La *hipótesis generalizada del continuo* (HGC) establece que, para cada número ordinal $\nu$, $\aleph_\nu = \beth_\nu$, lo cual implica que las sucesiones (1) y (2) son iguales. Podríamos decir, abreviadamente,

$$[\aleph = \beth] = \text{HGC}$$

La elección de aceptar o rechazar HC (o HGC) recuerda la libertad de aceptar o rechazar el postulado de las paralelas de Euclides. Esta elección nos lleva a la riqueza de la geometría elíptica e hiperbólica. Podemos ver la libertad de tomar o dejar HC bajo una luz igualmente positiva.

## Referencias


[1] Boyer, C.B. (1999) *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

[2] Bourbaki, N. (1969) *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

[3] Collete, J. L. (1985) *Historia de las matemáticas*, Siglo xxi, Madrid.

[4] Kline, M. (1994) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

[5] Beth (Wikipedia) [3].

[6] Ivorra, C. *Teoría de conjuntos* [4].


■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

# «Empaquetando» a los estudiantes en las aulas


*Renato Álvarez Nodarse*
*Niurka Rodríguez Quintero*
***Universidad de Sevilla***

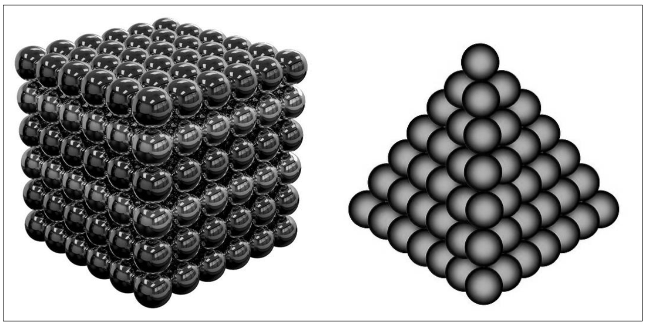

Desde principios de marzo de 2020 vivimos inmersos en una pandemia internacional (COVID-19) que según la *Universidad Johns Hopkins* (EE. UU.) a día 24 de marzo ha contagiado a casi 125 millones de personas de las que han fallecido más de 2,7 millones, y que está dejando tras de sí una crisis económica de consecuencias aún desconocidas pero que se prevén catastróficas. No es de extrañar por tanto que desde el inicio de la pandemia la comunidad científica se haya volcado en la investigación de dicha enfermedad y como no podía ser menos, las matemáticas han aportado su granito de arena.

En este breve artículo vamos a responder a la siguiente pregunta: ¿cuántos estudiantes podemos distribuir en un aula de forma que entre ellos se mantenga la distancia mínima de seguridad de 1,5 metros? Dicha cuestión es lo que se conoce en matemáticas como el *problema del empaquetamiento* (packing problem).

### Algo de historia

El problema de empaquetar objetos es muy antiguo y su historia se remonta a la antigüedad (ver por ejemplo la magnífica monografía [3]).

Uno de los problemas más famosos de empaquetamiento es el conocido *problema de Kepler* que consiste en colocar bolas iguales de forma que haya la menor cantidad de espacio libre entre ellas. Este problema se lo propuso a Kepler el ayudante de Sir Walter Raleigh, Thomas Harriot a principios del siglo xvii. Concretamente Harriot quería saber si era posible probar que la mejor manera de apilar balas de cañón era precisamente la que se usaba desde tiempos inmemoriales: una estructura piramidal de bolas (también conocida como empaquetamiento cúbico centrado en las caras) como la que se muestra en la siguiente figura:



***Empaquetamiento cúbico simple (izq.) y piramidal***

Kepler intentó resolver la cuestión propuesta por Harriot, pero no consiguió encontrar ninguna prueba aunque sí menciona el problema en su libro *El copo de nieve de seis esquinas* publicado en 1611 y considerado hoy día el libro fundacional de la cristalografía y además sugiere que la mejor manera de apilar bolas era justo la forma piramidal antes mencionada.

