



Universidad de Sevilla

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS
DIFERENCIALES ORDINARIOS. COSTE DE
CONTROLES RÁPIDOS. APLICACIONES

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Autor:

Alejandro Rodríguez Rodríguez

Tutor:

Manuel González Burgos

Junio 2022

Agradecimientos

*A mi familia, en especial a mis padres,
por aguantarme durante estos duros años
de estudio y esfuerzo.*

*A mi tutor,
por descubrirme las posibilidades de las ecuaciones
diferenciales y sus múltiples aplicaciones en nuestras vidas.*

*A los profesores de la carrera,
por mostrarme el maravilloso mundo de las matemáticas y la física.*

Índice general

1. Introducción	11
2. El Problema de Cauchy para un Sistema Diferencial Ordinario Lineal con Datos no Continuos	15
3. Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales. El Gramiano de Controlabilidad. Control de Norma Mínima	27
3.1. Problema de Estado. Definiciones de Controlabilidad	27
3.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	29
3.3. Controlabilidad. El Gramiano de Controlabilidad	29
3.4. Control de Norma Mínima	43
4. La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales Autónomos y No Autónomos	47
4.1. La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales Autónomos	47
4.2. Forma canónica de Brunovsky	54
4.3. La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales No Autónomos	56
5. Método de Unicidad de Hilbert	61
6. Coste del Control	65
7. Aplicaciones Prácticas	73
7.1. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado	73
7.2. Oscilador Armónico Lineal	75
7.3. Circuito RLC	76
7.4. Amortiguador de un Coche	77
7.5. Sistema de Resortes Amortiguados	79
8. Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales	83
8.1. Resultados Generales	83

8.2. Controlabilidad y Linealización	85
8.3. Un Resultado Sobre la Controlabilidad Global	85
9. Conclusión	87

Resumen

En este trabajo vamos a considerar un sistema diferencial ordinario lineal de la forma:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

con $T > 0$, $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$, donde $y_0 \in \mathbb{R}^n$ está dado. Nuestro objetivo será estudiar si existe una función $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ conocida como función de control, de modo que la solución $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ alcanza un determinado estado $y_d \in \mathbb{R}^n$ en el tiempo $T > 0$. Esto es lo que se conoce como controlabilidad.

Para ello, comenzaremos viendo que este sistema está bien planteado. Posteriormente introduciremos cuatro conceptos de controlabilidad: controlabilidad exacta, controlabilidad exacta a trayectorias, controlabilidad nula y controlabilidad aproximada. Probaremos, que para un sistema diferencial ordinario lineal estos conceptos son equivalentes. Introduciremos el concepto de gramiano de controlabilidad, gracias al cual daremos una primera condición necesaria y suficiente de controlabilidad para el sistema (1). Veremos que existen infinitos controles que nos llevan al estado deseado y estudiaremos el que tiene norma mínima.

La condición necesaria y suficiente de controlabilidad usando el gramiano nos implica conocer una matriz fundamental del sistema $y' = A(t)y$, $t \in [0, T]$. Es por esto que buscamos otra condición necesaria y suficiente pero que sea puramente algebraica. Para sistemas autónomos será la denominada Condición de Rango de Kalman. Así mismo, encontraremos una forma equivalente de expresar nuestro sistema, gracias a la forma canónica de Brunovsky que nos facilitará los cálculos. También estudiaremos el denominado Método de Unicidad de Hilbert que nos permite caracterizar el conjunto de estados alcanzables para (1) cuando $y_0 = 0$.

Analizaremos cómo se ve afectado el coste de control cuando disminuimos el tiempo T en el que queremos alcanzar el objetivo. A continuación, a modo de ejemplo, veremos algunas aplicaciones de la Condición de Rango de Kalman a diversos sistemas físicos sencillos como puede ser un oscilador armónico o un circuito RLC, lo cual nos dará una perspectiva de la aplicabilidad de estos problemas a otros ámbitos de la ciencia e ingeniería.

Finalmente, introduciremos algunos resultados para sistemas no lineales.

Abstract

In this work we are going to consider a linear ordinary differential system of the form:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

with $T > 0$, $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ and $y_0 \in \mathbb{R}^n$ is given. The aim of this work is to study whether there exists a function $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, known as control function, such that the solution $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ of (2) reaches a certain state $y_d \in \mathbb{R}^n$ at time $T > 0$. This is what is known as controllability problem.

To this end, we will begin by seeing that this system is well posed. Then we will introduce four concepts of controllability; exact controllability, exact controllability to trajectories, null controllability and approximate controllability. We will prove that for system (2) these concepts are equivalent. We will introduce the concept of the controllability gramian, which will provide a first necessary and sufficient condition of controllability for system (2). We will see that there are infinite controls that lead us to the desired state and we will study the one that has the minimum norm.

The controllability condition provided by the controllability gramian involves the computation of a fundamental matrix for system $y' = A(t)y$, $t \in [0, T]$. This is why we are looking for another necessary and sufficient condition purely algebraic. If the system is autonomous, it will be the so-called Kalman Rank Condition. In addition, thanks to the Brunovsky canonical form we will be able to find an equivalent way to express our system in which the computations will be easier. We will also study the so-called Hilbert Uniqueness Method which allows us to characterize the set of reachable states for system (2) when $y_0 = 0$.

We will analyze how the control cost is affected when we decrease the time T in which we want to reach the target. Next, as an example, we will see some applications of the Kalman Range Condition to several simple physical systems such as a harmonic oscillator or a RLC circuit, which will give us a perspective of the applicability of these problems to other fields of science and engineering.

Finally, we will introduce some results for nonlinear systems.

Capítulo 1

Introducción

En la vida diaria, cuando se habla de ecuaciones diferenciales, normalmente se piensa en algo bastante complicado y con unos conceptos difíciles de comprender. No obstante, una ecuación diferencial no es más que una ecuación donde aparecen derivadas. En general no es posible calcular analíticamente la solución general de sistemas diferenciales.

Ya sabemos la importancia que tienen en las matemáticas y la física las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como, los sistemas de estas. En ocasiones se piensa que las ecuaciones diferenciales simplemente se limitan a eso, el mundo de las matemáticas, la física y otras ramas de la ciencia e ingeniería, y no se es consciente de la importancia que tienen en nuestro día a día. Sin las ecuaciones diferenciales, el ordenador con el que estoy escribiendo estas páginas no podría funcionar, o el autobús que todo los días me lleva a la facultad no existiría. Tampoco podría, al llegar a casa, abrir la nevera y tomar un poco de agua fría para refrescarme después del esfuerzo. Para que todos estos utensilios que nos hacen la vida más fácil funcionen correctamente es necesario que se estudien las ecuaciones diferenciales que regulan su funcionamiento.

Cabría pensar que los ejemplos mencionados previamente solo se corresponden con diferentes, al fin y al cabo, aparatos tecnológicos. Todavía permanece en nuestras cabezas (y por desgracia parece que el recuerdo va a tardar en desaparecer) las famosas curvas de evolución de la pandemia del Covid-19. Cuando todo esto comenzó, en marzo de 2020, se comenzaron a hacer predicciones de cuando alcanzaríamos el famoso pico de la curva de la pandemia. Escuchábamos en los medios de comunicación que las matemáticas decían que para finales de abril alcanzaríamos el pico de la curva, a partir del cual el número de infectados iría reduciéndose. El poder decir que el pico se alcanzaría en esas fechas se consiguió haciendo uso de unos modelos de evolución de pandemias que se basaban en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

A partir de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden surgir distintos tipos de problemas. Nosotros vamos a trabajar con un tipo de problema de control. Como su propio nombre indica, en este tipo de problemas, nuestro objetivo es controlar nuestro sistema, es decir, ver si añadiéndole algún tipo de fuente o función podemos llevarlo a un estado deseado, ya sea minimizando una determinada función (control óptimo) o alcanzar un cierto estado en un determinado tiempo (problema de controlabilidad). Este será el tipo de

problema en el que nos centremos en este trabajo.

En nuestro día a día encontramos multitud de situaciones en las que queremos controlar el comportamiento de cierto sistema para alcanzar un fin deseado. Por ejemplo, encendemos el aire acondicionado para que una determinada habitación alcance una temperatura más cómoda. Muchos fenómenos reales se pueden modelar (de forma bastante simplificada) mediante un sistema diferencial ordinario,

$$\begin{cases} y' = A(t)y \text{ en } [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

donde $T > 0$ y $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, con $n \geq 1$. Es posible actuar sobre el sistema mediante un control que va a cambiar la respuesta de este,

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u \text{ en } [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

donde $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, y el control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

¿Es posible que variando este nuevo factor que introducimos podamos alcanzar una determinada solución y que satisfice $y(T) = y_d$? Este tipo de problemas es lo que estudiamos con los problemas de controlabilidad.

En los problemas de controlabilidad buscamos encontrar una función que nos permita direccionar el sistema hacia un estado deseado en un tiempo prefijado.

Por ejemplo, supongamos que lanzamos un cohete que queremos que llegue a la Luna en una semana. Mediante un problema de controlabilidad pretendemos encontrar una función de cuadrado integrable mediante la que consigamos que al cabo de una semana (el tiempo objetivo) nuestro cohete llegue a la luna (estado deseado).

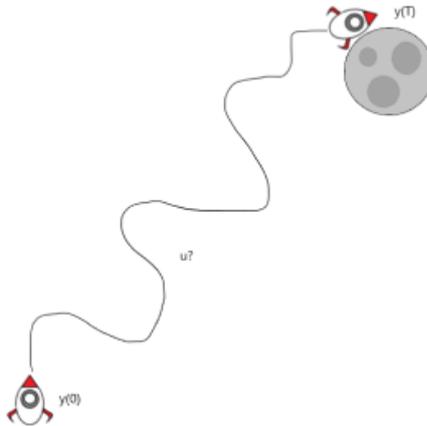


Figura 1.1: Ejemplo cohete

Pero se nos presenta una serie de preguntas. ¿Todos los problemas son controlables? ¿Podemos controlarlos todos de la misma forma? ¿Cómo podemos encontrar dicho control?

¿Cómo se ve afectado el coste del control con el tiempo en el que queremos conseguir nuestro estado? Es la respuesta a esta y muchas otras preguntas, las que pretendemos resolver en estas líneas. Pero como no podemos empezar la casa por el tejado, en primer lugar hemos de recordar una serie de conceptos básicos relacionados con los sistemas diferenciales ordinarios que nos serán útiles para el desarrollo de los resultados que queremos obtener.

Capítulo 2

El Problema de Cauchy para un Sistema Diferencial Ordinario Lineal con Datos no Continuos

Empecemos aclarando cierta notación general que vamos a seguir. Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por \mathbb{R}^n el conjunto de los vectores columna n -dimensionales con coeficientes reales. Denotaremos $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ y $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$, respectivamente, al producto escalar y la norma euclídea en \mathbb{R}^n . En ocasiones, omitiremos el subíndice \mathbb{R}^n , entendiéndose que el producto escalar y la norma están en el espacio correspondiente, para simplificar la notación. Por otro lado, para $n, m \in \mathbb{N}$, denotamos:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) = \{A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, A \text{ es aplicación lineal y continua}\}.$$

El espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ se identifica con el espacio vectorial de las matrices formadas por n filas y m columnas. En estos espacios, denotaremos por $\|\cdot\|_S$ a la norma espectral en dicho espacio, la cual viene dada por:

$$\|A\|_S = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|},$$

para cualquier $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Si $n = m$ utilizaremos la notación $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que no es más que el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n .

Si $a, b \in \mathbb{R}$, cumpliéndose que $a < b$, denotamos:

$$L^2(a, b; \mathbb{R}^n) = \{f : f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ medible con } \|f\|_{2;(a,b)} < \infty\},$$

siendo:

$$\|f\|_{2;(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Es bien sabido que $(L^2(a, b; \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{2;(a,b)})$ es un espacio de Hilbert para el siguiente producto escalar:

$$(f, g)_{2;(a,b)} = \int_a^b (f(t), g(t))_{\mathbb{R}^n} dt, \quad \forall f, g \in L^2(a, b; \mathbb{R}^n).$$

Volviendo a fijar $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, denotamos:

$$C^0([a, b]; \mathbb{R}^n) = \{f : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ es continua en } [a, b]\},$$

el cual es un espacio de Banach para la norma:

$$|f|_{0;[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Si ahora $k \in \mathbb{N}$, introducimos:

$$C^k([a, b]; \mathbb{R}^n) = \{f \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n) : \exists f^{(l)} \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n), \forall l : 1 \leq l \leq k\},$$

que es un espacio de Banach para la norma:

$$|f|_{k;[a,b]} = |f|_{0;[a,b]} + \max_{1 \leq l \leq k} |f^{(l)}|_{0;[a,b]}.$$

Finalmente, dados dos espacios de Banach X e Y , la norma de una aplicación $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ vendrá dada por:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

En este capítulo analizaremos el problema de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy asociado al sistema diferencial ordinario (s.d.o.) lineal:

$$y' = A(t)y + b(t), \quad t \in [0, T],$$

con $T > 0$ dado, y

$$A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ y } b \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n). \quad (2.1)$$

Para ello, consideramos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Es conocido que si $b \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$, el problema de Cauchy (2.2) tiene una única solución maximal $y \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ que además sabemos que depende de manera continua de los datos, es decir, existe un $c > 0$ tal que:

$$|y|_{1;[a,b]} \leq c(|y_0|_{\mathbb{R}^n} + |b|_{0;[a,b]}).$$

Es importante recordar que si $F \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ es una matriz fundamental (m.f.) del sistema homogéneo $y' = A(t)y$ asociado a (2.2), es decir, si $F \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ verifica

$$F'(t) = A(t)F(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

y existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $\det F(t_0) \neq 0$, entonces la única solución maximal de (2.2) viene dada por la **Fórmula de Duhamel**:

$$y(t; 0, y_0) = F(t)F^{-1}(0)y_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)b(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

No obstante, en el problema (2.2) tenemos que $b(t) \notin C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Cabría pensar que esto puede provocar que este problema no esté bien planteado. Sin embargo, veremos que podemos encontrar una solución maximal de (2.2). Antes de eso vamos a recordar una serie de conceptos y propiedades que emplearemos para la prueba:

Definición 2.1. Consideremos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e (Y, d) un espacio métrico. Sea $u : I \rightarrow Y$ una función. Se define la **variación puntual** de u en el intervalo I como

$$\text{Var}_I u := \sup \left\{ \sum_{n=1}^k d(u(x_n), u(x_{n-1})) \right\},$$

donde estamos tomando el supremo en todas las particiones $P := \{x_0, \dots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, del intervalo I .

Diremos que una función $u : I \rightarrow Y$ tiene **variación acotada** si $\text{Var}_I u < \infty$.

Si la función $u : I \rightarrow Y$ verifica que $\text{Var}_{[a,b]} u < \infty$ para todo intervalo $[a, b] \subseteq I$ diremos que u tiene **variación acotada local**.

Observación 2.1. Si el intervalo I fuera degenerado, no habría particiones posibles y en ese caso

$$\text{Var}_I u := 0.$$

Introducimos ahora una serie de resultados (que podemos encontrar en [7]) que nos van a ser útiles posteriormente:

Teorema 2.1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado y sea $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces para cada intervalo $J \subseteq I$ se tiene:

$$\text{Var}_J u = \sup_J u - \inf_J u.$$

En particular, u tiene variación acotada local en I . Además, u tendrá variación acotada (global) si y solo si está acotada.

Demostración. Supongamos que u es una función creciente en I (si u fuera decreciente la prueba sería análoga). Entonces, para cada partición $P := \{x_0, \dots, x_k\}$ de J , con $J \subseteq I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |u(x_n) - u(x_{n-1})| &= \sum_{n=1}^k (u(x_n) - u(x_{n-1})) \\ &= u(x_k) - u(x_0) \leq \sup_J u - \inf_J u. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos el supremo sobre todas las particiones de J se tiene que:

$$\text{Var}_J u \leq \sup_J u - \inf_J u.$$

Pasamos a probar la otra desigualdad. Consideremos la partición $P := \{a, b\} \subset J$, con $\inf J \leq a < b \leq \sup J$. Entonces,

$$u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)| \leq \text{Var}_J u.$$

Ahora bien, si $\sup J \in J$ tomamos $b = \sup J$, lo cual, al ser u una función creciente, nos lleva a que $u(b) = \sup_J u$. Si $\sup J \notin J$ tomamos $b \rightarrow \sup J$ y por tanto tendremos que $u(b) \rightarrow \sup_J u$. Para a hacemos un razonamiento similar pero con el $\inf J$. Por tanto, acabamos de probar que:

$$\sup_J u - \inf_J u \leq \text{Var}_J u.$$

Con esto concluye la prueba. \square

Proposición 2.2. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado e (Y, d) un espacio métrico. Sea $u : I \rightarrow Y$ una función. Si $c \in I$, entonces:*

$$\text{Var}_{I \cap (-\infty, c]} u + \text{Var}_{I \cap [c, \infty)} u = \text{Var} u.$$

Demostración. Sea $I_1 := I \cap (-\infty, c]$ e $I_2 := I \cap [c, \infty)$. Sea $P := \{x_0, \dots, x_k\}$ y $Q := \{y_0, \dots, y_l\}$ particiones de I_1 e I_2 respectivamente. Es inmediato comprobar que $P \cup Q$ es una partición de I y por tanto:

$$\sum_{n=1}^k d(u(x_n), u(x_{n-1})) + \sum_{m=1}^l d(u(y_m), u(y_{m-1})) \leq \text{Var} u.$$

Ahora tomamos el supremo sobre todas las particiones P de I_1 y posteriormente sobre las particiones Q de I_2 , lo que nos conduce a:

$$\text{Var}_{I_1} u + \text{Var}_{I_2} u \leq \text{Var} u.$$

Pasamos a probar la otra desigualdad. Sea $P := \{x_0, \dots, x_k\}$ una partición de I . Sea $l \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x_{l-1} \leq c \leq x_l$. Entonces las particiones $P_1 := \{x_0, \dots, x_{l-1}, c\}$ y $P_2 := \{c, x_l, \dots, x_k\}$ son particiones de I_1 e I_2 respectivamente. Ahora bien:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k d(u(x_n), u(x_{n-1})) &\leq \sum_{n=1}^{l-1} d(u(x_n), u(x_{n-1})) + d(u(c), u(x_{l-1})) + d(u(x_l), u(c)) \\ &+ \sum_{n=l+1}^k d(u(x_n), u(x_{n-1})) \leq \text{Var}_{I_1} u + \text{Var}_{I_2} u. \end{aligned}$$

Basta con tomar supremo para concluir la prueba. \square

Teorema 2.3 (Variación puntual indefinida). *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado e (Y, d) un espacio métrico. Fijemos $x_0 \in I$ y sea u una función con variación acotada local. Definimos para cada $x \in I$:*

$$V(x) := \begin{cases} \text{Var}_{[x_0, x]} u & \text{si } x \geq x_0, \\ -\text{Var}_{[x, x_0]} u & \text{si } x \leq x_0. \end{cases}$$

Entonces para todo $x, y \in I$, con $x < y$,

$$d(u(y), u(x)) \leq V(y) - V(x) = \text{Var}_{[x, y]} u.$$

En particular, V es creciente y u continua para casi todo I . Además, si Y es un espacio métrico completo, entonces existe:

$$u_-(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} u(y), \quad u_+(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} u(y)$$

para todo $x \in I$. Por último, si $Y = \mathbb{R}$, las funciones $V \pm u$ son crecientes.

Omitimos la prueba de este teorema. La prueba puede encontrarse en [7].

Teorema 2.4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio normado, sea $u : I \rightarrow Y$ una función con variación acotada local, y sea $E := \{x \in I : u \text{ es diferenciable en } x\}$. Entonces*

$$|u'(x)| = V'(x)$$

para casi todo $x \in E$.

Al igual que el Teorema anterior, omitiremos la prueba y la podemos encontrar en [7].

Observación 2.2. El concepto de función con variación acotada también sirve para funciones $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ simplemente si u tiene variación acotada componente a componente.

Pasemos ahora a probar un resultado importante sobre derivabilidad de funciones de variación acotada en I . Se tiene:

Teorema 2.5. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado y sea una función $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función con variación acotada local. Entonces u es diferenciable en casi todo I , $u \in L^1_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$ y para cada intervalo compacto $J \subseteq I$ se tiene:*

$$\int_J |u'(x)| dx \leq \text{Var}_J u. \quad (2.4)$$

En particular, si u tiene variación acotada global, entonces $u' \in L^1(I; \mathbb{R}^n)$ y

$$\|u'\|_{1; I} \leq \text{Var}_I u.$$

Para la demostración de este resultado, necesitamos del Teorema de Diferenciación de Lebesgue:

Teorema 2.6. *Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado y sea $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, u es diferenciable para casi todo I .*

Omitiremos la prueba de este Teorema, pero podemos encontrarla en [7].

