

# Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

## Análisis de inestabilidades paramétricas en un péndulo con soporte vibratorio

Autor: Ignacio Moreno López

Tutor: Heliodoro González García

**Dpto. Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2021





Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería Aeroespacial

# **Análisis de inestabilidades paramétricas en un péndulo con soporte vibratorio**

Autor:

Ignacio Moreno López

Tutor:

Heliodoro González García

Profesor Titular

Dpto. Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado: Análisis de inestabilidades paramétricas en un péndulo con soporte vibratorio

Autor: Ignacio Moreno López  
Tutor: Heliodoro González García

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

**E**n primer lugar he de agradecer a mis padres y a mis hermanos quienes han estado conmigo en todo momento, desde los más duros a las celebraciones tras las mayores alegrías. A mis compañeros de carrera y amigos, en especial a Isabel, Marina, Alberto, Miguel, Manuel, Esther y Elena, quienes mayor apoyo han sido durante estos años.

Por otro lado, agradecer a D. Heliodoro González García, por su atención continua durante la realización de este trabajo, tanto en tiempo como en aportaciones esenciales para que este proyecto haya salido adelante, siempre dispuesto a ayudar y a aportar. Por último, agradecer a la Universidad de Sevilla, tanto por estos años en los que me han ayudado a mejorar como futuro profesional y persona, como por los medios aportados para la realización experimental del proyecto.



# Resumen

---

A lo largo del proyecto se muestra un estudio teórico a partir de la ecuación linealizada del péndulo, en la que debido a una vibración vertical de su soporte con una señal sinusoidal producimos la desestabilización del péndulo. Así, se muestra las soluciones teóricas para que se inestabilice el mismo, y una vez encontradas se comparan con los resultados experimentales obtenidos en el laboratorio.



# Abstract

---

Throughout the document it is shown a theoretical research that start with the linearization of the simple pendulum equation, where due to a vertical oscillation of a shaker with a sinusoidal signal, the pendulum is destabilized. Therefore, along the paper the reader could see the theoretical conditions leading to destabilization and the experimental's results that are obtained in the laboratory.



# Índice Abreviado

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Estudio teórico</b>	<b>3</b>
2.1 Teoría de vibraciones	3
2.2 Modelo matemático	12
2.3 Solución teórica del sistema	14
<b>3 Estudio experimental</b>	<b>25</b>
3.1 Montaje	25
3.2 Experimentación en vibración libre	28
3.3 Experimento con shaker	32
<b>4 Conclusiones</b>	<b>47</b>
4.1 Líneas de trabajo futuras	47



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Estudio teórico</b>	<b>3</b>
2.1 Teoría de vibraciones	3
2.1.1 Vibración libre	3
Vibración sin amortiguamiento	3
Desarrollo con amortiguamiento	4
Ejemplos de movimientos vibratorios	6
2.1.2 Vibración forzada armónicamente	8
2.1.3 Resonancia paramétrica	9
Cambio de longitud de un péndulo	10
Cambio de centro de gravedad	10
Cambio aparente de la gravedad	11
2.2 Modelo matemático	12
2.3 Solución teórica del sistema	14
Ecuación de Mathieu canónica	15
Adaptación de la ecuación de Mathieu a nuestros parámetros	17
Conclusiones sobre el mapa de estabilidad	18
2.3.1 Resolución por métodos matemáticos	21
2.3.2 Anchura de la zona inestable según Landau [8]	23
Conclusiones sobre el amortiguamiento y la anchura de la región inestable	24
<b>3 Estudio experimental</b>	<b>25</b>
3.1 Montaje	25
3.1.1 Instrumentos para el experimento	25
Shaker TIRAvib S51110	25
Amplificador TIRA modelo BAA 120	26
Generador de ondas Agilent 33500B Series	26
Apoyo de la cámara	26
3.2 Experimentación en vibración libre	28
3.2.1 Frecuencia natural $\omega_0$	29

---

3.2.2	Amortiguamiento	30
3.3	Experimento con shaker	32
3.3.1	Amplitud de vibración del shaker como función de la amplitud y frecuencia de la señal de alimentación.	32
3.3.2	Estudio de modos de inestabilidad	37
	Estudio del péndulo de gran longitud	39
	- Voltaje mínimo de inestabilidad	39
	- Rango de frecuencias con voltaje máximo	39
	- Variación de los tiempos de inestabilización	40
	- Saturación por no linealidad	41
	- Estimación de $\delta$ y $s$	43
	Estudio del péndulo de pequeña longitud	45
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>47</b>
4.1	Lineas de trabajo futuras	47
4.1.1	Estudio de saturación no lineal	47
4.1.2	Estudio de amortiguamiento y de líneas $s = cte$	48

# Índice de Figuras

---

2.1	Vibración respecto a la posición de equilibrio [2]	4
2.2	$x(t)$ de vibración libre con amortiguamiento	5
2.3	$x(t)$ de vibración libre con amortiguamiento casi crítico	6
2.4	$x(t)$ de vibración libre con amortiguamiento crítico	7
2.5	$x(t)$ de vibración libre con sobreamortiguamiento	7
2.6	Esquema de rotor desequilibrado [9]	8
2.7	Amplitud en función de la relación de frecuencias en un oscilador forzado	9
2.8	Botafumeiro de Santiago [4]	10
2.9	Botafumeiro de Santiago [5]	11
2.10	Niño en un columpio [6]	11
2.11	Esquema del movimiento del sistema	12
2.12	$a(q)$ de Abramowitz & Stegun [7]	17
2.13	Mapa de estabilidad de nuestro problema	19
2.14	Mapa de estabilidad modo 1	19
2.15	Mapa de estabilidad modo 2	20
2.16	Mapa de estabilidad modo 2 ampliado	20
2.17	Mapa de estabilidad modo 3	21
2.18	Mapa de estabilidad modo 3 ampliado	21
2.19	Programa para obtener serie de Taylor	22
2.20	Programa para obtener serie de Taylor 2	23
2.21	Linea de separación de zona estable e inestable con y sin amortiguamiento	24
3.1	Montaje del shaker	26
3.2	Shaker	27
3.3	Amplificador	27
3.4	Generador de ondas	28
3.5	Apoyo para la cámara	28
3.6	Regla acoplada al shaker para tomar medidas	30
3.7	Frecuencia natural en función de la longitud del péndulo	31
3.8	Hallar $\xi$ en función de $\delta_{dec}$	32
3.9	Centrado cámara	33
3.10	Deformímetro	34
3.11	Montaje con deformímetro	35
3.12	Voltaje pico pico - $V_{pp}(A,f)$	36
3.13	Voltaje pico pico - $V_{pp}(f)$	36
3.14	Voltaje pico pico - $V_{pp}(A)$	37

3.15	Péndulo de longitud larga	37
3.16	Péndulo de longitud corta	38
3.17	Zona estable e inestable con amortiguamiento	41
3.18	Amplitud con frecuencia 2.02 Hz a los 70 s	41
3.19	Amplitud con frecuencia 2.04 Hz a los 70 s	42
3.20	Amplitud con frecuencia 2.05 Hz a los 70 s	42
3.21	Amplitud con frecuencia 2.07 Hz a los 70s	43
3.22	Datos experimentales de la vibración libre y su interpolación (escala logarítmica). Error $R^2 = 0.9837$	44
3.23	Datos experimentales de la inestabilidad paramétrica y su interpolación (escala logarítmica). Error $R^2 = 0.9951$	45
4.1	Linea de estabilidad modo 1	48

# 1 Introducción

---

El objetivo de este TFG es analizar las inestabilidades paramétricas en un péndulo. Las inestabilidades paramétricas se producen por un cambio en una característica del sistema de forma periódica, habiendo varios ejemplos en la vida real que cualquier persona podría reconocer. Así, por resonancia paramétrica se mueve el botafumeiro de la catedral de Santiago (su cambio se produce en la longitud del péndulo cada vez que llega a la parte más baja de su recorrido) o un niño en un columpio, que echándose hacia atrás e irguiéndose en ciertos puntos del recorrido consigue que la amplitud del movimiento vaya aumentando. Además, el estudio que se muestra sobre las zonas de inestabilidad de un péndulo simple coinciden con las zonas de estabilidad de un péndulo invertido y viceversa, dichas zonas se mostrarán en un mapa de estabilidad a lo largo del proyecto.

La resonancia paramétrica tiene lugar cuando en un sistema se producen cambios internos de naturaleza periódica. Si la periodicidad cumple ciertos requisitos, que básicamente se relacionan con el periodo natural de oscilación del sistema, éste puede desestabilizarse, dando lugar a un aumento progresivo de la amplitud de oscilación. Este comportamiento es similar al de un sistema sometido a fuerzas externas periódicas (oscilaciones forzadas), pero ambos casos no son en absoluto equivalentes. Tanto el origen de la inestabilidad como su comportamiento dinámico son distintos.

Para mostrar todo esto se comienza en el capítulo 2 con un breve repaso de las partes más importantes de teoría de vibraciones, con introducción a la teoría propia de este proyecto. Tras ello, se muestra la ecuación de un péndulo simple obtenido a través de la mecánica analítica y su linealización a partir de la cual obtenemos una solución teórica de la misma por analogía a la ecuación de Mathieu, lo que nos dará el mapa de inestabilidades de nuestro péndulo.

En el tercer capítulo se muestra el estudio experimental. Desde el montaje a los experimentos de vibración libre y vibración con la oscilación del soporte, se muestra la obtención de los parámetros fundamentales y los resultados propios sobre la desestabilización del péndulo.

Finalmente, en las conclusiones se resume lo obtenido de forma general en el proyecto, y se incluyen líneas futuras de investigación con intención de que este trabajo se pueda seguir desarrollando y ampliando en un futuro.



## 2 Estudio teórico

---

### 2.1 Teoría de vibraciones

En esta sección se muestra la teoría básica que se ha de conocer para comprender el trabajo, comenzando por la teoría de vibraciones libres, y mostrando las diferencias entre las vibraciones forzadas y la resonancia paramétrica.

#### 2.1.1 Vibración libre

Las vibraciones son movimientos de un cuerpo alrededor de un punto de equilibrio. De esta forma, cualquier sistema que tenga tanto inercia como una fuerza de restitución puede vibrar libremente alrededor del equilibrio. En esta sección se va a estudiar vibraciones libres de fuerzas externas, lo que tiene como consecuencia que la amplitud del movimiento no aumentará con el tiempo, pudiendo disminuir en caso de haber amortiguación. Además, de la inercia y del mecanismo de restitución un sistema puede tener (o no) amortiguamiento, lo produce la disminución de la amplitud de la vibración con el paso del tiempo. A continuación se muestra el desarrollo teórico de ambos casos.

#### Vibración sin amortiguamiento

Para mostrar este desarrollo elegimos el sistema más simple posible. Este va a ser el de un cuerpo apoyado sobre el suelo sin fricción con él, y, que está unido mediante un muelle a una pared. Si se estira el muelle el cuerpo sentirá una fuerza en el sentido contrario al desplazamiento como se puede observar en la figura 2.1.

De esta forma si se estira y lo dejáramos vibrar, se mantendría como un movimiento armónico simple de forma indefinida pues no hay un amortiguamiento que lo impida. Así, el movimiento que se puede observar en la imagen sigue la siguiente ecuación de movimiento. Partiendo de la 2ª ley de Newton

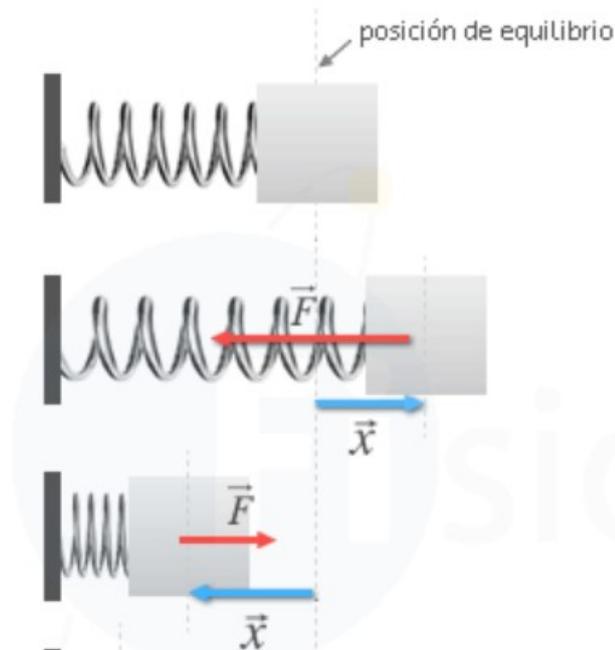
$$\sum F = m\ddot{x},$$

donde  $x$  es la dirección del movimiento y  $F$  es cualquier fuerza que va en dirección del eje  $x$ . Como la única fuerza que actúa en la dirección del movimiento es la fuerza elástica, esta ecuación pasa a ser

$$-kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0.$$

donde  $k$  es una constante asociada a la fuerza de restitución. La ecuación que hemos obtenido es la ecuación diferencial de un movimiento vibratorio libre sin amortiguamiento. Si a partir de este punto definimos la frecuencia natural del sistema que es la frecuencia con la que vibra un sistema libre sin amortiguamiento, y que queda definido por  $\omega_0^2 = k/m$ , se puede reescribir la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



**Figura 2.1** Vibración respecto a la posición de equilibrio [2].

Así, la solución de esta ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden es

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t,$$

y los coeficientes A y B se podrán hallar con las condiciones iniciales

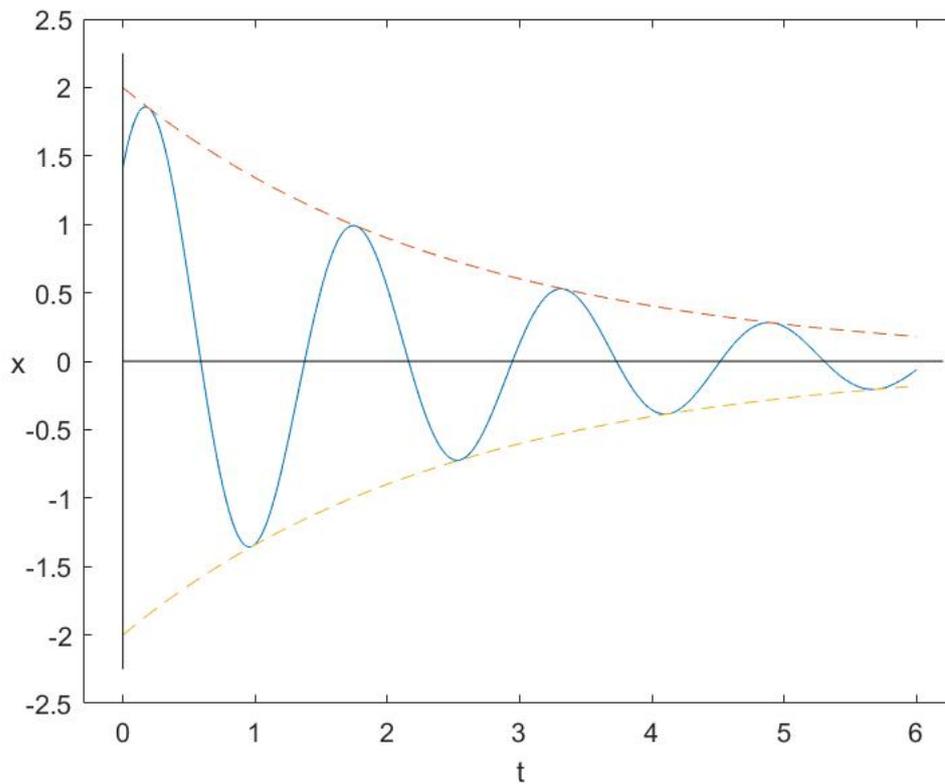
$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x(0) \cos \omega_0 t.$$

### Desarrollo con amortiguamiento

La realidad es que hay pocos sistemas que no tengan amortiguamiento, de hecho casi en cualquier sistema que pensemos hay algo que amortigua el movimiento. En el sistema del muelle visto en la sección anterior no se ha tenido en cuenta tanto el rozamiento con el aire del sólido, como el rozamiento que existe al estar en contacto con el suelo. Y si se piensa en cualquier sistema es difícil encontrar alguno que, sin fuerza externa de por medio, consiga mantener la amplitud de su movimiento indefinidamente. Sin embargo, haciendo un análisis de escalas se puede considerar que este amortiguamiento es despreciable. Supongamos que se hace un experimento parecido a este pero con un péndulo que apenas tiene rozamiento, se le deja oscilar con vibraciones libres durante mucho tiempo y resulta que pasada una hora apenas se ha reducido la amplitud a la mitad. Es una cantidad apreciable, pero importante solo si el experimento va a tener una duración del orden de una hora o más. Si queremos observar cómo oscila durante 30 s por ejemplo, la variación de la amplitud será mucho menor, y se podría considerar que el movimiento no tiene un amortiguamiento relevante para la resolución del problema. En dicho caso se podría utilizar la ecuación que se ha desarrollado en el punto anterior.

