



Universidad de Sevilla

Trabajo de Fin de Grado

Doble Grado en Física y Matemáticas

Superficies Canal

Alumno:

Ignacio Meana Cubero

Tutor:

Pablo Sebastián Alegre Rueda

Departamento de Geometría y Topología

Junio de 2022

Resumen

En el siglo XVIII, el matemático francés Gaspard Monge inventó la geometría descriptiva con el fin de estudiar distintas superficies; una de ellas, denominada superficie canal, es la que motiva este trabajo. En el presente estudio se aspira a recopilar la máxima información posible sobre estas superficies. El estudio se realizará en el espacio Euclídeo de tres dimensiones y se prestará especial atención a las publicaciones del siglo XXI. Para esta tarea será imprescindible recordar el material estudiado en la asignatura de Geometría Local de Curvas y Superficies, con el que se determinarán propiedades de las mismas que posteriormente se aplicarán a casos particulares.

Palabras clave: superficies, canal, tubulares, Monge, curvatura.

Abstract

In the 18th century, the French mathematician Gaspard Monge invented descriptive geometry in order to study different surfaces. One of them, called canal surface, is what motivates this paper. The aim of this study is to collect as much information as possible about these surfaces. The study will be carried out in three-dimensional Euclidean space and special attention will be paid to 21st century publications. For this task it will be essential to remember the material studied in the subject Local Geometry of Curves and Surfaces, which will be used to determine properties of these surfaces, which will later be applied in particular cases.

Keywords: surfaces, canal, tubular, Monge, curvature.

Agradecimientos

Antes de comenzar con el trabajo, me gustaría agradecerle a mi familia, a mis compañeros y amigos el apoyo brindado, no sólo en este trabajo, sino a lo largo de toda la carrera. Asimismo, agradecer a mi tutor del TFG, Pablo Sebastián Alegre Rueda por haberme prestado su inestimable ayuda, proporcionándome material bibliográfico y solucionándome cualquier problema que me haya podido surgir.

Índice

1. Introducción	3
2. Preliminares	5
2.1. Gaspard Monge	5
2.2. Teoría de curvas y superficies	10
2.2.1. Curvas Regulares	10
2.2.2. Superficies regulares	12
2.2.3. Geometría Intrínseca	14
2.2.4. Geometría Extrínseca	15
3. Introducción a las Superficies Canal	17
3.1. Definición	17
3.2. Descripción geométrica	20
3.2.1. Propiedades básicas	20
3.2.2. Superficies minimales y desarrollables	22
3.2.3. Tipos de puntos	24
3.2.4. Líneas de curvatura	26
3.3. Casos particulares	27
3.3.1. Cilindro	27
3.3.2. Cono	28
3.3.3. Toro	28
3.3.4. Toro Cónico	29
3.3.5. Tubo helicoidal	30
3.3.6. Cono helicoidal	31
4. Avances recientes en superficies canal	33
4.1. Some characterizations of Canal Surface	33
4.2. Some classification of Canal Surfaces with the Gauss Map	39
4.3. Analytic and algebraic properties of Canal Surfaces	47
5. Referencias	49

1. Introducción

El propósito de este Trabajo de Fin de Grado consiste en hacer un análisis de un tipo de superficies conocidas como superficies canal. Una superficie canal es la envolvente de una familia de esferas cuyos centros se sitúan sobre una curva (Fig. 1.1). El nombre de superficie canal es debido al aspecto de las mismas, y se lo otorgó el matemático Gaspard Monge, en torno al año 1770 cuando las estudió por vez primera. Posteriormente, científicos de gran renombre, como el matemático Dupin o el físico Maxwell, dedicaron su tiempo a continuar el trabajo de Monge.

El estudio que realizaremos será en un doble sentido; por un lado estudiaremos algunas propiedades de estas superficies tratables con los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, con especial mención a la asignatura de Geometría Local de Curvas y Superficies; por otro lado, realizaremos una revisión bibliográfica sobre nuevos resultados acerca de estas superficies. Pese a que existen numerosos artículos que tratan sobre estas superficies en diversos espacios y con distintas distancias, en este trabajo nos centraremos en las superficies canal en el espacio euclídeo de tres dimensiones.

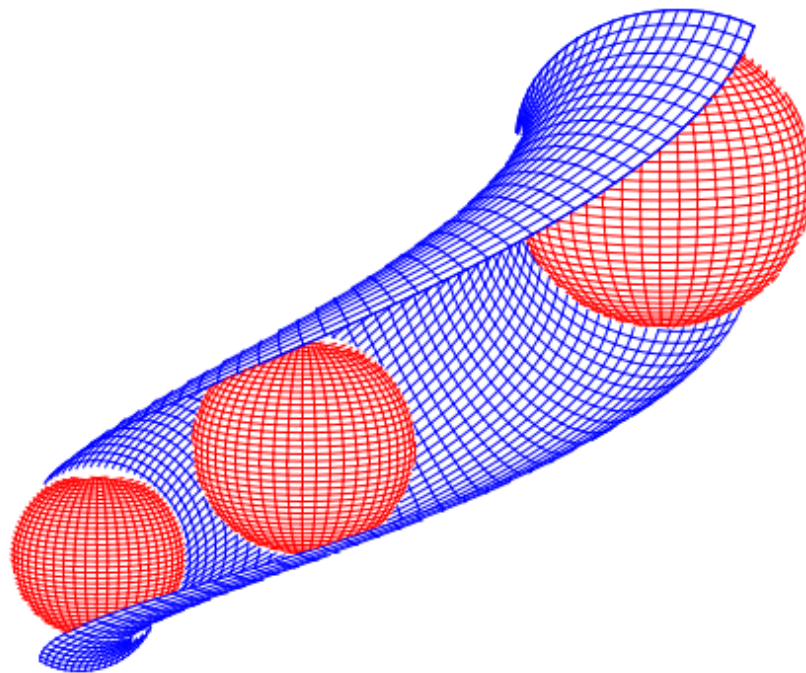


Figura 1.1: Envolvente de una familia de esferas.

Este documento consta de cuatro capítulos. El primero es el que actualmente nos ocupa. El segundo estará constituido por dos partes, una primera en la que hablaremos de la vida de Gaspard Monge, y una segunda en la que se pretende recordar algunas definiciones y teoremas importantes estudiados en la asignatura mencionada en el párrafo anterior, que nos serán de gran utilidad a la hora de estudiar estas superficies.

En el tercer capítulo se pretende poner en práctica la asignatura de Geometría de Curvas y Superficies mencionada en la segunda parte del capítulo 1. Por un lado, definiremos matemáticamente las superficies canal, daremos una descripción geométrica de las mismas, y veremos algunos resultados. Por otro lado, mientras que los matemáticos turcos Öztürk et al [6] (colaboradores con el departamento de Geometría de esta Universidad), parten de la idea de que la curva sobre la que se sitúa la familia de esferas es plana y, con esta base, son capaces de determinar expresiones de la curvatura media y gaussiana para distintos casos particulares, nuestro propósito será ampliar este estudio partiendo de que la curva espinal sea alabeada.

Por último, teniendo en cuenta que parte del espíritu del trabajo es ser capaz de entender publicaciones científicas y tras una amplia búsqueda bibliográfica, en el capítulo 4 se realizará una revisión de los tres artículos, que, en mi opinión personal, han supuesto los avances más recientes en superficies canal. En este capítulo también explicaremos algunos pasos “poco claros” que aparecen en estas publicaciones. Otros motivos por los que se han seleccionado estos artículos es que han sido publicados muy recientemente, así pues, de su estudio podemos ver cuál es el desarrollo que se está llevando a cabo actualmente en relación con estas superficies. Más aún, sus contenidos son comprensibles usando las herramientas adquiridas a lo largo de la carrera.

El estudio de estas superficies toma relevancia debido a su aplicación a una gran variedad de campos, entre los que podemos destacar el CADG (Computer Aided Geometric Design), donde se realizan numerosos estudios sobre construcción de superficies. Estos estudios abarcan, entre otros, las superficies de deformación, la reconstrucción de formas y la transición entre superficies. En muchos de estos trabajos las superficies tubulares, que son un caso particular de las superficies canal que veremos posteriormente con mayor detalle, son esenciales. Estas superficies se pueden utilizar, por ejemplo, para representar la superficie de un muelle, tuberías, elementos de calentamiento espirales, toboganes de parques acuáticos, etc.

2. Preliminares

2.1. Gaspard Monge



Figura 2.1: Gaspard Monge.
Retrato de François Seraphin Delpech.

Gaspard Monge nació el 9 de mayo de 1746 en Beaune en el seno de una familia de comerciantes. Su padre consiguió ascender en la escala social, pudiendo así garantizar la educación de Gaspard y sus dos hermanos. Nuestro futuro matemático acudió a la escuela de la Congregación del Oratorio de Beaune. Como muestra de precocidad, construyó una bomba contra incendios con 14 años. Posteriormente, en 1762, se trasladaría al Colegio de la Trinidad de Lyon, donde llegó a impartir clases de física a la edad de 17 años.

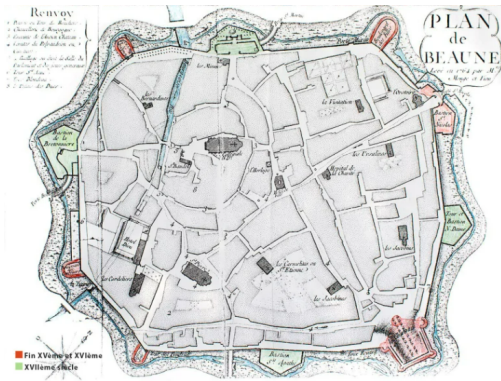


Figura 2.2: Plano de Beaune hecho por Gaspard Monge.

Cuando terminó sus estudios, regresó a Beaune, donde diseñó un plano de la ciudad a gran escala (Fig. 2.2) usando instrumentos de su propia fabricación. Este plano fue ofrecido a la administración local. Allí, llegó a las manos del coronel Vignau, que quedó tan impresionado por la calidad del mismo que escribió al École Royale du Génie de Mézières solicitando la admisión de Monge.

En esta prestigiosa escuela militar, Monge, que había entrado como un simple técnico debido a su clase social, demostró su habilidad para elaborar planos y, a la hora de realizar la construcción de fortificaciones militares, resolver problemas de desenfilada (desenfilarse una posición militar significa protegerla del fuego enemigo) (Fig. 2.3). La gran capacidad para solventar, mediante la geometría descriptiva, problemas de carácter militar junto al prestigio que ésta conllevaba le abrió las puertas a la enseñanza de las matemáticas (1768) y la física (1771) en aquella escuela.

Durante su estancia como profesor en la escuela militar de Mézières, Monge no pudo publicar sus descubrimientos sobre la nueva geometría descriptiva debido a que eran considerados material militar, con lo cual, pudo orientar su interés hacia otros campos de las matemáticas como el análisis matemático y la geometría diferencial de curvas y superficies. A partir de este interés, entró en contacto con la obra de diversos matemáticos de su tiempo, como Vandermonde, D'Alembert, Euler y Lagrange, y, entre 1771 y 1772, desarrolló seis memorias sobre distintos tipos de superficies en el espacio (entre las que se encuentran las superficies que dan motivo este trabajo, las **superficies canal**) y sobre ecuaciones diferenciales y cálculo integral, la mayoría de las cuales las presentó a la Academia de Ciencias de París y a la Academia de las Ciencias de Turín.

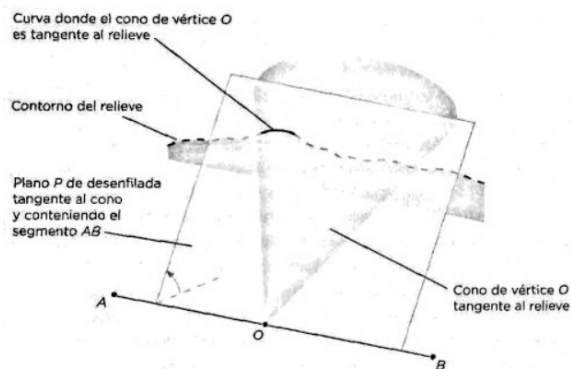


Figura 2.3: Solución al problema de la desenfilada.

A partir de 1772 la vida profesional y privada de Monge sufrió cambios trascendentales. A nivel personal, en 1777 contrajo matrimonio con Cathérine Huart, con la que tuvo tres hijas en los siguientes tres años. La nueva madame Monge era propietaria de una fundición, lo que provocó que Gaspard desarrollara un gran interés por la metalurgia. A nivel profesional, fue elegido corresponsal de la Academia de Ciencias de París en 1772 y en 1780 pasó a ser geómetra adjunto de esta institución. Desde este momento compartió su vida de profesor de matemáticas y física entre París y Mézières.

En octubre de 1783, el mariscal de Castries, ministro de marina, al que había acompañado en un viaje a Bélgica en 1774, nombró a Gaspard como examinador de cadetes navales para sustituir al recién fallecido Étienne Bézout. Este cargo, que supuso un ascenso social y la incorporación de Monge a las estructuras del Estado, lo ostentaría hasta los inicios de la Revolución de 1789. Por consecuencia de este nombramiento, Gaspard tuvo que dejar la escuela de Mézières y se trasladó definitivamente a París.

Esta etapa en la vida profesional de Monge significó la consolidación de su prestigio académico entre los científicos contemporáneos. Este prestigio abarcaba más allá del campo de las matemáticas. Monge llegó a presentar varias memorias sobre física, química y meteorología a la Academia de las Ciencias. De esta época se conservan diversos manuscritos sobre los experimentos químicos efectuados por Monge en colaboración con Lavoisier y Vandermonde, y el Tratado Elemental de Estática, publicado en 1788 con fines pedagógicos, que es un ejemplo de claridad y rigurosidad.

No podemos hablar de la evolución personal y profesional de Monge sin mencionar la Revolución Francesa. Ya sea por las dificultades que se encontró inicialmente en Mézières para abrirse camino en un ambiente elitista o porque era partidario de la causa republicana, Gaspard fue un firme defensor de la Revolución contra los privilegios de la nobleza. Participó en las sociedades revolucionarias y, una vez finalizada la misma, debido al gran renombre que tenía como científico y a los profundos conocimientos sobre la estructura militar del Estado fue nombrado ministro de Marina. Sus acciones más relevantes como ministro son la represión de la revuelta de las Antillas de 1791 y en Cerdeña en 1792, firmó el proceso verbal de la ejecución de Luis XVI y afrontó la declaración de guerra a Inglaterra en febrero de 1793. El 10 de abril de 1793 renunciaba al cargo confesando que se veía incapaz de continuar en el mismo.

