{\otimes} a_{pq}) = s_1(a_{mn}, a_{pq}) = \begin{cases} a_{mn}, & \text{si } p \geq m \geq n = q; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Para $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ basta observar que, en virtud de (7.5.1), \mathcal{C} es un retracto de \mathcal{C}_∞ , por tanto $\bar{\tau}_I: \mathcal{C} \rightarrow \hat{\otimes}_I^2 \mathcal{C}$ es un monomorfismo por serlo $\bar{\tau}_I: \mathcal{C}_\infty \rightarrow \hat{\otimes}_I^2 \mathcal{C}_\infty$, y también un epimorfismo por (7.10.3) (3) y la exactitud de la fila inferior de (5.2.A), por tanto $\bar{\tau}_I: \mathcal{C} \simeq \hat{\otimes}_I^2 \mathcal{C}$ es un isomorfismo. Así el resultado queda definitivamente probado para $n = 1$.

En virtud de (7.4.5), (5.2.15) (2) y (7.8.5), para $n = 2$ o 3 sólo queda probar el enunciado para los $\mathbb{F}_2(\mathbf{n})$ -módulos provenientes a través del funtor \mathbb{M} de n -subespacios indescomponibles rígidos, por tanto podemos usar (7.10.1). Para todo 2-subespacio \underline{V} indescomponible rígido de dimensión finita, véase (7.6.7), tenemos que $\wedge^2 \underline{V} = 0$ por tanto $\bar{\tau}: \underline{V} \simeq \hat{\otimes}^2 \underline{V}$ es un isomorfismo. Lo mismo ocurre para todos los 3-subespacios indescomponibles rígidos de dimensión finita exceptuando $\underline{V}^{(3,5)}$, véase de nuevo (7.6.7), pero en este caso

$$\wedge^2 \underline{V}^{(3,5)} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{F}_2 & \leftarrow & 0 \end{pmatrix}$$

es un 3-subespacio proyectivo, por tanto el monomorfismo $\bar{\tau}: \underline{V}^{(3,5)} \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 \underline{V}^{(3,5)}$ admite retracción, y la proposición queda definitivamente probada. \square

Corolario 7.10.6. *Dado un $\mathbb{Z}(\mathbf{n})$ -módulo f. p. \mathcal{M} , si $n \leq 3$ entonces el morfismo natural $\bar{\tau}_n: \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \hat{\otimes}_n^2 \mathcal{M}$ es un monomorfismo y además admite una retracción.*

Demostración. En realidad este enunciado es equivalente al del teorema. En efecto, por un lado está claro que el teorema es un caso particular de lo que aquí pretendemos probar. Por otro lado la naturalidad de $\bar{\tau}_T$ asegura la conmutatividad del siguiente diagrama para todo $\mathbb{Z}(\mathbf{n})$ -módulo f. p. \mathcal{M}

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_{\mathbf{n}}^2 \mathcal{M} \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}_T} & \hat{\otimes}_{\mathbf{n}}^2 (\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Para $n \leq 3$ el teorema asegura que la flecha horizontal inferior admite una retracción. Si componemos una de dichas retracciones con la flecha vertical derecha obtenemos una retracción para la horizontal superior. Así queda probado el corolario. \square

Observación 7.10.7. Como ya se ha comentado anteriormente el Teorema 7.10.5 y su corolario son herramientas claves que usamos para obtener los teoremas de clasificación de tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión 4 con a lo más 3 finales en el Capítulo 9, así que si fuéramos capaces de extender el teorema a valores de n mayores que 3 también podríamos dar los teoremas de clasificación para T -complejos con un mayor número n de finales. A la luz de (7.8.5) y de la técnica usada en la demostración del Teorema 7.10.5 todo depende de lo que ocurra en la categoría de n -subespacios, es decir, de si el monomorfismo $\bar{\tau}: \underline{V} \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 \underline{V}$ admite retracción para todo n -subespacio \underline{V} indescomponible rígido sobre \mathbb{F}_2 . En virtud de (7.6.5) y (7.6.6) sólo podemos tener la seguridad de poder dar una respuesta a esta duda, ya sea positiva o negativa, para $n = 4$, a parte de los casos ya estudiados. Sin embargo estudiar el caso $n = 4$ requeriría un esfuerzo ímprobo, véase lo dicho en (7.6.8). Además la riqueza que nos ofrecen los resultados de clasificación del Capítulo 9 para T -complejos con n finales en los casos $n = 1, 2$ y 3 hace que explorar el caso $n = 4$ pierda para nosotros parte de su interés en comparación con el esfuerzo que requerirían los cálculos necesarios para ver si el Teorema 7.10.5 es cierto o no para $n = 4$. Asimismo no hay esperanza de que (7.10.5) sea cierto para todo n , ya en el siguiente ejemplo mostraremos un 7-subespacio \underline{V} para el cual el monomorfismo $\bar{\tau}: \underline{V} \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 \underline{V}$ no admite retracción. Este ejemplo junto con (5.2.15) (2) prueban que para todo árbol T con 7 o más finales existe un $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. \mathcal{M} tal que el morfismo natural $\bar{\tau}_{\mathfrak{F}(T)}: \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \hat{\otimes}_{\mathfrak{F}(T)}^2 \mathcal{M}$ no admite retracción.

Ejemplo 7.10.8. Aquí damos un ejemplo concreto de un 7-subespacio \underline{V} tal que el monomorfismo natural $\bar{\tau}: \underline{V} \hookrightarrow \hat{\otimes}^2 \underline{V}$ no admite retracción. Para ello

sea $V_0 = \mathbb{F}_2\langle x, y, z \rangle$ un \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de dimensión 3 y V_1, \dots, V_7 sus 7 subespacios de dimensión 2, esto es

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{F}_2\langle x, y \rangle, \\ V_2 &= \mathbb{F}_2\langle x, z \rangle, \\ V_3 &= \mathbb{F}_2\langle y, z \rangle, \\ V_4 &= \mathbb{F}_2\langle x + y, z \rangle, \\ V_5 &= \mathbb{F}_2\langle x + z, y \rangle, \\ V_6 &= \mathbb{F}_2\langle x, y + z \rangle, \\ V_7 &= \mathbb{F}_2\langle x + y, x + z \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\hat{\otimes}^2 \underline{V}$ viene dado por

$$\hat{\otimes}^2 V_0 = \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x, x\hat{\otimes}y, x\hat{\otimes}z, y\hat{\otimes}y, y\hat{\otimes}z, z\hat{\otimes}z \rangle$$

y sus siguientes 7 subespacios

$$\begin{aligned} \hat{\otimes}^2 V_1 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x, x\hat{\otimes}y, y\hat{\otimes}y \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_2 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x, x\hat{\otimes}z, z\hat{\otimes}z \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_3 &= \mathbb{F}_2\langle y\hat{\otimes}y, y\hat{\otimes}z, z\hat{\otimes}z \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_4 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x + y\hat{\otimes}y, x\hat{\otimes}z + y\hat{\otimes}z, z\hat{\otimes}z \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_5 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x + z\hat{\otimes}z, x\hat{\otimes}y + y\hat{\otimes}z, y\hat{\otimes}y \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_6 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x, x\hat{\otimes}y + x\hat{\otimes}z, y\hat{\otimes}y + z\hat{\otimes}z \rangle, \\ \hat{\otimes}^2 V_7 &= \mathbb{F}_2\langle x\hat{\otimes}x + x\hat{\otimes}y + x\hat{\otimes}z + y\hat{\otimes}z, x\hat{\otimes}x + y\hat{\otimes}y, x\hat{\otimes}x + z\hat{\otimes}z \rangle. \end{aligned}$$

Si existiera una retracción $s: \hat{\otimes}^2 \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ de $\bar{\tau}$ tendría que satisfacer

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & s(x\hat{\otimes}x) = x, \\ & s(y\hat{\otimes}y) = y, \\ & s(z\hat{\otimes}z) = z, \\ \text{(b)} \quad & s(x\hat{\otimes}y) \in V_1, \\ \text{(c)} \quad & s(x\hat{\otimes}z) \in V_2, \\ \text{(d)} \quad & s(y\hat{\otimes}z) \in V_3, \\ \text{(e)} \quad & s(x\hat{\otimes}z + y\hat{\otimes}z) \in V_4, \\ \text{(f)} \quad & s(x\hat{\otimes}y + y\hat{\otimes}z) \in V_5, \\ \text{(g)} \quad & s(x\hat{\otimes}y + x\hat{\otimes}z) \in V_6, \\ \text{(h)} \quad & s(x\hat{\otimes}x + x\hat{\otimes}y + x\hat{\otimes}z + y\hat{\otimes}z) \in V_7. \end{aligned}$$

Usando (b), (c) y (d) vemos que existirían $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2$ tales que

$$\begin{aligned} s(x \hat{\otimes} y) &= ax + by, \\ s(x \hat{\otimes} z) &= cx + dz, \\ s(y \hat{\otimes} z) &= ey + fz. \end{aligned}$$

Combinando esto con (e), (f) y (g) obtenemos que habrían de verificarse las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} e &= c, \\ f &= a, \\ d &= b. \end{aligned}$$

Por último (h) junto con (a) y las igualdades anteriores implicarían que

$$(1 + a + c)x + (b + c)y + (a + b)z \in V_7 = \{0, x + y, x + z, y + z\}.$$

Esto es, alguno de los siguientes cuatro sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (a, b, c) tendría que tener solución en \mathbb{F}_2 ,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 1 + a + c = 0, \\ b + c = 0, \\ a + b = 0, \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + a + c = 1, \\ b + c = 1, \\ a + b = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + a + c = 1, \\ b + c = 0, \\ a + b = 1, \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + a + c = 0, \\ b + c = 1, \\ a + b = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Es sencillo ver que todos estos sistemas son incompatibles, así que llegamos a una contradicción que se deriva de haber supuesto que existe una retracción de $\bar{\tau}$.

Capítulo 8

Cup-producto de complejos de cadenas y suspensión de complejos cruzados

El objetivo primordial de este capítulo es desarrollar herramientas algebraicas que nos permitan calcular el invariante cup-producto de un complejo de cadenas \mathcal{C}_* acotado $(n - 1)$ -reducido en $\mathbf{ab}(T)$ ($n \geq 2$)

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*)$$

prescindiendo, en la medida de lo posible, del origen topológico-homotópico de su definición (6.4.3). Este objetivo parece razonable ya que los valores que toma este invariante se corresponden con la clase considerada en (6.4.4)

$$\bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

en la cohomología de una categoría de corte algebraico, y no topológico.

La motivación inicial que tuvimos para abordar el objetivo que planteamos en este capítulo es la relación existente entre la clase $\bar{\cup}$ y el problema de clasificación de tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión ≤ 4 . Esta relación será precisada en el Capítulo 9 y su papel en la consecución de tal clasificación para espacios con a lo más 3 finales será crucial.

Otra razón que justificaría por sí misma el interés del cálculo del invariante cup-producto de complejos de cadenas estaría en la posibilidad de responder a la siguiente pregunta:

¿Existe para todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} un espacio de Moore en homotopía propia de tipo $(\mathcal{M}, 2)$ que sea un co-H-espacio?

La conexión entre esta pregunta y el cup-producto de complejos de cadenas fue observada en (6.5.4) haciendo uso de la Proposición 6.5.3. A priori no hay evidencia de que la respuesta sea “sí” como en homotopía ordinaria, ya que la construcción clásica se apoya en el hecho de que todo subgrupo de un grupo abeliano libre es libre a su vez, y el equivalente de este enunciado en álgebra controlada se sabe que no es cierto. Un posible contraejemplo marcaría una importante diferencia cualitativa entre la teoría de homotopía ordinaria y la propia, y alcanzaríamos así un entendimiento más profundo de la homotopía propia en el rango metaestable.

El objetivo final del presente capítulo será alcanzado en la última sección. Allí también daremos ejemplos explícitos de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos \mathcal{M} para árboles T con 3 o más finales que proporcionan contraejemplos a la pregunta sobre los espacios de Moore, comprobando así que la teoría de homotopía propia metaestable de estos espacios se presenta mucho más rica que la ordinaria. Para árboles con 1 o 2 finales no tenemos respuesta para dicha pregunta. Es más, como comentamos en el último párrafo de la Sección 8.6, hay problemas de complejidad, relacionados con la teoría de representaciones desarrollada en el Capítulo 7, que hacen que en estos dos casos no exista un método seguro de encontrar una respuesta.

La conjetura de la validez del procedimiento de cálculo del cup-producto de complejos de cadenas que damos en la Sección 8.6 la establecimos hace algún tiempo, si bien no hemos podido probarla hasta que hemos atacado el problema haciendo uso de potentes herramientas basadas en el álgebra homotópica de los módulos cruzados y otras estructuras relacionadas.

Los módulos cruzados fueron introducidos por J. H. C. Whitehead en el artículo [Whi49a] para dar un invariante algebraico de un CW -complejo más fuerte que el complejo de cadenas celulares con coeficientes locales. Al mismo tiempo fueron usados por MacLane ([Mac49]) para describir la tercera cohomología de un grupo, es más, en [MW50] Whitehead y MacLane probaron que los módulos cruzados son modelos algebraicos del 2-tipo de un CW -complejo. Aunque están constituidos por grupos no abelianos, los módulos cruzados tienen grado de nilpotencia 1 en el sentido de Peiffer, véanse [Pei49] y [BC90], por tanto en cierto sentido son objetos “abelianos”. Sus análogos no abelianos en el sentido de Peiffer se denominan módulos precruzados.

En [Bau91] Baues introdujo los módulos cuadráticos para describir el 3-tipo de un CW -complejo. Éstos están también definidos por medio de grupos no abelianos, pero su grado de nilpotencia en el sentido de Peiffer es 2. Previamente Conduché había definido objetos similares llamados módulos 2-cruzados, mostrando asimismo su relación con la cuarta cohomología

de un grupo ([Con84]). Los módulos 2-cruzados han sido extensivamente estudiados y generalizados a otros contextos, véanse por ejemplo [MP98] y [Arv97]. Sin embargo, a pesar de su nombre, son más bien generalizaciones de los módulos precruzados que de los cruzados, ya que no satisfacen ninguna condición de nilpotencia en el sentido de Peiffer.

Los sistemas de homotopía, en el sentido de Whitehead [Whi49a], se conocen hoy en día bajo el nombre de complejos cruzados, y son complejos de cadenas de grupos con un módulo cruzados en dimensiones bajas y módulos sobre un grupo en las altas. Baues define los complejos cuadráticos de forma similar usando módulos cuadráticos, y demuestra que las categorías de módulos cruzados y cuadráticos son I -categorías cuando nos restringimos a objetos totalmente libres ([Bau91]). Anteriormente ya se conocía una estructura de categoría de modelos de Quillen para los complejos cruzados ([BG89]).

Cuando se trabaja con CW -complejos simplemente conexos la noción de nilpotencia de Peiffer coincide con la noción de nilpotencia usual en un grupo. Por ejemplo, el 2-tipo de uno de esos espacios viene dado por un grupo abeliano, concretamente el segundo grupo de homología. Los módulos cuadráticos reducidos son un tipo especial de módulos cuadráticos que describen los 3-tipos de CW -complejos simplemente conexos (véase [Bau91]), y están contruidos por medio de grupos de grado de nilpotencia 2.

En la Sección 8.2 definimos un funtor “suspensión” de módulos cruzados a módulos cuadráticos reducidos que, topológicamente hablando, hace el papel del funtor que envía un 2-tipo al 3-tipo de su suspensión. Este funtor es extendido a uno de complejos cruzados a complejos cuadráticos en la Sección 8.3. La noción de suspensión existe en las categorías de complejos cruzados y cuadráticos totalmente libres, puesto que son I -categorías. Sin embargo esta suspensión categórica aplicada a un complejo cruzado da como resultado un simple complejo de cadenas de grupos abelianos. No codifica el 3-tipo de la suspensión, sólo el 2-tipo. El funtor que construimos evita este problema. Más aún, probaremos que el funtor de suspensión en la categoría de complejos cuadráticos es, salvo equivalencia natural, la composición del funtor canónico de complejos cuadráticos a cruzados, que envía un 3-tipo a su 2-tipo ([Bau91]), y nuestro funtor “suspensión”.

Las suspensiones en la categoría de complejos cuadráticos totalmente libres vienen equipadas con una co- H -estructura canónica que estudiamos en la Sección 8.4. Observamos allí que no es sólo una co- H -estructura, sino una estructura estricta de cogrupo, y la computamos explícitamente en términos de su base. Estos cálculos se aplicarán en la Sección 8.5 a calcular para un CW -complejo reducido y normalizado X un cierto homomorfismo natural

$H_2X \rightarrow \wedge^2 H_1X$ inducido por el invariante de James-Hopf considerado en la introducción de la Sección 6.1. Este resultado, así como las técnicas desarrolladas para su demostración, serán las herramientas clave que nos permitan probar en la Sección 8.6 el principal teorema de este capítulo. Además de ello los resultados de las Secciones 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5 poseen diversas aplicaciones, de interés por sí mismas, tanto en homotopía como en álgebra ordinarias, véase [Mur03] para más detalle.

8.1 Notación y breve repaso de teoría de grupos

En esta corta sección repasaremos diversos aspectos, generalmente bien conocidos, sobre la teoría de grupos, que se utilizarán con frecuencia a lo largo de este capítulo.

En primer lugar fijaremos la siguiente notación para las proyección de un grupo G sobre su abelianización $p: G \rightarrow G^{ab}$ y su nilización $\bar{p}: G \rightarrow G^{nil}$, véase (2.3.2) (4). Recordemos también que $q: \otimes^2 \mathbb{Z}\langle E \rangle \rightarrow \wedge^2 \mathbb{Z}\langle E \rangle$ se definía en (5.1.2) y que hay una extensión central natural (5.3.D)

$$\wedge^2 \mathbb{Z}\langle A \rangle \xrightarrow{s} \langle A \rangle^{nil} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}\langle A \rangle.$$

Por simplicidad nos referiremos a los grupos de grado de nilpotencia 2 como *nil(2)-grupos*. En un *nil(2)-grupo* cualquiera G los conmutadores son centrales y el producto conmutador bilineal, por tanto hay un homomorfismo central natural

$$(8.1.A) \quad w: G^{ab} \otimes G^{ab} \longrightarrow G$$

definido como $w(p(g) \otimes p(g')) = [g, g']$. Más aún, el conjunto de homomorfismos $\text{Hom}(\langle E \rangle^{nil}, G)$ es también un *nil(2)-grupo*, en el cual la suma de dos homomorfismos $\varphi + \psi$ es el único homomorfismo tal que $(\varphi + \psi)(e) = \varphi(e) + \psi(e)$ para todo $e \in E$. De esta forma obtenemos como caso particular la suma ya conocida en los morfismos de la categoría **nil** de *nil(2)-grupos* libres, véase la Sección 2.4. La composición de morfismos en **nil** satisface las siguientes propiedades en relación con la suma, véase [BHP97]:

- (i) $\psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi\varphi_1 + \psi\varphi_2$,
- (ii) el símbolo $(\psi_1 | \psi_2)_\varphi = (\psi_1 + \psi_2)\varphi - \psi_2\varphi - \psi_1\varphi$ es lineal en ψ_1 y ψ_2 , es más, sólo depende de ψ_1^{ab} y ψ_2^{ab} y está dentro del subgrupo conmutador del correspondiente grupo de homomorfismos,
- (iii) $(-\psi)\varphi = -\psi\varphi + (\psi | \psi)_\varphi$.

Usando (ii) y (iii) es fácil comprobar que

$$(iv) \text{ si } \psi_1^{ab} = \psi_2^{ab} \text{ entonces } (\psi_1 - \psi_2)\varphi = \psi_1\varphi - \psi_2\varphi.$$

Dados dos grupos cualesquiera π y G diremos que G es un π -grupo si π actúa (a derecha) sobre G por automorfismos, la acción se escribirá exponencialmente a^α ($a \in G, \alpha \in \pi$). Obsérvese que G es un G -grupo de forma canónica que actúa sobre sí mismo por conjugación $a^b = -b+a+b$ ($a, b \in G$). Si H es un π' -grupo y $v: \pi \rightarrow \pi', \psi: G \rightarrow H$ son homomorfismos, diremos que ψ es v -equivariante si $\psi(a^\alpha) = \psi(a)^{v(\alpha)}$ para cualesquiera $a \in G, \alpha \in \pi$. Cuando $\pi = \pi'$ y $v = 1$ simplemente diremos que ψ es π -equivariante.

Dados dos grupos G y H que actúan el uno sobre el otro, su *producto tensorial no abeliano* $G \otimes H$ es el grupo generado por los símbolos $g \otimes h$ sometidos a las relaciones

$$(g + g') \otimes h = g' \otimes h^{g'} + g' \otimes h, \quad g \otimes (h + h') = g \otimes h' + g^{h'} \otimes h^{h'}$$

para cualesquiera $g, g' \in G$ y $h, h' \in H$. Estas relaciones son ligeramente diferentes de las que aparecen en [BL87] ya que aquí consideramos acciones a derecha. Esta traducción será necesaria siempre que usemos esta construcción y otros resultados relacionados de [BL87]. Si las acciones son ambas triviales entonces $G \otimes H = G^{ab} \otimes H^{ab}$ es el producto tensorial ordinario de grupos abelianos. Es más, es fácil comprobar que este producto tensorial es funtorial con respecto a homomorfismos $\varphi: G \rightarrow G', \psi: H \rightarrow H'$ tales que φ es ψ -equivariante y ψ es φ -equivariante, $\varphi \otimes \psi: G \otimes H \rightarrow G' \otimes H': g \otimes h \mapsto \varphi(g) \otimes \psi(h)$. Más aún, hay un homomorfismo inducido por el producto conmutador

$$w': G \otimes G \longrightarrow G: g \otimes g' \mapsto [g, g'].$$

Observación 8.1.1. Queremos hacer especial énfasis en que, a lo largo de las primeras cinco secciones de este capítulo denotaremos, sin previo aviso,

$$T: A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

a la aplicación de intercambio del producto tensorial $T(a \otimes b) = b \otimes a$, mientras que en la sexta usaremos T para denotar a un árbol, como viene siendo costumbre es esta memoria.

Además siempre denotaremos, como es ya habitual, $X \xrightarrow{i_1} X \vee Y \xleftarrow{i_2} Y$ a las inclusiones de los factores del coproducto $X \vee Y$ de dos objetos X e Y de una categoría cualquiera.

8.2 Un functor “suspensión” de módulos cruzados a cuadráticos

En esta sección construiremos un functor de la categoría de módulos cruzados a la categoría de módulos cuadráticos reducidos que llamaremos “suspensión”. La justificación de este nombre se verá en la siguiente sección. También daremos aquí un breve resumen de los conceptos básicos relacionados con dichos objetos algebraicos, véase [Bau91] para más detalles.

Definición 8.2.1. Un *módulo precruzado* ∂ es un N -grupo M junto con un homomorfismo N -equivariante $\partial: M \rightarrow N$. Un morfismo de módulos precruzados $(\psi, v): \partial \rightarrow \partial'$ es un cuadrado conmutativo de homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\partial} & N \\ \downarrow \psi & & \downarrow v \\ M' & \xrightarrow{\partial'} & N' \end{array}$$

tal que ψ es v -equivariante. El *conmutador de Peiffer* de dos elementos $x, y \in M$ es $[[x, y]] = -x - y + x + y^{\partial x}$, y $P_n\partial \subset M$ es el subgrupo generado por los conmutadores de Peiffer de grado n . Podemos definir el grado de nilpotencia de un módulo precruzado exactamente como en el caso de los grupos pero usando aquí $P_n\partial$ en vez de $\Gamma_n G$, véase [BC90]. Llamaremos *nil(n)-módulos* a los módulos precruzados de grado de nilpotencia $\leq n$, los nil(1)-módulos se denominan habitualmente *módulos cruzados*. El módulo cruzado ∂^{cr} asociado a un módulo precruzado ∂ es el cociente

$$\partial^{cr}: M^{cr} = M/P_2\partial \rightarrow N,$$

y el nil(2)-módulo asociado es

$$\partial^{nil}: M/P_3\partial \rightarrow N.$$

Observación 8.2.2. Obsérvese que un módulo precruzado ∂ con $N = 0$ es exactamente un grupo M , en este caso $P_n\partial = \Gamma_n M$. En general $\Gamma_n \text{Ker } \partial \subset P_n\partial$, por tanto si ∂ es un nil(n)-módulo $\text{Ker } \partial$ es un nil(n)-grupo.

Si $\partial: M \rightarrow N$ es un módulo cruzado y consideramos M actuando en N a través de ∂ y de la conjugación entonces es fácil comprobar que las acciones son compatibles en el sentido de [BL87], y por tanto el siguiente homomorfismo

$$(8.2.A) \quad M \otimes N \xrightarrow{\varpi} M: m \otimes n \mapsto -m + m^n$$

está bien definido y es natural, además satisface

- $\varpi(1 \otimes \partial) = w': M \otimes M \rightarrow M$,
- $\partial\varpi = w'(\partial \otimes 1): M \otimes N \rightarrow N$.

Definición 8.2.3. En [Bau91] un *módulo cuadrático* $(\omega, \delta, \partial)$ se define como un diagrama de N -grupos

$$C \otimes C \xrightarrow{\omega} L \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\partial} N$$

donde ∂ es un nil(2)-módulo, $\phi: M \rightarrow (M^{cr})^{ab} = C$ es la proyección natural (que induce una única acción de N en C tal que ϕ es N -equivariante), $C \otimes C$ tiene la acción diagonal, y las siguientes igualdades son ciertas ($a, b \in L; x, y \in M$)

- (i) $\partial\delta = 0$,
- (ii) $\llbracket x, y \rrbracket = \delta\omega(\phi(x) \otimes \phi(y))$,
- (iii) $a^{\partial x} = a + \omega(1 + T)(\phi\delta(a) \otimes \phi(x))$,
- (iv) $[a, b] = \omega(\phi\delta(a) \otimes \phi\delta(b))$.

Observación 8.2.4. Obsérvese que ω es central y L es un nil(2)-grupo por (iv).

Un morfismo de módulos cuadráticos $(\zeta, \psi, \nu): (\omega, \delta, \partial) \rightarrow (\omega', \delta', \partial')$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes C & \xrightarrow{\omega} & L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N \\ \downarrow \psi_* \otimes \psi_* & & \downarrow \zeta & & \downarrow \psi & & \downarrow \nu \\ C' \otimes C' & \xrightarrow{\omega'} & L' & \xrightarrow{\delta'} & M' & \xrightarrow{\partial'} & N' \end{array}$$

de homomorfismos ν -equivariantes con $\psi_*: C \rightarrow C'$ inducido por ψ .

Nosotros estamos especialmente interesados en los siguientes casos particulares de módulos cuadráticos.

Definición 8.2.5. Los *módulos cuadráticos reducidos* son los módulos cuadráticos con $N = 0$. En este caso M es también un nil(2)-grupo, $C = M^{ab}$ y las condiciones de (8.2.3) se reducen a las siguientes

- (i) $[x, y] = \delta\omega(p(x) \otimes p(y))$,
- (ii) $\omega(1 + T)(p\delta(a) \otimes p(x)) = 0$,
- (iii) $[a, b] = \omega(p\delta(a) \otimes p\delta(b))$.

También haremos uso de la siguiente construcción.

Definición 8.2.6. El *push-out central* P de un diagrama de grupos $H \xleftarrow{g} G \xrightarrow{f} A$ con A abeliano, es un grupo que encaja en un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & \text{c-push} & \downarrow \bar{g} \\ H & \xrightarrow{\bar{f}} & P \end{array}$$

con \bar{g} central, y satisface la siguiente propiedad universal: para cualquier par de homomorfismos $\varphi: H \rightarrow K$, $\psi: A \rightarrow K$ con ψ central y $\varphi g = \psi f$ existe un único homomorfismo $\phi: P \rightarrow K$ con $\varphi = \phi \bar{f}$ y $\psi = \phi \bar{g}$. El grupo P puede ser construido como el cociente de $H \times A$ por el subgrupo normal generado por los elementos $(g(x), -f(x))$, $x \in G$.

Proposición 8.2.7. Existe un funtor “suspensión” $\tilde{\Sigma}$ de los módulos cruzados a los módulos cuadráticos reducidos que envía $\partial: M \rightarrow N$ al módulo cuadrático reducido $\tilde{\Sigma}\partial = (\omega, \delta)$ dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{(\partial^{ab}) \otimes p} & (N^{ab} \otimes N^{ab})/R \\ \varpi \downarrow & \text{c-push} & \downarrow \omega \\ M & \xrightarrow{r'} & M^{\tilde{\Sigma}} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow w \\ \searrow \delta \\ \searrow \partial^{nil} \bar{p} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow N^{nil} \end{array}$$

Aquí R es la imagen de $(1 + T)(\partial^{ab} \otimes 1): M^{ab} \otimes N^{ab} \rightarrow N^{ab} \otimes N^{ab}$.

Demostración. El homomorfismo natural w definido en (8.1.A) factoriza a través de R , ya que los conmutadores son anticonmutativos. Es más, δ existe y (ω, δ) es un módulo cuadrático reducido por las propiedades de ϖ en (8.2.A) y de los push-out centrales. Más aún, el diagrama de arriba es claramente natural en la categoría de módulos cruzados, por tanto $\tilde{\Sigma}$ es un funtor y el resultado queda probado. \square

Definición 8.2.8. Se dice que un módulo precruzado $\partial: M \rightarrow N$ es *totalmente libre* con base $\varphi: \langle E \rangle \rightarrow \langle F \rangle$ si $N = \langle F \rangle$ y hay un homomorfismo dado $r: \langle E \rangle \rightarrow M$ tal que si ∂' es otro módulo precruzado entonces cualquier

diagrama conmutativo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \langle E \rangle & \xrightarrow{\varphi} & \langle F \rangle \\ \downarrow \psi' & & \downarrow v \\ M' & \xrightarrow{\partial'} & N' \end{array}$$

se extiende a un único morfismo $(\psi, v): \partial \rightarrow \partial'$ de módulos precruzados con $\psi r = \psi'$. Este objeto se construye de la siguiente manera, $M = \text{Ker} [(0, 1): \langle E \rangle * N \rightarrow N]$ con N actuando en M por conjugación en el producto libre $\langle E \rangle * N$, y

$$(8.2.B) \quad \partial: M \subset \langle E \rangle * N \xrightarrow{(\varphi, 1)} N.$$

El módulo cruzado (resp. nil(2)-módulo) totalmente libre con base φ es ∂^{cr} (resp. ∂^{nil}).