Por último, hay que aclarar que existe muchos tipos de amortiguamientos pero el que se va a considerar en este trabajo es el amortiguamiento viscoso, que es dependiente de la velocidad del objeto que se mueve de la siguiente manera

$$F_a = -c\dot{x}.$$



**Figura 2.2**  $x(t)$  de vibración libre con amortiguamiento .

donde el signo menos del amortiguamiento expresa que es una fuerza que va contra la velocidad, y  $c$  es una constante del sistema bajo estudio. Antes de continuar hay que aclarar que no siempre el amortiguamiento tiene que tener dependencia de la velocidad, o no solo de ella. De esta manera la ecuación de un movimiento vibratorio libre con amortiguamiento es,

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow kx + c\dot{x} + m\ddot{x} = 0.$$

Para hallar la solución de esta ecuación se propone una del tipo

$$x(t) = e^{st},$$

quedando la ecuación de la siguiente manera,

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0,$$

lo que es verdad para todos los valores de  $t$  si

$$ms^2 + cs + k = 0.$$

Así, resolviendo la ecuación de segundo grado en  $s$ , obtenemos las siguientes soluciones:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}},$$

por lo que la solución general es de la siguiente forma

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}.$$

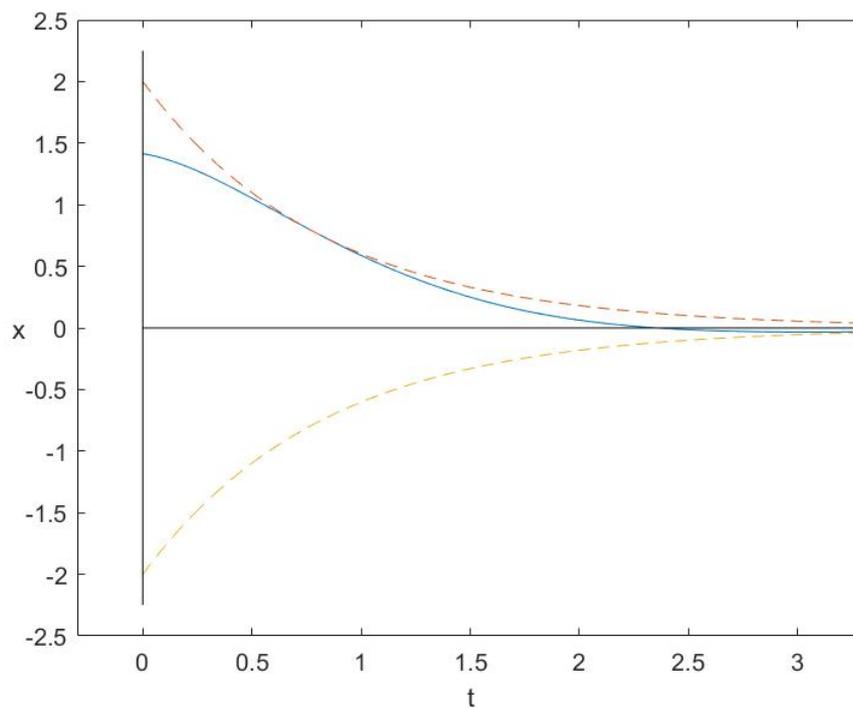
Hay un amortiguamiento para el que la raíz de la solución es nula, y por tanto las dos soluciones son iguales, a ese caso se le llama **amortiguamiento crítico**. Este amortiguamiento tiene la siguiente expresión,

$$c_c = 2m\omega_0.$$

y definimos la razón de amortiguamiento como,

$$\xi = \frac{c}{c_c}.$$

Según el valor de  $\xi$ , si el valor es uno tendrá un amortiguamiento crítico, si es menor de 1, habrá oscilaciones amortiguadas y si es mayor de 1 se tendrá un movimiento sobreamortiguado (no oscilatorio). Así, en la figura 2.2 se puede observar un movimiento oscilatorio amortiguado con  $\xi < 1$ , y en las dos figuras siguientes 2.3, 2.4 y 2.5 se puede observar tanto uno muy cercano al amortiguamiento crítico, como otro con amortiguamiento crítico y otro con sobreamortiguamiento, siendo la característica común que ninguno oscila.

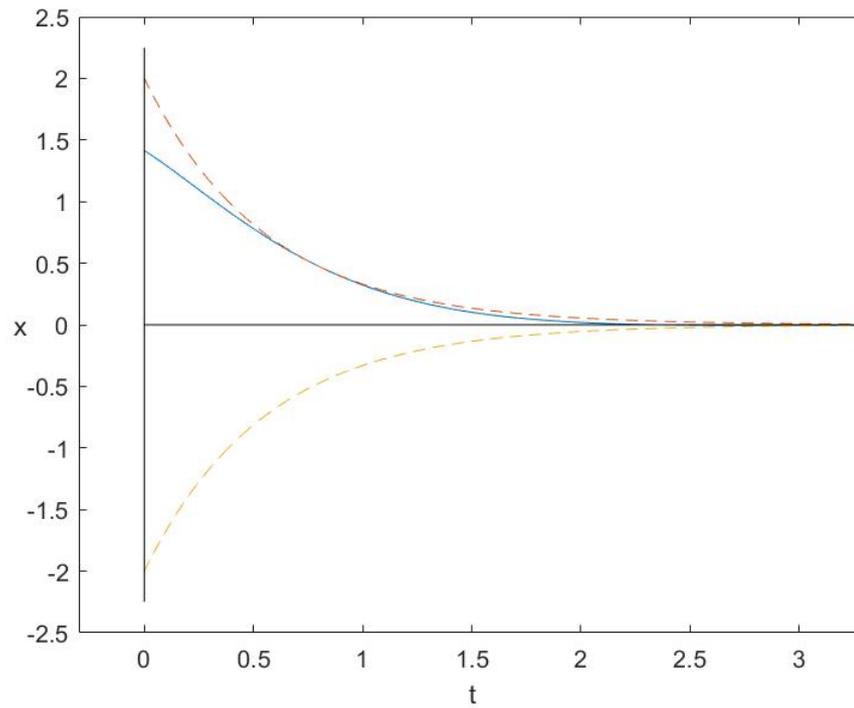


**Figura 2.3**  $x(t)$  de vibración libre con amortiguamiento casi crítico.

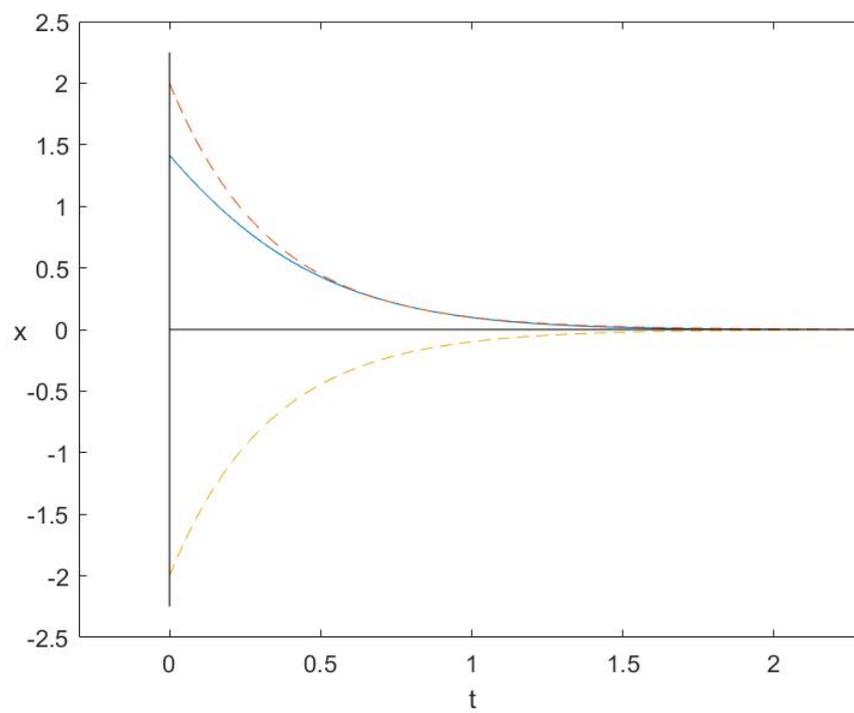
De todos estos el que más nos interesa es el movimiento oscilatorio con amortiguamiento, y como se podrá comprobar en la sección 3.2 sobre experimentación libre, el valor de  $\xi$  es muy pequeño, muy lejano a la unidad.

### Ejemplos de movimientos vibratorios

Estas ecuaciones básicas se usan para la solución de sistemas muy simples aunque también para otros más complejos. Se da tras tener una excitación inicial, que los saca de su punto de equilibrio y comienzan a vibrar hasta que su amplitud es muy pequeña. Hay multitud de ejemplos de vibraciones



**Figura 2.4**  $x(t)$  de vibración libre con amortiguamiento crítico.



**Figura 2.5**  $x(t)$  de vibración libre con sobreamortiguamiento .

libres, desde el péndulo bajo estudio en este proyecto a partir de tener una posición fuera del equilibrio, a un trampolín después del salto de un nadador o el larguero de una portería de fútbol vibrando tras un tiro que da en él.

### 2.1.2 Vibración forzada armónicamente

En esta sección se va a hacer un breve análisis de lo que es una vibración forzada debido a una fuerza externa armónica, con el objetivo de hacer una comparación con la resonancia paramétrica. Es muy típica por ejemplo en rotores desequilibrados, siendo ejemplo de la importancia de equilibrar bien los alabes de un motor de una aeronave para que no haya fuerzas indeseadas. Una de las

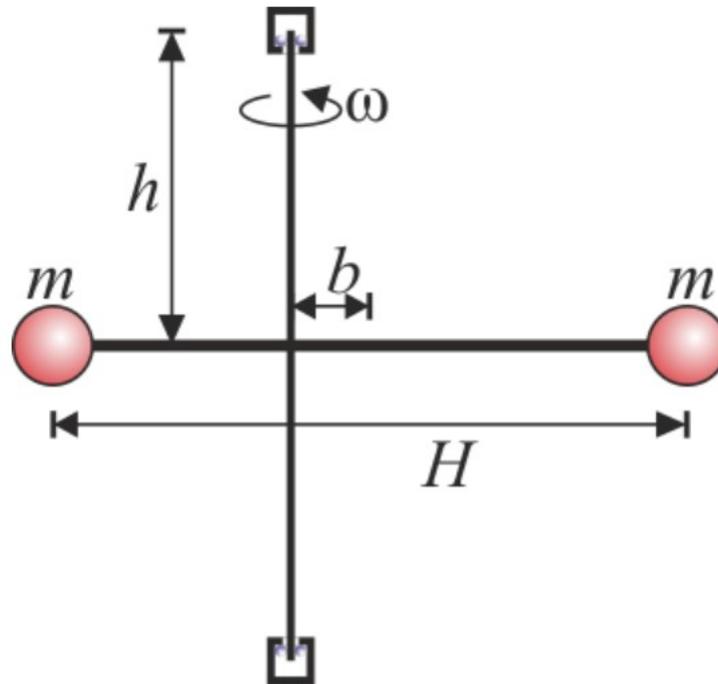


Figura 2.6 Esquema de rotor desequilibrado [9].

características de este régimen es que vibra justamente con la frecuencia de excitación. Y por otro lado hay que tener mucho cuidado con la resonancia pues puede llevar a desarrollar amplitudes muy grandes, lo que se intenta evitar en general.