El cese como ministro del Directorio no significó el fin de su colaboración con la revolución. Al contrario, siguió dirigiendo el desarrollo de la industria armamentística de la Francia revolucionaria. La experiencia en el campo de la siderurgia adquirida en la forja de su esposa le sirvió para revolucionar el proceso de fabricación de armas. Una muestra de esto son los escritos “Description de l’art de fabriquer les canons” (Descripción del arte de hacer cañones) y “Avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l’acier” (Asesoramiento a los trabajadores del hierro sobre la fabricación de acero).



Figura 2.4: Portal de entrada de la Escuela Politécnica de Francia.

Desde 1793 había surgido en Francia la idea de construir una única escuela destinada a preparar las diversas categorías de ingenieros civiles y militares. En 1794 una Comisión de los Trabajos Públicos, de la que Monge era partícipe, quedó encargada de preparar la construcción de esta escuela, denominada inicialmente como École Centrale des Travaux Publics (Escuela Central de Trabajos Públicos), y que más adelante se rebautizaría como École Polytechnique (Escuela Politécnica) (Fig. 2.4). El objetivo de esta escuela era proporcionar a la recién nacida república de jóvenes técnicos altamente cualificados, con la diferencia de que en ella sólo se tenían en cuenta

los méritos académicos, dejando atrás la época donde la entrada a la carrera científica estaba caracterizada por tradicionales recomendaciones. Con el fin de impartir clases de geometría descriptiva en esta escuela, Monge redactó un curso acelerado de esta disciplina, publicando en 1795 “Application d’analyse á la géométrie” (Aplicación del análisis a la geometría).

Al mismo tiempo que empezaba a funcionar la Escuela Politécnica, una comisión nombrada por la Convención ponía en marcha la organización de la École Normale (Escuela Normal). El fin de ésta era ser un centro de formación para todos los profesores de las escuelas secundarias que se estaban organizando. Los maestros de esta escuela se escogieron entre los mejores científicos, encontrando entre ellos a Lagrange, Laplace y Berthollet además de, lógicamente, Monge. Sin embargo, este proyecto duró escasamente cinco meses, en los que Gaspard apenas impartió trece clases de geometría descriptiva. Los textos se recogieron y más adelante fueron publicados en 1799 con el nombre de “Géométrie descriptive” (Geometría descriptiva).

La creación de estas dos escuelas fue esencial tanto para tener un ejemplo de escuela preparatoria de futuros ingenieros altamente cualificados como para que la obra de Monge se diera a conocer rápidamente.

En 1796 fue enviado a Italia a recoger los monumentos de arte y de ciencia que los tratados de paz acordaban a los ejércitos franceses, lo que alejó a Monge de sus tareas como docente a la vez que lo acercó a la vida política. El científico veía esta guerra como una lucha por la libertad y contra la tiranía, con lo que justificaba el expolio de las obras italianas. En junio de ese mismo año conoció al general Bonaparte, con el que entabló una estrecha amistad. Participó en las negociaciones de paz y cuando se firmó el Tratado de Campo Formio fue, junto al general Berthier, encargado de trasladar el texto a París.

En 1798 acompañó también a Napoleón en su campaña en Egipto. Allí, Bonaparte creó el Instituto de Egipto y nombró como presidente a Monge. En febrero de 1799, Gaspard regresó a París junto al general.

El 9 de noviembre de 1799 se produjo el golpe de estado propiciado por Napoleón que acabó con el Directorio e instaló el Consulado. Esta situación finalmente desembocó en la proclamación de Napoleón como emperador de Francia en 1804. A lo largo de todo este proceso, Monge siempre se mantuvo a su lado pese a sus convicciones republicanas. Además fue colmado con toda clase de honores por el nuevo emperador: fue nombrado miembro del recién creado Senado, el cual llegó a presidir en 1806, recibió una donación monetaria con la que adquirió el castillo de Bierre (Borgoña), fue nombrado conde de Péluse y recibió varias propiedades en Westfalia. En 1809, ante la falta de tiempo debido a las obligaciones administrativas, abandonó la docencia en la Escuela Politécnica.

Durante este tiempo, su amigo y discípulo Jean Nicolás Pierre Hachette había estado reuniendo sus lecciones en la Escuela Normal y Politécnica y en 1801 publicó artículos como “Feuilles d’analyse appliquée á la géométrie, al’usage á l’École Polytechnique (Hojas de análisis aplicado a la geometría, para uso en la Escuela Politécnica)”.

Tras la caída de Napoleón en 1815, Monge fue desposeído de todos sus cargos y expulsado del Instituto Nacional de Ciencias y Artes de París. Cuando murió, el 28 de julio de 1818, no recibió ningún homenaje oficial y a pesar de la oposición del gobierno monárquico, algunos amigos como Berthollet o Laplace lo homenajearon en su entierro.

A pesar de todo, la figura de Monge ha terminado emergiendo hasta el lugar que le correspondía y finalmente el mismo Estado francés, con motivo del bicentenario de la Revolución Francesa, restituyó todos los honores con el traslado simbólico de sus restos al Panteón de París (Fig. 2.5) en 1989, junto con los mayores héroes del país.



Figura 2.5: Tumba de Gaspard Monge en el Panteón de París.

2.2. Teoría de curvas y superficies

En este apartado se recuerdan todas aquellas definiciones y resultados de [11] cuyo conocimiento previo es necesario para el abordaje de capítulos posteriores.

2.2.1. Curvas Regulares

Definición 2.2.1. Una *curva parametrizada regular* (c.p.r) en R^m es una aplicación

$$\alpha : (a, b) \subseteq R^m : t \rightarrow \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$$

tal que:

1. $\alpha \in C^k, k \geq 1$ (Condición de Diferenciabilidad).
2. $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$ (Condición de Regularidad) (C.R.).

Definición 2.2.2. Un *segmento de c.p.r. (arco regular)* es una aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow R^m, \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, tal que existe un intervalo abierto (c, d) que contiene a $[a, b]$ y existe una c.p.r. $\beta : (c, d) \rightarrow R^m$ cumpliendo que $\alpha = \beta|_{[a, b]}$. Así, es posible considerar $\alpha'(a) = \beta'(a)$ y $\alpha'(b) = \beta'(b)$. La **longitud** del arco regular α es:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i'^2(t)} dt$$

Definición 2.2.3. La parametrización de una curva por su arco se llama **parametrización natural**. Al parámetro longitud de arco se le llama **parámetro natural**.

Definición 2.2.4. Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow R^m$ una c.p.r. y $t_0 \in (a, b)$. Se llama **vector velocidad** de α en $\alpha(t_0)$ al vector $\alpha'(t_0)$ y se llama **campo vectorial velocidad** de α a la aplicación $\alpha' : (a, b) \rightarrow R^m$ dada por $t \rightarrow \alpha'(t)$, que, por la C.R. es no nula en todos los puntos. Al módulo del vector velocidad de α en $\alpha(t_0)$ se le llama **velocidad** de α en $\alpha(t_0)$. Se llama **vector tangente** a α en $\alpha(t_0)$ al vector

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|},$$

que es unitario. Se llama **campo vectorial tangente** de α a la aplicación $\mathbf{t} : (a, b) \rightarrow R^m$ dada por:

$$t \rightarrow \mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Cuando este campo es una c.p.r. se le llama **indicatriz de las tangentes** de α y su ecuación es $\beta(t) = \mathbf{t}(t)$. Como los vectores tangentes son todos unitarios, para $m = 3$ esta curva estará contenida en la esfera unidad S^2 y se llamará **indicatriz esférica**.

Definición 2.2.5. Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow R^m$ una c.p.r. y $t_0 \in (a, b)$. Se llama **recta tangente** a α en $\alpha(t_0)$ a la recta que pasa por $\alpha(t_0)$ y tiene como dirección al vector tangente a α en $\alpha(t_0)$, que, claramente, es una c.p.r. Su ecuación es:

$$\beta : R \rightarrow R^m : r \rightarrow \beta(r) = \alpha(t_0) + r\mathbf{t}(t_0) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0).$$

Definición 2.2.6. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow R^3$ una curva regular parametrizada naturalmente (c.r.p.n.). Se llama **curvatura de α** a la función

$$k = k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|.$$

Definición 2.2.7. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en R^3 . Al plano que pasa por un punto $\alpha(s_0)$ de α y es perpendicular al vector tangente en $\alpha(s_0)$ se le llama **plano normal** de α en $\alpha(s_0)$ y su ecuación es $(X - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{t}(s_0) = 0$.

Definición 2.2.8. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en R^3 . Se define el **vector normal principal** de α en un punto $\alpha(s_0)$ tal que $k(s_0) > 0$ como

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{k(s_0)},$$

que, claramente, es unitario y ortogonal al vector tangente $\mathbf{t}(s_0)$.

A la aplicación $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{k(s)}$ se le llama **campo vectorial normal principal** a lo largo de α . Cuando este campo es una c.r.p., se llama **indicatriz esférica de las normales principales** de α , está contenido en la esfera unidad S^2 y su ecuación es $\beta(s) = \mathbf{n}(s)$.

A la recta que pasa por un punto $\alpha(s_0)$ de α con dirección el vector normal principal, se le llama **recta normal principal** de α en $\alpha(s_0)$, su ecuación es $r(t) = \alpha(s_0) + t\mathbf{n}(s_0)$ y es una c.r.p.n.

Al plano que pasa por $\alpha(s_0)$ y es perpendicular al vector normal principal en $\alpha(s_0)$ se le llama **plano rectificante** de α en $\alpha(s_0)$ y su ecuación es $(X - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{n}(s_0) = 0$.

Definición 2.2.9. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en R^3 . Se define el **vector binormal** de α en un punto $\alpha(s_0)$ tal que $k(s_0) > 0$ como $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$, que, claramente, es unitario y ortogonal a los vectores tangente y normal principal en $\alpha(s_0)$.

A la aplicación $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ se le llama **campo vectorial binormal** a lo largo de α . Cuando este campo es una c.r.p., se llama **indicatriz esférica de las binormales** de α , está contenido en la esfera unidad S^2 y su ecuación es $\beta(s) = \mathbf{b}(s)$.

A la recta que pasa por un punto $\alpha(s_0)$ de α con dirección el vector binormal, se le llama **recta binormal** de α en $\alpha(s_0)$, su ecuación es $r(t) = \alpha(s_0) + t\mathbf{b}(s_0)$ y es una c.r.p.n. Al plano que pasa por $\alpha(s_0)$ y es perpendicular al vector binormal en $\alpha(s_0)$ se le llama **plano osculador** de α en $\alpha(s_0)$ y su ecuación es $(X - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b}(s_0) = 0$.

Definición 2.2.10. Dada una c.r.p.n., $\alpha = \alpha(s)$, en R^3 , al triedro.

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$$

se le llama **Triedro de Referencia o Frenet** en el punto $\alpha(s)$ de α . Este triedro forma una referencia (móvil) ortonormal y directa de R^3 en cada punto de la curva.

Definición 2.2.11. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en R^3 . Se llama **torsión** de α a la función $\tau = \tau(s)$ tal que $\dot{\mathbf{b}} = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Proposición 2.2.12.

$$\tau(s) = \frac{(\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}'(s))}{|\ddot{\alpha}(s)|^2}$$

Proposición 2.2.13. Una curva alabeada es plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

Teorema 2.2.14. (Ecuaciones de Frenet-Serret). Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en R^3 . Entonces, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{t}} = k(s)\mathbf{n}(s), \quad \dot{\mathbf{n}} = -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}(s). \quad (2.1)$$

Proposición 2.2.15. Sea $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. en R^3 . Entonces, se tiene que:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}; \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}; \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t).$$

Proposición 2.2.16. Sea $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. en R^3 . Entonces:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Además, si $k(t) \neq 0$, entonces:

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

2.2.2. Superficies regulares

Definición 2.2.17. Una **superficie parametrizada** (s.p.) en R^3 es una aplicación $\mathbf{x}: U \subseteq R^2 \rightarrow R^3$, donde U es abierto, tal que:

1. \mathbf{x} es de clase C^∞ .
2. Si $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$, entonces,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0,$$

en todos los puntos de U (Condición de Regularidad) (C.R.)

Si, además, \mathbf{x} es inyectiva, se llamará una **superficie simple** (s.s.)

Nota 2.2.18. A partir de ahora, se denotarán:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{X}_1 \text{ y } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{X}_2$$

Definición 2.2.19. Sea M un subconjunto de R^3 dotado de la topología euclídea relativa. Se dice que M es una **superficie regular (s.r.)** de R^3 si para cada $p \in M$ existe $U \subseteq R^2$ abierto y existe $\mathbf{x} : U \rightarrow R^3$ diferenciable (clase C^∞) tales que:

1. $\mathbf{x}(U) \subseteq M$ y es entorno abierto de p en M (es decir, existe $G \subseteq R^3$ abierto euclídeo con $p \in G$ y tal que $\mathbf{x}(U) = G \cap M$).
2. \mathbf{x} es homeomorfo sobre su imagen, dotada ésta de la topología euclídea relativa de R^3 .
3. \mathbf{x} es una s.p. (y, por la condición 2, una s.s.).

Cualquier aplicación verificando 1-3 se llama una **parametrización local (p.l.)** o **parametrización regular** de M en p . La aplicación inversa $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow U$ se llama una **carta local** en p (obsérvese que existe en virtud de la condición 2).

El entorno $\mathbf{x}(U)$ de p en M se llama **entorno coordinado**, las coordenadas $(u(p), v(p)) = \mathbf{x}^{-1}(p)$ se llaman **coordenadas locales** de p .

Definición 2.2.20. Sea M una s.r. y $G \subseteq R^2$ un abierto.

1. Una aplicación $f : M \rightarrow G$ se dice que es **diferenciable** en $p \in M$ (siempre de clase C^∞) si, existe una p.l. $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ tal que $f \circ \mathbf{x}$ es diferenciable en un entorno de $\mathbf{x}^{-1}(p)$. Se dice que f es **diferenciable** si lo es en todos los puntos de M .
2. Una aplicación $g : G \rightarrow M$ se dice que es **diferenciable** en $q \in G$ si existe una p.l. $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ de M en $g(q)$ tal que $\mathbf{x}^{-1} \circ g : G \rightarrow U$ es diferenciable en un entorno de q . Se dice que g es **diferenciable** si lo es en todo punto.