De forma similar un módulo cuadrático $(\omega, \delta, \partial)$ es totalmente libre con base $\langle D \rangle \rightarrow M$ si el nil(2)-módulo ∂ es totalmente libre y existe un homomorfismo $r: \langle D \rangle \rightarrow L$ que satisface la propiedad universal análoga al caso de los módulos precruzados.

Un módulo cuadrático reducido $M^{ab} \otimes M^{ab} \xrightarrow{\omega} L \xrightarrow{\delta} M$ es *totalmente libre* con base $\varphi: \langle E \rangle^{nil} \rightarrow \langle F \rangle^{nil}$ si $M = \langle F \rangle^{nil}$ y está dado un homomorfismo $r: \langle E \rangle^{nil} \rightarrow L$ que satisface la propiedad universal obvia. Este objeto se construye a través del siguiente diagrama

$$(8.2.C) \quad \begin{array}{ccc} \otimes^2 \mathbb{Z} \langle E \rangle & \xrightarrow{\otimes^2(\varphi^{ab})} & \otimes^2 \mathbb{Z} \langle F \rangle / R' \\ \downarrow sq & \begin{array}{c} c\text{-push} \\ \downarrow \omega \end{array} & \downarrow \omega \\ \langle E \rangle^{nil} & \xrightarrow{r} & L \end{array} \begin{array}{c} \searrow sq \\ \downarrow \delta \\ \searrow \varphi \end{array} \rightarrow M$$

Aquí R' es la imagen de $(1 + T)(\varphi^{ab} \otimes 1): \mathbb{Z} \langle E \rangle \otimes \mathbb{Z} \langle F \rangle \rightarrow \otimes^2 \mathbb{Z} \langle F \rangle$.

La siguiente proposición muestra que el functor “suspensión” definido en (8.2.7) preserva objetos totalmente libres.

Proposición 8.2.9. *Si el módulo cruzado $\partial: M \rightarrow N$ es totalmente libre con base $\varphi: \langle E \rangle \rightarrow \langle F \rangle$, entonces el módulo cuadrático reducido $\tilde{\Sigma}\partial = (\omega, \delta)$ es totalmente libre con base φ^{nil} .*

Demostración. Denotamos $\bar{\partial}: \bar{M} \rightarrow N$ al módulo precruzado totalmente libre con base φ , entonces $\bar{M} = \sum_{f \in \langle F \rangle} \langle E^f \rangle \subset \langle E \rangle * \langle F \rangle$ y $M^{\tilde{\Sigma}}$ en (8.2.7) es el cociente de $\bar{M} \times (\otimes^2 \mathbb{Z} \langle F \rangle / R)$ por el subgrupo normal generado por los elementos

$$(-e' - e + e' + e^{\varphi e'}, 0), (-e + e^f, -\varphi^{ab} p(e) \otimes p(f))$$

para cualesquiera $e, e' \in \langle E \rangle$, $f \in \langle F \rangle$. Por tanto en el cociente se da la igualdad $(e^f, 0) = (e, \varphi^{ab} p(e) \otimes p(f))$, y de esta forma $M^{\tilde{\Sigma}}$ es también el cociente de $\langle E \rangle \times (\otimes^2 \mathbb{Z} \langle F \rangle / R)$ por los elementos $([e', e], \varphi^{ab} p(e) \otimes \varphi^{ab} p(e'))$ para cualesquiera $e, e' \in \langle E \rangle$. En particular $([e, [e', e'']], 0)$ es una relación para todo $e, e', e'' \in \langle E \rangle$, $M^{\tilde{\Sigma}}$ es el cociente de $\langle E \rangle^{nil} \times (\otimes^2 \mathbb{Z} \langle F \rangle / R)$ por las relaciones $(-[e, e'], \varphi^{ab} p(e) \otimes \varphi^{ab} p(e'))$ para cualesquiera $e, e' \in \langle E \rangle^{nil}$, ya que $[e', e] = -[e, e']$. Es más, no es difícil comprobar que $R = R'$, luego $M^{\tilde{\Sigma}}$ coincide con L en el push-out central (8.2.C). Con esto queda probado el resultado. \square

8.3 Suspensiones de complejos cruzados y cuadráticos

Los complejos cruzados (resp. cuadráticos) son ciertos complejos de cadenas de grupos junto con una estructura de módulo cruzado (resp. cuadrático) en dimensiones bajas (véase [Bau91]). Estos objetos algebraicos se usan para codificar información homotópica de espacios tal como el 2-tipo y el 3-tipo. En esta sección extendemos a estos complejos el funtor “suspensión” definido en la sección anterior, y damos una interpretación topológica de este funtor algebraico.

Definición 8.3.1. Un *complejo cruzado* es un complejo de cadenas positivo de grupos $\rho = (\rho_*, d_*)$ tal que $d_2: \rho_2 \rightarrow \rho_1$ es un módulo cruzado, ρ_n ($n > 2$) es un módulo (a derecha) sobre $\text{Coker } d_2$ (y por tanto sobre ρ_1 a través de la proyección natural $\rho_1 \rightarrow \text{Coker } d_2$), y la diferencial d_* es ρ_1 -equivariante. Análogamente un *complejo cuadrático* $\sigma = (\sigma_*, d_*, \omega)$ es un complejo de cadenas positivo de grupos (σ_*, d_*) y un homomorfismo $\omega: C_2 \otimes C_2 \rightarrow \sigma_3$ tales que (ω, d_3, d_2) es un módulo cuadrático, σ_n ($n > 3$) es un módulo sobre $\text{Coker } d_2$, y la diferencial d_* es σ_1 -equivariante. Los *grupos de homotopía* de ρ y σ son

$$(8.3.A) \quad \pi_n \rho = H_n(\rho_*, d_*), \quad \pi_n \sigma = H_n(\sigma_*, d_*).$$

Un morfismo de complejos cruzados es un morfismo de complejos de cadenas

$$f = \{f_n\}_{n \geq 1} : \rho \rightarrow \rho'$$

tal que f_n es f_1 -equivariante ($n \geq 1$), y los morfismos de complejos cuadráticos $f = \{f_n\}_{n \geq 1} : \sigma \rightarrow \sigma'$ son morfismos de complejos de cadenas con $(f_3, f_2, f_1) : (\omega, d_3, d_2) \rightarrow (\omega', d'_3, d'_2)$ un morfismo de módulos cuadráticos y f_n un homomorfismo f_1 -equivariante ($n \geq 1$). Un morfismo de complejos cruzados o cuadráticos se dice una *equivalencia débil* si induce isomorfismos entre los grupos de homotopía.

Se dice que un complejo cruzado o cuadrático es *reducido* si el grupo de dimensión 1 es trivial. Obsérvese que los complejos cruzados reducidos son sencillamente complejos de cadenas de grupos abelianos, mientras que los complejos cuadráticos reducidos tienen un módulo cuadrático reducido en dimensiones bajas con un complejo de cadenas de grupos abelianos pegado en dimensiones > 3 .

En la siguiente proposición extendemos el functor “suspensión” definido en (8.2.7) a un functor entre complejos.

Proposición 8.3.2. *Existe un functor “suspensión” $\tilde{\Sigma}$ de complejos cruzados a complejos cuadráticos que envía $\rho = (\rho_*, d_*)$ al complejo cruzado $\tilde{\Sigma}\rho = ((\tilde{\Sigma}\rho)_*, d_*^{\tilde{\Sigma}}, \omega)$ con $(\omega, d_3^{\tilde{\Sigma}}) = \tilde{\Sigma}d_2$, $(\tilde{\Sigma}\rho)_{n+1} = \rho_n \otimes_{\pi_1\rho} \mathbb{Z}$ para $n > 2$, donde \mathbb{Z} es el $\pi_1\rho$ -módulo trivial, y $d_{n+1}^{\tilde{\Sigma}} = d_n \otimes_{\pi_1\rho} \mathbb{Z}$ para $n > 3$. Es más, el homomorfismo $d_4^{\tilde{\Sigma}}$ es el único que extiende conmutativamente el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_2 \otimes \rho_1 & \xrightarrow{(d_2^{ab}p) \otimes p} & (\rho_1^{ab} \otimes \rho_1^{ab})/R \\
 \varpi \downarrow & \text{c-push} & \downarrow \omega \\
 \rho_2 & \xrightarrow{r'} & (\tilde{\Sigma}\rho)_3 \\
 d_3 \uparrow & & \uparrow d_4^{\tilde{\Sigma}} \\
 \rho_3 & \xrightarrow{z} & \rho_3 \otimes_{\pi_1\rho} \mathbb{Z}
 \end{array}$$

donde z es la proyección natural $z(x) = x \otimes 1$ ($x \in \rho_3$).

Demostración. El morfismo $d_4^{\tilde{\Sigma}}$ existe y es único siempre que $d_3(\text{Ker } z) \subset \text{Ker } r'$. Esta inclusión se satisface, porque $\text{Ker } z$ está generado por los ele-

mentos $-x + x^\alpha$ ($x \in \rho_3$, $\alpha \in \rho_1$), y

$$\begin{aligned} r'd_3(-x + x^\alpha) &= r'(-d_3(x) + d_3(x)^\alpha) \\ &= r'\varpi(d_3(x) \otimes \alpha) \\ &= \omega(d_2^{ab}pd_3(x) \otimes p\alpha) \\ &= \omega(pd_2d_3(x) \otimes p\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que $d^{\tilde{\Sigma}}d^{\tilde{\Sigma}} = 0$, pues $dd = 0$, luego $\tilde{\Sigma}\rho$ es un complejo cuadrático reducido. Más aún, $\tilde{\Sigma}$ es un funtor porque el diagrama del enunciado es natural en la categoría de complejos cruzados. \square

Definición 8.3.3. Un complejo cruzado (resp. cuadrático) ρ (resp. σ) se dice *totalmente libre* si d_2 (resp. (ω, d_3, d_2)) es un módulo cruzado (resp. cuadrático) totalmente libre y ρ_n (resp. σ_n) es un módulo libre sobre Coker d_2 para $n > 2$ (resp. $n > 3$).

Diremos que $\{E_n\}_{n \geq 1}$ es una *base* de un módulo cuadrático totalmente libre $\sigma = (\sigma_*, d_*, \omega)$ si $E_n \subset \sigma_n$ es un subconjunto tal que

- (i) $\sigma_1 = \langle E_1 \rangle$,
- (ii) d_2 induce un homomorfismo de grupos $\langle E_2 \rangle \rightarrow \langle E_1 \rangle$ que es la base del nil(2)-módulo d_2 ,
- (iii) el homomorfismo $\langle E_3 \rangle \rightarrow \sigma_2$ inducido por d_3 es base del módulo cuadrático (ω, d_3, d_2) ,
- (iv) E_n ($n \geq 4$) es una base del $\pi_1\sigma$ -módulo libre σ_n .

Si σ es reducido entonces $E_1 = \emptyset$ es el conjunto vacío y las condiciones de arriba se reducen a las siguientes

- (i) $\sigma_2 = \langle E_2 \rangle^{nil}$,
- (ii) d_3 induce un homomorfismo $\langle E_3 \rangle^{nil} \rightarrow \langle E_2 \rangle^{nil}$ que es base del módulo cuadrático reducido (ω, d_3) ,
- (iii) E_n ($n \geq 4$) es una base del grupo abeliano libre σ_n .

Observación 8.3.4. Las bases de los complejos cruzados se definen de manera similar, y poseen propiedades análogas. Es más, un complejo cuadrático o cruzado totalmente libre está completamente determinado por la base y los valores de la diferencial sobre la base. Más aún, si $f: \sigma \rightarrow \sigma'$ es un morfismo de complejos cuadráticos y σ es totalmente libre, f también está determinado por sus valores sobre la base. Lo mismo ocurre en el caso cruzado.

Las categorías \mathbf{H} y \mathbf{Q} de complejos cruzados y cuadráticos totalmente libres, respectivamente, son I -categorías con la estructura dada en [Bau91]. El objeto cero de ambas categorías es aquel con el grupo trivial en cada dimensión, y la base del coproducto de dos objetos es coproducto (unión disjunta) de las bases. Es más, la inclusión de un factor en el coproducto está inducida por la inclusión de su base, véase también la construcción de los push-out homotópicos en estas categorías dada en [Bau91] III.4.17 y IV.5.5.

Definición 8.3.5. La base del cilindro $I\sigma$ de un complejo cuadrático σ con base $\{E_n\}_{n \geq 1}$ viene dada por los conjuntos $\{E'_n\}_{n \geq 1}$ con

$$E'_n = i_0 E_n \sqcup s E_{n-1} \sqcup i_1 E_n \quad (n \geq 2),$$

$$E'_1 = i_0 E_1 \sqcup i_1 E_1.$$

Aquí $i_t E_n, s E_n$ son copias de E_n ($n \geq 1, t = 0, 1$) y \sqcup es la unión disjunta de conjuntos. Las inclusiones naturales de σ en el cilindro $i_t: \sigma \rightarrow I\sigma$ ($t = 0, 1$) están inducidas por las inclusiones de bases $E_n = i_t E_n \subset E'_n$, y la proyección natural $p: I\sigma \rightarrow \sigma$ por $p i_t = 1$ y $p_{n+1}(s x) = 0$ ($t = 0, 1; x \in E_n, n \geq 1$). La diferencial del cilindro viene dada por la de σ y las siguientes igualdades ($x \in E_n, n \geq 1, t = 1, 2$)

$$d_n i_t(x) = i_t d_n(x), \quad d_{n+1}(s x) = -i_0(x) + i_1(x) - S_{n-1} d_n(x).$$

Aquí $S_0 d_1(x) = 0$ y $S_n: \sigma_n \rightarrow (I\sigma)_{n+1}$ ($n \geq 1$) es la función definida por $S_n x = s x$ ($x \in E_n$) y el hecho de que es un homomorfismo i_0 -equivariante para $n \geq 3$, un homomorfismo i_0 -cruzado para $n = 1$, y un operador (S_1, i_0, i_1) -cuadrático para $n = 2$.

Recordemos que, si G es un π' -grupo y $\varphi: \pi \rightarrow \pi'$ es un homomorfismo, $\psi: \pi \rightarrow G$ es un *homomorfismo φ -cruzado* si $\psi(a + b) = \psi(a)^{\varphi b} + \psi(b)$ para cualesquiera $a, b \in \pi$. La definición de *operador cuadrático* es más complicada y remitimos a [Bau91] IV.4.3.

Dado un morfismo $f: \sigma \rightarrow \sigma'$ en \mathbf{Q} , el morfismo inducido $I f: I\sigma \rightarrow I\sigma'$ en el único que satisface $(I f) i_t = i_t f$ ($t = 0, 1$) y $(I f)_{n+1}(s x) = S_n f_n(x)$ ($x \in E_n, n \geq 1$).

El functor *suspensión* en \mathbf{Q} , como en cualquier I -categoría, está definido como $\Sigma\sigma = I\sigma/\sigma \vee \sigma$, la cofibra del morfismo natural $(i_0, i_1): \sigma \vee \sigma \rightarrow I\sigma$.

Para relacionar este functor suspensión con el definido en (8.3.2) recordemos que existe un functor λ de complejos cuadráticos a complejos cruzados

que envía $\sigma = (\sigma_*, d_*, \omega)$ al complejo cruzado $\lambda\sigma = ((\lambda\sigma)_*, d_*^\lambda)$ tal que $((\lambda\sigma)_*, d_*^\lambda)$ coincide con (σ_*, d_*) en dimensiones > 3 ,

$$d_4^\lambda: (\lambda\sigma)_4 = \sigma_4 \xrightarrow{d_4} \sigma_3 \rightarrow \text{Coker } \omega = (\lambda\sigma)_3,$$

$$d_2^\lambda = d_2^{cr}: (\lambda\sigma)_2 = \sigma_2^{cr} \rightarrow \sigma_1 = (\lambda\sigma)_1,$$

y d_3^λ encaja en el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \sigma_3 & \xrightarrow{d_3} & \sigma_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Coker } \omega & \xrightarrow{d_3^\lambda} & \sigma_2^{cr} \end{array}$$

véase IV.3.2 en [Bau91]. Este functor preserva complejos totalmente libres, más aún, si $\{E_n\}_{n \geq 1}$ es la base de σ entonces también es la base de $\lambda\sigma$, y $\lambda I\sigma = I\lambda\sigma$.

Las suspensiones en \mathbf{H} son sólo complejos de cadenas de grupos abelianos libres, triviales en dimensiones ≤ 1 , así que no tienen demasiado interés. El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 8.3.6. *Existe una equivalencia natural entre los funtores*

$$\mathbf{Q} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Q} \text{ y } \mathbf{Q} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{H} \xrightarrow{\tilde{\Sigma}} \mathbf{Q}.$$

Para probar este teorema primero enunciamos varios lemas.

El siguiente lema se sigue directamente de (8.2.9) y la construcción de $\tilde{\Sigma}$ en (8.3.2).

Lema 8.3.7. *Si ρ es un módulo cruzado totalmente libre con base $\{E_n\}_{n \geq 1}$ entonces el módulo cuadrático reducido $\tilde{\Sigma}\rho$ es totalmente libre con base $\{E_n^{\tilde{\Sigma}}\}_{n \geq 1}$, $E_1^{\tilde{\Sigma}} = \emptyset$, $E_n^{\tilde{\Sigma}} = E_{n-1}$ ($n \geq 2$).*

Observando las construcciones explícitas del functor cilindro, el functor suspensión Σ , y los push-out homotópicos en \mathbf{Q} ([Bau91]) se comprueba fácilmente que

Lema 8.3.8. *Si $\{E_n\}_{n \geq 1}$ es la base del complejo cuadrático σ entonces la base de $\Sigma\sigma$ es $\{E_n^\Sigma\}_{n \geq 1}$ con $E_1^\Sigma = \emptyset$ y $E_n^\Sigma = E_{n-1}$ para $n \geq 2$. Es más, si $\rho: I\sigma \rightarrow I\sigma/\sigma \vee \sigma = \Sigma\sigma$ en el morfismo cociente entonces la restricción de ρ_n induce la identidad $\rho_n: sE_{n-1} = E_{n-1} = E_n^\Sigma$ ($n \geq 2$).*

En el siguiente lema determinamos el módulo cuadrático reducido de un complejo cuadrático suspendido.

Lema 8.3.9. Si $\bar{\varphi}: \langle E_2 \rangle \rightarrow \langle E_1 \rangle$ es la base del $\text{nil}(2)$ -módulo $d_2: \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ y $\varphi = \bar{\varphi}^{\text{nil}}$ entonces $-\varphi: \langle E_2 \rangle^{\text{nil}} \rightarrow \langle E_1 \rangle^{\text{nil}}$ es la base del módulo cuadrático reducido de $\Sigma\sigma$

$$\otimes^2 \mathbb{Z}\langle E_1 \rangle \xrightarrow{\omega^\Sigma} (\Sigma\sigma)_3 \xrightarrow{d_3^\Sigma} (\Sigma\sigma)_2 = \langle E_1 \rangle^{\text{nil}}.$$

Demostración. En virtud de (8.3.8) sólo tenemos que demostrar que la composición

$$E_2 = sE_2 \subset (I\sigma)_3 \xrightarrow{d_3} (I\sigma)_2 \xrightarrow{\varrho_2} (\Sigma\sigma)_2 = \langle E_1 \rangle^{\text{nil}}$$

envía $x \in E_2$ a $-\varphi(x) \in \langle E_1 \rangle^{\text{nil}}$. Por construcción de la diferencial de $I\sigma$ y el functor suspensión tenemos que

$$\varrho_2 d_3(sx) = -\varrho_2 S_1 \bar{\varphi}(x).$$

Es más, ya que $\varrho_i 0 = 0$, $\varrho_2 S_1$ es de hecho un homomorfismo de grupos, y dado $y \in E_1$, $\varrho_2 S_1(y) = y$, así que $\varrho_2 S_1 = \bar{p}: \langle E_1 \rangle \rightarrow \langle E_1 \rangle^{\text{nil}}$ es la proyección natural y $\varrho_2 d_3(sx) = -\varrho_2 S_1 \bar{\varphi}(x) = -\bar{p} \bar{\varphi}(x) = -\varphi(x)$. \square

Ahora estamos listos para probar (8.3.6).

Demostración de (8.3.6). Sea $\sigma = (\sigma_*, d_*, \omega)$ un complejo cuadrático. Afirmamos que $(\Sigma\sigma)_n = (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_n$ y que la equivalencia natural está dada por el morfismo $\chi: \Sigma\sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}\lambda\sigma$ con $\chi_n = (-1)^n$ para $n \neq 3$, $\chi_3\omega = \omega$ y $\chi_3 r = -r$.

Dado $\varphi \in \mathbf{nil}$, los módulos cuadráticos reducidos con base $-\varphi$ y φ , (ω_1, δ_1) y (ω_2, δ_2) respectivamente, vienen dados por los mismos grupos, $\omega_1 = \omega_2$ pero $\delta_1 \neq \delta_2$ en general, aquí usamos (8.2.C) y el hecho de que $\otimes^2(-\varphi^{ab}) = \otimes^2\varphi^{ab}$. Es más, $(\chi_3, 1, 0): (\omega_1, \delta_1) \rightarrow (\omega_2, \delta_2)$ es un isomorfismo de módulos cuadráticos. Por tanto las igualdades $(\Sigma\sigma)_n = (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_n$ y $\chi_2 d_3^\Sigma = d_3^{\tilde{\Sigma}\lambda} \chi_3$ se siguen de (8.2.9), (8.3.7), (8.3.8) y (8.3.9).

Ya que $\varrho_i t = 0$ ($t = 0, 1$), para $n \geq 5$ tenemos que $\varrho_n S_{n-1}: \sigma_{n-1} \rightarrow (\Sigma\sigma)_n = (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_n = \sigma_{n-1} \otimes_{\pi_1\sigma} \mathbb{Z}$ es la proyección natural $x \mapsto x \otimes 1$ y $d_{n+1}^\Sigma(x) = -\varrho_n S_{n-1} d_n(x)$, así que $d_{n+1}^\Sigma = -d_n \otimes_{\pi_1\sigma} \mathbb{Z} = -d_{n+1}^{\tilde{\Sigma}\lambda}$ y $\chi_n d_{n+1}^\Sigma = d_{n+1}^{\tilde{\Sigma}\lambda} \chi_{n+1}$. Más aún, $\varrho_4 S_3: \sigma_3 \rightarrow (\Sigma\sigma)_4 = (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_4 = (\text{Coker } \omega) \otimes_{\pi_1\sigma} \mathbb{Z}$ es también el homomorfismo de proyección sobre el cociente, y si $x \in E_4$ entonces $d_5^\Sigma(x) = -\varrho_4 S_3 d_4(x) = -d_5^{\tilde{\Sigma}\lambda}(x)$, por tanto $\chi_4 d_5^\Sigma = d_5^{\tilde{\Sigma}\lambda} \chi_5$.

La aplicación S_2 es un operador (S_1, i_0, i_1) -cuadrático en el sentido de [Bau91] IV.4.3, además $\varrho_i 0 = 0 = \varrho_i 1$ y $\varrho_2 S_1 = \bar{p}$ (para esta última igualdad véase la demostración de (8.3.9)) entonces $\varrho_3 S_2$ es un operador $(\bar{p}, 0, 0)$ -cuadrático. Sea ξ la composición $\sigma_2 \rightarrow \sigma_2^{cr} = (\lambda\sigma)_2 \xrightarrow{r'} (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_3$, véase (8.2.7). Usando la propiedad (iii) en la definición de módulo cuadrático reducido (8.2.5) y (8.2.7) es fácil ver que la función $-\chi_3 \xi: \sigma_2 \rightarrow (\tilde{\Sigma}\lambda\sigma)_3 = (\Sigma\sigma)_3: x \mapsto$

$-\chi_3\xi(x)$ es también un operador $(\bar{p}, 0, 0)$ -cuadrático. Es más, dado $e \in E_2$, $\varrho_3 S_2(e) = e = -\chi_3\xi(e)$ y por tanto en virtud de [Bau91] IV.4.5 $\varrho_2 S_1 = -\chi_3\xi$, en particular por (8.3.2) tenemos que para $x \in E_3$, $d_4^{\tilde{\Sigma}\lambda}\chi_4(x) = d_4^{\tilde{\Sigma}\lambda}(x) = \xi d_3(x) = \chi_3\chi_3\xi d_3(x) = \chi_3(-\varrho_3 S_2 d_3(x)) = \chi_3 d_4^{\tilde{\Sigma}}(x)$. Aquí usamos el hecho obvio de que $\chi_3\chi_3 = 1$. Así, el resultado queda finalmente probado. \square

Sea \mathbf{CW}^* la categoría de CW -complejos punteados, reducidos y normalizados y aplicaciones celulares basadas. Desde un punto de vista homotópico esta categoría es equivalente a la de todos los espacios conexos punteados, así que a lo largo de este capítulo “espacio” querrá decir un CW -complejo de los anteriores, y las aplicaciones siempre serán celulares y basadas.

Dado un espacio X hay definidos objetos $\rho(X)$, $\sigma(X)$ en \mathbf{H} y \mathbf{Q} , respectivamente, tales que $\rho(X) = \lambda\sigma(X)$, véase [Bau91]. Es más, la base de dichos objetos es el conjunto de células de X . De hecho definen funtores $\rho: \mathbf{CW}^* \rightarrow \mathbf{H}$ y $\sigma: \mathbf{CW}^* \rightarrow \mathbf{Q}/\overset{0}{\simeq}$. Aquí $\overset{0}{\simeq}$ es una relación de equivalencia natural en \mathbf{Q} dada por las 0-homotopías, que son las homotopías que preservan la filtración de los esqueletos. Más precisamente

Definición 8.3.10. Dos morfismos $f, g: \sigma \rightarrow \sigma'$ son 0-homotópicos $f \overset{0}{\simeq} g$ si $f_n = g_n$ para $n = 1$ y $n \geq 4$, y existe un homomorfismo $\pi_1 f$ -equivariante $\alpha: C_2 \rightarrow C'_2 \otimes C'_2$ tal que si $\phi: \sigma_2 \rightarrow C_2$ es la proyección natural entonces

$$-f_2(a) + g_2(a) = d'_3\omega'\alpha\phi(a), \quad -f_3(b) + g_3(b) = \omega'\alpha\phi d_3(b),$$

para cualesquiera $a \in \sigma_2$, y $b \in \sigma_3$.

El functor ρ (resp. σ) es lleno y fiel si nos restringimos a la subcategoría llena de espacios de dimensión ≤ 2 (resp. ≤ 3) y tomamos cociente por la relación de homotopía, en particular hay isomorfismos naturales $\pi_n\rho(X) \simeq \pi_n X$ (resp. $\pi_n\sigma(X) \simeq \pi_n X$) para $n \leq 2$ (resp. $n \leq 3$). Es más, el functor λ factoriza a través de $\mathbf{Q}/\overset{0}{\simeq}$ y hay una equivalencia natural $\rho = \lambda\sigma$. Más aún σ y ρ preservan cilindros y push-out homotópicos, por tanto el siguiente resultado se sigue directamente de (8.3.6).

Corolario 8.3.11. Para cualquier espacio X hay un isomorfismo natural $\tilde{\Sigma}\rho(X) \simeq \sigma(\Sigma X)$.

8.4 La co-H-estructura de un complejo cuadrático suspendido

Como en cualquier I -categoría, las suspensiones en \mathbf{Q} vienen equipadas con una estructura natural de co-H-grupo dada por morfismos, bien definidos salvo homotopía,

- la co-H-multiplicación $\mu_\sigma: \Sigma\sigma \rightarrow \Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma$,
- y la co-H-inversión $\nu_\sigma: \Sigma\sigma \rightarrow \Sigma\sigma$,

tales que

(8.4.A)

$$(1 \vee \mu_\sigma)\mu_\sigma \simeq (\mu_\sigma \vee 1)\mu_\sigma, (1, 0)\mu_\sigma \simeq 1 \simeq (0, 1)\mu_\sigma, (1, \nu_\sigma)\mu_\sigma \simeq 0 \simeq (\nu_\sigma, 1)\mu_\sigma.$$

Aquí el símbolo \simeq denota la relación de homotopía. Véase (1.2.5). En esta sección daremos fórmulas explícitas para estos morfismos. Es más, probaremos que la co-H-estructura de $\Sigma\sigma$ es una estructura estricta de cogrupo en \mathbf{Q} , esto es, las homotopías anteriores son de hecho igualdades.

Observación 8.4.1. El complejo cuadrático de un racimo de circunferencias $\sigma(\vee_E S^1)$ es naturalmente isomorfo a $\pi_1(\vee_E S^1) = \langle E \rangle$ concentrado en grado 1 y trivial en otros casos. Por tanto la co-H-estructura canónica de S^1 induce la co-H-estructura de σS^1 dada por

- la co-H-multiplicación $\mu: \sigma S^1 \rightarrow \sigma S^1 \vee \sigma S^1$, que es $\mu_1: \langle e \rangle \rightarrow \langle e_1, e_2 \rangle$, $\mu_1(e) = e_1 + e_2$, en dimensión 1, aquí $e_k = i_k e$, ($k = 1, 2$),
- y la co-H-inversión $\nu: \sigma S^1 \rightarrow \sigma S^1$, dada por $\nu_1: \langle e \rangle \rightarrow \langle e \rangle$, $\nu_1(e) = -e$.

Es fácil comprobar que esto es una estructura estricta de cogrupo en \mathbf{Q} , esto es, las homotopías en (8.4.A) son igualdades estrictas en \mathbf{Q} .