Considerando una excitación armónica que vaya en la dirección del desplazamiento, la ecuación del movimiento se puede expresar de la siguiente manera

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t),$$

cuya solución es la suma de la solución homogénea, es decir, la que hemos obtenido en vibración libre, y una particular. La solución particular es una función periódica pero con la frecuencia de la excitación y no de la frecuencia natural, así, esta será de la forma

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi).$$

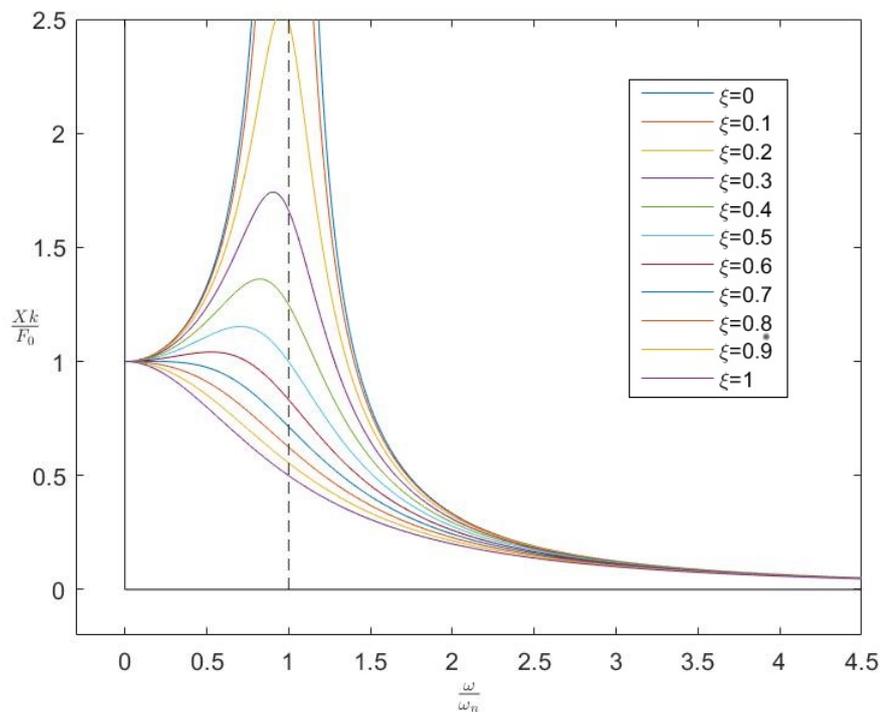
De esta manera el valor de X se puede obtener de la siguiente manera,

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}.$$

Así, en forma adimensional se podría escribir de la siguiente manera

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Programando estos resultados en MATLAB se obtiene las siguiente gráfica 2.7. Con ella se pueden sacar varias conclusiones importantes, algunas para este proyecto y otras en general. Primero aclarar que las distintas líneas que aparecen van desde un amortiguamiento nulo hasta un amortiguamiento crítico, con una separación de  $\xi$  de una décima entre cada uno, siendo la línea con amortiguamiento nulo la más alta, y la de amortiguamiento crítico la más baja. Así, se puede observar que para valores de  $\xi$  bajos, la amplitud se dispara en el entorno de la frecuencia natural, tendiendo a infinito cuando se considera despreciable. Por otro lado también hay que tener en cuenta que ese pico de amplitud se va yendo hacia la izquierda cuando aumenta el amortiguamiento a frecuencias menores de la natural.



**Figura 2.7** Amplitud en función de la relación de frecuencias en un oscilador forzado.

### 2.1.3 Resonancia paramétrica

La resonancia paramétrica es un tipo de oscilaciones que se produce por el cambio periódico de ciertas propiedades del sistema. En el caso de este proyecto en particular, el cambio se produce en la frecuencia angular debido a la introducción de una oscilación vertical que produce una "gravedad efectiva" variable, introduciendo una aceleración vertical debida a las oscilaciones. Sin embargo, se dan otros casos como puede ser el cambio de longitud en el Botafumeiro de la catedral de Santiago de Compostela o la variación del centro de gravedad del sistema, como se da en el balanceo de un niño en un columpio. De esta forma se van a destacar las principales diferencias entre vibración excitada armónicamente y vibración por resonancia paramétrica

1. En las vibraciones forzadas, las propiedades que describen la inercia, la disipación o la fuerza de restitución son constantes, mientras que en las vibraciones por resonancia paramétrica, algunas o todas estas propiedades tienen una variación periódica.
2. En las vibraciones forzadas hay fuerzas periódicas independientes de la deformación o sus derivadas, mientras que en la resonancia paramétrica no.
3. En resonancia paramétrica el sistema vibra con frecuencias relacionadas con su frecuencia natural, mientras que en vibraciones forzadas vibra según la frecuencia de la fuerza forzadora.

### **Cambio de longitud de un péndulo**

Como se ha comentado antes, un ejemplo claro de resonancia por cambio de longitud del péndulo es el **Botafumeiro de Santiago de Compostela**. El Botafumeiro es un inciensario de unos 62 kg de peso que se une al techo de la catedral gracias a una cuerda de más de 60 metros de largo. Lo que provoca que el Botafumeiro oscile es una variación periódica de la longitud del mismo. Esto se consigue a partir de un grupo de hombres llamados tiraboleiros, que tiran de forma periódica de una cuerda y que, gracias a un sistema de poleas, acorta periódicamente la longitud del mismo. Este cambio de parámetros consigue que en unos 17 ciclos se consiga una amplitud de unos 80° de oscilación.

Evidentemente la diferencia entre este caso y nuestro modelo de trabajo es grande pues al tener unas oscilaciones tan grandes la aproximación lineal no es buena. Además, el peso de la cuerda no es despreciable respecto al peso del inciensario por lo que habría que tenerlo en cuenta al hacerle un estudio pero la base del movimiento es la misma. La variación en la longitud del mismo provoca una variación periódica de la frecuencia natural provocando unas oscilaciones inestables a partir de unas muy pequeñas.



**Figura 2.8** Botafumeiro de Santiago [4].

### **Cambio de centro de gravedad**

En este caso probablemente tendremos la situación más familiar de resonancia paramétrica pues es el movimiento de una persona columpiándose. Según en la posición que se encuentre el niño se tumbará para bajar el centro de gravedad del "péndulo" o se erguirá para subirlo, esta variación provoca a su vez una variación de la frecuencia natural del mismo y provocando unas oscilaciones cada vez mayores. Este movimiento periódico del centro de gravedad da lugar a la resonancia armónica del columpio. Otro efecto en el columpio es que un cambio periódico en la orientación del niño (de longitudinal a perpendicular) produce un cambio periódico en su momento de inercia.



Figura 2.9 Botafumeiro de Santiago [5].

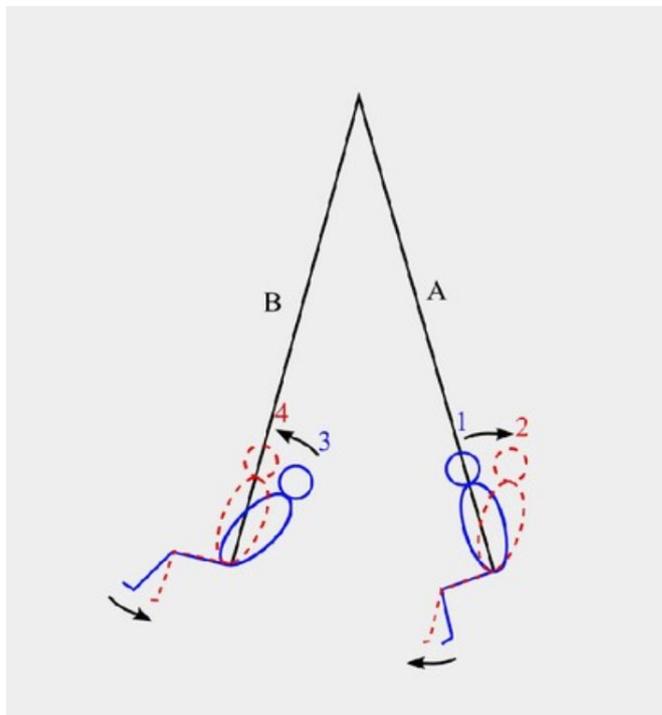


Figura 2.10 Niño en un columpio [6].

### Cambio aparente de la gravedad

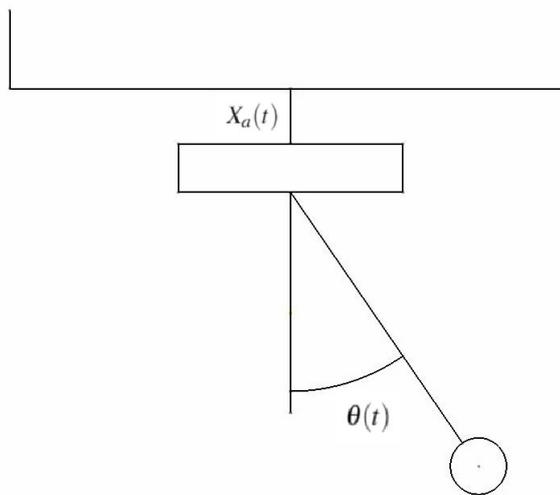
Es el caso que exploramos en la parte experimental de este trabajo. Una variación de la gravedad como la que se muestra en la siguiente ecuación provoca una variación de la frecuencia natural. La

gravedad se puede modificar aparentemente imponiendo una aceleración vertical a todo el sistema

$$g' = g + a \cos(\Omega t).$$

A lo largo del capítulo siguiente se muestra cómo esta variación conduce a una ecuación análoga a la ecuación de Mathieu y se muestra la resolución de la misma. Tras esta breve introducción teórica a la teoría de vibraciones, en las siguientes secciones se muestra el modelo bajo estudio y su solución teórica.

## 2.2 Modelo matemático



**Figura 2.11** Esquema del movimiento del sistema.

Para comenzar esta sección se establece el modelo del péndulo simple en vibración libre obtenido a partir de las herramientas de mecánica analítica. Teniendo en cuenta que es un péndulo de masa  $m$  y longitud  $l$  con un movimiento vertical del soporte  $X_a$  como se puede observar en la figura 2.11, la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{X}_a^2 - 2l\dot{\theta}\dot{X}_a \sin(\theta) \right),$$

y que el valor de la energía potencial considerando  $V=0$  en el punto más bajo es

$$V = -mgl \cos(\theta) - mgX_a.$$

Por último, el término de disipación de energía de nuestro modelo es

$$D = \frac{1}{2}\gamma\dot{\theta}^2.$$

La lagrangiana se calcula mediante

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{X}_a^2 - 2l\dot{\theta}\dot{X}_a \sin(\theta) \right) + mgl \cos(\theta) + mgX_a,$$

y la introducimos en la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0,$$

para obtener la ecuación de movimiento

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml\dot{X}_a \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) + \gamma \dot{\theta} = 0.$$

Teniendo en cuenta que el movimiento del soporte es

$$X_a = A \cos(\Omega t),$$

agrupando términos, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{A}{l} \Omega^2 \cos(\Omega t) \right) \sin(\theta) = 0.$$

Por último, linealizando la ecuación,  $\sin(\theta) \approx \theta$ , e introduciendo la frecuencia natural  $\omega_0$ , la ecuación que se va a estudiar es la siguiente:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \frac{g}{l} \left( 1 - \frac{\Omega^2 A}{g} \cos(\Omega t) \right) \theta = 0.$$

Para obtener una ecuación más manejable es conveniente eliminar el término del amortiguamiento con el siguiente cambio de variables,

$$\theta(t) = e^{-\delta t} \bar{\theta}(t)$$

Para ello se muestran las dos derivadas de  $\theta(t)$ :

$$\dot{\theta} = -\delta e^{-\delta t} \bar{\theta} + e^{-\delta t} \dot{\bar{\theta}}$$

$$\ddot{\theta} = \delta^2 e^{-\delta t} \bar{\theta} - 2\delta e^{-\delta t} \dot{\bar{\theta}} + e^{-\delta t} \ddot{\bar{\theta}}.$$

Introduciéndola en la ecuación de partida, y nombrando el término que multiplica a  $\theta$  como  $\omega^2(t)$ ,

$$\delta^2 \bar{\theta} - 2\delta \dot{\bar{\theta}} + \ddot{\bar{\theta}} + \gamma(-\delta \bar{\theta} + \dot{\bar{\theta}}) + \omega^2(t) \bar{\theta} = 0,$$

que agrupando términos

$$\ddot{\bar{\theta}} + (\gamma - 2\delta) \dot{\bar{\theta}} + (\omega^2(t) - \delta\gamma + \delta^2) \bar{\theta} = 0.$$

Como la intención es eliminar el término del amortiguamiento, nuestro valor del parámetro de la exponencial es  $\delta = \gamma/2$ , quedando la ecuación sin disipación equivalente

$$\ddot{\bar{\theta}} + \left( \omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4} \right) \bar{\theta} = 0.$$

Como se puede observar, con el cambio de variables se ha conseguido tener una ecuación sin el término de la disipación, que se incluye en la exponencial decreciente con el tiempo que se muestra previamente en el cambio de variables.

Una vez llegado a esta expresión, se usa la análoga siguiente para resolverla:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos(\Omega t))\theta = 0.$$

Aquí,  $\varepsilon$  es un parámetro proporcional a la amplitud de oscilación del soporte y  $\Omega$  es la frecuencia de oscilación del mismo. El término  $\varepsilon$  es en concreto en nuestra ecuación del sistema:

$$\varepsilon = \frac{A}{l}\Omega^2.$$

### 2.3 Solución teórica del sistema

Para resolver la ecuación obtenida previamente se va a comenzar tomando como escala de tiempo el inverso de la frecuencia natural, usando el cambio de variables  $\tau = \omega_0 t$  quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon \cos(\omega\tau))\theta = 0.$$

Según la Teoría de Floquet [10], esta ecuación tiene como solución una función periódica, con periodo  $2\pi/\omega$  multiplicada por una exponencial compleja. Así, la solución que se propone es la siguiente,

$$\theta(\tau) = e^{\mu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{(\mu+in\omega)\tau},$$

donde  $\mu$  es un número complejo llamado *exponente de Floquet* que hay que hallar. Calculando la derivada segunda de  $\theta$  y sustituyendo en la ecuación original,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} &= (\mu + in\omega)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{(\mu+in\omega)\tau} = (\mu + in\omega)^2 \theta(\tau) \rightarrow \\ &\rightarrow (\mu + in\omega)^2 \theta(\tau) + (1 + \varepsilon \cos(\omega\tau))\theta(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Sacando factor común  $\theta(\tau)$  y teniendo en cuenta que el coseno se puede expresar como  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ , se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ [(\mu + in\omega)^2 + 1] A_n + \frac{\varepsilon}{2} (A_{n+1} + A_{n-1}) \right\} e^{(\mu+in\omega)\tau} = 0.$$

Por tanto obtenemos una ecuación que se debe verificar para cada término, obteniendo un conjunto infinito de ecuaciones acopladas para los coeficientes  $A_n$  y el exponente de Floquet. Si se divide por  $A_n$  la ecuación anterior se puede reescribir

$$(\mu + in\omega)^2 + 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{A_{n+1}}{A_n} + \frac{A_{n-1}}{A_n} \right) = 0.$$

Para  $n=0$ ,

$$\mu^2 + 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{A_1}{A_0} + \frac{A_{-1}}{A_0} \right) = 0,$$

lo que nos da una ecuación para determinar el exponente de Floquet. Para conseguirlo es necesario obtener aproximaciones de los parámetros  $A_1/A_0$  y  $A_{-1}/A_0$ . Para ello se reescribe la ecuación

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = -\frac{2}{\varepsilon} [(\mu + in\omega)^2 + 1] - \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \left\{ -\frac{2}{\varepsilon} [(\mu + i\omega)^2 + 1] - \frac{A_{n+1}}{A_n} \right\}^{-1}.$$

De esta forma el término  $A_1/A_0$  estará determinado por  $A_2/A_1$  que a su vez estará determinado por  $A_3/A_2$  y así sucesivamente, buscando una convergencia para poder truncarlo ya que los términos son infinitos. De la misma forma, para obtener  $A_{-1}/A_0$  vemos que es función de los términos sucesivos. De esta forma si truncamos en  $n = \pm 1$ , se obtienen las siguientes fracciones

$$\frac{A_1}{A_0} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} [(\mu + i\omega)^2 + 1] \right\}^{-1}$$

$$\frac{A_{-1}}{A_0} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} [(\mu - i\omega)^2 + 1] \right\}^{-1},$$

y por tanto la primera aproximación a los exponentes de Floquet quedaría así:

$$\mu^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ \frac{1}{(\mu + i\omega)^2 + 1} + \frac{1}{(\mu - i\omega)^2 + 1} \right] = 0.$$

Si truncamos en  $n = \pm 2$ , harán falta los términos de  $A_2/A_1$  y  $A_{-2}/A_{-1}$  que se escriben a continuación

$$\frac{A_2}{A_1} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} [(\mu + 2i\omega)^2 + 1] \right\}^{-1},$$

$$\frac{A_1}{A_0} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[ (\mu + i\omega)^2 + 1 - \frac{\varepsilon/2}{(\mu + 2i\omega)^2 + 1} \right] \right\}^{-1},$$

y por otro lado,

$$\frac{A_{-2}}{A_{-1}} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} [(\mu - 2i\omega)^2 + 1] \right\}^{-1},$$

$$\frac{A_{-1}}{A_0} = - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[ (\mu - i\omega)^2 + 1 - \frac{\varepsilon/2}{(\mu - 2i\omega)^2 + 1} \right] \right\}^{-1},$$

Siendo la segunda aproximación para los exponentes de Floquet la siguiente expresión,

$$\mu^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ \frac{1}{(\mu + i\omega)^2 + 1 - \frac{\varepsilon/2}{(\mu + 2i\omega)^2 + 1}} + \frac{1}{(\mu - i\omega)^2 + 1 - \frac{\varepsilon/2}{(\mu - 2i\omega)^2 + 1}} \right] = 0.$$

A partir de estas ecuaciones y del método de Newton se puede obtener el valor de  $\mu$  para cualquier par de valores  $(\omega, \varepsilon)$ . Según el valor de la parte real de  $\mu$  se puede saber si es estable o inestable.

