

## EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MECÁNICA DE LA FRACTURA EN SÓLIDOS PIEZOELÉCTRICOS

J. A. Sanz<sup>1</sup>, M. Solís<sup>2</sup>, M. P. Ariza<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales  
Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón, Universidad de Zaragoza  
Campus Río Ebro. Ed. Agustín de Betancourt, c/ María de Luna s/n, 50018-Zaragoza, España.  
jose@unizar.es Tfno: 976 76 10 00 Ext. 5187. Fax: 978 76 25 78

<sup>2</sup>Grupo de Estructuras, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092, Sevilla, España.  
msolis@us.es, mpariza@us.es Tfno: 954 48 72 93 Fax: 954 48 72 95

### RESUMEN

En este trabajo se presenta una formulación del Método de los Elementos de Contorno para resolver problemas de grietas contenidas en sólidos anisótropos piezoeléctricos. Se trata de una formulación clásica (ecuación integral de contorno en desplazamientos) en la que se utiliza la solución fundamental de Deeg. En el frente de grieta se utilizan elementos a un cuarto y a un cuarto singulares. A partir de las tracciones de los nodos a un cuarto de estos últimos se obtienen los factores de intensidad de tensiones (FIT) asociados al desplazamiento de apertura de grieta y al salto de potencial eléctrico entre las caras de la grieta, como una incógnita más del sistema de ecuaciones algebraico. Los FIT pueden ser evaluados de manera alternativa a través de los desplazamientos y potencial eléctrico en nodos a un cuarto siguiendo el formalismo de Stroh. Se presentan una serie de resultados numéricos para algunos problemas de interés. En aquellos casos en que existen soluciones previamente obtenidas por otros autores se obtiene un alto grado de acuerdo en los resultados. Además de la formulación propuesta, se establecen las bases para el desarrollo de una formulación hipersingular del método (ecuación integral de contorno en tracciones) para este tipo de problemas.

### ABSTRACT

A classical BE approach for 3D anisotropic piezoelectric fracture mechanics problems is presented in this paper. The displacement boundary integral equation is written based on Deeg's fundamental solution. Singular quarter-point and quarter-point elements are used at the crack front. Stress Intensity Factors (SIFs) and Electric displacement Intensity Factor (ESIFs) are obtained directly from nodal tractions at quarter-point nodes of singular elements. ESIFs can also be obtained from displacements and electric potential discontinuity at quarter point nodes of one quarter point elements inside the crack. Several numerical results are presented in this paper. They are in very good agreement with previous results obtained by other authors, when they exist. The ideas about the development of an hypersingular BE formulation is also discussed here.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos Analíticos y Numéricos, Fractura de Cerámicos y Polímeros

**PALABRAS CLAVE:** Fractura 3D, Materiales piezoeléctricos, Elementos de contorno

### 1. INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) es una herramienta numérica que ha mostrado ser de gran utilidad para la resolución de problemas de sólidos con grietas en su interior. La principal ventaja del método reside en su capacidad de reducir el problema al contorno, frente a otros métodos numéricos de dominio, con lo que se evita la integración sobre zonas del dominio en los que el campo de tensiones pueda ser singular (como es la zona del frente de grieta, desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal). Por tanto resulta especialmente adecuada la aplicación de este método numérico a la Mecánica de la Fractura de materiales piezoeléctricos, que exhiben un comportamiento frágil.

El fenómeno de la piezoelectricidad fue originalmente descubierto por P. y J. Curie, quienes observaron experimentalmente la aparición de cargas eléctricas sobre la superficie de algunos tipos de cristales cuando éstos eran sometidos a esfuerzos mecánicos, y viceversa. Estos científicos ya propusieron incluso algunos usos prácticos de este tipo de materiales, como es su empleo en la fabricación de transductores de presión, fuerza, etc. Utilizando el efecto inverso, pueden funcionar como actuadores, respondiendo ante impulsos eléctricos de control.

Dado el gran número de aplicaciones prácticas de estos materiales, existe un creciente interés en el estudio de su comportamiento, lo cual incluye evidentemente el análisis de la integridad estructural desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura. En este campo se pueden

destacar los trabajos de Barnett y Lothe [1], Deeg [2], Pak [3, 4] o Sosa [5].