Pasamos a la demostración del Teorema 2.5.

Demostración del Teorema 2.5. Sea u_i con $i = 1, \dots, n$ cada una de las componentes de la función u . Sea V_{u_i} definida como en el Teorema 2.3, en el cual vimos que las funciones $V_{u_i} \pm u_i$ son crecientes. Así,

$$u_i = \frac{1}{2}(V_{u_i} + u_i) - \frac{1}{2}(V_{u_i} - u_i)$$

no es más que la diferencia de dos funciones crecientes. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue que nos lleva a que cada una de las componentes u_i son diferenciables para casi todo I , por lo cual acabamos de probar que u es diferenciable en casi todo I .

Pasamos a demostrar (2.4). Sea $[a, b] \subseteq I$ un intervalo compacto. Como V_u es creciente, del Teorema 2.3 y del Teorema 2.4 obtenemos:

$$\int_a^b |u'(x)| dx = \int_a^b V'_u dx \leq V_u(b) - V_u(a) = \text{Var}_{[a,b]} u.$$

Ahora, si $J \subseteq I$ es un intervalo no vacío, construimos una secuencia creciente de intervalos $[a_n, b_n]$ tal que $J = \bigcup_n [a_n, b_n]$. Entonces de la Proposición 2.2 se tiene:

$$\int_{a_n}^{b_n} |u'(x)| dx \leq \text{Var}_{[a_n, b_n]} u \leq \text{Var}_J u.$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y usando el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue concluimos la prueba. \square

Pasamos a definir el concepto de función absolutamente continua.

Definición 2.2. Consideremos $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo no degenerado, e (Y, d) un espacio métrico. Se dice que $u : I \rightarrow Y$ es una función **absolutamente continua** en I si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^n d(u(b_i), u(a_i)) \leq \varepsilon,$$

para todo número finito de intervalos $\{(a_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, tales que $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$, si $i \neq j$ con $[a_i, b_i] \subseteq I$ y

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta.$$

Se dirá que $u : I \rightarrow Y$ es **localmente absolutamente continua** si es absolutamente continua en cualquier intervalo $[a, b] \subseteq I$.

El concepto de función absolutamente continua en I es fundamental para probar que el problema (2.2) está bien planteado. Además, necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 2.7. Sea $f \in L^1(0, T)$, con $T > 0$, y definamos

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Entonces se tiene que:

1. F es absolutamente continua en $[0, T]$.
2. F es derivable en casi todo $[0, T]$ y $F'(t) = f(t)$ para casi todo $t \in [0, T]$.

Para poder demostrar este teorema, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 2.8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue que verifica:

$$\int_a^t f(s) ds = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Entonces $f(t) = 0$ para casi todo $t \in [a, b]$.

Demostración. Sea $f \in L^1(a, b)$ en las hipótesis del lema. Es fácil ver que para todo $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ se tiene que:

$$\int_\alpha^\beta f(s) ds = \int_a^\beta f(s) ds - \int_a^\alpha f(s) ds = 0.$$

Sea $U \subset [a, b]$ un conjunto abierto. Entonces, existe una sucesión de intervalos abiertos $\{(\alpha_n, \beta_n)\}_{n \geq 1}$ tal que $(\alpha_n, \beta_n) \subset U$, son disjuntos y verifican que:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

Si denotamos por 1_A la función característica en el conjunto A (aquella función que vale 1 en A y 0 en el resto) y

$$U_n := \bigcup_{k=1}^n (\alpha_k, \beta_k), \quad n \geq 1,$$

se tiene $1_{U_n} f \rightarrow 1_U f$ casi por doquier en $[a, b]$ y $|1_{U_n}(t)f(t)| \leq |f(t)|$, para casi todo $t \in [a, b]$. Como $f \in L^1(a, b)$, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y llegamos a:

$$\begin{aligned} \int_U f(s) ds &= \int_a^b 1_U(s) f(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b 1_{U_n}(s) f(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n 1_{(\alpha_k, \beta_k)}(s) f(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Consideramos ahora un conjunto compacto $K \subseteq [a, b]$. De la propiedad anterior deducimos:

$$\int_K f(s) ds = \int_a^b f(s) ds - \int_{(a,b) \setminus K} f(s) ds = 0, \quad \forall K \subseteq [a, b] \text{ compacto.}$$

Veamos que $f \equiv 0$ en $[a, b]$. Para ello, consideremos el conjunto

$$E^+ := \{t \in [a, b] : f(t) > 0\}.$$

Queremos demostrar que $|E^+| = 0$ (donde $|\cdot|$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n). Por reducción al absurdo, si $|E^+| > 0$, como

$$|E^+| = \sup\{|K| : K \subseteq E^+, \quad K \text{ compacto}\},$$

entonces existe un compacto $K \subseteq E^+$ con $|K| > 0$. Por otro lado, para $n \geq 1$, definimos $K_n := \{t \in K : f(t) \geq 1/n\}$. Está claro que $K = \cup_{n \geq 1} K_n$ y existe $n \geq 1$ tal que $|K_n| > 0$. Por tanto,

$$0 = \int_K f(s) ds \geq \int_{K_n} f(s) ds \geq \frac{1}{n} |K_n| > 0.$$

Llegamos así a una contradicción y podemos concluir que $|E^+| = 0$. De forma análoga podemos demostrar que el conjunto

$$E^- := \{t \in [a, b] : f(t) < 0\}$$

verifica que $|E^-| = 0$. Por lo que acabamos de demostrar que $f(t) = 0$ casi por doquier en $[a, b]$. Con esto concluimos la prueba. \square

Observación 2.3. Si f es integrable en el sentido de Riemman en $[a, b]$ la prueba se simplifica considerablemente. Efectivamente, en este caso f es continua para casi todo $t \in [a, b]$. Veamos que si f es continua en $t_0 \in [a, b]$, entonces $f(t_0) = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos (sin pérdida de generalidad) que $f(t_0) > 0$. Tomando $\varepsilon = f(t_0)/2$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $f(t) \geq f(t_0) - \varepsilon = f(t_0) - \frac{f(t_0)}{2} = \frac{f(t_0)}{2} > 0$ para cualquier $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq [a, b]$. Entonces,

$$0 = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(s) ds \geq 2\delta\varepsilon > 0.$$

De forma análoga se razona si $f(t_0) < 0$ llegando a una contradicción. Por tanto, $f = 0$ en cada punto en el que f sea continua y $f(t) = 0$ para casi todo $t \in [a, b]$. \square

Así mismo, también necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 2.9. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado, (Y, d) un espacio métrico y sea u una función absolutamente continua localmente. Entonces u tiene variación acotada local. En particular, si $Y = \mathbb{R}^n$, entonces u es diferenciable en casi todo I y $u \in L^1_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $[a, b] \subseteq I$ un intervalo. Tomamos $\varepsilon = 1$, y sea $\delta > 0$ como en la definición de función absolutamente continua. Sea n la parte entera de $2(b-a)/\delta$ y dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $(b-a)/n$. Como $(b-a)/n \leq \delta/2$, de la definición de función absolutamente continua tenemos que en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se verifica que $\text{Var}_{[x_{i-1}, x_i]} u \leq 1$ y por la Proposición 2.2,

$$\text{Var}_{[a, b]} u = \sum_{i=1}^n \text{Var}_{[x_{i-1}, x_i]} u \leq n \leq 2(b-a)/\delta < \infty.$$

La diferenciabilidad la obtenemos del Teorema 2.5. □

Pasamos ya a la prueba del Teorema 2.7.

Demostración del Teorema 2.7. Sea $f \in L^1(0, T)$. En primer lugar probaremos el resultado cuando $f(t)$ está acotada, es decir, si $|f(t)| \leq c$ para casi todo $t \in [0, T]$. Así, F es absolutamente continua ya que:

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} f(s) ds \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(s)| ds \leq c \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \varepsilon$$

para todo número finito de intervalos $(a_i, b_i)_{i \geq 1}$ que sean disjuntos con $[a_i, b_i] \subseteq [0, T]$ y $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta := \frac{\varepsilon}{c+1}$.

Extendemos por cero la función f fuera del intervalo $[0, T]$ y definimos:

$$w_n(t) := \frac{F(t+1/n) - F(t)}{1/n} = n \int_t^{t+1/n} f(s) ds.$$

Entonces $|w_n(t)| \leq c$ para todo $t \in [0, T]$. Como F es absolutamente continua es diferenciable para casi todo $t \in [0, T]$. Esto nos lleva a que $w_n(t) \rightarrow w(t) = F'(t)$ para casi todo $t \in [0, T]$. Entonces, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, lo que resulta en:

$$\int_0^t F'(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t w_n(s) ds.$$

Por otro lado

$$\int_0^t w_n(s) ds = n \int_0^t [F(s+1/n) - F(s)] ds.$$

A continuación, realizamos el cambio de variable, en el primer término de la integral, $s+1/n = \tau$, $ds = d\tau$, obteniéndose:

$$\int_0^t w_n(s) ds = n \int_{1/n}^{t+1/n} F(\tau) d\tau - n \int_0^t F(s) ds = n \left[\int_t^{t+1/n} F(s) ds - \int_0^{1/n} F(s) ds \right]$$

y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^t F'(s) ds = F(t) - F(0) = F(t) = \int_0^t f(s) ds,$$

donde hemos usado que F es continua. Por tanto,

$$\int_0^t (F'(s) - f(s)) ds = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Y aplicando el Lema 2.8 obtenemos el punto 2 cuando f está acotada.

Ahora asumiremos que f no está acotada. Además, imponemos la condición de que $f(t) \geq 0$. Definimos:

$$f_n(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \leq n, \\ 0 & \text{si } f(t) > n, \end{cases}$$

Entonces:

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t f_n(s) ds + \int_0^t [f(s) - f_n(s)] ds =: F_n(t) + s_n(t).$$

Por lo visto en el caso en que f es acotada, sabemos que $F'_n(t) = f_n(t)$ para casi todo $t \in [0, T]$. Por otro lado, como $f \geq f_n$ tenemos que s_n es creciente y por ello $s'_n(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$. Entonces como $F = F_n + s_n$ derivando se tiene que:

$$F'(t) = F'_n(t) + s'_n(t) = f_n(t) + s'_n(t) \geq f_n(t), \quad \text{p.c.t } t \in [0, T].$$

Podemos decir que se tiene para todo $t \in [0, T] \setminus E_n$ donde E_n son conjuntos de medida nula. Como la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, el conjunto $E := \bigcup_n E_n$ tiene medida nula. Si $t \in [0, T] \setminus E$ entonces $F'(t) \geq f_n(t)$ para todo n , y haciendo el límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos que $F'(t) \geq f(t)$. De hecho:

$$\int_0^T F'(s) ds \geq \int_0^T f(s) ds = F(T) - F(0) = F(T) = \int_0^T f(s) ds.$$

Por otro lado, como consecuencia del Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se tiene que,

$$\int_0^T F'(s) ds \leq F(T) - F(0) = F(T) = \int_0^T f(s) ds.$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\int_0^T [F'(s) - f(s)] ds = 0.$$

Como $F' \geq f$ en I entonces se verifica que $F'(t) = f(t)$ para casi todo $t \in [0, T]$.

En el caso general es suficiente escribir $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son la parte positiva y negativa de f respectivamente y por tanto:

$$F(t) = \int_0^t f^+(s) ds - \int_0^t f^-(s) ds =: F_1(t) + F_2(t).$$

Ahora nos basta aplicar el caso anterior a F_1 y F_2 y tenemos el resultado deseado. Con esto concluye la prueba. \square

Veamos ya que el sistema (2.2) está bien planteado para $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $b \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$. Se tiene:

Teorema 2.10. Sean $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $b \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, con $n \geq 1$ y $T > 0$. Entonces, para cada $y_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema (2.2) admite una única solución $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$, absolutamente continua en $[0, T]$ y derivable para casi todo $t \in [0, T]$. Además, y está dada por (2.3) (F es una matriz fundamental asociada al s.d.o. homogéneo $y' = A(t)y$) y satisface el s.d.o. en casi todo $t \in [0, T]$.

Demostración. En las condiciones del teorema es fácil comprobar que el problema (2.2) admite a lo sumo una solución. Por otro lado, teniendo en cuenta el Teorema 2.7, la función y dada por (2.3) satisface que $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$, es absolutamente continua en $[0, T]$ y, para casi todo $t \in [0, T]$, se tiene:

$$\begin{aligned} y'(t; 0, y_0) &= F'(t)F(0)^{-1}y_0 + F'(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s) ds + F'(t)F(t)^{-1}b(t) \\ &= A(t)F(t)F(0)^{-1}y_0 + A(t)F(t) \int_0^t F(s)^{-1}b(s) ds + b(t) = A(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

Por último, también se tiene que $y(0; 0, y_0) = y_0$. Con esto concluimos la prueba. \square

Capítulo 3

Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales. El Gramiano de Controlabilidad. Control de Norma Mínima

En este capítulo introduciremos el problema de Cauchy con el que vamos a trabajar, el cual es conocido como problema de estado. Así mismo, definiremos el concepto de controlabilidad así como introduciremos una serie de resultados que nos permitirán estudiarla. Estos resultados tendrán un interés más teórico que práctico, ya que en ellos intervendrá la matriz fundamental del sistema homogéneo asociado, pero sientan las bases para estudiar la controlabilidad de sistemas lineales, el cual analizaremos en el capítulo siguiente. Introduciremos el gramiano de controlabilidad y estudiaremos cual es el control cuya norma es mínima.

3.1. Problema de Estado. Definiciones de Controlabilidad

Pasamos a definir el problema con el que vamos a trabajar conocido como **problema de estado**. Para ello, fijemos $n, m \geq 1$ y $T > 0$. Así,

Definición 3.1. Consideremos $A \equiv A(t)$, con $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \equiv B(t)$, con $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$. Llamaremos **problema de estado** al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $y_0 \in \mathbb{R}^n$ está dado. La función $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ la conocemos como **función de control**, siendo $u \equiv u(t)$ y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. La función $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la **función de estado**. El espacio de estados es $H \equiv \mathbb{R}^n$ (que es de dimensión finita).

Una vez definido el sistema de estado con con el que trabajaremos (un sistema diferencial ordinario lineal no autónomo), veamos que está bien planteado. Se tiene:

Teorema 3.1. *En las condiciones de la Definición 3.1, para cada $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, el problema (3.1) tiene una única solución $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Además, esta depende de manera continua de los datos, es decir, existe $C > 0$ (que solo depende de A y B) tal que*

$$\|y\|_{0;[0,T]} \leq C(\|y_0\| + \|u\|_{2;[0,T]}).$$

Demostración. La prueba del resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.10 del capítulo anterior. \square

Gracias a este resultado podemos pasar a definir el concepto de trayectoria que nos será importante para poder definir distintos tipos de controlabilidad.

Definición 3.2. Se define como **trayectoria** de (3.1) y se denota como $\tilde{y} \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ a la solución de (3.1) para cierto \tilde{y}_0 y cierto $\tilde{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Finalmente, definimos qué entendemos como controlabilidad. Podemos definir cuatro tipos distintos de controlabilidad.

- Definición 3.3.**
1. Diremos que (3.1) es **exactamente controlable en el instante T** , si para todo $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$, existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface $y(T) = y_d$.
 2. Diremos que (3.1) es **exactamente controlable a trayectorias en el instante T** , si dados y_0 y una trayectoria \tilde{y} de (3.1), existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface $y(T) = \tilde{y}(T)$.
 3. Diremos que (3.1) es **exactamente controlable a cero** o de **controlabilidad nula en el instante T** si existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface $y(T) = 0$.
 4. Finalmente, diremos que (3.1) es **aproximadamente controlable** si, para todo $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface

$$\|y(T) - y_d\| < \varepsilon.$$

Observación 3.1. Es fácil comprobar que el primer concepto de controlabilidad implica el resto. Por otro lado, $\tilde{y} \equiv 0$ es una trayectoria de (3.1). Por tanto, la controlabilidad exacta a trayectorias implica la controlabilidad nula del sistema (3.1). Por último, también veremos que, en realidad, los cuatro conceptos de la definición anterior son equivalentes (el problema (3.1) es un sistema lineal reversible que evoluciona en \mathbb{R}^n , un espacio de dimensión finita).

3.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Consideremos el problema de estado (3.1), nuestro objetivo es controlar este sistema que tiene n variables, haciendo uso de m funciones de control. El caso más interesante será aquel en el que $m < n$, es decir aquel en el que hay menos controles que ecuaciones y donde alguna ecuación debe ser indirectamente controlada.

Consideremos una matriz fundamental F asociada al sistema

$$z' = A(t)z \quad \text{en } [0, T] \quad (3.2)$$

esto es, una función con valores matriciales $F \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ que satisface $F'(t) = A(t)F(t)$ y que $\det F(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, T]$.

Como hemos dicho más arriba, dado un dato inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y una función de control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, el sistema (3.1) tiene una **única solución** $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ (además esta será derivable para casi todo $t \in [0, T]$). Además, del Teorema 2.10, sabemos que esta está dada por la fórmula de Duhamel:

$$y(t) = F(t)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^t F(t)F(s)^{-1}B(s)u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

Nos surge ahora la siguiente pregunta. ¿Podemos conducir la solución y del sistema (3.1) partiendo de un dato inicial y_0 a un dato final prefijado y_d , en un tiempo T , actuando solamente sobre el sistema con un control u ?. La respuesta es que no siempre podremos hacerlo y lo veremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1. Consideremos $n = 2$, $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Este sistema no es controlable ya que la primera componente y_1 de y es independiente de u y está completamente determinada por $y_{0,1}$:

$$y_1'(t) = y_1, \quad y_1(0) = y_{0,1} \Rightarrow y_1(t) = y_{0,1}e^t, \quad \forall t \in [0, T].$$

Veremos que, si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema sí sería exactamente controlable en cualquier instante $T > 0$. Deducimos por tanto que el número y la posición de los controles son cruciales para las propiedades de controlabilidad del sistema (3.1).

3.3. Controlabilidad. El Gramiano de Controlabilidad

Acabamos de ver que no todos los sistemas podemos llevarlos desde un estado inicial y_0 a un estado y_d en un tiempo T haciendo uso de un control, es decir, que no todos los sistemas son controlables. No obstante, habrá ciertos estados a los que sí podremos llegar en un tiempo T . Esta serie de estados conforman un conjunto que conocemos como **conjunto de estados alcanzables desde y_0 en un tiempo T** :

Definición 3.4. Dado un estado inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y un tiempo $T > 0$ llamamos **conjunto de estados alcanzables desde y_0 en el tiempo T** (y lo denotamos por $\mathcal{R}(T; y_0)$) al conjunto de las soluciones del sistema (3.1) asociadas al control u , es decir:

$$\mathcal{R}(T; y_0) = \{y_u(T) : y_u \text{ es solución de (3.1) asociada a } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)\}.$$

Dado un subconjunto Ω de \mathbb{R}^n es posible definir el conjunto de estados alcanzables desde $y_0 \in \mathbb{R}^n$ restringido al subconjunto Ω :

$$\mathcal{R}_\Omega(T; y_0) = \{y_u(T) : y_u \text{ es solución de (3.1) asociada a } u \in L^2(0, T; \Omega)\}.$$

Observación 3.2. De la definición anterior deducimos que el sistema (3.1) :

1. Es exactamente controlable en el tiempo T si y solo si $\mathcal{R}(T; y_0) \equiv \mathbb{R}^n$;
2. Es exactamente controlable a cero en el tiempo T si y solo si $0 \in \mathcal{R}(T; y_0)$;
3. Es aproximadamente controlable en el tiempo T si y solo si $\mathcal{R}(T; y_0)$ es denso en \mathbb{R}^n .

Estas propiedades se deducen directamente de las distintas definiciones.

En primer lugar, veremos un resultado importante sobre la estructura de $\mathcal{R}(T; 0)$.

Teorema 3.2. Consideremos el sistema (3.1), con $T > 0$. Entonces, para todo $t > 0$, el conjunto $\mathcal{R}(t, 0)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Si además suponemos que el sistema (3.1) es autónomo, entonces, para todo $0 < t_1 < t_2$ se tiene que $\mathcal{R}(t_1, 0) \subset \mathcal{R}(t_2, 0)$.