Las definiciones anteriores no dependen de las p.l. elegidas. Además, se tiene que, en cualquiera de las dos situaciones, la diferenciablez implica la continuidad.

Definición 2.2.21. Se llama **plano tangente** a \mathbf{x} en p al plano que pasa por p y tiene como vector característico a $\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)$. Se llama **vector normal** a \mathbf{x} en p al vector

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)}{|\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)|} \equiv \mathbf{N}(p),$$

que es unitario y, por la C.R., está bien definido. Se llama **recta normal** a \mathbf{x} en p a la recta que pasa por p con la dirección de $\mathbf{N}(p)$.

Se llama **campo vectorial normal unitario** a \mathbf{x} a la aplicación $\mathbf{N} : U \rightarrow R^3$ dada por

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{X}_1(u, v) \times \mathbf{X}_2(u, v)}{|\mathbf{X}_1(u, v) \times \mathbf{X}_2(u, v)|},$$

que cuando es una s.s. se llamará **indicatriz esférica de las normales** a \mathbf{x} .

Definición 2.2.22. Un *vector tangente* a \mathbf{x} en p es un vector tangente a cualquier curva diferenciable α en \mathbf{x} que pase por p . Se denota por $T_p(x)$ al conjunto:

$$T_p(x) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{u} \text{ es tangente a } \mathbf{x} \text{ en } p\}.$$

Proposición 2.2.23. Se tiene que $\mathbf{X}_1(u, v)$ y $\mathbf{X}_2(u, v)$ pertenecen a $T_p(x)$.

Proposición 2.2.24. Un vector \mathbf{u} pertenece a $T_p(x)$ si y sólo si $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{X}_1(p) + \mu \mathbf{X}_2(p)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

2.2.3. Geometría Intrínseca

Definición 2.2.25. Se llaman *coeficientes métricos* de una p.l. de una s.r., $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$, a las funciones $g_{ij} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j$, $i, j = 1, 2$. Estas funciones, definidas en U y que dependen de la p.l., definen una matriz en cada punto de $\mathbf{x}(U)$,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

que es simétrica, pues $g_{12} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 = g_{21}$ y definida positiva, ya que $g_{11} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1 = |\mathbf{X}_1|^2 > 0$ y $g = |G| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 > 0$, por la C.R.

Nota 2.2.26. Por similitud con la notación que usan muchos artículos bibliográficos, a partir de ahora denotaremos a estos coeficientes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{11} &= E \\ g_{12} &= g_{21} = F \\ g_{22} &= G \end{aligned}$$

Definición 2.2.27. Dada una p.l. de una s.r., $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$, la regla que, en cada $p \in \mathbf{x}(U)$, asigna a cada par de vectores $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(x)$ su producto escalar se llama la *primera forma fundamental* de la superficie en p . Se escribe:

$$I_p : T_p(x) \times T_p(x) \rightarrow \mathbf{R} : \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rightarrow I_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}.$$

Definición 2.2.28. Sean ahora los campos de vectores definidos en U :

$$\mathbf{X}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Se tiene que $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ji}$ y son diferenciables. Además, escribiéndolos en función de la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ de \mathbf{R}^3 , ponemos:

$$\mathbf{X}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + L_{ij} \mathbf{N}, \quad i, j = 1, 2.$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones de Gauss**. Los coeficientes Γ_{ij}^k , para $i, j, k = 1, 2$, se llaman **símbolos de Christoffel** de la superficie y los L_{ij} , para $i, j = 1, 2$, se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental** de la misma y son funciones diferenciables en U con valores reales, que miden la componente tangencial y la componente normal, respectivamente, de los \mathbf{X}_{ij} . Como se tiene que $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ji}$, entonces $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y $L_{ij} = L_{ji}$, para cualesquiera $i, j, k = 1, 2$.

Proposición 2.2.29. *Se verifica que:*

$$L_{ij} = \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{N}$$

Nota 2.2.30. *Al igual que con los coeficientes de la primera forma fundamental, por similitud con la notación que usan muchos artículos bibliográficos, a partir de ahora denotaremos a estos coeficientes de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} L_{11} &= L \\ L_{12} &= L_{21} = M \\ L_{22} &= N \end{aligned}$$

Definición 2.2.31. *El área de una región acotada $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{x}(U)$ viene dada por:*

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \int \int_{x^{-1}(\mathcal{R})} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| du_1 du_2 = \int \int_{x^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{g} du_1 du_2 \\ &= \int \int_{x^{-1}(\mathcal{R})} (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}) du_1 du_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.4. Geometría Extrínseca

Definición 2.2.32. *Se llama **aplicación de Gauss** de \mathbf{x} a la aplicación:*

$$\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbf{R}^3 : p \rightarrow \mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}(p),$$

es decir, el campo normal de \mathbf{x} .

Definición 2.2.33. *Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in \mathbf{x}(U)$ a la aplicación lineal:*

$$L_p = -d\mathbf{N}_p : T_p(\mathbf{x}) \rightarrow T_p(\mathbf{x}) : \mathbf{v} \rightarrow L_p(\mathbf{v}) = -d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}).$$

Proposición 2.2.34. *Se verifica que $L_p(\mathbf{X}_i(p)) = -\mathbf{N}_i(p)$, $i = 1, 2$, donde*

$$\mathbf{N}_i(p) = \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i} \right) (p) \in T_p(\mathbf{x}),$$

pues $\mathbf{N}(p)$ es unitario.

Proposición 2.2.35. Para cada $p \in x(U)$, el operador forma es autoadjunto respecto al producto interior en $T_p(x)$ dado por la primera forma fundamental.

En consecuencia, los dos autovalores de L_p son reales y se denotan por $k_1(p)$ y $k_2(p)$ y se llaman las **curvaturas principales** en p . Los autovectores correspondientes se llaman las **direcciones principales** en p y, tomados unitarios, se denotan por $\mathbf{X}_{(1)}(p)$ y $\mathbf{X}_{(2)}(p)$.

Definición 2.2.36. La forma bilineal

$$II_p : T_p(x) \times T_p(x) \rightarrow \mathbf{R} : (v, w) \rightarrow L_p v \cdot w. \quad (2.3)$$

se conoce como la **segunda forma fundamental** de x .

Proposición 2.2.37. Si \mathbf{X} es una dirección principal en p e $\mathbf{Y} \in T_p(x)$ es ortogonal a \mathbf{X} , entonces \mathbf{Y} también es una dirección principal.

Definición 2.2.38. Un punto $p \in x(U)$ se dice **umbílico** si $k_1 = k_2$ en p . Si todos los puntos de $x(U)$ son umbílicos, $x(U)$ se dice **totalmente umbilical**.

Nota 2.2.39. Se tiene que:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \text{Traza}(L) \\ k_1 k_2 &= \det(L) \end{aligned}$$

Definición 2.2.40. Se llama **curvatura media** de x en p a $H(p) = \frac{k_1+k_2}{2}(p)$ y se llama **curvatura de Gauss** a $K(p) = (k_1 k_2)(p)$

Definición 2.2.41. Una superficie se dice **mínimal** si $H \equiv 0$ y se dice **desarrollable** si $K \equiv 0$.

Definición 2.2.42. Un punto p de una superficie se dice **elíptico** si $K(p) > 0$, **hiperbólico** si $K(p) < 0$, **parabólico** si $K(p) = 0$ y k_1 o k_2 no se anulan en p y **plano** si $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

Definición 2.2.43. Una curva $\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t))$ en una p.l. de una s.r. se dice que es una **línea de curvatura** si $\alpha'(t)$ es una dirección principal en $T_{\alpha'(t)}(x)$ para todo t .

Corolario 2.2.44. Si $p \in x(U)$ es un punto no umbílico, entonces por p pasan dos líneas de curvatura $\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t))$, que se obtienen integrando la ED:

$$\begin{vmatrix} u_2'^2 & -u_1' u_2' & u_1'^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

3. Introducción a las Superficies Canal

3.1. Definición

En esta sección y la siguientes estudiaremos la definición matemática de las superficies canal y veremos algunas propiedades básicas de las mismas como son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, las curvaturas media y de Gauss, la matriz de Weingarten, si hay puntos umbílicos, etc. También daremos unos resultados sobre las condiciones necesarias y suficientes para que la superficie sea minimal o desarrollable.

Una familia de superficies 1-paramétricas está descrita por una función derivable $F(x, y, z, s) = 0$, donde s es un parámetro. Cuando s puede ser eliminado de las ecuaciones

$$F(x, y, z, s) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F(x, y, z, s)}{\partial s} = 0,$$

obtenemos la envolvente, como una superficie descrita implícitamente.

Definición 3.1.1. *La envolvente de una familia 1-paramétrica de esferas en \mathbb{R}^3 , $s \rightarrow S^2(s)$, se conoce como **superficie canal**. La curva sobre la que están situados los centros, $c = c(s)$, se denomina **curva espinal** (o curva central) de la superficie canal. El **radio** de la superficie canal es una función r tal que $r(s)$ es el radio de la esfera $S^2(s)$.*

Teorema 3.1.2. *Supongamos que la curva espinal de una superficie canal está parametrizada naturalmente $c : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura no nula. Entonces la superficie canal M puede ser parametrizada por la aplicación*

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)[-T(s)r'(s) + \sqrt{1 - r'(s)^2}(-N(s) \cos \theta + B(s) \sin \theta)], \quad (3.1)$$

donde la terna $\{T, N, B\}$ es el triedro de Frenet de $c(s)$ y representa a los vectores unitarios tangente, normal y binormal respectivamente.

Demostración. Sea x una carta que parametriza la envolvente de una familia de esferas, definiendo así una superficie canal. Como la curvatura de c es distinta de cero, el triedro de Frenet $\{T, N, B\}$ está bien definido, con lo que podemos escribir

$$x(s, \theta) - c(s) = \alpha(s, \theta)T(s) + \beta(s, \theta)N(s) + \gamma(s, \theta)B(s), \quad (3.2)$$

donde α, β y γ son derivables en el intervalo en el que c está definido. Teniendo en cuenta que $x(s, \theta)$ está envolviendo la esfera $S^2(s)$ de radio $r(s)$ y centro $c(s)$, es claro que

$$\|x(s, \theta) - c(s)\|^2 = r(s)^2, \quad (3.3)$$

además, $x(s, \theta) - c(s)$ es un vector normal de la superficie canal, así que

$$\begin{aligned} (x(s, \theta) - c(s)) \cdot x_s &= 0, \\ (x(s, \theta) - c(s)) \cdot x_\theta &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estas últimas expresiones nos indican que los vectores x_s y x_θ son tangentes a la esfera $S^2(s)$.

De (3.2) y (3.3) podemos relacionar α, β y γ con r y podemos derivar la expresión obtenida respecto a s obteniendo

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2, \\ \alpha\alpha_s + \beta\beta_s + \gamma\gamma_s = rr'. \end{cases} \tag{3.5}$$

Por otra parte, si derivamos (3.2) respecto a s teniendo en cuenta las ecuaciones de Frenet dadas en (2.1), obtenemos

$$x_s = (1 + \alpha_s - \beta\kappa)T + (\alpha\kappa - \gamma\tau + \beta_s)N + (\gamma_s + \beta\tau)B. \tag{3.6}$$

Con lo cual, (3.5), (3.6), la primera expresión de (3.4) y (3.2) implican que

$$\alpha + rr' = 0. \tag{3.7}$$

Juntando esta última expresión con (3.5) obtenemos que $\beta^2 + \gamma^2 = r^2(1 - r'^2)$. Por el Lema 1.23, en la página 17 de [3], podemos escribir

$$\beta = -r\sqrt{1 - r'^2} \cos \theta \quad y \quad \gamma = r\sqrt{1 - r'^2} \sin \theta, \tag{3.8}$$

para un parámetro θ adecuado. Por todo esto, (3.2) puede escribirse como

$$x(s, \theta) - c(s) = -rr'T - r\sqrt{1 - r'^2}N \cos \theta + r\sqrt{1 - r'^2}B \sin \theta, \tag{3.9}$$

que es equivalente a (3.1) □

Una vez demostrado el Teorema 3.1.2, teniendo en cuenta que el factor $\sqrt{1 - r'(s)^2}$ solamente está definido para valores de $r'(s) \in (0, 1)$, podemos denotar a dicho factor como $\sin \varphi(s)$ para alguna función diferenciable $\varphi(s)$, con lo cual también se tiene que $-r'(s) = \cos \varphi(s)$. Haciendo este cambio de notación, podemos reescribir (3.1) de la siguiente manera (que además coincide con la expresión utilizada en diversas publicaciones como [9]):

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)[\sin \varphi(s) \cos \theta N(s) + \sin \varphi(s) \sin \theta B(s) + \cos \varphi(s) T(s)], \tag{3.10}$$

donde $s \in [0, l]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, \pi)$.

Se puede ver cómo la expresión de nuestra superficie se corresponde prácticamente con ecuación de una esfera, salvando la diferencia de que, si consideramos que su “polo

norte” está en la dirección y sentido de la curva, para cada s la superficie sólo estará definida para un ángulo polar $\varphi(s)$, con lo cual, para cada s , $x(s, \theta)$ nos proporciona la expresión de la circunferencia en la que nuestra superficie será tangente a la esfera de centro $c(s)$ y radio $r(s)$.

Esta interpretación se puede ver gráficamente: considerando una longitud muy pequeña, ds , podemos suponer que la curva espinal es una línea recta y por simplicidad diremos que su sentido es el z_+ . Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

- Si $r'(s) > 0 \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow$ Nuestra superficie será tangente a la esfera en el “hemisferio sur”. (Fig. 3.1)
- Si $r'(s) < 0 \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ Nuestra superficie será tangente a la esfera en el “hemisferio norte”. (Fig. 3.2)
- Si $r'(s) = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Nuestra superficie será tangente a la esfera en el “ecuador”. (Fig. 3.3)

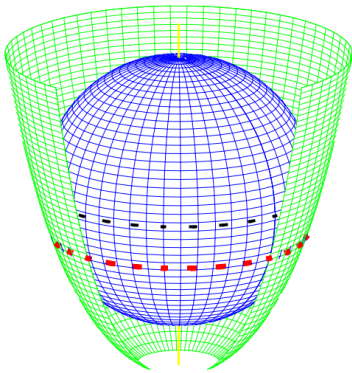


Figura 3.1: Circunferencia de tangencia en el hemisferio sur.