- $\Re(\mu) > 0 \rightarrow$  Zona inestable
- $\Re(\mu) = 0 \rightarrow$  Línea de separación de las zonas estable e inestable.
- $\Re(\mu) < 0 \rightarrow$  Zona estable

### Ecuación de Mathieu canónica

Antes de seguir con el estudio teórico vamos a introducir la ecuación de Mathieu canónica, es decir, tal y como suele presentarse en la literatura, a través de un cambio de variables en la escala de

tiempo, siendo la nueva escala  $2/\Omega$  llegando a la ecuación recogida en *Abramowitz & Stegun* [7],

$$\ddot{\theta} + (a - 2q \cos(2t))\theta = 0.$$

El objetivo es tratar de verificar que nuestra forma de obtener los exponentes de Floquet (que no es la habitual) es consistente con los resultados recogidos en esa referencia clásica. Trabajando esta ecuación de la misma forma que la anterior, se puede conseguir la primera aproximación a los exponentes de Floquet,

$$\mu^2 + a - q^2 \left[ \frac{1}{(\mu + 2i)^2 + a} + \frac{1}{(\mu - 2i)^2 + a} \right] = 0,$$

siendo la segunda aproximación

$$\mu^2 + a - q^2 \left[ \frac{1}{(\mu + 2i)^2 + a - \frac{\varepsilon/2}{(\mu+4i)^2+a}} + \frac{1}{(\mu - 2i)^2 + a - \frac{\varepsilon/2}{(\mu-4i)^2+a}} \right] = 0.$$

Como se puede observar, la ecuación analizada es análoga a la del proyecto, y en la bibliografía [7] se muestran las zonas de inestabilidad dependiendo de dichos parámetros  $a$  y  $q$ , que en nuestro proyecto serán adimensionalizaciones de la frecuencia del soporte con la frecuencia natural del péndulo y de la amplitud del movimiento del soporte respecto a la longitud del péndulo respectivamente. De esta forma las líneas que se presentan a continuación muestran las líneas de separación de las zonas estables e inestables de la ecuación clásica estudiada por *Abramowitz & Stegun*. Es importante aclarar que tanto las líneas  $a$  como las  $b$  representan lo mismo, siendo simplemente las primeras el límite superior y las segundas el límite inferior.

$$a_1(q) = 1 + q - \frac{q^2}{2} + O(q^3)$$

$$b_1(q) = 1 - q - \frac{q^2}{2} + O(q^3)$$

$$a_2(q) = 4 + \frac{5q^2}{12} + O(q^4)$$

$$b_2(q) = 4 - \frac{q^2}{12} + O(q^4)$$

$$a_3(q) = b_3(q) = 9 + \frac{q^2}{16} + O(q^3)$$

Forman un mapa de estabilidad como el de la figura 2.12. En él se puede observar cómo de cada modo en  $q=0$  (que se observa que  $a$  es el cuadrado de un número entero), salen dos líneas distintas, una  $a_n$  y otra  $b_n$ . Entre estas curvas la solución de la ecuación de Mathieu es inestable, y fuera de ellas la solución es estable. Así, podemos comprobar ciertas características importantes que nos da el gráfico:

1. Aunque para nosotros no son relevantes desde el punto de vista experimental existen soluciones matemáticas con  $a \leq 0$ .
2. Cuando vamos aumentando de modo, las líneas  $a_n$  y  $b_n$  tardan más en separarse, quedando una franja muy pequeña para valores de  $q$  bajos (que luego se demostrará que son los valores entre los que nos vamos a mover experimentalmente).
3. Para valores pequeños de  $q$ , casi a cualquier frecuencia la solución es estable, sin embargo para valores grandes del mismo, casi siempre es inestable.

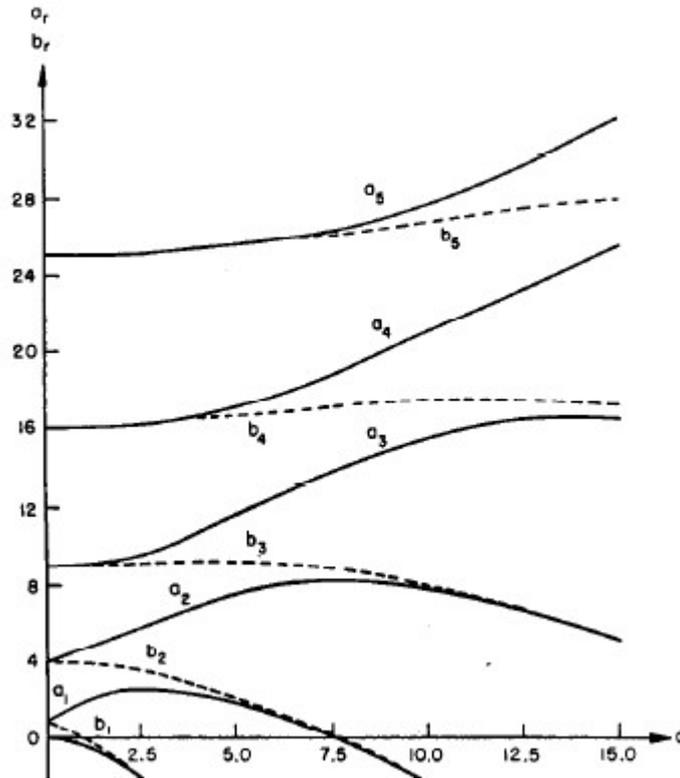


Figura 2.12  $a(q)$  de Abramowitz & Stegun [7].

**Adaptación de la ecuación de Mathieu a nuestros parámetros**

Como se ha escrito al principio de esta sección nuestro modelo matemático del péndulo es el siguiente,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\Omega^2 A}{g} \cos(\Omega t)\right) \theta = 0.$$

Si realizamos el cambio de variables antes escrito para transformarla en la ecuación de Mathieu canónica,  $t = 2/\Omega \tau$ , se obtiene el siguiente resultado,

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} \frac{\Omega^2}{4} + \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2 A}{l} \cos(2\tau)\right) \theta = 0.$$

Si se divide todo por  $\Omega^2/4$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \left( \left(2\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - \frac{4A}{l} \cos(2\tau) \right) \theta = 0.$$

De este modo, se puede observar de una forma bastante clara los valores de  $a$  y  $q$ :

- $a = (2\omega_0/\Omega)^2 \rightarrow$  El valor de  $a$  es una adimensionalización entre la frecuencia natural y la frecuencia con la que el *shaker* varía la aceleración vertical del mismo.
- $q = 2A/l \rightarrow$  El valor de  $q$  es una adimensionalización de la amplitud de la función que introducimos en el *shaker* y la longitud del péndulo.

Una vez conocido esto, se puede crear un mapa de estabilidad como el mostrado en la figura 2.12 pero adaptado a nuestros parámetros como se muestra en la figura 2.13. En nuestro mapa de estabilidad vamos a presentar  $\Omega/\omega_0(A/l)$  en vez de  $a(q)$  con idea de interpretar fácilmente los

resultados en relación al trabajo de laboratorio. De esta forma en los distintos modos en los que vamos a buscar las inestabilidades primero vamos a hallar  $a(A/l)$ , y tras ello se tendrá en cuenta que la relación  $\Omega/\omega_0$  se halla de la siguiente forma:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Para empezar vamos a observar qué pasa en el **modo 1**. Cuando  $a = 1$  y  $q = 0$

$$\left(2\omega_0/\Omega\right)^2 = 1 \rightarrow \Omega = 2\omega_0.$$

Con partida en  $\Omega = 2\omega_0$  la líneas de  $a_1$  y  $a_2$  son:

$$a_1 = 1 + q - \frac{q^2}{8} + O(q^3) = 1 + 2\frac{A}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{A}{l}\right)^2$$

$$b_1 = 1 - q - \frac{q^2}{8} + O(q^3) = 1 - 2\frac{A}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{A}{l}\right)^2$$

Como se puede observar cortamos en el término que se eleva al cuadrado, pues en principio  $A/l \sim 10^{-2}$ . Así, tras comprobar matemáticamente las diferencias apenas se notan incluso quitando los términos de segundo orden, pero se mantienen por tener una mayor rigor.

Haciendo lo mismo para el **modo 2** obtenemos que para  $a = 4$  y  $q = 0$ ,  $\Omega = \omega_0$ , es decir, para hallar el modo 2 hay que excitar con el *shaker* en frecuencia natural del péndulo. Las expresiones ahora son:

$$a_2(q) = 4 + \frac{5q^2}{12} + O(q^4) = 4 + \frac{5}{3}\left(\frac{A}{l}\right)^2$$

$$b_2(q) = 4 - \frac{q^2}{12} + O(q^4) = 4 - \frac{1}{3}\left(\frac{A}{l}\right)^2$$

Y por último en el **modo 3** tenemos que para  $a = 9$  y  $q = 0$ ,  $\Omega = 2/3 \omega_0$ . Siendo las dos ramas prácticamente iguales, cambiando solo a partir de los términos de tercer orden.

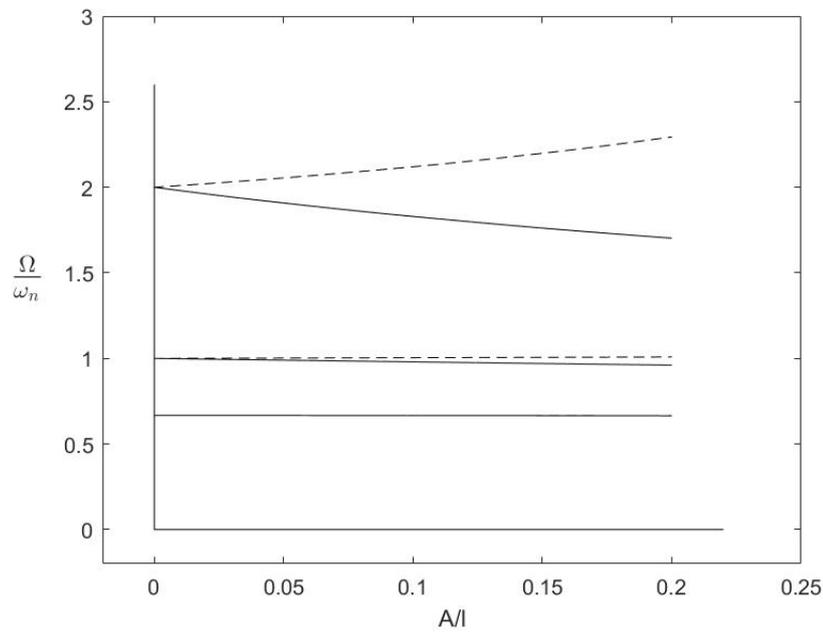
$$a_3(q) = b_3(q) = 9 + \frac{q^2}{16} + O(q^3) = 9 + \left(\frac{A}{l}\right)^2$$

### Conclusiones sobre el mapa de estabilidad

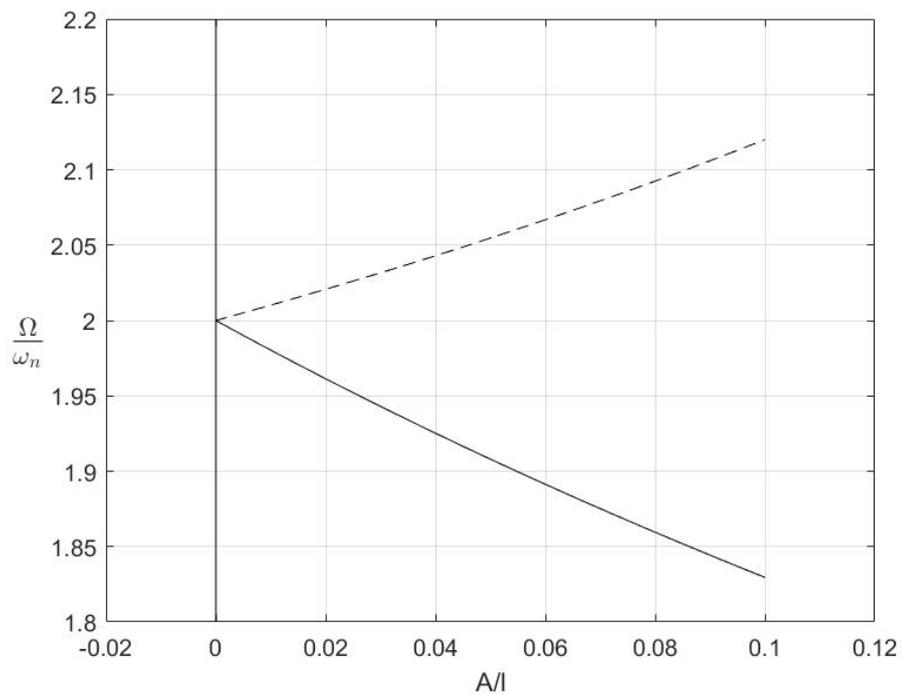
Así, a continuación se presentan los distintos gráficos obtenidos del nuevo mapa de estabilidad. De este mapa se debe destacar los siguientes hechos:

- Como se puede observar en la figura 2.13, al dividir por la raíz cuadrada del valor de  $a$ , se dan dos hechos importantes. Primero que para valores mayores de  $a$ , más abajo están en el nuevo mapa de estabilidad, y segundo que de la misma forma que el orden de los valores se invierten, también pasa con  $a_n$  y  $b_n$ , pues en el nuevo mapa  $b_n$  está siempre encima de  $a_n$  ( $a_n$  es la línea continua y  $b_n$  la línea discontinua)
- Las figuras 2.14, 2.15 y 2.17, están a una misma escala, con el objetivo de mostrar las diferencias de márgenes que se tienen para los valores de  $A/l$  del entorno en el que se van a trabajar. De hecho, en el modo 3 se ha incluido el término de orden 3, pero como se observa, no se ven las dos líneas separadas pues prácticamente son la misma, lo que complica mucho poder hallar dichas inestabilidades en el laboratorio
- Las figuras 2.14, 2.16 y 2.18, se muestran a una escala en la que ocupen casi todo el mapa, y se ve cómo las diferencias de márgenes de unas a otras son muy grandes como se veía ya en la figura 2.13. A pesar de la gran bajada sufrida en el modo 2, da la sensación de que se

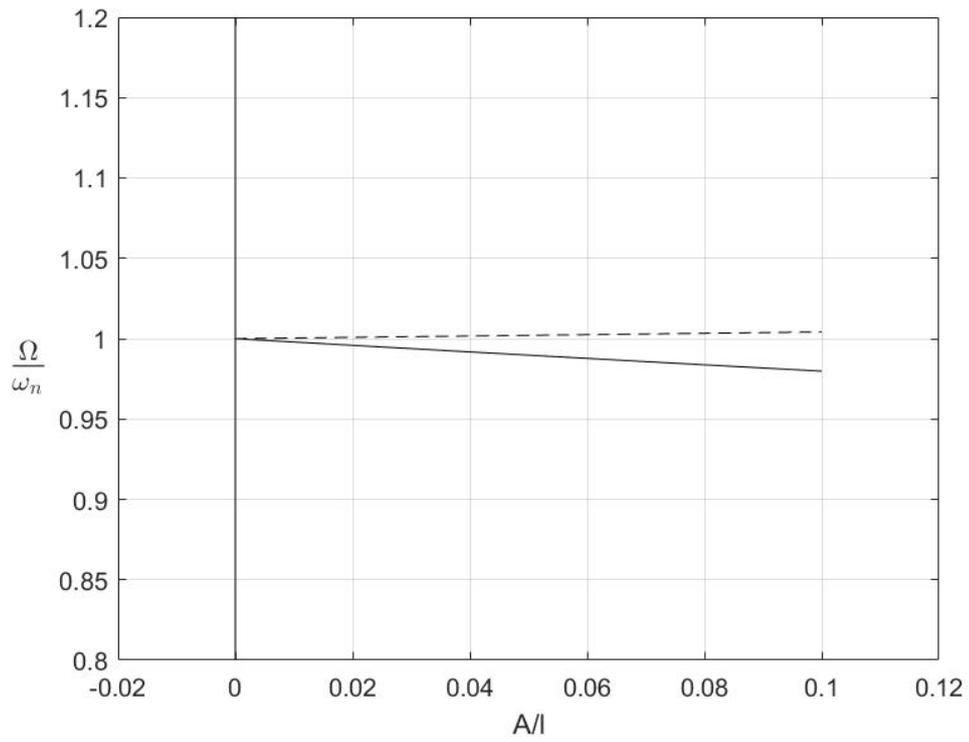
podría encontrar en el laboratorio. Sin embargo, en el modo 3 se ratifica la dificultad pues hay un margen de apenas milésimas



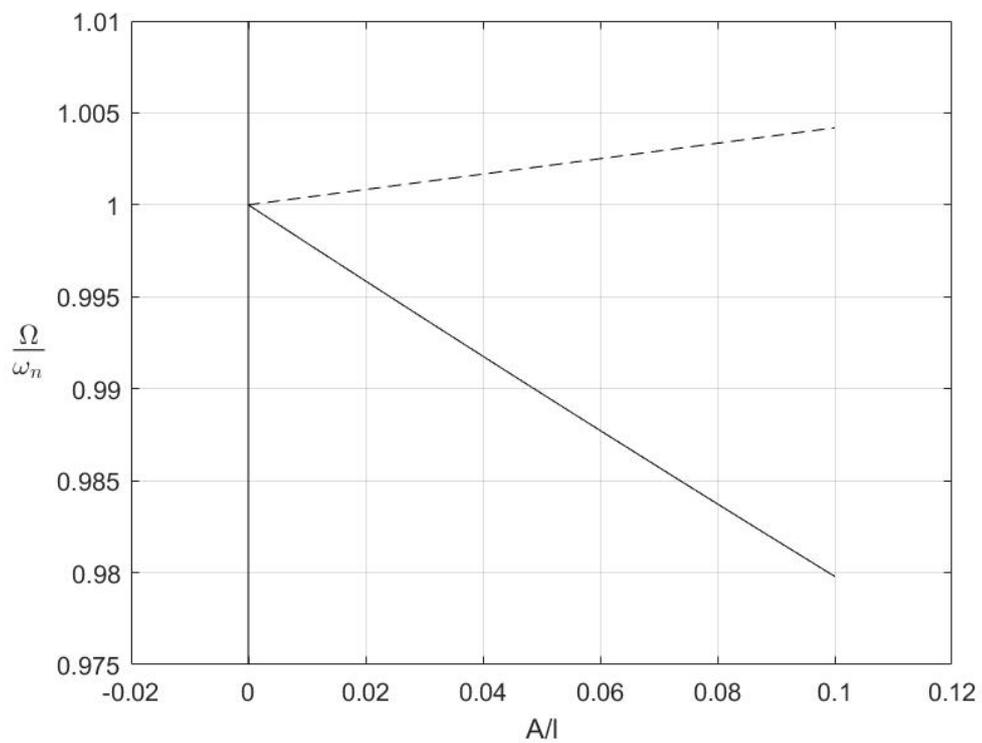
**Figura 2.13** Mapa de estabilidad de nuestro problema.



**Figura 2.14** Mapa de estabilidad modo 1.



**Figura 2.15** Mapa de estabilidad modo 2.



**Figura 2.16** Mapa de estabilidad modo 2 ampliado.

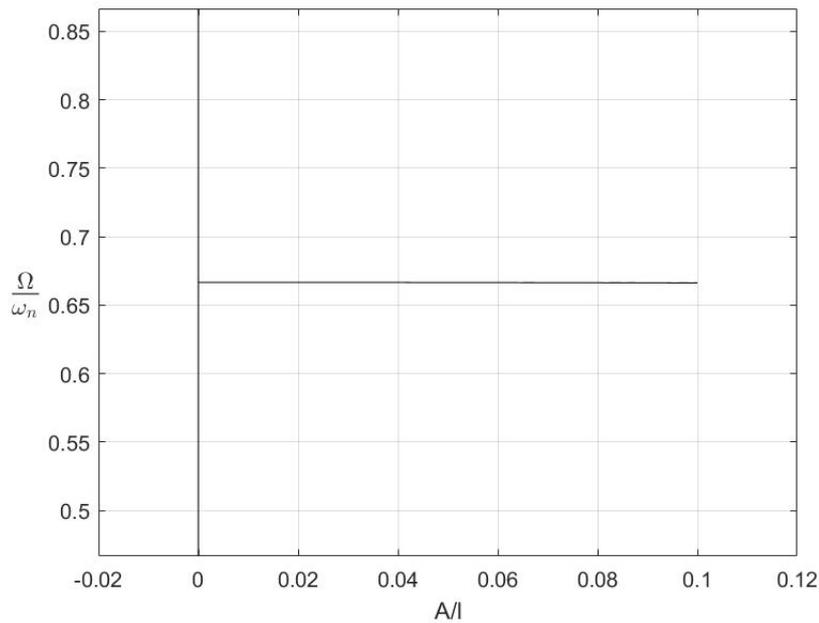


Figura 2.17 Mapa de estabilidad modo 3.

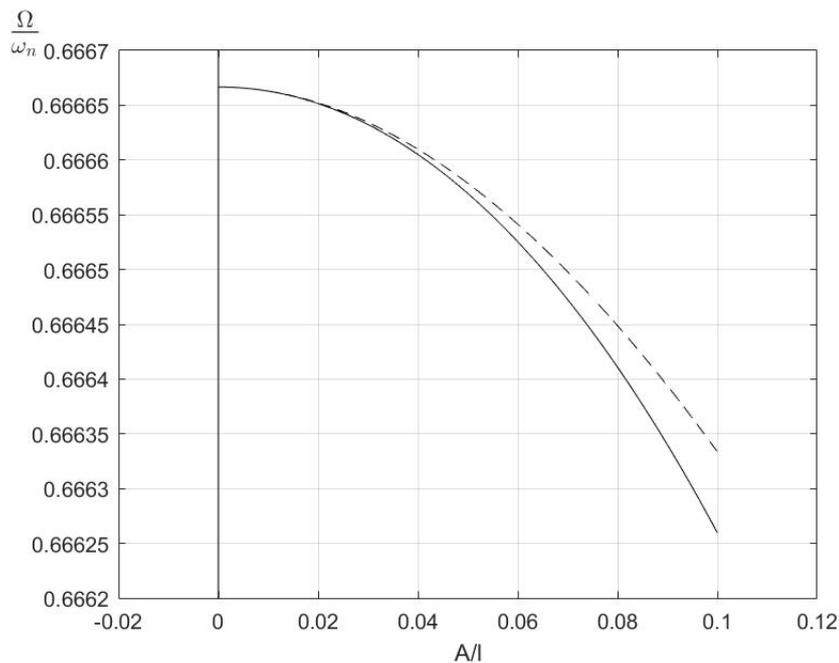


Figura 2.18 Mapa de estabilidad modo 3 ampliado.

### 2.3.1 Resolución por métodos matemáticos

Tras el planteamiento del modelo matemático de nuestro péndulo linealizado se pudo ver de una forma bastante clara que la ecuación obtenida era del tipo de la ecuación de Mathieu. Tras ello se trató de reproducir los resultados del capítulo 20 de *Abramowitz, M. & Stegun* [7] en el que se analiza la ecuación de Mathieu.

En la resolución que se comenta encuentra las zonas de inestabilidades, de forma que para valores pequeños de  $q$  podemos aproximar cada una de estas funciones mediante un desarrollo en serie de

Taylor

$$a = a_0 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots$$

Es decir, que forma un polinomio a partir de una serie de Taylor alrededor de  $q_0 = 0$ . Por tanto, una vez hecho el proceso de fracciones continuadas visto anteriormente tocaba comprobar que efectivamente esta forma de resolución era correcta. Para ello se ha utilizado programación en MATHEMATICA, con la idea de comprobar que se cumplen nuestros resultados. El primer objetivo marcado fue conseguir que nos diera los polinomios comentados anteriormente, para ello se utilizó el siguiente programa (figura 2.19)

```

In[*]:= f[a_, q_, μ_] = μ^2 + a - q^2 (1 / ((μ + 2 I)^2 + a) + 1 / ((μ - 2 I)^2 + a))
Out[*]:= a + μ^2 - q^2 ( 1 / (a + (-2 i + μ)^2) + 1 / (a + (2 i + μ)^2) )

In[*]:= Collect[Series[f[a0 - a1 q + a2 q^2, q, -1], {q, 0, 2}], q]

```

**Figura 2.19** Programa para obtener serie de Taylor.

Este sencillo programa a pesar de que no nos da la solución exacta, sí nos devolvía un polinomio en potencias de  $q$ . y para obtener nuestra solución, teníamos que conseguir que todos los términos que acompañaban a dichas potencias fueran nulos. Los que nos otorgaba los dos primeros coeficientes correctamente pero al hacer los primeros coeficientes nulos aparecían términos que nos impedían averiguar los siguientes. Lo bueno de este método es que en ningún momento nos dio un error de un coeficiente, simplemente costaba mucho averiguar los coeficientes cuando se aumentaban los grados, hasta llegar a expresiones muy complejas.

Para resolver este problema se propusieron una serie de cambios que se presentan a continuación

- Como se puede observar en la figura 2.19 la expresión dada es la obtenida truncando en la primera fracción (se muestra en la sección previa que es la misma). Uno de los primeros cambios fue introducir expresiones con truncamientos más lejanos, pero la realidad es que para los términos que estábamos averiguando un truncamiento mayor no provocó ninguna mejora a la hora de obtener los polinomios.
- Multiplicar por los términos que se anulaban en el denominador y así evitar estos problemas que teníamos. Esta propuesta si fue más eficaz, pero solo para un término más, pues cada vez que el término era de una potencia mayor tenía mas divisiones con denominadores que se anulaban lo que provocaba más necesidad de multiplicaciones. Esto no es problema a la hora de programarlo pues es muy sencillo pero por cada producto nuevo en la función original más se complicaban las expresiones de los distintos términos llevando a hacer esta solución imposible de gestionar

A continuación se muestra otro programa buscando más valores de  $q$  y cómo se complica cuando se aumenta el proceso de fracciones continuadas.

Tras no conseguir obtener los polinomios completos por este método se decidió cambiar la perspectiva de conseguir los resultados directamente a comprobar que la solución obtenida por *Abramowitz & Stegun* [7] verificaba las ecuaciones. Se decidió utilizar el método de Newton para comprobar las ecuaciones, y para ello usamos un único comando nuevo, *FindRoot*. Este comando usa el método de Newton como se ha dicho antes para hallar las soluciones de cualquier ecuación algebraica. Tras probarlo para diferentes modos y en distintos valores de  $q$  se pudo ver que efectivamente las soluciones ya encontradas de la ecuación de Mathieu verificaba que nuestra ecuación y planteamientos eran correctos.

```

In[ ]:= f[a_, q_, mu_] = mu^2 + a - q^2 (1 / ((mu + 2 I)^2 + a - q / ((mu + 4 I)^2 + a)) + 1 / ((mu - 2 I)^2 + a - q / ((mu - 4 I)^2 + a)))
Out[ ]:= a + mu^2 - q^2 (
    1 / (a + (-2 i + mu)^2 - q / (a + (-4 i + mu)^2)) + 1 / (a + (2 i + mu)^2 - q / (a + (4 i + mu)^2))
)

In[ ]:= Collect[Simplify[Series[f[1 + a1 q + a2 q^2, q, I], {q, 0, 6}], q]
Out[ ]:= -8 a1 (a1 - 8 / (1 + 8 a1)) q^2 + ((a1 - 8 / (1 + 8 a1)) (a1^2 - 8 a2) - 8 a1 (1/8 + a2 + a1 + 64 a2 / (1 + 8 a1)^2)) q^3 - 1 / (192 (1 + 8 a1)^3) (-294 912 a1^5 a2 - 512 a1^4 (-1 + 216 a2) + 1 536 a1^3 a2 (119 + 512 a2) + 192 a2 (1 + 520 a2) + 24 a1^2 (1 + 3 048 a2 + 12 288 a2^2) + a1 (1 + 10 752 a2 + 36 864 a2^2)) q^4 + 1 / (36 864 (1 + 8 a1)^4) (-131 072 a1^6 + 32 768 a1^5 (-1 + 13 824 a2^2) + 64 a1^2 (-1 + 576 a2 + 55 296 a2^2) + 2 048 a1^4 (-7 - 384 a2 + 110 592 a2^2) + 128 a1^3 (-11 - 3 072 a2 + 331 776 a2^2) + 192 a2 (-1 - 3 072 a2 + 786 432 a2^2) + a1 (-1 - 6 144 a2 + 2 469 888 a2^2)) q^5 - 1 / (7 077 888 (1 + 8 a1)^5) (12 058 624 a1^7 + 27 262 976 a1^8 + 98 304 a1^6 (57 + 4 096 a2) - 4 096 a1^5 (-215 - 49 152 a2 + 56 623 104 a2^2) - 2 560 a1^4 (-31 - 12 288 a2 + 56 623 104 a2^2) - 576 a1^3 (-7 - 15 360 a2 + 62 914 560 a2^2) - 8 a1^2 (-13 - 76 800 a2 - 21 233 664 a2^2 + 566 231 040 a2^3) + a1 (1 + 19 968 a2 - 21 233 664 a2^2 + 3 340 763 136 a2^3) + 192 (a2 - 7 114 752 a2^2 + 1 207 959 552 a2^4)) q^6
    
```

Figura 2.20 Programa para obtener serie de Taylor 2.