Demostración. En primer lugar, sea $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T; 0)$ y dos constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por la definición del conjunto de estados alcanzables, para cada y_i , $i = 1, 2$ existirá un control $u_i \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) asociada verifica $y(t) = y_i$. Además, sabemos la forma que van a tener las y_i simplemente aplicando la fórmula de Duhammel (3.3). Ahora, para todo $s \in [0, T]$ tomamos $u(s) = \lambda u_1(s) + \mu u_2(s)$ y calculamos:

$$\begin{aligned} \lambda y_1(s) + \mu y_2(s) &= \lambda F(t) \int_0^t F(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds + \mu F(t) \int_0^t F(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds \\ &= F(t) \int_0^t F(s)^{-1} B(s) u(s) ds \in \mathcal{R}(T; 0). \end{aligned}$$

Veamos ahora el caso en el que el sistema autónomo. Tomamos $y_1 \in \mathcal{R}(t_1; 0)$. Por la definición, existe un control $u_1 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que la solución de (3.1) asociada verifica $y_1(t_1) = y_1$. Por la fórmula de Duhammel (3.3) tenemos que:

$$y_1 = \int_0^{t_1} F(t_1) F(s)^{-1} B u_1(s) ds$$

ya que el sistema (3.1) es autónomo e $y_0 = 0$. Ahora tomamos $u_2 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ como:

$$\begin{cases} u_2(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_2 - t_1, \\ u_2(t) = u_1(t_1 - t_2 + t) & \text{si } t_2 - t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Tomando la solución de (3.1) asociada a u_2 (la cual denotamos como $y_2(t)$) y aplicando la fórmula de Duhammel (3.3) llegamos a que:

$$y_2(t) = F(t_2) \int_0^{t_2} F(s)^{-1} B u_2(s) ds = F(t_2) \int_{t_2-t_1}^{t_2} F(s)^{-1} B u_2(s) ds.$$

Realizamos el cambio de variable $t = t_1 - t_2 + s$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= F(t_2) \int_0^{t_1} F(t_2)^{-1} F(t_1) F(t)^{-1} B u_2(t_2 - t_1 + t) dt \\ &= F(t_1) \int_0^{t_1} F(s)^{-1} B u_1(s) ds = y_1, \end{aligned}$$

y por tanto hemos probado que $y_1 \in \mathcal{R}(t_2; 0)$. Con esto concluye la prueba. \square

Observación 3.3. Por la linealidad del sistema (3.1) es inmediato comprobar que $\mathcal{R}(T; y_0)$ se puede expresar como:

$$\mathcal{R}(T; y_0) = Y(T) + \mathcal{R}(T; 0),$$

donde Y es la solución del sistema

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y & \text{en } [0, T], \\ Y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Utilizando ahora la linealidad de (3.4), deducimos que $\mathcal{R}(T; y_0)$ es una variedad afín de \mathbb{R}^n .

Veamos a continuación que los cuatro conceptos de controlabilidad para el sistema (3.1) incluidos en la Definición 3.3 son equivalentes. Lo haremos mediante tres proposiciones:

Proposición 3.3. *El sistema (3.1) es exactamente controlable a trayectorias en un tiempo $T > 0$ si y solo si es exactamente controlable a cero en el instante T .*

\Rightarrow Como $\tilde{y} \equiv 0$ es una trayectoria del sistema (3.1), tenemos esta implicación directamente.

\Leftarrow Supongamos que (3.1) es exactamente controlable a cero en el instante T y fijemos $\tilde{y} \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$, una trayectoria de (3.1) asociada $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Con estos datos sabemos que existe un control $\hat{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución $z \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ de

$$\begin{cases} z' = A(t)z + B(t)\hat{u}, & t \in [0, T], \\ z(0) = y_0 - \tilde{y}_0, \end{cases}$$

satisface $z(T) = 0$. Usando la linealidad de (3.1) está claro que la solución $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ asociada a y_0 y $u = \tilde{u} + \hat{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ está dada por $y = \tilde{y} + z$ y satisface $y(T) = \tilde{y}(T) + z(T) = \tilde{y}(T)$. Tenemos así probado que (3.1) es exactamente controlable a trayectorias en el tiempo $T > 0$. Esto concluye la demostración.

Demostración. □

Proposición 3.4. *El sistema (3.1) es exactamente controlable en un tiempo T si y solo si el sistema (3.1) es exactamente controlable a 0 en el instante T .*

Demostración. \Rightarrow Se deduce de la definición. Si el sistema (3.1) es exactamente controlable en concreto existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface $y(T) = 0$ y por tanto es exactamente controlable a cero.

\Leftarrow Supongamos ahora que el sistema (3.1) es exactamente controlable a cero en el instante T y veamos que es exactamente controlable en el tiempo T . Usaremos que el sistema es lineal y reversible. Así, fijemos $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ la única solución del problema de Cauchy (reversibilidad)

$$\begin{cases} y' = A(t)y & \text{en } [0, T], \\ y(T) = y_d. \end{cases}$$

De esta manera (linealidad), y es solución de (3.1) para $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ si y solo si $z = y - Y$ es solución del problema

$$\begin{cases} z' = A(t)z + B(t)u & \text{en } [0, T], \\ z(0) = y_0 - Y(0). \end{cases} \quad (3.5)$$

Además, $y(T) = y_d$ si y solo si $z(T) = 0$. Deducimos de este razonamiento que existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (3.1) satisface $y(T) = y_d$ si y solo si la solución z de (3.5) asociada a u satisface $z(T) = 0$. Pero esto último se tiene pues (3.1) es exactamente controlable a cero en el instante T . Esto finaliza la prueba. □

Pasamos ya a la última equivalencia:

Proposición 3.5. *El sistema (3.1) es aproximadamente controlable en un tiempo T si y solo si el sistema (3.1) es exactamente controlable en el instante T .*

Demostración. \Leftarrow Esta implicación es directa.

\Rightarrow Veamos la implicación contraria. Para ello consideremos el conjunto $\mathcal{R}(T; y_0)$ introducido en la Definición 3.4. Tal y como vimos en la Observación 3.3, $\mathcal{R}(T; y_0)$ es una variedad afín de \mathbb{R}^n y podemos expresarlo como:

$$\mathcal{R}(T; y_0) = Y(T) + \mathcal{R}(T; 0),$$

donde Y es la solución del sistema 3.4. Ahora bien, en la Observación 3.2 vimos que nuestro sistema (3.1) es aproximadamente controlable si y solo si $\mathcal{R}(T; y_0)$ es denso en \mathbb{R}^n , pero esto solo se da si y solo si $\mathcal{R}(T; 0)$ es denso en \mathbb{R}^n , lo cual es equivalente a decir que $\overline{\mathcal{R}(T; 0)} = \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, al ser $\mathcal{R}(T; 0)$ un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n (véase el Teorema 3.2) es de dimensión finita y por tanto, es cerrado por lo que coincide con su clausura, es decir $\mathcal{R}(T; 0) = \overline{\mathcal{R}(T; 0)}$. Teniendo en cuenta ambas propiedades deducimos que $\mathcal{R}(T; y_0) = \mathbb{R}^n$ y por tanto tenemos que el sistema (3.1) es exactamente controlable en el instante T . Esto concluye la prueba. \square

Observación 3.4. Hemos probado que los cuatro tipos de controlabilidad para el sistema (3.1) son equivalentes entre sí. En vista de este resultado, a partir de ahora nos limitaremos a estudiar la controlabilidad del sistema (3.1) sin necesidad de especificar el tipo.

Hemos visto que nuestro sistema (3.1) es lineal. Teniendo esto en cuenta, podemos expresar el conjunto de estados alcanzables como:

$$\mathcal{R}(T; y_0) = Y(T) + \mathcal{R}(T; 0),$$

siendo $Y \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ la solución del sistema (3.4). Teniendo en cuenta la igualdad (3.3), llegamos a que

$$\mathcal{R}(T; y_0) = F(T)F(0)^{-1}y_0 + \mathcal{R}(T; 0), \quad (3.6)$$

donde F es una matriz fundamental del sistema (3.2).

Ahora vamos a introducir un resultado relacionado con el conjunto de estados alcanzables, el cual es bastante interesante. Podemos encontrar un resultado similar en [13]. Para probarlo usaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un subconjunto cerrado convexo no vacío, y $T > 0$. Entonces, $L^2(0, T; \Omega)$ es un subconjunto cerrado y convexo de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.*

Demostración. En primer lugar, es fácil comprobar que $L^2(0, T; \Omega)$ es un subconjunto convexo de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, Veamos que también $L^2(0, T; \Omega)$ es cerrado en $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Para ello, sean $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T; \Omega)$, una sucesión, y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

En particular, existe una subsucesión (que seguimos denotando $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) tal que

$$u_n(t) \rightarrow u(t), \quad \text{p.c.t } t \in [0, T].$$

Como $u_n(t) \in \Omega$ para casi todo $t \in (0, T)$ y Ω es cerrado, deducimos que $u(t) \in \Omega$ para casi todo $t \in [0, T]$. Podemos concluir que $u(t) \in \Omega$, para casi todo $t \in \Omega$, es decir, $u \in L^2(0, T; \Omega)$. Esto finaliza la prueba. \square

Podemos ya enunciar un resultado sobre la geometría del conjunto $\mathcal{R}_\Omega(T; y_0)$. Se tiene:

Teorema 3.7. *Consideremos el sistema (3.1), con $T > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un subconjunto compacto. Entonces, para todo $\tau \in [0, T]$ el conjunto $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$ (véase la Definición 3.4) es compacto, convexo y varía continuamente con τ en $[0, T]$.*

Observación 3.5. Este resultado es muy importante, ya que probaremos que $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$ es convexo aunque el propio Ω puede no serlo.

Demostración. En el caso en el que Ω sea convexo, es fácil ver que $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$ es convexo. Efectivamente, consideremos dos estados $y_1, y_2 \in \mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Vamos a ver que $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Por la definición del conjunto de estados alcanzables, existe un control $u_i : [0, \tau] \rightarrow \Omega$; $i = 1, 2$, tal que se verifica que:

$$\begin{cases} y_i'(t) = A(t)y_i + B(t)u_i, & \text{en } [0, \tau] \\ y_i(0) = y_0, y_i(\tau) = y_i. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de Duhamel (3.3) tenemos que:

$$y_i = y_i(\tau) = F(\tau)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^\tau F(\tau)F(s)^{-1}B(s)u_i(s) ds.$$

Para todo s en $[0, \tau]$ tomamos $u(s) = \lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$. Como Ω es convexo, se tiene que $u \in L^2(0, \tau; \Omega)$. Además,

$$y(\tau) = F(\tau)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^\tau F(\tau)F(s)^{-1}B(s)u(s) ds.$$

Por otro lado, también se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 &= \lambda F(\tau)F(0)^{-1}y_0 + (1 - \lambda)F(\tau)F(0)^{-1}y_0 \\ &+ \int_0^\tau F(\tau)F(s)^{-1}B(s)[\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)] ds = y(\tau). \end{aligned}$$

Podemos concluir que $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Esto prueba la convexidad de $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$.

Veamos ahora la compacidad del conjunto $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Para ello, veremos que toda sucesión de puntos $\{y_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Para todo n , tomamos un control $u_n \in L^2(0, \tau; \Omega)$ que lleva la solución y_n del sistema (3.1) desde y_0 a y_n^0 en el tiempo τ . Usando de nuevo la fórmula de Duhamel, tenemos que:

$$y_n(t) = F(t)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^t F(t)F(s)^{-1}B(s)u_n(s) ds, \text{ p.c.t. } t \in [0, \tau], \text{ con } y_n^0 = y_n(\tau). \quad (3.7)$$

Por definición, los controles u_n toman valores en el compacto Ω , y por tanto la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$. Como $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Hilbert, existe una subsucesión de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (que seguiremos denotando $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) que converge débilmente en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$ hacia $u \in L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$:

$$u_n \rightarrow u \text{ débil en } L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m).$$

De la Proposición 3.6 deducimos que $L^2(0, \tau; \Omega)$ es un subconjunto cerrado y convexo y, por tanto, débilmente cerrado. Se tiene de este modo que $u \in L^2(0, \tau; \Omega)$.

Veamos ahora que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ admite una sucesión convergente en $C^0([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$. Haciendo uso de la igualdad (3.7) obtenemos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(0, \tau; \mathbb{R}^n)$ y, en particular, en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^n)$. Además,

$$y'_n(t) = A(t)y_n(t) + B(t)u_n(t), \text{ p.c.t. } t \in [0, \tau].$$

Así, $\{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está también acotada en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^n)$. Es decir, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(0, \tau; \mathbb{R}^n)$ es una sucesión acotada. Como $H^1(0, \tau; \mathbb{R}^n)$ se inyecta de manera compacta en $C^0([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$, obtenemos que, para una subsucesión (que seguiremos llamando $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) y para $y \in C^0([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$, se tiene

$$y_n \rightarrow y \text{ uniformemente en } [0, \tau].$$

Recordemos que $u_n \rightarrow u$ en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$, con $u \in L^2(0, \tau; \Omega)$. Usando de nuevo (3.7), no es difícil comprobar que $y_n \rightarrow \tilde{y}$ en $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^n)$, con

$$\tilde{y}(t) = F(t)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^t F(t)F(s)^{-1}B(s)u(s) ds, \text{ p.c.t. } t \in [0, \tau].$$

Es claro que $\tilde{y}(t) = y(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$ y, además, $y_n^0 = y_n(\tau) \rightarrow y(\tau)$ con $y(\tau) \in \mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Se tiene así la compacidad de $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$.

Finalmente, veremos la continuidad en τ de $\mathcal{R}_\Omega(\tau; y_0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver si existe $\delta > 0$ tal que para todo $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ con $|\tau_1 - \tau_2| \leq \delta$

$$d(\mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0), \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)) \leq \varepsilon.$$

En la expresión anterior, $d(\mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0), \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0))$ está dada por:

$$d(\mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0), \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)) = \max \left(\sup_{y \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)} d(y, \mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0)), \sup_{y \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0)} d(y, \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)) \right).$$

A partir de ahora, suponemos que $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$. Nos basta ver que:

1. Para todo $y \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)$ $d(y, \mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0)) \leq \varepsilon$,
2. Para todo $y \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0)$ $d(y, \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)) \leq \varepsilon$.

Sea $y \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)$. Es suficiente probar el primer punto y, en particular, que existe un $z \in \mathcal{R}_\Omega(\tau_1; y_0)$ tal que $d(y, z) \leq \varepsilon$. Por definición de $\mathcal{R}_\Omega(\tau_2; y_0)$, existe un control $u \in L^2(0, T; \Omega)$ tal que la solución de (3.1) asociada a u , verifica que $y(\tau_2) = y$. Entonces se tiene que (ver (3.3)):

$$\begin{aligned} y(\tau_2) - y(\tau_1) &= F(\tau_2)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^{\tau_2} F(\tau_2)F(s)^{-1}B(s)u(s) ds \\ &\quad - \left[F(\tau_1)F(0)^{-1}y_0 + \int_0^{\tau_1} F(\tau_1)F(s)^{-1}B(s)u(s) ds \right] \\ &= F(\tau_2) \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(s)^{-1}B(s)u(s) ds \\ &\quad + [F(\tau_2) - F(\tau_1)] \left[F(0)^{-1}y_0 + \int_0^{\tau_1} F(s)^{-1}B(s)u(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Si $|\tau_1 - \tau_2|$ es pequeño, el primer término es pequeño por continuidad de la integral. El segundo término también es pequeño por la continuidad de $F(\tau)$. Entonces, basta tomar $z = y(\tau_1)$ para deducir el punto 1. El punto número dos se prueba de forma análoga. Con esto concluye la prueba.

En el caso general, en el que Ω solo es compacto, cabe recordar que $L^2(0, T; \Omega) = L^\infty(0, T; \Omega)$, ya que al ser Ω compacto, en particular, es acotado. Además, se utiliza un lema de Lyapunov sobre teoría de la medida (demostrado en [6], p. 163) y de forma más general un teorema de D'Aumman (ver por ejemplo [5]), a partir de los cuales obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^T F(s)^{-1} B(s) u(s) ds \mid u \in L^2(0, T; \Omega) \right\} \\ &= \left\{ \int_0^T F(s)^{-1} B(s) u(s) ds \mid u \in L^2(0, T; \partial\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \int_0^T F(s)^{-1} B(s) u(s) ds \mid u \in L^2(0, T; \text{Conv}(\Omega)) \right\}, \end{aligned}$$

donde $\text{Conv}(\Omega)$ es la envolvente convexa de Ω . Usando los resultados comentados concluimos la demostración. \square

Observación 3.6. De este teorema obtenemos un resultado bastante importante. Hemos comprobado que si Ω es un compacto $\mathcal{R}_\Omega(T; y_0) = \mathcal{R}_{\partial\Omega}(T; y_0) = \mathcal{R}_{\text{Conv}(\Omega)}(T; y_0)$. Desde un punto de vista práctico este resultado es bastante interesante ya que podríamos encontrar lo que se denominan controles bang-bang, que son controles que toman únicamente dos valores y que tienen un gran interés por ejemplo, en el ámbito de la ingeniería.

A modo de ejemplo, supongamos que tenemos el sistema (3.1) con $m = 1$ y que nuestro compacto Ω es el intervalo $[0, 1]$. Gracias a este resultado, sabemos que si nuestro estado deseado $y_d \in \mathbb{R}^n$ lo podemos alcanzar con un control que toma valores en este intervalo, también podremos alcanzarlo con un control que toma solo los valores $\{0, 1\}$ que sería un control bang-bang.

Podemos considerar ahora el problema con condición inicial nula. El sistema tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $t \in [0, T]$, $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Ahora introducimos el siguiente operador lineal:

$$L_T : u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow L_T u = y_u(T) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.9)$$

donde y_u es la solución del sistema (3.8) asociada al control u . Por tanto, L_T asocia cada control con su elemento del conjunto de estados alcanzables que parte del 0 y alcanza el estado deseado y_d en un tiempo T determinado.

Observación 3.7. Es fácil comprobar que L_T es un operador lineal. Además, gracias al Teorema 3.1, también se tiene que es un operador continuo, i.e.,

$$L_T \in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathbb{R}^m); \mathbb{R}^n).$$

Por último, usando de nuevo (3.3) con $y_0 = 0$, deducimos:

$$L_T u = F(T) \int_0^T F(s)^{-1} B(s) u(s) ds, \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Como L_T es un operador lineal, entonces se tiene que:

$$L_T \in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathbb{R}^m); \mathbb{R}^n).$$

Tenemos ahora el siguiente resultado:

Proposición 3.8. *El sistema (3.1) es exactamente controlable en el instante $T > 0$ si y solo si el operador L_T es sobreyectivo.*

Demostración. Usando de nuevo la igualdad (3.6) deducimos que el sistema (3.1) es exactamente controlable en el instante T si y solo si

$$\mathcal{R}(T; 0) = \mathbb{R}^n.$$

De la propia definición también se tiene que $\text{Im}(L_T) = \mathcal{R}(T; 0)$. De las dos igualdades anteriores se infiere el resultado. \square

Observación 3.8. Obsérvese que el operador L_T no puede ser un isomorfismo. Efectivamente, el operador L_T está definido entre $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ (un espacio de dimensión infinita) y \mathbb{R}^n (espacio de dimensión finita). Por tanto L_T no puede ser inyectiva.

Estamos en condiciones de introducir el problema adjunto, el cual nos va a ser de gran utilidad.

Definición 3.5. El sistema:

$$\begin{cases} -\varphi' = A^*(t)\varphi, & t \in [0, T], \\ \varphi(T) = \varphi_0, & \varphi_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.10)$$

es el denominado como **sistema adjunto**. En (3.10), $A^*(t)$ es la matriz traspuesta de $A(t)$.

