

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Civil

Modelización y Análisis de Vigas Piezoeléctricas
para la Captación de Energía

Autor: María Dolores Lorenzo Espejo

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Civil

Modelización y Análisis de Vigas Piezoeléctricas para la Captación de Energía

Autora:

María Dolores Lorenzo Espejo

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Proyecto Fin de Carrera: Modelización y Análisis de Vigas Piezoeléctricas para la Captación de Energía

Autor: María Dolores Lorenzo Espejo

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2023

El Secretario del Tribunal

A mis padres y a mis hermanos.

Agradecimientos

Con este trabajo finaliza mi etapa de estudiante de grado. Estoy profundamente agradecida a estos años por haberme permitido encontrar mi pasión en la ingeniería civil y por el crecimiento académico y personal que me han aportado.

Llegar hasta aquí ha sido posible gracias a la ayuda de mi tutor Luis, a quien agradezco su colaboración y su implicación desde principio a fin de la elaboración de este trabajo.

También quiero agradecer a mis amigos y a mi familia la confianza que han depositado en mí durante todo este proceso. Gracias por apoyarme y por guiarme a lo largo de este camino.

María Dolores Lorenzo Espejo

Sevilla, 2023

Los recolectores piezoeléctricos constituyen una alternativa de gran utilidad para la conversión de energía mecánica a energía eléctrica. Estos dispositivos se emplean en ámbitos tan diversos como la medicina, la industria o la ingeniería civil. Para cada una de sus aplicaciones, el recolector piezoeléctrico se puede presentar con una morfología y en una situación de carga distinta, de modo que las variables de diseño variarán en cada caso.

Este trabajo pretende modelizar un recolector piezoeléctrico en forma de viga en voladizo e identificar la susceptibilidad de su rendimiento a la variación de sus parámetros característicos y al régimen de funcionamiento (i.e., pequeños desplazamientos -1^{er} orden- o grandes desplazamientos -2^o orden-), con el fin de analizar su comportamiento y poder sugerir directrices de diseño que optimicen su operatividad. Para ello, se modelizará la viga piezoeléctrica según el método de elementos finitos y se someterá a estos modelos a cambios en sus parámetros, observando la evolución del voltaje producido. En el proceso se comprobará la influencia de los efectos de segundo orden en los resultados encontrados, evaluando la importancia de considerarlos en la caracterización del comportamiento del recolector. Estos resultados permitirán alcanzar conclusiones de utilidad para el proceso de diseño.

Abstract

Piezoelectric harvesters are a useful way to convert mechanical energy to electrical energy. These devices are used in different fields of application, such as medicine, industry or civil engineering. For each of these applications, the harvester may present a different shape and a different load action, so the design variables may differ for each case.

This project attempts to model a piezoelectric harvester in the shape of a cantilever beam and identify if its performance is influenced by changes in its characteristic parameters or the operating regime (i.e., small displacements -1st order effects- or large displacements -2nd order effects-), in order to study its behavior and find design guidelines that could affect its performance. To do so, the beam will be modelled with the finite element method and it will be subjected to variations in its parameters. This will allow to monitor the evolution of the generated electric potential in each case. During the process, the influence of second order deformations will be measured, to discover the relevance of taking these into consideration when describing the response of the beam. These results will allow us to reach relevant conclusions for the design process.

ÍNDICE

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvi
Notación	xix
1 Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	4
1.3. Organización del documento	4
2 Modelización de vigas recolectoras de energía	7
2.1. Descripción general de una viga recolectora de energía unimorfa	7
2.2. Modelo teórico	9
2.2.1. Comportamiento mecánico de la viga	10
2.2.2. Comportamiento piezoeléctrico de la viga	12
2.2.3. Descripción del modelo teórico	13
2.3. Modelo de elementos finitos 3D	14
2.4. Modelo de elementos finitos 2D	16
2.5. Modelización de la respuesta dinámica	19
3 Análisis de los resultados	21
3.1. Propiedades de los materiales	21
3.2. Respuesta estática de vigas unimorfas	25
3.2.1. Validación de modelos MEF 2D y 3D	25
3.2.2. Influencia de las relaciones de aspecto t/W y los efectos de segundo orden	28
3.2.3. Influencia de la relación de aspecto t/L y los efectos de segundo orden	35
3.2.4. Influencia del parámetro β y los efectos de segundo orden	42
3.2.5. Influencia de la combinación de relaciones de aspecto	45
3.3. Respuesta dinámica de vigas unimorfas	50
3.3.1. Influencia de la relación de aspecto t/L , factor de amortiguamiento ξ y los efectos de segundo orden	50
4 Resumen y conclusiones	57
4.1. Resumen de los estudios elaborados	57
4.2. Conclusiones	58
4.3. Trabajos futuros	58
Referencias	59
Anexo 1: Códigos de MATLAB	61
Anexo 2: Códigos de ANSYS	64

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Variables geométricas del recolector piezoeléctrico	9
Tabla 2: Variables implicadas en las ecuaciones constitutivas	9
Tabla 3: Variables implicadas en las ecuaciones constitutivas	15
Tabla 4: Equivalencia entre las componentes del tensor de rigidez 3D y 2D	18
Tabla 5: Equivalencia entre las componentes del tensor piezoeléctrico 3D y 2D	18
Tabla 6: Equivalencia entre las componentes del tensor de permitividad 3D y 2D	19
Tabla 7: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo MEF 3D	21
Tabla 8: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo MEF 3D	22
Tabla 9: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo MEF 2D	22
Tabla 10: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo MEF 2D	23
Tabla 11: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo analítico	24
Tabla 12: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo analítico	24
Tabla 13: Dimensiones de la viga para la validación de los modelos	26
Tabla 14: Valores del espesor y el ancho según los ratios considerados	29
Tabla 15: Valores de los parámetros geométricos para la comprobación de la influencia de t/W	29
Tabla 16: Valores del espesor y la longitud para distintas relaciones de t/L	35
Tabla 17: Valores de las variables geométricas para la comprobación de la influencia de t/L	35
Tabla 18: Comparación de voltaje obtenido en primer orden y segundo orden	41
Tabla 19: Dimensiones para comprobación de influencia de β ($t/L=0,02$ y $t/W=0,1$)	42
Tabla 20: Dimensiones para comprobación de influencia de β ($t/L=0,1$ y $t/W=4$)	44
Tabla 21: Factor de amortiguamiento ($\beta=0,3$, $tW=4$ y $\beta R=0,00001$)	51
Tabla 22: Factor de amortiguamiento ($\beta=0,3$, $tW=4$ y $\beta R=0,01$)	51

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 (a): Efecto piezoeléctrico directo	2
Figura 1 (b): Efecto piezoeléctrico inverso	2
Figura 2: Técnica de aumento de rango de excitación del recolector piezoeléctrico	3
Figura 3: Empleo de sensores piezoeléctricos en aerogeneradores	3
Figura 4: Morfologías de los recolectores unimorfo y bimorfos.	7
Figura 5: Dispositivos piezoeléctricos de modos 33 y 31.	8
Figura 6: Geometría del recolector piezoeléctrico a estudiar.	9
Figura 7: Alzado de la viga piezoeléctrica.	10
Figura 8: Geometría de los elementos SOLID186 y SOLID226.	14
Figura 9: Viga piezoeléctrica 3D mallada.	16
Figura 10: Aplicación de la carga en el extremo libre.	16
Figura 11: Geometría de los elementos PLANE183 y PLANE223.	17
Figura 12: Modelo de la viga piezoeléctrica en 2D	19
Figura 13: Secuencia de carga escalón aplicada	20
Figura 14: Influencia del parámetro β en el voltaje producido según α	25
Figura 15 (a): Geometría mallada en modelo 2D	26
Figura 15 (b): Geometría mallada en modelo 3D	26
Figura 16: Relación fuerza-flecha ($t/L=0,1$, $t/W=4$ y $\beta=3$)	27
Figura 17: Relación fuerza-voltaje ($t/L=0,1$, $t/W=4$ y $\beta=3$)	27
Figura 18: Influencia de β en el voltaje según el modelo empleado ($t/L=0,1$, $t/W=4$)	28
Figura 19 (a): Geometría para $t/W = 0,1$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	30
Figura 19 (b): Geometría para $t/W = 4$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	30
Figura 20: Influencia de t/W en la relación fuerza-flecha	30
Figura 21: Influencia de t/W en la relación fuerza-voltaje ($t/L=0,1$ y $\beta=3$)	31
Figura 22 (a): Deformada para $t/W = 0,1$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	31
Figura 22 (b): Deformada para $t/W = 4$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	31
Figura 23 (a): Voltaje para $t/W = 0,1$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	32
Figura 23 (b): Voltaje para $t/W = 4$, $t/L=0,1$ y $\beta=3$	32
Figura 24 (a): Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $t/W = 0,1$	34
Figura 24 (b): Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $t/W = 0,1$	34
Figura 24 (c): Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $t/W = 1$	34
Figura 24 (d): Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $t/W = 1$	34
Figura 24 (e): Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $t/W = 4$	34
Figura 24 (f): Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $t/W = 4$	34
Figura 25: Influencia de t/L en la relación fuerza-flecha ($t/W=4$ y $\beta=3$)	36
Figura 26: Influencia de t/L en la relación fuerza-voltaje ($t/W=4$ y $\beta=3$)	36

Figura 27 (a): Influencia de efectos de 2° orden en la flecha para $t/L=0,1$	38
Figura 27 (b): Influencia de efectos de 2° orden en la flecha para $t/L=0,05$	38
Figura 27 (c): Influencia de efectos de 2° orden en la flecha para $t/L=0,03$	38
Figura 27 (d): Influencia de efectos de 2° orden en la flecha para $t/L=0,02$	38
Figura 27 (e): Influencia de efectos de 2° orden en la flecha para $t/L=0,01$	38
Figura 28 (a): Influencia de efectos de 2° orden en el voltaje para $t/L=0,1$	39
Figura 28 (b): Influencia de efectos de 2° orden en el voltaje para $t/L=0,05$	39
Figura 28 (c): Influencia de efectos de 2° orden en el voltaje para $t/L=0,03$	39
Figura 28 (d): Influencia de efectos de 2° orden en el voltaje para $t/L=0,02$	39
Figura 28 (e): Influencia de efectos de 2° orden en el voltaje para $t/L=0,01$	39
Figura 29 (a): Deformada para $t/L=0,01$, $t/W=4$ y $\beta=3$ en primer orden	40
Figura 29 (b): Deformada para $t/L=0,01$, $t/W=4$ y $\beta=3$ en segundo orden	40
Figura 30 (a): Deformada para $t/L=0,1$, $t/W=4$ y $\beta=3$ en primer orden	40
Figura 30 (b): Deformada para $t/L=0,1$, $t/W=4$ y $\beta=3$ en segundo orden	40
Figura 31 (a): Voltaje para $t/L =0,01$, $t/W =4$ y $\beta=3$ en primer orden	41
Figura 31 (b): Voltaje para $t/L =0,01$, $t/W =4$ y $\beta=3$ en segundo orden	41
Figura 32 (a): Voltaje para $t/L =0,1$, $t/W =4$ y $\beta=3$ en primer orden	41
Figura 32 (b): Voltaje para $t/L =0,1$, $t/W =4$ y $\beta=3$ en segundo orden	41
Figura 33: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha según β ($t/L =0,02$ y $tW=0,1$)	43
Figura 34: Influencia de los efectos de 2° orden en el voltaje según β ($t/L =0,02$ y $tW=0,1$)	43
Figura 35: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha según β ($t/L =0,1$ y $tW=4$)	44
Figura 36: Influencia de los efectos de 2° orden en el voltaje según β ($t/L =0,1$ y $tW=4$)	45
Figura 37: Influencia de β en el voltaje según t/W ($t/L =0,1$)	46
Figura 38: Influencia de β en el voltaje según tL ($t/W=4$)	47
Figura 39 (a): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 0,1$ en 1 ^{er} orden	49
Figura 39 (b): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 0,1$ en 2° orden	49
Figura 39 (c): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 0,8$ en 1 ^{er} orden	49
Figura 39 (d): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 0,8$ en 2° orden	49
Figura 39 (e): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 4$ en 1 ^{er} orden	49
Figura 39 (f): Influencia de β en el voltaje según t/L para $t/W = 4$ en 2° orden	49
Figura 40: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W=4$, $t/L =0,1$ y $\beta_R=0,00001$)	51
Figura 41: Influencia de los efectos de 2° orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,1$ y $\beta_R=0,00001$)	51
Figura 42: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,03$ y $\beta_R=0,00001$)	52
Figura 43: Influencia de los efectos de 2° orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,03$ y $\beta_R=0,00001$)	52
Figura 44: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,1$ y $\beta_R=0,01$)	54

Figura 45: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,1$ y $\beta_R=0,01$) 54

Figura 46: Influencia de los efectos de 2° orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,03$ y $\beta_R=0,01$) 55

Figura 47: Influencia de los efectos de 2° orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta=0,3$, $t/W =4$, $t/L =0,03$ y $\beta_R=0,01$) 55

d	Tensor de coeficientes piezoeléctricos
d_{31}	coeficiente piezoeléctrico para el modo de carga 31
e	Tensor de coeficientes piezoeléctricos
t	Espesor total
t_b	Espesor de la placa base
t_p	Espesor de la placa piezoeléctrica
C	Capacitancia
C	Matriz de amortiguamiento
C^E	Tensor de rigidez
D	Desplazamiento de carga dieléctrica
E	Campo eléctrico
E_b	Módulo elástico del material base
E_p	Módulo elástico del material piezoeléctrico
F	Fuerza aplicada en el extremo libre
K	Matriz de rigidez
L	Longitud de la viga
M	Matriz de masa
Q	Carga
S^E	Tensor de compliancia
S_{11}^E	Componente del tensor de compliancia en el eje vertical
U	Energía total del sistema
V	Voltaje
W	Ancho de la viga
α	Relación entre el módulo elástico del material base y el módulo elástico del material piezoeléctrico
α_R	Parámetro de amortiguamiento de Rayleigh
β	Relación entre el espesor del material base y el espesor del material piezoeléctrico
β_R	Parámetro de amortiguamiento de Rayleigh
ϵ	Deformación mecánica
ξ	Factor de amortiguamiento
σ	Tensión mecánica
ϵ_{33}^T	Componente del tensor de permitividad en el eje horizontal
ϵ^T	Permitividad

1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expondrán las razones que motivan el estudio realizado en este trabajo y se llevará a cabo una revisión de la literatura publicada en el campo de los dispositivos piezoeléctricos. Posteriormente, se expondrán los objetivos perseguidos y la organización que sigue el contenido presentado.

1.1. Motivación

El desarrollo tecnológico de los últimos años ha dado lugar a la proliferación de numerosos dispositivos inalámbricos y autónomos en ámbitos tan variados como la medicina, la industria o la ingeniería civil. La presencia de estos dispositivos plantea nuevos retos, como el uso de energías alternativas que permitan la independencia de baterías convencionales y evitar las desventajas que estas conllevan: duración limitada, necesidad de reemplazo o aporte de peso entre otras.

Una posible fuente de energía para estos dispositivos podría basarse en la conversión de energía mecánica a energía eléctrica mediante el uso de materiales y sistemas piezoeléctricos. Los materiales piezoeléctricos permiten la generación de carga eléctrica en sus superficies al experimentar una deformación mecánica, es el llamado efecto piezoeléctrico directo. Del mismo modo, estos materiales se deforman al hacer pasar por ellos un voltaje eléctrico, el efecto piezoeléctrico inverso (ver Figura 1.)

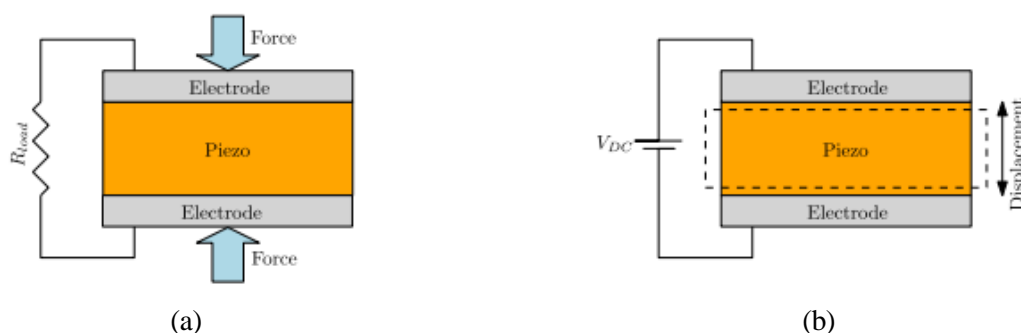


Figura 1: (a) Efecto piezoeléctrico directo, (b) efecto piezoeléctrico inverso (extraído de [1])

Este efecto hace a los recolectores¹ energéticos piezoeléctricos útiles ante cualquier tipo de excitación externa susceptible de crear deformaciones mecánicas en el material: vibraciones acústicas, incidencia del viento o dilataciones térmicas.

Este sistema de recolección de energía tiene numerosas ventajas sobre otro tipo de fuentes de energía, como ser ligeros o no generar dispersión de calor [2]. Además, en los últimos años se ha investigado acerca de diversos aspectos relacionados con su rendimiento, obteniendo resultados que avalan su utilidad. Por ejemplo, se han estudiado técnicas para aumentar el rango de frecuencias de excitación del recolector. Algunas de estas son el empleo de múltiples vigas en voladizo (ver Figura 2), la adición o eliminación de una masa puntual en el extremo libre de la viga o el uso de imanes para provocar la repulsión magnética en la viga [3]. También se ha verificado el buen comportamiento de los recolectores piezoeléctricos bajo fatiga, demostrando una tasa limitada de degradación del rendimiento para ciclos de carga equivalentes hasta a 3 años de carga de tráfico [4]. Incluso se ha demostrado su viabilidad económica para la alimentación de dispositivos de demandas de energía bajas o medias, como en puertas automáticas [5].

Este conjunto de ventajas permite que los recolectores piezoeléctricos se empleen en multitud de ámbitos. Ejemplo de ello es su uso en aplicaciones en altas temperaturas, como en el ámbito aeronáutico, automóvil o en industrias energéticas [6]. En este contexto, los dispositivos piezoeléctricos son una de las alternativas

¹ A lo largo de este trabajo se denominará a los generadores piezoeléctricos "recolectores piezoeléctricos", por su traducción del término en inglés, *harvester*.

preferidas de entre las técnicas resistentes a las altas temperaturas, por su bajo coste y su pequeño tamaño. También han resultado de especial utilidad en el contexto de la monitorización de la salud estructural en ingeniería civil. La creciente atención al mantenimiento de las infraestructuras civiles ha ocasionado la aparición de estándares, procedentes de administraciones nacionales u organizaciones, que recomiendan o imponen el uso de técnicas de monitorización de estructuras [7]. El uso de dispositivos como sensores piezoeléctricos resulta de utilidad en este contexto, dado que permiten medir parámetros como deformaciones, corrosión o fisuras con sensores baratos y de bajo mantenimiento [8]. Finalmente, poseen un gran potencial para la monitorización de aerogeneradores. La sensorización de los aerogeneradores requiere, tradicionalmente, un gran porcentaje de los costes asociados a la generación de energía eólica, dado que las localizaciones de estos aerogeneradores pueden ser remotas y el acceso a sus sensores es complicado. Por ello, esta industria se beneficia de los sensores piezoeléctricos por su larga vida útil y su escaso mantenimiento [9].

De la investigación llevada a cabo hasta ahora se puede extraer que los recolectores piezoeléctricos resultan de utilidad en contextos muy variados. Sin embargo, esto supone que las condiciones de excitación para cada uno de estos recolectores podrían ser exclusivas y específicas a cada aplicación. Del mismo modo, las propiedades y dimensiones de los recolectores podrían variar adaptándose a las condiciones y requisitos de cada entorno. Por lo tanto, resulta interesante evaluar el rendimiento de los recolectores en distintos escenarios y con distintas morfologías. Con este fin, se ha estudiado el efecto de parámetros como la longitud total de la viga piezoeléctrica o de la placa de material piezoeléctrico [10]. En el contexto de excitación aerodinámica, se ha evaluado la influencia de la superficie de exposición al viento y del peso de una masa puntual añadida al extremo de la viga [11]. También se ha comprobado la respuesta de un recolector piezoeléctrico bajo cargas puntuales estáticas y dinámicas [12].

Los estudios llevados a cabo en este trabajo pretenden continuar en esta línea de comprobaciones y averiguar la influencia de diversos parámetros geométricos, métodos de análisis y tipos de excitación en la eficiencia de un recolector piezoeléctrico. Asimismo, estos estudios son una continuación de trabajos previamente elaborados en el Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, como el referenciado en [13].

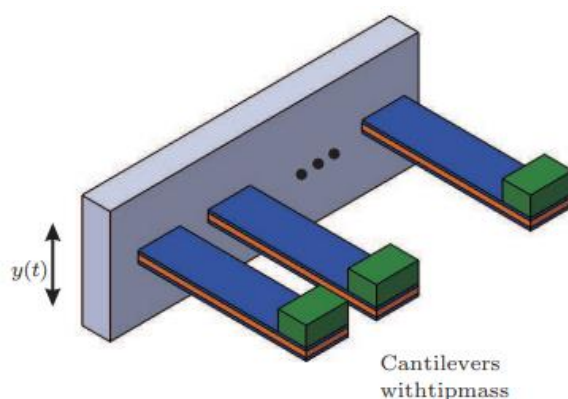


Figura 2: Técnica de aumento de rango de excitación del recolector piezoeléctrico (extraído de [3])

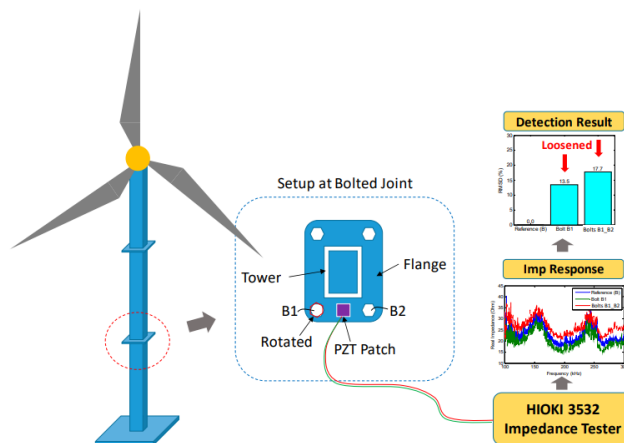


Figura 3: Empleo de sensores piezoeléctricos en aerogeneradores (extraído de [9])

1.2. Objetivos

Este trabajo pretende modelizar una viga piezoeléctrica y diversas variaciones de ella para identificar parámetros relacionados con la cantidad de energía recolectada en distintos planteamientos. Así, se ensayarán diferentes morfologías de viga, tipos de sollicitación y regímenes de funcionamientos con el fin de conocer la susceptibilidad del voltaje producido a la variación de alguno de estos parámetros.

Para ello, en este trabajo se ha comprobado la relevancia en la recolección de energía piezoeléctrica de los siguientes aspectos:

- Monitorización según modelos de elementos finitos (MEF) 2D o 3D.
- Variaciones en las siguientes relaciones de aspecto: relación espesor-ancho, relación espesor-longitud y relación entre el espesor del material piezoeléctrico y el espesor del material sustrato.
- Consideración de efectos de segundo orden.
- Análisis estático o transitorio.

La comparación de los resultados obtenidos permitirá reconocer las discordancias entre distintos casos de análisis y los contextos en los que son de utilidad los distintos modelos. Más importantemente, los resultados nos permitirán extraer conclusiones con respecto a los valores óptimos de las variables de diseño.

1.3. Organización del documento

En este apartado se clarifica la organización del contenido presentado en los siguientes capítulos.

- **Capítulo 2: Modelización de vigas recolectoras.** En este capítulo se presenta el esquema general de viga piezoeléctrica que se va a ensayar a lo largo de todo el trabajo. Se expone también el marco teórico que rige el comportamiento piezoeléctrico, que nos permitirá llevar a cabo comprobaciones analíticas y comprender los resultados arrojados por los modelos de elementos finitos. Se explicará el proceso de elaboración de los modelos de elementos finitos.
- **Capítulo 3: Análisis de los resultados.** Se validarán los modelos de elementos finitos elaborados, comprobando que son coherentes y equivalentes. Posteriormente, se someterá al modelo a la variación de sus dimensiones para comprobar la relevancia que las relaciones de aspecto tienen sobre la eficacia del recolector. También se compararán los resultados obtenidos bajo el análisis de primer orden y el de segundo orden, extrayendo conclusiones acerca de su impacto en los resultados. Por último, se obtendrá la respuesta del recolector piezoeléctrico bajo un análisis transitorio.
- **Capítulo 4: Resumen y conclusiones.** Se sintetizará el contenido desarrollado a lo largo de todo el documento, así como los resultados de mayor interés. Se expondrán las conclusiones obtenidas que pretenden satisfacer los objetivos inicialmente planteados. Finalmente, se indicarán algunos de los posibles trabajos futuros que podrían contribuir a la investigación del comportamiento de recolectores piezoeléctricos.

2 MODELIZACIÓN DE VIGAS RECOLECTORAS DE ENERGÍA

A lo largo de este trabajo se han desarrollado tres modelos de cálculo: un modelo teórico, un modelo MEF 3D y un modelo MEF 2D. El objetivo de este capítulo es describir el proceso de modelización del recolector piezoeléctrico en los tres casos. Al inicio se presentará el esquema general del recolector estudiado a lo largo del trabajo, común a todos los modelos. Posteriormente, se introducirá la teoría piezoeléctrica y se explicará la elaboración del modelo analítico. También se explicará cómo se han desarrollado los modelos MEF y la utilidad de cada uno de ellos. Finalmente, se describirá el modelo de cálculo transitorio.

2.1. Descripción general de una viga recolectora de energía unimorfa

En primer lugar, cabe exponer las clasificaciones en las que se engloban los recolectores piezoeléctricos. Existen dos clases de recolectores piezoeléctricos en función de su morfología: los unimorfos y los bimorfos. Los unimorfos se caracterizan por componerse de una placa piezoeléctrica unida a una viga que actúa como sustrato. En el caso de los bimorfos, se interpone el material sustrato entre dos placas de material piezoeléctrico. El recolector se beneficia de la capa sustrato porque aumenta la energía mecánica producida en el sistema total, y con ello, la energía eléctrica obtenida. Para el trabajo se evaluará un recolector unimorfo.

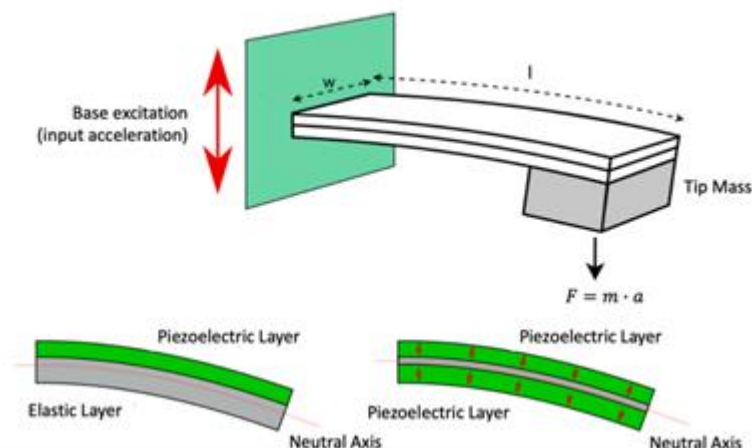


Figura 4: Morfologías de los recolectores unimorfo y bimorfos. (extraído de [14])

Existe un segundo modo de clasificación que atiende a la dirección del campo eléctrico con respecto a la dirección de tensión mecánica. Podemos distinguir entre los piezoeléctricos 33 y los 31. Los tipo 33 experimentan la tensión mecánica en la misma dirección en la que se polarizan, de modo que el campo eléctrico tendrá la misma dirección. En cuanto al tipo 31, experimenta la tensión en una dirección y se polariza de manera ortogonal, de modo que el campo eléctrico generado es ortogonal al esfuerzo mecánico. El modelo seguido a lo largo del trabajo es de tipo 31.

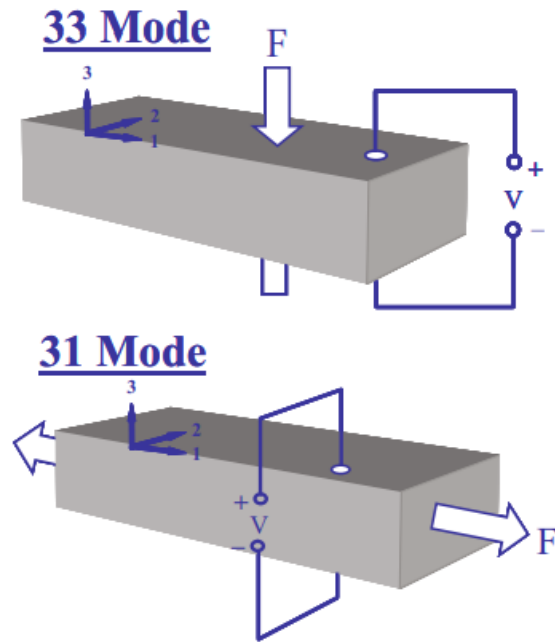


Figura 5: Dispositivos piezoeléctricos de modos 33 y 31 (extraído de [15])

Una vez establecido el tipo de recolector a usar, podemos definir los materiales que lo componen. Cabe recordar que será necesario definir dos materiales de distinta naturaleza: el material de la placa sustrato y el material piezoeléctrico.