La primera demostración rigurosa del problema de Kepler se debe a Gauss quien en 1831 probó que no existía ninguna manera mejor de colocar bolas sobre una red (es decir bolas colocadas de forma «ordenada») que la sugerida por Kepler. Pero ¿y si no tenemos que colocarlas de forma ordenada? Esta situación era mucho más complicada y constituyó uno de los famosos problemas de Hilbert que pasó a conocerse como la conjetura de Kepler y es,

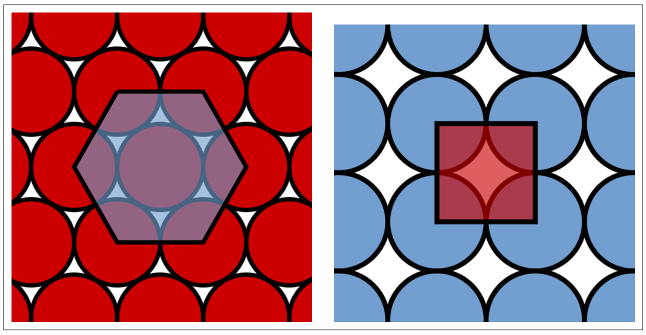
[3] *fr.wikipedia.org/wiki/Beth_(nombre)*.
[4] *www.uv.es/ivorra/libros/TC.pdf*.

 ISSN 1988-5318

desde el punto de vista matemático, un problema de optimización con un número infinito de variables.

El primer paso relevante para la resolución de la conjetura de Kepler lo dio el matemático húngaro László Fejes Tóth quien en 1953 redujo el problema a uno con un número finito de variables y además sugirió que seguramente con la ayuda de los ordenadores podría resolverse. Y fue así como, en 1998, Thomas Hales con ayuda de los ordenadores y de uno de sus estudiantes de doctorado, Samuel Ferguson, probó la famosa conjetura (no sin cierta polémica pues a los matemáticos no les gusta una prueba hecha por una máquina). Para más información consultar, por ejemplo, [1, 2].

A nosotros nos interesa, sin embargo, otro problema: el de empaquetar de forma óptima círculos en el plano. En este caso la solución cuando los círculos están sobre una red se debe a Lagrange quien en 1773 probó que la mejor forma de empaquetar círculos en el plano es el empaquetamiento hexagonal (como en los panales de abeja) que podemos ver en la siguiente figura:



*Empaquetamientos hexagonal y cuadrático en el plano*

Para determinar cuál es la mejor forma de empaquetar las bolas se precisa del concepto de *densidad de un empaquetamiento* que no es más que la fracción del espacio contenido por las esferas. Para el caso del plano un sencillo cálculo muestra que las densidades de los empaquetamientos hexagonal y cuadrático son de $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}9069$ y $\pi/\sqrt{4} \approx 0{,}7854$, respectivamente. Pero ¿podrían existir empaquetamientos irregulares con mayor densidad? La respuesta es que no y la primera prueba se debe al matemático noruego Axel Thue en 1890 que fue generalizada en 1940 por el mismo matemático húngaro que mencionamos antes Fejes Tóth.

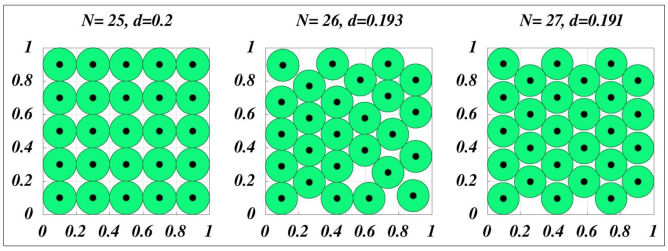
## «Empaquetando» a los estudiantes en las aulas

¿Y si cambiamos el problema por otro más sencillo de enunciar? por ejemplo, ¿cuál es la mejor manera de empaquetar $N$ círculos iguales en un cuadrado o en un rectángulo de dimensiones dadas sin que se superpongan, de forma que el radio de los mismos sea lo más grande posible? Este problema es equivalente al problema de saber cuantos círculos podemos empaquetar en el cuadrado (rectángulo) de forma que la distancia entre sus centros sea mayor o igual que una distancia fijada de antemano.

Este problema de optimización (geométrica) es de gran interés por sus aplicaciones tecnológicas (por ejemplo nos dice cómo distribuir las antenas repetidoras de telefonía móvil) y en nuestro caso, porque nos ayuda a descubrir la manera de distribuir de forma óptima a los estudiantes en una clase para que todos estén a una distancia mayor o igual que cierta distancia fijada de antemano.