Observación 3.9. El sistema (3.10) es un s.d.o. en el intervalo $[0, T]$ donde se está dando una condición de Cauchy en el tiempo T . De hecho, es un sistema que se puede escribir como (3.1) para las matrices $A^*(t)$ y $B \equiv 0$ sin más que hacer el cambio $\tau = T - t$, con $t \in [0, T]$, (sistema retrógrado). Así, podemos aplicar el Teorema 2.10 y deducir que el sistema (3.10) está bien planteado para cada $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir, para todo $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$, el sistema (3.10) tiene una única solución $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Además, existe $C_0 > 0$ tal que

$$|\varphi|_{1; [0, T]} \leq C_0 |\varphi_0|.$$

Veamos ahora un resultado que conecta las soluciones de los sistemas (3.8) y (3.10). Se tiene:

Proposición 3.9. *Sea $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ y $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $y_u, \varphi \in C^0([0, T])^n$ son las soluciones de los sistemas (3.8) y (3.10) asociadas a u y a φ_0 respectivamente, entonces:*

$$(y_{u0}(T), \varphi_0)_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T (u(t), B(t)^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} = (u(\cdot), B(\cdot)^* \varphi(\cdot))_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)}.$$

Demostración. El producto escalar $(y_u(\cdot), \varphi(\cdot))$ proporciona una función $C^0([0, T])$. Además, esta es derivable para casi todo $t \in [0, T]$ (ya que sabemos que φ es derivable y que y_u es derivable para casi todo t). Derivando tenemos que, para casi todo $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y_{u0}(t), \varphi(t)) &= (y'_u(t), \varphi(t)) + (y_u(t), \varphi'(t)) \\ &= (A(t)y_u(t) + B(t)u(t), \varphi(t)) - (y_u(t), A^*(t)\varphi(t)) \\ &= (A(t)y_u(t) + B(t)u(t), \varphi(t)) - (A(t)y_u(t), \varphi(t)) \\ &= (B(t)u(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} = (u(t), B^*(t)\varphi(t))_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

Integrando esta expresión y teniendo en cuenta que $y_u(0) = 0$, llegamos a que:

$$(y_u(T), \varphi_0) = \int_0^T (u(s), B^*(s)\varphi(s))_{\mathbb{R}^m} ds.$$

Esta última igualdad concluye la prueba. □

Ahora podemos introducir el operador adjunto a L_T .

Definición 3.6. Consideremos el operador L_T definido en (3.9). Se define como **operador adjunto** de L_T , que denotamos L_T^* , al operador que cumple:

$$L_T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m)),$$

$$(u, L_T^* \varphi_0)_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} = (L_T u, \varphi_0)_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \varphi_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 3.10. Si φ es la solución del sistema (3.10) asociada al dato inicial φ_0 , la Proposición 3.9 nos lleva a la siguiente igualdad:

$$L_T^* \varphi_0 = B^*(\cdot)\varphi(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n), \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Usaremos la igualdad anterior en lo sucesivo.

A continuación, nos interesa introducir el siguiente resultado de teoría de operadores.

Lema 3.10. Consideremos H y K dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H; K)$. Entonces se tiene:

$$\ker(T^*) = (\operatorname{Im}(T))^\perp.$$

Demostración. Sea $x \in \ker(T^*)$. Por la definición de $\ker(T^*)$, esto se da si y solo si $T^*x = 0$. Esto es equivalente a decir que $(T^*x, y)_K = 0$ para todo $y \in K$. De la definición de operador adjunto, esto se tiene si y solo si $(x, Ty)_H = 0$ para todo $y \in K$. Finalmente, esto es equivalente a decir que $x \in (\operatorname{Im}(T))^\perp$. Con esto concluye la demostración. \square

Observación 3.11. Del lema anterior podemos deducir alguna relación adicional entre $\operatorname{Im}(L_T)$ y $\ker(L_T^*)$. Efectivamente, como $\operatorname{Im}(L_T)$ y $\ker(L_T^*)$ son subespacios cerrados (son subespacios de un espacio de dimensión finita) también se tiene que:

$$\ker(L_T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(L_T)} = \operatorname{Im}(L_T).$$

Previamente hemos visto que la controlabilidad del sistema (3.8), en un tiempo T , es equivalente a que $\operatorname{Im}(L_T) = \mathbb{R}^n$, pero usando la Observación 3.11 llegamos a que el sistema (3.8) es controlable en el tiempo T si y solo si $\ker(L_T^*) = \{0\}$. Teniendo esto en cuenta llegamos al siguiente resultado:

Proposición 3.11. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El sistema (3.1) es controlable en el tiempo $T > 0$.
2. $\ker(L_T^*) = \{0\}$.
3. Se tiene la siguiente propiedad (conocida como **propiedad de continuación única para el problema adjunto**): Si $B^*(\cdot)\varphi(\cdot) = 0$ en $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, con φ solución del sistema (3.10) asociada a φ_0 , entonces $\varphi_0 \equiv 0$.

Demostración. $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ El sistema (3.1) es controlable si y solo si $\operatorname{Im}(L_T) = \mathbb{R}^n$ (Proposición 3.8). Pero $\operatorname{Im}(L_T) = \ker(L_T^*)^\perp$, por tanto tenemos que $\ker(L_T^*)^\perp = \mathbb{R}^n$, lo cual se da si y solo si $\ker(L_T^*) = 0$. \square

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ De la Observación 3.10 $L_T^*\varphi_0 = B^*(\cdot)\varphi(\cdot)$. Así, la propiedad de continuación única para el problema adjunto es equivalente a que L_T^* sea inyectiva. Esto equivale a que $\ker(L_T^*) = 0$. \square

Observación 3.12. De este resultado deducimos que el sistema (3.1) es controlable en un tiempo $T > 0$ si y solo si la función escalar

$$|\cdot|_{L_T^*} : \varphi_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto |\varphi_0|_{L_T^*} = \left(\int_0^T |B^*(t)\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

es una norma en \mathbb{R}^n equivalente a la norma euclídea (sabemos que todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes).

Para ver que se cumplen las propiedades que hacen que sea una norma, basta utilizar las propiedades del valor absoluto y de la integral. La única propiedad en la que debemos tener algo más de cuidado es

$$|\varphi_0|_{L_T^*} = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = 0.$$

Demostremos que se cumple esta última propiedad:

$$|\varphi_0|_{L_T^*} = 0 \Leftrightarrow \int_0^T |B^*(t)\varphi(t)|^2 dt = 0 \Leftrightarrow B^*(t)\varphi(t) = 0,$$

lo cual por la Proposición 3.11, tenemos que $\varphi_0 = 0$ siempre y cuando nuestro sistema sea controlable. Con esto hemos visto que cumple todas las propiedades de una norma.

Teorema 3.12. *El sistema (3.1) es controlable en un tiempo T si y solo si existe una constante $c_T > 0$ tal que se verifica:*

$$|\varphi_0|^2 \leq c_T \int_0^T |B^*(t)\varphi(t)|^2 dt, \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}^n,$$

donde φ es la solución del sistema adjunto (3.10) asociado a φ_0

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Hemos visto previamente que (3.1) es controlable si y solo si $|\varphi_0|_{L_T^*}$ es norma. También sabemos que todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes. La condición de que en \mathbb{R}^n las normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes si

$$m|x|_1 \leq |x|_2 \leq M|x|_1$$

donde m y M son constantes positivas. Aplicando esta condición a nuestro caso obtenemos que

$$|\varphi_0| \leq c_T |\varphi_0|_{L_T^*}, \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}^n,$$

que es equivalente a la condición del enunciado. Esto termina la prueba. \square

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $B^*\varphi = 0$, entonces es inmediato comprobar que $|\varphi_0| = 0$ y, por tanto, $\varphi_0 \equiv 0$. Esto no es más que la Propiedad de Continuación para el problema adjunto (véase la Proposición 3.11) y por tanto hemos probado que el sistema (3.1) es controlable. Esto concluye la prueba. \square

A continuación vamos a introducir un concepto que nos va a resultar muy útil.

Definición 3.7. Consideremos el sistema de control $y' = A(t)y + B(t)u$ en $[0, T]$, con $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$. Definimos como **gramiano de controlabilidad** (y lo denotamos por \mathcal{Q}_T) a la siguiente matriz simétrica:

$$\mathcal{Q}_T = F(T) \left(\int_0^T F(t)^{-1} B(t) B^*(t) F^*(t)^{-1} dt \right) F^*(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

donde F es una matriz fundamental asociada al sistema (3.4).

Introducimos un lema que nos va a ser útil para probar ciertas propiedades del gramiano de controlabilidad.

Lema 3.13. $F \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ es una matriz fundamental de $y' = A(t)y$ si y solo si $G(t) = F^*(t)^{-1}$ es matriz fundamental de $-\varphi' = A^*(t)\varphi$.

Demostración. Una matriz fundamental asociada a (3.4) verifica $F'(t) = A(t)F(t)$ así como que $\det F(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$. Sea la matriz $G(t) = F^*(t)^{-1}$. Veamos que $G(t)$ es matriz fundamental del sistema adjunto (3.10). En primer lugar, está claro que $\det G \neq 0$. Ahora calculamos la derivada de $G' = \frac{d}{dt}(F^*(t)^{-1})$. Para ello derivamos la igualdad $F^*(t)F^*(t)^{-1} = I$:

$$F^{*\prime}(t)F^*(t)^{-1} + F^*(t)\frac{d}{dt}(F^*(t)^{-1}) = 0,$$

es decir,

$$F^*(t)A^*(t)F^*(t)^{-1} + F^*(t)\frac{d}{dt}(F^*(t)^{-1}) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando ahora por $F^*(t)^{-1}$ a izquierda y despejando $\frac{d}{dt}(F^*(t)^{-1})$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}(F^*(t)^{-1}) = -A^*(t)F^*(t)^{-1}.$$

Y por tanto llegamos a que:

$$G'(t) = -A^*(t)F^*(t)^{-1}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Acabamos de demostrar que G es una matriz fundamental de $-\varphi' = A^*(t)\varphi$. \square

El gramiano de controlabilidad \mathcal{Q}_T presenta las siguientes propiedades:

Proposición 3.14. 1. El gramiano de controlabilidad es independiente de la matriz fundamental escogida.

2. $\mathcal{Q}_T\varphi_0 = L_T L_T^* \varphi_0$ para todo $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. 1. Sea $G(t)$ otra matriz fundamental del sistema (3.4), entonces existe una matriz regular $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $G(t) = F(t)C$, para cualquier $t \in [0, T]$. Deducimos de este modo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_T^G &= G(T) \left(\int_0^T G(s)^{-1} B(s) B^*(s) G^*(s)^{-1} ds \right) G^*(T) \\ &= F(T)C \left(\int_0^T (F(s)C)^{-1} B(s) B^*(s) (C^* F^*(s))^{-1} ds \right) C^* F^*(T) \\ &= F(T)C C^{-1} \left(\int_0^T F(s)^{-1} B(s) B^*(s) F^*(s)^{-1} ds \right) C^{*-1} C^* F^*(T) \\ &= F(T) \left(\int_0^T F(s)^{-1} B(s) B^*(s) F^*(s)^{-1} ds \right) F^*(T) = \mathcal{Q}_T^F. \end{aligned}$$

2. Probemos a continuación el segundo ítem. Usando de nuevo la Observación 3.10 deducimos:

$$L_T^* \varphi_0 = B^*(\cdot) \varphi(\cdot) = B^*(t) G(t) G(T)^{-1} \varphi_0 = B^*(t) F^*(t)^{-1} F^*(T) \varphi_0 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Aplicando ahora el operador L_T y teniendo en cuenta la Observación 3.7 obtenemos:

$$\begin{aligned} L_T L_T^* \varphi_0 &= L_T (B^*(\cdot) F^*(\cdot)^{-1} F^*(T) \varphi_0) \\ &= \int_0^T F(T) F(s)^{-1} B(s) B^*(s) F^*(s)^{-1} F^*(T) \varphi_0 ds = \mathcal{Q}_T \varphi_0. \end{aligned}$$

Con esto concluye la prueba. \square

Teorema 3.15. *El sistema (3.1) es controlable en el tiempo T si y solo si $\det \mathcal{Q}_T \neq 0$.*

Demostración. Hemos probado en la Proposición 3.11 que el sistema (3.1) es controlable en el instante T si y solo si $\ker(L_T^*) = \{0\}$. Veamos ahora una caracterización de $\ker(L_T^*)$. Sea $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces, $\varphi_0 \in \ker(L_T^*)$ si y solo si $\varphi \neq 0$ y $L_T^* \varphi_0 = 0$, es decir, si y solo si $\varphi_0 \neq 0$ y

$$0 = (L_T^* \varphi_0, L_T^* \varphi_0)_{L^2} = (\varphi_0, L_t L_T^* \varphi_0)_{\mathbb{R}^n} = (\varphi_0, \mathcal{Q}_T \varphi_0)_{\mathbb{R}^n}.$$

En la igualdad anterior hemos usado la Proposición 3.3. De esta Proposición también deducimos que \mathcal{Q}_T es simétrica y semidefinida positiva. Pero como $\varphi_0 \neq 0$ esto es equivalente a que $\mathcal{Q}_T \varphi_0 = 0$, lo cual se tiene si y solo si $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \in \ker \mathcal{Q}_T$ que nos lleva a que $\det \mathcal{Q}_T = 0$. Con esto concluye la prueba. \square

Observación 3.13. Del Teorema 3.15 tenemos que:

$$\ker L_T^* \equiv \ker \mathcal{Q}_T,$$

y entonces:

$$R(L_T) = \overline{R(L_T)} \equiv (\ker L_T^*)^\perp \equiv (\ker \mathcal{Q}_T)^\perp.$$

Observación 3.14. El gramiano y la controlabilidad del sistema (3.1) depende fuertemente del intervalo de tiempo elegido.

Por ejemplo, para $n = m = 1$ si consideramos el sistema con:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_0, \\ 1 & t > T_0, \end{cases}$$

entonces se tiene que $\det \mathcal{Q}_T = 0$ para todo $T \leq T_0$ y el sistema (3.1) no es controlable en el tiempo T .

3.4. Control de Norma Mínima

Consideremos el sistema (3.1). En esta sección vamos a suponer que el sistema (3.1) es controlable en el instante T , es decir, que $\det \mathcal{Q}_T \neq 0$, siendo \mathcal{Q}_T la matriz dada en la Definición 3.7. Si tenemos que $\det \mathcal{Q}_T \neq 0$ vamos a ver que podemos encontrar infinitos controles que resuelven nuestro problema. Nos surgiría la duda de cuál es más conveniente utilizar. Esta pregunta tiene fácil respuesta. Utilizaremos aquel cuya norma (en $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$) sea mínima.

Como hemos comentado en general, el control u que proporciona el resultado de controlabilidad para (3.1) no es único. De este modo podemos definir el siguiente conjunto:

Definición 3.8. Consideremos el sistema (3.1) con dato inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_d \in \mathbb{R}^n$, llamamos **espacio de controles** y lo denotamos por $\mathcal{U}(y_0, y_d; T)$ al conjunto:

$$\mathcal{U}(y_0, y_d; T) = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : y_u(T) = y_d\},$$

donde $y_u(t)$ es la solución del sistema (3.1) con dato inicial y_0 , asociada al control u .

El objetivo principal de esta sección será demostrar:

Teorema 3.16. *En las condiciones anteriores, el problema:*

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u(t)|^2 dt \\ u \in \mathcal{U}(y_0, y_d; T), \end{cases} \quad (3.11)$$

tiene una única solución $\hat{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ que tiene la forma:

$$\hat{u} = B^*(t)F^*(t)^{-1}F^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0), \quad (3.12)$$

y cuya norma viene dada por:

$$\|\hat{u}\|_{2;(0,T)}^2 = (\mathcal{Q}_T^{-1}(y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0), y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0). \quad (3.13)$$

Demostración. Como hemos supuesto que el sistema (3.1) es controlable en el tiempo T , se verifica que $\mathcal{U}(y_0, y_d; T) \neq \emptyset$.

Recordamos la definición del operador L_T (ver (3.9))

$$L_T : u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow L_T u = y(T) \in \mathbb{R}^n,$$

que a cada control u nos asocia la solución del sistema (3.8) asociada a dicho control en el instante T . Teniendo esto en cuenta, así como la linealidad del problema (3.1), podemos escribir el conjunto $\mathcal{U}(y_0, y_d; T)$ como:

$$\mathcal{U}(y_0, y_d; T) = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : L_T u = y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0\}.$$

A partir de ahora denotaremos:

$$\tilde{y}_d = y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0.$$

Ahora bien, sea $v \in \mathcal{U}(y_0, y_d; T)$. Por la linealidad de nuestro sistema (3.1) podemos expresar $\mathcal{U}(y_0, y_d; T)$ como:

$$\mathcal{U}(y_0, y_d; T) = L_T^{-1}(\{\tilde{y}_d\}) = v + \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : L_T u = 0\} = v + \ker(L_T),$$

de lo que deducimos que $\mathcal{U}(y_0, y_d; T)$ es una variedad afín cerrada no vacía de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Antes de continuar con la demostración, necesitamos un resultado relacionado con el Teorema de la Proyección:

Teorema 3.17. *Sean H un espacio de Hilbert, $v_0 \in H$ y M un subespacio vectorial cerrado de H . Entonces, existe una única solución $\hat{u} \in v_0 + M$ de:*

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{u} \in v_0 + M, \\ \|\hat{u}\|_H = \inf_{v \in v_0 + M} \|v\|_H. \end{cases}$$

Además, \hat{u} está caracterizado por:

$$\boxed{\hat{u} \in v_0 + M, \quad \hat{u} \in M^\perp.}$$

Como buscamos la solución en $\mathcal{U}(y_0, y_d; T)$, estamos en condiciones de aplicar este resultado y deducir que el problema (3.11) tiene una única solución $\hat{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Además, está caracterizada por

$$\hat{u} \in \mathcal{U}(y_0, y_d; T), \quad (\hat{u}, v) = 0 \quad \forall v \in \ker(L_T),$$

o lo que es lo mismo, se tiene que $(\hat{u}, v) = 0$ para todo $v \in \ker(L_T) = \text{Im}(L_T^*)^\perp$, con L_T^* tal y como definimos en la Definición 3.6. Por tanto, se tiene que:

$$\hat{u} \in \mathcal{U}, \quad \hat{u} \in \text{Im}(L_T^*),$$

lo cual es equivalente a que:

$$L_T \hat{u} = y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0 = \tilde{y}_d, \quad \hat{u} = L_T^*(\hat{\varphi}_0) \text{ con } \hat{\varphi}_0 \in \mathbb{R}^n,$$

que nos lleva a que

$$L_T L_T^*(\hat{\varphi}_0) = \tilde{y}_d \Leftrightarrow \hat{u} = L_T^*(\mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d),$$

donde hemos tenido en cuenta que $\mathcal{Q}_T \varphi_0 = L_T L_T^* \varphi_0$ para todo $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ (tal y como probamos en la Proposición 3.14). Teniendo en cuenta la expresión de L_T^* vista en la Observación 3.10 llegamos a que:

$$\boxed{\hat{u} = B^*(t)F^*(t)^{-1}F^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0).}$$

Esto prueba (3.12).

Ahora vamos a obtener el valor de la norma de este control:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{2;(0,T)}^2 &= \int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds = \int_0^T |B^*(s)F^*(s)^{-1}F^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d|^2 ds \\ &= \left(\int_0^T F(T)F(s)^{-1}B(s)B^*(s)F^*(s)F^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d ds, \mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d \right) \\ &= (\mathcal{Q}_T\mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d, \mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d) \\ &= (\mathcal{Q}_T^{-1}\tilde{y}_d, \tilde{y}_d), \end{aligned}$$

es decir, el control de norma mínima tiene como norma:

$$\|\hat{u}\|_{2;(0,T)}^2 = (\mathcal{Q}_T^{-1}(y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0), y_d - F(T)F(0)^{-1}y_0).$$

Esto prueba (3.13) y concluye la demostración. \square

De esta forma, hemos podido caracterizar el control que nos dará la norma mínima. No obstante, al tener una expresión dependiente de la matriz fundamental, en general, no será sencillo su cálculo. Ahora bien, en vista de la expresión concreta de \hat{u} y de su norma, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.18. *Supongamos que $y_0 = 0$ y consideremos \hat{u} dado por (3.12) con $y_d \in \mathbb{R}^n$. Entonces la aplicación:*

$$\begin{aligned} C_T : \mathbb{R}^n &\rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \\ y_d &\mapsto \hat{u}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

es lineal y continua para todo $y_d \in \mathbb{R}^n$.

Esta aplicación tendrá relevancia en el Capítulo 6 ya que su norma será la que nos proporcione el coste del control. En ese capítulo estudiaremos qué le ocurre a la norma de esta aplicación cuando $T \rightarrow 0$.

Capítulo 4

La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales Autónomos y No Autónomos

4.1. La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales Autónomos

En el capítulo anterior, hemos encontrado una condición necesaria y suficiente para estudiar si nuestro sistema (3.1) es controlable en un tiempo T . No obstante, para aplicar esta condición es necesario conocer la matriz fundamental de nuestro sistema, lo cual, salvo en algunos casos, como sistemas con coeficientes constantes, no es fácil de calcular.

En este capítulo pretendemos encontrar una condición necesaria y suficiente para estudiar la controlabilidad de un sistema lineal pero de tipo algebraico y que los cálculos necesarios puedan ser realizados sin el conocimiento de la matriz fundamental asociada.