Una de las dificultades que plantea el estudio de este tipo de materiales reside en la asimetría de la red cristalina del material, necesaria para la aparición del fenómeno piezoeléctrico, lo que conlleva que los materiales piezoeléctricos sean anisótropos o al menos transversalmente isótropos. Este hecho, junto con el acoplamiento elástico-eléctrico, que incluye el potencial y desplazamiento eléctrico como nuevas variables del problema, hacen que la resolución de problemas de Mecánica de la Fractura sea compleja, especialmente en 3D.

## 2. EL PROBLEMA PIEZOELÉCTRICO

El problema piezoeléctrico se puede entender como el modelado de dos fenómenos de diferente naturaleza física, i.e, eléctrico y elástico acoplados a través de ecuaciones constitutivas. Entre ambos tipos de problemas se pueden establecer equivalencias entre sus variables asociadas (entre paréntesis se escriben las unidades correspondientes a cada variable en el Sistema Internacional): el tensor de tensiones  $\sigma$  (N/m<sup>2</sup>) tiene su equivalencia en el vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  (C/m<sup>2</sup>), mientras que el desplazamiento  $\mathbf{U}$  (m) se corresponde con el potencial eléctrico  $\Phi$  (V) y las deformaciones  $\varepsilon$  con el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  (V/m). Finalmente, la proyección del tensor de tensiones mecánicas da lugar al vector de tracciones mecánicas (N/m<sup>2</sup>), mientras que la proyección del desplazamiento eléctrico da lugar a densidad de carga por unidad de superficie (C/m<sup>2</sup>).

En base a estas relaciones, resulta útil escribir las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento y condiciones de contorno que gobiernan el problema siguiendo la notación condensada propuesta por Barnett y Lothe [1] y utilizada posteriormente por un gran número de autores. En dicha notación, se trabaja con las variables internas y externas del problema elástico *extendidas* al caso piezoeléctrico, cuya transformación como tensor de las magnitudes tensoriales extendidas no se cumple. De esta forma, se trabajará con una serie de subíndices escritos en mayúscula que podrán adoptar valores entre 1 y 4, y otros en minúscula que irán de 1 a 3.

Así pues, la ecuación de equilibrio estático para un material piezoeléctrico en notación extendida se escribe como:

$$\Sigma_{iJ,i} + b_J = 0 \quad (1)$$

donde  $\Sigma_{iJ}$  es la matriz tensión-desplazamiento eléctrico, definida como,

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{para } J = 1, 2, 3 \\ D_i & \text{para } J = 4 \end{cases} \quad (2)$$

y  $b_J$  es el vector columna de fuerzas de volumen extendido (fuerza y carga eléctrica).

El vector extendido de desplazamientos-potencial eléctrico,  $U_K$  es

$$U_K = \begin{cases} u_k & \text{para } K = 1, 2, 3 \\ \Phi & \text{para } K = 4 \end{cases} \quad (3)$$

A partir de este vector de desplazamientos se define la matriz de deformaciones extendida  $Z_{Kl}$  (deformaciones y campo eléctrico), pudiéndose escribir las ecuaciones de compatibilidad de la siguiente manera

$$Z_{Kl} = \begin{cases} \frac{1}{2}(U_{k,l} + U_{l,k}) & \text{para } K = 1, 2, 3, K = l \\ (U_{k,l} + U_{l,k}) & \text{para } K = 1, 2, 3, K \neq l \\ \Phi_{,l} & \text{para } K = 4 \end{cases} \quad (4)$$

La ley de comportamiento de un material piezoeléctrico se puede escribir como,

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKl} Z_{Kl} \quad (5)$$

siendo  $E_{iJKl}$  la matriz de constantes electro-elástica,

$$E_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{para } J, K = 1, 2, 3 \\ e_{lij} & \text{para } J = 1, 2, 3, K = 4 \\ e_{ikl} & \text{para } J = 4, K = 1, 2, 3 \\ -\epsilon_{il} & \text{para } J, K = 4 \end{cases} \quad (6)$$

Introduciendo las ecuaciones de compatibilidad (4) en la ley de comportamiento piezoeléctrica (5), se puede comprobar que la ley de comportamiento puede escribirse como

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKl} U_{K,l} \quad (7)$$

Para acabar de definir el problema piezoeléctrico quedaría imponer las condiciones de contorno del problema. Estas condiciones de contorno pueden ser en desplazamientos (desplazamiento o potencial eléctrico en el contorno conocidos) o en tracciones. Para este segundo tipo queda definir el vector de tracciones extendido  $\mathbf{T}$  como la proyección del tensor de tensiones extendido sobre la normal exterior al contorno:

$$T_J = \Sigma_{iJ} n_i = E_{iJKl} U_{K,l} n_i \quad (8)$$

siendo  $n_i$  la normal exterior al contorno.