Aunque este problema está todavía lejos de ser resuelto de forma general, existen algoritmos numéricos tremendamente eficaces que nos permiten encontrar las distribuciones «óptimas» para valores de $N$ *no muy grandes*. Un ejemplo es el algoritmo desarrollado por E. Specht que se puede descargar desde la web del autor *www.packomania.com*.

Como ejemplo mostremos la distribución de 25, 26 y 27 círculos en un cuadrado (de forma similar se puede resolver el caso de un rectángulo) de lado $l = 1$ (el valor de $l$ lo tomaremos según nos convenga como luego veremos). Los resultados se muestran en la siguiente figura:




*Empaquetando 25, 26 y 27 círculos en un cuadrado*

Encima de cada configuración vemos la distancia mínima $d$ entre los centros. Nótese que no hay casi diferencia entre las distancias mínimas de las tres distribuciones (apenas un 4,5 % entre la de 25 y 27 círculos), pero sí hay una enorme diferencia en la forma de la distribución, siendo la de 26 círculos bastante más complicada de implementar en la práctica (si pensamos en un aula real habría que inmovilizar los pupitres). Nótese además que en el caso de 25 círculos tenemos la distribución del empaquetamiento cuadrático mientras que el caso de 27 se asemeja mucho al empaquetamiento hexagonal.

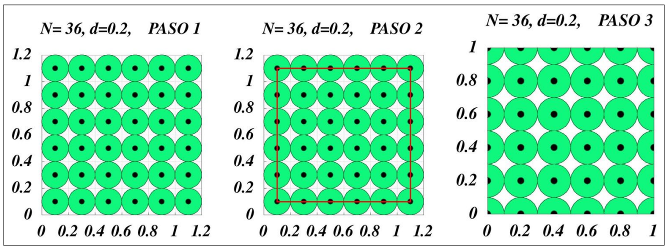
Como lo que queremos es distribuir los centros de los círculos ya que estamos pensando en estudiantes y aulas, el problema cambia pues estos pueden estar colocados en los lados del cuadrado.

Para resolver este caso podemos simplemente agrandar el lado de nuestro cuadrado en la distancia $d$ requerida y luego desplazar convenientemente la distribución obtenida. Como ejemplo veamos el caso de 25 círculos.

Imaginemos que queremos que los centros de nuestros círculos se mantengan a una distancia $d = 0{,}2$ como en el caso anterior. Entonces, si agrandamos el lado del cuadrado en la distancia $d = 0{,}2$, el resultado ahora es que podemos colocar 36 círculos (antes eran 25 círculos).

El procedimiento es el siguiente: comenzamos con la distribución óptima de 36 círculos, a continuación desplazamos la distribución a la izquierda una distancia $d/2$ y hacia abajo una distancia $d/2$ lo que nos lleva a la distribución final de los centros. Lo anterior se muestra en la siguiente figura:


ISSN 1988-5318



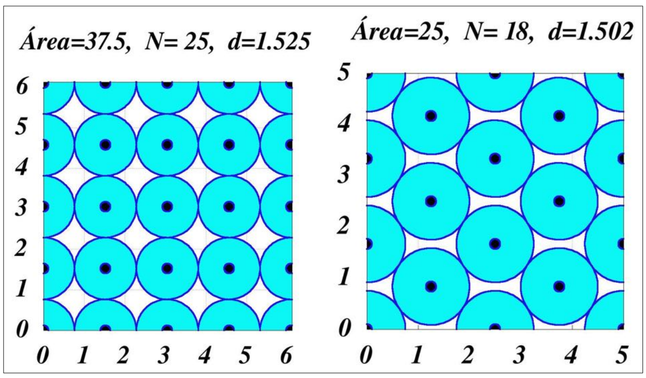

*Procedimiento para colocar los centros*

### Ejemplo

Usemos el procedimiento anterior para mostrar cómo deben distribuirse los estudiantes en un aula de forma que estén sentados a una distancia mayor o igual a 1,5 metros (distancia recomendada por las autoridades sanitarias). La idea es encontrar la distribución óptima de los estudiantes de forma que se pueda aprovechar al máximo el **área útil** de la clase, i.e., que entren en ella el mayor número posible de estudiantes.