Definición 8.4.2. En [Bau91] Baues construye un producto tensorial de complejos cuadráticos $\sigma \otimes \sigma'$ tal que $\sigma(X) \otimes \sigma(Y)$ es isomorfo al complejo cuadrático del espacio producto $\sigma(X \times Y)$. Este isomorfismo es natural en Y si fijamos X , y viceversa. Es más, hay una inclusión natural (de hecho una cofibración) del coproducto de dos complejos cuadráticos en su producto tensorial $j: \sigma \vee \sigma' \rightarrow \sigma \otimes \sigma'$, que se corresponde con la inclusión natural $X \vee Y \subset X \times Y$, véase [Bau91] IV.12.2 (3). Por ello si definimos el *producto “smash”* de complejos cuadráticos como la cofibra de j

$$\sigma \wedge \sigma' = \sigma \otimes \sigma' / \sigma \vee \sigma'$$

obtenemos un isomorfismo inducido

$$\sigma(X \wedge Y) \simeq \sigma(X) \wedge \sigma(Y).$$

Observación 8.4.3. Obsérvese que los productos “smash” son siempre complejos cuadráticos reducidos, ya que la inclusión natural j es un isomorfismo en dimensión 1. Es más, el producto “smash” es distributivo con respecto al coproducto

$$(\sigma \wedge \sigma'') \vee (\sigma' \wedge \sigma'') \simeq (\sigma \vee \sigma') \wedge \sigma''.$$

Este isomorfismo es $(i_1 \wedge 1, i_2 \wedge 1)$.

En la siguiente proposición damos una caracterización más del funtor suspensión en \mathbf{Q} que nos permitirá calcular las fórmulas de las co-H-estructuras.

Proposición 8.4.4. *El funtor suspensión en la I-categoría \mathbf{Q} coincide con el producto “smash” con el complejo cuadrático de la circunferencia S^1*

$$\Sigma = \sigma S^1 \wedge -: \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q},$$

salvo equivalencia natural. Más aún, bajo esta equivalencia la co-H-estructura de una suspensión está inducida por la co-H-estructura canónica de σS^1 , esto es,

$$\mu_\sigma = \mu \wedge 1_\sigma, \quad \nu_\sigma = \nu \wedge 1_\sigma,$$

y por tanto es una estructura estricta de cogrupo en \mathbf{Q} .

Demostración. Supongamos probado que $\Sigma = \sigma S^1 \wedge -$, $\mu_\sigma = \mu \wedge 1_\sigma$ y $\nu_\sigma = \nu \wedge 1_\sigma$. Entonces μ_σ, ν_σ es una estructura estricta de cogrupo en \mathbf{Q} porque μ, ν es una estructura estricta de cogrupo para σS^1 y $- \wedge \sigma$ es un funtor de \mathbf{Q} a \mathbf{Q} .

Si σ es un complejo cuadrático con $\sigma_n = 0$ para $n > 4$ uno puede construir un espacio de dimensión 4 X con $\sigma = \sigma X$ usando [Bau91] IV.7.5, compárese con IV.8.5 en la misma referencia. Ya que σ preserva cilindros y sus aplicaciones estructurales, también preserva suspensiones y sus co-H-estructuras. Es más, es bien conocido que $S^1 \wedge -$ coincide con el funtor suspensión en la categoría de espacios, y la co-H-estructura canónica de un espacio suspendido está inducida por la co-H-estructura usual de S^1 . Por ello la proposición es cierta para un complejo cuadrático σ con $\sigma_n = 0$ para $n > 4$. El caso general se sigue de este caso particular y del hecho de que los complejos de cadenas admiten una co-H-estructura única salvo homotopía, véase el siguiente lema. \square

Lema 8.4.5. *Un complejo de cadenas (de grupos abelianos) admite, salvo homotopía, una única co-H-estructura.*

Demostración. La categoría de complejos de cadenas es aditiva. Podemos definir una co-H-estructura en un complejo de cadenas C_* mediante los morfismos $\mu = i_1 + i_2$ y $\nu = -1$. Supongamos que tenemos otra co-H-estructura dada por μ' y ν' . Sabemos que hay homotopías $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: (1, 0)\mu' \simeq 1$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: (0, 1)\mu' \simeq 1$. Es fácil comprobar que $\{i_1\alpha_n + i_2\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una homotopía $\mu' \simeq \mu$. Análogamente si $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: (1, \nu')\mu \simeq 0$ es una homotopía, que sabemos que existe, entonces $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una homotopía $\nu' \simeq \nu$ también. \square

Una consecuencia directa de la Proposición 8.4.4 es el siguiente

Corolario 8.4.6. *El conjunto de morfismos $\mathbf{Q}(\Sigma\sigma, \sigma')$ tiene estructura de grupo de forma tal que la proyección natural sobre el grupo de clases de homotopía $\mathbf{Q}(\Sigma\sigma, \sigma') \rightarrow [\Sigma\sigma, \sigma']$ es un homomorfismo.*

Con vistas a calcular la estructura de cogrupo de un complejo cuadrático suspendido introducimos la siguiente notación. Dado un homomorfismo $\varphi: \langle E \rangle^{nil} \rightarrow \langle F \rangle^{nil}$, $\nabla\varphi$ es el único homomorfismo

$$\nabla\varphi: \mathbb{Z}\langle E \rangle \rightarrow \otimes^2\mathbb{Z}\langle F \rangle$$

tal que $si_{12}(\nabla\varphi)p = (i_2|i_1)_\varphi$, aquí $i_{12}: A \otimes B \hookrightarrow \wedge^2(A \oplus B)$ es la inclusión del efecto cuadrático cruzado, véase (5.1.2) (4). Es más,

$$\Delta: \mathbb{Z}\langle E \rangle \rightarrow \otimes^2\mathbb{Z}\langle E \rangle$$

es el homomorfismo “diagonal” no natural definido sobre los generadores por $\Delta(a) = a \otimes a$, ($a \in E$).

La comultiplicación de la suspensión de un complejo cuadrático σ tal que $\bar{\varphi}: \langle E_2 \rangle \rightarrow \langle E_1 \rangle$ sea la base del nil(2)-módulo $d_2: \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$, está completamente determinada por las fórmulas del siguiente teorema, donde $\varphi = \bar{\varphi}^{nil}$ y r y ω son los morfismos estructurales de cualquier módulo cuadrático reducido totalmente libre en el push-out central (8.2.C).

Teorema 8.4.7. *La comultiplicación μ_σ en \mathbf{Q} satisface las siguientes igualdades:*

- (1). $(\mu_\sigma)_n = i_1 + i_2$ si $n \neq 3$,
- (2). $(\mu_\sigma)_3r = r(i_1 + i_2) + \omega(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p$,
- (3). $(\mu_\sigma)_3\omega = \omega(\otimes^2(i_1 + i_2))$.

Antes de probar este resultado enunciaremos algunas de sus consecuencias.

Corolario 8.4.8. *La estructura de grupo en $\mathbf{Q}(\Sigma\sigma, \sigma')$ viene dada por las siguientes fórmulas ($f, g \in \mathbf{Q}(\Sigma\sigma, \sigma')$):*

- (1). $(f + g)_n = f_n + g_n$ si $n \neq 3$,
- (2). $(f + g)_3r = f_3r + g_3r + \omega(g_2^{ab} \otimes f_2^{ab})(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p$,
- (3). $(f + g)_3\omega = \omega(\otimes^2(f_2^{ab} + g_2^{ab}))$,

y

$$(4). (-f)_n = -f_n \text{ si } n \neq 3,$$

$$(5). (-f)_{3r} = -f_{3r} + \omega(f_2^{ab} \otimes f_2^{ab})(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p,$$

$$(6). (-f)_{3\omega} = \omega(f_2^{ab} \otimes f_2^{ab}).$$

Demostración. Recordemos que σ'_3 y $\text{Ker}[d_2: \sigma'_2 \rightarrow \sigma'_1]$ son $\text{nil}(2)$ -grupos, véanse (8.2.2) y (8.2.4), así que las fórmulas de arriba tienen sentido. La igualdad (1) es trivial, (3) se sigue de (1), y (4), (5), (6) se pueden obtener a partir de (1), (2), (3) imponiendo $f + (-f) = 0$. Finalmente (2) se sigue de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (f+g)_{3r} &= (f,g)_{3(\mu_\sigma)_{3r}} = (f,g)_{3r}(i_1 + i_2) \\ &\quad + (f,g)_{3\omega}(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p \\ (a) \quad &= (f_{3r}, g_{3r})(i_1 + i_2) \\ &\quad + \omega(f_2^{ab}, g_2^{ab})(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p \\ &= f_{3r} + g_{3r} + \omega(g_2^{ab} \otimes f_2^{ab})(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p. \end{aligned}$$

En (a) usamos que la base del coproducto de dos complejos cuadráticos totalmente libres es el coproducto de sus bases. \square

Como $\nu_\sigma = -1 \in \mathbf{Q}(\Sigma\sigma, \Sigma\sigma)$ obtenemos también el siguiente

Corolario 8.4.9. *La coinversión ν_σ está determinada por las siguientes igualdades*

$$(1). (\nu_\sigma)_n = -1 \text{ si } n \neq 3,$$

$$(2). (\nu_\sigma)_{3r} = -r + \omega(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p,$$

$$(3). (\nu_\sigma)_{3\omega} = \omega.$$

Antes de probar (8.4.7) damos algunos resultados técnicos.

Lema 8.4.10. *Si $a_i \in E$, $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$ y $x = \epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_n a_n \in \langle E \rangle^{\text{nil}}$ entonces*

las siguientes igualdades se tienen en $\langle E \rangle^{nil} \vee \langle E \rangle^{nil}$

$$\begin{aligned}
 (i_2 + i_1)x - i_1x - i_2x &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_i \epsilon_j [i_1 a_i, i_2 a_j] \\
 &+ \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} [i_1 a_i, i_2 a_i] - \sum_{\epsilon_i < 0} \epsilon_i [i_1 a_i, i_2 a_i] \\
 &= si_{12} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_i \epsilon_j a_i \otimes a_j \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} a_i \otimes a_i - \sum_{\epsilon_i < 0} \epsilon_i a_i \otimes a_i \right)
 \end{aligned}$$

Aquí $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ para todo $m \geq 0$.

Demostración. La segunda igualdad es obvia. Procedemos por inducción en el número de sumandos. Supongamos que $n = 1$, $m > 0$ y $a = a_1$. El resultado es trivial para $\epsilon_1 = m = 1$. Si $\epsilon_1 = m + 1$ y es cierto para $\epsilon_1 = m$ entonces

$$\begin{aligned}
 (i_2 + i_1)x - i_1x - i_2x &= (m+1)(i_2a + i_1a) - (m+1)i_1a - (m+1)i_2a \\
 &= m(i_2a + i_1a) + i_2a + i_1a - i_1a - mi_1a \\
 &\quad - i_2a - mi_2a \\
 &= m(i_2a + i_1a) - mi_1a + [-mi_1a, -i_2a] - mi_2a \\
 &= m(i_2a + i_1a) - mi_1a - mi_2a + [mi_1a, i_2a] \\
 \text{(a)} \quad &= \binom{m}{2} [i_1a, i_2a] + m[i_1a, i_2a] \\
 &= \binom{m+1}{2} [i_1a, i_2a].
 \end{aligned}$$

La hipótesis de inducción es usada en (a). Si $\epsilon_1 = -m$ para cierto $m > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
 (i_2 + i_1)(-ma) - i_1(-ma) - i_2(-ma) &= -m(i_2a + i_1a) + mi_1a + mi_2a \\
 &= m(-i_1a - i_2a) + mi_1a + mi_2a.
 \end{aligned}$$

Ahora comprobaremos por inducción en m que esto es igual a $\binom{m}{2} [i_1a, i_2a] +$

$m[i_1a, i_2a]$. Es obvio para $m = 1$. Si es cierto para m entonces

$$\begin{aligned}
 & (m+1)(-i_1a - i_2a) \\
 + (m+1)i_1a + (m+1)i_2a &= m(-i_1a - i_2a) - i_1a - i_2a \\
 & \quad + i_1a + mi_1a + i_2a + mi_2a \\
 &= m(-i_1a - i_2a) + [i_1a, i_2a] \\
 & \quad + [i_2a, -mi_1a] + mi_1a + mi_2a \\
 &= m(-i_1a - i_2a) + mi_1a + mi_2a \\
 & \quad + (m+1)[i_1a, i_2a] \\
 \text{(b)} &= \binom{m}{2} [i_1a, i_2a] + m[i_1a, i_2a] \\
 & \quad + (m+1)[i_1a, i_2a] \\
 &= \binom{m+1}{2} [i_1a, i_2a] + (m+1)[i_1a, i_2a]
 \end{aligned}$$

La hipótesis de inducción es aplicada en (b).

Supongamos ahora que el lema es cierto para $\leq n$ sumandos ($n \geq 1$). Comprobémoslo para $n+1$ sumandos. Para ello denotamos $y = \epsilon_1a_1 + \dots + \epsilon_n a_n$, $\epsilon = \epsilon_{n+1}$ y $a = a_{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 (i_2 + i_1)x - i_1x - i_2x &= (i_2 + i_1)y + (i_2 + i_1)(\epsilon a) - i_1(\epsilon a) - i_1y \\
 & \quad - i_2(\epsilon a) - i_2y \\
 &= (i_2 + i_1)y + (i_2 + i_1)(\epsilon a) - i_1(\epsilon a) - i_2(\epsilon a) \\
 & \quad + [-i_2(\epsilon a), i_1y] - i_1y - i_2y \\
 \text{(c)} &= (i_2 + i_1)y - i_1y - i_2y \\
 & \quad + (i_2 + i_1)(\epsilon a) - i_1(\epsilon a) - i_2(\epsilon a) + [i_1y, i_2(\epsilon a)] \\
 \text{(d)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_i \epsilon_j [i_1a_i, i_2a_j] + \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} [i_1a_i, i_2a_i] \\
 & \quad - \sum_{\epsilon_i < 0, i \leq n} \epsilon_i [i_1a_i, i_2a_i] + \binom{|\epsilon|}{2} [i_1a, i_2a] \\
 & \quad + \text{sign}(\epsilon) \epsilon [i_1a, i_2a] + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \epsilon [i_1a_i, i_2a] \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \epsilon_i \epsilon_j [i_1a_i, i_2a_j] + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{|\epsilon_i|}{2} [i_1a_i, i_2a_i] \\
 & \quad - \sum_{\epsilon_i < 0} \epsilon_i [i_1a_i, i_2a_i]
 \end{aligned}$$

Aquí $\text{sign}(\epsilon)$ es -1 si $\epsilon < 0$ y 0 en otro caso. En (c) usamos que $(i_2 + i_1)(\epsilon a) -$

$i_1(\epsilon a) - i_2(\epsilon a)$ pertenece al subgrupo conmutador, por el caso $n = 1$, y que los conmutadores son centrales en cualquier $\text{nil}(2)$ -grupo. La hipótesis de inducción es aplicada en (d). Con esto se concluye la demostración. \square

Lema 8.4.11. *Para todo $\varphi \in \mathbf{nil}$ tenemos que $\nabla\varphi + \nabla(-\varphi) = (\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})\Delta$.*

Demostración. De hecho, por (8.4.10) tenemos que si $a_i \in E$, $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$ y $x = \epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_n a_n \in \langle E \rangle^{\text{nil}}$ entonces

$$\begin{aligned} (i_2 + i_1)x - i_1x - i_2x \\ + (i_2 + i_1)(-x) - i_1(-x) - i_2(-x) &= \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j [i_1 a_i, i_2 a_j] \\ &= si_{12}(p(x) \otimes p(x)), \end{aligned}$$

por tanto el resultado se sigue. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar (8.4.7).

Demostración de (8.4.7). La primera fórmula se comprueba fácilmente usando la descripción del funtor suspensión en \mathbf{Q} y la estructura de cogrupo de una suspensión dada en (8.4.4), junto con las fórmulas en [Bau91] IV.12.10, IV.12.3 (3) y IV.12.3 (5). La tercera es consecuencia de (1) para $n = 2$.

Para probar (2) consideramos $b \in E$ con $d_2(b) = \bar{\varphi}(b) = \epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_n a_n$, para ciertos $a_i \in F$, $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$. Entonces $(\mu_\sigma)_3 r(b)$ es la proyección de $(e_1 + e_2)\bar{\otimes} b \in ((\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \otimes \sigma)_3$ al cociente $(\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma)_3 = ((\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \otimes \sigma / (\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \vee \sigma)_3$, véanse [Bau91] IV.12.10 y IV.12.5 (2). En las siguientes ecuaciones las fórmulas están en $((\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \otimes \sigma)_3$ y el símbolo \approx indica que coinciden cuando se proyectan sobre $(\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma)_3 = ((\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \otimes \sigma / (\sigma S^1 \vee \sigma S^1) \vee \sigma)_3$,

$$\begin{aligned} \text{(a)} (e_1 + e_2)\bar{\otimes} b &= -S_2^{e_1+e_2}(b) \\ \text{(b)} &= \omega\Theta(e_1 + e_2, \bar{\varphi}(b)) + S(b)(e_1 + e_2) \\ \text{(c)} &\approx -\omega\tilde{T}(\vartheta^{\sigma S^1 \vee \sigma S^1}(e_1 + e_2) \otimes \vartheta^\sigma \bar{\varphi}(b)) + e_2 \times b + e_1 \times b. \end{aligned}$$

Aquí \tilde{T} es lo mismo que T en [Bau91] IV.12.4 (3). Hemos cambiado el nombre de este homomorfismo porque en esta sección T es la aplicación de intercambio de factores en el cuadrado tensorial, véase (8.1.1). Hemos usado [Bau91] IV.12.5 (13) para (a), IV.12.5 (12) para (b), y IV.12.4 (6) junto con IV.12.5 (9) para (c). Es más, por [Bau91] IV.12.4 (1) tenemos que $\vartheta^\sigma(0) = \vartheta^\sigma(0 + 0) \approx \vartheta^\sigma(0) + \vartheta^\sigma(0)$, y dado $a \in F$

$$0 \approx \vartheta^\sigma(0) = \vartheta^\sigma(a + (-a)) \approx \vartheta^\sigma(a) + \vartheta^\sigma(-a) - a \otimes a = \vartheta^\sigma(-a) - a \otimes a,$$

así que $\vartheta^\sigma(-a) \approx a \otimes a$. Usando esta relación es fácil comprobar inductivamente, como en la demostración del Lema 8.4.10, que la siguiente relación es cierta

$$\vartheta^\sigma \bar{\varphi}(b) \approx \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_i \epsilon_j a_i \otimes a_j + \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} a_i \otimes a_i - \sum_{\epsilon_1 < 0} \epsilon_i a_i \otimes a_i,$$

y por tanto usando [Bau91] IV.12.4 (3) y el hecho de que ω es central vemos que

$$\begin{aligned} (c) \approx & e_2 \times b + e_1 \times b - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_i \epsilon_j \omega(e_2 \otimes a_j \otimes e_1 \otimes a_i) \\ & - \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} \omega(e_2 \otimes a_i \otimes e_1 \otimes a_i) + \sum_{\epsilon_i < 0} \epsilon_i \omega(e_2 \otimes a_i \otimes e_1 \otimes a_i). \end{aligned}$$

Esto demuestra, proyectando sobre $(\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma)_3$, que

$$\begin{aligned} (\mu_\sigma)_3 r(b) &= r i_2(b) + r i_1(b) - \omega(i_2 \otimes i_1) \left(\sum_{1 \leq j < i \leq n} \epsilon_i \epsilon_j a_i \otimes a_j \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \binom{|\epsilon_i|}{2} a_i \otimes a_i - \sum_{\epsilon_1 < 0} \epsilon_i a_i \otimes a_i \right) \\ (d) \quad &= r i_2(b) + r i_1(b) - \omega(i_2 \otimes i_1) \left(\nabla(-\varphi)(b) - \Delta\varphi^{ab}(b) \right). \end{aligned}$$

En (d) usamos el Lema 8.4.10. En virtud de (8.4.11) esto implica que

$$(e) \quad (\mu_\sigma)_3 r = r(i_2 + i_1) + \omega(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi - (\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})\Delta + \Delta\varphi^{ab})p,$$

Recordemos que la base del módulo cuadrático reducido del coproducto $\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma$ es $(-\varphi) \vee (-\varphi) \in \mathbf{nil}$, por tanto usando (8.2.C) obtenemos que

$$\omega(i_2 \otimes i_1)(\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})\Delta p = \omega(\otimes^2(\varphi^{ab} \oplus \varphi^{ab}))(i_2 \otimes i_1)\Delta p = r s q(i_2 \otimes i_1)\Delta p.$$

Más aún, para todo $b \in E$ tenemos que $r s q(i_2 \otimes i_1)\Delta p(b) = r[i_2 b, i_1 b]$ y así

$$(e) = r(i_1 + i_2) + \omega(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p.$$

□

8.5 El homomorfismo natural $H_2 X \rightarrow \wedge^2 H_1 X$

Es bien conocido que el invariante de James-Hopf γ_2 en homotopía ordinaria, considerado al comienzo de la primera sección del Capítulo 6, encaja

dentro del siguiente cuadrado conmutativo, donde usamos los isomorfismos de suspensión en homología como identificaciones,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma H_1 X & \xrightarrow{i_3} & \pi_3 \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow \gamma_2 \\ \Gamma H_1 X & \xrightarrow{\tau} & \otimes^2 H_1 X \end{array}$$

Esto puede ser también visto como un caso particular de (6.1.2) para $T = *$ un árbol trivial. Tomando conúcleo en las flechas horizontales del diagrama anterior obtenemos un homomorfismo natural bien definido

$$\kappa: H_2 X \rightarrow \wedge^2 H_1 X,$$

que se caracteriza por encajar en el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$(8.5.A) \quad \begin{array}{ccccc} \Gamma H_1 X & \xrightarrow{i_3} & \pi_3 \Sigma X & \xrightarrow{h_3} & H_2 X \\ \parallel & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \kappa \\ \Gamma H_1 X & \xrightarrow{\tau} & \otimes^2 H_1 X & \xrightarrow{q} & \wedge^2 H_1 X \end{array}$$

En [Mur03] probamos que κ coincide con el homomorfismo inducido en segunda homología por la aplicación $X \rightarrow K(H_1 X, 1)$ que induce el homomorfismo de Hurewicz $h_1: \pi_1 X \rightarrow H_1 X$ entre los grupos fundamentales.

En esta sección damos una descripción alternativa del homomorfismo natural κ usando los resultados de la sección anterior. Esta segunda descripción será aplicada en la siguiente sección a la obtención de una fórmula puramente algebraica para la clase cup-producto $\bar{\cup}$ definida en (6.4.4). Con ello habremos conseguido uno de los resultados fundamentales de esta memoria. En [Mur03] se pueden encontrar otras aplicaciones del cálculo de κ y de la sección anterior en homotopía y álgebra ordinarias.

El 2-esqueleto X^2 del espacio X es el cono de una aplicación basada entre racimos de circunferencias

$$f: \vee_{E_2} S^1 \longrightarrow \vee_{E_1} S^1.$$

Esta aplicación contiene la misma información homotópica que el morfismo que induce entre los grupos fundamentales

$$\bar{\varphi} = \pi_1 f: \langle E_2 \rangle \longrightarrow \langle E_1 \rangle,$$

que a su vez es la base del nil(2)-módulo del complejo cuadrático $\sigma(X)$.

Si denotamos $C_* X$ al complejo de cadenas celulares (reducido) de X es claro que $E_i \subset C_i X$ son bases de estos grupos libres abelianos ($i = 1, 2$), más aún $\bar{\varphi}^{ab} = d_2: C_2 X \rightarrow C_1 X$.

Teorema 8.5.1. *Escojamos una base de 2-ciclos $Z_2 \subset \text{Ker } d_2$ y un homomorfismo $\psi: \langle Z_2 \rangle^{nil} \rightarrow \langle E_2 \rangle^{nil}$ tal que $\psi^{ab}: \text{Ker } d_2 \hookrightarrow C_2 X$ sea la inclusión. El homomorfismo natural $\kappa: H_2 X \rightarrow \wedge^2 H_1 X$ está inducido por el único homomorfismo $\alpha: \text{Ker } d_2 \rightarrow \wedge^2 C_1 X$ que satisface $\varphi\psi = s\alpha p$, donde $\varphi = \bar{\varphi}^{nil}$, y p y s son parte de la extensión central (5.3.D).*

Para probar este resultado necesitaremos la traducción de los morfismos naturales i_3 y h_3 , que aparecen en la sucesión exacta larga de Whitehead para el homomorfismo de Hurewicz, al lenguaje de complejos cuadráticos. Para ello observemos que, cuando σ es un complejo cuadrático reducido, el segundo grupo de homotopía $\pi_2 \sigma$ es un cociente de σ_2 y la proyección natural $\sigma_2 \twoheadrightarrow \pi_2 \sigma$ factoriza a través de la abelianización $\sigma_2 \twoheadrightarrow \sigma_2^{ab} = C_2$.

En general el homomorfismo $i_3: \Gamma \pi_2 \Sigma \sigma \rightarrow \pi_3 \Sigma \sigma$ de un complejo cuadrático suspendido $\Sigma \sigma$ puede ser calculado pasando al cociente el siguiente homomorfismo

$$(8.5.B) \quad \omega\tau: \Gamma(\Sigma\sigma)_2^{ab} \longrightarrow \text{Ker } d_3 \subset (\Sigma\sigma)_3,$$

compárese con IV.3.7 [Bau91]. Es más, si $\sigma = \sigma(X)$ entonces $C_* \Sigma X$ es $\lambda \Sigma \sigma$. Este complejo cruzado es de hecho un complejo de cadenas de grupos abelianos libres ya que un complejo cruzado suspendido es siempre reducido. Existe una proyección natural de complejos de cadenas de grupos $\Sigma \sigma \twoheadrightarrow \lambda \Sigma \sigma = C_* \Sigma X$. En realidad para cualquier complejo cuadrático σ es sencillo construir una proyección canónica $\sigma \twoheadrightarrow \lambda \sigma$ a partir de la construcción de λ , véase la tercera sección de este capítulo o bien [Bau91] IV.3.3. El homomorfismo de Hurewicz h_3 coincide con el inducido por esta proyección en tercera homología, véanse IV.C.10 y IV.3.7 en [Bau91].

Demostración de (8.5.1). Consideremos $\sigma = \sigma(X)$. Para llevar a cabo los cálculos necesarios escogemos un orden total \preceq en E_1 y definimos el homomorfismo $\eta: \wedge^2 \mathbb{Z}\langle E_1 \rangle \rightarrow \otimes^2 \mathbb{Z}\langle E_1 \rangle$ como $\eta(e_1 \wedge e_2) = e_1 \otimes e_2$ ($e_1 \prec e_2 \in E_1$). Este homomorfismo es una sección de q , es decir, satisface $q\eta = 1$.

Sea $\beta: \text{Ker } d_2 \rightarrow \wedge^2 C_1 X$ el único homomorfismo que verifica $(-\varphi)\psi = s\beta p$, por (8.1) (iii)

$$\begin{aligned} s(\alpha + \beta)p &= (\varphi|\varphi)_\psi \\ &= (\varphi + \varphi)\psi - \varphi\psi - \varphi\psi \\ &= (\varphi, \varphi)((i_2 + i_1)\psi - i_1\psi - i_2\psi) \\ &= (\varphi, \varphi)s i_{12}(\nabla\psi)p \\ &= s(\wedge^2 \varphi^{ab})q(\nabla\psi)p \end{aligned}$$

así que $\alpha + \beta = (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi)$. En la última igualdad utilizamos que dados $a, b \in E_2$

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi)si_{12}(a \otimes b) &= (\varphi, \varphi)s(i_1a \wedge i_2b) \\ &= (\varphi, \varphi)[i_1a, i_2b] \\ &= [\varphi(a), \varphi(b)] \\ &= s(\wedge^2 \varphi^{ab})q(a \otimes b). \end{aligned}$$

La imagen del homomorfismo

$$(8.5.C) \quad r\psi - \omega\eta\beta p: \langle Z_2 \rangle^{nil} \rightarrow (\Sigma\sigma)_3$$

cae dentro de $\text{Ker } d_3$, ya que, por (8.3.9), $d_3(r\psi - \omega\eta\beta p) = (-\varphi)\psi - sq\eta\beta p = s\beta p - s\beta p = 0$.

Comencemos pues a demostrar el enunciado del teorema. Dado un 2-ciclo $x \in \mathbb{Z}\langle Z_2 \rangle$, si $\bar{x} \in \langle Z_2 \rangle^{nil}$ es un elemento tal que $p(\bar{x}) = x$ entonces

$$y = (r\psi - \omega\eta\beta p)(\bar{x}) \in (\Sigma\sigma)_3$$

representa a un elemento de $\pi_3\Sigma X$ tal que $h_3\{y\} = \{x\}$, aquí $\{\cdot\}$ denota la clase de equivalencia en el correspondiente grupo cociente, así que en virtud de lo observado al comienzo de la Sección 6.1

$$(\mu_\sigma)_3(y) - (i_2)_3(y) - (i_1)_3(y) \in (\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma)_3$$

representa $i_3i_{12}\gamma_2\{y\} \in \pi_3(\Sigma X \vee \Sigma X)$, donde i_{12} es aquí la inclusión del efecto cuadrático cruzado de Γ ; no el de \wedge^2 , para el cual reservaremos la notación i_{12} en el resto de esta demostración a menos que se especifique lo contrario; véanse (5.1.2) (1) y (3).