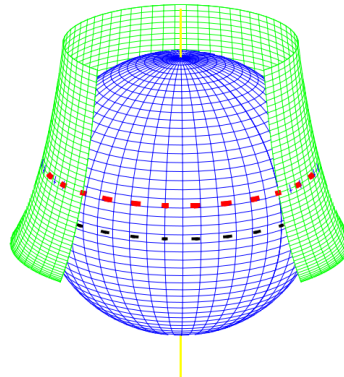


Figura 3.2: Circunferencia de tangencia en el hemisferio norte.

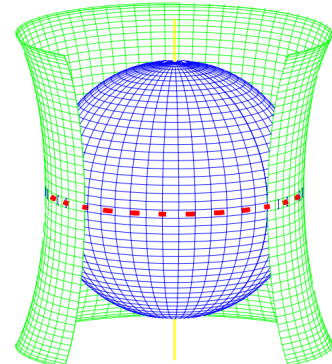


Figura 3.3: Circunferencia de tangencia en el ecuador.

Nota 3.1.3. *Dos casos particulares de las superficies canal son los siguientes: si $c = c(s)$ es una línea recta, la superficie \mathbb{M} será de revolución (Fig. 3.4), y si $r(s)$ es constante, entonces \mathbb{M} será un tubo (Fig. 3.5).*

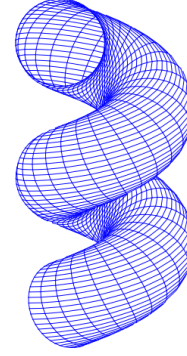
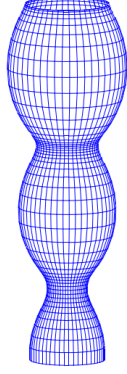


Figura 3.4: Superficie canal con c recta. Figura 3.5: Superficie canal con r constante.

3.2. Descripción geométrica

3.2.1. Propiedades básicas

En primer lugar, de (3.10) y las ecuaciones de Frenet (2.1) para una curva regular c en \mathbb{E}^3 con curvatura κ y torsión τ , tenemos

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B, \quad x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_\theta^1 N + x_\theta^2 B \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} x_s^1 &= \sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta, \\ x_s^2 &= r' \sin \varphi \cos \theta - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta - rr' \varphi' \cos \theta, \\ x_s^3 &= r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta, \\ x_\theta^1 &= -r \sin \varphi \sin \theta, \\ x_\theta^2 &= r \sin \varphi \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hecho esto, podemos hallar los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E = \langle x_s, x_s \rangle &= r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa \varphi' \cos \theta \\ &\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) + \sin^2 \varphi - 2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta), \\ F = \langle x_s, x_\theta \rangle &= r^2 \tau \sin^2 \varphi + r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta, \\ G = \langle x_\theta, x_\theta \rangle &= r^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con lo cual, tenemos que:

$$EG - F^2 = r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 > 0 \quad (3.14)$$

Por otro lado, la aplicación de Gauss \mathbb{G} de \mathbb{M} viene dado por:

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} = (\cos \varphi)T + (\sin \varphi \cos \theta)N + (\sin \varphi \sin \theta)B, \quad (3.15)$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_s &= -(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)T - (r'\kappa + r'\varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta)N \\ &\quad + (\tau \sin \varphi \cos \theta - r'\varphi' \sin \theta)B, \\ \mathbb{G}_\theta &= (-\sin \varphi \sin \theta)N + (\sin \varphi \cos \theta)B. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Con lo cual, los valores de la segunda forma fundamental se obtienen por

$$\begin{aligned} L &= -\langle x_s, \mathbb{G}_s \rangle \\ &= -r(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa\varphi' \cos \theta \\ &\quad + 2r'\kappa\tau \sin \varphi \sin \theta) + (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta), \\ M &= -\langle \mathbb{G}_s, x_\theta \rangle = -r\tau \sin^2 \varphi - rr'\kappa \sin \varphi \sin \theta, \\ N &= -\langle x_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = -r \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Definamos ahora los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} P &= rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi = rQ - \sin^2 \varphi, \\ Q &= r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta, \\ R &= \tau \sin^2 \varphi + r'\kappa \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Notar que, por (3.14), $P \neq 0$ en toda la superficie debido a la regularidad de \mathbb{M} . Se comprueba fácilmente que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental satisfacen la siguiente relación:

$$E = -rL - P \quad F = -rM \quad G = -rN. \quad (3.19)$$

Basándonos en (3.11), (3.12) y (3.16), la aplicación de Weingarten de \mathbb{M} se obtiene por

$$A_{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} -\frac{Q}{P} & \frac{R}{rP} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

De (3.20) vemos que las curvaturas principales κ_1 y κ_2 se pueden escribir como

$$\kappa_1 = -\frac{Q}{P}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r} \quad (3.21)$$

Con lo cual, usando las expresiones vistas en la Definición 2.2.40, podemos escribir la curvatura gaussiana K y la curvatura media H de la siguiente manera, respectivamente

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{Q}{rP} \quad (3.22)$$

y

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP}. \quad (3.23)$$

Notar que para obtener esta última, se ha tenido en cuenta la primera expresión de (3.18) donde, despejando, se tiene que $rQ = P + \sin^2 \varphi$.

Viendo las expresiones de la curvatura media (3.23) y la curvatura de Gauss (3.22), se puede deducir sin muchas complicaciones la siguiente expresión que relaciona las mismas:

$$H = -\frac{1}{2}\left(Kr + \frac{1}{r}\right), \quad (3.24)$$

además, si nos fijamos, estamos hallando la curvatura media como la suma de dos términos dividida por dos y se puede comprobar fácilmente que dichos términos se corresponden con los valores de las curvaturas principales dados en (3.21).

3.2.2. Superficies minimales y desarrollables

Dado que en el apartado anterior hemos determinado las expresiones de la curvatura gaussiana (3.22) y curvatura media (3.23), vamos a ver qué condiciones debe satisfacer la superficie para que sea desarrollable o minimal.

Teorema 3.2.1. *Una superficie canal \mathbb{M} será desarrollable si y sólo si es un cilindro circular (Fig. 3.6) o un cono circular (Fig. 3.7).*

Demostración. \mathbb{M} será desarrollable si y sólo si su curvatura gaussiana $K = 0$. Teniendo en cuenta (3.22), ésta se anulará si y sólo si $Q = 0$, y por (3.18) tenemos

$$Q = r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta = 0 \quad (3.25)$$

donde, recordando que r y θ son dos parámetros independientes entre sí que pueden tomar cualquier par de valores, dicha expresión se anulará si y sólo si cada sumando es nulo, es decir:

$$Q = r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r'' = 0, \\ \kappa \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

La implicación de la primera ecuación es clara, para que sea desarrollable la derivada primera del radio $r(s)$ debe ser constante, es decir, $r(s) = as + b$. Para la segunda ecuación, recordando que $-r'(s) = \cos \varphi$, obtenemos

$$\kappa \sin \varphi = \kappa \sqrt{1 - r'^2} = 0 \quad (3.27)$$

y, dado que $|r'| = |a| < 1$ (ya que si se diera la igualdad, la superficie se vería reducida a una curva y si $|r'| = |a| > 1$ entonces la superficie no estaría definida), llegamos a que se tiene que dar $\kappa = 0$, por lo que \mathbb{M} será una superficie de revolución.

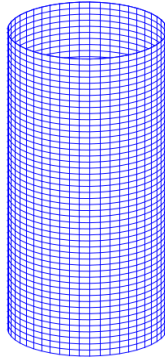


Figura 3.6: Cilindro.

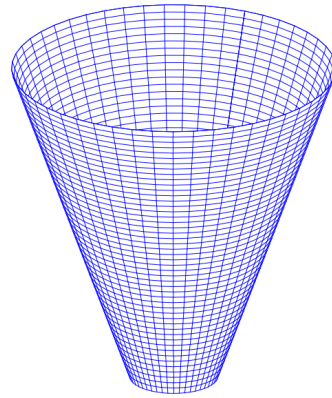


Figura 3.7: Cono.

Con lo cual, para que \mathbb{M} sea desarrollable tiene que ser de revolución y tener un radio $r(s)$ de la forma $r(s) = as + b$, es decir, que sea un cilindro o un cono. \square

Teorema 3.2.2. *Una superficie canal \mathbb{M} será minimal si y sólo si es un catenoide (Fig. 3.8).*

Demostración. \mathbb{M} será minimal si y sólo si su curvatura media $H = 0$. Teniendo en cuenta la expresión (3.23), ésta se anulará si y sólo si $2P + \sin^2 \varphi = 0$, y por (3.18) y un razonamiento análogo al de la demostración anterior tenemos

$$2rr'' + 2r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2rr'' - \sin^2 \varphi = 0, \\ r\kappa \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

De la segunda ecuación, dado que $r \neq 0$ y $\sin^2 \varphi \neq 0$, tenemos que $\kappa = 0$, por lo que \mathbb{M} será de revolución. Con lo cual, \mathbb{M} será un catenoide, ya que es la única superficie de revolución minimal. \square

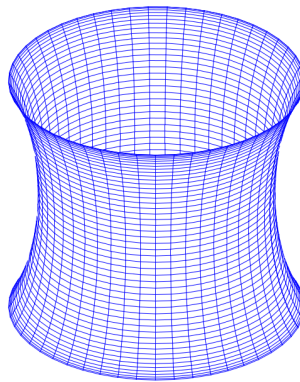


Figura 3.8: Catenoide.

Estas demostraciones también se pueden encontrar en el punto 3 de [4], donde se tratan de una manera más generalizada, ya que se define la clase de superficies canal $\mathbb{M}(X,Y)$ -linear Weingarten. Como veremos en detalle más adelante, dichas superficies son aquellas que, para una pareja (X,Y) , $X \neq Y$ de las curvaturas K , H y K_{II} (segunda curvatura gaussiana), \mathbb{M} satisface que

$$aX + bY = c \quad (3.29)$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ no todas nulas.

3.2.3. Tipos de puntos

Caractericemos ahora los tipos de puntos que posee una superficie canal, ya sea determinando cuáles son umbílicos o clasificándolos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos y planos.

Teorema 3.2.3. *Una superficie canal \mathbb{M} no tiene ningún punto umbílico.*

Demostración. Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que sí hay puntos umbílicos en \mathbb{M} . En este caso, en base a la Definición 2.2.38 y las expresiones de las curvaturas principales vistas en (3.21), en estos puntos se tiene que cumplir que

$$\kappa_1 = \kappa_2 \Rightarrow -\frac{Q}{P} = -\frac{1}{r}, \quad (3.30)$$

donde, invirtiendo y teniendo en cuenta los desarrollos de P y Q dados en (3.18), nos queda

$$-\frac{Q}{P} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{P}{Q} = r \Rightarrow \frac{rQ - \sin^2 \varphi}{Q} = r - \frac{\sin^2 \varphi}{Q} = r \Rightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{Q} = 0. \quad (3.31)$$

Como $\sin^2 \varphi \neq 0$, esa expresión no tiene solución. Por otra parte, al invertir (3.30) estamos suponiendo que $Q \neq 0$. En el caso de que esto no fuese así, la demostración sería trivial, ya que si $Q = 0 \Rightarrow \kappa_1 = 0 \neq -\frac{1}{r} = \kappa_2$. \square

Veamos ahora si los puntos de una superficie canal son elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos. Para ello, es conveniente recordar la Definición 2.2.42.

Teorema 3.2.4. *Un punto $p(s)$ de una superficie canal \mathbb{M} será parabólico cuando se cumpla que $r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta = 0$. Además, si un punto tiene curvatura de Gauss nula, éste nunca será plano.*

Demostración. Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 3.2.1. Un punto p será parabólico si y sólo si su curvatura gaussiana $K = 0$. Con lo cual, por (3.22), ésta se anulará si y sólo si $Q = 0$, y, teniendo en cuenta (3.18), tenemos

$$Q = r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta = 0 \quad (3.32)$$

Para ver que estos puntos nunca serán planos, basta recordar que $\kappa_2 = -\frac{1}{r} \neq 0$. \square

Corolario 3.2.5. *Si la superficie canal \mathbb{M} es un cono o un cilindro, entonces todos sus puntos serán parabólicos.*

Demostración. Ya vimos en el Teorema 3.2.1 que en estos dos tipos de superficie se tiene que $K(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{M}$, con lo que se tiene el resultado. \square

Teorema 3.2.6. *Un punto $p(s)$ de una superficie canal \mathbb{M} será elíptico cuando se cumpla*

$$r > \frac{1 - r'^2}{r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta} \quad (3.33)$$

e hiperbólico cuando

$$r < \frac{1 - r'^2}{r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta} \quad (3.34)$$

Demostración. La demostración se hará para en caso de puntos elípticos, para los puntos hiperbólicos es análogo.

Un punto será elíptico si y sólo si su curvatura gaussiana es mayor que 0, con lo cual, de la expresión (3.22) se tiene

$$K > 0 \Rightarrow \frac{Q}{rP} > 0, \quad (3.35)$$

donde, podemos tomar la inversa, despreciar el término r ya que siempre es positivo y expresar P en función de Q (3.18), obteniendo así

$$0 < \frac{P}{Q} = \frac{rQ - \sin^2 \varphi}{Q} = r - \frac{\sin^2 \varphi}{Q}. \quad (3.36)$$

Expresando el $\sin^2 \varphi$ como $1 - r'^2$ y desarrollando Q por (3.18) se tiene el resultado. \square

Cuando la curvatura $\kappa = 0$ es relativamente más fácil obtener el carácter de cada punto. En la siguiente figura se muestran en rojo los puntos elípticos, en azul los hiperbólicos y en amarillo los parabólicos.

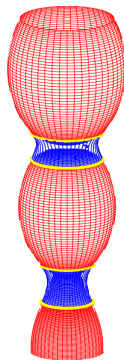


Figura 3.9: Distinción de puntos sobre una superficie canal.