### 2.3.2 Anchura de la zona inestable según Landau [8]

En este documento se detalla que alrededor del doble de la frecuencia natural se puede conseguir un rango en el que el sistema se inestabiliza. Así, para la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0,$$

y buscando una solución con la siguiente forma

$$x = a(t)\cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon)t + b(t)\sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon)t,$$

donde a(t) y b(t) son funciones que varían lento con el tiempo en relación a las funciones trigonométricas. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación

$$-(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{1}{2}h\omega_0 b)\omega_0 \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon)t + (2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{1}{2}h\omega_0 a)\omega_0 \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon)t = 0.$$

Para que esto sea así para cualquier tiempo t, los coeficientes que multiplican tanto al seno como al coseno deben ser nulos. Por tanto se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales para a(t) y b(t). Si se busca un solución proporcional a e<sup>st</sup> se obtendría la siguientes ecuaciones:

$$sa + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{1}{2}h\omega_0)b = 0$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{2}h\omega_0)a - sb = 0,$$

y esto nos dá la siguiente ecuación

$$s^2 = \frac{1}{4}[(\frac{1}{2}h\omega_0 b)^2 - \varepsilon^2].$$

Despejando se obtiene que la resonancia paramétrica ocurre en el rango alrededor de la frecuencia 2ω<sub>0</sub>

$$-\frac{1}{2}h\omega_0 < \varepsilon < \frac{1}{2}h\omega_0$$

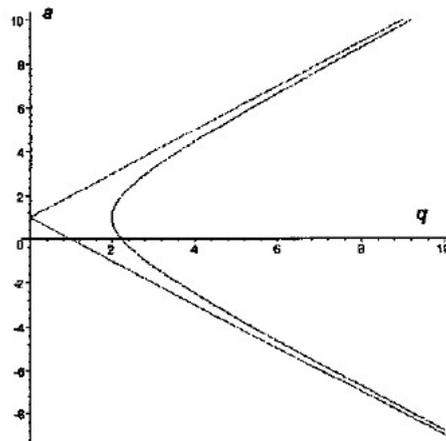
Como se puede observar, el rango es proporcional a h, que es un término relacionado con la

amplitud. Hay que aclarar que  $h \ll 1$ , por tanto el rango será bastante pequeño. Tras esto, introduce la fricción. Como hemos estudiado, el fenómeno de resonancia paramétrica se mantiene en presencia de rozamiento, pero esta zona se estrecha. Este amortiguamiento provoca que la amplitud de las oscilaciones se reduzca con el factor  $e^{-\delta t}$ . Teniendo en cuenta que las oscilaciones aumentaban la amplitud del orden de  $e^{st}$  ahora la amplificación de las oscilaciones en resonancia paramétrica será del orden  $e^{(s-\delta)t}$ . Así, el límite entre la región estable e inestable se resolverá con la ecuación  $s - \delta = 0$ . Pasando al siguiente rango de inestabilidad:

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\delta^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\delta^2}$$

### Conclusiones sobre el amortiguamiento y la anchura de la región inestable

Una de las mayores diferencias entre un sistema con o sin amortiguamiento es que a las frecuencias de los distintos modos (exactas), daba igual la amplitud que tuviera la vibración porque siempre se debía inestabilizar. Sin embargo como se puede observar en la figura 2.21, ahora para amplitudes bajas no habrá ninguna frecuencia que permita que se inestabilice el sistema. Por otro lado, como se puede observar en la figura mencionada anteriormente, 2.14, la región en la que hay que buscar la frecuencia del segundo modo es mucho más pequeña que en el modo 1, y que disminuye más aun con el amortiguamiento.



**Figura 2.21** Línea de separación de zona estable e inestable con y sin amortiguamiento.

# 3 Estudio experimental

---

## 3.1 Montaje

### 3.1.1 Instrumentos para el experimento

El objetivo del experimento es demostrar que la descripción teórica del problema encontrada es correcta. Para ello, el péndulo se ancla a dos puntos distintos del *shaker*, con la idea de que el movimiento del péndulo se produzca únicamente en el plano perpendicular a la línea que une estos dos puntos, evitando un movimiento en 3 dimensiones y ajustando el problema a lo planteado en el modelo matemático.

El *shaker* es el instrumento al que se ancla el péndulo y el que se mueve produciendo la gravedad efectiva variable. Para ello se alimenta con una señal sinusoidal, en la que los parámetros son un voltaje y una frecuencia. Estos parámetros le llegan a través de un generador de ondas y un amplificador. En el generador de ondas se configura señal estableciendo estos dos parámetros, de los cuales el voltaje se multiplica al pasar por el amplificador.

A continuación se describen los aparatos, mostrando sus características y aspectos a considerar.

#### **Shaker TIRA vib S51110**

Como ya se ha comentado previamente el *shaker* es el instrumento que introduce la vibración para el cambio de la frecuencia natural del péndulo. Las características técnicas más relevantes son las siguientes:

- Rango de frecuencias: 2Hz-7kHz
- Masa efectiva que se mueve: 230g
- Máxima tensión admisible: 23V
- Máximo rango de movimientos: 13 mm

De estos datos hay dos fundamentales, el rango de frecuencias y el rango de movimiento. En primer lugar el rango de frecuencias es importante porque como se mostrará entre el estudio de vibración libre y en nuestro desarrollo teórico las frecuencias son del orden de la unidad, y los primeros dos modos son el doble de dicha frecuencia y la misma frecuencia de vibración, por tanto si se quiere encontrar dichos modos en el rango disponible del shaker habrá unas condiciones específicas de longitud (bastante cortas para encontrar las dos primeras inestabilidades). El segundo gran límite se encuentra en el rango de amplitudes, que es el segundo parámetro a controlar del experimento, que no puede sobrepasar tampoco el máximo rango de movimientos del *shaker*, lo que nos limitará el número adimensional  $q$ , como más adelante veremos.



Figura 3.1 Montaje del shaker.

#### **Amplificador TIRA modelo BAA 120**

El amplificador no supone un problema en ninguno de los casos para el desarrollo del proyecto, lo único que fue un problema al principio es que no tiene posiciones fijas para amplificar, no hay doble, triple, etc. De esta forma, el lugar donde situábamos el grado de amplificación era continuo, y no podíamos estar seguros de usar siempre el amplificador con las mismas características. Para resolverlo se puso un tope en un punto concreto, de tal forma que al encenderlo movíamos la rueda que nos daba el factor de amplificación hasta el punto donde el tope no permitía un giro mayor, y ese fue nuestro punto de referencia. De esta forma, la amplitud de la señal que alimenta al shaker de controló exclusivamente con el generador de funciones.

#### **Generador de ondas Agilent 33500B Series**

El generador de ondas, al igual que el amplificador, no genera ningún problema a la hora de realizar el experimento. Se puede conseguir cualquier frecuencia con una precisión de 1mHz y se puede poner voltajes que cubren todo el rango del experimento también con precisión de 10mV.

#### **Apoyo de la cámara**

Por último, ajeno al movimiento del péndulo pero muy necesario para la realización del proyecto y el análisis de los resultados esta la torre donde se apoya la cámara (figura 3.5). Como se puede observar situamos una torre atornillada a la mesa en una posición en la que el péndulo oscila de



Figura 3.2 Shaker.



Figura 3.3 Amplificador.

forma perpendicular al objetivo de la cámara como es deseable. Por otro lado, como se puede ver en la imagen, a la torre le pusimos una base que se podía ajustar a la altura que quisiéramos según se hiciera las pruebas para un péndulo más largo o más corto, siendo el objetivo que quedara aproximadamente a la altura de la bola. Así, para acabar con las partes importantes del apoyo tenemos que la base es móvil en la misma dirección de las oscilaciones. Esto se consideró así para poder ajustar de una manera más exacta la alineación entre el plano que forman los hilos y el objetivo de la cámara.

Al final, a la hora de la experimentación, el lugar donde se atornilló la base y el lugar donde se situaba en el plano horizontal quedó totalmente definido desde el primer momento ya que el plano de los hilos siempre iba a ser el mismo aunque cambiara su longitud, sin embargo la altura del apoyo si que ha sido diferente para los casos bajo estudio y ha sido el único cambio que se ha producido en el apoyo a lo largo de la experimentación.

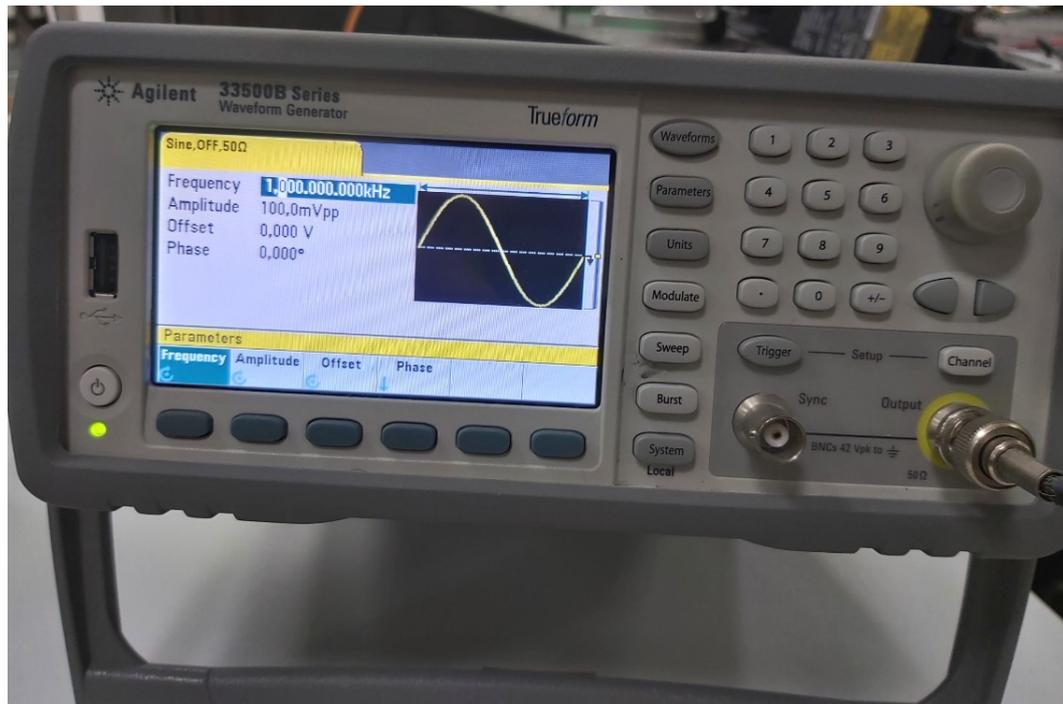


Figura 3.4 Generador de ondas.



Figura 3.5 Apoyo para la cámara.

## 3.2 Experimentación en vibración libre

De forma previa a vibrar el soporte y comprobar si la solución es correcta hacía falta obtener las características de nuestro péndulo en vibración libre. Es decir, se deja que el péndulo esté balanceando sin una fuerza externa ni cambios de parámetros. De esta forma se obtiene tanto el amortiguamiento como la frecuencia natural. Este experimento se realiza para distintas longitudes del péndulo, y se muestra al final las gráficas de cómo varía para distintas longitudes tanto con los resultados de forma discreta como con una interpolación para saber cuales son los resultados para cualquier longitud

**Tabla 3.1** Frecuencias naturales.

Longitud (mm)	Periodo (s)	Frecuencia (Hz)	$\omega$ (rad/s)
231.5	0.9647	1.0366	6.513
251.2	1.0034	0.9966	6.262
268.2	1.0382	0.9632	6.052
292.1	1.0831	0.9233	5.801
305.6	1.1111	0.90	5.654

intermedia. Por otro lado también se concluye que si el amortiguamiento es suficientemente grande como para variar la frecuencia de oscilación respecto a la natural apreciablemente.

Lo primero que se necesitó fue hallar de una forma precisa la longitud del péndulo. Para ello se hizo en varios pasos

1. Se quitó el péndulo y se elevó un elemento que está conectado al shaker y puede medirse su posición vertical hasta que tocara ligeramente el shaker (h). Este elemento que sube y baja con un mecanismo muy sencillo se va a denominar a partir de aquí como soporte de medición.
2. Se baja el soporte de medición hasta abajo del todo.
3. Se sitúa el péndulo, enganchado por los dos tornillos a una longitud por determinar
4. Se eleva el soporte de medición hasta que roce el péndulo y se vuelve a tomar la medida del mismo (h').
5. La longitud del péndulo aproximada es  $l = h - h'$ .
6. Se le resta una cantidad constante a cada uno, que será aproximadamente el radio de la esfera, pues es donde se reúne casi toda la masa (despreciando la masa del hilo) y por tanto así se obtendría el centro de gravedad del péndulo

De esta forma obtuvimos datos para 5 longitudes de péndulos con los que se buscaba conseguir tanto la frecuencia natural como el amortiguamiento.

### 3.2.1 Frecuencia natural $\omega_0$

Como se muestra en el capítulo de teoría de vibraciones, la frecuencia natural se define de la siguiente manera:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Para hallar la frecuencia natural simplemente hay que dejar que oscile libremente y hallar el periodo de oscilación. Para que el dato fuera más fiable ya que no teníamos cámaras de alta velocidad se cogen varios periodos (en concreto 10) para calcular el tiempo que tarda en realizarlas. Lo que se consigue es dividir el error del periodo entre ese número de oscilaciones completas, siendo el dato obtenido finalmente mucho más fiable. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.1.