Calculemos este elemento y $\gamma_2\{y\}$. Para ello recordemos que $(-\varphi) \vee (-\varphi) \in \mathbf{nil}$ es la base del módulo cuadrático reducido de $\Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma$, y las inclusiones de los factores del coproducto $i_k: \Sigma\sigma \rightarrow \Sigma\sigma \vee \Sigma\sigma$ ($k = 1, 2$)

satisfacen $(i_k)_n = i_k$ ($n \neq 3$) e $(i_k)_3 r = r i_k$.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (\mu_\sigma)_3(r\psi - \omega\eta\beta p) &= r(i_1 + i_2)\psi + \omega(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p\psi \\
 &\quad - \omega(\otimes^2(i_1 + i_2))\eta\beta p \\
 \text{(b)} \quad (i_1)_3(r\psi - \omega\eta\beta p) &= r i_1 \psi - \omega(i_1 \otimes i_1)\eta\beta p \\
 \text{(c)} \quad (i_2)_3(r\psi - \omega\eta\beta p) &= r i_2 \psi - \omega(i_2 \otimes i_2)\eta\beta p \\
 \text{(d)} \quad \text{(a)} - \text{(c)} - \text{(b)} &= r(i_1 | i_2)_\psi + \omega(i_2 \otimes i_1)(\nabla\varphi + \Delta\varphi^{ab})p\psi \\
 &\quad - \omega(i_1 \otimes i_2 + i_2 \otimes i_1)\eta\beta p \\
 \text{(e)} \quad r(i_1 | i_2)_\psi &= r(i_2, i_1)(i_2 | i_1)_\psi \\
 &= r(i_2, i_1)si_{12}(\nabla\psi)p \\
 \text{(f)} &= rs \wedge^2(i_2, i_1)i_{12}(\nabla\psi)p \\
 \text{(g)} &= rsq(i_2 \otimes i_1)(\nabla\psi)p \\
 \text{(h)} &= \omega(\otimes^2(\varphi^{ab} \oplus \varphi^{ab}))(i_2 \otimes i_1)(\nabla\psi)p \\
 &= \omega(i_2 \otimes i_1)(\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})(\nabla\psi)p.
 \end{aligned}$$

Aquí usamos que ω es central. Es más, en (a) aplicamos (8.4.7), en (f) la naturalidad de (5.3.D), en (h) (8.2.C), y en (g) usamos que para cualesquiera $a, b \in C_2X$

$$\wedge^2(i_2, i_1)i_{12}(a \otimes b) = \wedge^2(i_2, i_1)(i_1 a \wedge i_2 b) = i_2 a \wedge i_1 b = q(i_2 \otimes i_1)(a \otimes b).$$

Más aún $\varphi^{ab}p\psi = \varphi^{ab}\psi^{ab}p = 0p = 0$, así que por (e) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \text{(d)} &= -\omega(i_1 \otimes i_2)\eta\beta p \\
 &\quad - \omega(i_2 \otimes i_1)(\eta\beta - (\nabla\varphi)\psi^{ab} - (\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})(\nabla\psi))p.
 \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 \text{(j)} \quad si_{12}(\nabla\varphi)\psi^{ab}p &= ((i_2 + i_1)\varphi - i_1\varphi - i_2\varphi)\psi \\
 &= (i_2 + i_1)\varphi\psi - (i_2\varphi + i_1\varphi)\psi \\
 \text{(k)} \quad si_{12}(\varphi^{ab} \otimes \varphi^{ab})(\nabla\psi)p &= s \wedge^2(\varphi^{ab} \oplus \varphi^{ab})i_{12}(\nabla\psi)p \\
 \text{(l)} &= (\varphi \vee \varphi)si_{12}(\nabla\psi)p \\
 &= (\varphi \vee \varphi)((i_2 + i_1)\psi - i_1\psi - i_2\psi) \\
 &= (i_2\varphi + i_1\varphi)\psi - i_1\varphi\psi - i_2\varphi\psi \\
 \text{(m)} \quad \text{(j)} + \text{(k)} &= (i_2 + i_1)\varphi\psi - i_1\varphi\psi - i_2\varphi\psi \\
 &= (i_2 + i_1)s\beta p - i_1s\beta p - i_2s\beta p \\
 \text{(n)} &= s(\wedge^2(i_2 + i_1) - \wedge^2 i_1 - \wedge^2 i_2)\beta p \\
 \text{(o)} &= si_{12}(1 - T)\eta\beta p
 \end{aligned}$$

En (k) aplicamos la naturalidad de la inclusión i_{12} del efecto cuadrático cruzado de \wedge^2 , y en (l) y (n) la naturalidad de (5.3.D). En (o) usamos que dados $e_1 \prec e_2 \in E_1$

$$\begin{aligned} (\wedge^2(i_2 + i_1) - \wedge^2 i_1 - \wedge^2 i_2)(e_1 \wedge e_2) &= (i_1 e_1 + i_2 e_1) \wedge (i_1 e_2 + i_2 e_2) \\ &\quad - i_1 e_1 \wedge i_1 e_2 - i_2 e_1 \wedge i_2 e_2 \\ &= i_1 e_1 \wedge i_2 e_2 - i_1 e_2 \wedge i_2 e_1 \\ &= i_{12}(1 - T)\eta(e_1 \wedge e_2). \end{aligned}$$

Luego por (m) obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{(i)} &= -\omega(i_1 \otimes i_2)\eta\beta p - \omega(i_2 \otimes i_1)(\eta\beta - (1 - T)\eta\beta)p \\ &= -\omega(i_1 \otimes i_2 + i_2 \otimes i_1 T)\eta\beta p \\ \text{(p)} &= -\omega\tau i_{12}\eta\beta p. \end{aligned}$$

En (p) hemos usado las definiciones de τ y de la inclusión i_{12} del efecto cuadrático cruzado de Γ , ambas dadas en (5.1.2). De este modo, en virtud de la observación hecha al comienzo de la Sección 6.1 y de (8.5.B), la última igualdad implica que $\gamma_2\{y\}$ está representado por $-\eta\beta(x) \in \otimes^2 C_1 X$, y usando también (8.5.A) y $q\eta = 1$ vemos que tanto $-\beta(x) = \alpha(x) - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi)(x)$ como $\alpha(x) \in \wedge^2 C_1 X$ representan $\kappa\{x\}$. Con esto concluimos la demostración de este resultado. \square

En la siguiente nota realizamos varias observaciones sobre la demostración de (8.5.1) que serán de utilidad en la próxima sección.

Observación 8.5.2. Si consideramos el cuadrado derecho del diagrama (8.5.A) para el 2-esqueleto X^2 obtenemos

$$(8.5.D) \quad \begin{array}{ccc} \pi_3 \Sigma X^2 & \xrightarrow{h_3} & \text{Ker } d_2 \\ \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \kappa \\ \otimes^2 H_1 X & \xrightarrow{q} & \wedge^2 H_1 X \end{array}$$

ya que $\text{Ker } d_2 = H_2 X^2$. Es sabido que este grupo es libre abeliano, por tanto h_3 en (8.5.D) admite una sección. De hecho una sección concreta está determinada por el homomorfismo $r\psi - \omega\eta(-\alpha + (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi))p$ en (8.5.C). Para la definición de este homomorfismo usamos el homomorfismo ψ escogido en el enunciado de (8.5.1), la sección $\eta: \wedge^2 C_1 X \hookrightarrow \otimes^2 C_1 X$ de la proyección natural q inducida por un orden total \preceq en el conjunto de 1-células de X , y el homomorfismo φ inducido por la aplicación de pegamiento de 2-células en X . Llamemos ζ_X a esta sección de h_3 . Es más, en la demostración

de (8.5.1) comprobamos que, si $t_X: C_1X \rightarrow H_1X$ es la proyección natural, entonces la composición de esta sección con el invariante de James-Hopf es $\gamma_2\zeta_X = (\otimes^2 t_X)\eta(\alpha - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi))$. Recordemos que α en (8.5.1) se definía como el único homomorfismo tal que $\varphi\psi = \alpha p$.

Si $Y \subset X$ es un subcomplejo, el homomorfismo φ' inducido por la aplicación de pegamiento de 2-células en Y está completamente determinado por φ , de hecho φ' es una restricción de φ en el rango y el dominio a los subgrupos cuyas bases son las células de X que están en Y . Es más, la sección η induce una sección $\eta': \wedge^2 C_1Y \hookrightarrow \otimes^2 C_1Y$ que está definida por la restricción del orden total \preceq al subconjunto de 1-células de Y . Más aún, supongamos que escogemos la base Z_2 del grupo libre abeliano $\text{Ker } d_2 = H_2X^2$ considerada en el enunciado de (8.5.1) de forma tal que Z_2 contenga una base Z'_2 de H_2Y^2 , y el homomorfismo ψ de tal manera que la imagen de Z'_2 caiga en el subgrupo generado por las 2-células de Y . En este caso existe un homomorfismo ψ' de $\langle Z'_2 \rangle^{\text{nil}}$ al nil(2)-grupo libre con base las 2-células de Y que es restricción de ψ de la misma forma que φ se restringe a φ' . Este homomorfismo ψ' satisface las condiciones del enunciado de (8.5.1). Sea α' el único homomorfismo tal que $\varphi'\psi' = \alpha'p$, este α' está también determinado por α , de la misma forma que φ' y ψ' , y hay una sección del homomorfismo de Hurewicz $\zeta_Y: H_2Y^2 \hookrightarrow \pi_3\Sigma Y^2$ inducida por α' , ψ' y η' , como en el caso de ζ_X . Esta sección ζ_Y es compatible con ζ_X en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo

$$(8.5.E) \quad \begin{array}{ccc} \pi_3\Sigma Y^2 & \longrightarrow & \pi_3\Sigma X^2 \\ \zeta_Y \uparrow & & \uparrow \zeta_X \\ H_2Y^2 & \longrightarrow & H_2X^2 \end{array}$$

Es más, también tenemos que $\gamma_2\zeta'_X = (\otimes^2 t_Y)\eta'(\alpha' - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi'))$, y obsérvese que los homomorfismos $\eta(\alpha - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi))$ y $\eta'(\alpha' - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi'))$ también son compatibles, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$(8.5.F) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\langle Z'_2 \rangle & \xrightarrow{\eta'(\alpha' - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi'))} & \otimes^2 C_1Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}\langle Z_2 \rangle & \xrightarrow{\eta(\alpha - (\wedge^2 d_2)q(\nabla\psi))} & \otimes^2 C_1X \end{array}$$

8.6 Cálculo del cup-producto de complejos de cadenas

En esta sección demostramos uno de los resultados capitales de esta memoria. Concretamente damos una descripción de la clase “cup producto de complejos de cadenas”

$$\bar{\cup} \in H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

construida en (6.4.4) ($n \geq 2$) usando sólo el álgebra controlada de grupos libres de grado de nilpotencia 2 vista en (5.3). La importancia de este resultado estriba en que a partir de él es posible calcular de forma sencilla y puramente algebraica el invariante cup-producto $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$ de un complejo de cadenas \mathcal{C}_* ($n-1$)-reducido a partir de sus diferenciales d_{n+1} y d_{n+2} , sin tener que recurrir a cálculos de invariantes homotópicos, tales como el invariante de James-Hopf en homotopía propia, para los cuales en principio no tenemos herramientas. Con los resultados obtenidos hasta el momento el cálculo del cup-producto de un complejo de cadenas tiene interés por sí mismo, véase la Sección 6.5, sin embargo cobrará aún mayor relevancia en el siguiente capítulo cuando lo apliquemos a la obtención de una clasificación de los tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión ≤ 4 con a lo más 3 finales, alcanzando así el principal objetivo de esta memoria.

En la parte más dura de la demostración del primer teorema que probamos en esta sección usamos una técnica bastante extendida en teoría de homotopía propia que sin embargo sólo aparece aquí a lo largo de esta memoria. Esta técnica consiste en extender propiedades naturales en homotopía ordinaria a la homotopía propia aplicando precisamente la naturalidad con respecto a inclusiones de una base de entornos del infinito de un espacio dentro de su compactificación de Freudenthal. Compárese, por ejemplo, con la demostración de teorema de Blakers-Massey en homotopía propia dada en [BQ01].

Dado un complejo de cadenas ($n-1$)-conexo \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ ($n \geq 2$) consideramos dos morfismos en $\mathbf{nil}(T)$

$$\langle A_{n+2} \rangle_{\alpha_{n+2}}^{nil} \xrightarrow{\partial_{n+2}} \langle A_{n+1} \rangle_{\alpha_{n+1}}^{nil} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \langle A_n \rangle_{\alpha_n}^{nil}$$

cuya abelianización coincide con la parte inferior de \mathcal{C}_*

$$\mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathcal{C}_n, \quad d_{n+2} = \partial_{n+2}^{ab}, \quad d_{n+1} = \partial_{n+1}^{ab}.$$

Al ser $(\partial_{n+1} \partial_{n+2})^{ab} = d_{n+1} d_{n+2} = 0$ usando la extensión lineal (5.3.E) vemos que existe un único homomorfismo controlado $\vartheta: \mathcal{C}_{n+2} \rightarrow \wedge_T^2 \mathcal{C}_n$ tal

que $\partial_{n+1}\partial_{n+2} = 0 + \vartheta$. Si denotamos $\tilde{p}: \mathcal{C}_n \rightarrow H_n\mathcal{C}_*$ a la proyección natural entonces

Teorema 8.6.1. *En las condiciones anteriores el morfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos*

$$\mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{\vartheta} \wedge_T^2 \mathcal{C}_n \xrightarrow{\wedge_T^2 \tilde{p}} \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*$$

es un cociclo que representa al invariante cup-producto

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_n \mathcal{C}_*).$$

Demostración. En virtud de la estabilidad del invariante cup-producto de complejos de cadenas probada en (6.4.5) será suficiente probar el resultado para $n = 2$.

Supongamos demostrado el teorema para complejos de cadenas \mathcal{C}'_* de dimensión ≤ 4 cuya homología esté concentrada en grado 2. Entonces dado un complejo de cadenas cualquiera \mathcal{C}_* tomamos \mathcal{C}'_* como el único de dicha forma que coincide con \mathcal{C}_* en dimensiones ≤ 3 . Este complejo de cadenas \mathcal{C}'_* es el mismo que $\mathcal{C}_*^{(3)}$ en (3.2.8) (2) y su existencia era consecuencia de (2.2.14). También observamos en (3.2.8) (2) que existe un único morfismo $f = f^{(3)}: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$ que es la identidad en dimensiones ≤ 3 . Sea ∂'_3 un morfismo en $\mathbf{nil}(T)$ cuya abelianización coincida con la diferencial d'_4 del complejo de cadenas \mathcal{C}'_* , y ϑ' el homomorfismo controlado tal que $\partial_3\partial'_4 = 0 + \vartheta'$. Como suponemos que el teorema se satisface para \mathcal{C}'_* la naturalidad del cup-producto de complejo de cadenas (6.4.4) prueba que $(\wedge_T^2 \tilde{p})\vartheta' f_4$ es un cociclo que representa a $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$. Por ser f un morfismo de complejos de cadenas tenemos que $d'_4 f_4 = f_3 d_4 = d_4$. Tomemos un morfismo f'_4 en $\mathbf{nil}(T)$ cuya abelianización sea f_4 . Como $(\partial'_4 f'_4)^{ab} = d_4 = \partial_4^{ab}$ existe un único homomorfismo controlado $\alpha: \mathcal{C}_4 \rightarrow \wedge_T^2 \mathcal{C}_3$ tal que $\partial_4 + \alpha = \partial'_4 f'_4$, para la acción + de la extensión lineal (5.3.E), así que usando las propiedades de esta acción tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 0 + \vartheta' f_4 &= 0 + f_4^* \vartheta' \\ &= (0 + \vartheta') f'_4 \\ &= \partial_3 \partial'_4 f'_4 \\ &= \partial_3 (\partial_4 + \alpha) \\ &= \partial_3 \partial_4 + (d_3)_*(\alpha) \\ &= 0 + \vartheta + (\wedge_T^2 d_3) \alpha \end{aligned}$$

por tanto $\vartheta' f_4 = \vartheta + (\wedge_T^2 d_3) \alpha$, luego $(\wedge_T^2 \tilde{p})(\vartheta + (\wedge_T^2 d_3) \alpha) = (\wedge_T^2 \tilde{p}) \vartheta$ es en efecto un cociclo representante de $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$.

Ahora demostremos el resultado para un complejo de cadenas \mathcal{C}_* de dimensión ≤ 4 con homología concentrada en dimensión 2. Esto es, si denotamos $\mathcal{C}_k = \mathbb{Z}\langle A_k \rangle_{\alpha_k}$ ($k = 2, 3, 4$) la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} \xrightarrow{d_4} \mathbb{Z}\langle A_3 \rangle_{\alpha_3} \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle_{\alpha_2}$$

es exacta. La construcción llevada a cabo en [ACMQ03] del núcleo de un morfismo entre grupos abelianos libres T -controlados, aunque enunciada en un lenguaje equivalente pero distinto al usado aquí, prueba que para todo $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$ existen bases de entornos $\{U_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{V_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{W_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ de ε dentro de la compactificación de Freudenthal \hat{T} del árbol T con $U_0 = V_0 = W_0 = \hat{T}$ tales que las diferenciales de \mathcal{C}_* dan lugar a sucesiones exactas de grupos abelianos ($k \in \mathbb{N}_0, \varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon}) \rangle \xrightarrow{d_4} \mathbb{Z}\langle \alpha_3^{-1}(V_{k,\varepsilon}) \rangle \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle \alpha_2^{-1}(W_{k,\varepsilon}) \rangle.$$

No hay problema en suponer, tomando subsucesiones si fuese necesario, que los homomorfismos controlados ∂_3 y ∂_4 satisfacen las siguientes inclusiones ($k \in \mathbb{N}_0, \varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$)

$$\begin{aligned} \partial_4(\alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon})) &\subset \langle \alpha_3^{-1}(V_{k,\varepsilon}) \rangle^{nil}, \\ \partial_3(\alpha_3^{-1}(V_{k,\varepsilon})) &\subset \langle \alpha_2^{-1}(W_{k,\varepsilon}) \rangle^{nil}. \end{aligned}$$

También podemos suponer que $\partial_3 = \bar{\partial}_3^{nil}$ para cierto homomorfismo controlado $\bar{\partial}_3: \langle A_3 \rangle_{\alpha_3} \rightarrow \langle A_2 \rangle_{\alpha_2}$ en $\mathbf{gr}(T)$ que satisface

$$\bar{\partial}_3(\alpha_3^{-1}(V_{k,\varepsilon})) \subset \langle \alpha_2^{-1}(W_{k,\varepsilon}) \rangle$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$.

Para calcular el invariante cup-producto $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$ comenzamos escogiendo un sistema de homotopía de orden 4 $\underline{X}_4 = (\mathcal{C}_*, f_4, X^3)$ cuyo complejo de cadenas sea \mathcal{C}_* , véase (6.4.3). Consideramos el T -complejo Y obtenido como la cofibra de una aplicación $\tilde{\partial}_3: S_{\alpha_3}^1 \rightarrow S_{\alpha_2}^1$ cuya clase de homotopía se corresponde con $\bar{\partial}_3$ a través del isomorfismo de categorías en (3.1.1). Podemos tomar $X^3 = \Sigma Y$. El complejo Y posee familias de subcomplejos $\{Y_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ($\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$) con $Y_{k,\varepsilon} = Z_{k,\varepsilon} \cup T$ tales que las compactificaciones de Freudenthal $\{\hat{Z}_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ forman una base de entornos de $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T) = \mathfrak{F}(Y)$ dentro de la compactificación de Freudenthal \hat{Y} . El 1-esqueleto $Y_{k,\varepsilon}^1$ de $Y_{k,\varepsilon}$ es el subobjeto esférico $S_{\alpha_2}^{1_{k,\varepsilon}} \subset S_{\alpha_2}^1$ cuyas circunferencias son las indexadas por el conjunto $\alpha_2^{-1}(W_{k,\varepsilon})$, y las 2-células de $Y_{k,\varepsilon}$ se pegan en el 1-esqueleto $Y_{k,\varepsilon}^1$ a través de la restricción de $\tilde{\partial}_3$ al subobjeto esférico $S_{\alpha_3}^{1_{k,\varepsilon}}$ de $S_{\alpha_3}^1$ obtenido

al quedarse únicamente con las circunferencias indexadas por el conjunto $\alpha_3^{-1}(V_{k,\varepsilon})$. Además $Y_{0,\varepsilon} = Y$ para todo $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$.

Antes de proseguir es necesario observar que la teoría de homotopía ordinaria de espacios bien punteados coincide con la de espacios cofibrantes basados en T ya que tanto la inclusión de cualquier punto $* \rightarrow T$ como la aplicación (no propia) $T \rightarrow *$ son equivalencias de homotopía ordinaria. Las equivalencias entre las categorías de homotopía de \mathbf{Top}_c^* y \mathbf{Top}_c^T inducidas por estas equivalencias de homotopía ordinaria son casos particulares de (1.1.13) (2). Dichas equivalencias están inducidas por funtores $\mathbf{Top}_c^T \rightleftarrows \mathbf{Top}_c^*$ que preservan cilindros, y por tanto todas las construcciones vistas en (1.2.5) y relacionadas con él, en particular las suspensiones y sus co-H-estructuras.

Por construcción la segunda homología ordinaria de $Y_{k,\varepsilon}$ es el grupo libre abeliano $H_2 Y_{k,\varepsilon} = \mathbb{Z}\langle \alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon}) \rangle$ ($k \in \mathbb{N}_0, \varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$). Como comentamos en (8.5.2) en la demostración de (8.5.1) se construyen secciones $\zeta_{Y_{k,\varepsilon}}$ del homomorfismo de Hurewicz ordinario $h_3: \pi_3 \Sigma Y_{k,\varepsilon} \rightarrow H_3 \Sigma Y_{k,\varepsilon} = H_2 Y_{k,\varepsilon}$ que son compatibles con las inclusiones de subcomplejos, y por tanto definen una aplicación propia $f_4: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow \Sigma Y$ bajo T que, restringida al subobjeto esférico $S_{\alpha_4^{k,\varepsilon}}^3$ de $S_{\alpha_4}^3$ cuyas circunferencias vienen indexadas por $\alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon})$, es una aplicación $f_4^{k,\varepsilon}: S_{\alpha_4^{k,\varepsilon}}^2 \rightarrow Y_{k,\varepsilon}$, cuya clase de homotopía ordinaria se corresponde a $\zeta_{Y_{k,\varepsilon}}$, compuesta con la inclusión $\Sigma Y_{k,\varepsilon} \subset \Sigma Y$. Si componemos $f_{4*}: \mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} \rightarrow \Pi_3 \Sigma Y$ con el morfismo de Hurewicz en homotopía propia $\Pi_3 \Sigma Y \rightarrow \mathcal{H}_3 \Sigma Y = \mathcal{H}_2 Y$ obtenemos la identidad $\mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} = \mathcal{H}_2 Y$, ya que al componer $\zeta_{Y_{k,\varepsilon}}$ con el homomorfismo de Hurewicz ordinario $h_3: \pi_3 \Sigma Y_{k,\varepsilon} \rightarrow H_3 \Sigma Y_{k,\varepsilon} = H_2 Y_{k,\varepsilon}$ también obtenemos la identidad en $\mathbb{Z}\langle \alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon}) \rangle = H_2 Y_{k,\varepsilon}$ puesto que $\zeta_{Y_{k,\varepsilon}}$ es una sección de h_3 ($k \in \mathbb{N}_0, \varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$). Por tanto tomando este f_4 obtenemos un sistema de homotopía $\underline{X}_4 = (\mathcal{C}_*, f_4, X^3 = \Sigma Y)$ adecuado para calcular $\bar{U}_{\mathcal{C}_*}$.

El homomorfismo $\eta: \wedge_T^2 \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle_{\alpha_2} \rightarrow \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle_{\alpha_2}$, sección de q , definido al comienzo de la demostración de (8.5.1) es siempre controlado, independientemente del orden total en A_2 que se escoja para su definición, como también es controlado $\nabla \partial_4: \mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} \rightarrow \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A_3 \rangle_{\alpha_3}$ por serlo ∂_4 ; en particular el homomorfismo

$$\eta(\vartheta - (\wedge_T^2 d_2)q_T(\nabla \partial_4)): \mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} \longrightarrow \otimes_T^2 \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle_{\alpha_2}$$

es controlado. Este morfismo se identifica a través de (5.4.3) con la clase de homotopía propia bajo T de una aplicación $\varepsilon: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow S_{\alpha_2}^2 \vee S_{\alpha_2}^2$ que es homotópicamente trivial al componer con cualquiera de las proyecciones de los dos factores del coproducto. Si restringimos la composición de ε con la

inclusión del 2-esqueleto $S_{\alpha_2}^2 \vee S_{\alpha_2}^2 \subset \Sigma Y \vee \Sigma Y$ al subobjeto esférico $S_{\alpha_4}^3 \subset S_{\alpha_4}^3$ entonces la aplicación resultante factoriza a través de la inclusión $\Sigma Y_{k,\varepsilon} \vee \Sigma Y_{k,\varepsilon} \subset \Sigma Y \vee \Sigma Y$ por una aplicación propia bajo T $\phi_{k,\varepsilon}: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow \Sigma Y_{k,\varepsilon} \vee \Sigma Y_{k,\varepsilon}$ que, en virtud de lo observado en la introducción de la Sección 6.1 y en (8.5.2), coincide salvo homotopía ordinaria con $i_3 i_{12} \gamma_2(f_4^{k,\varepsilon}) = \mu_{Y_{k,\varepsilon}} f_4^{k,\varepsilon} - i_2 f_4^{k,\varepsilon} - i_1 f_4^{k,\varepsilon}: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow \Sigma Y_{k,\varepsilon} \vee \Sigma Y_{k,\varepsilon}$, donde $\mu_{Y_{k,\varepsilon}}: \Sigma Y_{k,\varepsilon} \rightarrow \Sigma Y_{k,\varepsilon} \vee \Sigma Y_{k,\varepsilon}$ son las co-H-multiplicaciones de estas suspensiones y $\gamma_2(f_4^{k,\varepsilon}): \mathbb{Z}\langle \alpha_4^{-1}(U_{k,\varepsilon}) \rangle \rightarrow \otimes^2 H_2 \Sigma Y_{k,\varepsilon}$ es el invariante de James-Hopf ordinario. Además como las co-H-multiplicaciones $\mu_{Y_{k,\varepsilon}}$ son compatibles con las inclusiones de subcomplejos, vemos que de hecho $\phi_{k,\varepsilon}$ es propiamente homotópica bajo T a $\mu_{Y_{k,\varepsilon}} f_4^{k,\varepsilon} - i_2 f_4^{k,\varepsilon} - i_1 f_4^{k,\varepsilon}: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow \Sigma Y_{k,\varepsilon} \vee \Sigma Y_{k,\varepsilon}$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon \in \mathfrak{F}(T)$, en particular para $k = 0$ obtenemos que $\mu_Y f_4 - i_2 f_4 - i_1 f_4: S_{\alpha_4}^3 \rightarrow \Sigma Y \vee \Sigma Y$ es homotópica en \mathbf{Top}_c^T a la composición de ε con la inclusión del 2-esqueleto $S_{\alpha_2}^2 \vee S_{\alpha_2}^2 \subset \Sigma Y \vee \Sigma Y$, por tanto usando la definición (6.1.1) del invariante de James-Hopf en homotopía propia $\gamma_2(f_4): \mathbb{Z}\langle A_4 \rangle_{\alpha_4} \rightarrow \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \Sigma Y$ vemos que $\gamma_2(f_4) = (\otimes_T^2 \tilde{p})\eta(\vartheta - (\wedge_T^2 d_2)q_T(\nabla \partial_4))$, así que aplicando la definición (6.4.3) del cup-producto de complejos de cadenas $\bar{\cup}_{c_*}$ vemos que está representado por

$$\begin{aligned} \bar{q}_T \bar{\sigma}_T \gamma_2(f_4) &= q_T \gamma_2(f_4) \\ &= q_T (\otimes_T^2 \tilde{p})\eta(\vartheta - (\wedge_T^2 d_2)q_T(\nabla \partial_4)) \\ &= (\wedge_T^2 \tilde{p})q_T \eta(\vartheta - (\wedge_T^2 d_2)q_T(\nabla \partial_4)) \\ &= (\wedge_T^2 \tilde{p})(\vartheta - (\wedge_T^2 d_2)q_T(\nabla \partial_4)) \\ &= (\wedge_T^2 \tilde{p})\vartheta, \end{aligned}$$

con lo que el teorema queda demostrado. □

El procedimiento de cálculo dado por este teorema nos permite calcular el invariante cup-producto de un complejo de cadenas dado, sin embargo para realizar un cálculo completo de la clase

$$\bar{\cup} \in H^0({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

necesitaríamos, al menos a priori, conocer cómo son todos los complejos de cadenas acotados $(n - 1)$ -reducidos ($n \geq 2$) en $\mathbf{ab}(T)$. En realidad bastaría sólo con conocer cómo son los $\mathbf{ab}(T)$ -módulos finitamente presentados. Esto es así por lo siguiente: como es bien sabido, el funtor de homología

$$H_n: {}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq \longrightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$$

admite una sección

$$\iota: \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow {}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq$$

consistente en escoger para cada $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} un complejo de cadenas acotado y $(n-1)$ -reducido $\mathcal{C}_* = \iota\mathcal{M}$ cuyo único módulo de homología no trivial sea $H_n\mathcal{C}_* = \mathcal{M}$. Tal complejo de cadenas siempre existe por (2.2.14), es más, siempre podemos tomarlo de dimensión $n + \text{proj dim } \mathcal{M}$, en particular de dimensión $\leq n + 2$, compárese con (4.2.8). Dado un functor cualquiera

$$F: \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T)) \longrightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$$

el pull-back a lo largo de ι del $({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq)$ -bimódulo $H^{n+2}(-, FH_n)$ es

$$\iota^* H^{n+2}(-, FH_n) = \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, F).$$

Es más, el pull-back del $\mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$ -bimódulo $\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, F)$ a lo largo de H_n es

$$H_n^* \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, F) = \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(H_n, FH_n).$$

Además la sucesión espectral de coeficientes universales (3.2.7) da lugar a una transformación natural

$$\lambda: \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(H_n, FH_n) \longrightarrow H^{n+2}(-, FH_n)$$

que se descompone de la siguiente forma

$$\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(H_n, FH_n) = E_2^{n,2} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,2} \hookrightarrow H^{n+2}(-, FH_n).$$

En efecto, el epimorfismo $E_2^{n,2} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,2}$ se tiene ya que todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. tiene dimensión proyectiva ≤ 2 (2.2.15), y el monomorfismo $E_\infty^{n,2} \hookrightarrow H^{n+2}(-, FH_n)$ por estar sólo considerando complejos de cadenas \mathcal{C}_* $(n-1)$ -reducidos, con lo que $H_k\mathcal{C}_* = 0$ para todo $k < n$.