Para la base se empleará un acero inoxidable. Este material es isótropo, de modo que basta con definir su densidad, su módulo de Young y su módulo de Poisson para describir su comportamiento mecánico en todas las direcciones.

Para la placa piezoeléctrica se empleará el material PZT-4. Dicho material posee un comportamiento ortótropo, de modo que la mayoría de sus propiedades mecánicas y piezoeléctricas serán consideradas en forma matricial. Los valores de estas propiedades tendrán que ser introducidos de manera específica para cada uno de los modelos de comprobación, dado que las dimensiones de las matrices asociadas a estas cambiarán para cada caso. Únicamente su densidad permanece invariable, al tratarse de un escalar.

Por último, podemos describir la geometría del recolector. El recolector estudiado es una viga en voladizo empotrada en uno de sus extremos. Los parámetros geométricos que caracterizan su forma se pueden consultar en la Figura 6, cuyos símbolos se definen en la Tabla 1. Los parámetros descritos en dicha tabla varían de manera continua a lo largo de los distintos casos de estudio, con el fin de comprobar la relevancia de diversas relaciones de aspecto en la energía generada. El único parámetro que permanece invariable es el espesor de la placa piezoeléctrica.

Los estudios llevados a cabo en este documento evalúan la relevancia de diversas relaciones de aspecto basadas en estos parámetros geométricos, estas son $\frac{t}{L}$, $\frac{t}{W}$ y β . β se define como la razón entre los espesores de los dos componentes del recolector:

$$\beta = \frac{t_b}{t_p}$$

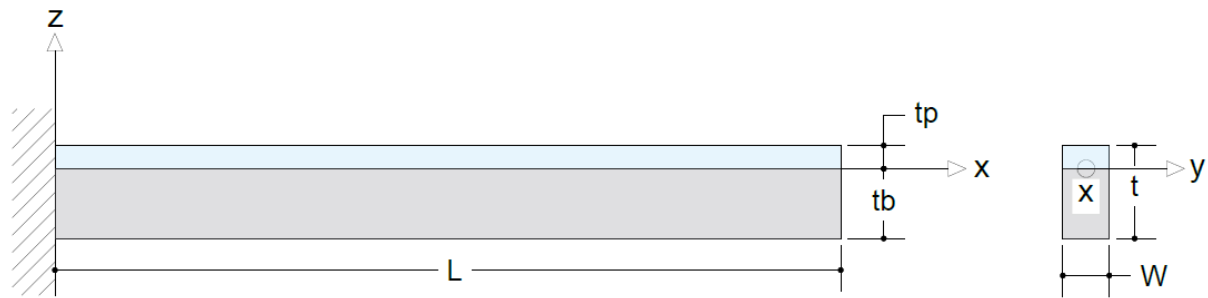


Figura 6: Geometría del recolector piezoeléctrico a estudiar

<i>Dimensión</i>	<i>Símbolo</i>
Longitud	L
Espesor de placa piezoeléctrica	t_p
Espesor de placa base	t_b
Espesor total	t
Ancho	W

Tabla 1: Variables geométricas del recolector piezoeléctrico

2.2. Modelo teórico

El modelo analítico se basa en el desarrollo de la teoría piezoeléctrica, partiendo de sus ecuaciones constitutivas. Este apartado se apoya en el artículo referenciado en [16].

Las ecuaciones constitutivas de los materiales piezoeléctricos son:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^E & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{\epsilon}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{E} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Donde las variables representadas son:

<i>Propiedad</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Unidad</i>
Deformación mecánica	$\boldsymbol{\varepsilon}$	N/m^2
Desplazamiento de carga dieléctrica	\boldsymbol{D}	C/m^2
Tensor de compliancia	\boldsymbol{S}^E	m^2/N
Tensor de coeficientes piezoeléctricos	\boldsymbol{d}	C/N
Permitividad	$\boldsymbol{\epsilon}^T$	F/m
Tensión mecánica	$\boldsymbol{\sigma}$	N/m^2
Campo eléctrico	\boldsymbol{E}	N/C

Tabla 2: Variables implicadas en las ecuaciones constitutivas

Se hace notar que, a lo largo de este documento, el superíndice “E” acompañando al símbolo de cualquier variable hace referencia a una propiedad medida ante un campo eléctrico constante. Análogamente, el superíndice “T” hace referencia a una propiedad medida ante una tensión mecánica constante.

A continuación, se definen algunas las variables dieléctricas y piezoeléctricas implicadas para una mejor comprensión de los conceptos que representan.

- Desplazamiento de carga dieléctrica (**D**): Indica cuánto se desplaza una carga del material piezoeléctrico como consecuencia de su polarización al aplicar un campo eléctrico.
- Tensor de coeficientes piezoeléctricos (**d**): Relaciona la carga generada con la tensión mecánica aplicada.
- Permitividad (ϵ^T): Se trata de la permitividad absoluta del material. Expresa la medida en la que se polariza un material al estar afectado por un campo eléctrico.

Para este apartado renombraremos al eje longitudinal x como 3 y al vertical z , como 1. Así, para el ejemplo que nos ocupa las ecuaciones constitutivas se particularizan en:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = S_{11}^E \sigma_1 - d_{31} E_3 \\ D_3 = -d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{cases} \quad (2)$$

2.2.1. Comportamiento mecánico de la viga

Dado que el modelo posee dos materiales de distinta naturaleza, el piezoeléctrico y el sustrato, será necesario obtener la fibra neutra del sistema completo. Para ello, podemos basarnos en la Figura 7 y definir la siguiente expresión:

$$z_a = \frac{\sum_i z_i E_i A_i}{\sum_i E_i A_i} = \frac{z_1 E_1 A_1 - z_2 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (3)$$

Donde A_i es el área de cada sección de material, E_i es el módulo de Young de cada material y z_i la distancia desde el centro del área i a la fibra neutra. Los subíndices 1 y 2 hacen referencia al material piezoeléctrico y al material sustrato respectivamente.

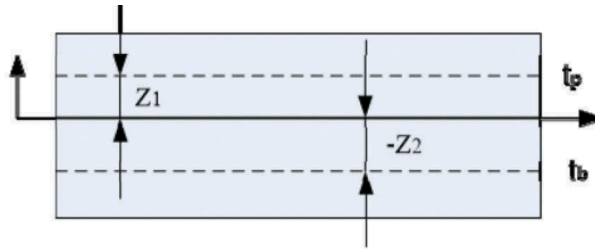


Figura 7: Alzado de la viga piezoeléctrica (imagen extraída de [16])

Se definen dos variables paramétricas:

$$\alpha = \frac{E_b}{E_p}, \beta = \frac{t_b}{t_p} \quad (4)$$

Donde E_b y E_p son el módulo elástico del material base y del material piezoeléctrico respectivamente. t_b y t_p son el espesor del material base y del material piezoeléctrico respectivamente. Introduciendo estos parámetros en la expresión de la fibra neutra obtenemos:

$$z_a = \frac{t_p(1 - \alpha\beta^2)}{2(1 + \alpha\beta)} \quad (5)$$

El momento generado en una viga en voladizo (de longitud L) en la posición x se puede calcular según:

$$M = F * (L - x) = \int \sigma(\varepsilon(x, z), E_3) z dz \quad (6)$$

Si definimos la deformación en la dirección 1 en función de la curvatura y de la posición de la fibra neutra:

$$\varepsilon_1 = -k(z - z_a) \quad (7)$$

Esta deformación corresponde a los dos materiales.

Si sustituimos la deformación obtenida en la ecuación constitutiva (1) obtenemos la tensión en el material piezoeléctrico:

$$\sigma_p = \sigma_1 = \frac{1}{s_{11}^E} (-k(z - z_a) + d_{31}E_3) \quad (8)$$

En cuanto a la relación deformación-tensión en el material base, se puede expresar según:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{E_b} \sigma_1 = -s_b \sigma_1 \quad (9)$$

Donde s_b es la constante de compliancia para el material base. Sustituyendo el valor de deformación obtenido en (7):

$$\sigma_b = \frac{1}{s_b} (-k(z - z_a)) \quad (10)$$

Sustituyendo en (6) las ecuaciones (9) y (10):

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{t_p} \int_0^w \sigma_1 z dy dz + \int_{-t_m}^0 \int_0^w \sigma_b z dy dz \\ &= \int_0^{t_p} \frac{1}{s_{11}^E} (-k(z - z_a) + d_{31}E_3) W(z - z_a) dz + \int_{-t_m}^0 -E_b W k(z - z_a)^2 dz \end{aligned} \quad (11)$$

Integrando (11) se obtiene:

$$M = \frac{-\rho W \alpha^2 E_p^3 B}{12(1 + \alpha\beta)t_p} + \frac{d_{31}t_p^2(1 + \beta)\alpha\beta W E_p}{2(1 + \alpha\beta)} \quad (12)$$

Donde B es una constante auxiliar definida según:

$$B = \frac{t_p^4}{\alpha^2 E_p^2} (1 + 4\alpha\beta + 6\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^4) \quad (13)$$

De la ecuación (11) se puede obtener la curvatura:

$$k = -\frac{12(1 + \alpha\beta)t_p(L - x)}{\alpha^2 E_p^3 B} F + \frac{6d_{31}t_p^3(1 + \beta)\beta}{\alpha E_p^2 B} E_3 \quad (14)$$

Si desacoplamos el problema mecánico del piezoeléctrico podemos suponer $E_3=0$. Además, para la solución mecánica de una viga a flexión, la curvatura es equivalente a la derivada segunda de la flecha. Así, se puede expresar la curvatura como:

$$k = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{12(1 + \alpha\beta)t_p(L - x)}{\alpha^2 E_p^3 B W} F \quad (15)$$

Integrando obtendríamos que la flecha máxima se obtiene según:

$$w_{max} = -\frac{4FL^3 \left(1 + \frac{E_b t_b}{E_p t_p}\right)}{WE_p t_p^3 \left(1 + 4\frac{E_b t_b}{E_p t_p} + 6\frac{E_b t_b^2}{E_p t_p^2} + 4\frac{E_b t_b^3}{E_p t_p^3} + \frac{E_b^2 t_b^4}{E_p^2 t_p^4}\right)} \quad (16)$$

2.2.2. Comportamiento piezoeléctrico de la viga

La energía total en el sistema será la suma de la energía piezoeléctrica total más la energía mecánica total.

La expresión de la energía del material piezoeléctrico posee un término debido a la energía mecánica y otro debido a la energía eléctrica.

$$dU_p = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sigma_1 + \frac{1}{2} D_3 E_3 = \frac{1}{2} (s_{11}^E \sigma_1 - d_{31} E_3) \sigma_1 + \frac{1}{2} (-d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^T E_3) E_3 \quad (17)$$

Sustituyendo la expresión de la tensión en el piezoeléctrico obtenida en (8):

$$dU_p = -\frac{1}{2} s_{11}^E \left(\frac{-k(z - z_a) + d_{31} E_3}{s_{11}^E} \right)^2 - d_{31} \left(\frac{1}{s_{11}^E} (-k(z - z_a) + d_{31} E_3) \right) E_3 + \frac{1}{2} \epsilon_{33}^T E_3^2 \quad (18)$$

La energía del material sustrato es solamente mecánica, ya que en él no tiene lugar el efecto piezoeléctrico:

$$dU_b = \frac{1}{2} s_b \sigma_1^2 \quad (19)$$

Si sustituimos la formulación de la tensión en el sustrato obtenida en (10) se obtiene:

$$dU_b = \frac{1}{2} (s_b s_{11}^E) s_{11}^E = \frac{1}{2} s_b (-k(z - z_a))^2 \quad (20)$$

Integrando se obtiene la energía total del sistema:

$$U = \int_0^L \int_0^W \int_0^{t_p} du_p dz dy dx + \int_0^L \int_0^W \int_{-t_p}^0 du_p dz dy dx = \quad (21)$$

$$= \frac{2(1+\alpha\beta)s_{11}^E t_p L^3}{\alpha^2 B W} F^2 - 3 \frac{d_{31} \beta (1+\beta) s_{11}^E t_p^3 L^2}{\alpha B} E_3 F + \frac{\epsilon_{33}^T W L t_p}{2} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2 (1+\beta)^2 t_p^4 s_{11}^E}{(1+\alpha\beta) B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right] E_3^2$$

El campo eléctrico generado se obtiene como el voltaje producido a través del electrodo entre el grosor del piezoeléctrico:

$$E_3 = \frac{V}{t_p} \quad (22)$$

Sustituyendo (22) en (21):

$$U = \frac{2(1 + \alpha\beta)s_{11}^E t_p L^3}{\alpha^2 B W} F^2 - 3 \frac{d_{31}\beta(1 + \beta)s_{11}^E t_p^3 L^2}{\alpha B} \left(\frac{V}{t_p}\right) F + \frac{\epsilon_{33}^T W L t_p}{2} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1 + \beta)^2 t_p^4 s_{11}^E}{(1 + \alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right] \left(\frac{V}{t_p}\right)^2 \quad (23)$$

La carga eléctrica se puede obtener derivando la energía total, en (23), con respecto a la tensión:

$$Q = \frac{dU}{dV} = -3 \frac{d_{31}\beta(1 + \beta)s_{11}^E t_p^2 L^2}{\alpha B} F + \frac{\epsilon_{33}^T W L t_p}{2} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1 + \beta)^2 t_p^4 s_{11}^E}{(1 + \alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right] V \quad (24)$$

Si consideramos únicamente la carga producida por la actuación de la fuerza:

$$Q = -3 \frac{d_{31}\beta(1 + \beta)s_{11}^E t_p^2 L^2}{\alpha B} F \quad (25)$$

La capacitancia obtenida es:

$$C = \frac{\epsilon_{33}^T W L}{t_p} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1 + \beta)^2 t_p^4 s_{11}^E}{(1 + \alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right] \quad (26)$$

Por último, conociendo que el voltaje se define como la carga entre la capacitancia:

$$V = -3 \frac{d_{31}\beta(1 + \beta)s_{11}^E t_p^2 L}{\epsilon_{33}^T W t_p B} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1 + \beta)^2 t_p^4 s_{11}^E}{(1 + \alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right] F \quad (27)$$

2.2.3. Descripción del modelo teórico

Las expresiones obtenidas durante el desarrollo teórico llevado a cabo en los apartados anteriores permiten confeccionar un modelo de cálculo analítico. Este se empleará para la validación de los modelos, comprobando la coherencia entre sus resultados y aquellos obtenidos mediante el método de elementos finitos. Para simulaciones de mayor complejidad se usarán únicamente los de elementos finitos.

Para la elaboración de este modelo, se han integrado algunas de estas ecuaciones en un programa del *software* MATLAB, cuyo código se puede consultar en el Anexo 1. Así, se han usado las ecuaciones (16), (25) y (26), para obtener la flecha máxima, la carga y la capacitancia respectivamente. El voltaje se ha obtenido relacionando los resultados de carga y capacitancia.

Como se puede observar en las expresiones (16), (25) y (26), los parámetros implicados son los parámetros geométricos presentados en el apartado 2.1 y las componentes de los tensores materiales que resultan de interés para nuestro caso de carga. Para una mayor aclaración, se explican estos últimos:

- s_{11}^E es la componente del tensor de compliancia en el eje vertical
- ϵ_{33}^T es la componente del tensor de permitividad en el eje horizontal
- d_{31} es el coeficiente piezoeléctrico para el modo de carga 31
- E_p , incluido en β , se obtiene según $\frac{1}{s_{11}^E}$

A diferencia de los modelos de elementos finitos, este modelo no permite visualizar las distribuciones de estas propiedades a lo largo de la viga ni los puntos en los que tienen lugar los valores máximos cuantificados. No

obstante, es evidente por el esquema de carga y condiciones de contorno presentado en el apartado 2.1, que la flecha máxima tendrá lugar en el extremo libre de la viga. Asimismo, el voltaje máximo se producirá en el extremo empotrado, donde las tensiones serán mayores como consecuencia de los grados de libertad restringidos.

2.3. Modelo de elementos finitos 3D

Para realizar algunas de las simulaciones se ha construido un modelo de elementos finitos 3D en el *software* ANSYS. En este apartado se indicarán las fases necesarias para la creación del modelo, así como los parámetros a introducir. El código de este modelo se puede consultar en el Anexo 2.

En primer lugar, será necesario seleccionar los elementos a utilizar para la discretización de la geometría. Para el caso 3D se han elegido los elementos tipo SOLID186 y SOLID226. El elemento SOLID186 es un elemento cuadrático 3D de 20 nodos. Cada nodo posee 3 grados de libertad: translación en x , translación en y y translación en z . Este elemento ha sido seleccionado para el material sustrato.

Para el material piezoeléctrico se han elegido elementos SOLID226 porque permiten modelizar el comportamiento en caso de campos acoplados. Al igual que el anterior, este elemento cuadrático 3D posee 20 nodos. No obstante, en este caso cada nodo tendrá 4 grados de libertad: las tres translaciones según los ejes y el voltaje producido.

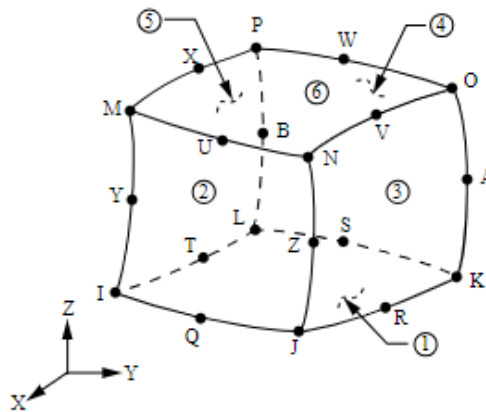


Figura 8: Geometría de los elementos SOLID186 y SOLID226 (extraída de [17])

A continuación, se introducen las propiedades de ambos materiales. Mientras que las del acero inoxidable se introducen mediante valores escalares, habrá que introducir las del material piezoeléctrico de manera matricial. El programa se basa en una formulación de las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas equivalente a las introducidas en (1), pero que emplea variables alternativas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ E \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Las variables empleadas en esta formulación se definen en la Tabla 3.

Las relaciones entre las variables empleadas en las dos formulaciones de las ecuaciones constitutivas son las siguientes:

$$S^E = [C^E]^{-1} \quad (29)$$

$$e = dC^E \quad (30)$$

$$\epsilon^S = \epsilon^T - d e^T \quad (31)$$

La matriz de rigidez posee una dimensión de 6x6, atendiendo a sus 6 grados de libertad: 3 en las direcciones principales y 3 en las tangenciales:

$$C^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

El tensor de coeficientes piezoeléctricos tiene una dimensión de 3x6:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de permitividad es de 3x3:

$$\epsilon^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

El superíndice “S” acompañando al tensor de permitividad indica que la propiedad es medida a deformación constante. Además de estos valores de permitividad absoluta, habrá que especificar el valor de permitividad en el vacío, para poder computar la permitividad relativa.

Posteriormente, se define la geometría, creando volúmenes a partir de puntos. Resulta evidente que el modelo 2D distará del 3D en este apartado, dado que en el primero tendremos que modelizar áreas. La geometría resultante es mallada y se puede proceder a la aplicación de condiciones de contorno y fuerzas actuantes en base a los nodos de la malla. La geometría mallada se puede consultar en la Figura 9.

Para simular el empotramiento se restringen los 3 grados de libertad de los nodos en una de las caras extremas del material sustrato. La sollicitación se modeliza como una serie de cargas puntuales actuando sobre los nodos del extremo no empotrado. El valor de fuerza impuesto se reparte, por tanto, a lo largo del ancho de la viga. La disposición de la carga se representa en la Figura 10.

Finalmente, se puede resolver el modelo. En los casos en los que se haya llevado a cabo un análisis de segundo orden, se activa en este punto el comando de análisis no lineal, “NLGEOM”. Este comando habilita la consideración de grandes desplazamientos y tiene en cuenta el efecto de rigidización por tensión en la matriz de rigidez.

<i>Propiedad</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Unidad</i>
Tensión mecánica	σ	<i>Pa</i>
Desplazamiento de carga dieléctrica	D	<i>C/m²</i>
Tensor de rigidez	C^E	<i>Pa</i>
Tensor de coeficientes piezoeléctricos	e	<i>C/m²</i>
Deformación mecánica	ϵ	<i>N/m²</i>
Campo eléctrico	E	<i>N/C</i>

Tabla 3: Variables implicadas en las ecuaciones constitutivas

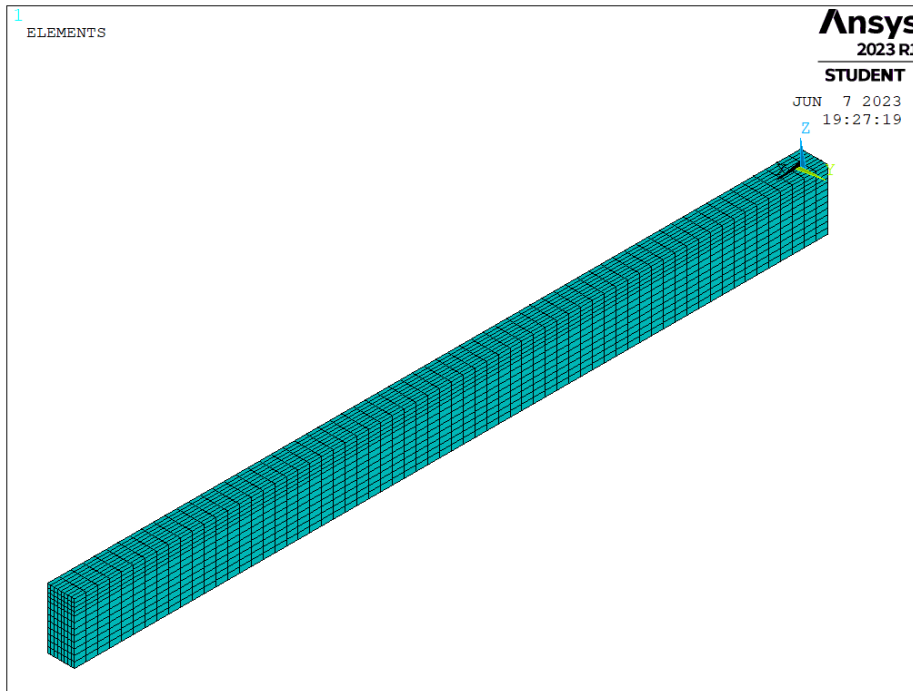


Figura 9: Viga piezoeléctrica 3D mallada

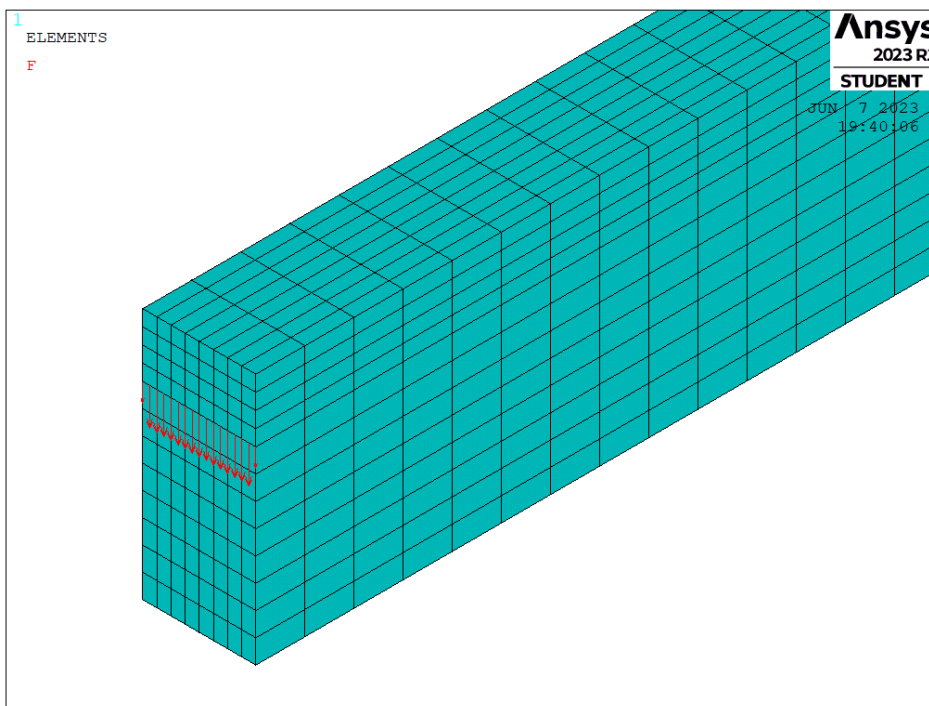


Figura 10: Aplicación de la carga en el extremo libre

2.4. Modelo de elementos finitos 2D

A lo largo del desarrollo de las simulaciones se presentan en diversos casos morfologías para las que el ancho es significativamente menor que el espesor total. Consecuentemente, resulta de interés plantear un modelo 2D para estudiar el problema como tensión plana, para lograr un menor esfuerzo computacional. El código de este modelo se puede consultar en el Anexo 2.

Esto requerirá, en primer lugar, cambiar los tipos de elementos seleccionados. En este caso se ha recurrido a los elementos PLANE183 y PLANE223. El elemento PLANE183 es un elemento 2D cuadrático de 8 nodos con dos grados de libertad: traslación en x y traslación en y . Este elemento se ha usado para modelizar la placa sustrato.

Al igual que en el caso 3D, para la modelización del material piezoeléctrico se requiere un elemento que permita el acoplamiento de campos. Por ello, se ha empleado el elemento PLANE223, elemento 2D cuadrático con 8 nodos con 3 grados de libertad: dos traslaciones según los ejes x e y y el voltaje.

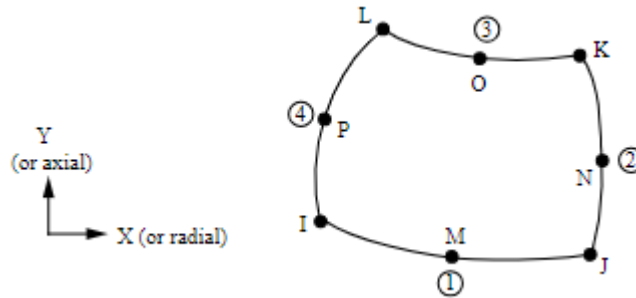


Figura 11: Geometría de los elementos PLANE183 y PLANE223 (extraída de [17])

Los valores de las propiedades materiales no cambian para el modelo 2D, dado que se emplearán los mismos materiales. Sin embargo, sí varía la estructura matricial de estos. En primer lugar, porque al tener menos grados de libertad, todos los tensores implicados tendrán dimensiones más reducidas. En segundo lugar, porque como se puede observar en la Figura 11, los elementos están definidos por los ejes x e y , de modo que no es posible crear áreas 2D en el plano XZ . Dado que, atendiendo a los ejes definidos en la Figura 6, nos interesa proyectar el volumen sobre nuestro plano XZ , será necesario rotar los tensores materiales de modo que el eje y pase a representar el eje vertical. El eje x continuará siendo el eje longitudinal.

Solo a efectos de explicar la conversión de las matrices materiales desde el caso 3D al caso 2D, se denotarán las variables 2D con el indicador “* ”.

- **Tensor de rigidez:** El tensor de rigidez pasará a ser de dimensión 4×4 , debido a las tensiones en las direcciones normales x , y , z y la componente tangencial xy . El tensor tendrá la forma:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & 0 \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{23}^* & 0 \\ c_{31}^* & c_{32}^* & c_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^* \end{bmatrix}$$

Y sus componentes se corresponderán con las componentes del tensor 3D según:

Tensor de rigidez

Valor en 2D	Valor en 3D
$c_{11} *$	c_{11}
$c_{12} *$	c_{13}
$c_{13} *$	c_{12}
$c_{21} *$	c_{13}
$c_{22} *$	c_{33}
$c_{23} *$	c_{13}
$c_{31} *$	c_{12}
$c_{32} *$	c_{13}
$c_{33} *$	c_{11}
$c_{44} *$	c_{66}

Tabla 4: Equivalencia entre las componentes del tensor de rigidez 3D y 2D

- **Tensor de coeficientes piezoeléctricos:** Pasa a ser de dimensiones 2x4. Tendrá la siguiente estructura:

$$\mathbf{e}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{21}^* & e_{22}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La equivalencia entre los coeficientes 2D y 3D será según:

Tensor piezoeléctrico

Valor en 2D	Valor en 3D
$e_{21} *$	e_{13}
$e_{22} *$	e_{33}

Tabla 5: Equivalencia entre las componentes del tensor piezoeléctrico 3D y 2D

- **Matriz de permitividad:** La matriz de permitividad queda de dimensiones 2x2, por las dos posibles direcciones de aplicación de campos eléctricos y las dos posibles direcciones de polarización:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^* & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^* \end{bmatrix}$$

La correspondencia entre los coeficientes en 2D y en 3D se muestra en la siguiente tabla:

Tensor de permitividad	
Valor en 2D	Valor en 3D
$\epsilon_{11} *$	ϵ_{11}
$\epsilon_{22} *$	ϵ_{33}

Tabla 6: Equivalencia entre las componentes del tensor de permitividad 3D y 2D

Una vez definidas las propiedades materiales, se puede confeccionar la geometría de la viga. Como se ha indicado previamente, en este caso se representan áreas en el plano XY, considerando el ancho despreciable frente al resto de dimensiones.