En sólidos piezoeléctricos, las condiciones de contorno merecen una consideración especial, sobre todo en el caso de existir grietas. Si en el problema elástico parece claro que se puede admitir como válida una condición de contorno de tracciones nulas en ambas caras de la grieta (en ausencia de presión interna en la grieta y despreciando fuerzas de contacto), las condiciones de contorno eléctricas en la grieta no resultan tan fáciles de especificar. Al abrirse la grieta, se ha de establecer un equilibrio eléctrico con el medio que queda en su interior. Según se considere este equilibrio se pueden imponer distintas condiciones de contorno, que pueden ser fundamentalmente de tres tipos: condición exacta (consideración de la interacción con el medio en el interior de la grieta, tratando éste como un medio dieléctrico con sus correspondientes propiedades), condición permeable (continuidad de carga y potencial entre las caras de la grieta) y condición impermeable (la permitividad eléctrica del medio interior de la grieta se supone muy baja y se tiene por tanto carga eléctrica nula en ambas caras de la grieta).

El debate sobre la conveniencia de considerar un tipo u otro de condición de contorno sigue abierto (véase por ejemplo [3, 6, 7, 8, 9, 10]). Sin embargo, la mayoría de autores suelen aplicar la condición de grieta impermeable, ya que parece estar bastante próxima a la realidad y numéricamente es fácil de aplicar. En el presente trabajo ésta será la condición de contorno en la grieta que se considere, que junto con la condición de tracciones mecánicas nulas hacen que el vector de tracciones extendido en las superficies de la grieta sea nulo.

### 3. FORMULACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La formulación del problema piezoeléctrico mediante el método de los elementos de contorno es análoga a la de un problema elástico [11], por lo que la ecuación integral de contorno en desplazamientos, en ausencia de fuerzas de dominio, y para un punto  $\mathbf{y}$  situado dentro del dominio o perteneciente al contorno ( $\Gamma$ ) puede escribirse como

$$C_{KM}(\mathbf{y})U_K(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{KM}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})U_M(\mathbf{x})d\Gamma_x - \int_{\Gamma} U_{KM}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})T_M(\mathbf{x})d\Gamma_x = 0 \quad (9)$$

donde  $U_K$  y  $T_M$  son las componentes del vector de desplazamientos y tracciones extendidos,  $U_{KM}^*$  y  $T_{KM}^*$  son las matrices de desplazamientos y tracciones extendidos de la solución fundamental y  $C_{KM}$  es un tensor que depende de la geometría del contorno en el punto  $\mathbf{y}$ , siendo  $C_{KM} = (1/2) \cdot \delta_{KM}$  para un punto suave del contorno y  $C_{KM} = \delta_{KM}$  para un punto interno.

Los términos de la solución fundamental se hallan a partir de la función de Green para materiales anisótropos

piezoeléctricos obtenida por Deeg [2]. Esta función se expresa en términos de una integral sobre una esfera unidad centrada en el punto de colocación, por lo que su implementación es costosa desde un punto de vista computacional. Detalles sobre la eficiente evaluación de esta solución fundamental se pueden encontrar en [12].

El proceso de construcción del sistema de ecuaciones que permite hallar las tracciones y desplazamientos extendidos en el contorno es análogo al caso de problemas elásticos. En el frente de grieta se utilizan elementos a un cuarto y a un cuarto singulares, que permitirán obtener los FIT directamente a partir de los valores nodales de los nodos a un cuarto [13].