Proposición 8.6.2. *En las condiciones anteriores tenemos isomorfismos mutuamente inversos*

$$\begin{array}{ccc} H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, FH_n)) & & \\ \lambda_* H_n^* \uparrow \simeq \downarrow \iota^* & & \\ H^0(\mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T)), \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, F)) & & \end{array}$$

Demostración. El functor $H_n\iota$ es la identidad en $\mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$ y el pull-back de λ a lo largo de ι es la identidad en $\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, F)$, por tanto $\iota^*(\lambda_* H_n^*) =$

$(\iota^* \lambda)_*(H_n \iota)^* = 1$, véase la Sección 4.3. Ahora basta ver que el homomorfismo ι^* es inyectivo. Sea pues v un 0-cociclo en el grupo abeliano de arriba en el diagrama del enunciado. La igualdad $\iota^* v = 0$ significa que para todo complejo de cadenas \mathcal{C}'_* en ${}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$ cuya homología esté concentrada en grado n se tiene que $v(\mathcal{C}'_*) = 0$. Como vimos en (3.2.8) (2), dado un complejo de cadenas cualquiera \mathcal{C}_* en ${}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$ existe otro $\mathcal{C}_*^{(n+1)}$ en la misma categoría, cuya homología se concentra en grado n , y un morfismo $f: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*^{(n+1)}$ que induce la identidad en H_n , en particular

$$f_* = 1: H^{n+2}(\mathcal{C}_*, FH_n \mathcal{C}_*) \longrightarrow H^{n+2}(\mathcal{C}_*^{(n+1)}, FH_n \mathcal{C}_*^{(n+1)})$$

es también la identidad. Por ser v un 0-cociclo tenemos que

$$v(\mathcal{C}_*) = f_* v(\mathcal{C}_*) = f^* v(\mathcal{C}_*^{(n+1)}) = f^* 0 = 0,$$

con lo que vemos que $v = 0$, y por tanto ι^* es inyectiva. □

La clase de cohomología

$$\iota^* \bar{U} \in H^0(\mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T)), \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(-, \wedge_T^2))$$

representa la obstrucción universal a la existencia en homotopía propia de co-H-espacios de Moore de grado 2 con homología dada, véase (6.5.4). La proposición anterior demuestra que el cálculo de esta clase equivale al de toda la clase cup-producto \bar{U} . Sin embargo no podemos esperar ser capaces de calcular $\iota^* \bar{U}$, ni siquiera haciendo uso de (8.6.1), ya que tropezamos con el obstáculo insalvable de la complejidad de la teoría de representaciones de la categoría $\mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$, o lo que es lo mismo, de las álgebras $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$, véase por ejemplo (7.2).

Para evitar los problemas relacionados con la teoría de representaciones podríamos intentar reducir el problema al cálculo de una clase en la cohomología de $\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T)))$, y no de $\mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))) = \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$ como en (8.6.2), de forma que, a la luz de los principales resultados del Capítulo 7, pudiésemos tener éxito al menos en caso en que T tuviese menos de 4 finales. No cabe esperar poder llevar esto a cabo para un funtor F cualquiera ya que el grupo abeliano $\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, F\mathcal{M})$ no tiene porqué ser de exponente 2 para cualquier $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. \mathcal{M} . Pero ¿qué ocurriría si F factorizara a través de la inclusión llena $\iota: \mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))) \hookrightarrow \mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)))$?

$$(8.6.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))) & \xrightarrow{F} & \mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))) \\ -\otimes_{\mathbb{Z}_2} \downarrow & & \uparrow \iota \\ \mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))) & \xrightarrow{F} & \mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))) \end{array}$$

Recordemos que la inclusión llena $\iota = p^*$ está inducida por la proyección natural $p: \mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)) \rightarrow \mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T)) \otimes \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ y su adjunto a izquierda es el producto tensorial $-\otimes_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))} \mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T)) = -\otimes_{\mathbb{Z}_2}$ que satisface $(-\otimes_{\mathbb{Z}_2})\iota = 1$, véase (5.2.15) (3). La unidad de esta adjunción viene dada por la proyección natural $\hat{p}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$. Observemos también que, en estas condiciones, a partir de (7.9.11) obtenemos identificaciones naturales

$$i^* \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(-, F) = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, F),$$

$$(-\otimes_{\mathbb{Z}_2})^* \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, F) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(-\otimes_{\mathbb{Z}_2}, F),$$

por tanto la proyección natural \hat{p} da lugar a una transformación natural

$$\chi = \hat{p}^*: (-\otimes_{\mathbb{Z}_2})^* \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, F) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(-, F)$$

cuyo pull-back a lo largo de ι es la identidad $i^*\chi = 1$.

Proposición 8.6.3. *Si F es un funtor que encaja en un diagrama conmutativo como (8.6.A) entonces tenemos isomorfismos mutuamente inversos*

$$\begin{array}{c} H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))), \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(-, F)) \\ \chi_*(-\otimes_{\mathbb{Z}_2})^* \uparrow \simeq \downarrow i^* \\ H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))), \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, F)) \end{array}$$

Demostración. Por un lado tenemos que $i^*(\chi_*(-\otimes_{\mathbb{Z}_2})^*) = (i^*\chi)_*(-\otimes_{\mathbb{Z}_2})\iota^* = 1$, así que basta ver que i^* es un homomorfismo inyectivo. Tomemos pues un 0-cociclo v tal que $i^*v = 0$. Esto equivale a decir que para todo $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. \mathcal{M} tenemos que $v(\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2) = 0$. La proyección natural $\hat{p}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$ induce en este caso la identidad

$$\hat{p}_* = 1: \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(\mathcal{M}, F\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(\mathcal{M}, F\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2),$$

por tanto

$$v(\mathcal{M}) = \hat{p}_*v(\mathcal{M}) = \hat{p}^*v(\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2) = 0,$$

así que $v = 0$, i^* es inyectiva, y la proposición queda probada. \square

Esta proposición junto con (8.6.2) no puede ser aplicada a la determinación del cup-producto de complejos de cadenas

$$\bar{\cup} \in H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

ya que el funtor $\wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2$ no admite una factorización como la del diagrama (8.6.A). Sin embargo parece razonable preguntarse por el cup-producto módulo 2

$$(8.6.B) \quad \hat{p}_* \bar{\cup} \in H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)),$$

es decir, por la imagen de $\bar{\cup}$ a través del cambio de coeficientes inducido por la proyección natural $\hat{p}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$

$$\begin{array}{c} H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n)) \\ \downarrow \hat{p}_* \\ H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \end{array}$$

Aunque la clase $\hat{p}_* \bar{\cup}$ contiene menos información que $\bar{\cup}$, jugará un papel fundamental en los resultados de clasificación de tipos de homotopía propia estable del siguiente capítulo. También en éste nos ayudará a obtener $\mathbf{ab}(T)$ -módulos f. p. \mathcal{M} para los cuales no existe ningún espacio de Moore en homotopía propia de tipo $(\mathcal{M}, 2)$ que sea un co-H-espacio, respondiendo en negativo a la pregunta que dejamos abierta en la introducción del capítulo.

Si T es un árbol con a lo más tres finales podemos combinar (8.6.1), (8.6.2) y (8.6.3) con la teoría de representaciones de $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ desarrollada en el Capítulo 7 para calcular $\hat{p}_* \bar{\cup}$. Dichos cálculos son llevados a cabo en la demostración del siguiente resultado.

Teorema 8.6.4. *Si T es un árbol con 1 o 2 finales el grupo de cohomología*

$$H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) = 0$$

es trivial, por tanto $\hat{p}_ \bar{\cup} = 0$ en este caso. En cambio si T tienes 3 finales*

$$0 \neq \hat{p}_* \bar{\cup} \in H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) = \mathbb{Z}_2.$$

Demostración. Usando (8.6.2) y (8.6.3) obtenemos, para un árbol cualquiera, isomorfismos

$$\begin{array}{c} H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \simeq \downarrow \iota^* \\ H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))), \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))}^2(-, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2 \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \simeq \downarrow \iota^* \\ H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))), \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2)) \end{array}$$

que envían el cup-producto módulo 2 a $i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup}$. Aquí usamos que si \mathcal{M} es un $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. entonces $\wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2\mathcal{M} = \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$, véase (5.2.14).

Si T es un árbol con 1 o 2 finales todas las 0-cocadenas aditivas, en el sentido de (4.3.3) (2), de $\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T)))$ con coeficientes en $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2)$ son nulas, ya que para todo $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. elemental \mathcal{M} en (7.8.5) el grupo $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(\mathcal{M}, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2\mathcal{M}) = 0$ es trivial. Esto se ve para $\mathfrak{F}(T) = \mathbf{1}$ usando (7.9.4), (7.10.3) y (7.10.4). Para $\mathfrak{F}(T) = \mathbf{2}$ hemos de usar además (7.9.5), y aún nos quedaría demostrarlo para el $\mathbb{F}_2(\mathbf{2})$ -módulo $\mathbb{M}\underline{V}^{(2,1)}$ al que da lugar el 2-subespacio $\underline{V}^{(2,1)} = (\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2 \leftarrow \mathbb{F}_2)$ en (7.6.7), pero en este caso es trivial ya que aplicando (7.10.1) vemos que $\wedge_{\mathbf{2}}^2\mathbb{M}\underline{V}^{(2,1)} = \mathbb{M} \wedge^2 \underline{V}^{(2,1)} = 0$. De aquí se sigue la primera parte del enunciado, ya que todo 0-cociclo es aditivo, véase (4.3.3) (2).

Si T tiene 3 finales se demuestra fácilmente usando los mismos resultados que antes que $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(\mathcal{M}, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2\mathcal{M}) = 0$ para todo $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. elemental \mathcal{M} en (7.8.5) excepto para $\mathcal{M} = \mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$, en cuyo caso

$$\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}) = \mathbb{Z}_2.$$

Esta igualdad es probada en la demostración de (8.6.5). Por lo tanto, aparte de la trivial, existe otra 0-cocadena aditiva v de $\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T)))$ con coeficientes en $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))}^1(-, \wedge_{\mathfrak{F}(T)}^2)$ que vale $0 \neq v(\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}) \in \mathbb{Z}_2$ y $v(\mathcal{M}) = 0$ para cualquier $\mathbb{F}_2(\mathfrak{F}(T))$ -módulo f. p. elemental $\mathcal{M} \neq \mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$. Como todo 0-cociclo es aditivo el grupo de cohomología

$$H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)$$

será bien \mathbb{Z}_2 generado por v , o bien 0, dependiendo de si la 0-cocadena v es un 0-cociclo o no. En la siguiente proposición demostramos usando (8.6.1) que el invariante cup-producto de una resolución libre de $\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$ como $\mathbf{ab}(T)$ -módulo es no trivial, o lo que es lo mismo, que el 0-cociclo $i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup}$ no se anula sobre $\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$, por tanto $v = i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup} \neq 0$ y

$$H^0({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2,$$

con lo que concluye la demostración de este teorema. \square

Aplicando el Teorema 8.6.1 calcularemos en la siguiente proposición el invariante cup-producto de una resolución proyectiva de cierto $\mathbb{Z}(\mathfrak{F}(T))$ -módulo finitamente presentado que, como veremos, será no nulo. Además como corolario de este cálculo veremos que, para árboles T con 3 finales o más, siempre existe algún $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} tal que ningún espacio de Moore de tipo $(\mathcal{M}, 2)$ es un co-H-espacio. La posibilidad de este sorprendente hecho

estaba abierta, como se apuntó en (6.5.4), sin embargo hasta este momento no había sido posible encontrar ejemplos. Este ejemplo ilustra una vez más las diferencias radicales existentes entre la teoría de homotopía ordinaria y la propia.

Proposición 8.6.5. *Si \mathcal{C}_* es un complejo de cadenas $(n-1)$ -reducido en $\mathbf{ab}(T_3)$ que es una resolución proyectiva en grado $n \geq 2$ como $\mathbb{Z}(\mathbf{3})$ -módulo del $\mathbb{F}_2(\mathbf{3})$ -módulo elemental $\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$ determinado por el 3-subespacio*

$$\underline{V}^{(3,5)} = \left(\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{F}_2\langle x+y \rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathbb{F}_2\langle x \rangle & \rightarrow & \mathbb{F}_2\langle x, y \rangle & \leftarrow & \mathbb{F}_2\langle y \rangle \end{array} \right),$$

entonces

$$0 \neq \bar{U}_{\mathcal{C}_*} \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_{T_3}^2 H_n \mathcal{C}_*) = \mathbb{Z}_2.$$

Demostración. Por ser \mathcal{C}_* una resolución de $\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$ en grado n , y aplicando (7.9.11), (7.9.6) y (7.10.1) tenemos que

$$\begin{aligned} H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_{T_3}^2 H_n \mathcal{C}_*) &= \text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathbf{3})}^2(\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}, \wedge_{\mathbf{3}}^2 \underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}) \\ &= \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}, \wedge_{\mathbf{3}}^2 \underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}) \\ &= \text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \wedge^2 \underline{V}^{(3,5)}). \end{aligned}$$

Como ya apuntamos en la demostración de (7.10.5) $\wedge^2 \underline{V}^{(3,5)}$ coincide con el siguiente 3-subespacio

$$\wedge^2 \underline{V}^{(3,5)} = \left(\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{F}_2\langle x \wedge y \rangle & \leftarrow & 0 \end{array} \right)$$

Es inmediato comprobar que $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}(\underline{V}^{(3,5)}, \wedge^2 \underline{V}^{(3,5)}) = 0$, por tanto en virtud de (7.9.8)

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \wedge^2 \underline{V}^{(3,5)}) &= -\langle \underline{\dim} \underline{V}^{(3,5)}, \underline{\dim} \wedge_{\mathbf{3}}^2 \underline{V}^{(3,5)} \rangle_{Q_3} \\ &= -\langle (2, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle_{Q_3} \\ &= -2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

y en definitiva $H^{n+2}(\mathcal{C}_*, \wedge_{T_3}^2 H_n \mathcal{C}_*) = \mathbb{Z}_2$.

Ahora comprobemos que $\bar{U}_{\mathcal{C}_*} \neq 0$. Para ello consideramos los conjuntos $D = \{m w^1, m w^2\}_{m \geq 1}$ y $C = D \sqcup \{w_1, w_2\}$ junto con las funciones de altura

$\gamma: C \rightarrow T_3^0$ y $\delta: D \rightarrow T_3^0$ definidas como $\gamma(w_1) = \gamma(w_2) = v_0$ y $\gamma(mw^i) = \delta(mw^i) = v_m^i$ ($m \geq 1; i = 1, 2, 3$). Definimos homomorfismos controlados

$$(a) \quad \langle D \rangle_{\delta}^{nil} \xrightarrow{\partial_{n+2}} \langle D \rangle_{\delta}^{nil} \vee \langle C \rangle_{\gamma}^{nil} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \langle C \rangle_{\gamma}^{nil}$$

como $\partial_{n+2} = i_1 + i_1 - i_2\varphi$ y $\partial_{n+1} = (\varphi, 1 + 1)$ donde $\varphi: \langle D \rangle_{\delta}^{nil} \rightarrow \langle C \rangle_{\gamma}^{nil}$ es

$$\varphi(mw^i) = \begin{cases} mw^i - m_{-1}w^i, & \text{para todo } i = 1, 2, 3 \text{ si } m > 1; \\ 1w^1 - w_1, & \text{si } i = 1 \text{ y } m = 1; \\ 1w^2 - w_2 - w_1, & \text{si } i = 2 \text{ y } m = 1; \\ 1w^3 - w_2, & \text{si } i = 3 \text{ y } m = 1. \end{cases}$$

Observando la resolución proyectiva de $\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$ como $\mathbb{F}_2(\mathbf{3})$ -módulo construida en la demostración de (7.7.1) se comprueba de forma inmediata que si tomamos \mathcal{C}_* como la abelianización de (a) en dimensiones $n, n + 1$ y $n + 2$, y cero en el resto, entonces \mathcal{C}_* es un complejo de cadenas en las condiciones del enunciado. Como todos ellos son del mismo tipo de homotopía bastará probar la proposición para éste.

Dado $1 \leq i \leq 3$ y $m > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}\partial_{n+2}(mw^i) &= \partial_{n+1}(i_1(mw^i) + i_1(mw^i) - i_2(mw^i - m_{-1}w^i)) \\ &= \partial_{n+1}(i_1(mw^i) + i_1(mw^i) + i_2(m_{-1}w^i) - i_2(mw^i)) \\ &= mw^i - m_{-1}w^i + mw^i - m_{-1}w^i \\ &\quad + m_{-1}w^i + m_{-1}w^i - mw^i - mw^i \\ &= mw^i + [m_{-1}w^i, -mw^i] - mw^i \\ &= [mw^i, m_{-1}w^i]. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}\partial_{n+2}(1w^1) &= \partial_{n+1}(i_1(1w^1) + i_1(1w^1) - i_2(1w^1 - w_1)) \\ &= \partial_{n+1}(i_1(1w^1) + i_1(1w^1) + i_2(w_1) - i_2(1w^1)) \\ &= 1w^1 - w_1 + 1w^1 - w_1 \\ &\quad + w_1 + w_1 - 1w^1 - 1w^1 \\ &= 1w^1 + [w_1, -1w^1] - 1w^1 \\ &= [1w^1, w_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\partial_{n+2}(1w^2) &= \partial_{n+1}(i_1(1w^2) + i_1(1w^2) - i_2(1w^2 - w_2 - w_1)) \\
&= \partial_{n+1}(i_1(1w^2) + i_1(1w^2) + i_2(w_1) + i_2(w_2) - i_2(1w^2)) \\
&= {}_1w^2 - w_2 - w_1 + {}_1w^2 - w_2 - w_1 \\
&\quad + w_1 + w_1 + w_2 + w_2 - {}_1w^2 - {}_1w^2 \\
&= {}_1w^2 + [w_1 + w_2, w_2 - {}_1w^2] - {}_1w^2 \\
&= [{}_1w^2, w_1] + [{}_1w^2, w_2] + [w_1, w_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\partial_{n+2}(1w^3) &= \partial_{n+1}(i_1(1w^3) + i_1(1w^3) - i_2(1w^3 - w_2)) \\
&= \partial_{n+1}(i_1(1w^3) + i_1(1w^3) + i_2(w_2) - i_2(1w^3)) \\
&= {}_1w^3 - w_2 + {}_1w^3 - w_2 \\
&\quad + w_2 + w_2 - {}_1w^3 - {}_1w^3 \\
&= {}_1w^3 + [w_2, -{}_1w^3] - {}_1w^3 \\
&= [{}_1w^3, w_2],
\end{aligned}$$

por lo que el homomorfismo controlado $\vartheta: \mathbb{Z}\langle D \rangle_\delta \rightarrow \wedge_{T_3}^2 \mathbb{Z}\langle C \rangle_\gamma$ que satisface $\partial_{n+1}\partial_{n+2} = 0 + \vartheta$ es el siguiente

$$\vartheta(mw^i) = \begin{cases} mw^i \wedge {}_{m-1}w^i, & \text{para todo } i = 1, 2, 3 \text{ si } m > 1; \\ {}_1w^1 \wedge w_1, & \text{si } i = 1 \text{ y } m = 1; \\ {}_1w^2 \wedge w_1 + {}_1w^2 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_2, & \text{si } i = 2 \text{ y } m = 1; \\ {}_1w^3 \wedge w_2, & \text{si } i = 3 \text{ y } m = 1. \end{cases}$$

La proyección al conúcleo $\tilde{p}: \mathbb{Z}\langle C \rangle_\gamma = \mathcal{C}_n \rightarrow H_n \mathcal{C}_* = \mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}$ viene dada por el homomorfismo de grupos abelianos $\tilde{p}_0: \mathbb{Z}\langle C \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle x, y \rangle$ definido como

$$\tilde{p}_0(mw^i) = \begin{cases} x, & i = 1, m \geq 1; \\ x + y, & i = 2, m \geq 1; \\ y, & i = 3, m \geq 1; \end{cases}$$

$\tilde{p}_0(w_1) = x$ y $\tilde{p}_0(w_2) = y$, véase la demostración de (7.7.1). En virtud de (8.6.1) el invariante $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$ está representado por el cociclo

$$\mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{\vartheta} \wedge_{T_3}^2 \mathcal{C}_n \xrightarrow{\wedge_{T_3}^2 \tilde{p}} \wedge_{T_3}^2 \mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)},$$

el cual a su vez está determinado por el homomorfismo de grupos abelianos

$$(\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta: \mathbb{Z}\langle D \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle x \wedge y \rangle$$

que, en virtud de los cálculos anteriores, viene dado por las siguientes igualdades ($m > 1; i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta(mw^i) &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)({}_m w^i \wedge {}_{m-1} w^i) \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} x \wedge x, & \text{si } i = 1; \\ (x + y) \wedge (x + y), & \text{si } i = 2; \\ y \wedge y, & \text{si } i = 3; \end{array} \right\} \\
 &= 0; \\
 (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1 w^1) &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)({}_1 w^1 \wedge w_1) \\
 &= x \wedge x \\
 &= 0; \\
 (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1 w^2) &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)({}_1 w^2 \wedge w_1 + {}_1 w^2 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_2) \\
 &= (x + y) \wedge x + (x + y) \wedge y + x \wedge y \\
 &= x \wedge y \\
 (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1 w^3) &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)({}_1 w^3 \wedge w_2) \\
 &= y \wedge y \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

es decir, $(\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta$ se anula sobre todos los elementos de D excepto sobre ${}_1 w^2$, para el cual vale $(\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1 w^2) = x \wedge y$. Veamos pues que el cociclo $(\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta$ no es trivial, o lo que es lo mismo, que no existe ningún homomorfismo de grupos abelianos

$$\xi = (\xi_1, \xi_2): \mathbb{Z}\langle D \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle C \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle x \wedge y \rangle$$

junto con un $M \geq 1$ fijado tales que para cualesquiera $i = 1, 2, 3; k = 1, 2$ y $m \geq M$ se tenga que $\xi_k({}_m w^i) = 0$, y que además satisfaga $\xi d_{n+2} = (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta$. De existir tal ξ , como $d_{n+2} = \partial_{n+2}^{ab} = 2i_1 - i_2\varphi^{ab}$, tendríamos que $\xi d_{n+2} = 2\xi i_1 - \xi i_2\varphi^{ab} = \xi_2\varphi^{ab}: \mathbb{Z}\langle D \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle x \wedge y \rangle$. Para todo $m \geq 1$ e $i = 1, 2, 3$ tendrían que satisfacerse las igualdades

$$\begin{aligned}
 0 &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_{m+1} w^i) \\
 &= \xi_2\varphi^{ab}({}_{m+1} w^i) \\
 &= \xi_2({}_{m+1} w^2 - {}_m w^i),
 \end{aligned}$$

esto es $\xi_2({}_m w^i) = \xi_2({}_{m+1} w^i)$ para todo $m \geq 1$ e $i = 1, 2, 3$, pero como $\xi_2({}_m w^i) = 0$ para $m \geq M$ tendría que ocurrir de hecho que $\xi_2({}_m w^i) = 0$ para todo $m \geq 1$ e $i = 1, 2, 3$. Ahora bien, si todo esto fuese cierto tendríamos

que

$$\begin{aligned}
 0 &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1w^1) \\
 &= \xi_2\varphi^{ab}({}_1w^1) \\
 &= \xi_2({}_1w^1 - w_1) \\
 &= \xi_2(w_1),
 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
 0 &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1w^3) \\
 &= \xi_2\varphi^{ab}({}_1w^3) \\
 &= \xi_2({}_1w^3 - w_2) \\
 &= \xi_2(w_2),
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 x \wedge y &= (\wedge^2 \tilde{p}_0)\vartheta({}_1w^2) \\
 &= \xi_2\varphi^{ab}({}_1w^2) \\
 &= \xi_2({}_1w^2 - w_2 - w_1) \\
 &= \xi_2(w_1) + \xi_2(w_2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

con lo que llegaríamos a una contradicción derivada de haber supuesto que el cociclo $(\wedge^2 \tilde{p})\vartheta$, representante de \bar{U}_{e_*} , era nulo en cohomología. Con esto queda demostrada la proposición. \square

Corolario 8.6.6. *Para todo árbol T con al menos 3 finales existe un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f . p . \mathcal{M} tal que ningún espacio de Moore de tipo de $(\mathcal{M}, 2)$ es un co- H -espacio.*

Demostración. Para $T = T_3$ usando (6.5.3) y (8.6.5) vemos que podemos tomar $\mathcal{M} = \underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$. En general, como T tiene al menos tres finales podemos escoger una aplicación propia $f: T_3 \rightarrow T$ que induzca una inclusión en los finales de Freudenthal $\mathfrak{F}(f): \mathfrak{F}(T_3) = \mathbf{3} \hookrightarrow \mathfrak{F}(T)$, véase (1.3.4). El funtor $\mathbb{F}^f: \mathbf{ab}(T_3) \rightarrow \mathbf{ab}(T)$ definido en (2.2.2) (3) es fiel y lleno, e induce un funtor exacto $\mathbb{F}_*^f: \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T_3)) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{ab}(T))$ (2.2.13) cuyo adjunto a derecha $(\mathbb{F}^f)^*$ satisface $(\mathbb{F}^f)^*\mathbb{F}_*^f = 1$, véase (2.1.5), así que si \mathcal{C}_* es un complejo de cadenas en $\mathbf{ab}(T_3)$ que es una resolución de $\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$ en grado 2, entonces $\mathbb{F}^f\mathcal{C}_*$ es un complejo de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ que es una resolución de $\mathbb{F}_*^f\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$

en grado 2, y además usando la equivalencia natural $\mathbb{F}_*^f \wedge_{T_3}^2 = \wedge_T^2 \mathbb{F}_*^f$ en (5.2.15) (2) podemos identificar

$$\begin{aligned} H^4(\mathcal{C}_*, \wedge_{T_3}^2 H_2 \mathcal{C}_*) &= H^4(\mathbb{F}^f \mathcal{C}_*, \mathbb{F}_*^f \wedge_{T_3}^2 H_2 \mathcal{C}_*) \\ &= H^4(\mathbb{F}^f \mathcal{C}_*, \wedge_T^2 \mathbb{F}_*^f H_2 \mathcal{C}_*) \\ &= H^4(\mathbb{F}^f \mathcal{C}_*, \wedge_T^2 H_2 \mathbb{F}^f \mathcal{C}_*). \end{aligned}$$

Más aún, usando (8.6.1) y la compatibilidad de los funtores \mathbb{F}^f de (2.4.2) (2) con la abelianización en (2.4.2) (4), es sencillo comprobar que a través de la identificación de arriba $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} \neq 0$ se corresponde con $\bar{\cup}_{\mathbb{F}^f \mathcal{C}_*}$, por tanto en virtud de (6.5.3) podemos tomar $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^f \underline{\text{MV}}^{(3,5)}$. \square

De hecho en la demostración de este corolario también hemos probado el siguiente.

Corolario 8.6.7. *Si T es un árbol con 3 o más finales entonces la clase de cohomología*

$$0 \neq \bar{\cup} \in H^0({}_n \text{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n))$$

es un elemento no nulo de orden 2.

Que $\bar{\cup}$ es siempre de orden 2 había sido ya visto en (6.4.4). Para árboles con 1 o 2 finales no sabemos si esta clase es trivial o no, ya que en estos casos el cup-producto módulo 2 es trivial, y las demás posibilidades de exploración metódica que ha abierto el Teorema 8.6.1 se ven frenadas por la complejidad de la teoría de representaciones de las álgebras $\mathbb{Z}(\mathbf{1}) = \text{RCFM}(\mathbb{Z})$ y $\mathbb{Z}(\mathbf{2})$, véase la Sección 7.2.

Capítulo 9

Invariantes de Steenrod y clasificación de tipos de homotopía propia

Combinando los resultados más potentes de esta memoria, abordamos en este último capítulo los problemas de clasificación de tipos de homotopía propia que nos planteábamos como objetivo en la introducción.

Comenzamos tratando en la Sección 9.1 el problema de la existencia de invariantes tipo Pontrjagin-Steenrod, ya que gracias a la existencia de estos invariantes J. H. C. Whitehead consiguió demostrar en homotopía ordinaria sus resultados de clasificación, que se resumieron en la segunda parte de la introducción. En esta primera sección nos planteamos las preguntas pertinentes y, tras traducirlas al lenguaje de la cohomología de categorías, conseguimos responderlas en un número significativo de casos, observando que en otros casos no puede haber una forma directa de llegar a una respuesta puesto que tropezamos con la complejidad de algunos de los problemas de teoría de representaciones considerados en el Capítulo 7.

En las Secciones 9.2 y 9.3, usando resultados de la primera, logramos construir invariantes de Steenrod para espacios con menos de 4 finales. Estos invariantes se usan en la Sección 9.5 para construir modelos algebraicos que clasifican los tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión ≤ 4 con menos de 4 finales.

En la Sección 9.4 relacionamos los invariantes de Steenrod con la sucesión exacta larga de Whitehead, calculando el segundo grupo de homotopía no trivial de los tipos de homotopía propia con a lo sumo 3 finales.

Por último en la Sección 9.6 aplicamos los resultados de este capítulo a la profundización en el estudio de los espacios de Moore en homotopía

propia, los cuales han sido tratados con anterioridad por ejemplo en [Bea93], [ADMQ95], [ACQ95] y [Cab98].