El resto del proceso será paralelo al proceso para el modelo 3D. Se ejecutará el mallado con los elementos 2D y se impondrán las condiciones de contorno y las solicitaciones. En este caso, el empotramiento de una de las caras extremas solo requerirá restringir 2 grados de libertad. El valor de la solicitación será, al igual que en el caso anterior, el correspondiente a la fuerza nominal distribuida a lo largo del ancho de la viga.

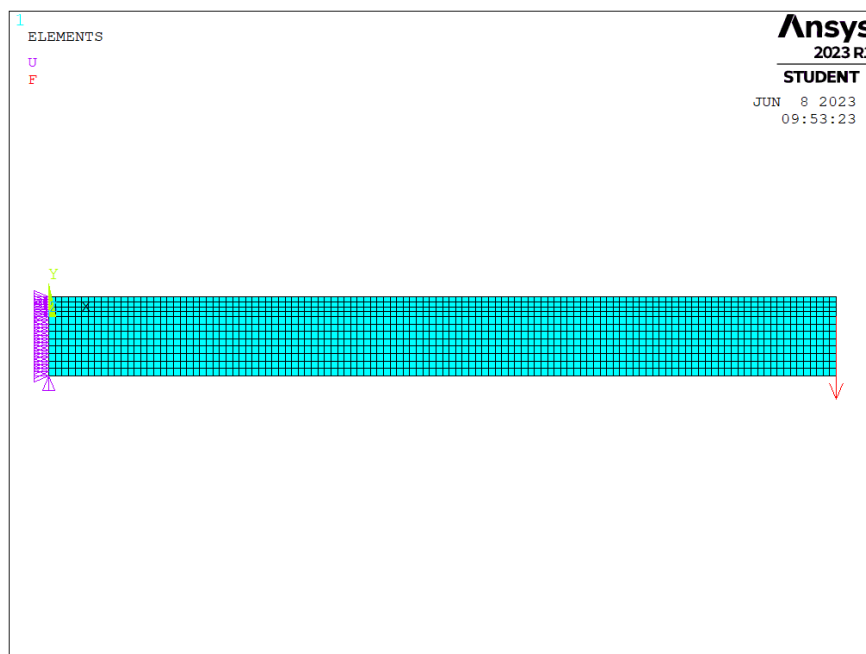


Figura 12: Modelo de la viga piezoeléctrica en 2D

2.5. Modelización de la respuesta dinámica

Los modelos mostrados hasta este punto del documento son modelos estáticos, en los que las solicitaciones y las respuestas se consideran independientes del tiempo. No obstante, posee interés considerar la respuesta del recolector en función de una carga transitoria o dinámica, de modo que se puedan simular cargas más realistas, como aquellas que actúan de manera intermitente.

Para ello, se ha adaptado el modelo de elementos finitos 2D a un análisis transitorio en el que la solicitación es una carga tipo escalón. Se ha seleccionado una carga escalón para lograr excitar todas las frecuencias naturales. Las tareas del preprocesado de este modelo son idénticas a aquellas del preprocesado estático, ya que se trata de la misma morfología y los mismos materiales. Por ello, se describirá únicamente el proceso de elaboración de la sección de solución.

En primer lugar, se definirá el análisis en tipo transitorio y se activará el cálculo en segundo orden en los casos en los que sea necesario. Como se ha indicado previamente, la carga se ha aplicado en forma de escalón, de modo que la secuencia de carga es:

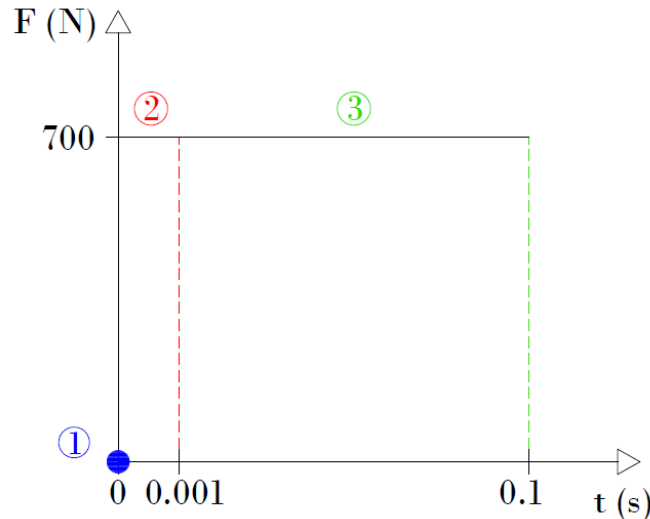


Figura 13: Secuencia de carga escalón aplicada

Como se observa, la simulación se divide en tres pasos. El primero de ellos acaba en el instante 0 y almacena las condiciones iniciales. Estas condiciones iniciales corresponden a la ausencia de carga aplicada y consecuentemente, a flecha y voltaje nulos. En el segundo paso, se aplica una carga de 700 N en el extremo libre. Este paso comienza donde finaliza el anterior y acaba en 0.001 s. El tercer instante acaba en 0.1 s y en él se mantiene la carga. Sirve para finalizar la simulación.

En estos pasos de carga intervienen varios parámetros que cabe destacar:

- Interviene un diferencial de tiempo que fija el número de subpasos que se toman en cada paso de carga. Este parámetro resulta determinante para la convergencia de la solución, dado que para cada uno de estos subpasos se integrará un valor de la respuesta. Para aquellos casos en los que el comportamiento sea no lineal, la curva poseerá puntos singulares. Si el subpaso es pequeño, la curva integrada podrá adaptarse mejor al entorno de estos puntos y proveer una solución adecuada. De lo contrario, la respuesta será no convergente. Se debe tener en cuenta que mientras menor sea el subpaso, más precisa será la respuesta, pero mayor será el esfuerzo computacional. El objetivo será encontrar una respuesta suficientemente precisa sin malgastar esfuerzo computacional.
- También intervienen los parámetros α y β de amortiguamiento de Rayleigh. Este tipo de amortiguamiento supone que este es proporcional a la masa y a la rigidez del sistema.

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad (32)$$

En este caso se ha determinado $\alpha_R = 0$ y se ha estudiado la respuesta para dos valores de β_R , de modo que el amortiguamiento será independiente de la masa y proporcional en mayor o menor medida a la rigidez. En los resultados se comprobará la influencia del parámetro β_R en la respuesta.

Finalmente, se solucionan los tres pasos y se representarán las respuestas con respecto al tiempo.

3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En el presente capítulo se describirán los estudios ensayados con los modelos introducidos en el Capítulo 2. Para cada uno de estos casos de estudio se darán a conocer los valores de los parámetros de entrada, los resultados obtenidos y se extraerán conclusiones al respecto del comportamiento y la eficacia del recolector.

3.1. Propiedades de los materiales

A diferencia de las dimensiones del recolector, los materiales empleados son los mismos en todas las simulaciones. Consecuentemente, no cambiarán los valores de los parámetros materiales, aunque sí su estructura para cada modelo, según lo expuesto en el Capítulo 2. Por ello, se exponen aquí los valores de estos parámetros, extraídos del artículo referenciado en [18].

- **Propiedades materiales del modelo MEF 3D**

Propiedades PZT-4

Símbolo	Valor	Unidad
c_{11}	139	<i>GPa</i>
c_{12}	77,8	<i>GPa</i>
c_{13}	74,3	<i>GPa</i>
c_{33}	115	<i>GPa</i>
c_{44}	25,6	<i>GPa</i>
c_{66}	30,6	<i>GPa</i>
e_{31}	-5,2	<i>C/m²</i>
e_{33}	15,1	<i>C/m²</i>
e_{15}	12,7	<i>C/m²</i>
ϵ_{11}/ϵ_0	763	-
ϵ_{33}/ϵ_0	658	-
ρ_p	7495	<i>kg/m³</i>
ν_p	0,3	-

Tabla 7: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo MEF 3D

Propiedades de acero inoxidable

Símbolo	Valor	Unidad
ρ_b	7750	kg/m ³
E_b	195	GPa
ν_b	0,3	—

Tabla 8: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo MEF 3D

Así, las matrices quedarían:

$$\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139 & 77,8 & 74,3 & 0 & 0 & 0 \\ 77,8 & 139 & 74,3 & 0 & 0 & 0 \\ 74,3 & 74,3 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,7 & 0 & 0 \\ -5,2 & -5,2 & 15,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 763 & 0 & 0 \\ 0 & 763 & 0 \\ 0 & 0 & 658 \end{bmatrix}$$

- **Propiedades materiales del modelo MEF 2D**

Propiedades de acero inoxidable

Símbolo	Valor	Unidad
ρ_b	7750	kg/m ³
E_b	195	GPa
ν_b	0,3	—

Tabla 9: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo MEF 2D

<i>Propiedades PZT-4</i>		
Coeficiente	Valor	Unidades
c_{11}	139	<i>GPa</i>
c_{12}	74,3	<i>GPa</i>
c_{13}	77,8	<i>GPa</i>
c_{21}	74,3	<i>GPa</i>
c_{22}	115	<i>GPa</i>
c_{23}	74,3	<i>GPa</i>
c_{31}	77,8	<i>GPa</i>
c_{32}	74,3	<i>GPa</i>
c_{33}	139	<i>GPa</i>
c_{44}	30,6	<i>GPa</i>
e_{21}	-5,2	<i>C/m²</i>
e_{22}	15,1	<i>C/m²</i>
ϵ_{11}/ϵ_0	763	-
ϵ_{22}/ϵ_0	658	-
ρ_p	7495	<i>kg/m³</i>
ν_p	0,3	-

Tabla 10: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo MEF 2D

Así, las matrices quedan:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139 & 74,3 & 77,8 & 0 \\ 74,3 & 115 & 74,3 & 0 \\ 77,8 & 74,3 & 139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30,6 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,2 & 15,1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 763 & 0 \\ 0 & 658 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- **Propiedades materiales del modelo analítico**

Propiedades de acero inoxidable

Símbolo	Valor	Unidad
E_b	195	<i>GPa</i>

Tabla 11: Propiedades materiales del acero inoxidable en el modelo analítico

Propiedades de PZT-4

Símbolo	Valor	Unidad
E_p	81	<i>GPa</i>
ϵ_{33}	$5,82 \cdot 10^{-9}$	<i>Fm⁻¹</i>
d_{31}	$-124 \cdot 10^{-12}$	<i>C/N</i>
S_{11}	$0,1231 \cdot 10^{-10}$	<i>m²/N</i>

Tabla 12: Propiedades materiales del material PZT-4 en el modelo analítico

Una vez definidas las propiedades materiales, cabe analizar la influencia de la combinación de materiales seleccionados en la generación de energía piezoeléctrica. Para ello, se ha ejecutado una primera simulación en el modelo analítico, en la que se ha evaluado el voltaje producido según distintas relaciones de los módulos de Young de ambos materiales y diversas relaciones de los espesores de los materiales. Con este fin, se recurre a los parámetros α y β introducidos en (4). β variará desde 0 a 4 y α valdrá 0,25; 0,5; 1 o 2,4; que es valor de α que se obtiene usando PZT-4 y acero inoxidable.

Por los análisis paramétricos ejecutados más adelante, resulta interesante especificar los ratios que guardan las dimensiones empleadas en cada comprobación. Se ha ensayado una viga piezoeléctrica con dimensiones $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{w} = 4$ con una carga de 350 N y se han obtenido los resultados expuestos en la Figura 14. El voltaje se ha normalizado con respecto al voltaje máximo alcanzado para la razón de módulos de Young igual a 2,4, $V_0 = 90372$ V.

De los resultados se deduce que el β óptimo para el recolector con la geometría indicada y con nuestros materiales se sitúa en 0,3. Se trata del valor que aporta mayor voltaje a igualdad de carga. También se concluye que esta combinación de materiales es la que ofrece un mayor rendimiento para valores de β menores de 0,65. La tendencia es que a menor α , mayor β óptimo. Es decir, mientras menor sea el módulo de Young de la base con respecto al del piezoeléctrico, mayor espesor de la placa sustrato será necesario para una generación óptima de energía.

Además, se puede observar que para valores de β lejanos de los óptimos, la recolección de energía es mayor mientras menor es el parámetro α , es decir, mientras menor sea el módulo de Young del material sustrato con respecto al del material piezoeléctrico.

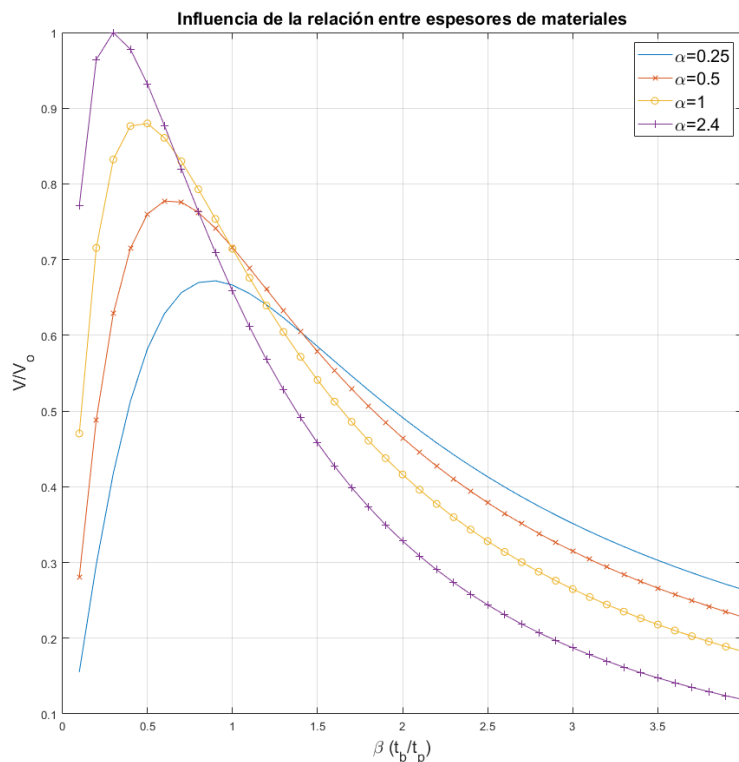


Figura 14: Influencia del parámetro β en el voltaje producido según α ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$)

3.2. Respuesta estática de vigas unimorfas

3.2.1. Validación de modelos MEF 2D y 3D

Antes de comenzar a ejecutar simulaciones con los modelos MEF creados, es necesario verificar que estos modelos representan el comportamiento del recolector de forma verosímil. Esta comprobación se ha llevado a cabo introduciendo los mismos parámetros de entrada geométricos en los modelos de elementos finitos y el analítico, de forma que los resultados tendrán que ser coherentes entre los distintos modelos.

Esta validación se ha realizado para unas relaciones de aspecto $\frac{t}{L} = 0,1$, $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$. Los valores de estas dimensiones se exponen en la Tabla 13. Las geometrías malladas en 2D y 3D se encuentran en las figuras 15 (a) y (b) respectivamente.

Se han aplicado una serie de cargas de 50 N a 350 N, con un paso de 50 N. Así, representamos la flecha máxima frente a la fuerza aplicada en la Figura 15 y el voltaje producido frente a la fuerza aplicada en la Figura 16. La flecha se ha normalizado con respecto al canto, la carga se ha normalizado con respecto a la carga máxima aplicada ($F_0 = 350$ N) y el voltaje se ha normalizado con respecto al voltaje máximo obtenido en el caso 2D ($V_0 = 15391$ V).

En primer lugar, se observa que en el caso de la flecha los resultados de los modelos de elementos finitos son muy similares a la respuesta analítica. Existe una pequeña desviación que incrementa a medida que asciende la carga, dando lugar a que la respuesta analítica sea más rígida. No obstante, se trata de una diferencia que se puede considerar despreciable.

En cuanto al voltaje, la discrepancia entre los resultados numéricos y el resultado analítico es mayor. Esto se debe, en primera instancia, a la ligera diferencia entre modelos en el desplazamiento, que repercute directamente en la deformación y, con ello, en el voltaje. Además, esta discrepancia es atribuible a que en el desarrollo analítico se promedia el voltaje a lo largo de toda la capa piezoeléctrica. En (21) y (22) se puede observar que la energía se integra a lo largo de toda la longitud y el campo eléctrico se considera constante a lo largo de todo el grosor del material piezoeléctrico. En contraposición, el voltaje en los elementos finitos se ha

calculado considerando la superficie inferior de la capa piezoeléctrica conectada a tierra, es decir, con un voltaje nulo. Esta desviación es mayor mientras mayor sea la carga aplicada, alcanzando una diferencia máxima del 9,9% de voltaje producido entre el modelo 2D y el analítico. No obstante, la diferencia entre los modelos es suficientemente pequeña, de modo que los modelos de elementos finitos quedan verificados.

También se puede observar que los modelos de elementos finitos 3D y 2D arrojan resultados muy parecidos. En efecto, en el caso de la flecha los modelos de elementos finitos son casi coincidentes. En cuanto al voltaje, la diferencia es más apreciable pero igualmente despreciable. Esta equivalencia está sujeta a que la viga sea una viga delgada, como es el caso ensayado en este apartado. Es decir, para ciertas relaciones del canto frente al ancho menores, estos modelos no serán intercambiables. Sin embargo, los resultados justifican que para vigas delgadas, se puedan ejecutar los análisis según el modelo 2D, resultando en menos esfuerzo computacional.

Dimensiones

Símbolo	Valor	Unidad
L	0,08	m
t_p	0,002	m
t_b	0,006	m
t	0,008	m
W	0,002	m

Tabla 13: Dimensiones de la viga para la validación de los modelos

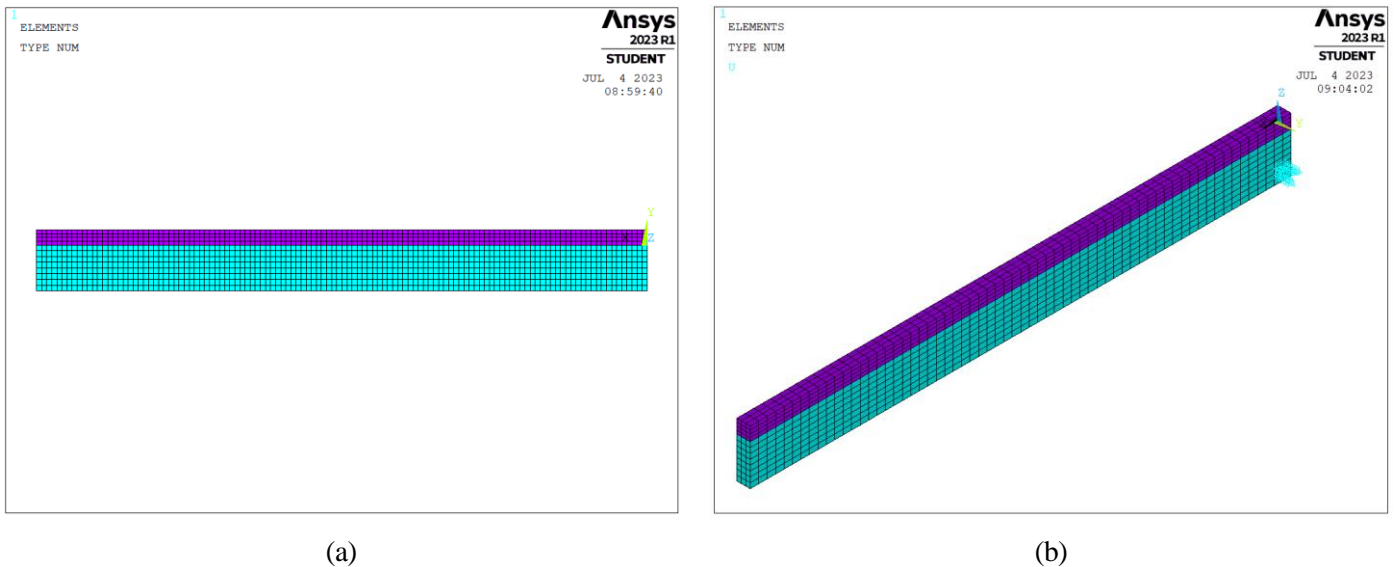


Figura 15: (a) Geometría mallada en modelo 2D (b) Geometría mallada en modelo 3D

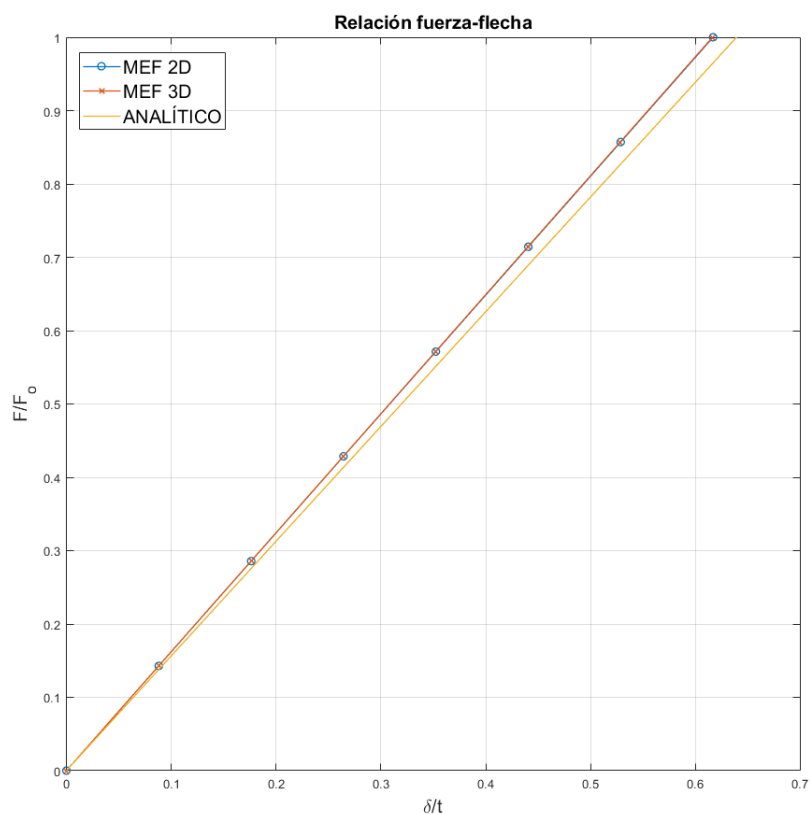


Figura 16: Relación fuerza-flecha ($\frac{t}{L} = 0,1$, $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$)

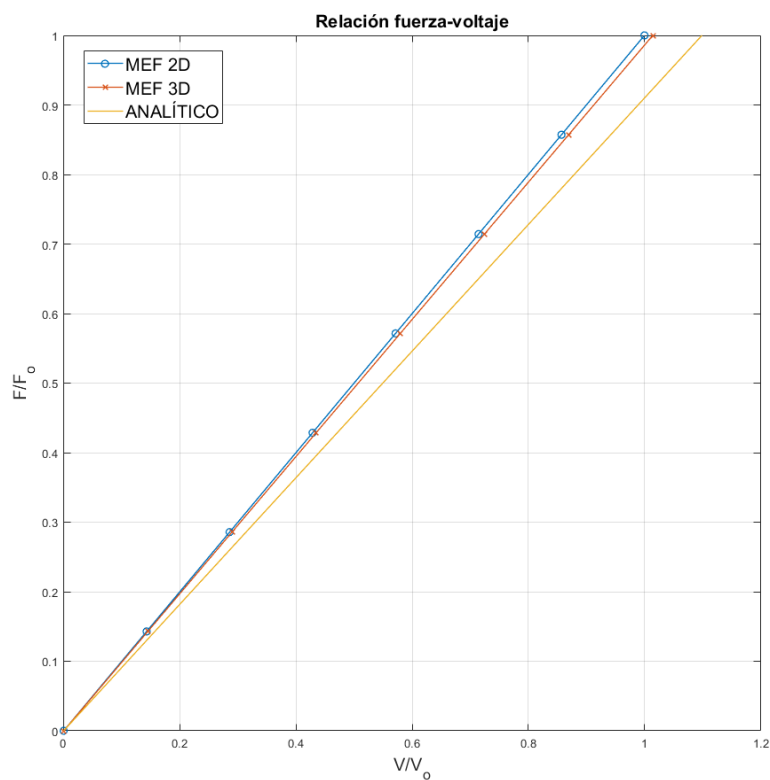


Figura 17: Relación fuerza-voltaje ($\frac{t}{L} = 0,1$, $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$)

Una vez verificado el modelo, cabe cuestionarse si una variación en las dimensiones establecidas para el material piezoeléctrico y el acero inoxidable provocarían algún efecto en el resultado obtenido. Es decir, si los

modelos empleados dejarían de ser fiables para unos espesores de materiales distintos. Así, se han obtenido los resultados de voltaje para diversos valores de $\beta = \frac{t_b}{t_p}$ y una carga de 350 N.

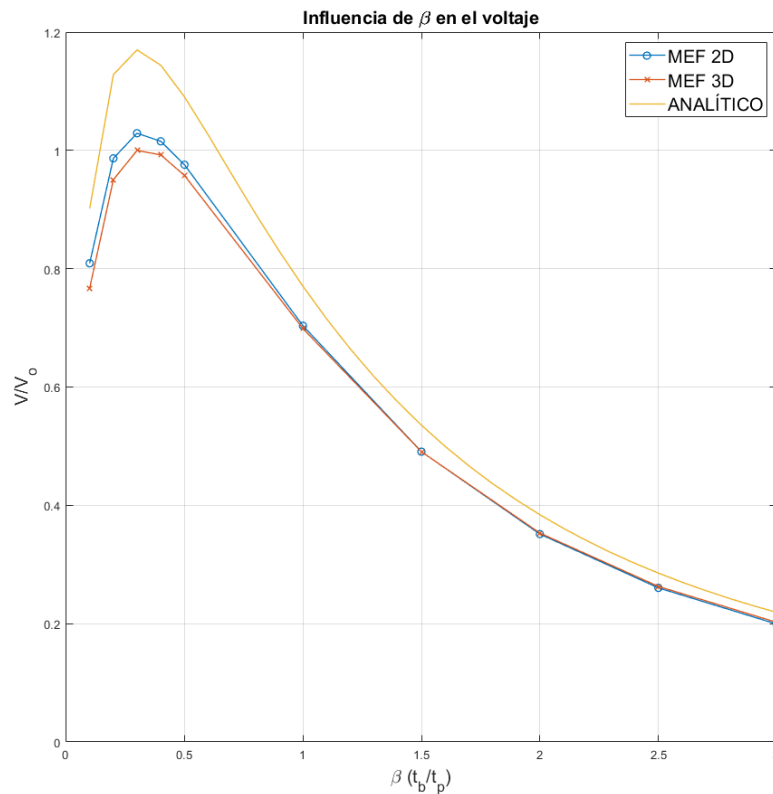


Figura 18: Influencia de β en el voltaje según el modelo empleado ($\frac{t}{L} = 0,1$, $\frac{t}{W} = 4$)

En este caso, el valor V_0 para el que se ha normalizado el voltaje es el máximo voltaje obtenido con el modelo 3D, de 15611 V.

En primer lugar, se observa que todos los modelos arrojan el mismo valor de β óptimo, aquel para el que, a igualdad de carga, el voltaje es máximo. En este caso, se trata de $\beta=0,3$.

Además, se puede comprobar que mientras los modelos de elementos finitos aportan resultados muy similares, existe una discrepancia importante con respecto a la respuesta analítica. La diferencia entre las soluciones de elementos finitos incrementa a medida que el valor de β se aproxima al óptimo. Asimismo, la diferencia entre estos y la solución analítica también aumenta en estos valores. Así, para β óptimo la diferencia entre el modelo de elementos finitos en 2D y el resultado analítico es de un 13,7%. Esta discordancia se debe a la suma de los factores mencionados previamente, la diferencia en la flecha y el promediado del voltaje. Aunque la diferencia comporte un porcentaje significativo, los modelos de elementos finitos se considerarán útiles a efectos de comprobaciones de β , dado que todos dan el mismo valor de β óptimo.

3.2.2. Influencia de las relaciones de aspecto t/W y los efectos de segundo orden

Los recolectores piezoeléctricos pueden poseer cualquier tipo de medidas. De hecho, es conveniente adaptar estas medidas para el aprovechamiento de las frecuencias de vibración que puedan provocar las excitaciones externas. De este modo, cualquier geometría que sea apropiada a estos efectos es potencialmente útil y factible. Estas dimensiones afectan directamente a las propiedades geométricas implicadas en la obtención del voltaje. Por lo tanto, resulta de interés cuestionar la eficacia de estos recolectores según distintas relaciones de aspecto, empezando por la relación espesor-ancho ($\frac{t}{W}$).