3.2.4. Líneas de curvatura

Si desarrollamos el determinante del Corolario 2.2.44 con el cambio de notación $u_1 = s$ y $u_2 = \theta$ llegamos a que

$$(EM - FL)s'^2 + (GN - GM)\theta'^2 - (GL - EN)s'\theta' = 0, \quad (3.37)$$

teniendo en cuenta las relaciones entre los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental dadas en (3.19) obtenemos:

$$-MPs'^2 - NP s'\theta' = 0, \quad (3.38)$$

donde podemos cancelar el parámetro P ya que es no nulo y sustituir M y N por las expresiones vistas en (3.17)

$$(r\tau \sin^2 \varphi + rr'\kappa \sin \varphi \sin \theta)s'^2 + r \sin^2 \varphi s'\theta' = 0. \quad (3.39)$$

Operando en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que r y $\sin \varphi$ son dos parámetros que no se pueden anular, llegamos a:

$$s'(\tau \sin \varphi s' + r'\kappa \sin \theta s' + \sin \varphi \theta') = 0. \quad (3.40)$$

De esta última ecuación obtenemos las siguientes curvas:

- Si $s = cte$, obtenemos una línea de curvatura principal que se corresponde con la circunferencia de tangencia entre la superficie canal y la esfera de centro $c(s)$ y radio $r(s)$. Estas circunferencias se muestran en rojo en las Figuras 3.1.
- Si $s \neq cte$, la curva debe cumplir que

$$\theta' = -\tau s' - \frac{\kappa r'}{\sqrt{1 - r'^2}} \sin \theta. \quad (3.41)$$

Esta línea de curvatura principal se corresponde con una curva que se mueve “paralela” a la curva espinal. Un ejemplo se puede ver en la siguiente figura.

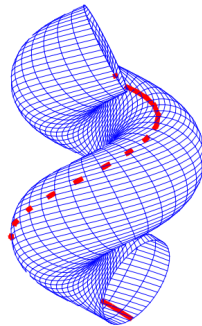


Figura 3.10: Línea de curvatura principal “paralela” a la curva espinal.

3.3. Casos particulares

En esta sección aplicaremos los resultados previos a distintos casos particulares de superficies canal con el fin de ver cómo quedan las expresiones después de imponerles ciertas condiciones.

Los casos a tratar se recogen en la siguiente tabla:

	$r = cte$	$r' = cte$
$\kappa = 0, \tau = 0$	Cilindro	Cono
$\kappa = cte, \tau = 0$	Toro	Toro cónico
$\kappa = cte, \tau = cte$	Tubo helicoidal	Cono helicoidal

Al final de cada caso, se verán gráficamente el tipo de puntos de cada superficie (siguiendo la notación de colores de la Figura 3.9) y las líneas de curvatura principales.

3.3.1. Cilindro

En este primer caso, como cabría esperar, se obtiene un valor de la curvatura gaussiana nulo $K = 0$ (ya que $Q = 0$) y un valor de la curvatura media $H = -1/(2r)$.

Como hemos dicho que el parámetro Q es nulo en toda la superficie, recordando que ésta era la condición para que un punto sea parabólico, obtenemos que todos los puntos del cilindro serán de este tipo.

Por otro lado, las líneas de curvatura que se obtienen son las esperadas; $s = cte$ y $\theta = cte$.

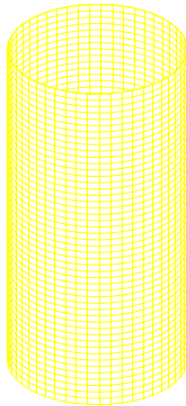


Figura 3.11: Puntos parabólicos en el cilindro.

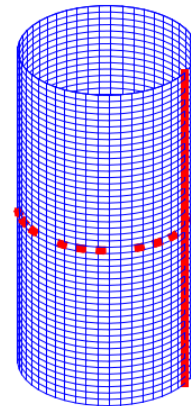


Figura 3.12: Líneas de curvatura principales en el cilindro.

3.3.2. Cono

En el caso del cono, pese a que el radio tiene derivada constante no nula, los resultados obtenidos son análogos a los del cilindro. Con lo cual, todos sus puntos serán parabólicos, la curvatura de Gauss será nula y la media valdrá $H = -1/(2r)$ y las líneas de curvatura serán también $s = cte$ y $\theta = cte$.

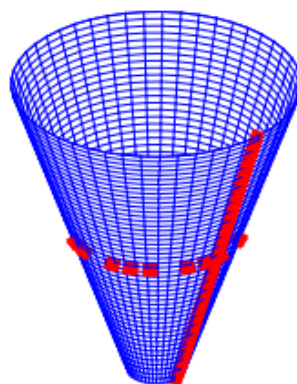
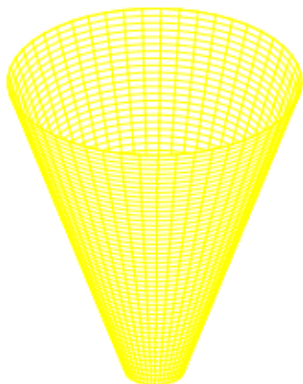


Figura 3.13: Puntos parabólicos en el cono. Figura 3.14: Líneas de curvatura principales en el cono.

3.3.3. Toro

Si trabajamos con un radio y con curvatura de la curva espinal constantes, obtendremos un toro (o parte del mismo).

El hecho de que la curvatura sea no nula introduce unas primeras variaciones respecto a los resultados previos. En primer lugar, la curvatura de Gauss y la curvatura media vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$K = \frac{\kappa \cos \theta}{r(r\kappa \cos \theta - 1)} \quad , \quad H = -\frac{1}{2r} \left(1 + \frac{r\kappa \cos \theta}{r\kappa \cos \theta - 1} \right). \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.32), los puntos parabólicos serán aquellos que satisfagan que $\kappa \cos \theta = 0$, es decir, los obtenidos al hacer $\theta = \pm\pi/2$. Por otra parte, de la expresión (3.33) ((3.34)) obtenemos que la condición para que los puntos sean elípticos (hiperbólicos) es:

$$r > (<) \frac{R}{\cos \theta} \quad (3.43)$$

donde R es el radio de la curva espinal. Notar que, si $r \geq R$, la distribución de puntos sería diferente a la que se ve en la siguiente imagen, pero, dado que en esos casos la superficie tiene autointersecciones, no trabajaremos con ellos.

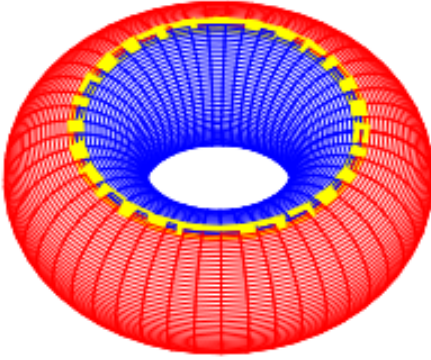


Figura 3.15: Puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos en el toro.

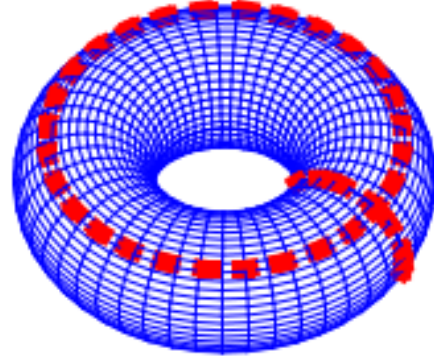


Figura 3.16: Líneas de curvatura principales en el toro.

3.3.4. Toro Cónico

Si introducimos una derivada del radio no nula, el término $\sin \varphi = \sqrt{1 - r'^2} \neq 1$ con lo cual, las expresiones de las curvaturas nos quedan de la siguiente manera:

$$K = \frac{\kappa \cos \theta}{r(r\kappa \cos \theta - \sin \varphi)} \quad , \quad H = -\frac{1}{2r} \left(1 + \frac{r\kappa \cos \theta}{r\kappa \cos \theta - \sin \varphi} \right). \quad (3.44)$$

Los puntos parabólicos serán aquellos en los que $\kappa \sin \varphi \cos \theta = 0$, es decir, al igual que en el caso anterior, serán aquellos que cumplan que $\theta = \pm\pi/2$. Mientras que, los elípticos e hiperbólicos satisfarán, respectivamente,

$$r > \frac{R\sqrt{1 - r'^2}}{\cos \theta} \quad , \quad r < \frac{R\sqrt{1 - r'^2}}{\cos \theta} \quad (3.45)$$

En cuanto a las líneas de curvatura, tenemos, como siempre, la curva $s = cte$, mientras que, para determinar la otra, en este caso nos queda la siguiente ecuación diferencial

$$\theta' = -\frac{\kappa r'}{\sqrt{1 - r'^2}} \sin \theta, \quad (3.46)$$

cuya solución es la siguiente:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left[C \exp \left(-\frac{\kappa r'}{\sqrt{1 - r'^2}} s \right) \right] \quad (3.47)$$

donde C es una constante.

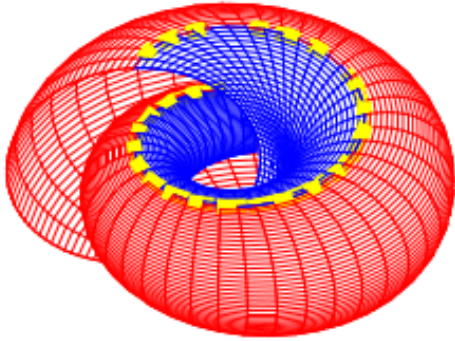


Figura 3.17: Puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos en el toro cónico.

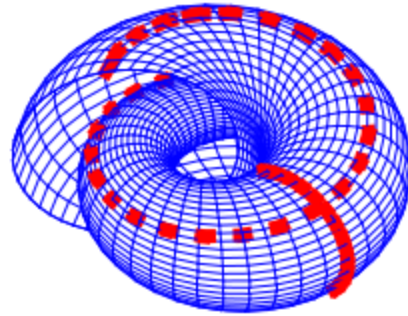


Figura 3.18: Líneas de curvatura principales en el toro cónico.

3.3.5. Tubo helicoidal

El hecho de trabajar con un valor de torsión constante no nulo mientras que mantenemos el radio invariante, no nos producirá ninguna diferencia en las ecuaciones de las curvaturas respecto al caso del toro, con lo cual, ambas vendrán dadas por las expresiones (3.42).

Para determinar el tipo de puntos, también tendremos unos resultados similares al caso del toro, con la diferencia de que la curvatura no será el inverso del radio, con lo cual, las condiciones para que sean parabólicos, elípticos o hiperbólicos, serán, respectivamente, las siguientes:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad r > \frac{1}{\kappa \cos \theta}, \quad r < \frac{1}{\kappa \cos \theta}. \quad (3.48)$$

Las líneas de curvatura, serán la ya conocida $s = cte$ y la obtenida al resolver la ecuación diferencial

$$\theta' = -\tau s', \quad (3.49)$$

con lo cual, llegamos a que

$$\theta = -\tau s + C, \quad (3.50)$$

siendo C una constante.

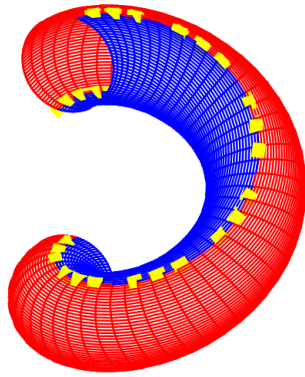


Figura 3.19: Puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos en el tubo helicoidal.

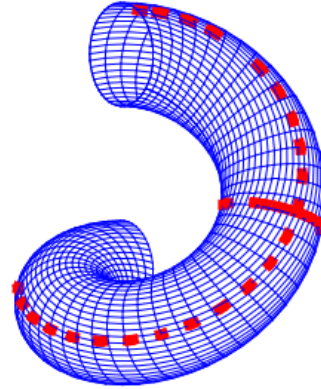


Figura 3.20: Líneas de curvatura principales en el tubo helicoidal.

3.3.6. Cono helicoidal

Para terminar con estos casos particulares, veremos el caso en el que hay torsión, curvatura y derivada primera del radio constante.

Al igual que sucedía con el tubo helicoidal y el toro, las curvaturas gaussiana y media del cono helicoidal coinciden con las del toro cónico, dadas en (3.44).

Lo mismo ocurre, con las condiciones para puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos, donde, al igual que en el caso del tubo helicoidal, hay que tener en cuenta que la curvatura no será el inverso del radio:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad r > \frac{\sqrt{1-r'^2}}{\kappa \cos \theta}, \quad r < \frac{\sqrt{1-r'^2}}{\kappa \cos \theta}. \quad (3.51)$$

Finalmente, las líneas de curvatura serán $s = cte$ y la solución a la siguiente ecuación diferencial

$$\theta' = -\tau s' - \frac{\kappa r'}{\sqrt{1-r'^2}} \sin \theta, \quad (3.52)$$

para la que no hay solución, por lo que no aparece en la figura 3.22.

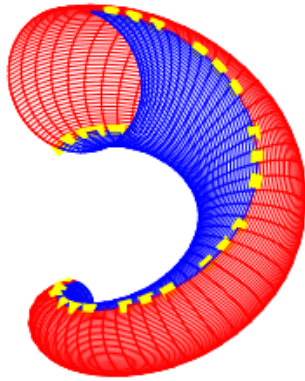


Figura 3.21: Puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos en el cono helicoidal.

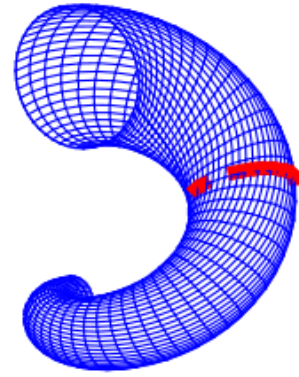


Figura 3.22: Línea de curvatura principal $s = cte$ en el cono helicoidal.

4. Avances recientes en superficies canal

En esta sección, revisaremos una selección de artículos y, de ellos, daremos los resultados que se han considerado más importantes, así mismo, algunas demostraciones se han extendido levemente con el fin de simplificar su comprensión, mientras que otras han sido omitidas por su extensión o por la poca relevancia del resultado, si hay algún lector interesado en estas últimas, el material usado se puede encontrar en las Referencias al final de este documento.