9.1 Invariantes de Pontrjagin-Steenrod, cup-producto y cohomología de categorías

Como recordamos en la segunda parte de la introducción, la clasificación de CW -complejos $(n-1)$ -conexos de dimensión $\leq n+2$ en términos de invariantes algebraicos sencillos ($n \geq 2$) debida a J. H. C. Whitehead se apoya crucialmente en la existencia de los invariantes de Pontrjagin-Steenrod (Pontrjagin si $n = 2$ y Steenrod si $n \geq 3$), que determinan la obstrucción a la realización geométrica de morfismos de complejos de cadenas, véase (II). Los invariantes de Steenrod son estables y los de Pontrjagin son compatibles con el cup-producto a través de un cambio de coeficientes.

Con el ánimo de extender los resultados de clasificación de Whitehead a la teoría de homotopía propia parece razonable, fijado un árbol T , plantearse las siguientes preguntas:

- (a) ¿Existen invariantes en la cohomología de un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ $\underline{X} = \underline{X}_{n+2}$ de tipo Pontrjagin-Steenrod

$$\wp_2(\underline{X}) \in H^4(\underline{X}, \Gamma_T \mathcal{H}_2 \underline{X}), \quad \text{si } n = 2;$$

$$\wp_n(\underline{X}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2), \quad \text{si } n \geq 3;$$

que determinen el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores (5.4.2)? Es decir, que dado un morfismo $\xi: \mathcal{C}_* \underline{X} \rightarrow \mathcal{C}_* \underline{Y}$ entre los complejos de cadenas de dos de tales sistemas de homotopía se satisfaga la siguiente fórmula ($n \geq 2$)

$$\theta_{\underline{X}, \underline{Y}}(\xi) = \xi_* \wp_n(\underline{X}) - \xi^* \wp_n(\underline{Y}).$$

- (b) Caso de existir, ¿sería posible que además fueran compatibles con los diversos invariantes cup-producto construidos en (6.3)? Es decir, que fueran ciertas las siguientes igualdades

$$(\tau_T)_* \wp_2(\underline{X}) = \cup_{\underline{X}} \in H^4(\underline{X}, \otimes_T^2 \mathcal{H}_2 \underline{X}), \quad \text{si } n = 2;$$

$$(\bar{\tau}_T)_* \wp_n(\underline{X}) = \hat{\cup}_{\underline{X}} \in H^{n+2}(\underline{X}, \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n \underline{X}), \quad \text{si } n \geq 3.$$

Obsérvese que (b) engloba a (a). La pregunta (b) tiene respuesta afirmativa en teoría de homotopía ordinaria, esto es, cuando el árbol T es compacto.

Sin embargo las construcciones ordinarias no pueden ser generalizadas a la teoría de homotopía propia cuando T no es compacto, ya que en este caso no se dispone de todas las herramientas. Por ejemplo, en general no existen descomposiciones de homología en homotopía propia, véase [ACQ95].

Resultados como (6.3.3) apoyarían, en principio, la existencia de respuestas afirmativas en todos los casos, aunque nada más lejos de la realidad, como prueba la siguiente proposición.

Proposición 9.1.1. *Si el árbol T tiene 3 o más finales entonces la respuesta a la pregunta (b) es “no”. Si T tiene a lo más 3 finales una respuesta afirmativa a (b) para $n \geq 3$ equivale la anulación de la clase cup-producto de complejo de cadenas $\bar{\cup}$ construida en (6.4.3).*

Demostración. Probaremos primero que, para un árbol T cualquiera, si (b) fuese cierto entonces $\bar{\cup} = 0$. En efecto, supuesto cierto (b) y dado un complejo de cadenas \mathcal{C}_* acotado $(n-1)$ -reducido ($n \geq 2$), en virtud de (4.2.6) existe un sistema de homotopía \underline{X} de orden $n+2$ con complejo de cadenas \mathcal{C}_* y siguiendo la definición del cup-producto de complejos de cadenas (6.4.3)

$$\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*} = (\bar{q}_T)_* \hat{\cup}_{\underline{X}} = \begin{cases} (\bar{q}_T)_*(\bar{\sigma}_T)_* \cup_{\underline{X}} = (q_T)_*(\tau_T)_* \wp_2(\underline{X}) = 0, & \text{si } n = 2; \\ (\bar{q}_T)_*(\bar{\tau}_T)_* \wp_n(\underline{X}) = 0, & \text{si } n \geq 3; \end{cases}$$

por tanto $\bar{\cup} = 0$. Esto junto con (8.6.7) prueba también la primera parte del resultado.

Para la segunda parte observamos que, si T tiene a lo más 3 finales, en virtud de (7.10.6) tenemos una sucesión exacta corta de $({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq)$ -bimódulos

$$H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\bar{\tau}_T)^*} H^{n+2}(-, \hat{\otimes}_T^2 H_n) \xrightarrow{(\bar{q}_T)^*} H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n)$$

por tanto, si $\bar{\cup}$ fuese cero, podríamos definir el invariante de Steenrod de un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ \underline{X} como el único elemento $\wp_n(\underline{X})$ tal que

$$(\bar{\tau}_T)_* \wp_n(\underline{X}) = \hat{\cup}_{\underline{X}}.$$

Así definido, el invariante de Steenrod es natural por serlo el cup-producto reducido, véase (6.2.5). Además esta definición daría una respuesta afirmativa a (b) en virtud (6.3.3). \square

Lamentablemente no es posible dar una respuesta segura a la pregunta de si $\bar{\cup} = 0$ para árboles con 1 o 2 finales ya que, de nuevo, chocamos de frente con la perversa teoría de representaciones de los anillos $\mathbb{Z}(\mathbf{1})$ y $\mathbb{Z}(\mathbf{2})$.

A pesar de todo la Proposición 9.1.1 no cierra las puertas a la existencia de invariantes de Pontrjagin-Steenrod en homotopía propia en el sentido de (a), y esto sería suficiente para construir modelos algebraicos sencillos de tipos de homotopía propia que extendiesen a los de Whitehead en homotopía ordinaria.

Recordemos que, en virtud de (4.3.3) (3), el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores considerada en (5.4.2) da lugar a una clase de cohomología

$$\{\theta\} \in H^1({}_2\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^4(-, \Gamma_T H_2)), \text{ si } n = 2;$$

$$\{\theta\} \in H^1({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)), \text{ si } n \geq 3.$$

Proposición 9.1.2. *Con la notación anterior, para un árbol T cualquiera y $n \geq 2$, la respuesta a la pregunta (a) sobre la existencia de invariantes de Pontrjagin-Steenrod es afirmativa si y sólo si la clase de cohomología $\{\theta\}$ es trivial.*

Demostración. Si $\{\theta\} = 0$ como se apuntó en (4.3.3) (3) para cada complejo de cadenas \mathcal{C}_* acotado $(n-1)$ -reducido en $\mathbf{ab}(T)$ existe un sistema de homotopía de orden $n+2$ que denotamos $s\mathcal{C}_*$ cuyo complejo de cadenas es \mathcal{C}_* , de forma que dado un morfismo cualquiera de complejos de cadenas $\xi: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$

$$\theta_{s\mathcal{C}_*, s\mathcal{C}'_*}(\xi) = 0.$$

Definimos el invariante de Pontrjagin-Steenrod de un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ \underline{X} como

$$\wp_n(\underline{X}) = \theta_{\underline{X}, s\mathcal{C}_*\underline{X}}(1_{\mathcal{C}_*\underline{X}}).$$

De este modo, aplicando (4.2.2) (d), puede comprobarse fácilmente que este invariante es natural y determina la obstrucción θ en el sentido de (a).

Para probar el recíproco supongamos que existen invariantes de Pontrjagin-Steenrod que proporcionan una respuesta afirmativa a (a). En primer lugar observamos que para cada complejo de cadenas \mathcal{C}_* acotado $(n-1)$ -reducido en $\mathbf{ab}(T)$ existe un sistema de homotopía de orden $n+2$ $s\mathcal{C}_*$ con complejo de cadenas \mathcal{C}_* tal que $\wp_n(s\mathcal{C}_*) = 0$. En efecto, por (4.2.6) sabemos que existe un sistema de homotopía \underline{X} de orden $n+2$ con complejo de cadenas \mathcal{C}_* , y usando (4.2.2) (e) vemos que podemos tomar

$$s\mathcal{C}_* = \underline{X} - \wp_n(\underline{X}).$$

De este modo hemos construido una función s que demuestra que $\{\theta\} = 0$, véase (4.3.3) (3). \square

El enunciado de (a) en términos cohomológicos dado en esta proposición no es suficiente, en principio, para responder a la pregunta, ya que hasta el momento no tenemos herramientas para calcular $\{\theta\}$. Sin embargo, como vamos a ver inmediatamente, si T tiene a lo más 3 finales y $n \geq 3$ esta clase de cohomología está relacionada con el cup-producto de complejos de cadenas módulo 2, que se calculó completamente en el capítulo anterior (Teorema 8.6.4).

En efecto, si T tiene a lo más 3 finales, en virtud de (7.10.6) la siguiente sucesión de $({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq)$ -bimódulos es exacta corta

(9.1.A)

$$H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\bar{\tau}_T)^*} H^{n+2}(-, \hat{\otimes}_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\bar{q}_T)^*} H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2),$$

de hecho es elemental ver que esta exactitud es un resultado equivalente a (7.10.6). Esta sucesión da lugar a una sucesión exacta larga de Bockstein en cohomología, véase (4.3.3) (1),

(9.1.B)

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow (\bar{\tau}_T)^* \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \hat{\otimes}_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow (\bar{q}_T)^* \\ H^k({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, \wedge_T^2 H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow \beta \\ H^{k+1}({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

Proposición 9.1.3. *Si T tiene a lo más 3 finales y $n \geq 3$ entonces la clase $\{\theta\}$ es la imagen del cup-producto módulo 2 en (8.6.B) a través del operador de Bockstein β en (9.1.B)*

$$\beta \hat{p}_* \cup = \{\theta\} \in H^1({}_n\mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))/\simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)).$$

Esta proposición es una consecuencia inmediata de (6.3.3) si bien, para ello hemos echo uso de los principales resultados originales de esta memoria.

Por mencionar un detalle, sin la teoría de representaciones en álgebra controlada desarrollada en el Capítulo 7 no hubiésemos sido capaces de probar (7.10.6), con lo que no tendríamos la exactitud de (9.1.A), y así, la sucesión exacta larga de Bockstein (9.1.B) ni siquiera hubiera tenido sentido.

Como vimos en (7.10.8) el Corolario 7.10.6 no es cierto para árboles con 7 o más finales, así que no es posible generalizar (9.1.3) a estos casos. Además si quisiésemos probar (7.10.6) para árboles con 5 o 6 finales tropezaríamos con la tremenda complejidad de la teoría de representaciones de las álgebras $\mathbb{F}_2(\mathbf{5})$ y $\mathbb{F}_2(\mathbf{6})$, que son salvajes, véase la introducción del Capítulo 7. Para árboles con 4 finales sí sería posible estudiar si (7.10.6) es cierto o no, y si así fuera, (9.1.3) sería también cierto en este caso. Sin embargo este estudio se presenta muy complicado ya que, a pesar de que el álgebra $\mathbb{F}_2(\mathbf{4})$ es mansa, como se probó en el Capítulo 7, la descripción de los $\mathbb{F}_2(\mathbf{4})$ -módulos f. p. es muy tediosa, véanse (7.8.5) y (7.6.8).

El cálculo del cup-producto módulo 2 realizado en (8.6.4) para árboles con a lo más 3 finales, junto con (9.1.3), nos permitirá en las dos siguientes secciones construir invariantes de Steenrod para espacios con a lo más 3 finales.

9.2 Invariantes de Steenrod para espacios con 1 o 2 finales

En esta breve sección, usando los resultados de la anterior y del Capítulo 8, construimos invariantes de Steenrod tanto para sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ como para T -complejos $(n-1)$ -reducidos, cuando el árbol T tiene 1 o 2 finales.

En (8.6.4) vimos que el invariante cup-producto módulo 2 es trivial en estos casos, luego usando (9.1.3) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 9.2.1. *Si T tiene 1 o 2 finales y $n \geq 3$ entonces la clase $\{\theta\}$ determinada por el operador de obstrucción de la sucesión exacta de funtores (5.4.2) es trivial*

$$0 = \{\theta\} \in H^1({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)).$$

Por tanto en virtud de (9.1.2) existen invariantes de Steenrod que determinan la obstrucción θ en (5.4.2) para $n \geq 3$, esto es, la respuesta a la pregunta (a) formulada en la sección anterior es afirmativa. Estos invariantes se definen de la siguiente manera.

Definición 9.2.2. Dado un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido de orden $n+2$ \underline{X} ($n \geq 3$) se define su *invariante de Steenrod* como el único elemento

$$\wp_n(\underline{X}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2),$$

tal que

$$(\bar{\tau}_T)_* \wp_n(\underline{X}) = \hat{p}_* \hat{U}_{\underline{X}}.$$

Dicho elemento existe en virtud de la exactitud de (9.1.A).

Este invariante es natural por serlo el cup-producto reducido, véase (6.2.5), y por ser (9.1.A) exacta; esto es,

Proposición 9.2.3. Si T tiene 1 o 2 finales, dado un morfismo $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ entre sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ ($n \geq 3$) se satisface la siguiente igualdad

$$f_* \wp_n(\underline{X}) = f^* \wp_n(\underline{Y}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2)$ y $f_* = H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n f \otimes \mathbb{Z}_2)$.

Además usando la exactitud de (9.1.A) y (6.3.3) vemos que este invariante de Steenrod determina el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores (5.4.2) para $n \geq 3$. Más explícitamente,

Proposición 9.2.4. Si T tiene 1 o 2 finales, dados dos sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ \underline{X} e \underline{Y} , y un morfismo de complejos de cadenas $\xi: \mathcal{C}_* \underline{X} \rightarrow \mathcal{C}_* \underline{Y}$ el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores en (5.4.2) satisface la siguiente fórmula ($n \geq 3$)

$$\theta_{\underline{X}, \underline{Y}}(\xi) = \xi_* \wp_n(\underline{X}) - \xi^* \wp_n(\underline{Y}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Para T -complejos podemos definir invariantes de Steenrod de la siguiente manera.

Definición 9.2.5. Si T tiene 1 o 2 finales definimos el *invariante de Steenrod* de un T -complejo $(n-1)$ -reducido X como el de su sistema de homotopía de orden $n+2$ asociado ($n \geq 3$)

$$\wp_n(X) = \wp_n(r_{n+2} X) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2),$$

véase (4.1) para la definición de r_{n+2} .

Con esta definición se sigue inmediatamente de (9.2.3) que el invariante de Steenrod de T -complejos es natural; esto es,

Proposición 9.2.6. Si T tiene 1 o 2 finales, dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre T -complejos $(n-1)$ -reducidos se satisface la siguiente igualdad ($n \geq 3$)

$$f_* \wp_n(X) = f^* \wp_n(Y) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n Y \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \mathcal{H}_n Y \otimes \mathbb{Z}_2)$ y $f_* = H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n f \otimes \mathbb{Z}_2)$.

9.3 Invariantes de Steenrod para espacios con 3 finales

En esta sección pretendemos obtener resultados análogos a los de la anterior para un árbol T con 3 finales. En este caso la situación es más complicada ya que no se puede concluir que $\{\theta\} = 0$ directamente (9.1.3) y del cálculo del cup-producto de complejos de cadenas módulo 2 $\hat{p}_*\bar{\cup}$ en (8.6.4), puesto que aquí $\hat{p}_*\bar{\cup} \neq 0$. Así que para ver que (9.2.1) es también cierto en este caso habrá que probar que $\hat{p}_*\bar{\cup}$ está en la imagen de $(\bar{q}_T)_*$ en (9.1.B).

Para verlo comenzamos definiendo la 0-cocadena aditiva ς de $\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathbf{3}))$ con coeficientes en $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(-, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2)$. Por ser ς aditiva en el sentido de (4.3.3) (2) bastará definirla sobre los $\mathbb{F}_2(\mathbf{3})$ -módulos f. p. elementales de (7.8.5). Establecemos que $\varsigma(\mathcal{M}) = 0$ para todo $\mathbb{F}_2(\mathbf{3})$ -módulo f. p. elemental $\mathcal{M} \neq \underline{\text{MV}}^{(3,5)}$, y

$$\varsigma(\underline{\text{MV}}^{(3,5)}) = \varepsilon_*((i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup})(\underline{\text{MV}}^{(3,5)})) \in \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(\underline{\text{MV}}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2\underline{\text{MV}}^{(3,5)}).$$

Aquí $i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup}$ es la clase de cohomología calculada en la demostración de (8.6.4) y

$$(9.3.A) \quad \varepsilon: \wedge_{\mathbf{3}}^2 \underline{\text{MV}}^{(3,5)} \hookrightarrow \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2 \underline{\text{MV}}^{(3,5)}$$

es una sección cualquiera, pero fijada, de $\bar{q}_{\mathbf{3}}$. Tal sección existe en virtud de (7.10.5).

Proposición 9.3.1. *La 0-cocadena ς es de hecho un 0-cociclo*

$$\varsigma \in H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathbf{3})), \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(-, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2)).$$

Demostración. Es sencillo comprobar que los únicos endomorfismos del 3-subespacio $\underline{V}^{(3,5)}$ son 0 y 1, por tanto bastará probar que dado un $\mathbb{F}_2(\mathbf{3})$ -módulo f. p. elemental $\mathcal{M} \neq \underline{\text{MV}}^{(3,5)}$ y morfismos $f: \mathcal{M} \rightarrow \underline{\text{MV}}^{(3,5)}$ y $g: \underline{\text{MV}}^{(3,5)} \rightarrow \mathcal{M}$ cualesquiera entonces

$$(a) \quad 0 = f^*\varepsilon_*((i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup})(\underline{\text{MV}}^{(3,5)})) \in \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(\mathcal{M}, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2\underline{\text{MV}}^{(3,5)}),$$

y

$$(b) \quad 0 = g_*\varepsilon_*((i^*i^*\hat{p}_*\bar{\cup})(\underline{\text{MV}}^{(3,5)})) \in \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(\underline{\text{MV}}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2\mathcal{M}).$$

Aquí $f^* = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(f, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2\underline{\text{MV}}^{(3,5)})$ y $g_* = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(\underline{\text{MV}}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_{\mathbf{3}}^2g)$.

La igualdad (a) es evidente ya que

$$\begin{aligned} f^* \varepsilon_*((i^* \iota^* \hat{p}_* \bar{\cup})(\underline{MV}^{(3,5)})) &= \varepsilon_* f^*((i^* \iota^* \hat{p}_* \bar{\cup})(\underline{MV}^{(3,5)})) \\ &= \varepsilon_* f_*((i^* \iota^* \hat{p}_* \bar{\cup})(\mathcal{M})) \\ &= \varepsilon_* f_* 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí en la segunda igualdad usamos que $i^* \iota^* \hat{p}_* \bar{\cup}$ es un 0-cociclo, y en la tercera el cálculo de $i^* \iota^* \hat{p}_* \bar{\cup}$ en la demostración de (8.6.4).

Para comprobar (b) distinguiremos varios casos.

Supongamos que $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{B} = \mathbb{M}\mathbb{F}^i(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2)$. Esta segunda igualdad fue ya observada en la demostración de (7.9.6). Como vimos en (7.10.3) (2) $\hat{\otimes}_1^2 \mathcal{B} = \mathcal{B}$, así que en virtud de (5.2.15) $\hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^i \mathcal{B} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}$. Al ser \mathbb{M} en (7.7.A) un functor fiel y lleno es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}(\underline{MV}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}) &= \text{Hom}_{\mathbb{F}_2 Q_3}(\underline{V}^{(3,5)}, \mathbb{F}^i(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además como $\underline{\dim} \mathbb{F}^i(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2)$ es $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ o $(1, 0, 0, 1)$ dependiendo de si $i = 1, 2$ o 3 , también es inmediato ver usando (7.9.6) y (7.9.8) que

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}^1(\underline{MV}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}) &= \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \mathbb{F}^i(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2)) \\ &= -\langle \underline{\dim} \underline{V}^{(3,5)}, \underline{\dim} \mathbb{F}^i(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2) \rangle_{Q_3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tanto (c) como (d) implican que (b) es cierto para $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^1 \mathcal{A}$ al ser \mathbb{F}_*^1 exacto por (2.2.13), véase (7.4.5), por (7.5.10) (1) tenemos un monomorfismo $\mathbb{F}_*^1 \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbb{F}_*^1 \mathcal{B}$ que da lugar a una inyección

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}(\underline{MV}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^1 \mathcal{A}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}(\underline{MV}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^1 \mathcal{B}),$$

por tanto (b) se sigue en este caso de (c).

Si $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}$ como \mathbb{F}_*^i y $\hat{\otimes}_3^2$ son exactos a derecha, por (7.5.10) (1) hay un epimorfismo $\hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^i \mathcal{B} \rightarrow \hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}$. Más aún, al ser $\underline{MV}^{(3,5)}$ finitamente presentado, en virtud de (2.2.15) hay una epiyección

$$\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}^1(\underline{MV}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^1 \mathcal{B}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{3})}^1(\underline{MV}^{(3,5)}, \hat{\otimes}_3^2 \mathbb{F}_*^1 \mathcal{C})$$

con lo cual (b) en este caso es consecuencia de (d).

Supongamos ahora que $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty$. Tenemos una sucesión exacta corta de 3-subespacios

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{F}_2 \langle u \rangle & \leftarrow & 0 \end{array} \right) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{F}^1(0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \langle u \rangle) \\
 & & \downarrow \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} & & \\
 \left(\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{F}_2 \langle z \rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathbb{F}_2 \langle x \rangle & \rightarrow & \mathbb{F}_2 \langle x, y, z \rangle & \leftarrow & \mathbb{F}_2 \langle y \rangle \end{array} \right) & \xlongequal{\quad} & \begin{array}{c} \mathbb{F}^1(\mathbb{F}_2 \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2 \langle x \rangle) \\ \oplus \\ \mathbb{F}^2(\mathbb{F}_2 \langle z \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2 \langle z \rangle) \\ \oplus \\ \mathbb{F}^3(\mathbb{F}_2 \langle y \rangle \rightarrow \mathbb{F}_2 \langle y \rangle) \end{array} \\
 & & \downarrow \psi & & \\
 \left(\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{F}_2 \langle x + y \rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathbb{F}_2 \langle x \rangle & \rightarrow & \mathbb{F}_2 \langle x, y \rangle & \leftarrow & \mathbb{F}_2 \langle y \rangle \end{array} \right) & \xlongequal{\quad} & \underline{V}^{(3,5)}
 \end{array}$$

definida como $\varphi(u) = x + y + z$, $\psi(x) = x$, $\psi(y) = y$ y $\psi(z) = x + y$. Aplicando el functor exacto \mathbb{M} obtenemos otra sucesión exacta corta

$$(e) \quad \mathbb{F}_*^1 \mathcal{A} \xrightarrow{\mathbb{M}\varphi} \mathbb{F}_*^1 \mathcal{B} \oplus \mathbb{F}_*^2 \mathcal{B} \oplus \mathbb{F}_*^3 \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}.$$

Aquí usamos que, tal como se observó en la demostración de (7.9.6), $\mathbb{M}\mathbb{F}^i = \mathbb{F}_*^i \mathbb{M}$ sobre los 1-subespacios de dimensión finita, $\mathbb{M}(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2) = \mathcal{B}$ y $\mathbb{M}(0 \rightarrow \mathbb{F}_2) = \mathcal{A}$.

Pretendemos demostrar que $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{g})}(\mathbb{M}\varphi, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty)$ es un isomorfismo. Para ello hacemos notar que si $j \neq i$ no es difícil comprobar que tenemos un isomorfismo

$$(\zeta_m)_{m \in \mathbb{N}_0} : \bigoplus_0^\infty \mathcal{A} \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{F}^j)^* \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty$$

cuya m -ésima componente $\zeta_m : \mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{F}^j)^* \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty$ es el adjunto del morfismo

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_*^i \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}_\infty \in \text{Hom}_{k(\mathfrak{n})}(\mathbb{F}_*^i \mathcal{A}, \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}_\infty) &= \text{Hom}_{k(\mathfrak{n})}(\mathbb{F}_*^j \mathcal{A}, \mathbb{F}_*^j \mathcal{B}_\infty) \\
 &= \text{Hom}_{k(\mathfrak{1})}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\
 &= \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2 \langle \mathbb{N}_0 \rangle)
 \end{aligned}$$

que se corresponde con el homomorfismo $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2 \langle \mathbb{N}_0 \rangle$ que envía el generador $1 \in \mathbb{F}_2$ al elemento básico $m \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{F}_2 \langle \mathbb{N}_0 \rangle$. Aquí usamos para la primera igualdad (7.8.3); para la segunda que \mathbb{F}_*^j es fiel y lleno, véanse (7.4.5), (2.2.2)

(3) y (2.1.5); y para la tercera (7.5.7) y la igualdad $\mathcal{B}_\infty = i\mathbb{F}_2\langle\mathbb{N}_0\rangle$ que se sigue de (7.5.11). Observando además las definiciones de los funtores i y \mathbb{M} en (7.2) y (7.7.A), respectivamente, derivamos de (7.5.11) la igualdad $\mathcal{B}_\infty = \mathbb{M}(\mathbb{F}_2\langle\mathbb{N}_0\rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle\mathbb{N}_0\rangle)$.

Si $j \neq i$ usando que $(\mathbb{F}^j)^*$ es adjunto a derecha de \mathbb{F}_*^j y el isomorfismo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{F}_*^j\mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{1})}(\mathcal{B}, (\mathbb{F}^j)^*\mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty) \\
 &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{1})}(\mathcal{B}, \bigoplus_0^\infty \mathcal{A}) \\
 &= \bigoplus_0^\infty \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{1})}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\
 &= \bigoplus_0^\infty \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2Q_1}(\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, 0 \rightarrow \mathbb{F}_2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

Para la tercera igualdad hemos usado que en virtud de (7.5.9) el $k(\mathfrak{1})$ -módulo \mathcal{B} es el conúcleo de un monomorfismo entre objetos proyectivos pequeños. Esto demuestra que probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{M}\varphi, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty)$ es un isomorfismo equivale a demostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{M}\varphi_i, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty)$ lo es. Más aún, observamos que para un i cualquiera $\varphi_i = \mathbb{F}^i\psi$ donde $\psi: (0 \rightarrow \mathbb{F}_2) \rightarrow (\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2)$ es el morfismo no trivial luego $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{M}\varphi_i, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{F}_*^i\mathbb{M}\psi, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty)$ será un isomorfismo si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{1})}(\mathbb{M}\psi, \mathcal{B}_\infty)$ lo es, o lo que es lo mismo si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2Q_1}(\psi, \mathbb{F}_2\langle\mathbb{N}_0\rangle \rightarrow \mathbb{F}_2\langle\mathbb{N}_0\rangle)$ es un isomorfismo, lo cual es muy sencillo de comprobar, y así concluimos definitivamente que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{M}\varphi, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty)$ también es un isomorfismo.

La primera consecuencia de este hecho, combinado con la exactitud de (e), es la igualdad

$$(f) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{z})}(\mathbb{M}\underline{V}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^i\mathcal{B}_\infty) = 0.$$

Es más, por (7.9.5) y (7.5.12) para $j \neq i$

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}^1(\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty) &= \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{I})}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\infty) \\
 &= 0, \\
 \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}^1(\mathbb{F}_*^j \mathcal{B}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty) &= \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{I})}^1(\mathcal{B}, (\mathbb{F}^j)^* \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty) \\
 &= \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{I})}^1(\mathcal{B}, \bigoplus_0^\infty \mathcal{A}) \\
 \text{(g)} &= \bigoplus_0^\infty \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{I})}^1(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\
 \text{(h)} &= 0.
 \end{aligned}$$

Para la igualdad (g) hemos usado de nuevo que \mathcal{B} es el conúcleo de un monomorfismo entre objetos proyectivos pequeños, y para (h) usamos (7.9.4) (5). Al ser $\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$ finitamente presentado, usando (7.5.16), la exactitud de (e), las anulaciones de los grupos $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}^1$ anteriores y que $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}(\underline{\mathbb{M}V}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty)$ es un isomorfismo tenemos que

$$\text{(i)} \quad \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}^1(\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty) = 0.$$

La igualdad (b) para $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty$ se sigue tanto de (f) como de (i).

Si $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}$ la existencia de un monomorfismo $\mathbb{F}_*^i \mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty$ que se deriva de (7.5.10) (2) y (2.2.13) implica usando (f) que

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}(\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{R}) = 0,$$

y (b) en este caso se sigue de esta igualdad.

Si $\mathcal{M} = \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty$ tenemos un epimorfismo $\mathbb{F}_*^i \mathcal{B}_\infty \twoheadrightarrow \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty$ dado por (7.5.10) (2), así que al ser $\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}$ finitamente presentado tenemos por (7.5.16) e (i) que

$$\text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathfrak{B})}^1(\underline{\mathbb{M}V}^{(3,5)}, \mathbb{F}_*^i \mathcal{C}_\infty) = 0$$

de donde se sigue (b) en este caso.