A partir de la ecuación integral de contorno en desplazamientos se puede obtener la ecuación integral en tracciones (ecuación hipersingular) mediante la derivada respecto al punto de colocación y combinación de las ecuaciones derivadas según la ley de comportamiento del material, de forma que en el término libre aparezcan las tracciones extendidas en el punto de colocación. Así se obtiene la ecuación (10) para un punto  $\mathbf{y}$  interno o perteneciente a un punto de la grieta (supuesta autoequilibrada y con geometría suave)

$$T_J(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} s_{iMJ}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})N_i(\mathbf{y})U_M(\mathbf{x})d\Gamma_x - \int_{\Gamma} d_{iMJ}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})N_i(\mathbf{y})T_M(\mathbf{x})d\Gamma_x = 0 \quad (10)$$

donde  $N_i(\mathbf{y})$  es la normal unitaria externa en el punto  $\mathbf{y}$ , mientras que los términos  $s_{iMJ}^*$ ,  $d_{iMJ}^*$  son combinaciones lineales de las derivadas de la solución fundamental en tracciones y desplazamientos.

Para la formulación hipersingular del método se utiliza la solución fundamental obtenida por Dunn y Wiencke [14] para materiales transversalmente isótropos piezoeléctricos. Esta solución fundamental limita la aplicabilidad de la formulación frente a la solución de Deeg, ya que ésta permitía la consideración de cualquier tipo de anisotropía. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la mayoría de materiales piezoeléctricos de interés tecnológico son transversalmente isótropos. Además, las expresiones de la solución fundamental de Dunn y Wiencke son explícitas, y no en forma integral, con lo que se reduce significativamente la complejidad computacional del desarrollo del problema.

Al igual que con la formulación clásica, la formulación hipersingular se puede implementar de forma análoga al problema elástico, ya que el tipo de singularidades que aparecen en las expresiones son similares. De esta forma, se pueden aplicar las técnicas de regularización de términos hipersingulares y fuertemente singulares y técnicas de multicolocación propuestas en [15] para materiales isótropos y en [16] para materiales transversalmente isótropos.

#### 4. OBTENCIÓN DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIÓN

Las tensiones extendidas  $\Sigma_{i,j}$  presentan una singularidad del tipo  $1/\sqrt{r}$  en torno al vértice de la grieta, al igual que ocurre con el problema elástico [3, 7]. Del mismo modo, los desplazamientos extendidos sobre la grieta presentan también un comportamiento del tipo  $\sqrt{r}$ . Esto permite definir los FIT de manera análoga al problema elástico. La única diferencia radica en que, además de los FIT asociados a los modos I,II y III de apertura de grieta, aparece un Factor de Intensidad de Desplazamiento Eléctrico, asociado al comportamiento singular del desplazamiento eléctrico en el frente de grieta.

Así pues, a partir de las tracciones de los nodos a un cuarto de los elementos singulares situados en el frente de grieta, se pueden obtener los Factores de Intensidad de Tensiones y de desplazamiento Eléctrico (FITEs) [13]. Si se consideran las direcciones 1 y 2 contenidas en el plano de la grieta, siendo 1 tangente al frente grieta y 2 normal a dicho frente, y la dirección 3 perpendicular al plano de la grieta, se pueden escribir los FITEs como

$$\begin{aligned}
 K_I &= \overline{P}_3^k \sqrt{2\pi L} & K_{II} &= \overline{P}_1^k \sqrt{2\pi L} \\
 K_{III} &= \overline{P}_2^k \sqrt{2\pi L} & K_{IV} &= \overline{P}_4^k \sqrt{2\pi L}
 \end{aligned}
 \quad (11)$$

donde L es la longitud del elemento singular a un cuarto en dirección perpendicular al frente de grieta, y  $P_4$  es la componente del vector de tracciones extendido asociado al desplazamiento eléctrico.

Otra forma alternativa de evaluar los FITEs es a partir de los desplazamientos extendidos de apertura de grieta de los elementos a un cuarto, siguiendo el formalismo de Stroh [17] aplicado al problema piezoelectrico [4]. Esta segunda opción es la utilizada en la formulación hipersingular del MEC propuesta, donde solo se discretiza el contorno externo y la superficie de la grieta, y por tanto no hay elementos singulares sino elementos a un cuarto en el frente de grieta.

#### 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan una serie de ejemplos numéricos para validar la formulación clásica del MEC presentada. En la discretización del contorno se utilizan elementos cuadráticos estándar, siendo a un cuarto y a un cuarto singulares los adyacentes al frente de grieta pertenecientes a la superficie de la grieta y al dominio interno respectivamente.

La ausencia de resultados publicados que sean conocidos por los autores para problemas 3D de Mecánica de la Fractura en materiales piezoelectricos, hacen que se tomen como referencia resultados de problemas 2D.