4.1. Some characterizations of Canal Surface

Esta publicación de Young Ho Kim, Huili Liu y Jinhua Qian [4] comienza, al igual que nosotros, viendo unos primeros resultados básicos que ya vimos en el apartado “Introducción a las Superficies Canal”. Además de éstos, también calcula los coeficientes de la tercera forma fundamental como podemos ver a continuación:

$$\begin{aligned}
 e &= \langle \mathbb{G}_s, \mathbb{G}_s \rangle \\
 &= \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 \\
 &\quad + 2\kappa\varphi' \cos \theta + 2r'\kappa\tau \sin \varphi \sin \theta, \\
 f &= \langle \mathbb{G}_s, \mathbb{G}_\theta \rangle = \tau \sin^2 \varphi + r'\kappa \sin \varphi \sin \theta, \\
 g &= \langle \mathbb{G}_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = \sin^2 \varphi.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta (3.13), (3.17), (4.1) y los parámetros de (3.18) se puede deducir el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *La primera, segunda y tercera forma fundamental de las superficies canal satisfacen*

$$e = \frac{L - Q}{-r}, f = \frac{M}{-r}, g = \frac{N}{-r}$$

y

$$EG - F^2 = r^2 P^2, LN - M^2 = rPQ, eg - f^2 = Q^2. \tag{4.2}$$

A continuación, nos habla de la segunda curvatura gaussiana K_{II} , que es análoga a la curvatura gaussiana derivada de la segunda forma fundamental y que se define de la siguiente manera:

$$K_{II} = \frac{1}{(LN - M^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss} & \frac{1}{2}L_s & M_s - \frac{1}{2}L_\theta \\ M_\theta - \frac{1}{2}N_s & L & M \\ \frac{1}{2}N_\theta & M & N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}L_\theta & \frac{1}{2}N_s \\ \frac{1}{2}L_\theta & L & M \\ \frac{1}{2}N_s & M & N \end{vmatrix} \right\}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4.2), la segunda curvatura gaussiana K_{II} de \mathbb{M} puede escribirse como

$$K_{II} = \frac{1}{r^2 P^2 Q^2} \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta, \tag{4.3}$$

donde los coeficientes w_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) vienen dados por

$$\begin{aligned}
 w_0 &= -r^3\varphi'^4\sin^4\varphi + \frac{1}{4}r\varphi'^2\sin^4\varphi(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3}{2}r^2\varphi'^3\sin^5\varphi - \frac{1}{4}r\kappa^2\sin^6\varphi \\
 &\quad - \frac{1}{4}r\varphi''\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\varphi'\sin^5\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{4}r\kappa\tau\sin^5\varphi\cos\varphi\sin\theta; \\
 w_1 &= -4r^3\kappa\varphi'^3\sin^4\varphi + \frac{9}{2}r^2\kappa\varphi'^2\sin^5\varphi + \frac{1}{4}r\kappa\varphi'\sin^4\varphi(1 - 5\sin^2\varphi) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\kappa\sin^5\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{4}r\kappa'\sin^5\varphi\cos\varphi; \\
 w_2 &= -6r^3\kappa^2\varphi'^2\sin^4\varphi + \frac{9}{2}r^2\kappa^2\varphi'\sin^5\varphi - \frac{1}{4}r\kappa^2\sin^6\varphi; \\
 w_3 &= -4r^3\kappa^3\varphi'\sin^4\varphi + \frac{3}{2}r^2\kappa^3\sin^5\varphi; \\
 w_4 &= -r^3\kappa^4\sin^4\varphi.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

De (3.23), (4.3) y (4.4) se puede obtener el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2. *La segunda curvatura gaussiana K_{II} y la curvatura media H de una superficie canal no desarrollable cumplen*

$$K_{II} = H - \frac{R}{4r^2P^2Q^2}, \tag{4.5}$$

donde $R = \sum_{k=0}^2 u_k \cos^k \theta$ y los coeficientes u_k ($k = 0, 1, 2$) son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 2rr'^2r''^2\sin^2\varphi - r\kappa^2\sin^6\varphi \\
 &\quad + rr'r''\sin^4\varphi + r'^2r''\sin^4\varphi + rr'\kappa\tau\sin^5\varphi\sin\theta; \\
 u_1 &= rr'^2r''\kappa\sin^3\varphi + r'^2\kappa\sin^5\varphi + rr'\kappa'\sin^5\varphi; \\
 u_2 &= r\kappa^2\sin^6\varphi.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definición 4.1.3. *Para un par (X, Y) , $X \neq Y$, de las curvaturas K , H y K_{II} de una superficie canal \mathbb{M} , si \mathbb{M} cumple que*

$$\Phi(X, Y) = 0,$$

entonces se dirá que es una superficie canal (X, Y) -Weingarten, donde Φ es la función de Jacobi definida por $\Phi = XY - YX$.

Definición 4.1.4. *Para un par (X, Y) , $X \neq Y$, de las curvaturas K , H y K_{II} de una superficie canal \mathbb{M} , si \mathbb{M} cumple que*

$$aX + bY = c,$$

entonces se dirá que es una superficie canal (X, Y) -linear Weingarten, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Nota 4.1.5. *Las superficies canal (X, Y) -linear Weingarten pueden ser consideradas como la generalización natural de las superficies canal con curvatura gaussiana constante, curvatura media constante y segunda curvatura gaussiana constante.*

A continuación, se darán dos resultados sobre las superficies canal (X, Y) -Weingarten de los que no se incluirá su demostración.

Teorema 4.1.6. *Una superficie canal \mathbb{M} es una superficie canal (K, H) -Weingarten si y sólo si es un tubo o una superficie de revolución.*

Teorema 4.1.7. *Para una superficie canal no desarrollable \mathbb{M} , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- \mathbb{M} es una superficie de revolución o un tubo cuya curva espinal tiene una curvatura constante no nula;
- \mathbb{M} es una superficie canal (H, K_{II}) -Weingarten;
- \mathbb{M} es una superficie canal (K, K_{II}) -Weingarten.

Durante las demostraciones de estos dos teoremas se aparecen las siguiente expresiones que son válidas cuando la superficie canal es de revolución ($\kappa = 0$) y que serán de utilidad más adelante:

$$K = \frac{r''}{r(rr'' - 1 + r'^2)}, \quad H = \frac{2rr'' - 1 + r'^2}{-2r(rr'' - 1 + r'^2)}. \quad (4.7)$$

$$K_{II} = H + \frac{r'}{4} \left(\frac{1}{rr''} - \frac{1}{rr'' - 1 + r'^2} \right) (\log \left| \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} \right|)'. \quad (4.8)$$

A continuación, se expone la parte más interesante de este artículo, que son los resultados relacionados con las superficies canal (X, Y) -linear Weingarten.

En este apartado podemos encontrar las implicaciones de que una superficie canal sea desarrollable o minimal como ya se ha visto en el subapartado “Superficies minimales y desarrollables” de este trabajo con el añadido de que toda superficie minimal tiene la segunda curvatura gaussiana nula (notar que la implicación contraria no tiene porqué darse). Además, también podemos ver lo que implica que la segunda curvatura gaussiana sea nula.

Teorema 4.1.8. *Una superficie canal no desarrollable con segunda curvatura gaussiana nula es una superficie de revolución que cumple*

$$(\log r'^2)' = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} (\log \left| \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right|)', \quad (4.9)$$

recordando que las curvaturas principales vienen dadas por (3.21).

Demostración. Si $K_{II} = 0$, por (4.5) tenemos

$$H = -\frac{R}{4r^2P^2Q^2}.$$

De (3.23) tenemos

$$R = 2rPQ^2(2P + \sin^2\varphi) \quad (4.10)$$

donde, si consideramos en la expresión de R el coeficiente de mayor grado del $\cos\theta$, tenemos que $\kappa = 0$. Con lo cual, la superficie canal es una superficie de revolución.

Además, por (4.7) y (4.8) se tiene

$$\frac{2rr'' - 1 + r'^2}{-2r(rr'' - 1 + r'^2)} + \frac{r'}{4} \left(\frac{1}{rr''} - \frac{1}{rr'' - 1 + r'^2} \right) (\log |\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2}|)' = 0. \quad (4.11)$$

donde, reordenando, llegamos a que

$$\frac{2rr'' - 1 + r'^2}{r'^2 - 1} (\log r'^2)' = (\log |\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2}|)'. \quad (4.12)$$

Combinando esta expresión con (3.21) cuando $\kappa = 0$ se tiene el resultado. \square

Una vez tratados estos tres casos excepcionales, pasa a trabajar con las superficies canal (X, Y) -linear Weingarten generales. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $c = 1$ en $aX + bY = c$.

Teorema 4.1.9. *Una superficie canal \mathbb{M} es una superficie canal (K, H) -linear Weingarten si y sólo si es una de las siguientes superficies:*

- un tubo con radio $r = -\frac{b}{2}$;
- una superficie de revolución tal que

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde $r(s)$ viene dado por (4.13).

Demostración. Por ser una superficie canal (K, H) -linear Weingarten se tiene que

$$aK + bH = 1,$$

donde $a, b \in R$ y $(a, b) \neq (0, 0)$.

De (3.24) obtenemos

$$(2ar - br^2)K = b + 2r.$$

Sustituyendo la expresión de la curvatura gaussiana (3.22)

$$\frac{(2ar - br^2)(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)}{r(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)} = b + 2r,$$

y, despejando, llegamos a que

$$2\kappa(r^2 + br - a)\sin \varphi \cos \theta + 2(r^2 + br - a)r'' - (b + 2r)(1 - r'^2) = 0.$$

Separando los términos que dependen de θ y los que no, nos queda el siguiente sistema

$$\begin{cases} \kappa(r^2 + br - a)\sin \varphi = 0, \\ 2(r^2 + br - a)r'' - (b + 2r)(1 - r'^2) = 0. \end{cases}$$

Caso 1: Si $r^2 + br - a \neq 0$, entonces se tiene necesariamente que $\kappa = 0$. Con lo cual, \mathbb{M} es una superficie de revolución que satisface

$$2(r^2 + br - a)r'' = (b + 2r)(1 - r'^2).$$

Si resolvemos dicha ecuación, obtenemos

$$s = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{r^2 + br - a}{r^2 + br - a - c_1}} dr, \quad (4.13)$$

donde c_1, c_2 son constantes (consultar [7]).

Como $\kappa = 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la curva espinal es $c(s) = (0, 0, s)$ y $T = (0, 0, 1)$, $N = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, respectivamente. Con lo cual, \mathbb{M} se puede expresar como

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde $r(s)$ viene dado por (4.13).

Caso 2: Si $r^2 + br - a = 0$ pero $\kappa \neq 0$, entonces, por la segunda expresión del sistema, $r = -\frac{b}{2}$ es una constante no nula, \mathbb{M} es un tubo y a, b cumplen $b^2 + 4a = 0$.

Caso 3: Si $r^2 + br - a = \kappa = 0$, entonces \mathbb{M} será un cilindro circular. □

Corolario 4.1.10. *La superficie canal \mathbb{M} que tiene curvatura de Gauss constante no nula es una superficie de revolución tal que*

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde $r(s)$ está dada por (4.14).

Demostración. Por el Teorema 4.1.9 con $b = 0$, \mathbb{M} tiene una curvatura gaussiana constante no nula ($K = \frac{1}{a}$). Obviamente, \mathbb{M} no puede ser un tubo (ya que $b = 0$) con lo cual será una superficie de revolución. Por un desarrollo similar al del Teorema 4.1.9, se puede expresar como

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde, $r(s)$ está dado por

$$s = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{r^2 - a}{r^2 + c_1}} dr, \quad (4.14)$$

donde c_1, c_2 son constantes (consultar [7]). □

Corolario 4.1.11. *La superficie canal \mathbb{M} que tiene curvatura media constante no nula es una superficie de revolución tal que*

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde $r(s)$ está dada por (4.15).

Demostración. Por el Teorema 4.1.9 con $a = 0$, \mathbb{M} tiene una curvatura media constante no nula ($H = \frac{1}{b}$). Por un razonamiento similar al del Corolario 4.1.10 será una superficie de revolución ya que el sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} \kappa(r^2 + br) \sin \varphi = 0, \\ 2(r^2 + br)r'' - (b + 2r)(1 - r'^2) = 0. \end{cases}$$

y si se anula el término $r^2 + br$, no se puede anular la segunda ecuación, ya que para ello tendría que pasar que $b + 2r = 0$, lo que sería incompatible. Con lo cual, la única posibilidad es que $\kappa = 0$. Por tanto, la superficie se puede expresar como

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde, $r(s)$ está dado por

$$s = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{r^2 + br}{r^2 + br - c_1}} dr, \quad (4.15)$$

siendo c_1, c_2 constantes (consultar [7]). □

Teorema 4.1.12. *Una superficie canal \mathbb{M} no desarrollable es una superficie canal (H, K_{II}) -linear Weingarten si y sólo si es una parte abierta de una superficie de revolución que satisface*

$$\frac{1}{a}(\log r'^2)' = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{(a + b)(\kappa_2 + \kappa_1) - 2}(\log |\frac{\kappa_1}{\kappa_2}|)',$$

donde $a, b \in R$ y $(a, b) \neq (0, 0)$.

Teorema 4.1.13. *Una superficie canal \mathbb{M} no desarrollable es una superficie canal (K, K_{II}) -linear Weingarten si y sólo si es una parte abierta de una superficie de revolución que satisface*

$$\frac{1}{a}(\log r'^2)' = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{a(\kappa_2 + \kappa_1) + 2b\kappa_1\kappa_2 - 2}(\log |\frac{\kappa_1}{\kappa_2}|)',$$

donde $a, b \in R$ y $(a, b) \neq (0, 0)$.