En la figura 3.7 unas cruces azules muestran las frecuencias naturales del péndulo recogidas experimentalmente. Mientras que la línea verde muestra la siguiente ecuación

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{1000l}}.$$

Como se puede observar es la fórmula para hallar la frecuencia natural de un péndulo donde g es la gravedad, l es la longitud entre el anclaje del péndulo y el centro de gravedad del mismo, y el factor 1000 sirve para cambiar de mm a m. Para este caso se ha tomado una gravedad de  $9.8m/s^2$



Figura 3.6 Regla acoplada al shaker para tomar medidas.

### 3.2.2 Amortiguamiento

Para comenzar con el estudio el primer parámetro que conseguimos fue el amortiguamiento. Se utiliza el método del decremento logarítmico [1], que se basa en medir el ratio de caída de las oscilaciones a lo largo del tiempo. La solución general de una vibración amortiguada es,

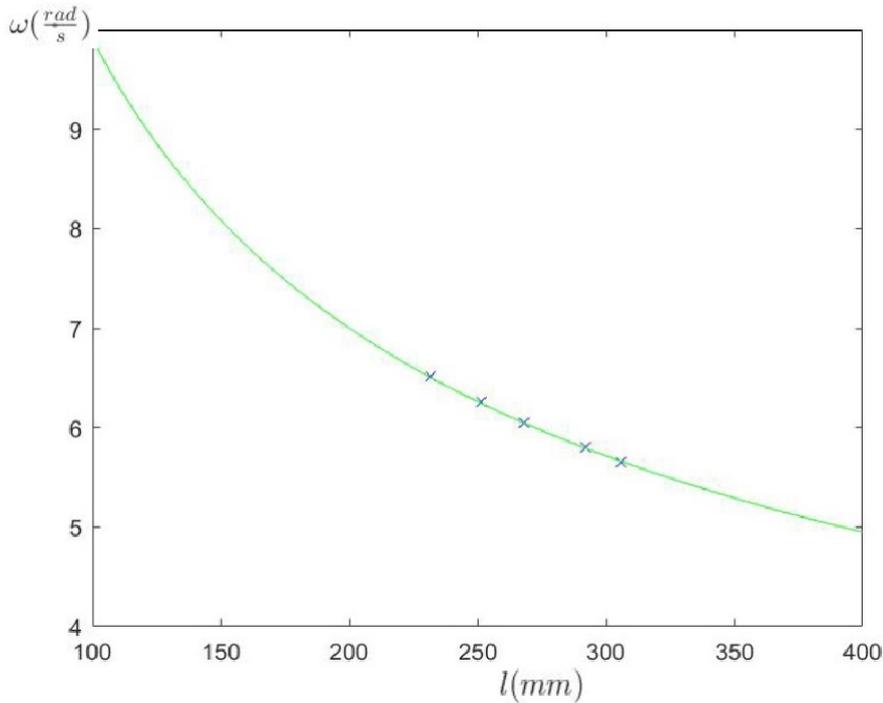
$$x = X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \phi),$$

donde  $\phi$  es la fase inicial de la oscilación y la  $X$  la amplitud inicial del movimiento. El decremento logarítmico  $\delta_{dec}$  sirve para hallar cómo varía las oscilaciones de una a otra en amplitud,

$$\delta_{dec} = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \phi)}{X e^{-\xi \omega_0 (t + \tau_d)} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 (t + \tau_d) + \phi)},$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  es el valor de la amplitud en dos oscilaciones consecutivas, y  $\tau_d$  es el periodo de oscilación natural del péndulo. Como el valor del seno no varía al pasar de un periodo a otro,  $\delta_{dec}$  tiene la siguiente expresión:

$$\delta_{dec} = \ln \frac{X e^{-\xi \omega_0 t}}{X e^{-\xi \omega_0 (t + \tau_d)}} = \ln e^{\xi \omega_0 \tau_d} = \xi \omega_0 \tau_d$$



**Figura 3.7** Frecuencia natural en función de la longitud del péndulo.

Así,  $\delta_{dec}$  no es un parámetro que esté en las ecuaciones que se han estudiado en el capítulo 2. Pero sí está  $\xi$  que se relaciona fácilmente con nuestro  $\delta_{dec}$  ya encontrado. En la gráfica 3.8 tenemos dos líneas, la línea recta y roja es una aproximación y tiene como ecuación  $\delta = 2\pi\xi_{aprox}$ . Mientras que la azul a tramos es la real y tiene la siguiente ecuación

$$\delta_{dec} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Para el rango de amortiguación en el que nos movemos, con la aproximación es suficiente. Sin embargo, llegado al punto en el que estamos, sabiendo como calcular el amortiguamiento se explica el porque de la dificultad que entraña este proceso en este proyecto en concreto. Como ha sido explicado previamente, para obtener el amortiguamiento, se tiene que dividir la amplitud de dos oscilaciones consecutivas, pero al no tener una cámara de alta velocidad solo podemos dividir entre las amplitudes máximas que capta la cámara, no es la real (aunque si bastante próxima). Por otro lado, al igual que en el método usado en el cálculo de la frecuencia natural, se pueden obtener las amplitudes de oscilaciones no consecutivas, y adaptar la fórmula obteniendo la siguiente

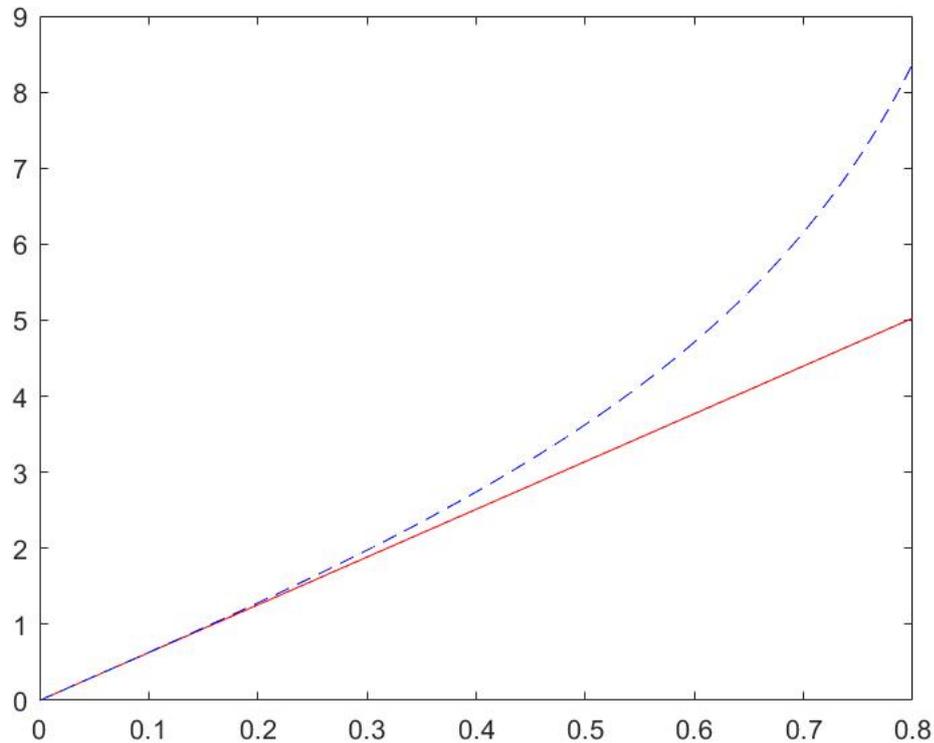
$$\delta_{dec} = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_n},$$

que con nuestros resultados nos da un valor de  $\delta_{dec} = 8.22 \cdot 10^{-3}$ . De este modo al obtener  $\xi$  con la fórmula aproximada

$$\delta_{dec} = 2\pi\xi_{aprox} \rightarrow \xi = 0.0013.$$

Como se puede observar, el valor de  $\xi$  es muy bajo, aproximadamente 3 órdenes de magnitud menor a la unidad, lo que provoca que la aproximación sea correcta.

Sin embargo, a continuación se van a mostrar los motivos por lo que los cálculos no son fiables (no es que los órdenes no sean correctos, que lo son, pero no son demasiado exactos más allá de que el orden de magnitud siempre oscila en ese rango).



**Figura 3.8** Hallar  $\xi$  en función de  $\delta_{dec}$ .

- En primer lugar, se considera que los fotogramas obtenidos no son realmente aquellos en los que se alcanza la amplitud máxima, sino una posición muy cercana, pero con una cámara de mayor resolución temporal sería más preciso.
- Al hacer las grabaciones la cámara está centrada de tal forma que el hilo, que forma un plano perpendicular, está alineado con el objetivo de la cámara, como se puede observar en la imagen 3.9. Esto provoca que haya una deformación angular cuando está en amplitud máxima. Al ser pequeñas oscilaciones y no salirse mucho del centro de la imagen no genera un gran problema, pero sí es uno añadido.
- La consecución de estos problemas ha provocado que al calcular los diferentes coeficientes de amortiguamiento todos salgan del orden de magnitud previamente dicho pero no siguen un patrón, sino que oscilan alrededor de  $10^{-3}$ .

Tanto en el experimento de vibración libre como experimentando con el *shaker* se intentó usar un tratamiento de imágenes para conseguir una mayor precisión pero al no tener un fondo uniforme no fue posible.

### 3.3 Experimento con *shaker*

#### 3.3.1 Amplitud de vibración del *shaker* como función de la amplitud y frecuencia de la señal de alimentación.

Como se ha escrito previamente el experimento está formado por un generador de ondas y un amplificador que introducen una señal en el *shaker* del tipo



**Figura 3.9** Centrado cámara.

$$V(t) = A \cos(\omega t).$$

La plataforma del shaker donde se ancla el péndulo describe un movimiento vertical también sinusoidal, cuyos parámetros (amplitud y frecuencia) se relacionan con los de esta señal de tensión. La idea es hacer un mapa biparamétrico interpolado a partir de ciertos datos. Para ello se ha estudiado la en una posición fija del amplificador cuál es la amplitud que produce el *shaker* para un voltaje y una frecuencia dada. El ajuste biparamétrico constituirá el calibrado que permite traducir la amplitud y frecuencia del voltaje de alimentación del shaker en amplitud y frecuencia de su desplazamiento vertical. De estos dos parámetros resultantes, la frecuencia coincide con la de la alimentación, pero la amplitud depende de manera no trivial de ambos.

La primera idea fue ensayar una ley del tipo

$$A = kV^n f^m,$$

siendo  $k$  una constante a calcular. Evidentemente, por los mismos problemas que teníamos antes en experimentación con vibración libre lo tenemos aquí, ya que es muy complicado conseguir mediante imágenes averiguar cual es la amplitud de cada prueba.

Como solución a este problema utilizamos un deformímetro como el que se puede observar en la figura 3.10. La idea para poder llevar a cabo esta parte experimental fue la siguiente:

1. Para comenzar se sube el deformímetro gracias al soporte usado en la medición y a un apoyo hasta que toca el *shaker*. Este instrumento tiene una sensibilidad de aproximadamente 0.01mm por lo que el contacto se nota instantáneamente.
2. Tras ello se baja 0.5mm la posición del deformímetro y se comienza a utilizar el shaker. Para una frecuencia dada, que se estudia entre los 2Hz (frecuencia mínima de vibración del *shaker*) hasta los 10 Hz, se comienza por el valor mínimo de voltaje a usar, que en nuestro caso es de 100mV (voltaje con el que a ninguna frecuencia fijada llega a tocar el deformímetro).



**Figura 3.10** Deformímetro.

**Tabla 3.2** Valor  $V_{pp}$  en función de la amplitud y la frecuencia.

<b><math>V_{pp}</math> (mV)</b>	<b>Frecuencias (Hz)</b>								
<b>Amplitud (mm)</b>	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
0.50	1470	1480	1480	1490	1500	1550	1570	1580	1600
1.00	2970	2990	2990	2990	3020	3100	3140	3160	3220
1.50	4520	4560	4590	4610	4670	4680	4730	4740	4790

3. Para una frecuencia de 2 Hz, se sube de 100mV en 100mV hasta que entre en contacto con el deformímetro. Una vez que lo toque, la aguja se empezará a mover muy levemente y asignaremos ese voltaje a una deformación de 0.5 mm, con mucha precisión.
4. Tras conseguir el contacto se vuelve al voltaje previo a tocar el deformímetro y se avanza de 10mV en 10mV hasta que vuelve a tocar, de esta forma se puede conseguir cada voltaje con una precisión de una centésima de voltio.
5. Una vez hecho esto para cada frecuencia se sube la amplitud 0.5 mm más y se repite el proceso. Esto se hizo hasta los 2mm, aunque se puede continuar ampliando más los márgenes de amplitud.

A continuación se muestra tanto la tabla de datos 3.2, obtenidos como las conclusiones de esta sección.