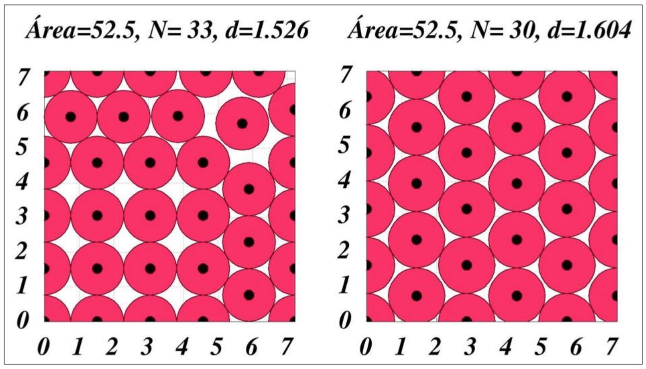
Según la legislación vigente (RD 132/2010, de 12 de febrero, por el que se establecen los *«requisitos mínimos de los centros que impartan las enseñanzas del segundo ciclo de la educación infantil, la educación primaria y la educación secundaria»*), un aula primaria, secundaria y bachillerato ha de disponer de 1,5 metros cuadrados ($m^2$) por estudiante y un máximo de 25 estudiantes (primaria), 30 (secundaria) y 35 bachillerato, por tanto el área mínima $A$ en cada caso es de 37,5, 45 y 52,5 $m^2$, respectivamente.

Como ejemplo tomemos un aula *ideal* de primaria con 37,5 $m^2$. En ese caso los cálculos nos dicen que podemos colocar 25 estudiantes y la distancia d entre ellos será de 1,52 metros. Ahora bien, muchas de las aulas tienen en realidad 25 $m^2$ útiles, en ese caso para mantener las distancias debe bajarse la ratio hasta 18 estudiaantes, ya que 25 estarían a 1,3 metros de distancia. Ambas distribuciones se muestran en la siguiente figura:




*Distribución de N estudiantes en aulas de 37,5 y 25 $m^2$*

Finalmente, pensemos en un aula de bachillerato que debería ser de 52,5 $m^2$. En este caso se pueden colocar 33 estudiantes (d = 1,53 metros), pero es una distribución muy complicada de implementar como se ve en la siguiente figura.




*Distribución de 33 y 30 estudiantes en un aula de 52,5 $m^2$*

por lo que hay que usar una distribución de 30 estudiantes (d = 1,6 metros, que mostramos en la figura anterior derecha) o una de 36 (d = 1,46 metros, que correspondería al empaquetamiento cuadrático).

Sin embargo, la realidad es algo peor, pues muchas aulas de bachillerato son de 37,5 $m^2$ y han de colocarse 35 estudiantes. En este caso la distancia entre ellos es de d = 1,29 metros pero es bastante complicada de implementar siendo más factible una de 36 estudiantes (que volvería a ser la del empaquetamiento cuadrático) en cuyo caso la distancia d sería de 1,26 metros.

### A modo de conclusión

Como se ve las matemáticas pueden ayudar a colocar de la forma más eficiente posible a los estudiantes en las aulas. En cualquier caso, para ser realistas hay que tener en cuenta que los estudiantes no son puntos (por lo que hay que sumar un extra al paso 1 que mencionamos antes) y que el área es el **área útil**, no el **área total** del aula ya que en las mismas suelen haber armarios, puertas y la tarima del profesor.

**Nota:** El programa de Maxima CAS utilizado para encontrar las distribuciones óptimas puede descargarse desde la web de los autores *ryn-fismat.es*.

## Referencias

[1] T.C. Hales, Historical Overview of the Kepler Conjecture, *Discrete and Computational Geometry*, 36 (2006) 5-20.

[2] P.J. Miana y N. Romero, La historia de la conjetura de Kepler. *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja (2010) 367–374.

[3] P. G. Szabo, M. Cs. Markót, T. Csendes, E. Specht, L. G. Casado e I. García. *New approaches to circle packing in a square (with program codes).* Springer, (2007).

■