Para comprobar el impacto de este ratio, se han extraído la flecha y el voltaje producidos en un recolector con $\frac{t}{L} = 0,1$, $\beta=3$ y para los siguientes valores de $\frac{t}{W}$: 0,1; 0,5; 1; 2 y 4. Las dimensiones resultantes para estos ratios

se exponen en las tablas 14 y 15. Asimismo, para una mejor comprensión de la variación de la geometría de la viga al variar su relación espesor-ancho, se representan aquí los modelos resultantes de imponer $\frac{t}{W} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$ en las figuras 19 (a) y (b) respectivamente. Cabe destacar que las simulaciones de este apartado se han realizado con el modelo 3D, pues para los tres escenarios con menor relación espesor-ancho, el ancho no es despreciable frente al resto de dimensiones y no es válida la hipótesis de viga delgada.

Aplicando una sucesión de carga de 0 a 350 N con un paso de 50 N, se obtiene la relación de flecha frente a carga presentada en la Figura 20 y la relación de voltaje frente a carga representada en la Figura 21. Se ha normalizado la carga con respecto al valor máximo aplicado, $F_0 = 350 \text{ N}$ y el voltaje, con respecto al voltaje máximo obtenido en el caso de $\frac{t}{W} = 0,1$, $V_0 = 715,57 \text{ V}$.

En las gráficas mostradas se puede observar que mientras mayor sea la relación $\frac{t}{W}$, mayores son la flecha y el voltaje generado a igualdad de carga impuesta. La relación que guardan la fuerza y la flecha no es más que la rigidez de la viga, de modo que la pendiente de la curva es la rigidez. La rigidez a flexión de una viga se define según la siguiente expresión: $K_{flex,z} = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3}$, donde E es el módulo de Young, I_z es el módulo de inercia de la sección resistente a la flexión y L es la longitud de la viga. Este módulo de inercia corresponde al de un rectángulo, que atendiendo a nuestras medidas será: $I_z = \frac{W \cdot t^3}{12}$. A mayor ratio entre espesor y ancho, menor el ancho y consecuentemente, menor el módulo de inercia de la sección. Así, la viga posee menor rigidez a flexión y flecha más para un mismo valor de fuerza. Por lo tanto, tiene lugar una mayor deformación en la viga y se genera mayor voltaje. Se puede concluir que la viga es más eficiente mientras mayor sea la relación espesor-ancho.

Para recalcar el impacto que el ancho de la viga tiene en la flecha y en el voltaje, se muestran en las figuras 22 (a) y (b) las deformadas de la viga para el caso $\frac{t}{W} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$ a igualdad de carga y con un factor de escala 5. Asimismo, se muestran en las figuras 23 (a) y (b) la distribución del voltaje generado en las superficies del material piezoeléctrico para los casos $\frac{t}{W} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$ respectivamente.

	Valores de relación $\frac{t}{W}$				
	0,1	0,5	1	2	4
$t \text{ (m)}$	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
$W \text{ (m)}$	0,08	0,016	0,008	0,004	0,002

Tabla 14: Valores del espesor y el ancho según los ratios considerados

Dimensiones		
Símbolo	Valor	Unidad
L	0,08	m
t_p	0,002	m
t_b	0,006	m

Tabla 15: Valores de los parámetros geométricos para la comprobación de la influencia de $\frac{t}{W}$

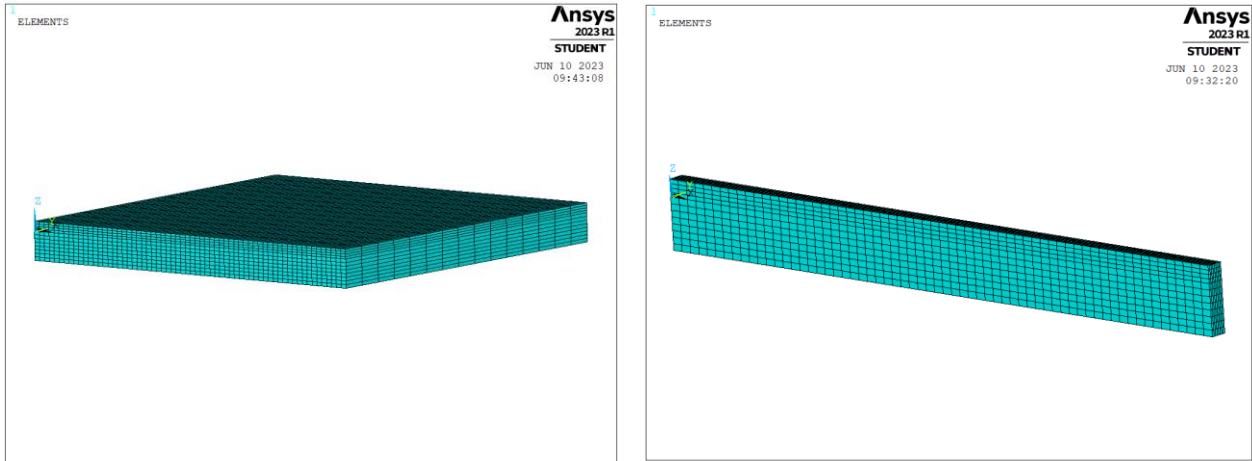


Figura 19: (a) Geometría para $\frac{t}{W} = 0,1$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$ (b) Geometría para $\frac{t}{W} = 4$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$

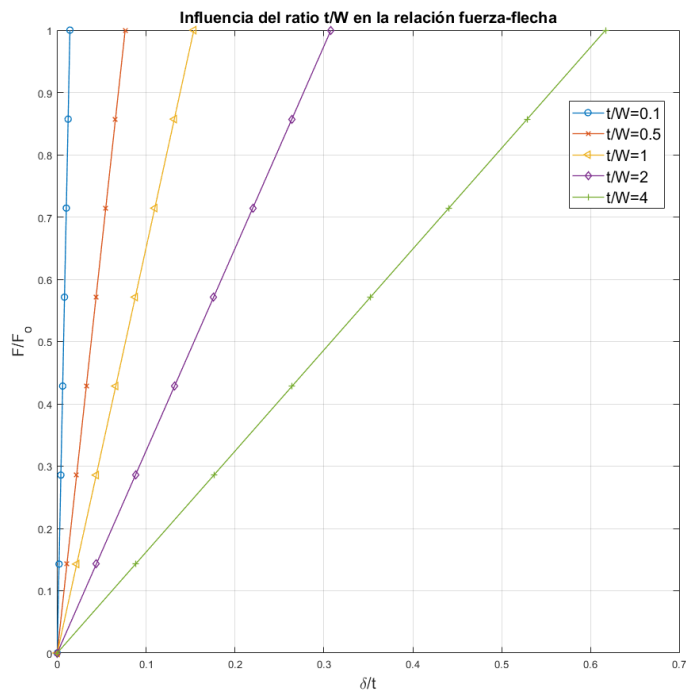


Figura 20: Influencia de $\frac{t}{W}$ en la relación fuerza-flecha ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta=3$)

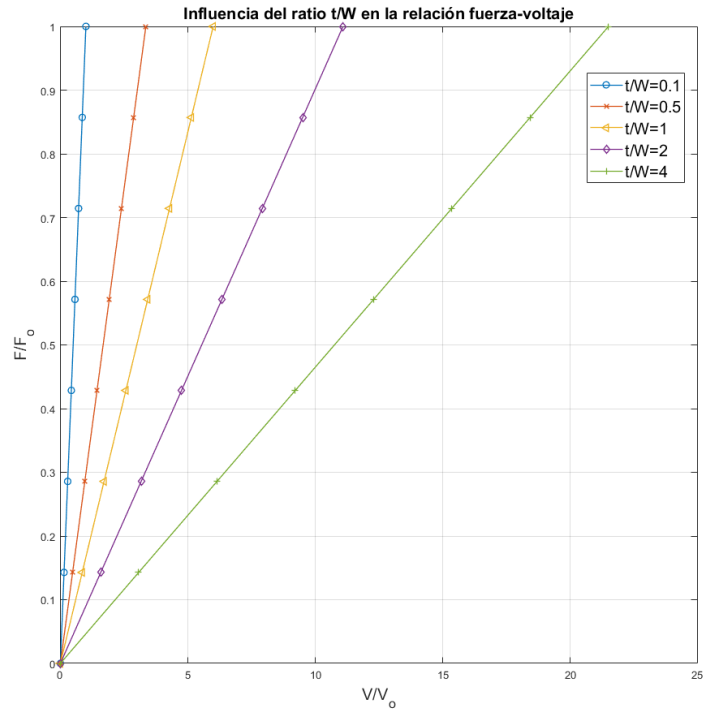


Figura 21: Influencia de $\frac{t}{W}$ en la relación fuerza-voltaje ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta=3$)

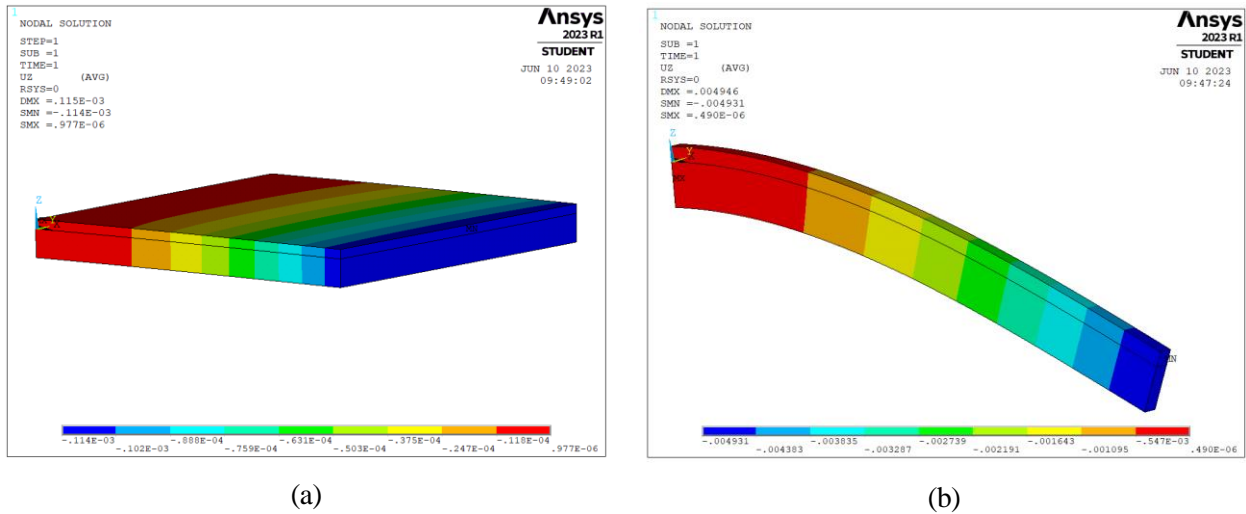


Figura 22: (a) Deformada para $\frac{t}{W} = 0,1$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$ (b) Deformada para $\frac{t}{W} = 4$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$

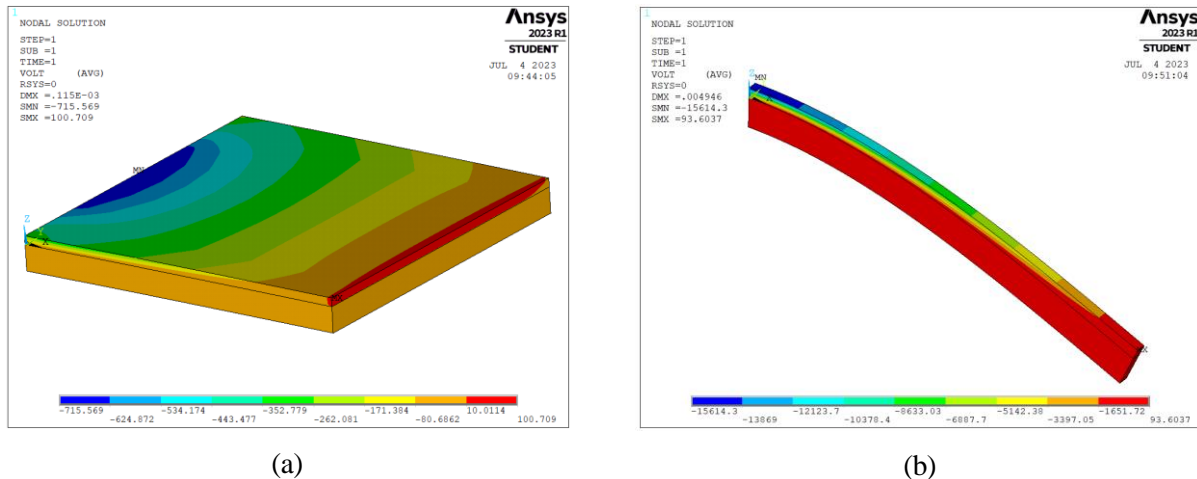


Figura 23: (a) Voltaje para $\frac{t}{W} = 0,1$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$ (b) Voltaje para $\frac{t}{W} = 4$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta = 3$

3.2.2.1. Influencia de efectos de segundo orden según $\frac{t}{W}$

Llegados a este punto del documento, todos los resultados se han obtenido según un análisis de primer orden. Cabe revisar el fundamento del análisis de primer orden para identificar las implicaciones que esto haya podido tener en nuestros resultados.

La teoría de primer orden supone que es correcto calcular las deformaciones con respecto a la configuración indeformada, por su similitud con la situación deformada. Esta hipótesis es válida en el caso de que los desplazamientos sean pequeños. En el caso de que esto no se cumpla, la solución en primer orden arrojará unos resultados incorrectos.

Existe una segunda fuente de no linealidad en el cálculo de los desplazamientos de la viga, que también se desprecia como consecuencia de la hipótesis de pequeños desplazamientos. Se trata de la rigidización por tensión. Podemos asumir un sólido que tras la aplicación de una carga se distorsione significativamente, de modo que en ciertos puntos de su dominio hayan tenido lugar desplazamientos importantes. Inmediatamente deja de ser aplicable la hipótesis de pequeños desplazamientos. Estos desplazamientos locales provocarán tensiones locales y consecuentemente, esfuerzos locales. Estos esfuerzos forman parte de las fuerzas internas que la matriz de rigidez ha de relacionar con los desplazamientos. De este modo, aparte de la componente de rigidez relacionada con el material y la geometría de la viga, aparece una componente de rigidez relacionada con los esfuerzos internos que surgen como consecuencia de una distorsión geométrica importante. Esta componente es la matriz elemental de rigidez geométrica, que proporciona un aumento de la capacidad portante de la estructura como consecuencia de su estado tensional. Este efecto resulta de mayor relevancia en estructuras con poca rigidez a flexión y mucha rigidez axial, como vigas delgadas o placas [17].

Los métodos de elementos finitos tienen en cuenta la rigidización por tensión mediante la obtención de la matriz elemental de rigidez geométrica en cada punto. Para ello se llevan a cabo en cada punto sucesivas iteraciones dentro de un mismo paso de carga, con el fin de extraer el valor de las fuerzas internas en función de los desplazamientos locales y así actualizar el valor de la matriz de rigidez geométrica [18].

Como se ha razonado previamente, el requisito indispensable para poder adoptar la hipótesis de un comportamiento lineal es que los desplazamientos sean pequeños con respecto a la geometría del sólido. En este apartado se pretende comprobar si esta hipótesis arroja resultados verosímiles para nuestro recolector piezoeléctrico y en qué casos lo hace, de modo que se ejecutarán análisis de segundo orden y se compararán con los resultados según el análisis de primer orden.

El análisis de segundo orden tendrá en cuenta los dos aspectos de no linealidad que se han introducido: los términos de segundo orden en el tensor de deformaciones y la rigidización del comportamiento por efecto de la tensión. El método de cálculo no lineal que sigue el *software* es el de Newton-Raphson.

De este modo, se han repetido las simulaciones llevadas a cabo en este apartado, pero considerando los efectos de segundo orden. En la Figura 24 se representan los resultados obtenidos en comparación con sus homólogos

en primer orden.

Como se puede observar, la diferencia entre los resultados según el cálculo en primer orden y el cálculo en segundo orden es muy pequeña. Esta diferencia aumenta mientras mayor sea la relación $\frac{t}{W}$ y es más evidente en el caso del voltaje que en la flecha, donde el voltaje en segundo orden es mayor que en primer orden. No obstante, esta discordancia es de un 3% en caso más desfavorable, el voltaje para $\frac{t}{W} = 4$. Consecuentemente, la diferencia se puede considerar despreciable en todos los casos.

Estos resultados ponen en evidencia que, si bien anteriormente se ha demostrado que la relación espesor-ancho influye en gran medida en la flecha obtenida, en ningún caso de los estudiados esta flecha es lo suficientemente grande para invalidar la hipótesis de pequeños desplazamientos. Es decir, los términos no lineales implicados en los tensores de deformaciones serán despreciables.

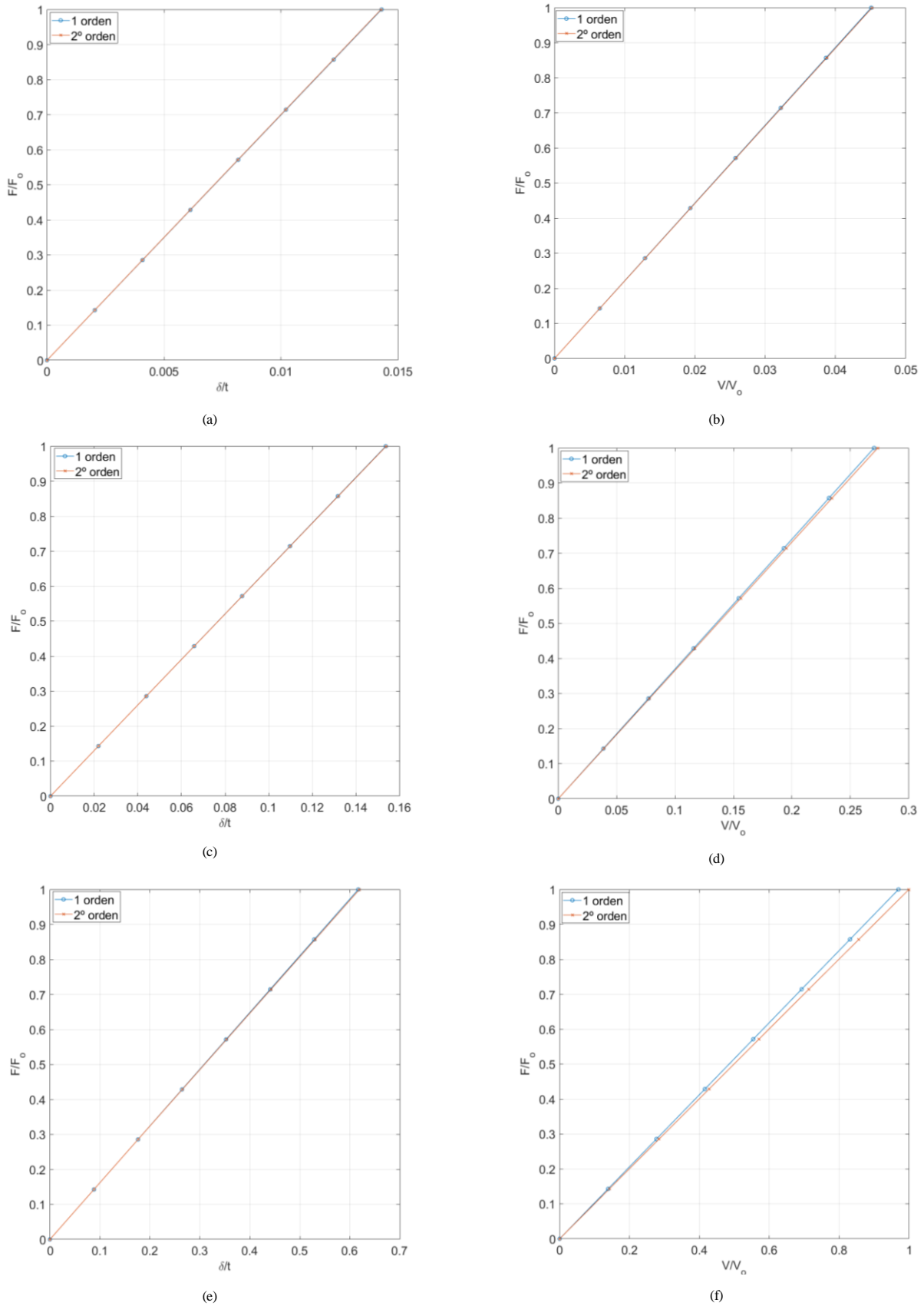


Figura 24: (a) Influencia de 2º orden en fuerza-flecha para $\frac{t}{w} = 0,1$ (b) Influencia de 2º orden en fuerza-voltaje para $\frac{t}{w} = 0,1$ (c) Influencia de 2º orden en fuerza-flecha para $\frac{t}{w} = 1$ (d) Influencia de 2º orden en fuerza-voltaje para $\frac{t}{w} = 1$ (e) Influencia de 2º orden en fuerza-flecha para $\frac{t}{w} = 4$ (f) Influencia de 2º orden en fuerza-voltaje para $\frac{t}{w} = 4$

3.2.3. Influencia de la relación de aspecto $\frac{t}{L}$ y los efectos de segundo orden

Una vez expuesta la relevancia de la relación de aspecto del espesor de viga frente al ancho, cabe plantearse la influencia de otras dimensiones sobre el voltaje generado, como la longitud de la viga. En primera instancia, este análisis se efectuará en primer orden.

Al igual que en el apartado previo, se estudiarán los resultados de flecha y voltaje para distintas relaciones del espesor total frente a la longitud, estas son: 0,1; 0,05; 0,03; 0,02 y 0,01. A igualdad de canto, estas relaciones resultan en las medidas expuestas en la tabla 16. Estas simulaciones se han llevado a cabo para un ratio de $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$, de modo que el resto de dimensiones quedan como se expone en l Tabla 17.

De este modo, ensayando el modelo para unas cargas de 0 a 350 N, con un paso de 50 N, obtenemos la evolución carga-flecha presentada en la Figura 25 y una evolución carga-voltaje presentada en la Figura 26. En estas gráficas se ha normalizado el valor de carga con respecto a la carga máxima aplicada ($F_0 = 350 \text{ N}$) y el voltaje, con respecto al voltaje máximo obtenido en el caso de $\frac{t}{L} = 0,1$ ($V_0 = 15390 \text{ V}$).

Si evaluamos las gráficas, se observa que a menor ratio de $\frac{t}{L}$, más flecha y más voltaje se obtiene. Sin embargo, la diferencia entre los resultados para distintas relaciones es considerablemente más drástica en el caso de la flecha que en el del voltaje. Esta gran influencia se puede explicar de nuevo considerando la aparición de L en la rigidez de la viga. Así, consultando la expresión en (32) se observa que la longitud aparece en el denominador elevada a la tercera potencia. Del mismo modo, se puede consultar la expresión (16) de la que se obtiene la flecha máxima. La longitud aparece en el numerador, de nuevo elevada a la tercera potencia. Es decir, un incremento pequeño de la longitud aumenta significativamente la flecha y con ello, la deformación y voltaje generados.

La relación directa entre la longitud y el voltaje se puede consultar en (27). En dicha expresión se observa que la longitud aparece en el numerador elevada a 1, de modo que el voltaje aumenta linealmente con la longitud. Esto explica que la diferencia entre los voltajes obtenidos para distintos valores de $\frac{t}{L}$ sea menos drástica que en el caso de la flecha. En conclusión, se demuestra que a igualdad de canto y de ancho, un recolector piezoeléctrico es más eficiente mientras mayor sea su longitud.

	Valores de relación $\frac{t}{L}$				
	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01
$t \text{ (m)}$	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
$L \text{ (m)}$	0,08	0,16	0,267	0,4	0,8

Tabla 16: Valores del espesor y la longitud para distintas relaciones de $\frac{t}{L}$

Dimensiones		
Símbolo	Valor	Unidad
t_p	0,002	m
t_b	0,006	m
t	0,008	m
W	0,002	m

Tabla 17: Valores de las variables geométricas para la comprobación de la influencia de $\frac{t}{L}$

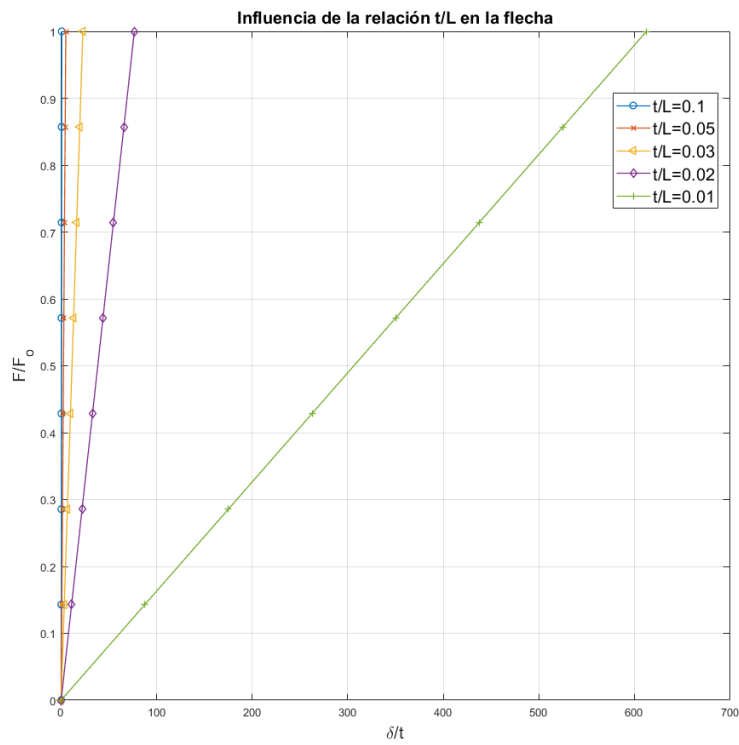


Figura 25: Influencia de $\frac{t}{L}$ en la relación fuerza-flecha ($\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$)

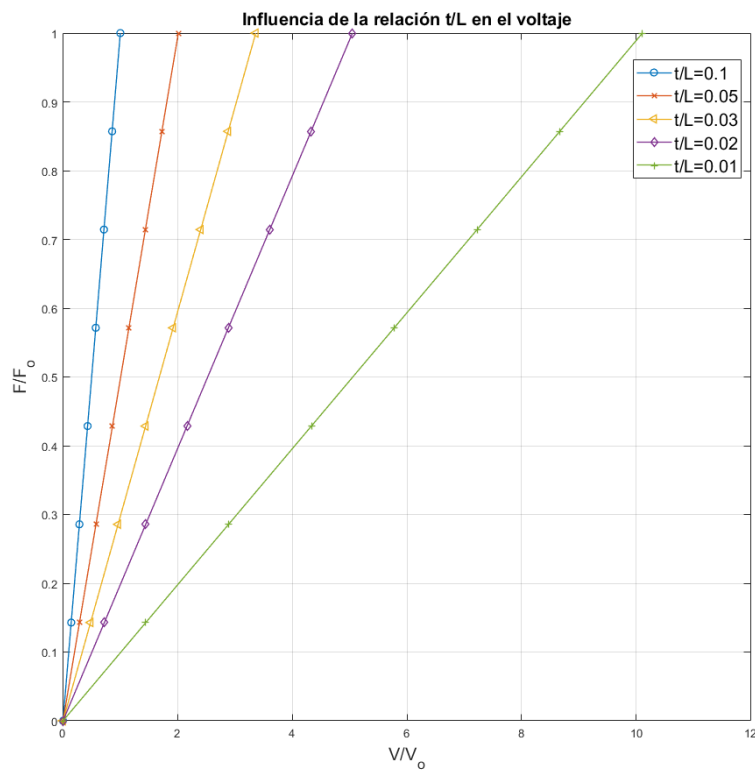


Figura 26: Influencia de $\frac{t}{L}$ en la relación fuerza-voltaje ($\frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$)

3.2.3.1. Influencia de efectos de segundo orden según $\frac{t}{L}$

Al igual que para la relación $\frac{t}{w}$, cabe cuestionar la validez de estos resultados en los que se ha obviado el comportamiento no lineal del recolector. Para ello, se ha repetido el cálculo de la viga para los valores de $\frac{t}{L}$ impuestos en las simulaciones previas y para las mismas cargas, pero bajo el análisis de segundo orden. Los resultados obtenidos se han comparado con los resultados homólogos en primer orden y se exponen a continuación. En primer lugar, se muestra la comparativa de la flecha con respecto a la carga aplicada y en segundo lugar, el voltaje generado con respecto a la carga aplicada. Los valores de las gráficas han sido normalizados con respecto a la fuerza máxima aplicada ($F_0=350$ N) y al voltaje máximo que se obtiene para $\frac{t}{L} = 0,1$ según el análisis de primer orden ($V_0= 15390$ V).