En los problemas resueltos se considera una grieta recta

contenida en el plano de simetría de una pieza prismática y cilíndrica. En ambos casos se obtiene la solución para dos tipos de sollicitación: en el primero de ellos se aplica tracción mecánica uniforme (1Pa) sobre las caras del contorno paralelas a la grieta y en dirección normal al plano de la grieta. En el segundo caso de carga se impone una densidad de carga eléctrica uniforme ( $1C/m^2$ ) sobre dichas caras.

Se comprueba que el potencial eléctrico bajo la acción de tracciones mecánicas es idéntico que el desplazamiento en dirección normal al plano de la grieta bajo la acción de carga eléctrica por reciprocidad.

Se presentan resultados para dos tipos de materiales piezoelectricos comerciales: PZT4 y PZT6B. Las propiedades de estos materiales aparecen en la tabla 1.

Material		PZT4	PZT6B
Const. elásticas ( $10^9 N/m^2$ )	$C_{11}$	139	168
	$C_{12}$	77.8	60
	$C_{13}$	74.3	60
	$C_{33}$	113	163
	$C_{44}$	25.6	27.1
Const. Piezoeléctr. ( $C/m^2$ )	$e_{31}$	-6.98	-0.9
	$e_{33}$	13.84	7.1
	$e_{15}$	13.44	4.6
Const. dieléctr. ( $10^{-9} C/(Vm)$ )	$\epsilon_{11}$	6.0	3.6
	$\epsilon_{33}$	5.47	3.4

Tabla 1: Propiedades de materiales considerados.

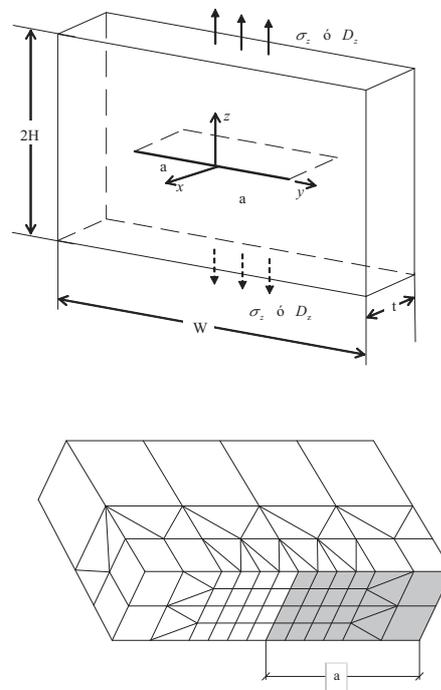


Figura 1: Geometría y discretización de grieta recta en pieza prismática.

5.1. Pieza prismática con grieta recta central

Se considera una pieza prismática con una grieta recta central en su plano medio de relación de aspecto  $2a = 2H = W/2 = 4t$ , sometida a tracción o densidad de carga uniformes en las caras paralelas a la grieta. La geometría del problema se muestra en la figura. Debido a la simetría, tan solo un cuarto del dominio es discretizado (figura 1). Para comparar los resultados con los obtenidos con la formulación 2D presentada por García-Sánchez et al [18], se imponen condiciones de deformación plana

En la figura 2 se muestran los desplazamientos y potencial eléctrico a lo largo de la línea media de la grieta para los dos materiales considerados. Los resultados presentan un magnífico acuerdo con los obtenidos con la formulación 2D de García-Sánchez et al [18].

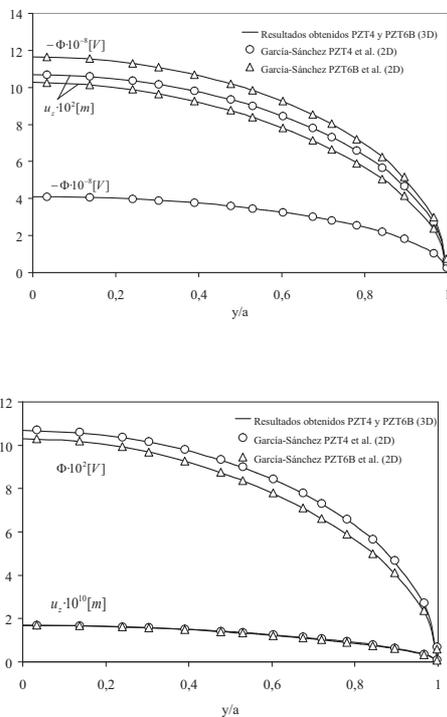


Figura 2: Resultados grieta recta en pieza prismática. a) Carga eléctrica. b) Carga mecánica