En el caso de sistemas lineales autónomos de dimensión finita es un resultado bien conocido denominado como la **Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales Autónomos** y debido al matemático Rudolf E. Kalman et al. en su artículo *Controllability of linear dynamical systems* publicado en el año 1963.

Para ello consideremos el sistema lineal autónomo:

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $n, m \geq 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, siendo ambas matrices con coeficientes constantes, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y nuestro control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Para poder enunciar la Condición de Rango de Kalman es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 4.1. Consideremos el sistema (4.1). Se define la **matriz de controlabilidad** como:

$$[A|B] := [B|AB|A^2B|A^3B|\dots|A^{n-1}B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nm}; \mathbb{R}^n).$$

Teniendo en cuenta esta definición, pasamos a estudiar la Condición de Rango de Kalman. Se tiene:

Teorema 4.1. *Consideremos el sistema (4.1). Se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. El sistema (4.1) es controlable en el tiempo T , para todo $T > 0$.
2. Existe un $T > 0$ para el que el sistema (4.1) es controlable en el tiempo T .
3. $\text{Rango}[A|B] = n$ (esta condición se conoce como **Condición de Rango de Kalman**).

Antes de realizar la prueba conviene recordar el **Teorema de Caley-Hamilton**, el cual nos va a ser útil para la demostración.

Teorema 4.2. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ una matriz. Si*

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_n$$

es el polinomio característico de la matriz A , entonces $p(A) = 0$, i.e.,

$$A^n = a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n.$$

Demostración. Sea $B = \text{Adj}(\lambda I_n - A)$, la matriz adjunta de $(\lambda I_n - A)$. De las propiedades de las matrices adjuntas ($\text{Adj}(C) \cdot C = C \cdot \text{Adj}(c) = \det C$), deducimos que

$$(\lambda I_n - A)B = \det(\lambda I_n - A) = p(\lambda)I_n.$$

La matriz B tiene polinomios en λ como entradas. Podemos descomponer B en submatrices en función de las potencias λ^i :

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i.$$

Ahora, desarrollamos el producto

$$\begin{aligned} p(\lambda)I_n &= (\lambda I_n - A)B = (\lambda I_n - A) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i+1} B_i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i A B_i \\ &= \lambda^n B_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i (B_{i-1} - A B_i) - A B_0. \end{aligned}$$

Recordando la expresión del polinomio característico, $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_n$, llegamos a una igualdad entre dos matrices cuyas entradas son polinomios y que

están escritas como combinación lineal de matrices de coeficientes constantes cuyas entradas son potencias de λ .

Para que se dé esta igualdad las matrices de entradas constantes con coeficientes λ^i tienen que ser iguales, lo que nos lleva a:

$$\begin{cases} B_{n-1} = I_n, \\ B_{i-1} - AB_i = a_{n-i}I_n & 1 \leq i \leq n-1, \\ -AB_0 = a_0I_n. \end{cases}$$

Finalmente, multiplicamos las igualdades anteriores, respectivamente por A^i a izquierda y sumamos:

$$A^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (A^i B_{i-1} - A^{i+1} B_i) - AB_0 = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n.$$

El lado izquierdo es una suma telescópica que se anula, lo que nos lleva que $p(A) = 0$, como queríamos demostrar. \square

Habiendo recordado este teorema, procedemos a demostrar la Condición de Rango de Kalman:

Demostración del Teorema 4.1. Sabemos que $F(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, es una matriz fundamental asociada al sistema $z' = Az$. Entonces se tiene que (véase Definición 3.7):

$$\mathcal{Q}_T = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} ds.$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Esta implicación es inmediata. Si el sistema (4.1) es controlable para todo $T > 0$, en concreto existe un $T > 0$ para el que es controlable.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que (4.1) no es controlable en el tiempo $T > 0$. Por el Teorema 3.15, sabemos que esto ocurre si y solo si $\det \mathcal{Q}_T = 0$, lo cual, de la prueba de ese mismo teorema, sabemos que se da si solo si existe $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\varphi_0^* \mathcal{Q}_T \varphi_0 = 0$ es decir:

$$\int_0^T |\varphi_0^* e^{(T-s)A} B|^2 ds = 0.$$

Esto se da si y solo si para $\alpha(t) := \varphi_0^* e^{(T-t)A} B \in \mathbb{R}^m$ se verifica que $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Cabe remarcar que α es una función analítica en $[0, T]$. Entonces, $\alpha \equiv 0$ en $[0, T]$ lo cual se tiene si y solo si

$$\frac{d^k \alpha}{dt^k}(T) = (-1)^k \varphi_0^* A^k B = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (4.2)$$

Tenemos por tanto que $\varphi_0 \neq 0$ y que $\varphi_0^* [A|B] = 0$ lo que es equivalente a que $\text{Rango}[A|B] < n$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Si $\text{Rango}[A|B] < n$, entonces existe $\varphi_0 \neq 0$ con $\varphi_0^*[A|B] = 0$, es decir, $\varphi_0^*A^k B = 0$ para todo k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

Usando el Teorema de Caley-Hamilton, Teorema 4.2, deducimos que

$$\varphi_0^*A^k B = 0, \quad \forall k \geq 0$$

y volvemos a obtener (4.2). Por tanto, $\varphi_0^*Q_T\varphi_0 = 0$ y el sistema (4.1). Con esto concluye la demostración. \square

Observación 4.1. Cabe destacar que gracias a este teorema, si $\text{Rango}[A|B] = n$, ya sabemos que podemos controlar nuestro sistema (4.1) en el tiempo T , para cualquier $T > 0$. Esto tiene una gran importancia, ya que acabamos de proporcionar un método puramente algebraico para poder estudiar la controlabilidad de un sistema con coeficientes constantes. La matriz $[A|B]$ la podemos calcular haciendo uso de cualquier tipo de software de cálculo.

Vamos a ver un ejemplo de aplicación de este Teorema.

Ejemplo 4.1. Recuperamos el Ejemplo 3.1. En este ejemplo, considerábamos el sistema 4.1 $n = 2$, $m = 1$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vimos como el sistema con $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no era controlable, ya que la primera componente y_1 de y era independiente del control u . Ahora lo podemos ver aplicando la Condición de Rango de Kalman (Véase el Teorema 4.1):

$$[A|B]_1 = [B_1|AB_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que es inmediato comprobar que su rango es $1 < n = 2$. Por tanto, el sistema no es controlable. No obstante, en ese ejemplo, habíamos anunciado que si considerábamos $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ el sistema sí sería controlable. Veámoslo:

$$[A|B]_2 = [B_2|AB_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual efectivamente tiene rango $2 = n$ y por la Condición de Rango de Kalman comprobamos que el sistema sí es controlable.

Pasamos a probar un resultado que nos permitirá caracterizar los estados alcanzables desde $y_0 \in \mathbb{R}^n$

Proposición 4.3. (*Caracterización de los estados alcanzables desde y_0 .*) Consideremos el sistema (4.1). Denotemos por

$$X := \text{Span}\{A^k Bv : v \in \mathbb{R}^m, 0 \leq k \leq n - 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Entonces, se verifica:

$$y_d \in \mathcal{R}(T; y_0) \Leftrightarrow y_d - e^{TA}y_0 \in X$$

Demostración. Para la prueba de esta proposición, introducimos la aplicación lineal:

$$l_n : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$l_n(u_0, \dots, u_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B u_j.$$

Veremos que $\text{Im}(l_n) = \text{Im}(L_T)$ con L_T la aplicación definida como (3.9). para ello, tendremos en cuenta que $\text{Im}(l_n)$ e $\text{Im}(L_T)$ son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n . Como son subespacios de un espacio de dimensión finita, entonces son cerrados y así, todo consiste en probar que $\text{Im}(l_n)^\perp = \text{Im}(L_T)^\perp$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ y $u_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 0, \dots, n-1$. Se tiene que:

$$(L_T u, v)_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T (u(s), B^* e^{-sA^*} e^{TA^*} v)_{\mathbb{R}^m} ds. \quad (4.3)$$

Por otro lado tenemos que:

$$(l_n(u_0, \dots, u_{n-1}), v)_{\mathbb{R}^n} = (u_0, B^* v)_{\mathbb{R}^m} + \dots + (u_{n-1}, B^* (A^*)^{n-1} v)_{\mathbb{R}^m}.$$

Supongamos que $v \in \text{Im}(l_n)^\perp$. Entonces,

$$0 = (l_n(u_0, \dots, u_{n-1}), v)_{\mathbb{R}^n} \\ = (u_0, B^* v)_{\mathbb{R}^m} + \dots + (u_{n-1}, B^* (A^*)^{n-1} v)_{\mathbb{R}^m}, \quad \forall u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m.$$

En particular,

$$B^* (A^*)^k v = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Entonces, aplicando el Teorema de Caley-Hamilton (véase el Teorema 4.2) a la matriz A^* se verifica que:

$$(A^*)^n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (A^*)^k,$$

donde c_k son constantes. Entonces, por inducción, para $l \leq 0$ arbitrario, existen constantes $c_{l,k}$ tales que:

$$(A^*)^{n+l} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{l,k} (A^*)^k.$$

Entonces, $B^* (A^*)^k v = 0$ para todo $k \geq 0$. Teniendo en cuenta que, como A es de coeficientes constantes, $F(t) = e^{tA}$ y por tanto $F^*(t) = e^{tA^*}$, desarrollando en serie llegamos a que:

$$B^* e^{tA^*} v = \sum_{k=0}^{\infty} B^* (A^*)^k v \frac{t^k}{k!} = 0,$$

de donde deducimos que para $T > 0$ y $t \in [0, T]$ arbitrarios, se tiene que:

$$B^* e^{tA^*} v = 0,$$

lo que, teniendo en cuenta la expresión (4.3), nos lleva a que $(L_T u, v) = 0$ para cualquier $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ y $v \in \text{Im}(L_T)^\perp$.

Supongamos ahora que $v \in \text{Im}(L_T)^\perp$, es decir, $v \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$(L_T u, v)_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Entonces, de la expresión (4.3), se verifica que

$$B^* e^{(T-t)A^*} v = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

Evaluando (4.4) en $t = T$ obtenemos que $B^* v = 0$. Derivando $n - 1$ veces la expresión (4.4) con respecto a t , con $t \in [0, T]$ y evaluando cada derivada en $t = T$ obtenemos que

$$B^* (A^*)^k v = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

y por tanto:

$$(l_n(u_0, \dots, u_{n-1}), v)_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m.$$

Con lo que probamos que $\text{Im}(l_n) = \text{Im}(L_T)$.

Ahora bien, si $y_d \in \mathcal{R}(T; y_0)$ por la linealidad, esto es equivalente a que $y_d - e^{TA} y_0 \in \mathcal{R}(T; 0)$. Como $\mathcal{R}(T; 0) = \text{Im}(L_T)$, $y_d - e^{TA} y_0 \in \text{Im}(L_T)$. Acabamos de probar que $\text{Im}(l_n) = \text{Im}(L_T)$ por tanto $y_d - e^{TA} y_0 \in \text{Im}(l_n)$. Además, tal y como hemos definido la aplicación l_n , es inmediato comprobar que $\text{Im}(l_n) = X$ y por consiguiente se tiene que $y_d - e^{TA} y_0 \in X$. Para la otra implicación, simplemente debemos seguir este razonamiento en sentido opuesto. Con esto concluye la demostración. \square

Sea $\{\theta_l\}_{1 \leq l \leq \hat{p}} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los distintos autovalores de la matriz A^* (conocido como espectro de A^* y que denotaremos por $\sigma(A^*)$). Denotaremos por m_l , $1 \leq l \leq \hat{p}$ a la multiplicidad geométrica del autovalor θ_l y la secuencia $\{w_{l,j}\}_{1 \leq j \leq m_l}$ denotará a la base del espacio de autovectores asociado a θ_l . A continuación, introducimos el conocido como test de Hautus.

Teorema 4.4. *Consideremos el sistema (4.1). Bajo estas hipótesis, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. El sistema (4.1) es controlable en el tiempo T , para todo $T > 0$.
2. Se verifica el **test de Hautus**. $\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} = n$, para todo $l : 1 \leq l \leq \hat{p}$.
3. $\text{Rango}[B^* w_{l,1}, B^* w_{l,2}, \dots, B^* w_{l,m_l}] = m_l$, para todo $l : 1 \leq l \leq \hat{p}$.

Demostración. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un autovalor $\theta_l \in \sigma(A^*)$ tal que:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} < n.$$

Por tanto, existe $w_l \neq 0$ un autovector de A^* , es decir, que verifica que $(A^* - \theta_l I)w_l = 0$. También se tiene que $B^*w_l = 0$. Ahora bien, como estamos trabajando con un sistema autónomo, la solución del sistema:

$$\begin{cases} -\varphi' = A^*\varphi, \\ \varphi(T) = w_l, \end{cases}$$

vendrá dada por $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)}w_l = e^{\theta_l(T-t)}w_l$, (al ser θ_l un autovalor de A^* entonces se tiene que $A^*w_l = \theta_l w_l$). Recordando la expresión obtenida para L_T^* en la Observación 3.10 obtenemos que:

$$L_T^*w_l = e^{\theta_l(T-t)}B^*w_l = 0.$$

Por tanto, $\ker(L_T^*) \neq \{0\}$ y, por la Proposición 3.11, el sistema no puede ser controlable.

2 \Rightarrow 1 Tenemos que $\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} = n$, para todo $l : 1 \leq l \leq \hat{p}$. Volvemos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que $\text{Rango}[A|B] < n$. Esto se verifica si y solo si $\ker([A|B]^*) \neq \{0\}$. Por simplificar un poco la notación, denotamos por \mathcal{N} al $\ker([A|B]^*)$. Se tiene que $\dim \mathcal{N} \geq 1$ y que $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$. Tomemos $\varphi_0 \in \mathcal{N}$. Entonces se verifica:

$$\begin{cases} B^*\varphi_0 = 0, \\ B^*A^*\varphi_0 = 0, \\ \vdots \\ B^*(A^*)^{n-1}\varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Tomamos ahora $A^*\varphi_0$, entonces se tiene:

$$\begin{cases} B^*A^*\varphi_0 = 0, \\ \vdots \\ B^*(A^*)^{n-2}A^*\varphi_0 = 0, \\ B^*(A^*)^{n-1}A^*\varphi_0 = B^*(A^*)^n\varphi_0. \end{cases}$$

Si tuviéramos que $B^*(A^*)^n\varphi_0 = 0$ tendríamos que $A^*\varphi_0 \in \mathcal{N}$. En efecto, aplicando el Teorema de Caley-Hamilton (Teorema 4.2), sabemos que podemos expresar $(A^*)^n$ como combinación lineal de $A^i : 0 \leq i \leq n-1$, y como $\varphi_0 \in \mathcal{N}$, se tiene que $B^*(A^*)^n\varphi_0 = 0$ y que $A^*\varphi_0 \in \mathcal{N}$. Al ser \mathcal{N} de dimensión finita, existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ tal que $A^*w = \theta w$ y por tanto $\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta I_n \\ B^* \end{pmatrix} < n$.

2 \Rightarrow 3 Nuestra hipótesis es que $\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} = n$, para todo l tal que $1 \leq l \leq \hat{p}$. Fijemos l con $1 \leq l \leq \hat{p}$ y veamos que $\{B^*w_{l,1}, B^*w_{l,2}, \dots, B^*w_{l,m_l}\} \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto

linealmente independiente. Para ello, consideramos $a_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m_l} a_j B^* w_{l,j} = 0.$$

Usando esta expresión, si tomamos $w = \sum_{j=1}^{m_l} a_j w_{l,j}$, tenemos que w es autovector de A^* asociado a θ_l y es solución de

$$\begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} w = 0.$$

Usando el ítem 2, deducimos que $w = 0$, es decir,

$$\sum_{j=1}^{m_l} a_j w_{l,j} = 0.$$

Finalmente, usando que $\{w_{l,1}, \dots, w_{l,m_l}\}$ son linealmente independientes deducimos que $a_j = 0$ para todo $j : 1 \leq j \leq m_l$. Esto prueba el tercer punto del teorema.

3 \Rightarrow 2 Nuestra hipótesis equivale a que $\{B^* w_{l,1}, \dots, B^* w_{l,m_l}\}$ es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que $\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} < n$. Entonces, existe un $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ autovector de A^* asociado a θ_l tal que verifica que $(A^* - \theta_l I_n)w = 0$ y que $B^* w = 0$. De la condición de que w es un autovector de A^* tenemos que $w = \sum_{j=1}^{m_l} a_j w_{l,j}$. Por tanto:

$$B^* w = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m_l} a_j B^* w_{l,j} = 0,$$

que por la hipótesis implica que $a_j = 0$ para todo $j : 1 \leq j \leq m_l$. Por tanto

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} A^* - \theta_l I_n \\ B^* \end{pmatrix} = n,$$

lo cual concluye la prueba. \square

Observación 4.2. El conjunto $\{B^* w_{l,1}, B^* w_{l,2}, \dots, B^* w_{l,m_l}\}$ es un subconjunto de \mathbb{C}^m . Además, la condición 3 del teorema anterior también nos dice que el conjunto es linealmente independiente para cualquier $l : 1 \leq l \leq \hat{p}$. En particular,

$$m_l \leq m, \forall l : 1 \leq l \leq \hat{p}.$$

4.2. Forma canónica de Brunovsky

Consideremos de nuevo el sistema lineal autónomo:

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde B es un vector $m = 1$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y el control $u \in L^2(0, T)$. En este caso, la matriz de controlabilidad $[A|B]$ es una matriz cuadrada:

$$[A|B] = [B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B] := P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

y aplicando la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1) sabemos que el sistema (4.5) es controlable en el tiempo $T > 0$ si y solo si

$$\det P \neq 0.$$

En este caso, el sistema (4.5) podemos escribirlo de una forma más sencilla haciendo uso de la **Forma Canónica de Brunovsky del sistema** (4.5).

$$Pe_1 = B, \quad AP = PA_0 \quad \text{con} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

donde con e_i $i = 1, \dots, n$ denotamos a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n . De hecho, si $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ es el polinomio característico de A , entonces, aplicando el Teorema de Caley-Hamilton (Teorema 4.2) se tiene que $p(A) = 0$,

$$A^n = -a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} - \cdots - a_{n-1}A - a_nI_n,$$

y multiplicando por B a derechas obtenemos:

$$A^n B = -a_1A^{n-1}B - a_2A^{n-2}B - \cdots - a_{n-1}AB - a_nB.$$

Podemos ahora realizar el cambio de variables $z = P^{-1}y$ para así transformar el sistema (4.5) en un sistema en cascada:

$$\begin{cases} z' = A_0z + e_1u & \text{en } [0, T], \\ z(0) = P^{-1}y_0, \end{cases}$$

teniéndose que las propiedades de controlabilidad de los dos sistemas son equivalentes, facilitando el sistema en cascada los distintos cálculos a realizar.

Ejemplo 4.2. Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y escalares de orden n nos proporciona un ejemplo de sistema de dimensión n que es controlable con solo un control ($m = 1$) $u \in L^2(0, T)$:

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}z' + a_nz = u.$$

Para un sistema de este tipo, definimos unas nuevas variables $y_1 = z$, $y_2 = z'$, \dots , $y_n = z^{n-1}$) de modo que obtenemos un sistema equivalente de la forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_n' = -a_1 y_n - \dots - a_{n-1} y_2 - a_n y_1 + u. \end{cases}$$

Escribiéndolo en la forma $y' = Ay + Bu$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Teniendo esto en cuenta, la matriz de controlabilidad tendrá la siguiente estructura:

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \bullet \\ 1 & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

y por tanto, $\text{Rango}[A|B] = n$ y aplicando la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1) obtenemos que el sistema es controlable.

4.3. La Condición de Controlabilidad de Kalman para Sistemas Lineales No Autónomos

Volvemos ahora a trabajar con el problema de control variante con el tiempo

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

con $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ y:

$$A \in C^{M-2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ y } B \in C^{M-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \quad (4.7)$$

donde M es un entero $M \geq n$. Definimos:

$$\begin{cases} B_0(t) = B(t), \\ B_i(t) = A(t)B_{i-1}(t) - \frac{d}{dt}B_{i-1}(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

($1 \leq i \leq M-1$) y denotamos por $K_p(t) \in C^{M-p}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{np}; \mathbb{R}^n))$ a la función dada por:

$$K_p(t) := [B_0(t)|B_1(t)|\dots|B_{p-1}(t)] \in C^{M-p}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{np}; \mathbb{R}^n)).$$

Observación 4.3. Cuando las matrices A y B no dependen del tiempo, es decir, cuando el sistema (4.6) es autónomo, se verifica que:

$$K_n(t) \equiv [A|B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nm}; \mathbb{R}^n), \quad \forall t \in [0, T]$$

Con esta notación se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.5. Consideremos el sistema (4.6) en el que $A \in C^{M-2}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^{M-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ con M un entero $M \geq n$. Si existe un $t_0 \in [0, T]$ y $p \in \{1, \dots, M\}$ tales que

$$\text{Rango}(K_p(t_0)) = n, \quad (4.9)$$

entonces el sistema (4.6) es controlable en el tiempo T .