Teorema 4.1.14. *La superficie canal \mathbb{M} que tiene segunda curvatura gaussiana constante no nula es una parte abierta de una superficie de revolución que satisface*

$$\frac{1}{a}(\log r'^2)' = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{a(\kappa_2 + \kappa_1) - 2} \left(\log \left| \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right| \right)',$$

donde $a(a \neq 0) \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1.15. *Una superficie canal no desarrollable que cumple que $K_{II} = K$ es una superficie de revolución que satisface*

$$(\log r'^2)' = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{(\kappa_2 + \kappa_1) - 2\kappa_1\kappa_2} \left(\log \left| \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right| \right)'$$

Teorema 4.1.16. *Para una superficie canal no desarrollable que cumple que $K_{II} = H$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- la razón entre las curvaturas principales es constante
- la superficie canal será una superficie de revolución parametrizada por

$$x(s, \theta) = (r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta, r(s) \cos \varphi + s),$$

donde $r(s)$ viene dada por la siguiente expresión

$$s = c_2 + \int \frac{(c-1)dv}{c(1-v^2)|1-v^2|^{\frac{c_1(c-1)}{2c}}}, \quad r = \frac{1}{|1-v^2|^{\frac{c_1(c-1)}{2c}}},$$

siendo c_1 y c_2 constantes y c viene dada por

$$\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} = c.$$

4.2. Some classification of Canal Surfaces with the Gauss Map

En este artículo de Jinhua Qian y Young Ho Kim [9], como se puede intuir por el nombre, los resultados que se van a ver están todos relacionados con la aplicación de Gauss.

También es conveniente explicar la clasificación que han hecho respecto a la misma sus autores y sobre la que basan su trabajo:

Definición 4.2.1. *Una superficie cuya aplicación de Gauss \mathbb{G} satisface*

$$\Delta \mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C), \tag{4.16}$$

donde Δ es el laplaciano, f es una función diferenciable y C es un vector constante; se dice que tiene una **aplicación de Gauss de tipo 1**. En particular, cuando el vector C es cero, se dice que es **de la primera forma**, mientras que, en caso contrario, será **de la segunda forma**. Si la función f no es constante, entonces se dirá que \mathbb{G} es **propriadamente puntual de tipo 1**. Además, si f es nula, se dirá que \mathbb{G} es **armónico**.

También es conveniente enunciar los dos siguientes lemas, ya que serán de utilidad en los resultados venideros:

Lema 4.2.2. *Sea \mathbb{M} una hipersuperficie orientable del espacio Euclideo \mathbb{E}^{n+1} . Entonces, el Laplaciano de la aplicación de Gauss \mathbb{G} de \mathbb{M} satisface*

$$\Delta \mathbb{G} = \|\mathbb{A}_{\mathbb{G}}\|^2 \mathbb{G} + n \nabla H, \quad (4.17)$$

donde $\|\mathbb{A}_{\mathbb{G}}\|^2 = \text{tr}(\mathbb{A}_{\mathbb{G}}^t \mathbb{A}_{\mathbb{G}})$ y ∇H es el gradiente de la curvatura media H .

Lema 4.2.3. *Sea \mathbb{M} una superficie de \mathbb{E}^3 . Entonces, el gradiente ∇f de una función diferenciable f definida en \mathbb{M} se puede escribir de la siguiente manera:*

$$\nabla f = \frac{1}{EG - F^2} \{(Gf_y - Ff_t)\partial_y + (-Ff_y + Ef_t)\partial_t\} \quad (4.18)$$

donde $\{y, t\}$ es un sistema de coordenadas local de \mathbb{M} tal que $\langle \partial_y, \partial_y \rangle = E$, $\langle \partial_y, \partial_t \rangle = F$ y $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = G$ y f_y y f_t son las derivadas parciales de f respecto a y y t , respectivamente.

Para comenzar, se calcula el Laplaciano de la aplicación de Gauss \mathbb{G} de una superficie canal \mathbb{M} .

Primero, por (3.20), obtenemos que

$$\|\mathbb{A}_{\mathbb{G}}\|^2 = \frac{r^2 Q^2 + P^2 + R^2}{r^2 p^2} = \frac{D}{r^2 p^2}, \quad (4.19)$$

donde $D = r^2 Q^2 + P^2 + R^2$.

Seguidamente, por el Lema 4.2.3, y las expresiones (3.11), (3.14) y (3.18), el gradiente de la curvatura media se escribe como

$$\begin{aligned} \nabla H(x) &= \frac{1}{r^2 P^2} \{(GH_s - FH_\theta)x_s^1\} T \\ &+ \frac{1}{r^2 P^2} \{(GH_s - FH_\theta)x_s^2 + (-FH_s + EH_\theta)x_\theta^1\} N \\ &+ \frac{1}{r^2 P^2} \{(GH_s - FH_\theta)x_s^3 + (-FH_s + EH_\theta)x_\theta^2\} B. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por conveniencia escribiremos

$$(GH_s - FH_\theta) = U, \quad (-FH_s + EH_\theta) = V \quad (4.21)$$

Notar que, de la expresión (3.23), tenemos que las derivadas parciales de la curvatura media H vienen dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - (2rr' \kappa - r^2 \kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta + 5r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta}{2r^2 P^2} \\ &+ \frac{-2rr' r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi}{2r^2 P^2}, \\ H_\theta &= -\frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{2P^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sustituyendo (3.15), (4.19), y (4.20) en (4.17) para $n = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbb{G} &= \frac{1}{r^2 P^2} (D \cos \varphi + 2x_s^1 U) T + \frac{1}{r^2 P^2} [D \sin \varphi \cos \theta + 2(x_s^2 U + x_\theta^1 V)] N \\ &+ \frac{1}{r^2 P^2} [D \sin \varphi \sin \theta + 2(x_s^3 U + x_\theta^2 V)] B. \end{aligned} \quad (4.23)$$

De este cálculo previo, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.2.4. *No existe una superficie canal con una aplicación de Gauss armónica.*

Demostración. Supongamos que una superficie canal \mathbb{M} en \mathbb{E}^3 tiene una aplicación de Gauss \mathbb{G} . Por el Lema 4.2.2 y $\Delta G=0$, tenemos $\|\mathbb{A}_G\|^2=0$ y que H es constante. Sin embargo, $\|\mathbb{A}_G\|=0$ implica que $P = Q = R = 0$. Lo que se contradice con la regularidad de \mathbb{M} . \square

Teorema 4.2.5. *Una superficie canal orientable \mathbb{M} en \mathbb{E}^3 tiene una aplicación de Gauss propiamente puntual de la primera forma del tipo 1 si y sólo si tiene curvatura media constante. En este caso, será una de las siguientes superficies:*

1. *un catenoide;*
2. *una superficie de revolución con curvatura media constante distinta de cero tal que*

$$x(s, \theta) = \pm \left\{ \left(r \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}} + \int \sqrt{\frac{ar^2 + r}{ar^2 + r - c}} dr \right), \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \cos \theta, \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \sin \theta \right\},$$

donde $r(s)$ satisface (4.28) para algunas constantes $a \neq 0$ y $c > 0$.

Demostración. Del Lema 4.2.2, tenemos que una superficie canal \mathbb{M} tiene una aplicación de Gauss propiamente puntual del tipo 1 de la primera forma si y sólo si tiene una curvatura media constante. Usando los resultados dados en el Teorema 3.2.2 y el Corolario 4.1.11, \mathbb{M} es un catenoide cuando $H = 0$ y \mathbb{M} es una superficie de revolución cuando $H = a (a \in \mathbb{R} - \{0\})$.

De (3.23) tenemos que

$$H = \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP} = a \quad (4.24)$$

Donde, sustituyendo P y despejando

$$2rr''(1 + ar) - \sin^2 \varphi (1 + 2ar) + 2r\kappa \sin \varphi (1 + ar) \cos \theta = 0. \quad (4.25)$$

Con lo cual, separando términos dependientes e independientes de θ , tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2rr''(1 + ar) - \sin^2 \varphi (1 + 2ar) = 0, \\ r\kappa \sin \varphi (1 + ar) = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

De la primera ecuación y recordando que $r' = -\cos \varphi$, la función radial $r(s)$ de \mathbb{M} satisfará:

$$2rr''(1+ar) - (1-r'^2)(1+2ar) = 0, \quad (4.27)$$

de la cual obtenemos que

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}}, \quad (4.28)$$

donde $c > 0$ es una constante de integración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $c(s) = (s, 0, 0)$ y $T = (1, 0, 0)$, $N = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$. Con lo cual, \mathbb{M} puede representarse como

$$x(s, \theta) = (r(s) \cos \varphi + s, r(s) \sin \varphi(s) \cos \theta, r(s) \sin \varphi(s) \sin \theta), \quad (4.29)$$

Del mismo modo, por (4.28), la parametrización (4.29) se puede escribir como

$$x(s, \theta) = \pm \left\{ \left(r \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}} + \int \sqrt{\frac{ar^2 + r}{ar^2 + r - c}} dr \right), \sqrt{\frac{cr}{ar+1}} \cos \theta, \sqrt{\frac{cr}{ar+1}} \sin \theta \right\},$$

en la cual, $r(s)$ satisface (4.28). □

Corolario 4.2.6. *Sea \mathbb{M} una superficie canal orientable en \mathbb{E}^3 con una aplicación de Gauss propiamente puntual de la primera forma del tipo 1. Entonces, la aplicación de Gauss de \mathbb{M} satisface*

$$\Delta \mathbb{G} = \frac{4a^2r^2 + 4ar + 2}{r^2} \mathbb{G}, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Demostración. Como \mathbb{M} tiene una aplicación de Gauss propiamente puntual de la primera forma del tipo 1, tenemos que $\Delta \mathbb{G} = f \mathbb{G}$. Por el Teorema 4.2.5, \mathbb{M} es una superficie de revolución con curvatura media constante. Sin pérdida de generalidad, podemos poner la función torsión $\tau(s) \equiv 0$. Con lo cual, por (4.17) y (4.19), tenemos

$$f = \|A_{\mathbb{G}}\|^2 = \frac{r^2 Q^2 + P^2}{r^2 P^2}.$$

De (3.18) y (4.24), obtenemos

$$f = \frac{4a^2r^2 + 4ar + 2}{r^2}, \quad (a \in \mathbb{R}),$$

obteniendo así lo que queríamos probar. □

Corolario 4.2.7. *Una superficie canal orientable \mathbb{M} en \mathbb{E}^3 tiene una aplicación de Gauss de la primera forma del tipo 1, es decir, $\Delta \mathbb{G} = \lambda \mathbb{G}$ para alguna constante λ distinta de cero, si y sólo si es un cilindro circular.*

Demostración. Supongamos que la superficie canal orientable \mathbb{M} satisface $\Delta\mathbb{G} = \lambda\mathbb{G}$ ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Por el Corolario 4.2.6, tenemos

$$\lambda = \frac{4a^2r^2 + 4ar + 2}{r^2}.$$

Como a y λ son constantes, r también lo será. Con lo cual, \mathbb{M} es un cilindro circular. La demostración en sentido contrario es trivial. \square

A continuación, trataremos las superficies canal cuya aplicación de Gauss satisface $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ para alguna función no nula y diferenciable f y un vector constante distinto del cero $C \in \mathbb{E}^3$.

Teorema 4.2.8. *Una superficie canal orientable \mathbb{M} tiene una aplicación de Gauss propiamente puntual de la segunda forma del tipo 1 si y sólo si es una superficie de revolución representada por*

$$x(s, \theta) = (r(s) \cos \varphi + s, r(s) \sin \varphi \cos \theta, r(s) \sin \varphi \sin \theta)$$

la cual satisface (4.45).

Demostración. Supongamos que una superficie canal \mathbb{M} satisface que $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$C = C_1T + C_2N + C_3B, \tag{4.30}$$

donde $C_1 = \langle C, T \rangle$, $C_2 = \langle C, N \rangle$, $C_3 = \langle C, B \rangle$.

Sustituyendo (3.15), (4.23) y (4.30) en $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$, obtenemos

$$\begin{cases} D \cos \varphi + 2x_s^1U = r^2P^2f(\cos \varphi + C_1), \\ D \sin \varphi \cos \theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V) = r^2P^2f(\sin \varphi \cos \theta + C_2), \\ D \sin \varphi \sin \theta + 2(x_s^3U + x_\theta^2V) = r^2P^2f(\sin \varphi \sin \theta + C_3), \end{cases} \tag{4.31}$$

despejando f de cada una de ellas, tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \frac{D \cos \varphi + 2x_s^1U}{r^2P^2(\cos \varphi + C_1)} \\ &= \frac{D \sin \varphi \cos \theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V)}{r^2P^2(\sin \varphi \cos \theta + C_2)} \\ &= \frac{D \sin \varphi \sin \theta + 2(x_s^3U + x_\theta^2V)}{r^2P^2(\sin \varphi \sin \theta + C_3)}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

De la última igualdad de (4.32), tenemos que

$$\begin{aligned} &2U(r\tau \sin^2 \varphi + rr'\kappa \sin \varphi \sin \theta + x_s^3C_2 - x_s^2C_3) + 2V(r \sin^2 \varphi + x_\theta^2C_2 - x_\theta^1C_3) \\ &= \sin \varphi D (C_3 \cos \theta - C_2 \sin \theta) \\ &= \sin \varphi (2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + R^2)(C_3 \cos \theta - C_2 \sin \theta). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Reordenando (4.33) con ayuda de (3.12), (3.18) y (4.21), nos queda

$$\begin{aligned}
 & 2(GH_s - FH_\theta)(r\tau \sin^2 \varphi + rr'\kappa \sin \varphi \sin \theta + x_s^3 C_2 - x_s^2 C_3) + 2(EH_\theta - FH_s) \\
 & (r \sin^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \theta C_2 + r \sin \varphi \sin \theta C_3) \\
 & = \sin \varphi [(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 \\
 & + (rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 + (\tau \sin^2 \varphi + r'\kappa \sin \varphi \sin \theta)^2] \\
 & (C_3 \cos \theta - C_2 \sin \theta). \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

Como $\{\cos(m\theta), \sin(m\theta) \mid m \in \mathbb{N}\}$ forma un conjunto de funciones linealmente independientes, considerando los coeficientes de $\cos 5\theta$ y $\sin 5\theta$ en (4.34) con ayuda de (3.12), (3.13) y (4.22), tenemos

$$\begin{cases} r^4 \kappa^4 \sin \varphi (2r^2 - r'^2) C_3 = 0, \\ r^4 \kappa^4 \sin \varphi (2r^2 - r'^2) C_2 = 0. \end{cases} \tag{4.35}$$

De (4.35), consideramos un subconjunto abierto $\mathcal{O} = \{p \in \mathbb{M} \mid \kappa(p) \neq 0\}$ de \mathbb{M} . Supongamos que \mathcal{O} es no vacío. En \mathcal{O} , como $r \neq 0$ y $\sin \varphi \neq 0$, tenemos que $C_2 = C_3 = 0$ o $2r^2 - r'^2 = 0$. Sin embargo, si $C_2 = C_3 = 0$, en (4.34) obtenemos

$$r^2(\tau \sin^2 \varphi + r'\kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 = g_{11} \sin^2 \varphi, \tag{4.36}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
 & r^2(\tau \sin^2 \varphi + r'\kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 \\
 & = \sin^2 \varphi [r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa\varphi' \cos \theta + 2r'\kappa\tau \sin \varphi \sin \theta) \\
 & - (2rr'' + 2r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)]. \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de mayor grado del $\cos \theta$ a ambos lados de (4.37), obtenemos que $\sin^2 \varphi = -r'^2$, pero esto es una contradicción ya que si hacemos $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = -r'^2 + r'^2 = 0$.