Los valores de los FITEs obtenidos a partir de las tracciones para material PZT4 extendidas son:  $K_I = 1,8077\sigma_z\sqrt{\pi a}$  y  $K_{IV} = 1,6211D_z^*\sqrt{\pi a}10^{10}$  para la carga de tracción de 1 Pa, y  $K_I = 0,1721\sigma_z^*\sqrt{\pi a}10^{-8}$  y  $K_{IV} = 1,1601D_z\sqrt{\pi a}$  para la densidad de carga de  $1C/m^2$ .

Para material PZT6B se obtiene:  $K_I = 1,971\sigma_z\sqrt{\pi a}$  y  $K_{IV} = 0,491D_z^*\sqrt{\pi a}10^{10}$  para la carga de tracción de 1 Pa, y  $K_I = 1,375\sigma_z^*\sqrt{\pi a}10^{-8}$  y  $K_{IV} = 1,167D_z\sqrt{\pi a}$  para la densidad de carga de  $1C/m^2$ .

Donde las expresiones de los FITEs son normalizadas a

través de la carga mecánica aplicada  $\sigma_z$  y  $D_z^*$  teniendo éste su mismo valor numérico y análogamente para carga eléctrica.

Los valores de los FITEs obtenidos a partir de los desplazamientos de apertura de grieta coinciden con los obtenidos a partir de las tracciones.

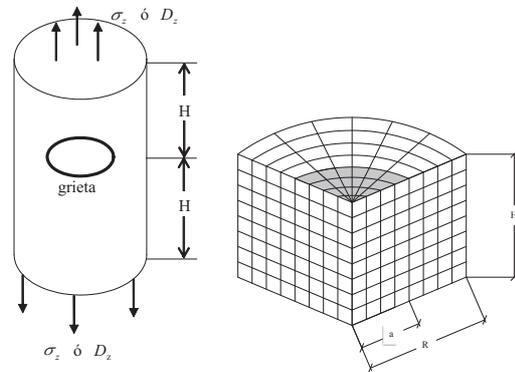


Figura 3: Geometría y discretización de cilindro con grieta interna.

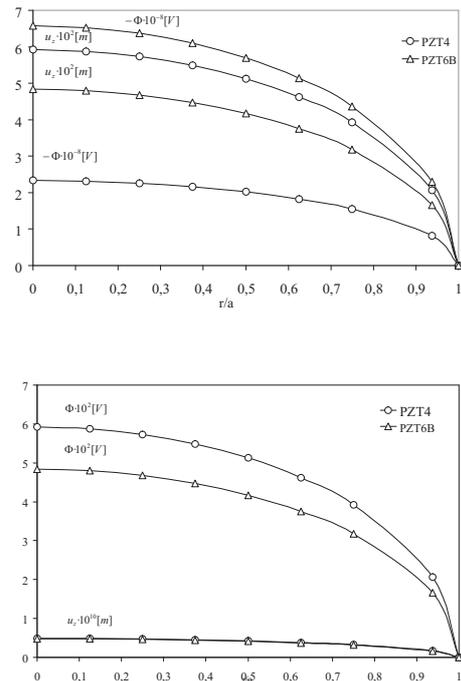


Figura 4: Resultados cilindro con grieta interna. a) Carga eléctrica. b) Carga mecánica

5.2. Cilindro con grieta circular en su plano medio

La geometría y discretización de la grieta se presenta en la figura 3 ( $H = R = 2a$ ). Debido a la simetría del problema, solo se discretiza 1/8 del dominio.

Los desplazamientos y potencial eléctrico en la grieta se presentan en la figura 4. Los valores obtenidos para los FITEs a partir de las tracciones extendidas para material PZT4 son:  $K_I = 0,691\sigma_z\sqrt{\pi a}$  y  $K_{IV} = 0,075D_z^*\sqrt{\pi a}10^{10}$  para la carga de tracción de 1 Pa, y  $K_I = 0,0181\sigma_z^*\sqrt{\pi a}10^{-8}$  y  $K_{IV} = 0,663D_z\sqrt{\pi a}$  para la densidad de carga de  $1C/m^2$ .