Este importante resultado podemos encontrarlo en [12].

Demostración. Supongamos que se tiene (4.9) para todo $t_0 \in [0, T]$ y $p : 1 \leq p \leq M$. Por contradicción, supongamos que el sistema (4.6) no es controlable en el tiempo T . Entonces se verifica la siguiente condición para el gramiano (véase el Teorema 3.15):

$$\exists \varphi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tal que } \varphi_0^* \mathcal{Q}_T \varphi_0 = 0.$$

Por tanto, teniendo en cuenta la definición del gramiano de controlabilidad (Definición 3.7), se tiene que:

$$\int_0^T |\varphi_0^* F(T) F(t)^{-1} B(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow \varphi_0^* F(T) F(t)^{-1} B(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ahora, definimos $\tilde{\varphi}_0^* := \varphi_0^* F(T) F(t_0)^{-1} \neq 0$ y llamaremos:

$$\alpha(t) = \tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} B(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

De las propiedades de regularidad que hemos impuesto a A y B deducimos que $\alpha \in C^{M-1}([0, T], \mathbb{R}^m)$ y además se verifica que:

$$\begin{aligned} F(t)^{-1} F(t) = I_n &\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(t)^{-1}]F(t) + F(t)^{-1}A(t)F(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(t)^{-1}] = -F(t)^{-1}A(t). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}(t) &= -\tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} A(t) B(t) + \tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} B'_0(t) \\ &= -\tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} [A(t) B_0(t) - B'_0(t)] = -\tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} B_1(t), \quad \forall t \in [0, T].\end{aligned}$$

Por inducción, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d^k \alpha}{dt^k}(t) = (-1)^k \tilde{\varphi}_0^* F(t_0) F(t)^{-1} B_k(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k : 0 \leq k \leq M - 1$$

y por tanto se tiene que $\tilde{\varphi}_0^* B_k(t_0) = 0$ para todo $k : 0 \leq k \leq M - 1 \Rightarrow \text{Rango}(K_p(t_0)) < n$ para todo $p \in \{1, \dots, M\}$ llegando por tanto a una contradicción. Con esto concluye la demostración. \square

Observación 4.4. En este caso, no ocurre como cuando las matrices A y B eran autónomas, y la condición que acabamos de demostrar no es una condición necesaria. Es decir, este resultado nos proporciona una condición suficiente más débil que la del Teorema 4.1. Esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3. Tomemos $n = 2$, $m = 1$, $A \equiv 0$ y $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, T]$, con $b_1 \in C_0^\infty(0, T/2)$, $b_1 \in C_0^\infty(T/2, T)$ y

$$\int_0^T |b_1(t)|^2 dt \neq 0, \quad \int_0^T |b_2(t)|^2 dt \neq 0.$$

Veamos qué expresión tiene $K_p(t)$:

$$K_p = (B_0(t) | B_1(t) | \dots | B_{p-1}(t))$$

donde

$$\begin{cases} B_0(t) = B(t), \\ B_i(t) = -\frac{d}{dt} B_{i-1}(t) \end{cases}$$

y por tanto $K_p(t)$ presenta la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} b_1(t) & b'_1(t) & \dots & b_1^{(p-1)}(t) \\ b_2(t) & b'_2(t) & \dots & b_2^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

En vista de la forma de $K_p(t)$ está claro que $\text{Rango}(K_p(t_0)) = 1 < 2 = n$ para cualquier $t_0 \in [0, T]$. Ahora bien, $F(t) = Id$ es na matriz fundamental asociada al sistema $y' = A(t)y$

con $A \equiv 0$. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_T &= \int_0^T B(t)B^*(t) dt \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^T |b_1(t)|^2 dt & \int_0^T b_1(t)b_2(t) dt \\ \int_0^T b_1(t)b_2(t) dt & \int_0^T |b_2(t)|^2 dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^T |b_1(t)|^2 dt & 0 \\ 0 & \int_0^T |b_2(t)|^2 dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y si ahora calculamos $\det \mathcal{Q}_T$ obtenemos:

$$\det \mathcal{Q}_T = \begin{vmatrix} \int_0^T |b_1(t)|^2 dt & 0 \\ 0 & \int_0^T |b_2(t)|^2 dt \end{vmatrix} \neq 0$$

y por tanto, hemos visto que el sistema es controlable a pesar de no verificarse la condición de controlabilidad probada.

Teorema 4.6. *Supongamos que $A \in C^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$. Si existe $t \in [0, T]$ tal que:*

$$\text{Span}\{B_i(t)u \mid u \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n$$

entonces el sistema (4.6) es controlable en el tiempo T .

Demostración. Supongamos que el sistema (4.6) no es controlable. Entonces, por el Teorema 3.15 \mathcal{Q}_T no es invertible. Eso implica que existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{Q}_T y = 0$. Por tanto, se tiene que:

$$0 = y^* \mathcal{Q}_T y = \int_0^T |B^*(t)F^*(T)^{-1}F(t)y|^2 dt.$$

Definimos:

$$\alpha(t) := z^* F(t)F(T)^{-1}B(t),$$

con $z := F^*(T)^{-1}F^*(t)y$. Se verifica que $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Como las matrices fundamentales son invertibles, se tiene que $z, y \neq 0$. Usando la definición de B_i y siguiendo un razonamiento análogo al seguido en la demostración del Teorema 4.5 llegamos a que

$$\alpha^{(i)}(T) = z^* B_i(T) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

y como z^* no es nulo llegamos a una contradicción con la condición que hemos impuesto en el enunciado. □

En el caso en el que A y B sean funciones analíticas en $[0, T]$, sí tenemos una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad (omitiremos la prueba, pero podemos encontrarla en [3]):

Teorema 4.7. *En las condiciones anteriores, si las aplicaciones A y B son analíticas en $[0, T]$, entonces el sistema (4.6) es controlable en el tiempo T si y solo si:*

$$\forall t \in [0, T], \text{ Span}\{B_i(t)u \mid u \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

Capítulo 5

Método de Unicidad de Hilbert

En este capítulo vamos a introducir un método para resolver problemas de controlabilidad, para sistemas de dimensión finita, conocido como **Método de Unicidad de Hilbert** también denominado como HUM (de Hilbert Uniqueness Method). En este método nos van a interesar sistemas en los que el estado inicial es nulo $y(0) = 0$. Para este capítulo, seguiremos el desarrollo realizado en [3]. Consideremos de nuevo el sistema

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y + B(t)u(t) & \text{en } [0, T], \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

con $y(t) \in \mathbb{R}^n$, el control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, siendo $A \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$.

Consideremos ahora el problema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi' = A^*(t)\varphi(t), \\ \varphi(T) = \varphi_0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Observación 5.1. Los sistemas (5.1) y (5.2) están bien planteados para cualesquiera $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ y $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$. Por ejemplo, gracias a que $A \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ el sistema lineal $y' = A(t)y$ en $[0, T]$ tiene una matriz fundamental $F \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ que es absolutamente continua en $[0, T]$ y por tanto la solución del sistema (5.1) viene dada por la Fórmula de Duhammel (2.3). Del mismo modo, se tiene para el sistema adjunto (5.2).

Una vez visto que los sistemas (5.1) y (5.2) pasamos a demostrar el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *Consideremos $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Sea $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema de Cauchy (5.1). Sea $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema (5.2). Entonces se cumple la siguiente igualdad:*

$$y(T) \cdot \varphi_0 = \int_0^T u(t) \cdot B^*(t) dt.$$

Demostración. La prueba es directa teniendo en cuenta la Observación 5.1 las expresiones de las derivadas de y y φ .

$$\begin{aligned} y(T) \cdot \varphi_0 &= y(T)\varphi(T) - y(0)\varphi(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}(y(t) \cdot \varphi(t)) dt \\ &= \int_0^T [(A(t)y(t) + B(t)u(t)) \cdot \varphi(t) - y(t) \cdot A^*(t)\varphi(t)] dt \\ &= \int_0^T u(t) \cdot B^*(t)\varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración. \square

Definimos:

Definición 5.1. Sea Λ la siguiente aplicación:

$$\Lambda : \varphi_0 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y(T) \in \mathbb{R}^n,$$

donde $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)\bar{u}(t), \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

en el tomamos $\bar{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ definido como:

$$\bar{u}(t) := B^*(t)\varphi(t),$$

donde φ es la solución del problema adjunto (5.2).

Observación 5.2. La aplicación Λ viene dada por

$$\Lambda : \varphi_0 \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_T^*} B^*(t)\varphi(t) \xrightarrow{L_T} y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

con L_T la aplicación definida en (3.9) y L_T^* como hemos introducido en la Definición 3.6. Así, $\Lambda = L_T L_T^*$, es decir $\Lambda(\varphi_0) = L_T L_T^* \varphi_0$ y por la Proposición 3.14 se tiene que

$$\Lambda(\varphi_0) = \mathcal{Q}_T \varphi_0.$$

Una vez definida la aplicación Λ , probaremos el siguiente teorema:

Teorema 5.2. *Consideremos la aplicación Λ tal y como hemos introducido en la Definición 5.1. Entonces, se verifica que*

$$\mathcal{R}(0, T) = \Lambda(\mathbb{R}^n).$$

donde $\mathcal{R}(0, T)$ es el conjunto de estados alcanzables desde 0 en el tiempo T (Definición 3.4). Además, si $y_p = \Lambda(\varphi_0)$ y $u^* \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ es un control que nos lleva el sistema (5.1) de $y_0 = 0$ a y_p en el tiempo T , entonces

$$\int_0^T |\bar{u}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u^*(t)|^2 dt,$$

donde la igualdad se da si y solo si $u^* = \bar{u}$.

Demostración. Por la definición de la aplicación Λ se tiene:

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{R}(0, T).$$

Sea un estado y_d en $\mathcal{R}(0, T)$, que sabemos que es un conjunto no vacío. Consideremos un control $u^* \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución y^* del problema

$$\begin{cases} y^{*'} = A(t)y^* + B(t)u^*(t), \\ y^*(0) = 0, \end{cases}$$

alcanza y_d en el tiempo T . Sea $\Delta \subset L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ el conjunto de las aplicaciones de la forma $t \in [0, T] \mapsto B^*(t)\varphi(t)$ donde $\varphi(t)$ es solución del problema adjunto (5.2) para algún $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$. Este conjunto Δ es un subespacio vectorial de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Además, Δ es un subespacio de dimensión finita, ya que el problema adjunto tiene un número finito de soluciones linealmente independientes. Entonces, Δ es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Sea \tilde{u} la proyección ortogonal de u^* en Δ . Tenemos que:

$$\int_0^T u^*(t) \cdot u(t) dt = \int_0^T \tilde{u}(t) \cdot u(t) dt, \quad \forall u \in \Delta.$$

Sea $\tilde{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{y}' = A(t)\tilde{y} + B(t)\tilde{u} \\ \tilde{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Haciendo uso de la Proposición 5.1 se tiene

$$y_d \cdot \varphi_0 = \tilde{y}(T) \cdot \varphi_0, \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}^n,$$

lo que nos lleva a que

$$y_d = \tilde{y}(T).$$

Como $\tilde{u} \in \Delta$, entonces existe $\tilde{\varphi}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que la solución $\tilde{\varphi} \in \mathbb{R}^n$ del problema adjunto asociado al sistema (5.4),

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}' = -A^*(t)\tilde{\varphi} & \text{en } [0, T] \\ \tilde{\varphi}(T) = \tilde{\varphi}_0 \end{cases}$$

verifica:

$$\tilde{u}(t) = B^*(t)\tilde{\varphi}(t), \quad t \in [0, T].$$

Usando la definición de Λ y teniendo en cuenta (5.4)

$$\Lambda(\tilde{\varphi}_0) = \tilde{y}(T).$$

Como $y_d = \tilde{y}(T)$, entonces se tiene que $y_d = \Lambda(\tilde{\varphi}_0)$ lo que concluye la prueba de la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte, sea $y_d = \Lambda(\tilde{\varphi}_0)$, sea \bar{u} como hemos definido previamente (véase (5.3)) y sea

$$u^* \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

un control que lleva el sistema (5.1) del estado inicial 0 a y_d en $[0, T]$. Por la definición de Δ , se tiene que $\bar{u} \in \Delta$. Además, usando la proposición anterior, tenemos que:

$$\int_0^T u^*(t) \cdot u(t) dt = \int_0^T \bar{u}(t) \cdot u(t) dt, \quad \forall u \in \Delta.$$

Concluimos que \bar{u} es la proyección ortogonal de u^* en Δ . Así,

$$\int_0^T |u^*(t)|^2 dt = \int_0^T |\bar{u}(t)|^2 dt + \int_0^T |u^*(t) - \bar{u}|^2 dt.$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

Capítulo 6

Coste del Control

Una vez estudiada la controlabilidad de un sistema, nos podríamos preguntar cómo se ve afectado el control ante una disminución del tiempo T . Es lógico pensar que de alguna manera, si queremos alcanzar un estado determinado pero tenemos menos tiempo para conseguirlo, el esfuerzo o coste necesario para ello será mayor.

Podemos verlo con un sencillo ejemplo. Considerando un sistema bastante simplificado, si pudiéramos ir de Sevilla a Cádiz en línea recta, y queremos llegar en 3 horas, con nuestro coche iríamos a una determinada velocidad. No obstante, si queremos llegar en 2 horas tendríamos que ir a una velocidad mayor. Este incremento de velocidad, supondrá (en un modelo bastante simplificado en el que suponemos que el coche va siempre a la misma velocidad desde que comenzamos la marcha y sin tener en cuenta otros factores externos) que nuestro coche gastará más gasolina (asumiendo que a mayor velocidad mayor consumo) lo que significará en un coste económico mayor.

Desde un punto de vista matemático, el coste será valor de la norma del control en el espacio en el que nos encontremos. En este capítulo vamos a estudiar la dependencia de la norma de u con el tiempo T , en el que queremos alcanzar nuestro estado objetivo, para el caso de sistemas autónomos.

Para desarrollar este tema, nos hemos basado en los trabajos de Seidman en su artículo [9].

En este capítulo volvemos a considerar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ es el control. Supondremos que (6.1) es controlable, es decir, se satisface la Condición de Kalman (Teorema 4.1)

$$\text{Rango}[A|B] = n.$$

Sabemos que para cada $T > 0$ y para cada objetivo $y_d \in \mathbb{R}^n$ existen controles $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ con los que la solución $y(t)$ del sistema (6.1) con $y_0 = 0$ verifica $y(T) = y_d$. Hemos visto previamente, en la Sección 3.4, que debe existir un único control que minimiza

la norma $\|u\|_{2;(0,T)}$, el cual denominamos como control óptimo, $\hat{u} \in \mathcal{U}(0, y_d; T)$. Recordamos que $\mathcal{U}(0, y_d; T)$ es lo que hemos denominado como espacio de controles (ver Definición 3.8). Cabe esperar que para tiempos T cortos, el coste del control debe ser más elevado. Los controles en los que T es pequeño y el coste de los mismos es, por tanto, muy elevado, los denominaremos **Controles Violentos** o **Controles Rápidos**.

Recordamos la aplicación $C_T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m))$, definida en el Corolario 3.14, la cual, dado un estado objetivo y_d nos proporciona el control óptimo. En este capítulo, queremos estudiar cómo se ve afectada $\|C_T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m))}$ cuando $T \rightarrow 0$. El objetivo de este capítulo será demostrar el siguiente teorema:

Teorema 6.1. *En las condiciones anteriores:*

$$\|C_T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m))} \sim cT^{-(K+1/2)},$$

donde $c \neq 0$ es una constante (que determinaremos explícitamente) y K es el mínimo exponente para el que se verifica que:

$$\text{Rango}[B|AB|\dots|A^K B] = n.$$

Observación 6.1. Como hemos supuesto que el sistema (6.1) es controlable, K sera siempre menor o igual a $n - 1$, ya que al ser el sistema controlable se verifica la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1).

Demostración. Nos encontramos en el caso de coeficientes constantes, por tanto, el gramiano de controlabilidad \mathcal{Q} (véase la Definición 3.7) viene dado por:

$$\mathcal{Q}_T = \int_0^T e^{sA} B (e^{sA} B)^* ds. \quad (6.2)$$

Sabemos que \mathcal{Q}_T es una matriz autoadjunta y semidefinida positiva. De (3.13) sabemos que:

$$\|\hat{u}\|_{2;(0,T)}^2 = \|C_T y_d\|_{2;(0,T)}^2 = (\mathcal{Q}_T^{-1} y_d, y_d), \quad (6.3)$$

por tanto nuestro objetivo es ver cómo se comporta \mathcal{Q}_T asintóticamente.

Sea

$$W := \lim_{T \rightarrow 0} T^{-(2K+1)} \Gamma_T \mathcal{Q}_T \Gamma_T, \quad (6.4)$$

donde empleamos una familia de operadores Γ_T invertibles para $T \neq 0$, cuya estructura veremos posteriormente.

A partir de las matrices A y B del sistema (6.1) consideramos los siguientes subespacios, que construimos de forma recursiva:

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1} + \text{Span}(A^k B) \quad \text{con } \mathcal{S}_{-1} := \{0\},$$

de este modo se verifica que $\mathcal{S}_0 = \text{Span}(B)$, $\mathcal{S}_1 = \text{Span}(B) + \text{Span}(AB)$, \dots y por tanto cada \mathcal{S}_k es la imagen de $[B, AB, \dots, A^k B]$. Como hemos supuesto que el sistema es controlable,

para un cierto k lo suficientemente grande se debe verificar que $\mathcal{S}_k = \mathbb{R}^n$. El k mínimo para el que se verifica esta condición es el K que habíamos comentado en el enunciado del Teorema 6.1. Por como hemos definido los subespacios \mathcal{S}_k , estos vienen dados por:

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1} \oplus \mathcal{A}_k,$$

donde $\mathcal{A}_k \subset \text{Span}(A^k B)$, es decir, en cada paso le añadimos los elementos que forman la columna $A^k B$ que no están en las anteriores, por tanto, aquellos que forman la base de $\text{Span}(A^k B)$ y no están en \mathcal{S}_{k-1} , por lo que son ortogonales a los elementos de \mathcal{S}_{k-1} . Consideramos ahora:

$$E_k : v \in \mathbb{R}^n \mapsto E_k v \in \mathcal{A}_k.$$

E_k no es más que la proyección ortogonal sobre aquellos elementos de \mathcal{S}_k que no se encuentran en \mathcal{S}_{k-1} . Por la definición de E_k es inmediato que

$$E_k A^j B = 0, \quad \forall j < k \leq K,$$

ya que, como $j < k$ entonces se tiene que $\text{Span}(A^j B) \subset \mathcal{S}_{k-1} \subset \ker(E_k)$. Por el Teorema de Caley-Hamilton (Teorema 4.2) tenemos que $\dim \mathcal{S}_{k-1} < \dim \mathcal{S}_k$ para $k : 1 \leq k \leq K$, de donde obtenemos que $\dim \text{Im}(E_k) \neq 0$. La construcción de $\{E_k\}$ nos proporciona una descomposición en suma directa:

$$\begin{aligned} I_n &= E_0 + \cdots + E_K, \quad \mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=0}^K \text{Im}(E_k), \\ \mathcal{S}_k &= \text{Im}(E_0) \oplus \cdots \oplus \text{Im}(E_k) \text{ para } k = 0, \dots, K. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Teniendo esto en cuenta, tomamos:

$$\Gamma := \Gamma_T = \sum_{k=0}^K k! T^{K-k} E_k; \quad \Gamma_0 = K! E_K \neq 0, \quad (6.6)$$

de modo que $\Gamma_T = \Gamma_0 + \mathcal{O}(T)$ y tanto Γ_T como Γ_0 se identifican con matrices cuadradas. Además, con Γ definido de esta forma, tenemos que Γ es autoadjunto, ya que está formado por las proyecciones E_k .