La primera conclusión que se puede extraer es que a menor relación $\frac{t}{L}$, más distan los resultados obtenidos en el análisis no lineal y el análisis lineal. Como ya se ha razonado previamente, la longitud tiene un gran peso en la rigidez y la flecha de la viga, dado que interviene en sus expresiones elevada a la tercera potencia. Esto provoca que para longitudes grandes, se obtengan flechas muy grandes, de modo que la hipótesis de pequeños desplazamientos no se cumple. Consecuentemente, habría que tener en cuenta los términos de deformaciones de segundo orden y la rigidización tensional, que puede ser de gran importancia en vigas delgadas. Como el análisis lineal desprecia estos dos aspectos, los resultados del análisis en primer orden distan en exceso de los resultados en segundo orden, que representan con más verosimilitud el problema.

La discordancia entre los resultados de la flecha en análisis de primer orden y segundo orden tiene también se pone de manifiesto en el voltaje obtenido, aunque se puede observar que la variación es ligeramente más lenta. El voltaje generado está directamente relacionado con las deformaciones mediante el coeficiente piezoeléctrico e_{31} . Si aplicamos la teoría de pequeños desplazamientos se desprecian los términos de segundo orden de la deformación, conduciendo a un valor erróneo de la deformación y, consecuentemente, del voltaje.

Por el contrario, podemos observar como para las relaciones $\frac{t}{L}$ más pequeñas las soluciones lineales y no lineales son muy similares. Para elementos menos esbeltos la flecha es menor, la hipótesis de pequeños desplazamientos es aceptable y se pueden despreciar los aspectos no lineales sin que ello suponga un error importante en los resultados obtenidos de flecha y voltaje.

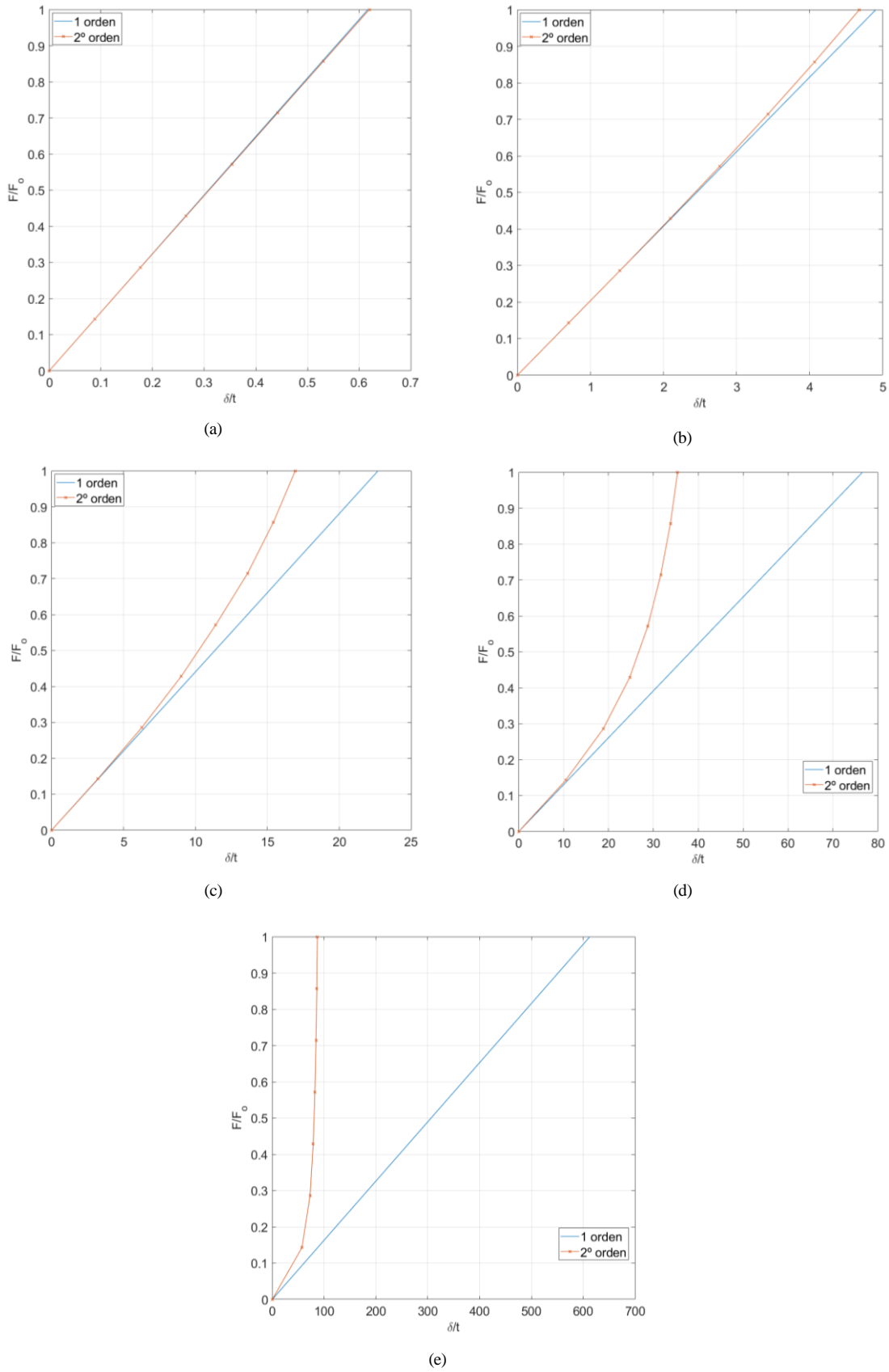


Figura 27: (a) Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $\frac{t}{L} = 0,1$ (b) Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $\frac{t}{L} = 0,05$
(c) Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $\frac{t}{L} = 0,03$ (d) Influencia de efectos de 2º orden en la flecha para $\frac{t}{L} = 0,02$
(e) Influencia de efectos de 2ºorden en la flecha para $\frac{t}{L} = 0,01$

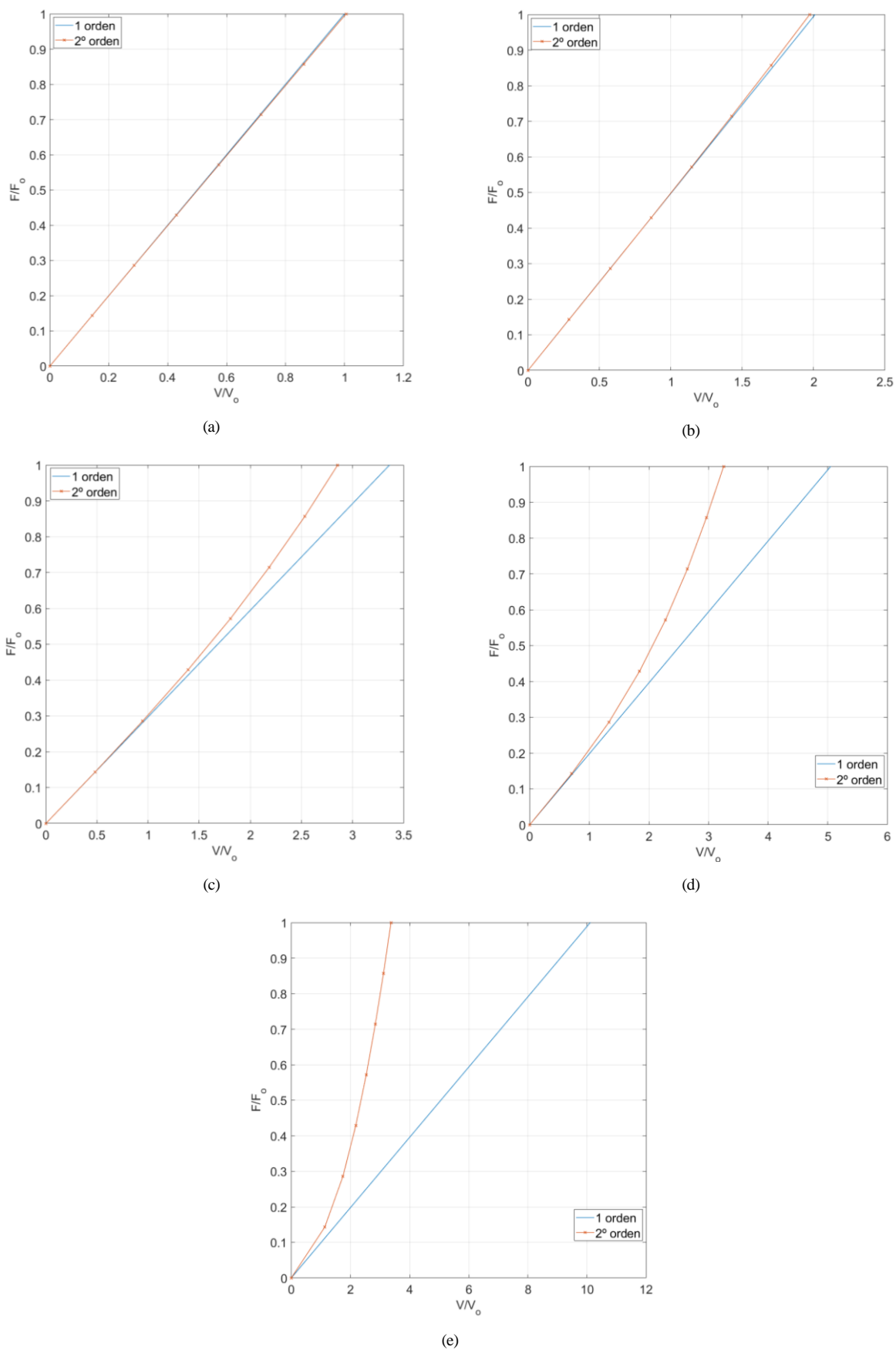


Figura 28: (a) Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $\frac{t}{L} = 0,1$ (b) Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $\frac{t}{L} = 0,05$ (c) Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $\frac{t}{L} = 0,03$ (d) Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $\frac{t}{L} = 0,02$ (e) Influencia de efectos de 2º orden en el voltaje para $\frac{t}{L} = 0,01$

En la figura 29 se muestran las configuraciones de formadas de la viga con $\frac{t}{L} = 0,01$ según el análisis de primer orden (a) y el análisis de segundo orden (b). Ambas se representan a una escala de 0,1. En contraste, se exponen las deformadas de la viga con $\frac{t}{L} = 0,1$ según el cálculo en primer orden y en segundo orden, (a) y (b) respectivamente. Están representadas a escala real. Asimismo, en las figuras 31 y 32 se representan las distribuciones de voltaje correspondientes a estos casos.

Las conclusiones expuestas tienen una gran influencia en el diseño de un recolector piezoeléctrico. Si observamos las gráficas se extrae que en todos los casos el análisis de primer orden supone una sobreestimación de la flecha y el voltaje obtenidos. Esto conduce a conclusiones erróneas sobre la eficacia del recolector piezoeléctrico. Para ilustrar este aspecto con mayor claridad se exponen algunos de los resultados obtenidos en la Tabla 18.

En vista de los resultados, se acepta la gran influencia de los efectos de segundo orden en los piezoeléctricos con geometrías esbeltas. No obstante, esto no modifica el resultado de geometría de viga más eficiente obtenido en el análisis lineal, que continúa siendo la de menor relación $\frac{t}{L}$.

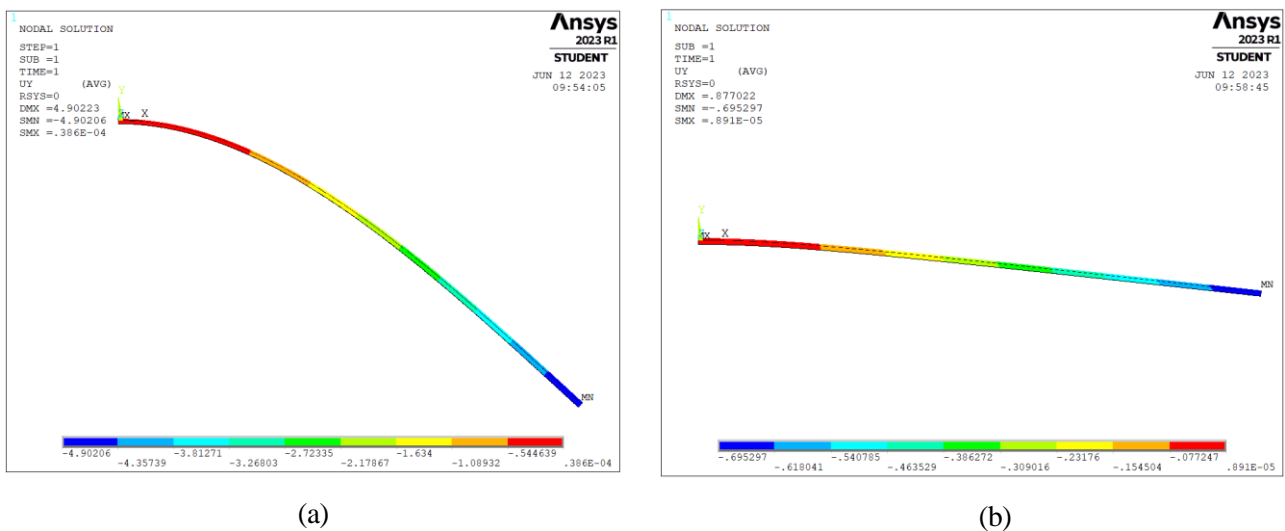


Figura 29: (a) Deformada para $\frac{t}{L} = 0,01, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en primer orden (b) Deformada para $\frac{t}{L} = 0,01, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en segundo orden

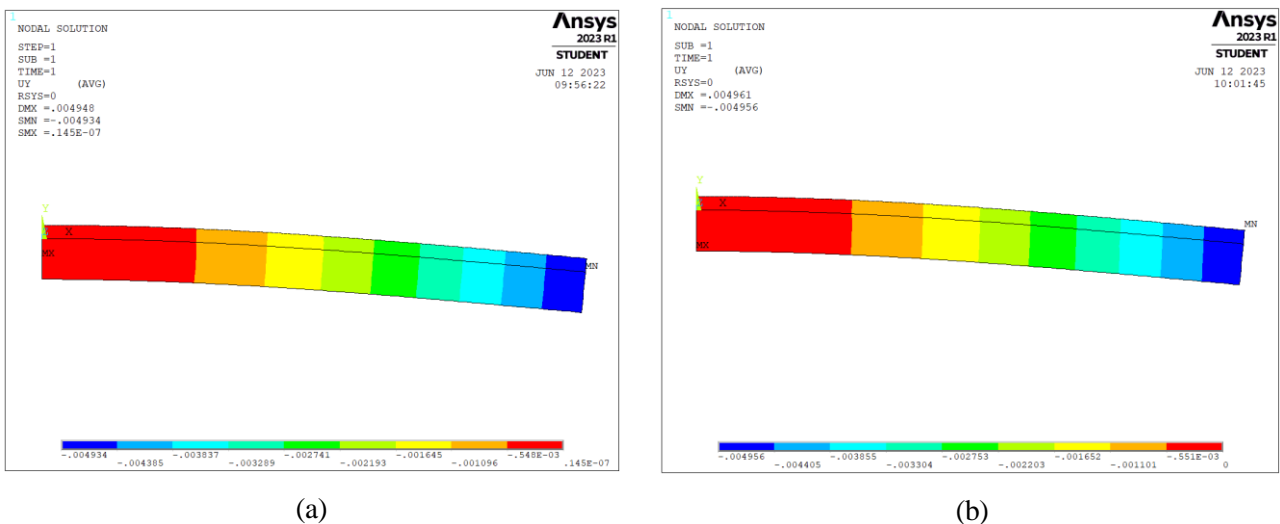
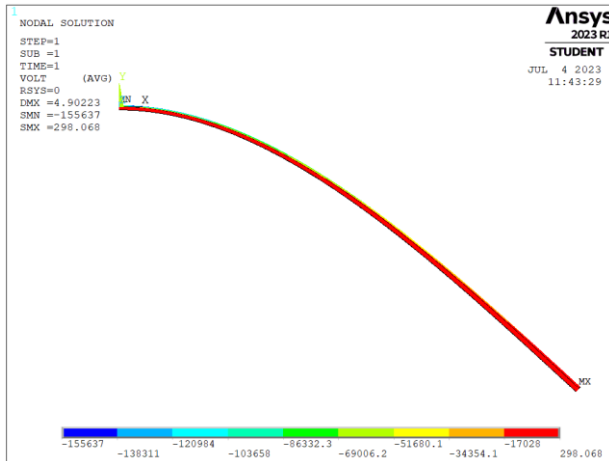
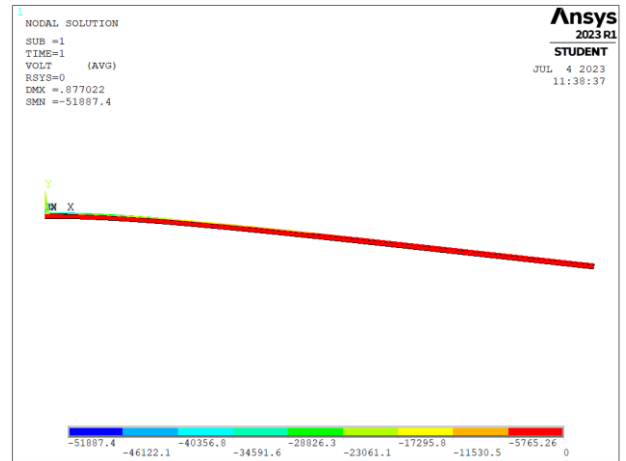


Figura 30: (a) Deformada para $\frac{t}{L} = 0,1, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en primer orden (b) Deformada para $\frac{t}{L} = 0,1, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en segundo orden

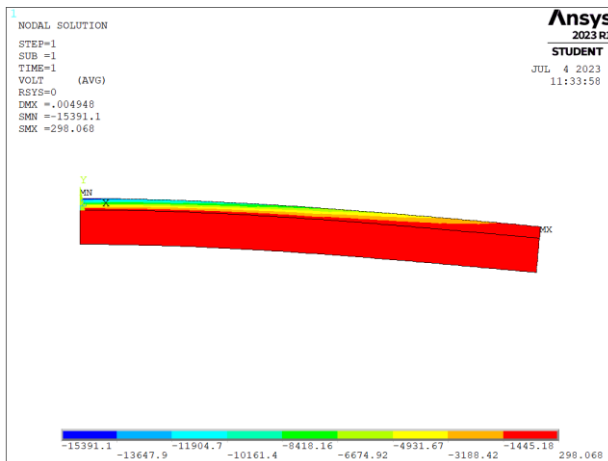


(a)

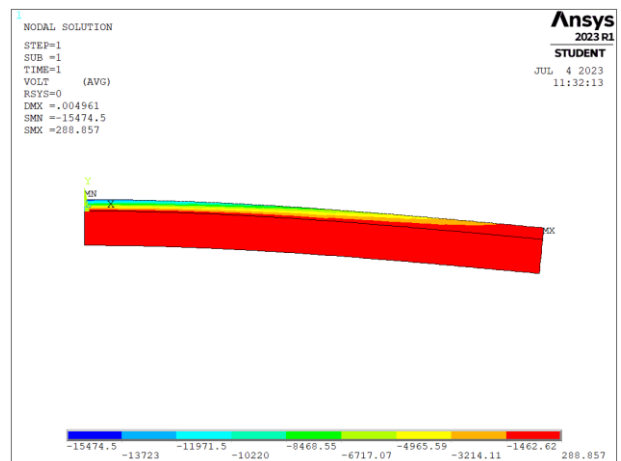


(b)

Figura 31: (a) Voltaje para $\frac{t}{L} = 0,01, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en primer orden (b) Voltaje para $\frac{t}{L} = 0,01, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en segundo orden



(a)



(b)

Figura 32: (a) Voltaje para $\frac{t}{L} = 0,1, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en primer orden (b) Voltaje para $\frac{t}{L} = 0,1, \frac{t}{W} = 4$ y $\beta=3$ en segundo orden

	Valores de relación $\frac{t}{L}$				
	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01
Voltaje según análisis lineal (V)	15390	30970	51750	77720	155600
Voltaje según análisis no lineal (V)	15474	30382	43939	50079	51887
Sobreestimación	0%	1,94%	17,78%	55,19%	200%

Tabla 18: Comparación de voltaje obtenido en primer orden y segundo orden

3.2.4. Influencia del parámetro β y los efectos de segundo orden

La última relación de aspecto considerada en estos estudios paramétricos es β , el cociente del espesor del material sustrato y el material piezoeléctrico. En el apartado 3.1 se realizó un primer análisis en el que se comprobó el efecto que tenía un cambio de este valor sobre la flecha producida y el voltaje generado. Se encontró un valor de β óptimo, para el que, a igualdad de carga, se obtenía el voltaje máximo.

En este apartado se pretende comprobar el impacto que el parámetro β pueda tener sobre los efectos de segundo orden. Se ha ensayado en segundo orden la viga piezoeléctrica con dimensiones $\frac{t}{L} = 0,02$ y $\frac{t}{W} = 0,1$, ante una carga de 350 N y bajo la variación de β . Concretamente, se han considerado los siguientes valores de β : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5 y 3. A igualdad de espesor del material piezoeléctrico, las dimensiones quedan según lo expuesto en la Tabla 19. Los resultados obtenidos se han comparado con sus homólogos en primer orden, obteniendo las gráficas 33 y 34.

En vista de los resultados se deduce que para valores de β menores que 1, las respuestas en primer orden y en segundo orden divergen significativamente. La diferencia entre ambas respuestas es mayor mientras menor sea β . Esta diferencia es mucho mayor en el caso de la flecha.

Al igual que para el caso de la relación espesor-ancho, el resultado de la flecha se explica considerando las propiedades mecánicas de la viga. Estas simulaciones se han llevado a cabo manteniendo el espesor del material piezoeléctrico fijo y variando el de la base, de modo que el espesor total disminuye a medida que β disminuye. Si observamos la expresión del módulo de inercia de la sección resistente a flexión, veremos que el espesor se encuentra en el numerador elevado a la tercera potencia, de modo que una disminución del espesor provoca una disminución significativa del módulo de inercia. Consecuentemente, la rigidez de la viga es menor y la flecha aumenta. A partir de $\beta=1$, la flecha es lo suficientemente grande para no cumplir la hipótesis de pequeños desplazamientos, de modo que las deformaciones de segundo orden deben ser consideradas y la respuesta en primer orden aporta una flecha mayor que la de segundo orden.

En cuanto a la evolución del voltaje, se puede explicar atendiendo a la expresión analítica del voltaje en (27), en la que el parámetro β se encuentra en un mayor grado en el denominador que en el numerador. Así, un menor valor de β provocará un aumento del voltaje generado. Además, el voltaje en primer orden difiere del de segundo orden por la sobreestimación de las deformaciones, directamente relacionadas con el voltaje mediante el coeficiente e_{31} . Consecuentemente, se obtiene un mayor voltaje en primer orden que en segundo orden.

Finalmente, se observa que las respuestas en primer y en segundo orden aportan el mismo β óptimo, situado en 0,4. No obstante, no debemos extender esta idea a otros casos, dado que como se demostrará en el apartado 3.2.5.3, el β óptimo sí puede ser susceptible al cálculo no lineal.

Relaciones de β

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	2,5	3
t_p (mm)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
t_b (mm)	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3	4	5	6
t (mm)	2,2	2,4	2,6	2,8	3	4	5	6	7	8
L (mm)	110	120	130	140	150	200	250	300	350	400
W (mm)	22	24	26	28	30	40	50	60	70	80

Tabla 19: Dimensiones para comprobación de influencia de β ($\frac{t}{L} = 0,02$ y $\frac{t}{W} = 0,1$)

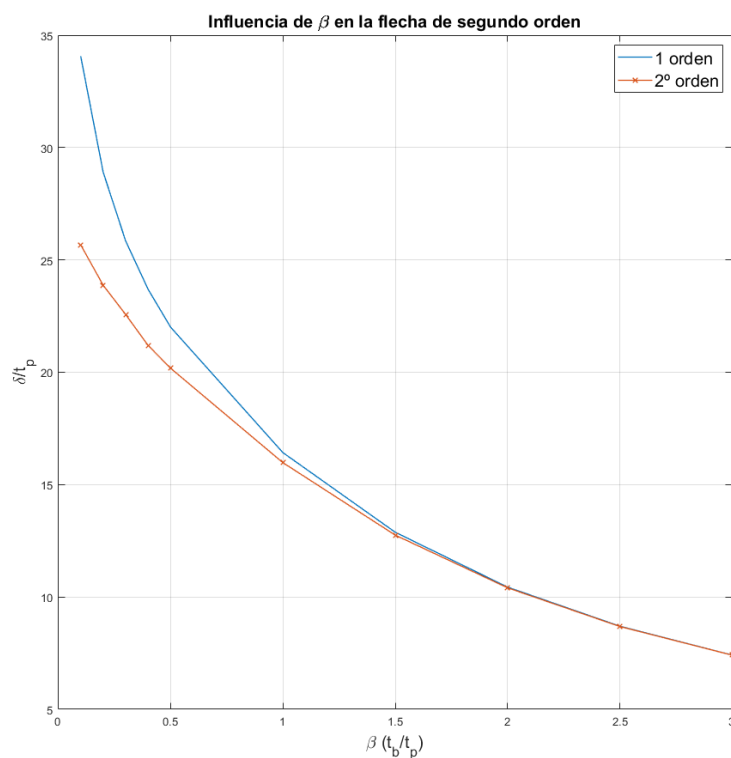


Figura 33: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha según β ($\frac{t}{L} = 0,02$ y $\frac{t}{W} = 0,1$)

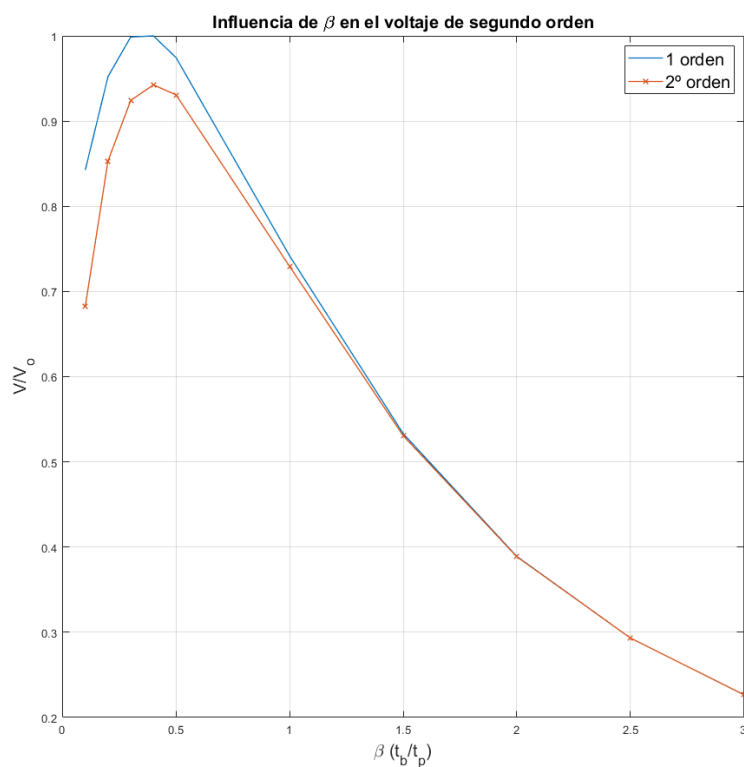


Figura 34: Influencia de los efectos de 2º orden en el voltaje según β ($\frac{t}{L} = 0,02$ y $\frac{t}{W} = 0,1$)

Estas conclusiones están sujetas a las dimensiones consideradas, de modo que cabe considerar si una variación en las dimensiones arroja alguna discordancia con respecto a lo comprobado anteriormente. Para ello, se ha ejecutado el mismo análisis para $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$, de modo que las dimensiones se especifican en la Tabla 20 y los resultados obtenidos se representan en las figuras 35 y 36.

Observando los resultados se puede observar que el valor de β para el que las soluciones de primer orden y

segundo orden divergen significativamente es distinto que para el caso anterior: previamente era $\beta=1,5$ y ahora se encuentra que las respuestas divergen desde $\beta=2$. Además, para estas dimensiones se observa un decaimiento de la flecha y un voltaje en segundo orden mayor que aquel en primer orden a partir de β óptimo. Esto ocurre como consecuencia de la rigidez tensional que tiene lugar al tratarse en este caso de una viga delgada. En efecto, las tensiones axiales a lo largo de la viga cobran más importancia que la flexión, de modo que se rigidiza la viga y da lugar a un menor desplazamiento. Asimismo, este esfuerzo axial provoca que en el extremo empotrado las tensiones de compresión en la fibra inferior disminuyan, de modo que el voltaje positivo disminuye y aumenta el voltaje negativo, produciéndose un voltaje mayor que el obtenido en primer orden.