Si en cambio $\mathcal{M} = \underline{\mathbb{M}V}$ para cierto 3-subespacio rígido indescomponible $\underline{V} \neq \underline{V}^{(3,5)}$, véase (7.6.7), entonces es fácil ver que $\hat{\otimes}^2 \underline{V} = \underline{V}$, es más, vamos a demostrar que $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}) = 0$ es siempre trivial, con lo cual (b) se seguirá definitivamente de (7.9.6). Si $\underline{V} = \underline{V}^{(3,k)}$ para cierto $k \in \{1, 2, 3\}$ es fácil ver que $\dim \text{Hom}_{\mathbb{F}_2 Q_3}(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}) = 1$, además el vector de dimensión $\underline{\dim} \underline{V}$ es $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ o $(1, 0, 1, 1)$, y $\underline{\dim} \underline{V}^{(3,5)} = (2, 1, 1, 1)$ por tanto usando (7.9.8) se ve de forma inmediata que

$$\begin{aligned}
 1 &= \langle \underline{\dim} \underline{V}^{(3,5)}, \underline{\dim} \underline{V} \rangle_{Q_3} \\
 &= 1 - \dim \text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}),
 \end{aligned}$$

luego $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}) = 0$. Para $\underline{V} = \underline{V}^{(3,4)}$ es sencillo comprobar que $\dim \text{Hom}_{\mathbb{F}_2 Q_3}(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}^{(3,4)}) = 2$, así que como $\underline{\dim} \underline{V}^{(3,4)} = (1, 1, 1, 1)$ usando de nuevo (7.9.8) tenemos que

$$\begin{aligned} 2 &= \langle \underline{\dim} \underline{V}^{(3,5)}, \underline{\dim} \underline{V}^{(3,4)} \rangle_{Q_3} \\ &= 2 - \dim \text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}^{(3,4)}), \end{aligned}$$

por tanto $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2 Q_3}^1(\underline{V}^{(3,5)}, \underline{V}^{(3,4)}) = 0$. Esto concluye la prueba de la proposición. \square

El siguiente corolario se sigue de la proposición anterior, del cálculo de $i^* i^* \hat{p}_* \bar{\cup}$ en la demostración de (8.6.4), y de ser ε en (9.3.A) una sección de \bar{q}_3 .

Corolario 9.3.2. *El cambio de coeficientes*

$$(\bar{q}_3)_* : H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathbf{3})), \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(-, \hat{\otimes}_3^2)) \longrightarrow H^0(\mathbf{fp}(\mathbb{F}_2(\mathbf{3})), \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{3})}^1(-, \wedge_3^2))$$

envía ς en

$$(\bar{q}_3)_* \varsigma = i^* i^* \hat{p}_* \bar{\cup}.$$

Finalmente este corolario nos permite probar que la clase $\{\theta\}$ es trivial en el caso que nos ocupa para $n \geq 3$.

Proposición 9.3.3. *Si T es un árbol con 3 finales y $n \geq 3$ entonces la clase $\{\theta\}$ determinada por el operador de obstrucción de la sucesión exacta de funtores (5.4.2) es trivial*

$$0 = \{\theta\} \in H^1({}_n \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T)) / \simeq, H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2)).$$

Demostración. Usando (8.6.2), (8.6.3) y (9.3.2) se comprueba que

$$\begin{aligned} \hat{p}_* \bar{\cup} &= (\lambda_* H_n^*)(\chi_*(- \otimes \mathbb{Z}_2)^*)(\bar{q}_3)_* \varsigma \\ &= (\bar{q}_T)_*(\lambda_* H_n^*)(\chi_*(- \otimes \mathbb{Z}_2)^*) \varsigma \\ &= (\bar{q}_T)_*(\lambda(H_n^* \chi))_*(H_n \otimes \mathbb{Z}_2)^* \varsigma, \end{aligned}$$

donde $(\bar{q}_T)_*$ es el homomorfismo que aparece en (9.1.B). Para la segunda igualdad usamos el hecho inmediato de que los homomorfismos que aparecen en (8.6.2) y (8.6.3) son naturales con respecto al funtor F que allí se cita. Luego en virtud de (9.1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \{\theta\} &= \beta \hat{p}_* \bar{\cup} \\ &= \beta (\bar{q}_T)_*(\lambda(H_n^* \chi))_*(H_n \otimes \mathbb{Z}_2)^* \varsigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para la última igualdad usamos la exactitud de (9.1.B). \square

Esta proposición junto con (9.1.2) prueba que, para un árbol T con 3 finales, existen invariantes de Steenrod que determinan el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores en (5.4.2) para $n \geq 3$, así que la respuesta a la pregunta (a) que nos planteamos en la Sección 9.1 resulta ser afirmativa en este caso. Más aún, podemos dar la siguiente construcción explícita de estos invariantes.

Definición 9.3.4. Dado un sistema de homotopía $(n-1)$ -reducido \underline{X} de orden $n+2$ ($n \geq 3$) definimos su *invariante de Steenrod* como el único elemento

$$\wp_n(\underline{X}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2),$$

tal que

$$(\bar{\tau}_T)_* \wp_n(\underline{X}) = \hat{p}_* \hat{\cup}_{\underline{X}} - \lambda(H_n^* \chi) \varsigma(\mathcal{H}_n \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

La existencia de dicho elemento se deriva de la exactitud de (9.1.A), ya que

$$\begin{aligned} (q_T)_*(\hat{p}_* \hat{\cup}_{\underline{X}} - \lambda(H_n^* \chi) \varsigma(\mathcal{H}_n \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2)) &= \hat{p}_* \bar{\cup}_{\mathcal{C}_* \underline{X}} \\ &\quad - (q_T)_* \lambda(H_n^* \chi) \varsigma(H_n \mathcal{C}_* \underline{X} \otimes \mathbb{Z}_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí para la primera igualdad usamos la definición del cup-producto de complejos de cadenas (6.4.3) y de la homología de un sistema de homotopía, y para la segunda usamos la primera cadena de igualdades probada en la demostración de (9.3.3).

Obsérvese además que en este caso, a diferencia de lo que ocurría para un árbol con 1 o 2 finales (9.2.2), el invariante de Steenrod no es en general compatible con el cup-producto de complejos de cadenas módulos 2, ya que el 0-cociclo ς , definido al comienzo de esta sección, no es trivial.

Este invariante es natural ya que ς es un 0-cociclo (9.3.1), (9.1.A) es exacta, y el cup-producto reducido es natural (6.2.5); esto es,

Proposición 9.3.5. Si T tiene 3 finales, dado un morfismo $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ entre sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden $n+2$ ($n \geq 3$) se satisface la siguiente igualdad

$$f_* \wp_n(\underline{X}) = f^* \wp_n(\underline{Y}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2)$ y $f_* = H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n f \otimes \mathbb{Z}_2)$.

Además usando la exactitud de (9.1.A), (6.3.3) y (9.3.1) se ve sin dificultad que este invariante de Steenrod determina el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores (5.4.2) para $n \geq 3$. Más explícitamente,

Proposición 9.3.6. *Si T tiene 3 finales, dados dos sistemas de homotopía $(n - 1)$ -reducidos de orden $n + 2$ \underline{X} e \underline{Y} , y un morfismo de complejos de cadenas $\xi: \mathcal{C}_*\underline{X} \rightarrow \mathcal{C}_*\underline{Y}$ el operador de obstrucción θ de la sucesión exacta de funtores en (5.4.2) satisface la siguiente fórmula ($n \geq 3$)*

$$\theta_{\underline{X}, \underline{Y}}(\xi) = \xi_* \wp_n(\underline{X}) - \xi^* \wp_n(\underline{Y}) \in H^{n+2}(\underline{X}, \mathcal{H}_n \underline{Y} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Como en el caso de 1 y 2 finales, también podemos definir invariantes de Steenrod para T -complejos de la siguiente forma.

Definición 9.3.7. Si T es un árbol con 3 finales definimos el *invariante de Steenrod* de un T -complejo $(n - 1)$ -reducido X como el de su sistema de homotopía de orden $n + 2$ asociado ($n \geq 3$)

$$\wp_n(X) = \wp_n(r_{n+2}X) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2),$$

véase (4.1) para la definición de r_{n+2} .

Se sigue inmediatamente de (9.3.5) que el invariante de Steenrod de T -complejos es natural; esto es,

Proposición 9.3.8. *Dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre T -complejos $(n - 1)$ -reducidos con 3 finales se satisface la siguiente igualdad ($n \geq 3$)*

$$f_* \wp_n(X) = f^* \wp_n(Y) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n Y \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Aquí $f^* = H^{n+2}(f, \mathcal{H}_n Y \otimes \mathbb{Z}_2)$ y $f_* = H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n f \otimes \mathbb{Z}_2)$.

9.4 Invariantes de Steenrod y sucesión exacta de Whitehead

Ya en la Sección 6.6 establecimos relaciones entre la parte inferior de la sucesión exacta larga de Whitehead de un T -complejo $(n - 1)$ -conexo X ($n \geq 3$)

$$(9.4.A) \quad \cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+2}X \xrightarrow{b_{n+2}} \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_{n+1}} \Pi_{n+1}X \xrightarrow{h_{n+1}} \mathcal{H}_{n+1}X,$$

y su invariante cup-producto reducido \hat{U}_X . Dicha relación consistía en determinar a partir de él tanto la composición del operador borde secundario b_{n+2} con el morfismo natural $\bar{\tau}_T$ (6.6.2), como la imagen por cierto cambio de coeficientes del elemento

$$\{\Pi_{n+1}X\} \in \text{Ext}_{\text{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1}X, \text{Coker } b_{n+2}).$$

representado por la extensión

$$\text{Coker } b_{n+2} \xrightarrow{i'_{n+1}} \Pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} \mathcal{H}_{n+1} X,$$

a la que da lugar (9.4.A), véase (6.6.4). Para ello nos valíamos del siguiente diagrama con fila y columna exactas

(9.4.B)

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{H}_n X, \mathcal{M}) & & & & \\ \downarrow & \dashrightarrow^{\lambda} & & & \\ \text{Ker } \nu_{n+2} \hookrightarrow & \xrightarrow{\phi} & H^{n+2}(X, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\nu_{n+2}} & \text{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathcal{H}_{n+2} X, \mathcal{M}) \\ \downarrow \zeta & & & & \\ \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1} X, \mathcal{M}) & & & & \end{array}$$

que están contenidas en las sucesiones exactas de 6 términos de coeficientes universales en (3.3.5).

A continuación daremos fórmulas que determinan completamente tanto b_{n+2} como $\{\Pi_{n+1} X\}$ para árboles T con a lo sumo 3 finales en función de los invariantes de Steenrod definidos en las Secciones 9.2 y 9.3 en términos del cup-producto reducido; compárense con el resultado clásico de Whitehead (VII) en homotopía ordinaria.

Proposición 9.4.1. *Dado un T -complejo $(n - 1)$ -conexo X ($n \geq 3$) con a lo sumo 3 finales el operador borde secundario b_{n+2} de la sucesión exacta larga de Whitehead viene dado por la siguiente igualdad*

$$\nu_{n+2} \wp_n(X) = b_{n+2}.$$

Demostración. Usando (6.6.2) y la naturalidad de la sucesión espectral de coeficientes universales obtenemos componiendo con

$$\bar{\tau}_T: \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2$$

que

$$\bar{\tau}_T b_{n+2} = \nu_{n+2} \hat{p}_* \bar{\cup}_X.$$

Recordemos que \hat{p} denotaba, para todo $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} , la proyección natural al cociente $\hat{p}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2$. De nuevo la naturalidad de la sucesión espectral de coeficientes universales, junto con la definición del invariante de Steenrod en (9.2.5) o (9.3.7) y la igualdad $\nu_{n+2} \lambda = 0$ (véase (9.4.B)),

demuestran que

$$\begin{aligned} \nu_{n+2}\hat{p}_*\bar{U}_X &= \left\{ \begin{array}{l} \nu_{n+2}(\bar{\tau}_T)_*\wp_n(X), \\ \nu_{n+2}(\bar{\tau}_T)_*(\wp_n(X) + \lambda(H_n^*X)\zeta(\mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2)), \\ \text{si } T \text{ tiene 1 o 2 finales;} \\ \text{si } T \text{ tiene 3 finales;} \end{array} \right\} \\ &= \nu_{n+2}(\bar{\tau}_T)_*\wp_n(X) \\ &= \bar{\tau}_T\nu_{n+2}\wp_n(X). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\bar{\tau}_T$ en este caso es un monomorfismo que admite retracción, véase (7.10.5), por tanto necesariamente $b_{n+2} = \nu_{n+2}\wp_n(X)$. \square

Sea

$$\bar{p}': \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \twoheadrightarrow \text{Coker } b_{n+2}$$

la proyección inducida por (9.4.A).

Proposición 9.4.2. *Si X es un T -complejo $(n-1)$ -conexo para cierto $n \geq 3$ y T tiene a lo sumo 3 finales entonces se da la siguiente igualdad*

$$-\zeta\phi^{-1}\bar{p}'_*\wp_n(X) = \{\Pi_{n+1}X\} \in \text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{H}_{n+1}X, \text{Coker } b_{n+2}).$$

Demostración. Usando la definición del invariante de Steenrod en este caso, véanse (9.2.5), (9.2.2), (9.3.7) y (9.3.4), así como (9.4.1) y (5.2.A), podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas, parte del cual está estrechamente relacionado con (6.6.D),

$$(a) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_{n+2}X & \xrightarrow{b_{n+2}} & \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{p}'} & \text{Coker } b_{n+2} \\ \parallel & & \downarrow \bar{\tau}_T & & \downarrow \bar{p}' \\ \mathcal{H}_{n+2}X & \xrightarrow{\nu_{n+2}\hat{p}_*\hat{U}_X} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{p}} & \text{Coker } \nu_{n+2}\hat{p}_*\hat{U}_X \\ & & \downarrow \bar{q}_T & & \downarrow \\ & & \wedge_T^2 \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xlongequal{\quad} & \wedge_T^2 \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

La columna vertical central es exacta corta escindible por (7.10.5), y un seguimiento cuidadoso del diagrama prueba que la columna de la derecha también lo es.

La relación de este diagrama con (6.6.D) se concreta en la existencia de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_{n+2}X & \xrightarrow{\nu_{n+2}\hat{U}_X} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X & \xrightarrow{\bar{p}} & \text{Coker } \nu_{n+2}\hat{U}_X \\ \parallel & & \downarrow \hat{p} & & \downarrow \hat{p}' \\ \mathcal{H}_{n+2}X & \xrightarrow{\nu_{n+2}\hat{p}_*\hat{U}_X} & \hat{\otimes}_T^2 \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{p}} & \text{Coker } \nu_{n+2}\hat{p}_*\hat{U}_X \end{array}$$

tal que al componerlo con (6.6.D) obtenemos los dos cuadrados superiores de (a). Esto es consecuencia directa de la naturalidad de la sucesión espectral de coeficientes universales.

Pues bien, usando, además de todo esto, (6.6.4) y la igualdad $\zeta\phi^{-1}\lambda = 0$ (véase (9.4.B)) tenemos que

$$\begin{aligned}
-\tilde{\tau}'_* \{\Pi_{n+1}X\} &= -\hat{p}'_* \tilde{\tau}'_* \{\Pi_{n+1}X\} \\
&= \hat{p}'_* \zeta \phi^{-1} \bar{p}_* \hat{U}_X \\
&= \tilde{p}_* \zeta \phi^{-1} \hat{p}_* \hat{U}_X \\
&= \begin{cases} \tilde{p}_* \zeta \phi^{-1} (\bar{\tau}_T)_* \wp_n(X), \\ \tilde{p}_* \zeta \phi^{-1} ((\bar{\tau}_T)_* \wp_n(X) + \lambda(H_n^* \chi)_\zeta(\mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2)), \\ \text{si } T \text{ tiene 1 o 2 finales;} \\ \text{si } T \text{ tiene 3 finales;} \end{cases} \\
&= \tilde{p}_* \zeta \phi^{-1} (\bar{\tau}_T)_* \wp_n(X) \\
&= \tilde{\tau}'_* \zeta \phi^{-1} \bar{p}'_* \wp_n(X),
\end{aligned}$$

por tanto el resultado se sigue de ser $\tilde{\tau}'$ en (a) un monomorfismo que admite retracción. \square

9.5 Modelos algebraicos de tipos de homotopía propia estable

Estamos ya en condiciones de construir modelos algebraicos sencillos que clasifiquen tipos de homotopía propia. Concretamente modelos de T -complejos $(n-1)$ -reducidos de dimensión $\leq n+2$ ($n \geq 3$) con a lo más 3 finales. Es decir, tipos de homotopía propia estable de T -complejos 1-conexos de dimensión ≤ 4 con menos de 4 finales. Para ello consideremos la siguiente categoría.

Definición 9.5.1. Dado un árbol T y $n \geq 3$, los objetos de la categoría $\mathbf{P}_n^2(T)$ son pares (\mathcal{C}_*, \wp) donde \mathcal{C}_* es un complejo de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ concentrado en dimensiones n , $n+1$ y $n+2$

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C}_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathcal{C}_n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

y

$$\wp \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n \mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Un morfismo en esta categoría $\varphi: (\mathcal{C}_*, \wp) \rightarrow (\mathcal{C}'_*, \wp')$ es la clase de homotopía de un morfismo de complejos de cadenas $\varphi: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}'_*$ tal que

$$\varphi_* \wp = \varphi^* \wp' \in H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n \mathcal{C}'_* \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Si denotamos $\mathbf{A}_n^2(T)$ a la categoría de homotopía de los T -complejos $(n-1)$ -reducidos de dimensión $\leq n+2$ tenemos el siguiente resultado, compárese con el resultado clásico (IV).

Teorema 9.5.2. *Si T tiene a lo más 3 finales y $n \geq 3$ entonces el functor que envía un T -complejo X a su complejo de cadenas celulares junto con su invariante de Steenrod, definido bien en (9.2.5) o bien en (9.3.7),*

$$S: \mathbf{A}_n^2(T) \longrightarrow \mathbf{P}_n^2(T): X \mapsto (\mathcal{C}_*X, \wp_n X)$$

es detectante en el sentido de (4.2.1), y por tanto da lugar a una biyección entre las clases de isomorfía de objetos en ambas categorías.

Para árboles con más de 3 finales o $n = 2$ el enunciado de este teorema no tiene sentido, ya que en estos casos el invariante de Pontrjagin-Steenrod no está definido.

Demostración de (9.5.2). Antes de nada observamos que el functor S está bien definido ya que el invariante de Steenrod es natural en todo caso, véanse (9.2.6) y (9.3.8). Además es suficiente en el sentido de (4.2.1) gracias al teorema de Whitehead homológico en homotopía propia. Por tanto sólo queda probar que S es realizable en el sentido de (4.2.1).

Denotemos ${}^2_n \mathbf{chain}(\mathbf{ab}(T))$ a la categoría de complejos de cadenas en $\mathbf{ab}(T)$ concentrados en dimensiones $n, n+1$ y $n+2$, como en (9.5.1), y ${}^2_n \mathbf{H}_k^T$ a la categoría formada por los sistemas de homotopía $(n-1)$ -reducidos de orden k ($k, n \geq 3$) cuyos complejos de cadenas son de dimensión $\leq n+2$. Es inmediato comprobar que el functor r_{n+3} definido en la Sección 4.1 induce un isomorfismo de categorías

$$r_{n+3}: \mathbf{A}_n^2(T) \xrightarrow{\simeq} {}^2_n \mathbf{H}_{n+3}^T / \simeq .$$

El $({}^2_n \mathbf{H}_{n+2}^T / \simeq)$ -bimódulo $H^{n+3}(-, \mathbb{I}_{n+2})$ es trivial, por tanto en virtud de (4.2.4) tenemos una sucesión exacta de funtores

$$H^{n+2}(-, \mathbb{I}_{n+2}) \xrightarrow{+} {}^2_n \mathbf{H}_{n+3}^T / \simeq \xrightarrow{\lambda_{n+3}} {}^2_n \mathbf{H}_{n+2}^T / \simeq \xrightarrow{\theta} 0.$$

Esto prueba que λ_{n+3} es un functor realizable en los morfismos, véase (4.2.2). Además λ_{n+3} es realizable en los objetos ya que dado $(\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1})$ en la categoría de llegada se tiene que

$$\lambda_{n+3}(\mathcal{C}_*, 0, C_{f_{n+2}}) = (\mathcal{C}_*, f_{n+2}, X^{n+1}).$$

Consideremos ahora la sucesión exacta de funtores

$$H^{n+1}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{+} {}^2_n \mathbf{H}_{n+2}^T / \simeq \xrightarrow{\mathcal{C}_*} {}^2_n \mathbf{chain}(\mathbf{ab}(T)) / \simeq \xrightarrow{\theta} H^{n+2}(-, H_n \otimes \mathbb{Z}_2),$$

que es restricción de la que aparece en (5.4.2), para demostrar que S es realizable. El funtor \mathcal{C}_* que aparece en esta sucesión es realizable en los objetos por (4.2.6).

Definimos el funtor auxiliar

$$\tilde{S}: {}^2_n\mathbf{H}_{n+2}^T / \simeq \longrightarrow \mathbf{P}_n^2(T): \underline{X} \mapsto (\mathcal{C}_*\underline{X}, \wp_n(\underline{X})).$$

Esto es en efecto un funtor por la naturalidad del invariante de Steenrod, véanse (9.2.3) y (9.3.5). Probemos que \tilde{S} es realizable en los objetos. Dado un par (\mathcal{C}_*, \wp) en \mathbf{P}_n^2 podemos escoger en virtud de (4.2.6) un sistema de homotopía \underline{X} en ${}^2_n\mathbf{H}_{n+2}^T$ con complejo de cadenas $\mathcal{C}_*\underline{X} = \mathcal{C}_*$. Ahora usando (4.2.2) (e) y bien (9.2.4) o (9.3.6) comprobamos que

$$\begin{aligned} \wp - \wp_n(\underline{X}) &= \theta_{\underline{X} + \wp - \wp_n(\underline{X}), \underline{X}}(1_{\mathcal{C}_*}) \\ &= \wp_n(\underline{X} + \wp - \wp_n(\underline{X})) - \wp_n(\underline{X}), \end{aligned}$$

por tanto $\wp_n(\underline{X} + \wp - \wp_n(\underline{X})) = \wp$ y

$$\tilde{S}(\underline{X} + \wp - \wp_n(\underline{X})) = (\mathcal{C}_*, \wp).$$

La realizabilidad en los morfismos de \tilde{S} se sigue de que el invariante de Steenrod determina la obstrucción θ a la realización de morfismos a través del funtor complejo de cadenas \mathcal{C}_* , véanse (9.2.4) y (9.3.6).

El funtor S del enunciado satisface $S = \tilde{S}\lambda_{n+3}r_{n+3}$, así que será realizable, ya que, como hemos visto, r_{n+3} , λ_{n+3} y \tilde{S} lo son. Con esto queda demostrado el teorema. \square

Este teorema nos permite calcular el cardinal de los tipos de homotopía propia de T -complejos que tengan un complejo de cadenas celulares del mismo tipo de homotopía que uno concentrado en dimensiones n , $n + 1$ y $n + 2$ dado ($n \geq 3$), compárese con [Bau99] VI.5.11.

Corolario 9.5.3. *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C}_* en $\mathbf{ab}(T)$ concentrado en dimensiones n , $n + 1$ y $n + 2$ ($n \geq 3$), si T tiene a lo sumo 3 finales el conjunto de tipos de homotopía propia de T -complejos $(n - 1)$ -reducidos X de dimensión $\leq n + 2$ con \mathcal{C}_*X homotópicamente equivalente a \mathcal{C}_* está en biyección con el espacio de órbitas*

$$H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n\mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2) / \text{Aut}(\mathcal{C}_*)$$

del grupo abeliano $H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n\mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2)$ por la acción a derecha del grupo de autoequivalencias de homotopía del complejo de cadenas $\text{Aut}(\mathcal{C}_*)$ definida como

$$\alpha^f = f^* f_*^{-1}(\alpha).$$

Demostración. Es inmediato comprobar a partir de (9.5.2) que la aplicación que envía un T -complejo $(n-1)$ -reducido X de dimensión $\leq n+2$ con \mathcal{C}_*X del mismo tipo de homotopía que \mathcal{C}_* a su invariante de Steenrod $\wp_n(X) \in H^{n+2}(X, \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2) \simeq H^{n+2}(\mathcal{C}_*, H_n \mathcal{C}_* \otimes \mathbb{Z}_2)$ induce una biyección como en el enunciado. \square

Observación 9.5.4. En teoría de homotopía ordinaria J. H. C. Whitehead probó que la parte inferior de su sucesión exacta larga también modelaba algebraicamente los tipos de homotopía de CW -complejos $(n-1)$ -reducidos de dimensión $\leq n+2$, véase (VI). Sin embargo en teoría de homotopía propia la parte inferior de la sucesión exacta larga de Whitehead de un T -complejo no compacto $(n-1)$ -reducido X de dimensión $\leq n+2$ ($n \geq 3$)

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_{n+2} X \xrightarrow{b_{n+2}} \mathcal{H}_n X \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_{n+1}} \Pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} \mathcal{H}_{n+1} X,$$

no determina el tipo de homotopía propia de X . En efecto, en la siguiente sección veremos diversos ejemplos de espacios de Moore con un sólo final del mismo tipo (\mathcal{M}, n) ($n \geq 3$) pero con distinto tipo de homotopía propia. Para todos estos espacios la sucesión anterior es la misma

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

luego no determina su tipo de homotopía propia. Este ejemplo con un sólo final puede ser extendido a un espacio arbitrario (no vacío) de finales por los métodos habituales.

9.6 Espacios de Moore en homotopía propia estable

Esta sección contiene algunos nuevos avances en la teoría de homotopía propia de espacios de Moore obtenidos como consecuencia de los principales resultados ya demostrados. Estos espacios son especialmente cómodos para trabajar con ellos por lo sencillo de su homología.

Denotaremos \mathbf{Moore}_n^T a la categoría de homotopía propia de espacios de Moore de grado $n \geq 3$ bajo un árbol T . Se sigue de (4.2.8) que \mathbf{Moore}_n^T es una subcategoría llena de $\mathbf{A}_n^2(T)$ y que el funtor

$$\mathcal{H}_n: \mathbf{Moore}_n^T \longrightarrow \mathbf{fp}(\mathbf{ab}(T))$$

induce un epimorfismo en los objetos. Es inmediato comprobar que la cohomología de un espacio de Moore de tipo (\mathcal{M}, n) con coeficientes en un

$\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{N} viene dada por los grupos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ab}(T)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}), \mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}), \mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

en dimensiones n , $n + 1$ y $n + 2$, respectivamente, y cero en el resto.

Estamos en condiciones de construir modelos algebraicos razonablemente sencillos de estos espacios cuando T tiene a lo más 3 finales y $n \geq 3$. Para concretar este punto comenzamos realizando la siguiente definición.

Definición 9.6.1. La categoría \mathbf{PM}_n^T tiene por objetos pares (\mathcal{M}, \wp) donde \mathcal{M} es un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. y

$$\wp \in \mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Un morfismo $\varphi: (\mathcal{M}, \wp) \rightarrow (\mathcal{N}, \wp')$ es un homomorfismo de $\mathbf{ab}(T)$ -módulos $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ que satisface

$$\varphi_* \wp = \varphi^* \wp' \in \mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}_2).$$

La siguiente proposición es consecuencia de (9.5.2).

Proposición 9.6.2. Si T tiene como mucho 3 finales y $n \geq 3$, el funtor que envía un espacio de Moore M de grado n a su homología junto con su invariante de Steenrod, definido bien en (9.2.5) o bien en (9.3.7),

$$\mathbf{Moore}_n^T \longrightarrow \mathbf{PM}_n^T: M \mapsto (\mathcal{H}_n M, \wp_n(M)),$$

es detectante, y en particular induce una biyección entre los conjuntos de clases de isomorfía de objetos en ambas categorías.

El Corolario 9.5.3 particularizado al caso de los espacios de Moore toma la siguiente forma.

Proposición 9.6.3. Dado un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo f. p. \mathcal{M} , si T tiene a lo sumo 3 finales el conjunto de tipos de homotopía propia de espacios de Moore de grado $n \geq 3$ con homología isomorfa a \mathcal{M} está en biyección con el espacio de órbitas

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2) / \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$$

del grupo abeliano $\mathrm{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2)$ por la acción a derecha del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ del $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} definida por la siguiente fórmula

$$\alpha^f = f^* f_*^{-1}(\alpha).$$

Como consecuencia inmediata obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 9.6.4. *Sea T un árbol con a lo más 3 finales y $n \geq 3$. Dado un $\mathbf{ab}(T)$ -módulo \mathcal{M} , si $\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2) \neq 0$ entonces existen al menos 2 espacios de Moore de tipo (\mathcal{M}, n) con distinto tipo de homotopía propia, y recíprocamente.*

En la Sección 7.9 desarrollamos una amplia variedad de herramientas para el cálculo del grupo $\text{Ext}_{\mathbf{ab}(T)}^2(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_2)$. De hecho si T tiene un sólo final y \mathcal{M} es de exponente 2 podemos usar (7.5.1), (7.9.11), (7.5.12), (7.5.17) y (7.9.4) para calcular este grupo. En particular usando el corolario anterior podemos caracterizar la unicidad de espacios de Moore estables con un sólo final y homología de exponente 2. En el enunciado del siguiente corolario usamos los invariantes $\lambda_{\mathcal{M}}, \mu_{\mathcal{M}}, \nu_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_{\infty}$ de un $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulo f. p. \mathcal{M} definidos en la Sección 7.4.

Corolario 9.6.5. *Dado un $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulo f. p. \mathcal{M} , existe un único espacio de Moore con un sólo final de grado $n \geq 3$ con homología \mathcal{M} si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- $\lambda_{\mathcal{M}} = 0$,
- $\lambda_{\mathcal{M}} \neq \infty$ y $\nu_{\mathcal{M}} = 0$,
- $\mu_{\mathcal{M}} = 0$ y $\nu_{\mathcal{M}} = 0$.

Como quiera que la terna $(\lambda_{\mathcal{M}}, \mu_{\mathcal{M}}, \nu_{\mathcal{M}})$ puede tomar cualquier valor del monoide $\mathbb{N}_{\infty} \times \mathbb{N}_{\infty} \times \mathbb{N}_{\infty}$, véase (7.5.4), este corolario demuestra que

Corolario 9.6.6. *Hay infinitos $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulos f. p. \mathcal{M} para los cuales existen distintos tipos de homotopía propia de espacios de Moore de grado $n \geq 3$ con homología \mathcal{M} .*

Ejemplo 9.6.7. Para ilustrar los resultados anteriores con un ejemplo concreto, consideremos el $\mathbb{F}_2(\mathbf{1})$ -módulo f. p. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$, véase la Sección 7.5. Usando (7.9.11), (7.5.17) y (7.9.4) vemos que

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}(\mathbf{1})}^2(\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}, (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}) \otimes \mathbb{Z}_2) = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{1})}^1(\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}, \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}) = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbf{1})}^1(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = \mathbb{Z}_2.$$

Por tanto en virtud de (9.6.3) hay exactamente 2 tipos de homotopía propia de espacios de Moore de grado $n \geq 3$ con homología $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$.