Por otra parte, si $2r^2 - r'^2 = 0$, considerando el término independiente de (4.34) respecto a θ , tenemos

$$r'C_3(-2rr'r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi) = 0. \tag{4.38}$$

Uniendo esto con $2r^2 - r'^2 = 0$, (4.38) implica

$$C_3(24r^4 - 6r^2 + 1) = 0.$$

Obviamente, $(24r^4 - 6r^2 + 1) \neq 0$ y, por tanto, $C_3 = 0$. Además, considerando el coeficiente de $\cos 4\theta$ en (4.34) con $C_3 = 0$, obtenemos que $C_2 = 0$, lo que contradice el argumento anterior. Con lo cual, \mathcal{O} es vacío y $\kappa \equiv 0$, i.e., \mathbb{M} es una superficie de revolución.

Sin pérdida de generalidad, podemos escribir $c(s) = (s, 0, 0)$ y $T = (1, 0, 0)$, $N = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$. Con lo que \mathbb{M} se puede expresar como

$$x(s, \theta) = (r(s) \cos \varphi + s, r(s) \sin \varphi \cos \theta, r(s) \sin \varphi \sin \theta).$$

Obviamente, $C_i = (i = 1, 2, 3)$ son todas constantes.

Cuando $\kappa=0$, la primera ecuación de (4.31) nos da

$$f = \frac{(2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \cos \varphi - 2r^2 \sin^2 \varphi P H_s}{r^2 P^2 (\cos \varphi + C_1)}. \quad (4.39)$$

Como P, H_s son funciones de s cuando $\kappa = 0$, (4.39) nos dice que la función f sólo depende de s , i.e., $f = f(s)$.

También, por la segunda y tercera ecuación de (4.31), tenemos

$$\begin{aligned} D \sin \varphi \cos \theta + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi \cos \theta - r r' \varphi' \cos \theta) &= r^2 P^2 f (\sin \varphi \cos \theta + C_2), \\ D \sin \varphi \sin \theta + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi \sin \theta - r r' \varphi' \sin \theta) &= r^2 P^2 f (\sin \varphi \sin \theta + C_3). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como $r \neq 0$, $P \neq 0$ y $f = f(s)$, (4.40) implica que $C_2 = C_3 = 0$ y

$$D \sin \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi - r r' \varphi') = r^2 P^2 f \sin \varphi. \quad (4.41)$$

Simplificando (4.41) tenemos

$$f = \frac{(2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + 2r^2 H_s P \cos \varphi}{r^2 P} \quad (4.42)$$

Combinando (4.39) y (4.42), obtenemos

$$2r^2 H_s P (1 - C_1 r') + C_1 (2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) = 0. \quad (4.43)$$

Con la ayuda de (3.23) y recordando que $\kappa = 0$, (4.43) se puede reescribir como

$$r^2 H_s P (C_1 r' - 1) = C_1 (r r'' - 1 + r'^2) (2r^2 H^2 + 2r H + 1), \quad (4.44)$$

Donde C_1 es una constante distinta de cero.

Por (3.21) y (4.44), tenemos

$$r^3 (\kappa_1 \kappa_2) (\kappa_1 + \kappa_2)' = (\log(|C_1 r' - 1|))' (r^4 (\kappa_1 \kappa_2)^2 + 1), \quad (4.45)$$

donde las curvaturas principales están dadas respectivamente por

$$\kappa_1 = -\frac{r''}{r r'' - 1 + r'^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r}. \quad (4.46)$$

Además, sustituyendo (4.43) en (4.42), obtenemos que

$$f = \frac{-2H_s}{C_1 P}. \quad (4.47)$$

Notar que la curvatura media no puede ser constante debido a que $f \neq 0$. Por otro lado, suponiendo que \mathbb{M} es una superficie de revolución que satisface (4.45). Uno puede comprobar que $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ se cumple para una función no nula f dada por (4.47) y un vector constante $C = (C_1, 0, 0)$, donde C_1 es una constante distinta de cero. \square

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.2.8, obtenemos

Corolario 4.2.9. *Sea \mathbb{M} una superficie canal orientable con una aplicación de Gauss propiamente puntual de la segunda forma del tipo 1. Entonces, la aplicación de Gauss \mathbb{G} de \mathbb{M} cumple*

$$\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$$

para una función diferenciable no nula f dada por (4.47) y un vector constante no nulo $C = (C_1, 0, 0)$, donde C_1 es una constante distinta de cero.

Corolario 4.2.10. *Una superficie canal orientable \mathbb{M} tiene una aplicación de Gauss de la segunda forma del tipo 1, i.e., $\Delta\mathbb{G} = \lambda(\mathbb{G} + C)$ para algún λ constante no nulo y un vector constante C si y sólo si es una superficie de revolución con la siguiente forma*

$$x(s, \theta) = (r(s) \cos \varphi + s, r(s) \sin \varphi \cos \theta, r(s) \sin \varphi \sin \theta)$$

cumpliendo (4.45) y (4.48).

Demostración. Como una superficie canal orientable \mathbb{M} satisface que $\Delta\mathbb{G} = \lambda(\mathbb{G} + C)$ ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $C \neq 0$). Del Teorema 4.2.8, \mathbb{M} es una superficie de revolución que cumple (4.45). Por el Corolario 4.2.9, tenemos

$$-r(\kappa_1\kappa_2)(\kappa_1 + \kappa_2)' = \lambda C_1 r'', \tag{4.48}$$

donde las curvaturas principales vienen dadas por (4.46). La implicación contraria es directa. \square

Poniendo constante la función radial de la superficie canal, tenemos como resultado inmediato de las conclusiones anteriores que

Teorema 4.2.11. *Un tubo orientable tiene aplicación de Gauss de la primera forma del tipo 1 si y sólo si es un cilindro circular.*

Teorema 4.2.12. *No existe un tubo orientable con aplicación de Gauss de la segunda forma del tipo 1 o aplicación de Gauss puntual del tipo 1.*

4.3. Analytic and algebraic properties of Canal Surfaces

En esta publicación de Zhiqiang Xu, Renzhong Feng y Jia-guang Sun [10], uno de los puntos que se trata es la condición suficiente para que la superficie canal no tenga autointersecciones, para ello, cabe recordar lo siguiente.

Definición 4.3.1. *Sea $x(u, v)$ la parametrización de una superficie. Se dirá que el punto (u_0, v_0) es singular cuando no cumpla la condición de regularidad, es decir, cuando*

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = 0,$$

Por conveniencia, definimos $g := r\sqrt{1-r'^2} (= r \sin \varphi)$ y $h := rr' (= -r \cos \varphi)$. Con esta notación, podemos expresar los coeficientes de la primera forma fundamental de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E &= \langle x_s, x_s \rangle = (1 - \kappa g \cos \theta - h')^2 + (g\tau + h\kappa \sin \theta)^2 + (g' - h\kappa \cos \theta)^2, \\ F &= \langle x_s, x_\theta \rangle = g^2\tau + gh\kappa \sin \theta, \\ G &= \langle x_\theta, x_\theta \rangle = g^2. \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$|x_s \times x_\theta|^2 = EG - F^2 = g^2((1 - \kappa g \cos \theta - h')^2 + (g' - h\kappa \cos \theta)^2). \quad (4.49)$$

Lema 4.3.2. *Si $1 - \kappa(s_0)g(s_0) \cos \theta_0 - h'(s_0) = 0$, entonces $g'(s_0) - h(s_0)\kappa(s_0) \cos \theta_0 = 0$*

Demostración. Como $|r'(s)| < 1$, $g(s) = r(s)\sqrt{1-r'^2} \neq 0$, $\forall s \in [0, l]$.

Despejando en la expresión $1 - \kappa(s_0)g(s_0) \cos \theta_0 - h'(s_0) = 0$ llegamos a que

$$\kappa(s_0) \cos \theta_0 = \frac{1 - h'(s_0)}{g(s_0)}. \quad (4.50)$$

Por otra parte, no es difícil demostrar que $h(s) - h(s)h'(s) - g(s)g'(s) \equiv 0$, $\forall s \in [0, l]$. Con lo cual, multiplicando en (4.50) por $h(s_0)$ y restando $g'(s_0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} h(s_0)\kappa(s_0) \cos \theta_0 - g'(s_0) &= h(s_0) \frac{1 - h'(s_0)}{g(s_0)} - g'(s_0) \\ &= \frac{h(s_0) - h(s_0)h'(s_0) - g(s_0)g'(s_0)}{g(s_0)} = 0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Además de esto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.3. *Cuando $r(s) < \frac{2-(r^2(s))''}{2|\kappa|}$, la superficie canal no tendrá ninguna autointersección local.*

Demostración. Por la primera forma fundamental, la superficie canal se autointersecará localmente si y sólo si $1 - \kappa g \cos \theta - h' = 0$ y $g' - h \kappa \cos \theta = 0$. Por el lema anterior, solo necesitamos considerar la primera expresión.

Dado que el $\cos \theta$ varía entre -1 y 1, no habrá ninguna autointersección local si $|\kappa|g + h' < 1$. Teniendo en cuenta que $\sqrt{1 - r'^2} < 1$ y que $h = \frac{1}{2}(r^2)'$:

$$|\kappa|g + h' = |\kappa|r\sqrt{1 - r'^2} + \frac{1}{2}(r^2)'' < |\kappa|r + \frac{1}{2}(r^2)''.$$

Con lo cual, cuando $|\kappa|r + \frac{1}{2}(r^2)'' < 1$, entonces $|\kappa|g + h' < 1$, o lo que es lo mismo, cuando $r(s) < \frac{2 - (r^2(s))''}{2|\kappa|}$ se tendrá que $|\kappa|g + h' < 1$ como se quería probar. \square

Con lo cual, el Teorema 4.3.3 nos da una condición suficiente para superficies canales sin autointersecciones locales.

De esto también podemos deducir los siguientes corolarios:

Corolario 4.3.4. Cuando $r(s) = as + b$, si $r < \frac{1-a^2}{|\kappa|}$ la superficie canal no tendrá ninguna autointersección local.

Corolario 4.3.5. Cuando $r(s) = \sqrt{as + b}$, si $r < \frac{1}{|\kappa|}$ la superficie canal no tendrá ninguna autointersección local.

También nos muestra cómo hallar el área de una superficie canal:

Teorema 4.3.6. Si una superficie canal $x(s, \theta)$ es regular en $s \in [0, l]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, el área total A viene dado por

$$A = \pi \left| \int_0^l r(r^2)'' - 2r \, ds \right|. \quad (4.51)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión del área de una superficie regular dada en (2.2), las definiciones de g y h dadas en este apartado y (4.49) obtenemos:

$$A = \int_0^l \int_0^{2\pi} |r^2 \sqrt{1 - r'^2} \kappa \cos \theta + rr'' + r'^2 - 1| \, d\theta \, ds. \quad (4.52)$$

Como es una superficie regular, $EG - F^2$ tendrá signo constante en $s \in [0, l]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, por lo que, reescribiendo el lado derecho de (4.52):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l \int_0^{2\pi} |r^2 \sqrt{1 - r'^2} \kappa \cos \theta + rr'' + r'^2 - 1| \, r \, d\theta \, ds \\ &= \left| \int_0^l \int_0^{2\pi} (r^2 \sqrt{1 - r'^2} \kappa \cos \theta + rr'' + r'^2 - 1) \, r \, d\theta \, ds \right| \\ &= \left| 2\pi \int_0^l (rr'' + r'^2 - 1) \, r \, ds \right| = \pi \left| \int_0^l r(r^2)'' - 2r \, ds \right|, \end{aligned} \quad (4.53)$$

que es la expresión buscada. \square

5. Referencias

- [1] P. A. Blaga. On tubular surfaces in computer graphics. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica*, Vol.L, Num. 2 (2005).
- [2] C. A. Bock Hyeng, E. B. Yamb. Application of cyclic shells in architecure, machine design and bionics. *International Journal of Modern Engineering Research (IJMER)*, Vol.2. Issue.3, 799-806, (2012).
- [3] A. Gray, E. Abbena and S. Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [4] Y. H. Kim, H. Liu, J. H. Qian. Some characterizations of canal surfaces. *Bull.Korean Math.Soc* **53** (2016), No.2, 461-477.
- [5] J. Núñez-Valdés, I. Ocaña Almagro. Canal surfaces and its application to the CAGD. *American Journal of Engineering Research (AJER)* **42** (2021), Vol.10, 19-31.
- [6] G. Öztürk, B. Bulca, B. K. Bayram, K. Arslan. On canal surfaces in E^3 . *Selçuk J. Appl. Math.*, Vol.11. No2. 103-108, (2010).
- [7] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [8] H. Pottmann, M. Hofer, B. Odehnl, J. Wallner. Line geometry for 3D shape understanding and reconstruction. *Technische Universität Wien* (2004).
- [9] J. H. Qian, Y. H. Kim. Some classification of canal surfaces with the gauss map. *Bull.Malays.Math.Sci.Soc* **42** (2019),3261-3272.
- [10] Z. Q. Xu, R. Z. Feng, J. G. Sun. Analytic and algebraic properties of canal surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **195** (2006),220-228.
- [11] Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Apuntes de la asignatura Geometría Local de Curvas y Superficies. (Sin publicar)
- [12] J. Berenguer Claria. (2016) Monge. Libros Maravillosos. <http://www.librosmaravillosos.com/Monge/index.html>
- [13] L. Werkmeister (6 de febrero de 2019) File: Tomb of Gaspard Monge in Panthéon.jpg. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tomb_of_Gaspard_Monge_in_Panthéon.jpg
- [14] Centre Beaunois D'Etudes Historiques. Gaspard Monge. <https://cbehblog.wordpress.com/personnages-beaunois-m/gaspard-monge/>