Relaciones de β

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	2,5	3
t_p (mm)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
t_b (mm)	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3	4	5	6
t (mm)	2,2	2,4	2,6	2,8	3	4	5	6	7	8
L (mm)	22	24	26	28	30	40	50	60	70	80
W (mm)	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2

Tabla 20: Dimensiones para comprobación de influencia de β ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$)

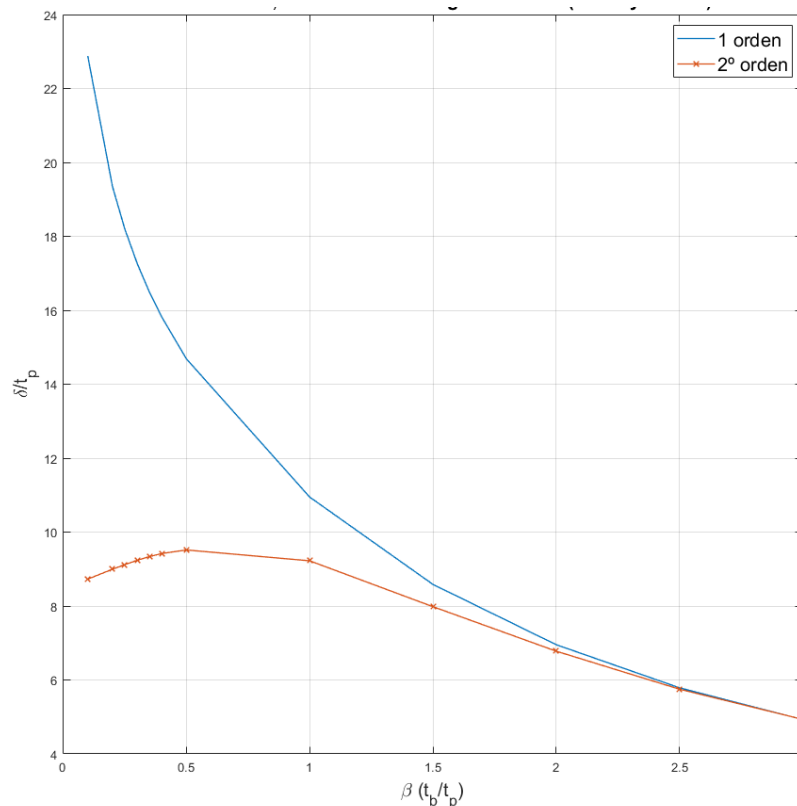


Figura 35: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha según β ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$)

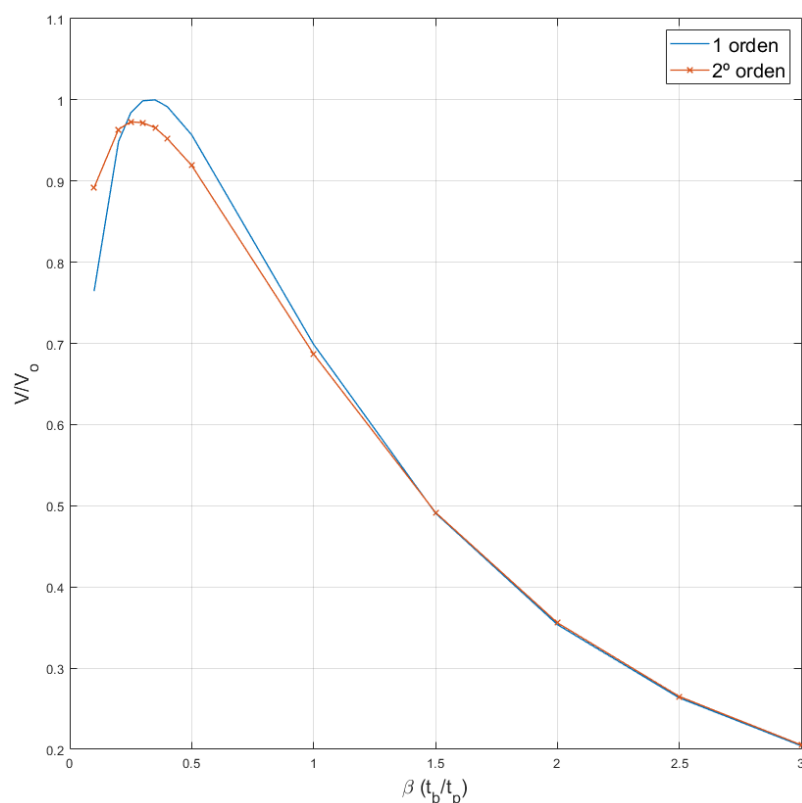


Figura 36: Influencia de los efectos de 2º orden en el voltaje según β ($\frac{t}{L} = 0,1$ y $\frac{t}{W} = 4$)

3.2.5. Influencia de la combinación de relaciones de aspecto

A lo largo del Capítulo 3 se ha evaluado el impacto que ciertas relaciones de aspecto tienen en el rendimiento del recolector piezoeléctrico, estudiando la relación entre los resultados obtenidos y las propiedades mecánicas y piezoeléctricas del recolector. En este último apartado del análisis estático se pretende comprobar la influencia global de estas relaciones de aspecto mediante la combinación de todas ellas.

3.2.5.1. Influencia de β y $\frac{t}{W}$ en análisis de segundo orden

Para comprobar el efecto de β sobre el voltaje generado según la relación de espesor-ancho, se ha analizado el voltaje producido para las mismas relaciones $\frac{t}{W}$ que en el apartado 3.2.2, una carga de 350 N y diversos valores de β . Los resultados se exponen en la Figura 37. El voltaje se ha normalizado con respecto al voltaje máximo producido en la curva de la relación, $V_0=3211,5$ V.

De este análisis se extrae que, para las dimensiones estudiadas, el β óptimo es independiente de la relación espesor-ancho, puesto que el máximo de las curvas permanece en 0,3 para todos los casos. No obstante, en el apartado 3.2.5.3 se comprobará que esta cualidad no es extensiva a todos los casos.

Además, se comprueba que la curva es más tendida mientras menor es el ratio. Es decir, para mayores ratios, el entorno del máximo en el que los valores de voltaje producido son cercanos al óptimo es menor. A menor ancho, más susceptible es la generación de energía a un cambio en la relación entre espesores. Asimismo, se observa que lejos del β óptimo, la diferencia en voltaje producido para distintas relaciones $\frac{t}{W}$ es menos significativa.

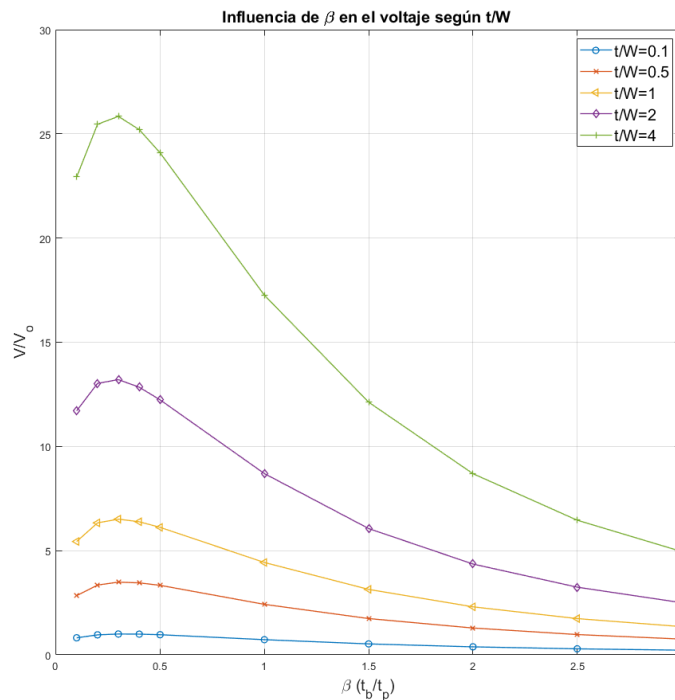


Figura 37: Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{W}$ ($\frac{t}{L} = 0,1$)

3.2.5.2. Influencia de β y $\frac{t}{L}$ en análisis de segundo orden

En este apartado se pretende comprobar el impacto que la razón de dimensiones $\frac{t}{L}$ y el análisis no lineal puedan tener sobre el óptimo de la relación entre los espesores de los materiales. Con este fin se ha repetido el análisis de voltaje obtenido en función de $\frac{t}{L}$ variando los valores de β y para una carga de 350 N. Los resultados se han representado en la Figura 38. El voltaje se ha normalizado con respecto al voltaje máximo obtenido para $\frac{t}{L} = 0,1$, $V_0=85473$ V.

Se observa que, para una misma longitud, el cambio de β tiene un efecto limitado sobre el voltaje óptimo: una desviación pequeña del β óptimo provoca una disminución pequeña del voltaje obtenido. Esto se cumple para todas las relaciones $\frac{t}{L}$ contempladas, al contrario de lo observado en la correlación de β con la relación $\frac{t}{W}$. Es decir, para todos los valores de $\frac{t}{L}$, el entorno en el que los valores de voltaje son cercanos al óptimo posee aproximadamente la misma amplitud, desde $\beta=0,2$ a $\beta=0,4$. Este resultando es distinto del obtenido para la respuesta a la variación de $\frac{t}{W}$, en la que el entorno del óptimo cambiaba significativamente para distintas relaciones de $\frac{t}{W}$, dando lugar a curvas más o menos tendidas. Se puede concluir que la susceptibilidad del voltaje ante al cambio de β es independiente de $\frac{t}{L}$.

Se observa que el β óptimo se mantiene en 0,3 para la relación de $\frac{t}{L}$ más baja, cambiando hasta 0,4 para longitudes hasta 10 veces mayores. Así, se concluye que, al contrario de lo que sucedía para la relación $\frac{t}{W}$, el β óptimo sí varía según el ratio $\frac{t}{L}$.

También se puede observar que las curvas con valores de $\frac{t}{L}$ pequeños se agrupan, de modo que son casi coincidentes en el entorno del β óptimo. La distancia entre ellas se hace mayor en valores más lejanos del óptimo. Por lo tanto, se concluye que para una razón de los espesores de los materiales óptima o cercana a la óptima, se obtienen rendimientos muy similares para $\frac{t}{L}$ desde 0,01 a 0,05. En este aspecto tiene mucho peso la consideración de los efectos de segundo orden. Si observamos los resultados de la Tabla 18, realizados para un $\beta=3$, observamos que los voltajes obtenidos para $\frac{t}{L}$ igual a 0,05, 0,03 y 0,01 distaban mucho entre sí en el

análisis de primer orden. Sin embargo, los voltajes obtenidos en segundo orden mostraban valores mucho más similares. Esto último explica la superposición de las curvas que se observa en la gráfica en torno al β óptimo y su escasa distancia en valores fuera del óptimo. El cálculo lineal habría aportado curvas mucho más distantes entre sí.

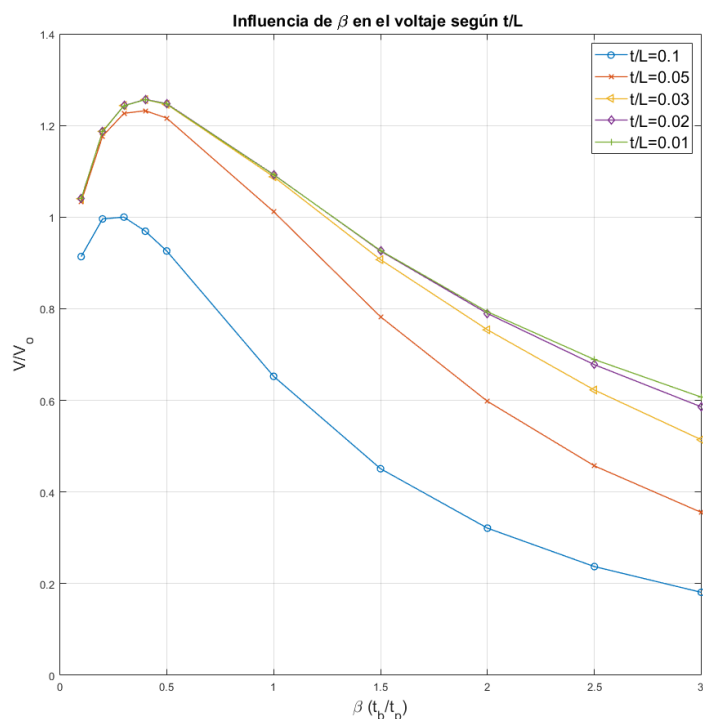


Figura 38: Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ ($\frac{t}{W} = 4$)

3.2.5.3. Influencia de β , $\frac{t}{W}$ y $\frac{t}{L}$ en análisis de 2º orden

En este apartado se lleva a cabo el análisis de la respuesta del recolector piezoeléctrico midiendo la influencia de todas las relaciones de aspecto contempladas en este trabajo. Para ello se ha evaluado la respuesta del recolector para las razones de espesor-ancho, 0,1, 0,8 y 2, y tres valores de $\frac{t}{L}$: 0,1; 0,05 y 0,02. Asimismo, para cada una de estas combinaciones se ha analizado la respuesta para una carga de 350 N y los siguientes valores de β : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 y 1. Se han encontrado los resultados expuestos en la Figura 39. El voltaje se ha normalizado con respecto al voltaje máximo obtenido para $\frac{t}{L} = 0,02$ y $\frac{t}{W} = 2$ según el análisis de primer orden, $V_0 = 188590$ V.

Es evidente por la comparación de los resultados de primer orden y segundo orden que para la viga más esbelta es esencial considerar el análisis en segundo orden independientemente de la relación espesor-ancho. La diferencia entre las respuestas de voltaje obtenidas según los cálculos lineal y no lineal es grande para todos los casos de $\frac{t}{W}$ e incrementa con $\frac{t}{W}$. Como se ha explicado previamente, esto se debe a que un ancho menor provee un módulo de inercia de la sección resistente a flexión menor, provocando una mayor flecha. Consecuentemente, los desplazamientos se alejarán cada vez más de cumplir la hipótesis de pequeños desplazamientos.

En cuanto a las vigas con menor $\frac{t}{L}$, se aprecia que para las dos menores relaciones espesor-ancho, la respuesta en primer orden y en segundo orden es muy similar. Las deformaciones no lineales tienen poca relevancia en estos casos.

Por otra parte, se puede observar que para la relación $\frac{t}{W}$ más baja, la diferencia de voltaje producido para distintas longitudes es menor que para la $\frac{t}{W}$ más alta, considerando la respuesta en segundo orden. Es decir, el voltaje obtenido en la viga con menor ancho es más susceptible a un cambio de longitud. Esto se debe a que el módulo de inercia de la sección resistente a flexión es menor porque el ancho es menor, de modo que la disminución de la rigidez provocada por un aumento de longitud es aún más notable. Así, la deformación incrementa sustancialmente y el voltaje producido también.

Por último, se puede observar que el β óptimo cambia según la situación, salvo para $\frac{t}{L} = 0,1$, donde este es 0,3 independientemente del espesor-ancho. Para el resto de los ratios de $\frac{t}{L}$ contemplados, el óptimo cambia en función de $\frac{t}{W}$. Asimismo, para una misma relación $\frac{t}{W}$, el óptimo cambia según $\frac{t}{L}$. En este aspecto posee mucha relevancia la consideración de los efectos de segundo orden, pues aunque en el análisis de primer orden los óptimos también cambian, no se sitúan en los mismos valores que para el caso de segundo orden. Esto arroja una conclusión relevante para el diseño del recolector: la combinación de los espesores de los materiales óptima depende tanto de los materiales seleccionados, como de la relaciones que guarda el espesor de la viga con el ancho y la longitud.

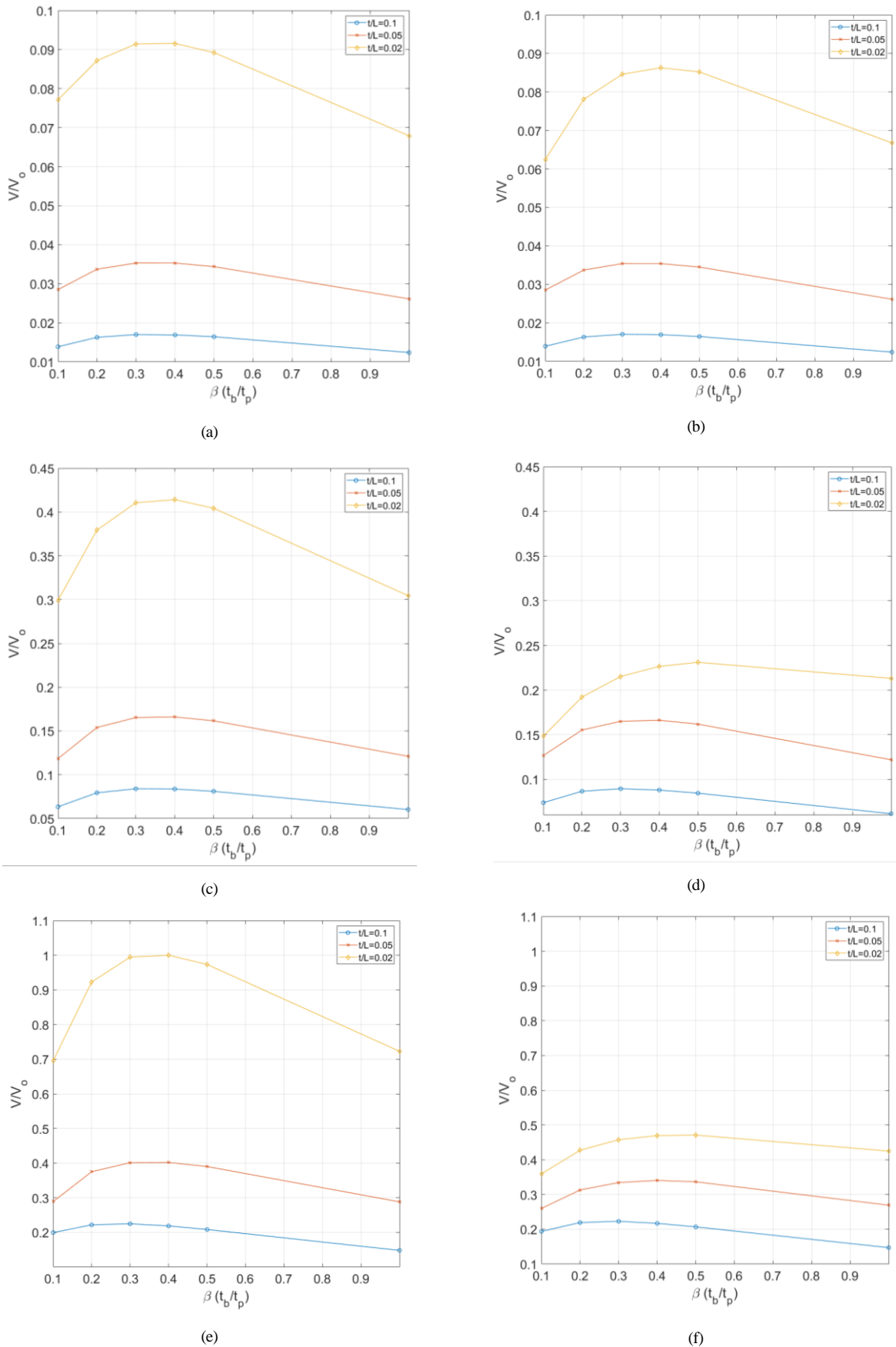


Figura 39: (a) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 0,1$ en 1er orden (b) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 0,1$ en 2º orden (c) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 0,8$ en 1er orden (d) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 0,8$ en 2º orden (e) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 2$ en 1er orden (f) Influencia de β en el voltaje según $\frac{t}{L}$ para $\frac{t}{W} = 2$ en 1er orden

3.3. Respuesta dinámica de vigas unimorfas

En este apartado se exponen los resultados obtenidos de los análisis transitorios llevados a cabo, cuyo proceso de modelización se ha descrito en el apartado 2.5.

3.3.1. Influencia de la relación de aspecto t/L , factor de amortiguamiento ξ y los efectos de segundo orden

En el apartado 3.2.3 se ha demostrado la influencia que la relación de aspecto $\frac{t}{L}$ posee sobre el comportamiento y el rendimiento de la viga piezoeléctrica ante una carga estática. En concreto, se ha demostrado que a menor relación $\frac{t}{L}$, mayor es el rendimiento del recolector. Asimismo, se ha comprobado que a mayor esbeltez de la viga, mayor influencia poseen los efectos de segundo orden, provocando que los resultados calculados en primer orden no describan correctamente el comportamiento del recolector. Del mismo modo, resulta interesante comprobar si estas conclusiones se mantienen para el análisis transitorio.

Para comprobar la influencia de estos aspectos se ha obtenido la respuesta de la viga piezoeléctrica con $\frac{t}{W} = 4$, $\beta = 0,3$ y $\frac{t}{L} = 0,1$ y $0,03$. El valor de la carga escalón aplicada ha sido de 700 N. Se ha empleado un factor de amortiguación de Rayleigh $\beta_R = 0,00001$. Esto permite calcular el factor de amortiguamiento según la expresión: $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{\beta_R k}{2\sqrt{km}}$. En esta expresión la rigidez y la masa variarán según las dimensiones y el régimen de funcionamiento que estemos evaluando, de modo que los factores de amortiguamiento para cada caso se exponen en la Tabla 21. Así, se representan en las figuras 40 y 41 la respuesta para $\frac{t}{L} = 0,1$. El desplazamiento se ha normalizado según el espesor del material piezoeléctrico, $t_p = 2$ mm, y el voltaje se ha normalizado según el máximo voltaje obtenido con el cálculo de 1^{er} orden, $V_0 = 171892$ V.

En primer lugar, cabe destacar que las respuestas dinámicas obtenidas se estabilizan en los valores de las respuestas estáticas correspondientes, una vez finalizada la fase transitoria. De este modo, se obtiene que la flecha estática remanente es mayor en el análisis de primer orden que en el análisis de segundo orden. Paralelamente, el voltaje final es mayor en primer orden que en segundo orden.

En los resultados se observa un efecto relevante que no se contemplaba en el análisis estático: si bien el valor final de voltaje es el mismo, existe un periodo de tiempo en el que se alcanza un voltaje ligeramente superior. Es decir, la producción de voltaje del recolector piezoeléctrico es mayor de lo que arrojaban los análisis estáticos.

A pesar de que la flecha en el análisis de primer orden es mucho mayor que aquella en el análisis de segundo orden, los valores finales de voltaje no difieren en la misma medida, teniendo valores mucho más similares. Esto se puede razonar observando la influencia de los efectos de segundo orden en β para las relaciones de aspecto $\frac{t}{W} = 4$ y $\frac{t}{L} = 0,1$, expuesta en las figuras 35 y 36, la variación de β influye más en los efectos de segundo orden de la flecha que del voltaje.

Por otra parte, se puede apreciar que para el valor de amortiguamiento proporcionado se producen varias fluctuaciones en la respuesta tanto en primer orden como en segundo orden, aunque el amortiguamiento será mayor en la respuesta de segundo orden, dado que este es proporcional a la rigidez y la respuesta en segundo orden es más rígida. Se puede apreciar que mientras que la respuesta en primer orden describe en su fase transitoria una sinusoide perfecta, el cálculo no lineal provoca que la respuesta de segundo orden sea más irregular. Además, la rigidización tensional que tiene lugar en la respuesta de segundo orden provoca un aumento en su frecuencia natural y por lo tanto, que las oscilaciones en la respuesta tengan un menor periodo.

Se han ejecutado las mismas comprobaciones para $\frac{t}{L} = 0,03$ y su resultado se expone en las figuras 42 y 43. La flecha está normalizada según el espesor del material piezoeléctrico, $t_p = 2$ mm, y el voltaje se ha normalizado según el máximo voltaje obtenido con el cálculo en primer orden, 1030000 V.

Al igual que para el análisis estático, se verifica que mientras más esbelta sea la viga, mayor voltaje produce y mayor es la influencia de los efectos de segundo orden. Como consecuencia de su esbeltez, la viga fluctúa durante más tiempo y se aprecia que en el periodo de tiempo estudiado la respuesta aún no se ha estabilizado

en su valor estático. Asimismo, se vuelven a apreciar las irregularidades en las curvas de segundo orden. En este caso es muy evidente que el periodo de la vibración en segundo orden es menor que en primer orden.

		β_R	K (N/kg)	ξ
$\frac{t}{L} = 0,1$	1 ^{er} orden	0,00001	20245,26	0,06
	2 ^o orden	0,00001	37975,37	0,08
$\frac{t}{L} = 0,03$	1 ^{er} orden	0,00001	552,5734	0,005
	2 ^o orden	0,00001	8625,47	0,02

Tabla 21: Factor de amortiguamiento ($\beta=0,3$, $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta_R = 0,00001$)

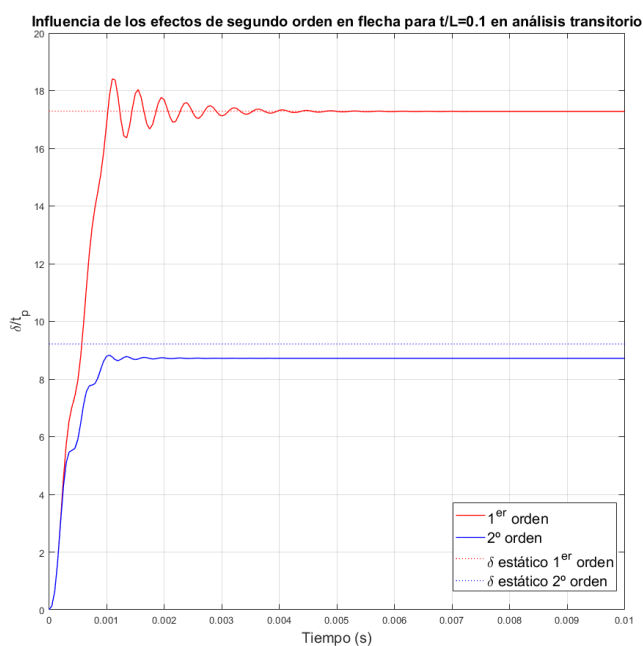


Figura 40: Influencia de los efectos de 2^o orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta = 0,3$, $\frac{t}{W} = 4$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta_R = 0,00001$)

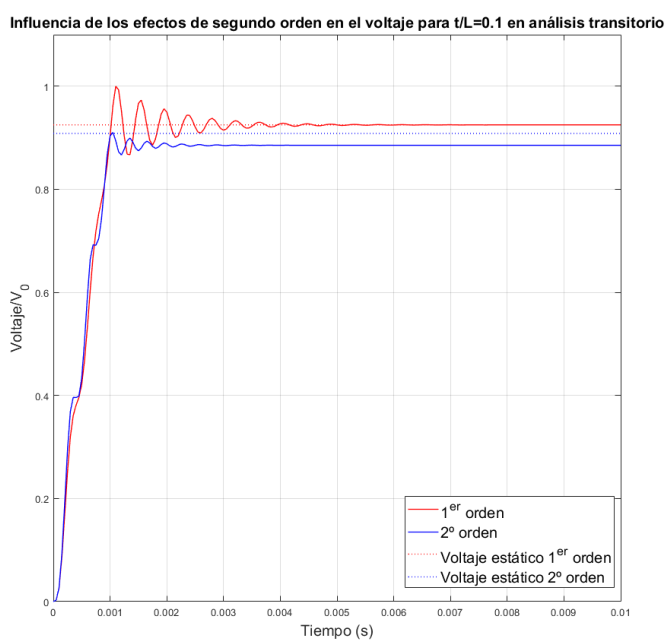


Figura 41: Influencia de los efectos de 2^o orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta = 0,3$, $\frac{t}{W} = 4$, $\frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta_R = 0,00001$)

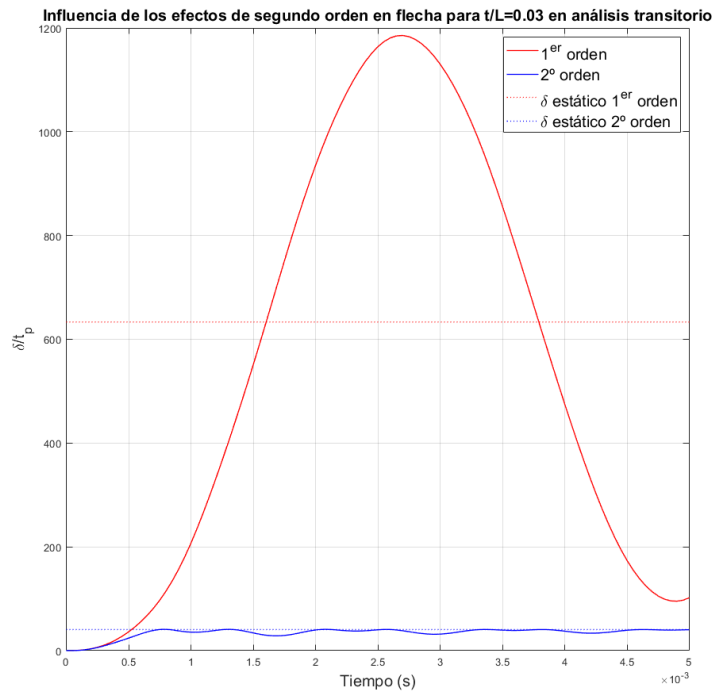


Figura 42: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,03$ y $\beta_R = 0,00001$)

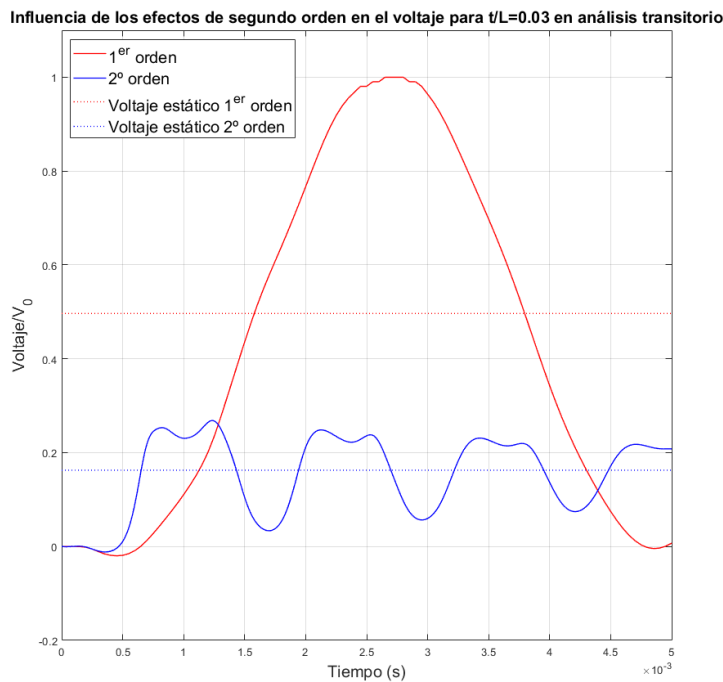


Figura 43: Influencia de los efectos de 2º orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,03$ y $\beta_R = 0,00001$)

A continuación, cabe cuestionarse la relevancia del factor de amortiguamiento en las conclusiones extraídas. Si bien el valor del parámetro de Rayleigh β_R igual a 0,00001 aporta factores de amortiguamiento razonables, se comprobará la variación de la respuesta para $\beta_R = 0,01$, dando lugar a unos factores de amortiguamiento excesivos, expuestos en la Tabla 22. Se han ejecutado los análisis con las mismas relaciones de aspecto que en el caso anterior ($\frac{t}{W} = 4, \beta=0,3$ y $\frac{t}{L} = 0,1$ y $0,03$) y la misma carga, 700 N. Así, se representan en las figuras

44 y 45 la respuesta para $\frac{t}{L} = 0,1$. El desplazamiento se ha normalizado según el espesor del material piezoeléctrico, $t_p=2$ mm, y el voltaje se ha normalizado según el máximo voltaje obtenido con el cálculo de 2º orden, $V_0=160517$ V.