Pretendemos ver que habiendo definido Γ de esta forma, se verifica (6.4) y además W es invertible. En primer lugar, de (6.2) tenemos que:

$$T^{-(2K+1)} \Gamma \mathcal{Q}_T \Gamma = \int_0^1 [T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B] [T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B]^* d\sigma,$$

donde hemos sustituido $s = T\sigma$. Teniendo en cuenta (6.6) y desarrollando en serie la exponencial obtenemos:

$$T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B = \sum_{k=0}^K k! T^{-k} E_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{j!} T^j A^j B = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k! \sigma^j}{j!} T^{j-k} E_k A^j B.$$

En este punto, es importante recordar, que para todo $j < k \leq K$ se tiene que $E_k A^j B = 0$, así que, el sumatorio anterior es considerablemente más simple, ya que, todos los términos en los que $j < k$ son nulos, de modo que no aparece ninguna potencia de T que sea negativa.

A continuación, separaremos los términos del sumatorio. Por un lado, tomamos aquellos en los que $j = k$, y por otro, en los que $j \geq k + 1$, para los que definimos $i = j - (k + 1)$. Está claro, que $i = 0, 1, \dots$. Teniendo esto en cuenta, es inmediato ver se verifica:

$$\begin{aligned} T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B &= \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k! \sigma^j}{j!} T^{j-k} E_k A^j B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k! \sigma^{i+k+1}}{(i+k+1)!} T^{i+1} E_k A^{i+k+1} B \\ &= \sum_{k=0}^K \sigma^k E_k A^k B + T \left[\sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k! \sigma^{i+k+1} T^i}{(i+k+1)!} E_k A^{i+k+1} B \right] \\ &= P(\sigma) + TR_1(T, \sigma). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Definido de esta forma, $P(\sigma)$ es una matriz $n \times m$. Nos interesa ver qué ocurre cuando $T \rightarrow 0$, así que, sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos a $T \leq 1$. Por tanto:

$$|R_1(T, \sigma)| \leq \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|_S^{i+k+1} |B|}{(i+1)!} = (1 + \dots + \|A\|_S^K) |B| (e^{\|A\|_S} - 1),$$

donde $\|\cdot\|_S$ es la norma espectral en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y con $|\cdot|$ estamos denotando la norma euclídea de los vectores que conforman la matriz correspondiente. Las acotaciones las hemos realizado teniendo en cuenta que la norma espectral es multiplicativa y que $(i+k+1)! \geq (i+1)!k!$.

Volviendo a (6.7) y teniendo en cuenta que estamos trabajando para el caso asintótico en el que T es pequeño, podemos decir que:

$$T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B = P(\sigma) + \mathcal{O}(T).$$

Operando llegamos a:

$$\begin{aligned} &(T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B)(T^{-K} \Gamma e^{T\sigma A} B)^* \\ &= P(\sigma)P^*(\sigma) + T[R_1(T, \sigma)P^*(\sigma) + P(\sigma)R_1^*(T, \sigma) + TR_1(T, \sigma)R_1^*(T, \sigma)] \\ &= P(\sigma)P^*(\sigma) + TR_2(T, \sigma). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la cota que hemos visto previamente para $R_1(T, \sigma)$, es inmediato comprobar que $R_2(T, \sigma)$ está uniformemente acotado. De que $R_2(\sigma, T)$ está uniformemente acotado deducimos inmediatamente que

$$R_3(T) := T \int R_2 d\sigma,$$

está uniformemente acotado. $\|R_3\|_S \leq M_3$ para todo $0 \leq T \leq 1$. Si ahora integramos en σ tenemos:

$$T^{-(2K+1)} \Gamma \mathcal{Q}_T \Gamma = W + TR_3(T), \tag{6.8}$$

donde:

$$\begin{aligned} W &:= \int_0^1 P(\sigma)P^*(\sigma) d\sigma = \int_0^1 \sum_{k=0}^K \sigma^j E_j A^j B \sum_{k=0}^K B^*(A^*)^k E_k \sigma^k d\sigma \\ &= \sum_{j,k=0}^K (j+k+1)^{-1} E_j A^j B B^*(A^*)^k E_k, \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde hemos usado (6.7).

Para poder continuar con la demostración, necesitamos el siguiente lema:

Lema 6.2. *En las condiciones que estamos trabajando, si $B^*(A^*)^k E_k y_d = 0$ entonces $E_k y_d = 0$.*

Demostración. Para cualquier $y_d \in \mathbb{R}^n$, tenemos, por definición, que $E_k y_d \in \mathcal{S}_k := \mathcal{S}_{k-1} + \text{Span}(A^k B)$. Así que:

$$E_k y_d = A^k B \eta + y'_d,$$

para algún $\eta \in \mathbb{R}^m$ y con $y'_d \in \mathcal{S}_{k-1}$. Entonces, si $y_d \in \mathbb{R}^n$ satisface $B^*(A^*)^k E_k y_d = 0$, se tiene

$$|E_k y_d|_{\mathbb{R}^n}^2 = (A^k B \eta + y'_d) \cdot (E_k y_d) = \eta \cdot [B^*(A^*)^k E_k y_d] + (E_k y'_d) \cdot y_d = 0,$$

ya que $E_k y'_d = 0$ para todo $y'_d \in \mathcal{S}_{k-1}$. \square

Volviendo a (6.9), si $y_d \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$y_d W y_d = \int_0^1 y_d^* [P(\sigma)P^*(\sigma)] y_d d\sigma = \int_0^1 \|P^*(\sigma) y_d\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\sigma, \quad \forall y_d \in \mathbb{R}^n.$$

De la expresión anterior deducimos que $W y_d = 0$ si y solo si $P^*(\sigma) y_d = 0$. Por otro lado, de la definición de $P(\cdot)$ (véase (6.7)), esto implica que todos los términos $\sigma^* B^* A^{*k} E_k y_d = 0$. Del Lema 6.2 deducimos que $E_k y_d = 0$, para todo $k : 0 \leq k \leq K$. Por último, teniendo en cuenta (6.5) deducimos también que $y_d \equiv 0$. Hemos probado que la matriz W es invertible.

Restringiéndonos al caso en el que $T \leq \frac{1}{2} M_3 \|W\|_S^{-1}$, de (6.8) se tiene:

$$(W + T R_3)^{-1} = W^{-1} (I_n + T W^{-1} R_3)^{-1} = W^{-1} + T R_4(T). \quad (6.10)$$

Obsérvese que si $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es una matriz con $\|M\|_S < 1$ se tiene que $I_n + M$ es regular, que

$$(I_n + M)^{-1} - I_n = M(I_n + M)^{-1} \text{ y } \|(I_n + M)^{-1}\|_S \leq \frac{1}{1 - \|M\|_S}.$$

Efectivamente, la primera igualdad es fácil de comprobar. Por otro lado, como $\|M\|_S < 1$, se tiene

$$(I + M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-M)^n \text{ y } \|(I_n + M)^{-1}\|_S \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|_S^n = \frac{1}{1 - \|M\|_S}.$$

Volviendo a (6.10), podemos acotar

$$\begin{aligned}
\|R_4\|_S &\leq \frac{\|W^{-1}\|_S \|(I_n + TW^{-1}R_3)^{-1} - I_n\|_S}{T} \\
&= \frac{\|W^{-1}\|_S \|(I_n + TW^{-1}R_3)^{-1}(I_n - I_n - TW^{-1}R_3)\|_S}{T} \\
&= \frac{\|W^{-1}\|_S T \|(I_n + TW^{-1}R_3)^{-1}(W^{-1}R_3)\|_S}{T} \\
&= \|W^{-1}\|_S \|W^{-1}R_3(I_n + TW^{-1}R_3)^{-1}\|_S \\
&\leq \|W^{-1}\|_S \|W^{-1}R_3\|_S \|(I_n + TW^{-1}R_3)^{-1}\|_S \\
&\leq \frac{\|W^{-1}\|_S \|W^{-1}R_3\|_S}{1 - T\|W^{-1}R_3\|_S} \leq 2M_3 \|W^{-1}\|_S^2, \quad \forall T \text{ tal que } 0 < T \leq \tau.
\end{aligned}$$

Al igual que antes $\|R_4\|_S$, se trata de la norma espectral. Ahora invertimos a ambos lados la expresión (6.8), lo cual no tenemos problemas para hacerlo siempre y cuando $T \neq 0$.

$$T^{2K+1}\Gamma_T^{-1}\mathcal{Q}^{-1}\Gamma_T^{-1} = W^{-1} + TR_4,$$

$$T^{2K+1}\mathcal{Q}^{-1} = \Gamma_T(W^{-1} + TR_4)\Gamma_T = \Gamma_0 W^{-1} \Gamma_0 + TR_5(T),$$

donde es inmediato ver que R_5 está uniformemente acotado en $0 < T \leq \tau$.

Terminemos ya la prueba de nuestro resultado. Teniendo en cuenta (6.3),

$$\begin{aligned}
\|C_T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m))}^2 &:= \max\{\|C_T y_d\|_{2; (0, T)}^2 : |y_d| = 1\} = \max\{y_d \mathcal{Q}^{-1} y_d : |y_d| = 1\} \\
&= \|\mathcal{Q}_T^{-1}\|_S = T^{-(2K+1)} [\|\Gamma_0 W^{-1} \Gamma_0\|_S + \mathcal{O}(T)].
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Entonces, llegamos a que:

$$\gamma := \|\Gamma_0 W^{-1} \Gamma_0\|_S^{1/2} = K! \|E_K W^{-1} E_K\|_S^{1/2}. \tag{6.12}$$

Veamos que $\gamma \neq 0$, es decir, que $E_K W^{-1} E_K \neq 0$. Efectivamente, como W es semidefinida positiva entonces se verifica que:

$$\begin{aligned}
\|E_K W^{-1} E_K\|_S &= \max\{y_d (E_K \mathcal{Q}^{-1} E_K y_d) : |y_d| = 1\} \\
&= \max\{y_d W^{-1} y_d : |y_d| = 1, y_d = E_K y_d\} \\
&= \|W|_{\text{Im}(E_K)}^{-1}\|_S.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Como $\text{Im}(E_K) \neq 0$, del carácter mínimo de K , deducimos que es distinto de 0. Terminamos por tanto la prueba del teorema. \square

Ejemplo 6.1. Si ahora nos restringimos al caso en el que $m = 1$, B es un vector que tiene n componentes y definimos:

$$\beta_0 = B; \quad \beta_k = A^k \beta_0 \quad k = 0, \dots, n-1.$$

La controlabilidad nos lleva a que $K = n - 1$. En este caso, se tiene que:

$$\|C_T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; L^2(0, T; \mathbb{R}^m))} \sim \gamma T^{-(n-1/2)} + \mathcal{O}(T^{-(n-3/2)}).$$

Calculemos γ . En primer lugar, $\{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\}$ es una base de \mathbb{R}^n y denotaremos por $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ una base ortonormal obtenida por el método de Gram-Schmidt. Así

$$E_k : \xi \mapsto (\xi \cdot \varepsilon_k) \varepsilon_k$$

y $B^*(A^*)^k E_k \xi$ pasa a $(\beta_k \varepsilon_k)(\xi_k \varepsilon_k)$ con $\xi_k = \xi \cdot \varepsilon_k$. De modo que:

$$W\xi = \sum_{j=0}^{K-1} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\beta_j \varepsilon_j)(\beta_k \varepsilon_k)}{j+k+1} (\xi \varepsilon_k) \right] \varepsilon_j,$$

esto prueba que en términos de la base $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$, la matriz $W = DHD$ con $D := \text{diag}[\beta_j \varepsilon_j]$ y H la matriz de Hilbert $n \times n$. La matriz de Hilbert $n \times n$ es aquella que tiene como entradas $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, \dots, n$. Así, se tiene:

$$\|E_K W^{-1} E_K\|_S = \varepsilon_K W^{-1} \varepsilon_K = (D^{-1} H^{-1} D^{-1})_{n,1} = (\beta_{n-1} \varepsilon_{n-1})^{-2} H_{n,1}^{-1},$$

de donde llegamos a que

$$\gamma = C_n (\beta_{n-1} \varepsilon_{n-1})^{-1},$$

con $C_n := (n-1)!(H_{n,1})^{1/2}$. C_n crece muy rápido con n , pero está controlado por la dimensión del espacio. Entonces la dependencia de nuestro sistema viene dada por $\beta_{n-1} \varepsilon_{n-1}$ que es la norma de la componente $A^{n-1} \beta_0$ ortogonal a $\text{span}\{\beta_0, \dots, A^{n-2} \beta_0\}$.

Volviendo al caso general, tenemos:

$$y(T; u(\cdot)) = y_d \Rightarrow \|u\|_{2;(0,T)} \geq \|C_T y_d\|_{2;(0,T)} = (y_d \mathcal{Q}^{-1} y_d)^{1/2}.$$

De (6.11), (6.12) y (6.13) tenemos:

$$\|C_T y_d\|_{2;(0,T)} = T^{-(K+1/2)} K! (E_k y_d \mathcal{Q}^{-1} E_k y_d)^{1/2} + \mathcal{O}(T^{-(K-1/2)}).$$

Asumiendo que $y_d E_k \neq 0$:

$$\|C_T y_d\|_{2;(0,T)} \sim (K! |W^{-1/2} y_d E_k|) T^{-(K+1/2)},$$

que nos da un comportamiento asintótico para todos los objetivos.

Acabamos de demostrar que conforme disminuimos el tiempo en el que queremos llevar a cabo nuestro control, el coste de este será proporcional a $T^{-(K+1/2)}$, es decir, el coste del control es inversamente proporcional al tiempo empleado para lograrlo. Este resultado concuerda con el razonamiento eurístico que hemos realizado previamente. Si queremos reducir el tiempo en el que alcanzar el objetivo, debemos asumir que el control que realicemos tendrá un coste mayor. Por tanto, en los distintos sistemas que pretendamos controlar tendremos que buscar un equilibrio entre el tiempo que tenemos para alcanzar el estado deseado, y el coste que nos supondrá el control necesario para ello.

Hemos probado el resultado cuando $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, no obstante, podemos encontrar una dependencia del coste del control con T cuando $u \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ o cuando $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Para estos espacios, el resultado es bastante más complicado de probar al no ser espacios de Hilbert. Como estamos trabajando con $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, hemos decidido no incluir estos resultados, no obstante se pueden encontrar en [10].

Capítulo 7

Aplicaciones Prácticas

Vamos a ver diversas aplicaciones prácticas que tienen los problemas de controlabilidad. En concreto, vamos a estudiar la controlabilidad de diversos sistemas físicos comunes como puede ser un oscilador armónico lineal. Todos los casos que estudiaremos, serán sistemas lineales autónomos, de modo que aplicaremos la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1) para estudiar su controlabilidad. En todos los sistemas que vamos a analizar, utilizaremos un único control ($m = 1$), es decir, $u \in L^2(0, T)$. Los sistemas que aquí analizaremos los podemos encontrar en [13].

En primer lugar, veremos tres ejemplos de problemas de controlabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n :

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = u.$$

En el Ejemplo 4.2 vimos que este tipo de sistemas eran controlable con un único control. No obstante, en este apartado vamos a obtenerlo para los distintos sistemas específicos para ver el significado desde un punto de vista más físico.

7.1. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

El primer sistema que estudiaremos es el de un objeto que experimenta un movimiento rectilíneo acelerado. En este sistema, el control u tendrá el significado físico de ser la fuerza responsable del movimiento. Este sistema simplificado podríamos utilizarlo para ver por ejemplo, que fuerza le tiene que suministrar el motor a un coche para llegar a un determinado lugar en un tiempo deseado.



Figura 7.1: Esquema de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

La ecuación que regula el comportamiento del sistema es:

$$m\ddot{x}(t) = u(t), \quad (7.1)$$

En primer lugar, para estudiar la controlabilidad de la ecuación (7.1) pasamos la ecuación a su forma equivalente como sistema diferencial ordinario de primer orden. Para ello definimos dos nuevas variables $y_1 = x$ e $y_2 = \dot{x}$ de modo que obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{1}{m}u. \end{cases}$$

Escribimos el sistema en la forma $y' = Ay + Bu$ resultando:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Teniendo esto en cuenta calculamos la matriz de controlabilidad:

$$[A|B] = [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que $\text{Rango}[A|B] = 2$, y por tanto, aplicando la Condición de rango de Kalman (Teorema 4.1) acabamos de demostrar que (7.1) es controlable.

En este caso sencillo, vamos a comprobar la controlabilidad aplicando también el Test de Hautus (Teorema 4.4). Se tiene:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Calculamos los autovalores de A^* :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Tenemos por tanto un único autovalor, al cual le aplicamos el Test de Hautus y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} A^* - \lambda I_2 \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix},$$

lo cual, es inmediato comprobar que tiene rango 2 tal y como esperábamos. Por tanto acabamos de verificar que un sistema que se rige por un movimiento uniformemente acelerado

donde el control u hace el papel de la fuerza, es controlable para cualquier $T > 0$ y para cualquier objetivo. Esto quiere decir que a partir de la posición inicial, podremos alcanzar cualquier otra posición en el tiempo que deseemos modificando el valor de la fuerza que aplicamos a nuestro sistema. Desde un punto físico, es lo que cabría esperar. Si tenemos un sistema que se mueve por un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, variando el valor de la fuerza, podemos conseguir, siempre y cuando no tengamos algún tipo de restricción extra, alcanzar la posición que deseemos en un tiempo determinado. No hemos considerado diversas restricciones físicas al control u . Por ejemplo, si la distancia que tiene que recorrer el sistema es demasiado grande y el tiempo demasiado pequeño podríamos tener que alcanzar velocidades que no tengan sentido físico al ser mayores que la de la luz. A la hora de estudiar un problema concreto de este tipo tenemos que tener en cuenta este tipo de restricciones, así como otras asociadas, por ejemplo, al coste del control.

7.2. Oscilador Armónico Lineal

Ahora trabajaremos con uno de los sistemas más comunes en física como puede ser el oscilador armónico lineal. Podemos considerarlo como un muelle de masa despreciable al que se le acopla una masa al final de este y se hace oscilar. La ecuación resultante es la siguiente:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad (7.2)$$

donde m es la masa que acoplamos y k la constante elástica del muelle. Al igual que en el caso anterior, al control u podemos proporcionarle el significado de una fuerza que aplicamos sobre el muelle.

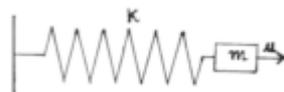


Figura 7.2: Esquema de un oscilador armónico lineal.

Pasamos a estudiar la controlabilidad de la ecuación (7.2), para ello denotamos $x = y_1$ y $\dot{x} = y_2$, resultando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 + \frac{1}{m}u, \end{cases}$$

al igual que previamente, sin pérdida de generalidad supondremos que $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$. Escribimos el sistema en la forma $y' = Ay + Bu$ resultando:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ lo que nos lleva a que la matriz de controlabilidad $[A|B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, calculamos la matriz de controlabilidad:

$$[A|B] = [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que la matriz de controlabilidad tiene rango 2, por tanto, por la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1) acabamos de demostrar que el sistema es controlable siempre y cuando $m \neq 0$, lo cual tiene completo sentido físico, siguiendo un razonamiento análogo al que hemos empleado en el caso del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

7.3. Circuito RLC

Ahora vamos a estudiar un circuito bastante común en electrónica como puede ser un circuito RLC sin fuente. En la siguiente figura, podemos ver un esquema de este tipo de circuito:

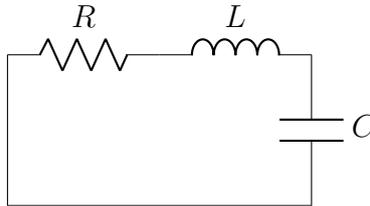


Figura 7.3: Esquemático de un circuito RLC sin fuente.

La ecuación que regula el comportamiento de este tipo de circuito viene dada por:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u, \quad (7.3)$$

donde $q(t) = \int_0^t i dt$ es la carga acumulada en el condensador e i la intensidad que circula por el circuito, de donde llegamos a:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q + \frac{1}{L}u. \end{cases} \quad (7.4)$$

En este caso, la u la podemos entender como algún tipo de elemento que añadamos a nuestro circuito para obtener el resultado deseado. Como en las ocasiones anteriores, supondremos

que $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$. Denotaremos $q = y_1$ e $i = y_2$ resultando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{R}{L}y_2 - \frac{1}{LC}y_1 + \frac{1}{L}u. \end{cases}$$

Expresando el sistema en la forma $y' = Ay + Bu$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ obteniéndose que $[A|B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pasamos a calcular la matriz de controlabilidad, obteniendo:

$$[A|B] = [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que el rango de $[A|B]$ es 2, por tanto, aplicando la Condición de Rango de Kalman acabamos de comprobar que el sistema (7.4) es controlable para cualquier $T > 0$.