Otro problema relacionado con los espacios de Moore en homotopía propia que puede ser resuelto con los resultados obtenidos en este capítulo es el siguiente:

Dado un espacio de Moore M de tipo (\mathcal{M}, n) tal que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$,
¿existen espacios de Moore M_1 y M_2 de tipos (\mathcal{M}_1, n) y (\mathcal{M}_2, n) ,
respectivamente, tales que $M = M_1 \vee M_2$?

En teoría de homotopía ordinaria la respuesta a esta pregunta es “sí”, ya que los tipos de homotopía de espacios de Moore están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfía de grupos abelianos. Sin embargo, como ya sabemos, el correspondiente análogo no se tiene en teoría de homotopía propia, por lo que, en principio, no cabe esperar que esta respuesta sea siempre afirmativa. La siguiente proposición responde totalmente a esta pregunta para espacios con a lo más 3 finales. En su enunciado usaremos la notación dada en (2.1.1) para las inclusiones y proyecciones de los factores de una suma directa.

Proposición 9.6.8. *Si T tiene a lo más 3 finales y $n \geq 3$, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa si y sólo si*

$$0 = i_1^* p_{2*} \wp_n(M) \in \text{Ext}^2(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \otimes \mathbb{Z}_2)$$

y

$$0 = i_2^* p_{1*} \wp_n(M) \in \text{Ext}^2(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Es más, si esto se cumple entonces

$$\wp_n(M_1) = i_1^* p_{1*} \wp_n(M) \text{ y } \wp_n(M_2) = i_2^* p_{2*} \wp_n(M).$$

Demostración. Es sencillo comprobar usando la naturalidad del invariante de Steenrod en (9.2.6) o (9.3.8) que

$$\wp_n(M_1 \vee M_2) = p_1^* i_{1*} \wp_n(M_1) + p_2^* i_{2*} \wp_n(M_2),$$

por tanto si $M \simeq M_1 \vee M_2$ se tienen las condiciones del enunciado.

Para probar el recíproco supongamos que $i_1^* p_{2*} \wp_n(M) = 0 = i_2^* p_{1*} \wp_n(M)$. Las propiedades de las inclusiones y proyecciones de los factores de una suma directa demuestran que esto equivale a la existencia de

$$\alpha \in \text{Ext}^2(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Z}_2) \text{ y } \beta \in \text{Ext}^2(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2 \otimes \mathbb{Z}_2)$$

tales que $i_{1*} \alpha = i_1^* \wp_n(M)$ e $i_{2*} \beta = i_2^* \wp_n(M)$, así que, si tomamos M_1 y M_2 con $\wp_n(M_1) = \alpha$ y $\wp_n(M_2) = \beta$, por (9.6.2) existen aplicaciones $\tilde{i}_1: M_1 \rightarrow M$ y $\tilde{i}_2: M_2 \rightarrow M$ que inducen i_1 e i_2 en homología, y así el teorema de Whitehead homológico demuestra que $(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2): M_1 \vee M_2 \rightarrow M$ es la equivalencia de homotopía propia deseada. \square

Índice alfabético

- abelianización, 78
- aljabra, 187
 - de los n -subespacios, 187
- aplicación de pegamiento, 58
- árbol, 56
- arco, 120
- basado
 - morfismo, 49
 - objeto, 49
 - salvo homotopía, 49
- bimódulo sobre una categoría, 103
- biproducción, 62
- Blakers-Massey
 - teorema de, 94
- cambio de coeficientes, 64
- categoría
 - aditiva, 62
 - de cofibraciones, 45
 - homológica, 94
 - de homotopía, 45
 - de pares, 45
- cilindro
 - de un morfismo, 50
 - de complejos de cadenas, 88
 - de sistemas de homotopía, 100
 - en **Top**, 43
 - en **Top**, 42
 - en una I -categoría, 43
 - relativo, 46
- co-H-espacio, 157
- co-H-inversión, 51
- co-H-multiplicación, 51, 157
- coacción, 52
- cociente
 - morfismo, 50
 - paso al, 50
- cofibra
 - de una cofibración, 49
 - de un morfismo, 50
 - sucesión de, 51
 - sucesión larga de, 52
- cofibraciones
 - categoría de, 45
 - de complejos de cadenas, 88
 - en **Top**, 44
 - en **Top**, 44
 - en una I -categoría, 43
- cofibrante
 - objeto bajo B , 46
 - par, 45
- cogrupa, 51, 76
- cohomología, 89
 - de un sistema de homotopía, 102
 - de una categoría, 109
 - propia, 92
- compactificación de Freudenthal, 56
- complejo
 - cruzado, 224
 - reducido, 225
 - totalmente libre, 226

- cuadrático, 224
 - reducido, 225
 - totalmente libre, 226
- de cadenas, 87
 - celulares propio, 91
 - de un sistema de homotopía, 102
- conmutador, 78
 - de Peiffer, 220
- cono
 - de un morfismo, 50
 - de un objeto basado, 50
- continuos generalizados de Peano, 55
- cuadrado exterior, 117
 - T -controlado, 121, 126
- cuadrado tensorial, 117
 - T -controlado, 122, 126
 - reducido, 118
 - reducido T -controlado, 128
- cup-producto
 - de un T -complejo, 149
 - de un complejo de cadenas, 155
 - de un sistema de homotopía, 152
 - interior, 145, 148
 - reducido
 - de un T -complejo, 151
 - de un sistema de homotopía, 153
- efecto cuadrático cruzado, 116
- elementales
 - isomorfismos, 165
 - objetos, 165
- equivalencia de Morita, 64
- equivariante, 219
- esqueleto, 58
- extensión lineal, 132
- final salvo homotopía, objeto, 49
- finales de Freudenthal, 55
- forma bilineal de Q_n , 202
- Freudenthal
 - finales de, 55
 - teorema de suspensión de, 95
- función cuadrática, 115
- función de altura, 67
- funtor
 - aditivo, 62
 - cuadrático, 115
 - de Whitehead, 116
 - T -controlado, 121, 126
 - detectante, 103
 - exacto a derecha, 124
 - realizable, 35, 103
 - suficiente, 35, 103
- grupo
 - libre de grado de nilpotencia 2
 - T -controlado, 81
 - libre T -controlado, 80
 - nilpotente, 78
- homología, 89
 - de un sistema de homotopía, 102
 - propia, 92
- homomorfismo
 - controlado, 67, 81
 - cruzado, 227
- homotopía
 - categoría de, 45
 - en I -categorías, 44
 - equivalencia de, 45
 - relativa, 48
 - sistema de, 100
- Hurewicz
 - morfismo de, 95
 - teorema de, 97
- I -categoría, 43

- invariante de James-Hopf, 143, 145
 - clásico, 36
 - estable, 144, 147
- invariante de Pontrjagin
 - clásico, 33–34
- invariante de Steenrod
 - clásico, 33–34
 - de un T -complejo con 1 o 2 finales, 267
 - de un T -complejo con 3 finales, 275
 - de un sistema de homotopía con 1 o 2 finales, 267
 - de un sistema de homotopía con 3 finales, 274
- lema del pegamiento, 48
- matriz
 - finita por filas y por columnas, 73
 - localmente finita, 73
- modelo
 - de homotopía propia, 85
 - de una teoría, 79
 - fundamental propio, 85
- módulo
 - cruzado, 220
 - cuadrático, 221
 - cuadrático reducido, 221
 - totalmente libre, 223
 - de homotopía propia, 85
 - de Whitehead, 87
 - finitamente presentado, 63
 - libre T -controlado, 67
 - grande, 67
 - libre finitamente generado, 63
 - numerablemente presentado, 169
 - precruzado, 220
 - totalmente libre, 222
 - sobre un ringoide, 62
- Moore
 - espacio de, 107
- morfismo
 - de complejos de cadenas, 87
 - de enlace, 170
 - de modelos, 79
 - de sistemas de homotopía, 100
 - de teorías, 76
 - de teorías de cogrupos, 77
 - lineal, 77
 - trivial, 49
- n -conexo, 85, 86
- nil(2)-grupo, 218
- nilización, 78
- nil(n)-módulo, 220
- n -reducido, 86, 102
- n -subespacio, 187
 - rígido, 188
- objeto esférico, 57
- objetos bajo B , 46
- obstrucción
 - operador de, 104
- operador cuadrático, 227
- pro-objeto, 170
- problema de las descomposiciones, 165
- producto de Whitehead
 - algebraico, 118
- producto tensorial
 - T -controlado, 122, 126
 - no abeliano, 219
 - por \mathbb{Z}_2 , 118
 - por \mathbb{Z}_2 T -controlado, 127
- propia
 - aplicación, 42
- push-out central, 222

- quiver, 187
- R*-categoría aditiva, 66
- realizable
 - morfismo, 103
 - objeto, 103
- representación de Q_n , 187
- ringoide, 62
- R*-ringoide, 65
- serie central inferior, 78
- sistema de homotopía, 100
- sistema inverso, 170
- soporte, 67
- sucesión espectral de coeficientes
 - universales, 90, 93
- sucesión exacta de funtores, 103
- suma directa, 62
- suspensión
 - de morfismos, 54
 - de objetos, 51
- T*-complejo, 58
- teorema de aproximación celular
 - propio, 59
- teoría, 76
 - de cogrupos, 77
- tipo de representaciones
 - finito, 166
 - manso, 166
 - salvaje, 166
- vector de dimensión, 203
- Whitehead
 - módulo de, 87
 - sucesión exacta de, 95
 - teorema de, 94
 - homológico, 94

Índice de símbolos

- $\langle A \rangle$, 77
 \mathbf{A}_n^2 , 35
 $\mathbf{A}_n^2(T)$, 279
 $\langle A \rangle_\alpha$, 80
 \mathbf{ab} , 78
 $\mathbf{ab}^g(T)$, 75
 $\mathbf{ab}(T)$, 75
 $\alpha \otimes \beta$, 122
 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$, 72
 $\langle A \rangle^{nil}$, 78
 $\langle A \rangle_\alpha^{nil}$, 81
 $\langle A \rangle * \langle B \rangle$, 77
 $[A, X]^B$, 48
 $[A, X]^u$, 48
 \mathbf{B}_n^2 , 36
 $\mathcal{C}_* X$, 91
 CA , 50
Cantor, 55
 \mathbf{C}^B , 46
 \mathbf{C}_c^B , 46
 $(\mathbf{C}, \mathit{cof}, I, \emptyset)$, 43
 $(\mathbf{C}, \mathit{cof}, we)$, 45
 C_f , 50
 ${}_n^2 \mathbf{chain}(\mathbf{ab}(T))$, 279
 $\mathbf{chain}^+(\mathbf{A})$, 88
 ${}_k \mathbf{chain}^b(\mathbf{ab}(T))$, 102
 c -push, 222
 ${}_n \bar{\cup} = \bar{\cup}$, 155
 $\hat{p}_* \bar{\cup}$, 253
 $\bar{\cup}_{\mathcal{C}_*}$, 155
 \cup_X , 149
 $\hat{\cup}_X$, 151
 $\underline{\cup}_X$, 152
 $\hat{\underline{\cup}}_X$, 153
 \mathbf{CW}^T , 59
 ${}_2 \mathbf{CW}^T$, 101
 Δ , 233
 ∂^{cr} , 220
 Δ_f , 115
 ∂^{nil} , 220
 $\underline{\dim}$, 203
 $\text{End}_{\mathbf{R}}(X)$, 64
 ev_X , 64
 \wedge^2 , 117
 $\wedge^2 \alpha$, 121
 $\wedge^2 E$, 120
 \wedge_T^2 , 121, 127
 $\wedge_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $F^*(\mathbf{C}, D)$, 108
 \mathbb{F}^f , 68
 $\mathbb{F}^i: \mathbf{M}_R(T_1) \rightarrow \mathbf{M}_R(T_n)$, 173
 Φ_n , 173
 $\mathbb{F}^i: \mathbf{sub}_1 \rightarrow \mathbf{sub}_n$, 188
 $\langle -, - \rangle_{Q_n}$, 202
 $\mathbf{fp}(\mathbf{R})$, 63
 \mathfrak{F} , 56
 $F(X | Y)$, 116
 Γ , 116
 γ_2 , 142, 143, 145

- γ_2^n , 144, 148
 $\Gamma\alpha$, 121
 ΓE , 120
 $\Gamma_{\mathfrak{F}}$, 131
 $\Gamma_n G$, 78
 $\Gamma_n X$, 87
 $\Gamma_n \underline{X}$, 104
 Γ_T , 121, 126
 \mathbf{gr} , 77
 $\mathbf{gr}(T)$, 81

 \mathbf{H} , 227
 h_n , 95
 $H^n(\mathbf{C}, D)$, 109
 \mathbf{H}_n^T , 101
 ${}^k \mathbf{H}_{n+1}^T$, 102
 ${}^2_n \mathbf{H}_k^T$, 279
 $\mathcal{H}_n X$, 92
 $H^n(X, \mathcal{M})$, 92
 $\overset{0}{\simeq}$, 230

 i_{12} , 116
 $I_B X$, 46
 i , 169
 ∞_n , 171
 ∞_S , 172
 $\text{Iso}(\mathbf{A})$, 166

 kQ_n , 187

 λ_φ , 172
 $\lambda_{\mathcal{M}}$, 173
 $\lambda: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{H}$, 227
 \lim , 171
 \lim^1 , 171
 ℓ_{v_0} , 121

 \mathbf{M} , 190
 $\mathbf{model}(\mathbf{T})$, 80
 $\mathbf{mod}(\mathbf{R})$, 63
 \mathbf{Moore}_n^T , 281

 $\mathbf{M}_R(T)$, 67
 $\mathbf{M}_R^g(T)$, 67
 μ_φ^i , 172
 $\mu_{\mathcal{M}}^i$, 173

 \mathbb{N}_0 , 72
 ∇ , 233
 \mathbf{Nat} , 110
 nil , 78
 \mathbf{nil} , 78
 $\mathbf{nil}(T)$, 81
 \mathbb{N}_∞ , 172
 $\mathbb{N}_{\infty, n}$, 171
 \mathbf{n} , 168
 ν_φ^i , 173
 $\nu_{\mathcal{M}}^i$, 173

 \mathbf{P}_n^2 , 35
 $\mathbf{P}_n^2(T)$, 278
 $\mathbf{Pair}(\mathbf{C})$, 45
 $\mathbf{Pair}_c(\mathbf{C})$, 45
 $\Pi_n X$, 85
 $\Pi_{n+1}(X, A)$, 85
 \mathbf{PM}_n^T , 282
 $\wp_n(X)$, 267, 275
 $\wp_n(\underline{X})$, 267, 274
 $\text{pro} - \mathbf{C}$, 171

 \mathbf{Q} , 227
 $q: \otimes^2 \rightarrow \wedge^2$, 118
 $\bar{q}: \hat{\otimes}^2 \rightarrow \wedge^2$, 119
 $\bar{q}_{\mathfrak{F}}: \hat{\otimes}_{\mathfrak{F}}^2 \rightarrow \wedge_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\bar{q}_T: \hat{\otimes}_T^2 \rightarrow \wedge_T^2$, 128
 $q_{\mathfrak{F}}: \otimes_{\mathfrak{F}}^2 \rightarrow \wedge_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 Q_n , 187
 $q_T: \otimes_T^2 \rightarrow \wedge_T^2$, 127

 r_{12} , 116
 $R\langle A \rangle$, 67
 $R\langle A \rangle_\alpha$, 67
 $\text{RCFM}(R)$, 73

- $\simeq \text{rel } B$, 48
 rep_{Q_n} , 187
 $\text{rep}_{Q_n}^{\text{fin}}$, 187
 $R(\mathfrak{F})$, 72
 \mathbb{R}_+ , 73
 $R\langle\mathbb{N}_0\rangle_\delta$, 73
 $\rho(X)$, 230

 \mathbb{S} , 192
 Set^* , 79
 $\sigma: \Gamma \rightarrow - \otimes \mathbb{Z}_2$, 118
 ΣA , 51
 $\bar{\sigma}: \otimes^2 \rightarrow \hat{\otimes}^2$, 119
 $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}: \otimes_{\mathfrak{F}}^2 \rightarrow \hat{\otimes}_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\bar{\sigma}_T: \otimes_T^2 \rightarrow \hat{\otimes}_T^2$, 128
 $\sigma_{\mathfrak{F}}: \Gamma_{\mathfrak{F}} \rightarrow - \otimes \mathbb{Z}_2$, 131
 $\sigma_T: \Gamma_T \rightarrow - \otimes \mathbb{Z}_2$, 127
 $\sigma(X)$, 230
 S_α^n , 57
 $\mathbf{S}^n(T)$, 84
 $\text{sub}_n^{\text{fin}}$, 188
 sub_n^{fr} , 188
 sub_n , 188
 $\text{sub}_n^{\text{rig}}$, 188
 $\tilde{\Sigma}$, 222, 225

 $\tau: \Gamma \rightarrow \otimes^2$, 118
 $\bar{\tau}: - \otimes \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \hat{\otimes}^2$, 118
 $\bar{\tau}_{\mathfrak{F}}: - \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \hat{\otimes}_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\bar{\tau}_T: - \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \hat{\otimes}_T^2$, 128
 $\tau_{\mathfrak{F}}: \Gamma_{\mathfrak{F}} \rightarrow \otimes_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\tau_T: \Gamma_T \rightarrow \otimes_T^2$, 122, 127
 \otimes^2 , 117
 $\otimes_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\hat{\otimes}^2$, 118
 $\hat{\otimes}_{\mathfrak{F}}^2$, 131
 $\hat{\otimes}_T^2$, 128
 \otimes_T^2 , 122, 126
 \otimes_T , 122, 126
 T_n , 168

 Top , 42
 $\text{Top}_{c.g.}$, 55
 Topp , 43

 $U_{\bullet}^{\varphi, i}$, 173

 \underline{V} , 187
 $\underline{V}^{\text{rig}}$, 188

 $W: \otimes^2 \rightarrow \Gamma$, 118
 $W_{\mathfrak{F}}: \otimes_{\mathfrak{F}}^2 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{F}}$, 131
 $W_T: \otimes_T^2 \rightarrow \Gamma_T$, 122, 127
 \underline{W}^φ , 192

 $(X, 0_X)$, 49
 X/A , 50
 $X \vee Y$, 43
 \hat{X} , 56
 X^n , 58
 X_\bullet , 170
 $X \oplus Y$, 62
 \underline{X} , 100
 $X \cup_f A$, 43
 $[X, Y]$, 45

 $- \otimes \mathbb{Z}_2$, 127–129
 $\{ {}_n\theta \} = \{ \theta \}$, 136
 Z_f , 50

Bibliografía

- [ACMQ03] R. AYALA, M. CÁRDENAS, F. MURO Y A. QUINTERO.
An elementary approach to the projective dimension in proper homotopy theory.
Comm. in Alg. **31**(12), 5995–6017 (2003).
- [ACQ95] R. AYALA, M. CÁRDENAS Y A. QUINTERO.
Homology decompositions in proper homotopy.
Math. Japonica **42**, 443–457 (1995).
- [ADMQ95] R. AYALA, E. DOMÍNGUEZ, A. MÁRQUEZ Y A. QUINTERO.
Moore spaces in proper homotopy.
Tsukuba J. Math. **19**, 305–327 (1995).
- [ADQ90] R. AYALA, E. DOMÍNGUEZ Y A. QUINTERO.
A theoretical framework for proper homotopy theory.
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107**(3), 475–482 (1990).
- [AGP02] M. AGUILAR, S. GITLER Y C. PRIETO.
“Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint”.
Springer-Verlag, New York (2002).
- [AM69] M. ARTIN Y B. MAZUR.
“Etale homotopy”.
Número 100 en Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag,
Berlin-New York (1969).
- [APP01] P. ARA, G. K. PEDERSEN Y F. PERERA.
Extensions and pullbacks in QB -rings.
arXiv:math.RA/0107104 v1 (july 2001).
- [Ark64] M. ARKOWITZ.
Commutators and cup products.
Illinois J. Math. **8**, 571–581 (1964).
- [Arv97] Z. ARVASI.
Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras.

- Theory Appl. Categ.* **3**(7), 160–181 (1997).
- [Bau81] H.-J. BAUES.
“Commutator Calculus and Group of Homotopy Classes”.
Número 50 en *Lecture Notes*. Cambridge University Press
(1981).
- [Bau89] H.-J. BAUES.
“Algebraic Homotopy”.
Cambridge University Press (1989).
- [Bau91] H.-J. BAUES.
“Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes”.
Walter de Gruyter, Berlin (1991).
- [Bau96] H.-J. BAUES.
“Homotopy Type and Homology”.
Oxford University Press (1996).
- [Bau99] H.-J. BAUES.
“Combinatorial Foundation of Homotopy and Homology”.
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1999).
- [BC90] H.-J. BAUES Y D. CONDUCHÉ.
The central series for Peiffer commutators in groups with operators.
J. Algebra **133**, 1–34 (1990).
- [BD99] H.-J. BAUES Y Y. DROZD.
The homotopy classification of $(n - 1)$ -connected $(n + 4)$ -dimensional polyhedra with torsion free homology, $n \geq 5$.
Exposition. Math. **17**(2), 161–180 (1999).
With an appendix by Baues and Hans-Werner Henn.
- [BD00] H.-J. BAUES Y Y. DROZD.
Representation theory of homotopy types with at most two non-trivial homotopy groups localized at a prime.
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128**(2), 283–300 (2000).
- [BD01a] H.-J. BAUES Y Y. DROZD.
Classification of stable homotopy types with torsion-free homology.
Topology **40**(4), 789–821 (2001).
- [BD01b] H.-J. BAUES Y Y. DROZD.
Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups.

- En KEN-ICHI MARUYAMA Y JOHN W. RUTTER, editores,
“Groups of homotopy self-equivalences and related topics
(Gargnano, 1999)”, tomo 274 de “Contemp. Math.”, pági-
nas 39–56, Providence, RI (2001). Amer. Math. Soc.
- [Bea93] M. I. C. BEATTIE.
“Towers, modules and Moore spaces in proper homotopy
theory”.
Tesis Doctoral, University of Oxford (1993).
- [BG89] R. BROWN Y M. GOLASIŃSKI.
A model structure for the homotopy theory of crossed comple-
xes.
Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. **30**(1), 61–82
(1989).
- [BH91] H.-J. BAUES Y M. HENNES.
The homotopy classification of $(n - 1)$ -connected $(n + 3)$ -
dimensional polyhedra, $n \geq 4$.
Topology **30**(3), 373–408 (1991).
- [BHP97] H.-J. BAUES, M. HARTL Y T. PIRASHVILI.
Quadratic categories and square rings.
J. Pure Appl. Algebra **122**, 1–40 (1997).
- [BK00] A. J. BERRICK Y M. E. KEATING.
“Categories and modules with K -theory in view”.
Número 67 en Cambridge Studies in Advanced Mathematics.
Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [BL87] R. BROWN Y J.-L. LODAY.
Van Kampen theorems for diagrams of spaces.
Topology **26**(3), 311–335 (1987).
- [BM51] A. L. BLAKERS Y W. S. MASSEY.
The homotopy groups of a triad I.
Annals of Mathematics **53**(1), 161–205 (1951).
- [BM52] A. L. BLAKERS Y W. S. MASSEY.
The homotopy groups of a triad II.
Annals of Mathematics **55**(1), 192–201 (1952).
- [BM53a] A. L. BLAKERS Y W. S. MASSEY.
The homotopy groups of a triad III.
Annals of Mathematics **58**(3), 409–417 (1953).
- [BM53b] A. L. BLAKERS Y W. S. MASSEY.

- Products in homotopy theory.
Annals of Mathematics **58**(2), 295–324 (1953).
- [Bor94] F. BORCEUX.
“Handbook of categorical algebra 1”.
Número 50 en *Encyclopedia of Math. and its Applications*. Cambridge University Press (1994).
- [BQ01] H.-J. BAUES Y A. QUINTERO.
“Infinite Homotopy Theory”.
Número 6 en *K-Monographs in Mathematics*. Kluwer (2001).
- [Bro78] E. M. BROWN.
Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity.
Trans. Amer. Math. Soc. **245**, 503–514 (1978).
- [Bro82] K. S. BROWN.
“Cohomology of Groups”.
Springer Verlag, New York (1982).
- [BT96] H.-J. BAUES Y A. TONKS.
On sum-normalised cohomology of categories, twisted homotopy pairs and universal toda brackets.
Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) (188), 405–433 (1996).
- [BW85] H.-J. BAUES Y G. WIRSCHING.
Cohomology of small categories.
J. Pure Appl. Algebra **38**(2-3), 187–211 (1985).
- [Cab98] J. CABEZA.
Clasificación y cálculo de espacios de Moore propios.
Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza **53**, 151–163 (1998).
- [CB92] W. CRAWLEY-BOEVEY.
Lectures on representations of quivers.
Disponible en la página del autor
<http://www.amsta.leeds.ac.uk/~pmtwc/> (1992).
- [Cha50] S. C. CHANG.
Homotopy invariants and continuous mappings.
Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **202**, 253–263 (1950).
- [Con84] D. CONDUCHÉ.
Modules croisés généralisés de longueur 2.
J. Pure Appl. Algebra **34**(2-3), 155–178 (1984).
- [CP89] J.-M. CORDIER Y T. PORTER.
“Shape Theory”.

- Ellis Horwood (1989).
- [CP95] G. CARLSSON Y E. K. PEDERSEN.
Controlled algebra and the Novikov conjectures for K - and L -theory.
Topology **34**, 731–758 (1995).
- [EH76] D. A. EDWARDS Y H. M. HASTINGS.
“Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology”.
Número 542 en *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag (1976).
- [FW72] F. T. FARRELL Y J. B. WAGONER.
Infinite matrices in algebraic K -theory and topology.
Comment. Math. Helv. **47**, 474–501 (1972).
- [Gab72] P. GABRIEL.
Unzerlegbare Darstellungen I.
Manuscripta Math. **6**, 71–103 (1972).
- [Hen87] H.-W. HENN.
Classification of p -local low-dimensional spectra.
J. Pure Appl. Algebra **45**(1), 45–71 (1987).
- [Her87] L.-J. HERNÁNDEZ.
Proper cohomologies and the proper classification problem.
En J. AGUADÉ Y R. KANE, editores, “Algebraic topology, Barcelona 1986. Proceedings of the second symposium held in Barcelona, April 2-8, 1986”, tomo 1298 de “Lecture Notes in Math.”, páginas 171–191, Berlin (1987). Springer Verlag.
- [Her95] L.-J. HERNÁNDEZ.
Functorial and algebraic properties of Brown’s \mathcal{P} functor.
Theory and Appl. of Categories **1**, 10–53 (1995).
- [Hil61] P. J. HILTON.
Memorial tribute to J. H. C. Whitehead.
Enseignement Math. **7**(2), 107–124 (1961).
- [HS71] P. J. HILTON Y U. STAMMBACH.
“A Course in Homological Algebra”.
Springer-Verlag, New York (1971).
- [Mac49] S. MACLANE.
Cohomology theory in abstract groups III.
Ann. of Math. **50**, 736–761 (1949).

- [McC85] J. McCLEARY.
“A Users Guide to Spectral Sequences”.
Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE (1985).
- [Mit72] B. MITCHELL.
Rings with several objects.
Advances in Mathematics **8**, 1–161 (1972).
- [MP98] T. MUTLU Y T. PORTER.
Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes.
Theory Appl. Categ. **4**(8), 174–194 (1998).
- [MS82] S. MARDEŠIĆ Y J. SEGAL.
“Shape Theory”.
Número 26 en Math. Library. North-Holland (1982).
- [Mur03] F. MURO.
Suspensions of crossed and quadratic complexes, co-H-
structures and applications.
Por aparecer en *Trans. Amer. Math. Soc.* (2003).
- [MW50] S. MACLANE Y J. H. C. WHITEHEAD.
On the 3-type of a complex.
Proc. Nat. Acad. Sci. **36**, 41–48 (1950).
- [Naz73] L. A. NAZAROVA.
Representations of quivers of infinite type.
Math. USSR Izvestija **7**(4), 749–792 (1973).
- [Neu67] H. NEUMANN.
“Varieties of Groups”.
Springer-Verlag New York, Inc., New York (1967).
- [O’M03] K. C. O’MEARA.
The exchange property for row and column-finite matrix rings.
J. Algebra **268**(2), 744–749 (2003).
- [Pei49] R. PEIFFER.
Über Identitäten zwischen Relationen.
Math. Ann. **121**, 67–99 (1949).
- [Por95] T. PORTER.
Proper homotopy theory.
En I. M. JAMES, editor, “Handbook of Algebraic Topology”,
tomo 36. North-Holland (1995).
- [Sim98] J. J. SIMÓN.

- Finitely generated projective modules over row and column finite matrix rings.
J. Algebra **208**, 165–184 (1998).
- [Tay71] L. R. TAYLOR.
“Surgery on paracompact manifolds”.
Tesis Doctoral, University of Berkeley (1971).
- [Wag72] J. B. WAGONER.
Delooping classifying spaces in algebraic K -theory.
Topology **11**, 349–370 (1972).
- [Whi48] J. H. C. WHITEHEAD.
The homotopy type of a special kind of polyhedron.
Ann. Soc. Polon. Math. **21**, 176–186 (1948).
- [Whi49a] J. H. C. WHITEHEAD.
Combinatorial homotopy II.
Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 453–496 (1949).
- [Whi49b] J. H. C. WHITEHEAD.
On simply connected 4-dimensional polyhedra.
Comment. Math. Helv. **22**, 48–92 (1949).
- [Whi50] J. H. C. WHITEHEAD.
A certain exact sequence.
Ann. Math. **52**, 51–110 (1950).
- [Whi78] G. W. WHITEHEAD.
“Elements of Homotopy Theory”.
Springer Verlag, New York (1978).