A diferencia del caso anterior, se comprueba que la respuesta está sobreamortiguada, es decir, no tiene lugar ni una oscilación completa antes de que la respuesta se estabilice en su valor estático. En el caso de la flecha, la curva se estabiliza de manera inmediata, mientras que para el voltaje, oscila ligeramente en su fase transitoria, de modo que el voltaje arrojado es mayor que el encontrado para la comprobación estática.

Asimismo, se observa una mayor diferencia entre las curvas de primer y segundo orden en la flecha que en el voltaje, que de nuevo se explica consultando las gráficas 35 y 36. Cabe destacar que tanto el valor de la flecha máxima como el voltaje son menores en este caso sobreamortiguado que en el caso anterior.

Se han ejecutado las mismas comprobaciones para $\frac{t}{L} = 0,03$ y su resultado se expone en las figuras 42 y 43. La flecha está normalizada según el espesor del material piezoeléctrico, $t_p=2$ mm, y el voltaje se ha normalizado según el máximo voltaje obtenido con el cálculo en primer orden, $V_0= 509975$ V.

Análogamente a la repuesta para $\frac{t}{L} = 0,1$, se observa que existe una fluctuación temporal en el voltaje generado, previamente a la estabilización del valor del voltaje. Sin embargo, se puede comprobar que para esta viga más esbelta, el vértice de la gráfica es aún más pronunciado, existiendo una mayor diferencia entre el voltaje máximo alcanzando y el voltaje remanente. Este fenómeno tiene dos posibles explicaciones. La primera de ellas es que se trate de un error numérico producido en la integración de la respuesta. Si bien esta explicación parece descartable por el pequeño paso que se ha empleado en el cálculo (0.00000005 s), el valor del vértice es mucho mayor que el valor remanente de voltaje, lo que lo hace susceptible de ser incoherente.

La segunda opción es que en efecto, la respuesta mostrada sea real. Esto aportaría una conclusión muy relevante para el diseño del recolector: para conocer el valor máximo de energía eléctrica generada ante una carga intermitente o tipo escalón sería necesario considerar la respuesta transitoria. En efecto, al evaluar la respuesta transitoria, se conoce que se genera un voltaje mayor que aquel obtenido para la respuesta estática, de modo que esta última subestima el rendimiento del recolector. Asimismo, al tratarse de un voltaje casi 3 veces mayor que el que aporta el análisis estático, diseñar la instalación eléctrica para el valor de diseño estático puede provocar un fallo de la instalación eléctrica por efecto Joule, dado que el diámetro de cable necesario será mayor del existente.

		β_R	K (N/kg)	ζ
$\frac{t}{L} = 0,1$	1º orden	0,01	20245,26	55,23
	2º orden	0,01	37975,37	75,63
$\frac{t}{L} = 0,03$	1º orden	0,01	552,5734	5
	2º orden	0,01	8625,47	19,74

Tabla 22: Factor de amortiguamiento ($\beta=0,3$, $\frac{t}{W} = 4$ y $\beta_R = 0,01$)

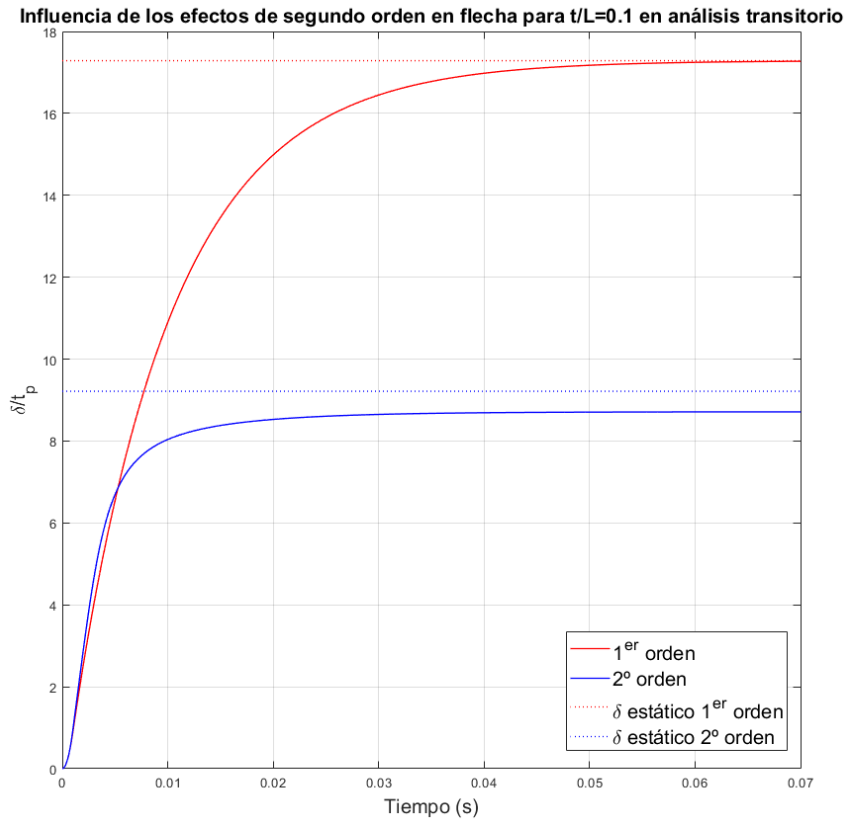


Figura 44: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta_R = 0,01$)

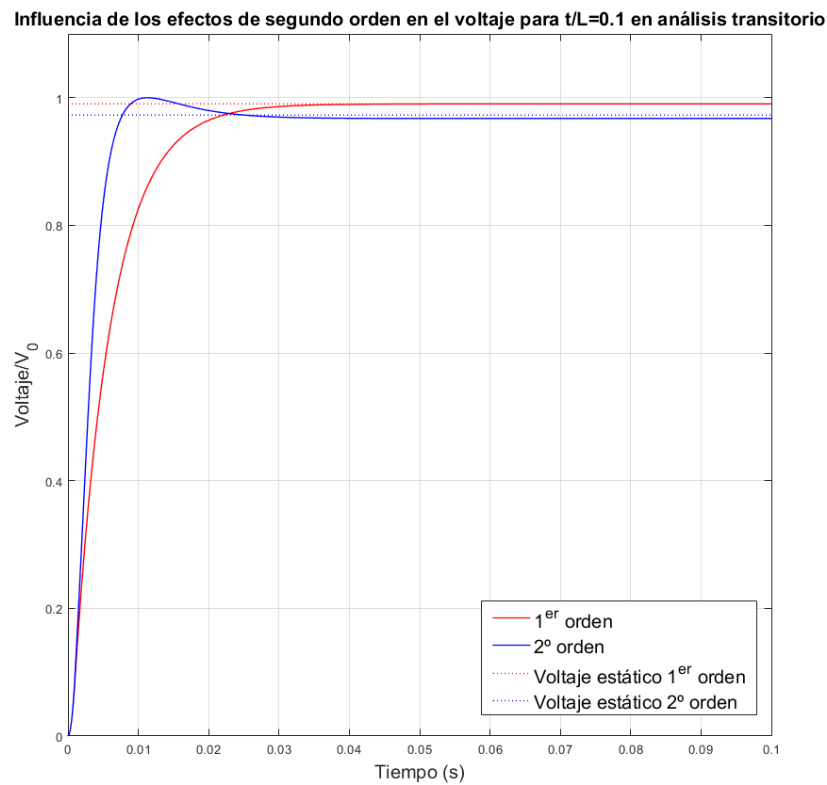


Figura 45: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,1$ y $\beta_R = 0,01$)

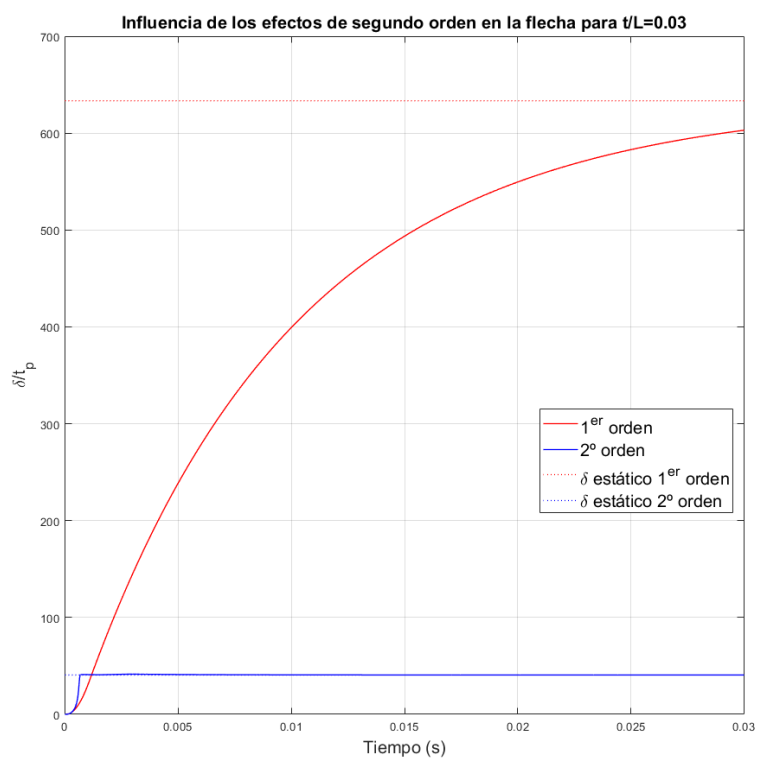


Figura 46: Influencia de los efectos de 2º orden en la flecha en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,03$ y $\beta_R = 0,01$)

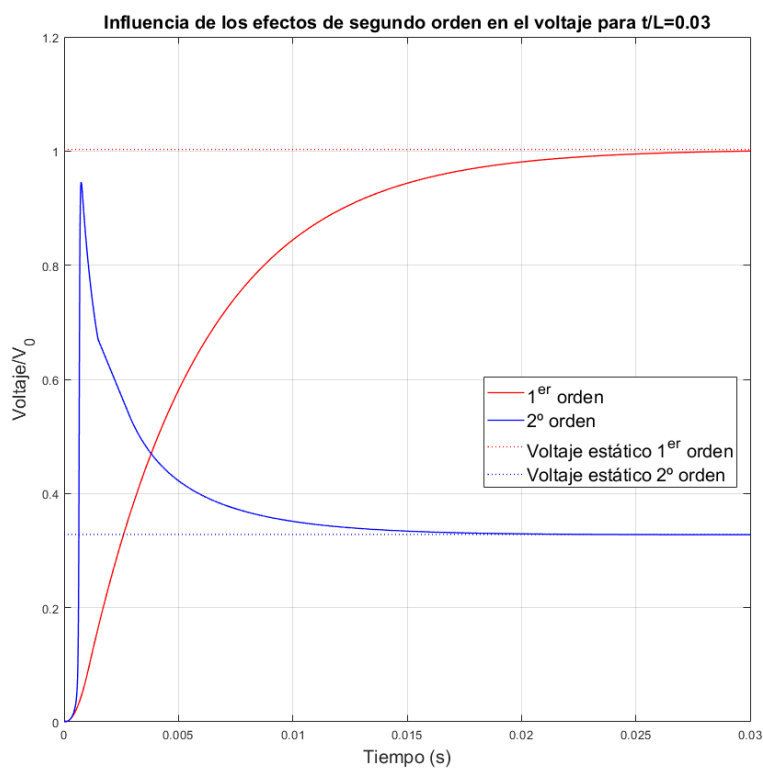


Figura 47: Influencia de los efectos de 2º orden en el voltaje en análisis transitorio ($\beta = 0,3, \frac{t}{W} = 4, \frac{t}{L} = 0,03$ y $\beta_R = 0,01$)

4 RESUMEN Y CONCLUSIONES

4.1. Resumen de los estudios elaborados

En este documento se ha expuesto el estudio realizado acerca de la modelización y el análisis de las vigas piezoeléctricas para la recolección de energía. A continuación, se sintetiza el contenido presentado con el fin de recordar las metodologías empleadas y los resultados obtenidos.

Inicialmente, se presentó el esquema del recolector piezoeléctrico evaluado y se dedujeron las expresiones analíticas que definen el comportamiento de este. Se describió la elaboración del modelo MEF 3D, así como los parámetros que intervienen en él. Posteriormente, se definió el modelo MEF 2D de utilidad en el caso de vigas delgadas. Para cerrar este capítulo, se presentaron las particularidades del modelo transitorio empleado para evaluaciones a lo largo del tiempo.

Posteriormente, se validaron de los modelos empleados mediante su comparación con la respuesta analítica, de donde se obtuvo que los modelos de elementos finitos aportaban soluciones verosímiles, lo cual permitió su uso a lo largo de la totalidad del trabajo.

Se evaluó la influencia de la relación entre el espesor y el ancho de la viga en la eficiencia del recolector, así como el impacto de los efectos de segundo orden en esta comprobación. Se observó que el mayor rendimiento se obtiene para la viga más delgada. Además, el efecto de los términos de segundo orden aumentaba lentamente a medida que disminuía la relación del ancho con respecto al espesor. No obstante, para todas las relaciones de espesor-ancho contempladas en este trabajo, el efecto era despreciable.

Se comprobó el impacto del ratio entre el espesor y la longitud de la viga en la respuesta del recolector y su relación con los efectos de segundo orden. Se obtuvo que el rendimiento aumenta con la relación espesor-longitud de la viga y que los efectos de segundo orden influyen en el resultado obtenido. Los aspectos no lineales cobran más importancia mientras mayor sea la longitud, produciendo una diferencia muy grande entre ambas soluciones. Se observó que no considerar los efectos de segundo orden conduce a una sobreestimación del rendimiento del recolector.

A continuación, en el apartado 3.2.4, se verificó la relevancia de la relación entre el espesor del material sustrato y del material piezoeléctrico, así como su relación con los efectos de segundo orden. Se obtuvo que para las dimensiones estudiadas, la discrepancia entre la solución lineal y no lineal aumentaba a medida que el cociente entre los espesores disminuía. Así, para los valores más bajos de β , no considerar los efectos de segundo orden conduce a una sobreestimación del voltaje producido.

Con posterioridad, se han combinado los efectos de todas las relaciones de aspecto previstas en los apartados previos. En el apartado 3.2.5.1 se ha comprobado que a mayor relación espesor-ancho, más susceptible es el voltaje producido a una desviación de β con respecto al β óptimo. Asimismo, se observó que la diferencia entre los voltajes producidos para diferentes ratios de espesor-ancho es muy drástica en valores cercanos a β óptimo.

Se ha observado que el valor de β óptimo cambia según la relación espesor-longitud. Asimismo, se ha demostrado que considerar los efectos de segundo orden provoca el solapamiento de las curvas con distintos ratios de espesor-longitud, de modo que se obtienen rendimientos muy similares para estas.

Se ha caracterizado el comportamiento de la viga en distintos escenarios donde se combinan diversos valores de los tres parámetros geométricos contemplados y se evalúa la importancia del cálculo no lineal en cada caso. Se concluye que mientras mayor sea el cociente espesor ancho y menor sea el cociente espesor-longitud, más importancia tienen los efectos de segundo orden. Además, se observa que mientras mayor es la relación espesor-ancho, más susceptible es el voltaje producido a un cambio del ratio espesor-longitud. Por último, se observa que el valor de β óptimo varía en función de los cocientes que guarda el espesor con el ancho y con la longitud y según consideremos los efectos de segundo orden o no.

Finalmente, se ha evaluado la respuesta dinámica de la viga piezoeléctrica, así como la influencia de la relación espesor-longitud y el factor de amortiguamiento en la respuesta. Se ha comprobado que los efectos de segundo orden influyen en la frecuencia de la respuesta, como consecuencia de la rigidización tensional.

Asimismo, se ha demostrado que la respuesta dinámica aporta valores de voltaje mayores que la estática, dada la fluctuación de la respuesta que tiene lugar en la etapa transitoria.

4.2. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos permiten extraer conclusiones al respecto del comportamiento de la viga piezoeléctrica y verificar el cumplimiento de los objetivos que se plantearon al inicio de este trabajo:

- Se concluye que los modelos de elementos finitos arrojan resultados fiables en cuanto al comportamiento mecánico y piezoeléctrico del recolector. Concretamente, los modelos de elementos finitos 2D y 3D son equivalentes en los casos de vigas delgadas.
- Las relaciones de aspecto estudiadas en este trabajo influyen en gran medida en el voltaje del recolector piezoeléctrico. El rendimiento aumenta si disminuye el ancho frente al espesor y si aumenta la longitud frente al espesor. En general, se obtienen mejores resultados con aquellas dimensiones que disminuyan la rigidez de la viga, aumentando la flecha y las deformaciones.

Además, existe un valor óptimo del cociente del espesor del material piezoeléctrico y el material sustrato. El voltaje aumenta si aumenta el espesor del piezoeléctrico frente al sustrato hasta que se alcanza un valor máximo. A partir del máximo, la energía mecánica que se puede convertir en eléctrica es demasiado escasa, como consecuencia de que el material sustrato sea demasiado delgado.

- Considerar los efectos de segundo orden es de suma importancia durante el diseño del recolector piezoeléctrico. Estos efectos cobran más o menos importancia en función de las dimensiones de la viga piezoeléctrica. No obstante, aquellas geometrías en las que las repuestas en primer y en segundo orden son equivalentes se reducen a un conjunto muy pequeño: vigas en las que el ancho y la longitud poseen dimensiones similares a la del espesor, y en las que el espesor del material sustrato es mayor que el del material piezoeléctrico. Precisamente estas características dan lugar a un recolector piezoeléctrico de elevada rigidez y de producción eléctrica ineficiente. En el resto de casos, obviar los efectos de segundo orden conduce al desaprovechamiento del potencial recolector de la viga y a la sobreestimación del voltaje de esta.
- Evaluar la respuesta dinámica resulta relevante en aquellos casos en los que se producen fluctuaciones de grandes amplitudes en la fase transitoria previa a la estabilización. Si bien es necesario comprobar que esta respuesta no está condicionada por errores numéricos, esta puede arrojar valores del voltaje generado mayores que los aportados por la respuesta estática.

4.3. Trabajos futuros

Los estudios realizados en este trabajo han cubierto algunos de los aspectos de interés relacionados con los recolectores piezoeléctricos. No obstante, existen aspectos por investigar que contribuirían a ampliar el conocimiento actual acerca de los recolectores piezoeléctricos. Algunos de estos se exponen a continuación:

- Estudio de la modelización y el análisis de recolectores bimorfos
- Influencia de la plastificación del material sustrato en la recolección de energía
- Modelización de la fatiga en la viga piezoeléctrica y su influencia en el rendimiento del recolector piezoeléctrico
- Análisis espectral de la respuesta del recolector a vibraciones externas
- Análisis del recolector piezoeléctrico integrado en estructuras y edificaciones

REFERENCIAS

- [1] Shirvanimoghaddam M., Shirvanimoghaddam K., Mahdi Abolhasani M., Farhangi M., Zahiri Barsari V., Liu H., Dohler M. & Naebe M. (2019). Towards a Green and Self-Powered Internet of Things Using Piezoelectric Energy Harvesting. *IEEE Access*, 7, (94533-94556). <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2928523>
- [2] Liu X., He L., Liu R., Hu D., Zhang L. & Cheng G. (2023). Piezoelectric energy harvesting systems using mechanical tuning techniques. *Review of Scientific Instruments*, Volume 94, Issue 3. <https://doi.org/10.1063/5.0120778>
- [3] Twiefel J. & Westermann H. (2012) Survey on broadband techniques for vibration energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 24 (II), (1291–1302). <http://doi.org/10.1177/1045389X13476149>
- [4] Wang J., Qin X., Liu Z., Ding G. & Cai G. (2021) Experimental study on fatigue degradation of piezoelectric energy harvesters under equivalent traffic load conditions. *International Journal of Fatigue*, 150 (106320). <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106320>
- [5] Kar S., Samanth K., Raghunandana K. (2021) Cost effectiveness of piezo electric energy harvesting. *Materials Today: Proceedings* 43 (101–104). <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.220>
- [6] Jiang X., Kim K., Zhang S., Johnson J., and Salazar G. (2014) High-Temperature Piezoelectric Sensing. *Sensors*, 14 (144-169) <https://doi.org/10.3390/s140100144>
- [7] Moreu F., Li X., Li S. & Zhang D. (2018). Technical Specifications of Structural Health Monitoring for Highway Bridges: New Chinese Structural Health Monitoring Code. *Frontiers in Built Environment*, 4. <http://doi.org/10.3389/fbuil.2018.00010>
- [8] Sun M., Staszewski W.J. & Swamy R. N. (2010) Smart Sensing Technologies for Structural Health Monitoring of Civil Engineering Structures. *Advances in Civil Engineering*, Volume 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/724962>
- [9] Le T., Luu T., Nguyen H., Nguyen T., Ho D. & Huynh T. (2022) Piezoelectric Impedance-Based Structural Health Monitoring of Wind Turbine Structures: Current Status and Future Perspectives. *Energies* 2022, 15, 5459. <https://doi.org/10.3390/en15155459>
- [10] R Patel et al. (2011) A geometric parameter study of piezoelectric coverage on a rectangular cantilever energy harvester. *Smart Mater. Struct.*, 20, 085004. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/8/085004>
- [11] Zhao L., Tang L. & Yang Y. (2013) Comparison of modeling methods and parametric study for a piezoelectric wind energy harvester. *Smart Mater. Struct.* 22, 125003 (12pp). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/12/125003>
- [12] Yee Noh J., Ho Yoon G. (2012) Topology optimization of piezoelectric energy harvesting devices considering static and harmonic dynamic loads. *Advances in Engineering Software*, 53 (45–60). <http://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2012.07.008>
- [13] Matas Roldán M.M. (2022). *Estudio de Vigas Laminadas Piezoeléctricas para Aplicaciones en Recolección de Energía* [Trabajo Fin de Grado, Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.] Idus:

- <https://idus.us.es/handle/11441/139640>
- [14] Sezer N., Koç M. (2021). A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting. *Nano Energy*, 80. <https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2020.105567>
- [15] Priya S., Inman D. J. (2009). *Energy Harvesting Technologies*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-76464-1>
- [16] Wang Q., Dai W., Li S., Jin An Sam Oh & Wu T. (2020). Modelling and analysis of a piezoelectric unimorph cantilever for energy harvesting application. *Materials Technology. Advanced Performance Materials*, 35:9-10 (675-681). <https://doi.org/10.1080/10667857.2020.1751470>
- [17] Ansys, *Mechanical APDL Command Reference*. https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_cmd/Hlp_C_CmdTOC.html
- [18] Kim J.-S., Hill J. R. y Wang K. W., «An asymptotic approach for the analysis of piezoelectric fiber composite beams,» (2011) *Smart Materials and Structures*, Volume 20, Number 2. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/20/2/025023>
- [19] Massart T.J. (2022). Non-linear modelling of materials and structures (Course notes). Université Libre de Bruxelles

ANEXO 1: CÓDIGOS DE MATLAB

- **Modelo analítico**

```

clc
clear all
format long

%introduzco propiedades materiales del material 1, base

E1=195e9; %Young

%introduzco propiedades materiales del material 2, piezoeléctrico

E2=81e9;
perm33=5.82e-9;
d31=-124e-12;
s11=1/E2;

%introduzco parámetros geométricos
L=0.1;
t1=0.6e-2; %grosor base
t2=0.2e-2; %grosor piezoeléctrico
W=0.36e-2;

%parámetros relativos
alpha=E1/E2;
beta=t1/t2;

%valor de la fuerza
F=-350;

%cálculo del desplazamiento máximo en el caso mecánico (expresionesq
%extraídas de "Modelling and analysis of a piezoelectric unimorph
%cantilever for energy harvesting application")

wmax=-(4*F*L^3*(1+alpha*beta))/(W*E2*t2^3*(1+4*alpha*beta+6*alpha*beta^2+...
4*alpha*beta^3+alpha^2*beta^4))

%cálculo del voltaje producido

B=(t2^4/((alpha^2)*(E2^2)))*(1+4*alpha*beta+6*alpha*beta^2+...
4*alpha*beta^3+alpha^2*beta^4); %B ESTÁ BIEN

aux1=(3*beta^2*(1+beta)^2*t2^4*s11^2)/((1+alpha*beta)*B)
aux=1+(aux1-1)*(d31^2/(s11*perm33));

Q=(-3*(d31*beta*(1+beta)*s11^2*t2^2*L^2)*F)/(alpha*B)

C=(perm33*W*L/t2)*aux

V=Q/C

```


- **Influencia de β en el voltaje en función de α**

```

clc
close all
clear all
format long

%introduzco propiedades materiales del material 1, base
E1=195e9; %Young

%introduzco propiedades materiales del material 2, piezoeléctrico
E2=81e9;
perm33=5.82e-9;
d31=-124e-12;%
s11=1/E2;

%introduzco parámetros geométricos
t2=0.2e-2; %grosor piezoeléctrico

%parámetros relativos
alpha1=E1/E2;
rel_t_W=4; %ratio t/W
rel_t_L=0.1;

%valor de la fuerza
F=-350;

%cálculo del desplazamiento máximo en el caso mecánico (expresionesq
%extraídas de "Modelling and analysis of a piezoelectric unimorph
%cantilever for energy harvesting application")

%cálculo del voltaje producido

voltaje2=[];
carga2=[];

beta=0.1:0.1:4

alpha=[0.25 0.5 1 alpha1]

for j=1:length(alpha)
voltaje1=[];
carga1=[];
for i=1:length(beta)

t1=beta(i)*t2;
t=t1+t2;
W=t/rel_t_W;
L=t/rel_t_L;

B=(t2^4/((alpha(j)^2)*(E2^2)))*(1+4*alpha(j)*beta(i)+6*alpha(j)*(beta(i))^2+...
4*alpha(j)*(beta(i))^3+(alpha(j))^2*(beta(i))^4);

aux1=(3*(beta(i))^2*(1+beta(i))^2*t2^4*s11^2)/((1+alpha(j)*beta(i))*B);
aux=1+(aux1-1)*(d31^2/(s11*perm33));

Q=(-3*(d31*beta(i)*(1+beta(i))*s11^2*t2^2*L^2)*F)/(alpha(j)*B);