Desde un punto de vista físico, tal y como hemos comentado previamente, esto podemos entenderlo que siempre añadiendo un elemento al circuito podremos conseguir el resultado deseado. No obstante, este caso es algo más complicado, ya que, podría darse el caso de que lo que necesitemos sea imposible de conseguir, ya por los elevados costes de fabricación para conseguirlo o por simplemente las limitaciones tecnológicas que nos encontremos. Además, los elementos de circuitos tienen cierta tolerancia en sus valores, variando entre uno y otro hasta dentro de elementos del mismo modelo y fabricados por el mismo fabricante. Estas pequeñas discrepancias pueden suponer que la salida de nuestro circuito sea bastante diferente a lo esperado y no consigamos el resultado deseado.

7.4. Amortiguador de un Coche

Pasamos a estudiar un sistema más complicado, como puede ser el sistema del amortiguador de un coche. Al fin y al cabo, un amortiguador está formado por una serie de elementos que absorben la energía procedente de los diversos baches que presenta el terreno, para que de este modo la conducción sea lo más cómoda posible, evitando, por

ejemplo, que el coche rebote al pasar un resalto. El sistema que regula el funcionamiento de los amortiguadores (con un carácter simplificado) viene dado por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -k_1x_1 - d_1\dot{x}_1 + l_1u, \\ \ddot{x}_2 = -k_2x_2 - d_2\dot{x}_2 + l_2u. \end{cases} \quad (7.5)$$

donde k_1 y k_2 son las constantes elásticas de los amortiguadores; d_1 , d_2 los coeficientes de arrastre (o de amortiguamiento) de los mismos y l_1 y l_2 los parámetros asociados al control. Definimos $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = \dot{x}_2$. Teniendo esto en cuenta, el sistema (7.5) es equivalente a:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -k_1y_1 - d_1y_2 + l_1u, \\ y'_3 = y_4, \\ y'_4 = -k_2y_3 - d_2y_4 + l_2u. \end{cases}$$

Escribiéndolo en la forma $y' = Ay + Bu$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2 & -d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$ obteniendo

que $[A|B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Calculamos la matriz de controlabilidad (omitimos todos los cálculos intermedios, los cuales podemos realizar con un software de cálculo simbólico):

$$[A|B] = [B|AB|A^2B|A^3B] = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & -d_1l_1 & -k_1l_1 + d_1^2l_1 \\ l_1 & -d_1l_1 & -k_1l_1 + d_1^2l_1 & -d_1^3l_1 + 2k_1d_1l_1 \\ 0 & l_2 & -d_2l_2 & -k_2l_2 + d_2^2l_2 \\ l_2 & -d_2l_2 & -k_2l_2 + d_2^2l_2 & -d_2^3l_2 + 2k_2d_2l_2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de esta matriz usando un software de cálculo simbólico (en este caso empleamos Maxima) obteniendo:

$$\det[A|B] = l_1^2l_2^2 [(k_2 - k_1)^2 + (d_1 - d_2)(k_2d_1 - k_1d_2) + 2(d_2^3 - d_1^3)(d_1 + d_2)]. \quad (7.6)$$

Por la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1), el sistema será controlable si y solo si $\text{Rango}[A|B] = n$ lo que es equivalente a que $\det[A|B] \neq 0$. En vista de (7.6) tenemos que la controlabilidad del sistema (7.5) no depende de l_1 y l_2 (suponiendo que estos coeficientes no

sean nulos), Por otro lado, vemos que la controlabilidad depende de los distintos parámetros del sistema. Un caso interesante es cuando $d_1 = d_2$. En este caso, se tiene:

$$\det[A|B] = l_1^2 l_2^2 (k_2 - k_1),$$

que será distinto de 0 siempre y cuando $k_2 \neq k_1$. Desde un punto de vista físico, nos lleva a que si los parámetros d_1 y d_2 son iguales, las constantes elásticas de los muelles, que conforman el amortiguador, tienen que ser distintas si queremos que el sistema sea controlable.

El control tiene el significado de añadir un nuevo elemento al sistema de amortiguación, ya sea algún tipo de resorte, o actuador, o sistema mecánico más avanzado.

7.5. Sistema de Resortes Amortiguados

Finalmente, veremos un ejemplo de un sistema medianamente común, pero que comprobar su controlabilidad no es sencillo ya que es necesario un cálculo bastante engorroso. Estudiaremos un sistema de resortes amortiguados como el que sigue:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{1}{m_1}u, \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - d_2 \dot{x}_2, \end{cases} \quad (7.7)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de los resortes, k_1 y k_2 sus constantes elásticas y d_1 y d_2 los coeficientes de amortiguamiento.

Definimos $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = \dot{x}_2$. Teniendo esto en cuenta, el sistema (7.7) es equivalente a:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -\frac{k_1}{m_1}(y_1 - y_3) - \frac{d_1}{m_1}(y_2 - y_4) + \frac{1}{m_1}u, \\ y'_3 = y_4, \\ y'_4 = \frac{k_1}{m_2}(y_1 - y_3) - \frac{k_2}{m_2}y_3 + \frac{d_1}{m_2}(y_2 - y_4) - \frac{d_2}{m_2}y_4. \end{cases}$$

Por simplicidad para los cálculos sustituimos $\frac{k_1}{m_1} = a$, $\frac{d_1}{m_1} = b$, $\frac{k_1}{m_2} = c$, $\frac{k_2}{m_2} = d$, $\frac{d_1}{m_2} = e$, $\frac{d_2}{m_2} = f$, quedando el sistema como:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -a(y_1 - y_3) - b(y_2 - y_4) + \frac{1}{m_1}u, \\ y'_3 = y_4, \\ y'_4 = c(y_1 - y_3) - dy_3 + e(y_2 - y_4) - fy_4. \end{cases}$$

Expresándolo en la forma $y' = Ay + Bu$ llegamos a que:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & e & -c-d & -e-f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

de modo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & e & -c-d & -e-f \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^4)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$ sien-

do $[A|B] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Calculamos la matriz de controlabilidad (omitimos todos los cálculos intermedios, los cuales podemos realizar con un software de cálculo simbólico):

$$\begin{aligned} [A|B] &= [B|AB|A^2B|A^3B] = \\ &= \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -b & -a+b^2+be \\ 1 & -b & -a+b^2+be & -be(e+f) - 2b^2e + bc - b^3 + 2ab + ae \\ 0 & 0 & e & c-be - (e+f)e \\ 0 & e & c-be - (e+f)e & J \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $J := -(f+e)[-e(f+e) - be + c] + e(be + b^2 - a) - (d+c)e - bc$. Al igual que en el caso anterior, calculamos el determinante de $[A|B]$ (por simplicidad supondremos $m_2 = m_1 = 1$ ya que no nos afecta a la hora de determinar si el determinante de $[A|B]$ es nulo) utilizando un software de cálculo simbólico obteniendo:

$$\det[A|B] = -cef + de^2 + c^2,$$

que teniendo en cuenta el cambio de notación realizado se tiene:

$$\det[A|B] = d_1(k_2d_1 - k_1d_2) + k_1^2. \quad (7.8)$$

De (7.8) podemos encontrar una condición necesaria y suficiente para que el sistema no sea controlable, ya que por la Condición de Rango de Kalman (Teorema 4.1) sabemos que el sistema no será controlable si y solo si $\det[A|B] = 0$. Imponemos esta condición y despejamos k_2 obteniendo:

$$k_2 = \frac{k_1(d_1d_2 - k_1)}{d_1^2}.$$

Acabamos de ver que la controlabilidad de este sistema depende de sus parámetros. No obstante, en este caso hemos encontrado una condición necesaria y suficiente para que el sistema no sea controlable, la cual, depende únicamente de la constantes elásticas así como de los coeficientes de amortiguamiento de los resortes.

Finalmente, analicemos un caso interesante. Supongamos que los dos resortes tienen la misma constante elástica y el mismo coeficiente de amortiguamiento, es decir $k_1 = k_2$

y $d_1 = d_2$. Analizando la expresión (7.8) es inmediato comprobar que el sistema siempre será controlable (siempre y cuando $k_1 \neq 0$). Esto significa que siempre que tengamos un sistema con dos resortes iguales (salvo en masa) podremos aplicar una fuerza que nos permita controlar nuestro sistema.

Este sistema constituye un caso en el que a pesar de que la matriz $[A|B]$ tiene una forma engorrosa, una vez realizado el cálculo del determinante de la misma, podemos encontrar una relación bastante sencilla entre los coeficientes para que nuestro sistema sea controlable.

Capítulo 8

Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales

En este capítulo pasamos de trabajar con sistemas lineales, como hemos trabajado hasta ahora, a trabajar con sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{cases} y' = f(y, u) & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada. Supondremos que $T > 0$ y asumiremos que el control $u \in C^0([0, T], \mathbb{R}^m)$ (al espacio $C^0([0, T], \mathbb{R}^m)$ lo llamaremos el espacio de control). Finalmente, a $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$ lo llamaremos el estado (la respuesta del sistema). Vamos a dar una breve introducción a los sistemas no lineales, los cuales pueden ser muy complicados de estudiar. Pretendemos mostrar una serie de resultados, los cuales no probaremos. No obstante, podemos encontrar las demostraciones de estos en los distintos libros que componen la bibliografía.

8.1. Resultados Generales

En esta sección, analizaremos algunos resultados generales sobre la existencia y unicidad de solución para problemas de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Para ello, consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} z' = f(z, t) & \text{en } [0, T], \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (8.2)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada y $(z_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es el dato inicial. Introducimos ahora el concepto de **Solución Local**:

Definición 8.1. Diremos que la función $z : (T_0, T_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $T_0 < t_0 < T_1$, es una **Solución Local** del sistema (8.2) en el intervalo (T_0, T_1) si $z \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ y satisface la formulación integral

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(z(s), s) ds, \quad \forall t \in (T_0, T_1).$$

Si la **Solución Local** z , definida en (T_0, T_1) , no puede extenderse a una solución local en el intervalo $(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$ con $\tilde{T}_0 < T_0 < t_0 < T_1 < \tilde{T}_1$, entonces decimos que la solución z es una **Solución Maximal del sistema** (8.2) y el intervalo de tiempo $(T_0, T_1) = I(z_0, t_0)$ se denomina **Máximo Intervalo de Definición**.

Ahora pasamos a introducir los resultados sobre existencia y unicidad que nos serán útiles para analizar los problemas de control. Los siguientes resultados podemos encontrarlos en [8]

Teorema 8.1. *Supongamos que $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(z, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Entonces, para todo $(z_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ existe una **única solución global** $z(\cdot; z_0, t_0)$ para el problema de Cauchy (8.2) definida en $I(z_0, t_0) = (T_0, T_1)$ con $T_0 < t_0 < T_1 < \infty$. Además,*

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} |z(t; z_0, t_0)| = \lim_{t \rightarrow T_1^+} |z(t; z_0, t_0)| = \infty.$$

Teorema 8.2. *Supongamos que $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(z, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ y que para una función positiva $c \in L^\infty(T_0, T_1)$ con $t \in [T_0, T_1]$ tenemos que:*

$$\begin{cases} |f(z, t)| \leq c(t)(|z| + 1), \\ |f(z_1, t) - f(z_2, t)| \leq c(t)|z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \end{cases}$$

Entonces, la **única solución maximal** $z(\cdot; z_0, t_0)$ del sistema (8.2) cumple que $[T_0, T_1] \subseteq I(z_0, t_0)$. Además, para todo $t \in [T_0, T_1]$, la aplicación:

$$z_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto z(t; z_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

De este teorema deducimos el siguiente corolario:

Corolario 8.3. *Supongamos que $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ y que para un número $c > 0$ se tiene que:*

$$\begin{cases} |f(y, u)| \leq c(|y| + |u| + 1), \\ |f(y_1, u) - f(y_2, u)| \leq c|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Entonces, para todo $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^m)$ y para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, el sistema

$$\begin{cases} y' = f(y, u) & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

tiene una **única solución** definida en $[0, T]$.

8.2. Controlabilidad y Linealización

Sea el sistema (8.1). En esta sección vamos a introducir la técnica de linealización. Mostraremos un resultado en el que se muestra que si el problema de control linealizado es controlable a través de una trayectoria, entonces el sistema no lineal es localmente controlable a lo largo de esa trayectoria.

Empezamos definiendo el concepto de trayectoria para el sistema no lineal:

Definición 8.2. Diremos que el par $(\bar{y}, \bar{u}) \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ es una trayectoria del sistema (8.1) en el intervalo $[0, T]$ si \bar{y} es una solución de (8.1) correspondiente al control \bar{u} e $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Fijemos ahora una trayectoria $(\bar{y}, \bar{u}) \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ del sistema (8.1) en $[0, T]$. Entonces, pasamos a definir:

Definición 8.3. Diremos que el sistema (8.1) es **localmente controlable a lo largo de la trayectoria** (\bar{y}, \bar{u}) si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $y_0 \in B(\bar{y}(0); \delta)$ e $y_d \in B(\bar{y}(T); \delta)$ existe $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución y de (8.1) está definida en $[0, T]$ y

$$y(T) = y_d, \quad |\bar{u}(t) - u(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ahora supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ y fijemos una trayectoria (\bar{y}, \bar{u}) del sistema (8.1). Entonces el sistema:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u, & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} A(t) = \partial_y f(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)), \\ B(t) = \partial_u f(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)), \end{cases}$$

es llamada la linealización del sistema (8.1) a lo largo de la trayectoria (\bar{y}, \bar{u}) .

Teorema 8.4. *Sea (\bar{y}, \bar{u}) una trayectoria del sistema (8.1) y supongamos que la linealización del sistema (8.1) a lo largo de esta trayectoria es controlable en el tiempo T . Entonces, el sistema no lineal (8.1) es localmente controlable a lo largo de la trayectoria (\bar{y}, \bar{u}) .*

8.3. Un Resultado Sobre la Controlabilidad Global

Consideremos ahora una perturbación de tipo Lipschitz de un sistema lineal

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u + f(t, y) & \text{en } [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.3)$$

con $T > 0$, $A \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, $B \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ dada. Asumiremos que f es localmente Lipschitz y continua respecto a y en $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. También supondremos que el sistema lineal

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u \text{ en } [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.4)$$

es controlable en el tiempo T .

En esta sección introduciremos una serie de resultados que nos permitirán probar la controlabilidad del sistema (8.3).

Teorema 8.5. *Supongamos que la función f está acotada en $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ y que el sistema (8.4) es controlable en el tiempo $T > 0$. Entonces, el sistema (8.3) es también exactamente controlable en el tiempo T .*

Observación 8.1. Para la demostración de este teorema, reescribimos el problema de controlabilidad del sistema (8.3) en el tiempo T como la búsqueda de un punto fijo en $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ de cierto operador Θ . Para la prueba de la existencia de punto fijo para Θ se usan el Teorema de Schauder y el Teorema de Ascoli-Arzelá que enunciamos a continuación.

Comenzamos enunciando el Teorema del Punto Fijo de Schauder.

Teorema 8.6. *Sea X un espacio de Banach y $\Lambda : \bar{B}(0; R) \subset X \rightarrow \bar{B}(0; R)$ un operador compacto y continuo ($R > 0$). Entonces, existe un $x \in X$ tal que $\Lambda(x) = x$, es decir x es un punto fijo del operador Λ .*

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [16]. Antes de enunciar el Teorema de Ascoli-Arzelá recordamos el concepto de equicontinuidad:

Definición 8.4. Sea (X, τ) un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y x_0 un punto de X . Diremos que un conjunto H de funciones de X en Y es equicontinuo en el punto x_0 si y solo si para todo $r > 0$, existe un entorno A de x_0 tal que para toda $f \in H$ se verifica que:

$$f(A) \subseteq B(f(x_0), r).$$

Decimos que f es equicontinua si lo es para todo $x_0 \in X$.

Finalmente, enunciamos el Teorema de Ascoli-Arzelá:

Teorema 8.7. *Sea X un espacio topológico compacto e Y un espacio métrico completo. Un conjunto $H \subset C(X, Y)$ (espacio de las funciones continuas de X en Y) será relativamente compacto en la topología con la métrica infinito si y solo si:*

1. H es equicontinuo.
2. Para todo $x \in X$, el conjunto $H_x = \{f(x) : f \in H\}$ es relativamente compacto en Y .

Capítulo 9

Conclusión

Hemos estudiado unas nociones generales sobre la controlabilidad de sistemas diferenciales ordinarios. Hemos realizado una introducción sobre este tema centrándonos sobre todo en sistemas lineales. Posteriormente, se ha analizado como varía el coste de nuestro control si lo queremos conseguir en tiempos pequeños, es decir, se ha analizado la expresión que se obtiene para la norma de los denominados controles rápidos o controles violentos. Finalmente, hemos visto diversas aplicaciones de estos problemas, en concreto, los problemas que hemos analizado estaban relacionados con distintos ámbitos de la física.

Este no es más de uno de los múltiples ejemplos en los que las matemáticas aparecen en nuestra vida. Desde un punto de vista divulgativo, este tipo de problema constituye un buen ejemplo para mostrar la importancia de las matemáticas y de cómo las usamos sin darnos cuenta. Algo que puede parecer tan complicado como son las ecuaciones diferenciales se manifiestan diariamente en nuestras vidas y resolvemos problemas formalmente complicados sin darnos ni tan siquiera cuenta de lo que estamos haciendo.

Aunque simplemente hemos dado una serie de resultados y no hemos entrado en detalle, podemos plantearnos este tipo de problemas en sistemas que son no lineales, que al fin y al cabo, son los sistemas más comunes que nos encontraremos en problemas reales. Las distintas aplicaciones que hemos dado, no son más que ejemplos sencillos y académicos. De hecho, alguno de ellos, son aproximaciones de sistemas que son no lineales.

Finalmente, cabe destacar, que aunque nos hayamos centrado en sistemas diferenciales ordinarios, este tipo de problemas también nos lo podemos plantear para sistemas con ecuaciones en derivadas parciales, como puede ser la ecuación del calor o de ondas, siendo una teoría de un nivel bastante avanzado.

En definitiva, hemos estudiado un tipo de problemas que es bastante interesante, no solo desde un punto de vista matemático sino también desde sus aplicaciones en diversos ámbitos de la ciencia, tecnología o incluso nuestro día a día. Es esta la magia de las matemáticas. Nos rodean constantemente y nosotros, sin ser conscientes de ello, jugamos y trabajamos con ellas para el desarrollo de nuestras vidas diarias.

Bibliografía

- [1] M. Athans y P. L. Falb. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966.
- [2] P.G. Ciarlet. *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. With the assistance of Bernadette Miara and Jean-Marie Thomas, Translated from the French by A. Buttigieg. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [3] J.-M. Coron. *Control and Nonlinearity*. Ed. por RI American Mathematical Society Providence. 136 vols. Mathematical Surveys and Monographs. 2007.
- [4] M. González-Burgos. «Course 5: Controllability of Parabolic Systems. Session 1: Controllability of Ordinary Differential Equations». En: *CIMPA School Kénitra 2020: Analyse Numérique et Optimisation, Contrôle et Problèmes Inverses* (2020).
- [5] H. Hermes y J. P. Lasalle. *Functional Analysis and Time Optimal Control*. Second. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 56. Academic Press, New York-London, 1969.
- [6] E. B. Lee y L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. Second. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1986.
- [7] G. Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. Second. 181 vols. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2017.
- [8] N. Rouche y J. Mawhin. *Ordinary Differential Equations*. Vol. 5. Surveys and Reference Works in Mathematics. Stability and Periodic Solutions, Translated from the French and with a preface by R. E. Gaines. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1980.
- [9] T. I. Seidman. «How violent are fast controls?» En: *Math. Control Signals Systems* 1.1 (1988), págs. 89-95.
- [10] T. I. Seidman y J. Yong. «How violent are fast controls?, II». En: *Math. Control Signals Systems* 9.4 (1996), págs. 327-340.
- [11] S. Shankar. «The Hautus test and genericity results for controllable and uncontrollable behaviors». En: *SIAM J. Control Optim.* 52.1 (2014), págs. 32-51.
- [12] L.M. Silverman y H.M. Meadows. «Controllability and observability in time-varying systems». En: *SIAM J. Control* 5 (1967), págs. 64-73.

- [13] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. Théorie & applications. Vuibert, Paris, 2005.
- [14] M. Tucsnak y G. Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [15] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [16] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I*. Fixed-Point Theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack. Springer-Verlag, New York, 1986.