Para PZT6B se obtiene:  $K_I = 0,7079\sigma_z\sqrt{\pi a}$  y  $K_{IV} = 0,027D_z^*\sqrt{\pi a}10^{10}$  para la carga de tracción de 1 Pa, y  $K_I = 0,132\sigma_z^*\sqrt{\pi a}10^{-8}$  y  $K_{IV} = 0,658D_z\sqrt{\pi a}$  para la densidad de carga de  $1C/m^2$ .

Los autores no conocen resultados previos para este problema.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una formulación de elementos de contorno para resolver problemas de Mecánica de la Fractura 3D en materiales anisótropos piezoeléctricos. Los resultados numéricos obtenidos demuestran la precisión y robustez de la formulación.

También se han presentado los fundamentos para el desarrollo de una formulación hipersingular del MEC para este tipo de problemas. En un futuro trabajo se presentarán resultados con dicha formulación, que permitirá resolver problemas más complejos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación por parte del Ministerio de Educación y Ciencia (DPI-08147-C02-02)

## REFERENCIAS

- [1] D.M. Barnett and J. Lothe, Dislocations and Line Charges in Anisotropic Piezoelectric Insulators, *Physica Status Solidi (b)*, Vol. **67**, pp. 105–111, 1975.
- [2] W.F Deeg, *The Analysis of Dislocation, Crack and Inclusion Problems in Piezoelectric Solid*. PhD Thesis, (1980), Stanford University.
- [3] Y.E. Pak, Crack extension force in a piezoelectric material, *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**, 647-653.
- [4] Y.E. Pak, Linear Electro-Elastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials, *Int. J. Fracture*, 1992, **54**, pp. 79–100.
- [5] H. Sosa, On fracture mechanics of piezoelectric solids, *Int. J. Solids Struc.*, 1992, **29**, 2613-2622.
- [6] V.Z. Parton, Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials, *Acta Astronautica*, 1976, **3**, 671-683.
- [7] Z. Suo , C-M Kuo, DM Barnett , JR Willis, Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *Journal of Mech. Phys. Solids*, 1992, **40**, 739-765.
- [8] T.H. Hao, Z.Y. Shen, A new boundary condition of electric fracture mechanics and its applications, *Engrg. Fract. Mech.*, 1994, **47**, 793-802.
- [9] L. Kogan, C.Y. Hui, V. Molkov, Sttress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material, *Int. J. Solids Struct.*, 1996, **33**, 2719-2737.
- [10] Z.C. Ou, Y.H. Chen, Discussion of the crack face electric boundary condition in piezoelectric fracture mechanics, *Int. J. Fracture*, 2003, **123**, L151-L155.
- [11] C.A. Brebbia, y J. Domínguez, *Boundary Elements. An Introductory Course*, segunda edición. Computational Mechanics Publications, Southampton y MacGraw-Hill, New York.
- [12] J.A. Sanz, M.P.Ariza, J.Dominguez, Three-Dimensional BEM for Piezoelectric Fracture Analysis, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, Vol. **39**, 586-596.
- [13] M.P. Ariza, A. Saez and J.Domínguez, A singular element for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Engrg. Anal. Bound. Elem.*, 1997, **20**, 275-285. 1997, **20**, 287-298.
- [14] M.L. Dunn, H.A. Wienecke, Green's Functions fot Transversely Isotropic Piezoelectric Solids, *Int. J. Sol. and Structures*, 1996, **33**, 4571-4581.
- [15] J. Domínguez, M.P. Ariza, R.Gallego, Flux and Traction Boundary Elements without Hypersingular or Strongly Singular Integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2000, **48**, 111-135.
- [16] M.P. Ariza, J. Dominguez, Boundary element formulation for 3-D transversely isotropic cracked bodies, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2004, **60**, 719-753.
- [17] A.N. Stroh, Steady State Problems in Anisotropic Elasticity, *J. Mathematical and Physics*, 1962, **41**, 77-103.
- [18] F. Garcia-Sanchez, A.Saez, J.Dominguez, Anisotropic and Piezoelectric Materials Fracture Analysis by BEM, *Comp. and Structures*, 2005, **83**, 804–820.