```

```
C=(perm33*W*L/t2)*aux;

V=Q/C;

voltaje1=[voltaje1 V];
carga1=[carga1 Q];
end

voltaje2=[voltaje2; voltaje1];
% carga2=[carga2; carga1];

end

Vmax=max(abs(voltaje2), [], 'all');
grid ON
plot(beta, -(voltaje2(1,1:end))/Vmax, '-', beta, -(voltaje2(2,1:end))/Vmax, '-x', beta, -(voltaje2(3,1:end))/Vmax, '-o', beta, -(voltaje2(4,1:end))/Vmax, '-+')
grid on
axis square
legend('\alpha=0.25', '\alpha=0.5', '\alpha=1', '\alpha=2.4', 'fontsize', 15)
xlabel('\beta (t_b/t_p)', 'fontsize', 15)
ylabel('V/V_o', 'fontsize', 15)
title('Influencia de la relación entre espesores de materiales', 'fontsize', 15)
```

ANEXO 2: CÓDIGOS DE ANSYS

- **Modelo 3D estático en análisis de primer orden**

```
finish
```

```
/clear
```

```
!-----
```

```
! Preprocesador
```

```
!-----
```

```
/PREP7
```

```
ET,1,SOLID186
```

```
ET,2,SOLID226
```

```
KEYOPT,2,1,1001
```

```
!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES
```

```
!-----
```

```
!* Prop. mat.1
```

```
!-----
```

```
MP,EX,1,195E9
```

```
MP,PRXY,1,0.3
```

```
MP,DENS,1,7750
```

```
!-----
```

```
!*Prop. mat.2
```

```
!-----
```

```
MP,DENS,2,7495
```

```
EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO
```

```
*SET,PER11,763
```

```
*SET,PER22,763
```

```
*SET,PER33,658
```

```
MP,PERX,2,PER11
```

```
MP,PERY,2,PER22
```

```
MP,PERZ,2,PER33
```

```
!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ
```

```
*SET,C11,139E9
*SET,C12,77.8E9
*SET,C13,74.3E9
*SET,C22,139E9
*SET,C23,74.3E9
*SET,C33,115E9
*SET,C44,25.6E9
*SET,C55,25.6E9
*SET,C66,30.6E9
!*
TB,ANEL,2,1,21,0
TBTEMP,0
TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0
TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33
TBDATA,,0,0,0,C44,0,0
TBDATA,,C55,0,C66,,,
TB,PIEZ,2,,,0
!MATRIZ DE COEFICIENTES PIEZOELECTRICOS
*SET,E11,0
*SET,E12,0
*SET,E13,-5.2
*SET,E21,0
*SET,E22,0
*SET,E23,-5.2
*SET,E31,0
*SET,E32,0
*SET,E33,15.1
*SET,E41,0
*SET,E42,12.7
*SET,E43,0
*SET,E51,12.7
*SET,E52,0
*SET,E53,0
*SET,E61,0
*SET,E62,0
*SET,E63,0
TBDATA,1,E11,E12,E13,E21,E22,E23
TBDATA,7,E31,E32,E33,E41,E42,E43
```

```
TBDATA,13,E51,E52,E53,E61,E62,E63
```

```
!-----
```

```
! Geometria
```

```
!-----
```

```
Rat_t_L = 0.1
```

```
Rat_t_W = 4
```

```
beta_espesor=0.1
```

```
*SET,TP,2E-3
```

```
*SET,TB,TP*beta_espesor
```

```
*SET,T,TP+TB
```

```
*SET,W, T/Rat_t_W
```

```
*SET,L,T/Rat_t_L
```

```
K,1,
```

```
K,2,L,0,0,
```

```
K,3,L,W,0
```

```
K,4,0,W,
```

```
K,5,0,0,TP
```

```
K,6,L,0,TP
```

```
K,7,L,W,TP
```

```
K,8,0,W,TP
```

```
K,9,0,0,-TB
```

```
K,10,L,0,-TB
```

```
K,11,L,W,-TB
```

```
K,12,0,W,-TB
```

```
! volumen 1 (base)
```

```
V,1,2,3,4,9,10,11,12
```

```
! volumen 2 (piezoelectrico)
```

```
V,1,2,3,4,5,6,7,8
```

```
!MALLADO
```

```
!-----
```

NDIVX=120*0.1/Rat_t_L

NDIVY=8

vsel,S,,1

VATT,1,,1

allsel

vsel,S,,2

VATT,2,,2

allsel

LESIZE,6,,NDIVX

LESIZE,8,,NDIVY

LESIZE,5,,4

LESIZE,13,,8

MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED

MSHAPE,0,3D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 3D

VMESH,ALL

! APLICO EMPOTRAMIENTO

!-----

NSEL,S,LOC,X,0

D,ALL,UX,0

NSEL,R,LOC,Y,W/2

D,ALL,UY,0

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Z,-TB

D,ALL,UZ,0

ASEL,S,LOC,Z,0

DA,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO

FINISH

!-----

! Resolucion

!-----

/SOLU

```
F=350
```

```
NSEL,S,LOC,X,L
```

```
NSEL,R,LOC,Z,0
```

```
F,ALL,FZ,-F/(NDIVY*2) !elementos cuadraticos "NDIVY*2"
```

```
allsel
```

```
NSEL,S,LOC,X,L
```

```
NSEL,R,LOC,Z,0
```

```
NSEL,R,LOC,Y,0
```

```
F,ALL,FZ,-(F/(NDIVY*2))/2
```

```
allsel
```

```
NSEL,S,LOC,X,L
```

```
NSEL,R,LOC,Z,0
```

```
NSEL,R,LOC,Y,W
```

```
F,ALL,FZ,-(F/(NDIVY*2))/2
```

```
allsel
```

```
ALLSEL !IMPORTANTE
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

```
!-----
```

```
! Post-Procesado
```

```
!-----
```

```
/POST1
```

```
PLNSOL, U,Z, 0,1.0
```

```
PRNSOL,VOLT
```

```
PRNSOL,U,Z
```

- **Modelo 2D estático en análisis de primer orden**

finish

/clear

!-----

! Preprocesador

!-----

/PREP7

ET,1,PLANE183

KEYOPT,1,3,0

ET,2,PLANE223

KEYOPT,2,1,1001

KEYOPT,2,3,0

!-----

!* Prop. mat.1

!-----

MP,EX,1,195E9

MP,PRXY,1,0.3

MP,DENS,1,7750

!-----

!*Prop. mat.2

!-----

MP,DENS,2,7495

EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO

*SET,PER11,763

*SET,PER22,658

*SET,PER33,763

MP,PERX,2,PER11

MP,PERY,2,PER22

MP,PERZ,2,PER33

!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ

*SET,C11,139E9

*SET,C12,74.3E9

*SET,C13,77.8E9

*SET,C14,0

*SET,C21,74.3E9


```
*SET,C22,115E9
*SET,C23,74.3E9
*SET,C24,0
*SET,C31,77.8E9
*SET,C32,74.3E9
*SET,C33,139E9
*SET,C34,0
*SET,C41,0
*SET,C42,0
*SET,C43,0
*SET,C44,30.6E9
TB,ANEL,2,1,21,0
TBTEMP,0
TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0
TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33
TBDATA,,0,0,0,C44,0,0

TB,PIEZ,2,,0
*SET,E11,0
*SET,E12,-5.2
*SET,E21,0
*SET,E22,15.1
*SET,E31,0
*SET,E32,0
*SET,E41,0
*SET,E42,0
TBDATA,1,E11,E12,0,E21,E22,0
TBDATA,7,E31,E32,0,E41,E42,0
BETAD, 0.01

!-----
! Geometria
!-----
Rat_t_L = 0.1
Rat_t_W=4
beta_espesor=0.1

*SET,TP,2E-3
```

```
*SET,TB,TP*beta_espesor
```

```
*SET,T,TP+TB
```

```
*SET,W, T/Rat_t_W
```

```
*SET,L,T/Rat_t_L
```

```
K,1,
```

```
K,2,L,0
```

```
K,3,L,tp
```

```
K,4,0,tp
```

```
K,5,0,-tb
```

```
K,6,L,-tb
```

```
!area 1 base
```

```
A,1,2,6,5
```

```
!area 2 (piezoelectrico)
```

```
A,1,2,3,4
```

```
!-----
```

```
!MALLADO
```

```
!-----
```

```
NDIVX=120*0.1/Rat_t_L
```

```
NDIVY=4
```

```
asel,S,,1
```

```
AATT,1,,1
```

```
allsel
```

```
asel,S,,2
```

```
AATT,2,,2
```

```
allsel
```

```
LPLOT
```

```
LESIZE,1,,NDIVX
```

```
LESIZE,2,,NDIVY*2
```

```
LESIZE,5,,NDIVY
```

```
MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED
```

```
MSHAPE,0,2D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 2D
```

```
AMESH,ALL
```

```

!APLICO EMPOTRAMIENTO
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
allsel
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,-TB
D,ALL,UY,0
allsel
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO
allsel

!-----
! Solución:
!-----

/SOLU

!NLGEOM,1

F = 350

NSEL,S,LOC,X,L,L+L/NDIVX
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-F/W
allsel

solve

FINISH

!-----
! Postprocesado:
!-----
/POST1

```

```
PLNSOL, U, Y, 0, 1.0
PRNSOL, U, Y
PRNSOL, VOLT
```

- **Modelo 3D estático en análisis de segundo orden**

```
finish
```

```
/clear
```

```
!-----
```

```
! Preprocesador
```

```
!-----
```

```
/PREP7
```

```
ET, 1, SOLID186
```

```
ET, 2, SOLID226
```

```
KEYOPT, 2, 1, 1001
```

```
!-----
```

```
!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES
```

```
!-----
```

```
!* Prop. mat.1
```

```
!-----
```

```
MP, EX, 1, 195E9
```

```
MP, PRXY, 1, 0.3
```

```
MP, DENS, 1, 7750
```

```
!*Prop. mat.2
```

```
!-----
```

```
MP, DENS, 2, 7495
```

```
EMUNIT, EPZRO, 8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO
```

```
*SET, PER11, 763
```

```
*SET, PER22, 763
```

```
*SET, PER33, 658
```

```
MP, PERX, 2, PER11
```

```
MP, PERY, 2, PER22
```

```
MP, PERZ, 2, PER33
```

!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ

*SET,C11, 139E9

*SET,C12,77.8E9

*SET,C13,74.3E9

*SET,C22, 139E9

*SET,C23,74.3E9

*SET,C33, 115E9

*SET,C44,25.6E9

*SET,C55,25.6E9

*SET,C66,30.6E9

TB,ANEL,2,1,21,0

TBTEMP,0

TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0

TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33

TBDATA,,0,0,0,C44,0,0

TBDATA,,C55,0,C66,,,

!MATRIZ DE COEFICIENTES PIEZOELECTRICOS

TB,PIEZ,2,,0

*SET,E11,0

*SET,E12,0

*SET,E13,-5.2

*SET,E21,0

*SET,E22,0

*SET,E23,-5.2

*SET,E31,0

*SET,E32,0

*SET,E33,15.1

*SET,E41,0

*SET,E42,12.7

*SET,E43,0

*SET,E51,12.7

*SET,E52,0

*SET,E53,0

*SET,E61,0

*SET,E62,0

*SET,E63,0

TBDATA,1,E11,E12,E13,E21,E22,E23

TBDATA,7,E31,E32,E33,E41,E42,E43

TBDATA,13,E51,E52,E53,E61,E62,E63

! Geometria

!-----

Rat_t_L = 0.1

Rat_t_W = 4

beta_espesor=0.1

*SET,TP,2E-3

*SET,TB,TP*beta_espesor

*SET,T,TP+TB

*SET,W, T/Rat_t_W

*SET,L,T/Rat_t_L

K,1,

K,2,L,0,0,

K,3,L,W,0

K,4,0,W,

K,5,0,0,TP

K,6,L,0,TP

K,7,L,W,TP

K,8,0,W,TP

K,9,0,0,-TB

K,10,L,0,-TB

K,11,L,W,-TB

K,12,0,W,-TB

! volumen 1 (base)

V,1,2,3,4,9,10,11,12

! volumen 2 (piezoelectrico)

V,1,2,3,4,5,6,7,8

```

!MALLADO
!-----
NDIVX=120*0.1/Rat_t_L
NDIVY=4

vsel,S,,1
VATT,1,,1
allsel

vsel,S,,2
VATT,2,,2
allsel

LESIZE,6,,,NDIVX
LESIZE,8,,,NDIVY
LESIZE,5,,,4
LESIZE,13,,,8

MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED
MSHAPE,0,3D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 3D
VMESH,ALL

! APLICÓ EMPOTRAMIENTO
!-----
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
NSEL,R,LOC,Y,W/2
D,ALL,UY,0
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Z,-TB
D,ALL,UZ,0

ASEL,S,LOC,Z,0
DA,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO
FINISH

```

```
!-----  
! Resolucion  
!-----  
/SOLU  
  
F=350  
  
NSEL,S,LOC,X,L  
NSEL,R,LOC,Z,0  
F,ALL,FZ,-F/(NDIVY*2) !elementos cuadraticos "NDIVY*2"  
allsel  
  
NSEL,S,LOC,X,L  
NSEL,R,LOC,Z,0  
NSEL,R,LOC,Y,0  
F,ALL,FZ,-(F/(NDIVY*2))/2  
allsel  
  
NSEL,S,LOC,X,L  
NSEL,R,LOC,Z,0  
NSEL,R,LOC,Y,W  
F,ALL,FZ,-(F/(NDIVY*2))/2  
allsel  
  
ALLSEL  
  
NLGEOM,1  
  
SOLVE  
  
FINISH  
  
!-----  
! Post-Procesado  
!-----  
/POST1  
  
PLNSOL, U,Z, 0,1.0
```



```
PRNSOL,VOLT
```

```
PRNSOL,U,Z
```

- **Modelo 2D estático en análisis de segundo orden**

```
finish
```

```
/clear
```

```
!-----
```

```
! Preprocesador
```

```
!-----
```

```
/PREP7
```

```
ET,1,PLANE183
```

```
KEYOPT,1,3,0
```

```
ET,2,PLANE223
```

```
KEYOPT,2,1,1001
```

```
KEYOPT,2,3,0
```

```
!-----
```

```
!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES
```

```
!-----
```

```
!* Prop. mat.1
```

```
!-----
```

```
MP,EX,1,195E9
```

```
MP,PRXY,1,0.3
```

```
MP,DENS,1,7750
```

```
!*Prop. mat.2
```

```
!-----
```

```
MP,DENS,2,7495
```

```
EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO
```

```
*SET,PER11,763
```

```
*SET,PER22,658
```

```
*SET,PER33,763
```

```
MP,PERX,2,PER11
```

```
MP,PERY,2,PER22
```

```
MP,PERZ,2,PER33
!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ
*SET,C11,139E9
*SET,C12,74.3E9
*SET,C13,77.8E9
*SET,C14,0
*SET,C21,74.3E9
*SET,C22,115E9
*SET,C23,74.3E9
*SET,C24,0
*SET,C31,77.8E9
*SET,C32,74.3E9
*SET,C33,139E9
*SET,C34,0
*SET,C41,0
*SET,C42,0
*SET,C43,0
*SET,C44,30.6E9
TB,ANEL,2,1,21,0
TBTEMP,0
TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0
TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33
TBDATA,,0,0,0,C44,0,0

TB,PIEZ,2,,,0
*SET,E11,0
*SET,E12,-5.2
*SET,E21,0
*SET,E22,15.1
*SET,E31,0
*SET,E32,0
*SET,E41,0
*SET,E42,0
TBDATA,1,E11,E12,0,E21,E22,0
TBDATA,7,E31,E32,0,E41,E42,0

! Geometria
!-----
```

```
Rat_t_L = 0.01
Rat_t_W=4
beta_espesor=0.1

*SET,TP,2E-3
*SET,TB,TP*beta_espesor
*SET,T,TP+TB
*SET,W, T/Rat_t_W
*SET,L,T/Rat_t_L

K,1,
K,2,L,0
K,3,L,tp
K,4,0,tp
K,5,0,-tb
K,6,L,-tb
!area 1 base
A,1,2,6,5
!area 2 (piezoelectrico)
A,1,2,3,4

!MALLADO
!-----
NDIVX=120*0.1/Rat_t_L
NDIVY=4

asel,S,,1
AATT,1,,1
allsel

asel,S,,2
AATT,2,,2
allsel

LPLOT
LESIZE,1,,,NDIVX
LESIZE,2,,,NDIVY*2
LESIZE,5,,,NDIVY
```

```
MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED
MSHAPE,0,2D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 2D
AMESH,ALL

!-----
!APLICO EMPOTRAMIENTO
!-----
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
allsel

NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,-TB
D,ALL,UY,0
allsel

NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO
allsel

!-----
! Resolución:
!-----

/SOLU

F = 350

NSEL,S,LOC,X,L,L+L/NDIVX
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-F/W
allsel

NLGEOM,1

solve
```

FINISH

!-----

! Postprocesado:

!-----

/POST1

PLNSOL, U, Y, 0, 1.0

PRNSOL, U, Y

PRNSOL, VOLT

- **Modelo 2D dinámico en análisis de segundo orden**

finish

/clear

!-----

! Preprocesador

!-----

/PREP7

ET, 1, PLANE183

KEYOPT, 1, 3, 0

ET, 2, PLANE223

KEYOPT, 2, 1, 1001

KEYOPT, 2, 3, 0

!-----

!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES

!-----

!* Prop. mat.1

!-----

MP, EX, 1, 195E9

MP, PRXY, 1, 0.3

MP, DENS, 1, 7750

!-----

!*Prop. mat.2

!-----

MP, DENS, 2, 7495

EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO

*SET,PER11,763

*SET,PER22,658

*SET,PER33,763

MP,PERX,2,PER11

MP,PERY,2,PER22

MP,PERZ,2,PER33

!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ

*SET,C11,139E9

*SET,C12,74.3E9

*SET,C13,77.8E9

*SET,C14,0

*SET,C21,74.3E9

*SET,C22,115E9

*SET,C23,74.3E9

*SET,C24,0

*SET,C31,77.8E9

*SET,C32,74.3E9

*SET,C33,139E9

*SET,C34,0

*SET,C41,0

*SET,C42,0

*SET,C43,0

*SET,C44,30.6E9

TB,ANEL,2,1,21,0

TBTEMP,0

TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0

TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33

TBDATA,,0,0,0,C44,0,0

TB,PIEZ,2,,0

*SET,E11,0

*SET,E12,-5.2

*SET,E21,0

*SET,E22,15.1

*SET,E31,0

*SET,E32,0

```

*SET,E41,0
*SET,E42,0
TBDATA,1,E11,E12,0,E21,E22,0
TBDATA,7,E31,E32,0,E41,E42,0

! Geometria
!-----
Rat_t_L = 0.1
Rat_t_W=4
beta_espesor=3

*SET,TP,2E-3
*SET,TB,TP*beta_espesor
*SET,T,TP+TB
*SET,W, T/Rat_t_W ! 0.36E-2
*SET,L,T/Rat_t_L

K,1,
K,2,L,0
K,3,L,tp
K,4,0,tp
K,5,0,-tb
K,6,L,-tb
!area 1 base
A,1,2,6,5
!area 2 (piezoelectrico)
A,1,2,3,4

!MALLADO
!-----
*SET,NDIVX,120*0.1/Rat_t_L
*SET,NDIVY,4

asel,S,,1
AATT,1,,1
allsel

asel,S,,2

```

AATT,2,,2

allsel

LPLOT

LESIZE,1,,,NDIVX

LESIZE,2,,,NDIVY*2

LESIZE,5,,,NDIVY

MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED

MSHAPE,0,2D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 2D

AMESH,ALL

!APLICO EMPOTRAMIENTO

NSEL,S,LOC,X,0

D,ALL,UX,0

allsel

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,-TB

D,ALL,UY,0

allsel

NSEL,S,LOC,Y,0

D,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO

allsel

!-----

! Solución:

!-----

/SOLU

ANTYPE,4

NLGEOM,1

TRNOPT,FULL


```

LUMPM,0
OUTRES,ERASE
OUTRES,BASIC,1

deltaTime=0.0001
Betad_fact = 0.01

! EN EL INSTANTE T=0s
!-----
TIME,0.0000000001
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,1,

! EN EL INSTANTE T=0.001s
!-----
*SET,F,700
NSEL,S,LOC,X,L,L+L/NDIVX
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-F/W
allsel
TIME,0.001
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,2,

! EN EL INSTANTE T=0.5s
!-----
TIME,0.1
AUTOTS,-1

```

```
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,3,
```

```
LSSOLVE,1,3,1
FINISH
```

```
!-----
! Postprocesado:
!-----
/POST26
NSOL,2,2,U,Y, UY_2
STORE,MERGE
PRVAR,2
PLVAR,2
```

- **Modelo 2D transitorio en análisis de primer orden**

```
finish
```

```
/clear
```

```
!-----
! Preprocesador
!-----
/PREP7
ET,1,PLANE183
KEYOPT,1,3,0
ET,2,PLANE223
KEYOPT,2,1,1001
KEYOPT,2,3,0
```

```
!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES
!-----
!* Prop. mat.1
!-----
MP,EX,1,195E9
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,7750

!*Prop. mat.2
!-----
MP,DENS,2,7495
EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO
*SET,PER11,763
*SET,PER22,658
*SET,PER33,763
MP,PERX,2,PER11
MP,PERY,2,PER22
MP,PERZ,2,PER33

!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ
*SET,C11,139E9
*SET,C12,74.3E9
*SET,C13,77.8E9
*SET,C14,0
*SET,C21,74.3E9
*SET,C22,115E9
*SET,C23,74.3E9
*SET,C24,0
*SET,C31,77.8E9
```

```
*SET,C32,74.3E9
*SET,C33,139E9
*SET,C34,0
*SET,C41,0
*SET,C42,0
*SET,C43,0
*SET,C44,30.6E9

TB,ANEL,2,1,21,0
TBTEMP,0
TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0
TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33
TBDATA,,0,0,0,C44,0,0
TB,PIEZ,2,,0
*SET,E11,0
*SET,E12,-5.2
*SET,E21,0
*SET,E22,15.1
*SET,E31,0
*SET,E32,-5.2
*SET,E41,0
*SET,E42,0
TBDATA,1,E11,E12,0,E21,E22,0
TBDATA,7,E31,E32,0,E41,E42,0

! Geometria
!-----
Rat_t_L = 0.03
Rat_t_W=4
```

```
beta_espesor=0.3

*SET,TP,2E-3

*SET,TB,TP*beta_espesor

*SET,T,TP+TB

*SET,W, T/Rat_t_W

*SET,L,T/Rat_t_L

K,1,

K,2,L,0

K,3,L,tp

K,4,0,tp

K,5,0,-tb

K,6,L,-tb

!area 1 base

A,1,2,6,5

!area 2 (piezoelectrico)

A,1,2,3,4

!MALLADO

!-----

*SET,NDIVX,50*0.1/Rat_t_L

*SET,NDIVY,4

asel,S,,1

AATT,1,,1

allsel

asel,S,,2

AATT,2,,2
```

```
!AATT,1,,1
allsel
LPLOT
LESIZE,1,,NDIVX
LESIZE,2,,NDIVY*2
LESIZE,5,,NDIVY

MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED
MSHAPE,0,2D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 2D
AMESH,ALL
!*
!*
!APLICO EMPOTRAMIENTO
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
allsel
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,-TB
D,ALL,UY,0
allsel
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO
allsel

!-----
! Solución:
!-----

/SOLU
```

```
ANTYPE,4
```

```
!NLGEOM,1
```

```
TRNOPT,FULL
```

```
LUMPM,0
```

```
OUTRES,ERASE
```

```
OUTRES,BASIC,1
```

```
deltaTime=0.00005
```

```
Betad_fact = 0.00001
```

```
! EN EL INSTANTE T=0s
```

```
!-----
```

```
TIME,0.0000000001
```

```
AUTOTS,-1
```

```
DELTIM,0.001, , ,
```

```
ALPHAD,0
```

```
BETAD,Betad_fact
```

```
KBC,0
```

```
TSRES,ERASE
```

```
LSWRITE,1,
```

```
! EN EL INSTANTE T=0.001s
```

```
!-----
```

```
*SET,F,350*2
```

```
NSEL,S,LOC,X,L,L+L/NDIVX
```

```
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-F/W
allsel
TIME,0.001
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,2,

! EN EL INSTANTE T=0.005s
!-----

TIME,0.005
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,3,

LSSOLVE,1,3,1
FINISH

!-----

! Postprocesado:
```



```
!-----
```

```
/POST26
```

```
NSOL,2,2,U,Y, UY_2
```

```
STORE,MERGE
```

```
PRVAR,2
```

```
PLVAR,2
```

- **Modelo 2D transitorio en análisis de segundo orden**

```
finish
```

```
/clear
```

```
!-----
```

```
! Preprocesador
```

```
!-----
```

```
/PREP7
```

```
ET,1,PLANE183
```

```
KEYOPT,1,3,0
```

```
ET,2,PLANE223
```

```
KEYOPT,2,1,1001
```

```
KEYOPT,2,3,0
```

```
!DEFINO PROPIEDADES MATERIALES
```

```
!-----
```

```
!* Prop. mat.1
```

```
!-----
```

```
MP,EX,1,195E9
```

```
MP,PRXY,1,0.3
```

```
MP,DENS,1,7750
```

```
!*Prop. mat.2
```

!-----

MP,DENS,2,7495

EMUNIT,EPZRO,8.854E-12 !DEFINO PERMITIVIDAD EN EL VACÍO

*SET,PER11,763

*SET,PER22,658

*SET,PER33,763

MP,PERX,2,PER11

MP,PERY,2,PER22

MP,PERZ,2,PER33

!DEFINO MATRIZ DE RIGIDEZ

*SET,C11,139E9

*SET,C12,74.3E9

*SET,C13,77.8E9

*SET,C14,0

*SET,C21,74.3E9

*SET,C22,115E9

*SET,C23,74.3E9

*SET,C24,0

*SET,C31,77.8E9

*SET,C32,74.3E9

*SET,C33,139E9

*SET,C34,0

*SET,C41,0

*SET,C42,0

*SET,C43,0

*SET,C44,30.6E9

TB,ANEL,2,1,21,0

```
TBTEMP,0
TBDATA,,C11,C12,C13,0,0,0
TBDATA,,C22,C23,0,0,0,C33
TBDATA,,0,0,0,C44,0,0
TB,PIEZ,2,,,0
*SET,E11,0
*SET,E12,-5.2
*SET,E21,0
*SET,E22,15.1
*SET,E31,0
*SET,E32,-5.2
*SET,E41,0
*SET,E42,0
TBDATA,1,E11,E12,0,E21,E22,0
TBDATA,7,E31,E32,0,E41,E42,0

! Geometria
!-----
Rat_t_L = 0.03
Rat_t_W=4
beta_espesor=0.3

*SET,TP,2E-3
*SET,TB,TP*beta_espesor
*SET,T,TP+TB
*SET,W, T/Rat_t_W ! 0.36E-2
*SET,L,T/Rat_t_L
```

```
K,1,
K,2,L,0
K,3,L,tp
K,4,0,tp
K,5,0,-tb
K,6,L,-tb
!area 1 base
A,1,2,6,5
!area 2 (piezoelectrico)
A,1,2,3,4

!MALLADO
!-----
*SET,NDIVX,50*0.1/Rat_t_L
*SET,NDIVY,4
asel,S,,1
AATT,1,,1
allsel
asel,S,,2
AATT,2,,2
!AATT,1,,1
allsel
LPLOT
LESIZE,1,,NDIVX
LESIZE,2,,NDIVY*2
LESIZE,5,,NDIVY

MSHKEY,1 !MALLADO MAPPED
```

```
MSHAPE,0,2D !0 ES MALLADO HAEXAÉDRICO O CUADRILÁTERO Y 2D
AMESH,ALL

!APLICO EMPOTRAMIENTO
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
allsel
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,-TB
D,ALL,UY,0
allsel
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,VOLT,0 !IMPONGO VOLTAJE NULO EN LA BASE DEL PIEZOELÉCTRICO
allsel

!-----
! Solución:
!-----

/SOLU

ANTYPE,4

NLGEOM,1
!NLGEOM,0
!PSTRES,1
NSUBST,5,0,0

TRNOPT,FULL
```

```
LUMPM,0
OUTRES,ERASE
OUTRES,BASIC,1

deltaTime=0.00000005
Betad_fact = 0.01

! EN EL INSTANTE T=0s
!-----
TIME,0.0000000001
AUTOTS,-1
DELTIM,0.001, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,1,

! EN EL INSTANTE T=0.001s
!-----
*SET,F,350*2
NSEL,S,LOC,X,L,L+L/NDIVX
NSEL,R,LOC,Y,0
F,ALL,FY,-F/W
allsel
TIME,0.001
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
```

```
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,2

! EN EL INSTANTE T=0.015s
!-----
TIME,0.015
AUTOTS,-1
DELTIM,deltaTime, , ,
ALPHAD,0
BETAD,Betad_fact
KBC,0
TSRES,ERASE
LSWRITE,3

LSSOLVE,1,3,1
FINISH

!-----
! Postprocesado:
!-----
/POST26
NSOL,2,2,U,Y, UY_2
STORE,MERGE
PRVAR,2
PLVAR,2
```