- El exponente del voltaje resulto ser  $n=1$ , es decir, la amplitud es proporcional al voltaje. Como se muestra en la tabla, los valores al aumentar la amplitud aumentan en voltaje con el mismo

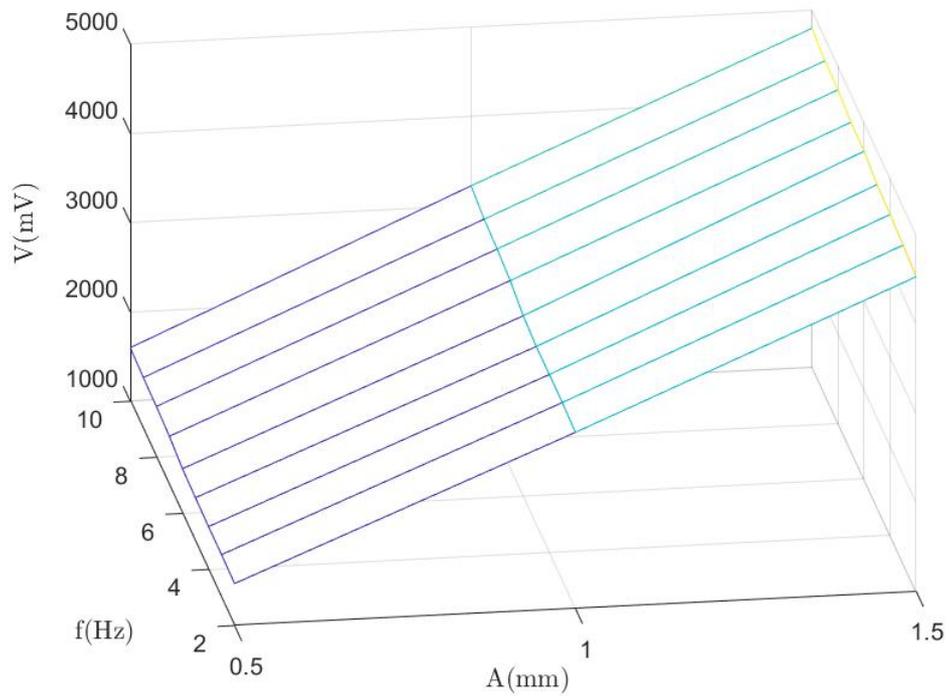


**Figura 3.11** Montaje con deformímetro.

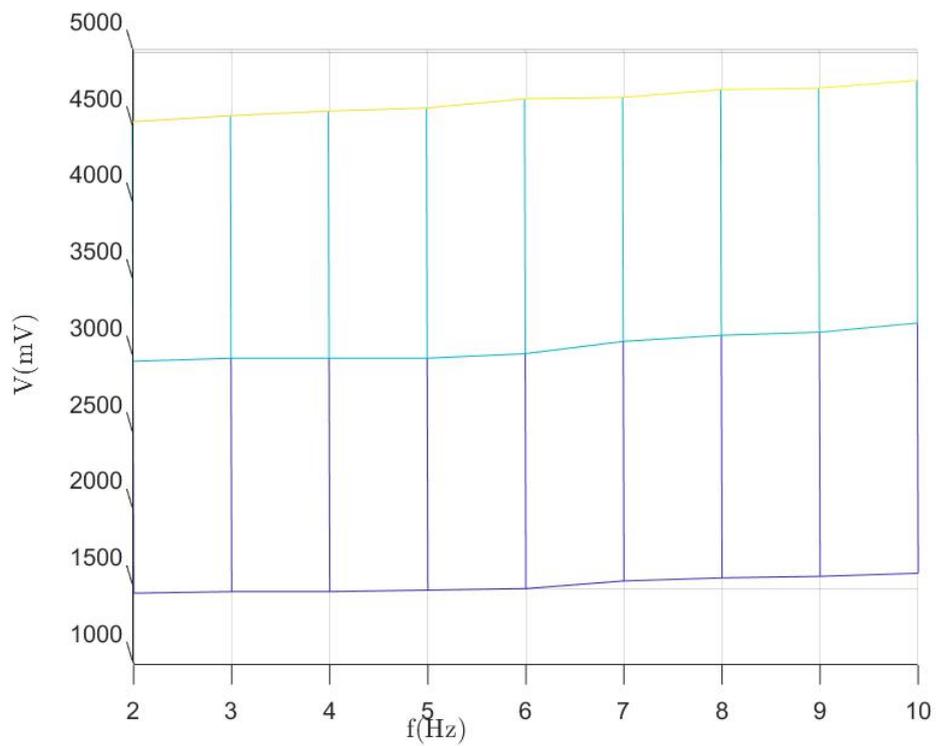
factor. A pesar de que los resultados no son exactos, si se ve con facilidad que la amplitud y el voltaje son directamente proporcionales.

- El exponente de la frecuencia  $m$  es desconocido, no se ha encontrado una ley funcional que nos diga cómo varía, lo que provoca que tampoco se pueda encontrar  $k$ . La realidad es que crece con el aumento de la frecuencia pero no es de forma regular ni consistente. Como alternativa, podemos estimar con cierta precisión la correspondencia entre voltajes y amplitudes de oscilación, para una frecuencia dada, mediante una interpolación a partir de los datos de la tabla 3.2.
- Las amplitudes necesarias para el proyecto son bastante altas, alcanzándose los 6.5 mm de amplitud, pero como el trabajo se ha hecho en función del voltaje en vez de la amplitud no ha sido necesario llegar a esas cotas, sino que se ha hecho en función del voltaje. Este dato será necesario para obtener las curvas de separación de la zona estable e inestable  $s - \delta$  en los experimentos futuros.
- Las frecuencias de trabajo llegan a los 4 Hz como mucho para péndulos de pequeña longitud. Y apenas a 2 Hz en las de gran longitud, por tanto ampliar más el espectro para este experimento en concreto no es necesario aunque se ha hecho para que el rango de datos fuera suficiente.
- Entre las posibles soluciones está encontrar un *shaker* que permita frecuencias de trabajo más bajas y así el estudio de modos mayores o cambiar el péndulo para que las frecuencias

de los modos sean más altas.



**Figura 3.12** Voltaje pico pico -  $V_{pp}(A,f)$ .



**Figura 3.13** Voltaje pico pico -  $V_{pp}(f)$ .

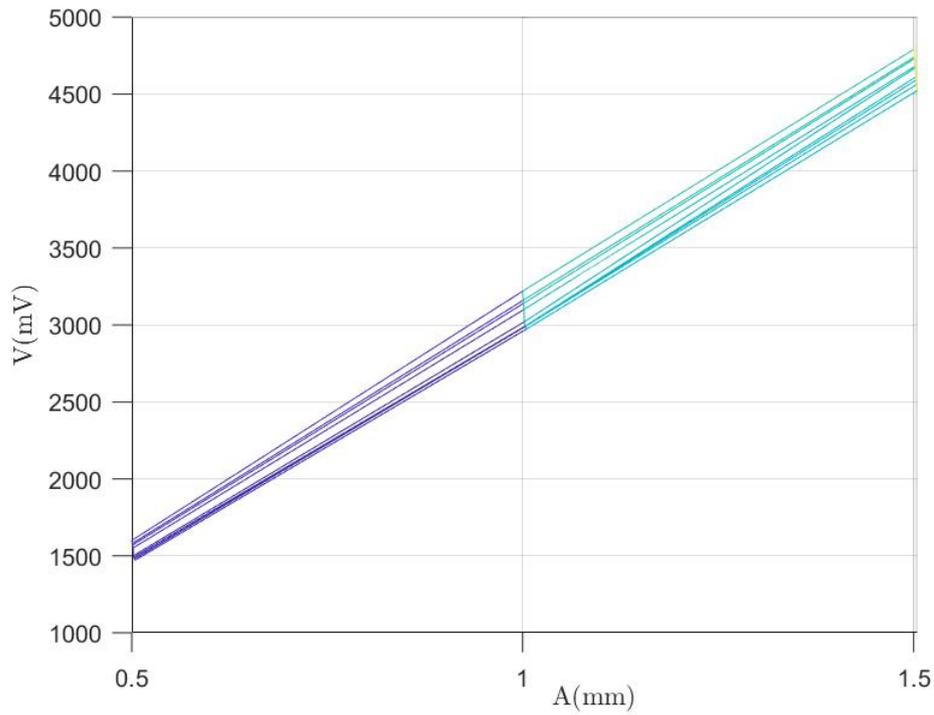


Figura 3.14 Voltaje pico a pico -  $V_{pp}(A)$ .

### 3.3.2 Estudio de modos de inestabilidad

Para comenzar se van a mostrar los casos de dos péndulos distintos, con dos longitudes distintas en los que se han basado esta sección (figuras 3.15 y 3.16). De esta manera tenemos dos péndulos

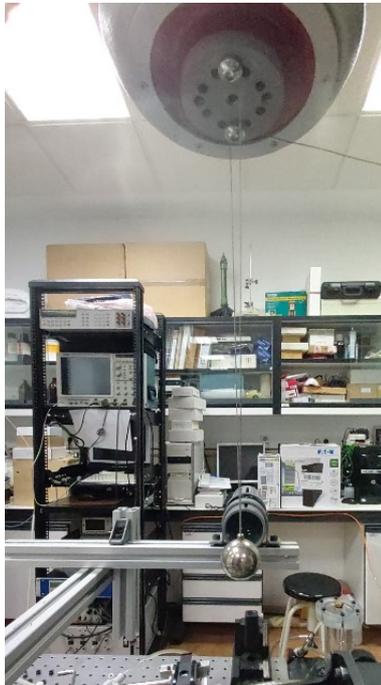


Figura 3.15 Péndulo de longitud larga.



**Figura 3.16** Péndulo de longitud corta.

**Tabla 3.3** Frecuencias teóricas de modos de vibración.

Frecuencia natural (Hz)	Modo 1 (Hz)	Modo 2 (Hz)	Modo 3 (Hz)
1.025	2.05	1.025	0.683
2.01	4.02	2.01	1.34

con diferentes frecuencias naturales. A continuación se muestra la tabla con las frecuencias de los distintos modos.

A la vista de la tabla 3.3 se puede comprobar que en los péndulos de longitud grande solo se puede encontrar las zonas de inestabilidad del modo 1, pues el modo 2 tiene una frecuencia en la que el *shaker* no puede trabajar. Por ello se muestra también el péndulo de longitud corta, que tiene una frecuencia natural de 2.01 Hz (frecuencia que coincide con la del modo 2) estando al límite para la búsqueda de este segundo modo.

Por supuesto, no es necesario comentar que el modo 3 y los siguientes no se incluyen en el trabajo pues no entran en rango, además de ser zonas muy estrechas según nuestro mapa de inestabilidades por lo que sería prácticamente imposible incluso si el *shaker* nos permitiera alcanzar dichas frecuencias.

Tras aclarar que la búsqueda de los modos de estabilidad se centran en los dos primeros se muestra a continuación los pasos seguidos en el experimento.

1. Colocación del péndulo. Se fija el péndulo en una posición adecuada, cuidando que la longitud esté dentro de los parámetros buscados y que queden alineados los puntos de anclaje.

2. Estudio de la frecuencia natural. Como se ha mostrado en el capítulo de experimentación en vibración libre se estudia su frecuencia natural comprobando si es la idónea para la realización del experimento.
3. Se registra el dato de la frecuencia natural y se calcula la frecuencia de los dos primeros modos de acuerdo con nuestro mapa adaptado de Mathieu, en los puntos de corte con el eje vertical.
4. Se estudia el primer modo de vibración. En concreto se hace un barrido desde la frecuencia del modo bajo estudio con la mayor amplitud posible, reduciéndose hasta que deje de inestabilizarse. Esto equivale a moverse hacia el eje vertical en el mapa siguiendo una línea horizontal.
5. Volviendo a la frecuencia del modo 1 y a la amplitud máxima se hace un barrido en frecuencias para observar cual es el rango de frecuencias en el que se mantiene en zona inestable. Esto equivale a moverse casi verticalmente en el mapa, explorando la anchura de la zona inestable. No es una línea estrictamente vertical porque la amplitud de la perturbación depende de la frecuencia a través de la expresión  $\Omega^2 A/l$
6. Anotar otras características y propiedades del primer modo.
7. Búsqueda de la inestabilidad en el modo 2 si la frecuencia a la que necesita el péndulo entra en el rango del *shaker*, es decir, solo para péndulos de longitud corta.

Antes de mostrar los resultados es conveniente aclarar qué se ha considerado como límite para interpretar que el péndulo es inestable. Este límite está en observar un incremento apreciable en la amplitud de las oscilaciones del péndulo en un tiempo base de 5 minutos. En caso de dudas se ha llegado a dejar 10 minutos.

#### Estudio del péndulo de gran longitud

Como ya se ha comentado en esta sección se va a hacer el estudio del péndulo de frecuencia **1.025 Hz**. Al ser el péndulo de longitud larga el estudio va a ser exclusivo del primer modo de inestabilidad, puesto que estamos fuera del rango de funcionamiento del *shaker*.

##### - Voltaje mínimo de inestabilidad

Como se describió en la sección 3.2.4, aunque en ausencia de rozamiento, con una amplitud infinitesimal se debería inestabilizar el péndulo, la realidad es que todo sistema realmente tiene algún tipo de rozamiento que impide que esto pase. Por ello es necesario encontrar la amplitud mínima que vence a dicho rozamiento, como se podía observar en la figura 2.21. Para ello el estudio empezó con un voltaje de 9V que se fue reduciendo 0.5V cada vez. En las primeras pruebas no fue necesario alcanzar los 5 minutos pues la inestabilidad llegaba muy pronto y se podía observar perfectamente. Se continuó bajando hasta que con 4.5V no llegaba a inestabilizarse. Una vez llegado a este momento se volvió a los 5V para reducir de 50 mV en 50mV, obteniendo que **límite se encontraba en 4.70 V**.

##### - Rango de frecuencias con voltaje máximo

En este punto se ha hecho un estudio para el voltaje inicial (9V) y a partir de la frecuencia del modo (2.05 Hz) y se ha elevado y disminuido la frecuencia de vibración. Al hacer el estudio se consiguió observar que el **rango de frecuencias admisible era 2.02-2.07 Hz**.

Como se puede observar el rango es muy pequeño. Al máximo voltaje en estudio apenas hay 50 mHz entre el límite superior y el inferior. De esta parte del experimento se han sacado dos conclusiones.

- El rango de frecuencias no está centrado en la frecuencia del modo 1, lo que hace pensar que realmente la frecuencia natural sea algo distinta. Si el rango es exacto la frecuencia natural debería ser 1.0225 Hz. Al final aunque no sea exacto si que se comprueba que el método usado tiene un error muy pequeño, según esta estimación sería de apenas 2,5 mHz.
- Por otro lado es muy destacable que el rango de frecuencias sea tan pequeño, esto se debe a que los valores del parámetro  $q$  apenas alcanza valores de 0.03 (la amplitud del movimiento se estima de 1.3 cm que es el rango máximo de movimiento del *shaker* frente a los aproximadamente 30 cm que se ha estudiado que tiene el péndulo largo). Si se relaciona este dato con las imágenes 2.13, 2.15 y 2.16, el rango de frecuencias en el segundo modo disminuye entre 5 y 10 veces el mismo, por tanto el rango se quedaría en apenas 10 mHz.

Según lo visto en la sección 2.3.2, el margen arriba y abajo de la frecuencia  $2\omega_0$  es  $\varepsilon$  donde este toma el siguiente valor,

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\delta^2}.$$

Tomando el valor de  $\delta$  encontrado en el apartado "*Estimación de  $\delta$  y  $s$* ", se hacen los cálculos de  $\varepsilon$ . Para ello se toma como longitud de péndulo 22 cm, obteniéndolo de la ecuación de la figura 3.7. Por otro lado, extrapolando de la tabla 3.2, la amplitud del movimiento del soporte es de 3 mm cuando se llega a un voltaje  $V_{pp} = 9V$ .

$$h = 4\frac{A}{l} = 4\frac{3\text{ mm}}{220\text{ mm}} = 0.0545.$$

Por tanto,

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{2} 0.0545 1.0225\right)^2 - 4 0.111^2} = 0.017 \text{ Hz} = 17 \text{ mHz}$$

Así, los resultados del valor de  $\varepsilon$  para la parte teórica y para la experimental son:

- Estudio teórico:  $\varepsilon_t = 17 \text{ mHz}$
- Estudio experimental:  $\varepsilon_e = 25 \text{ mHz}$

Como se puede observar, a pesar de no ser el mismo rango exactamente la estimación es muy parecida, sabiendo que ninguna de las dos soluciones son exactas.

- Variación de los tiempos de inestabilización

Si estamos en una posición centrada de la zona de inestabilidad la desestabilización se producirá más rápido, y según nos vayamos acercando a los límites que separan la zona de estabilidad de la de inestabilidad se irá ralentizando, de forma que la curva vista en la figura 3.17 sería aquella en la que nunca se inestabilizaría pero tampoco decaerían las amplitudes.

Este hecho se da porque la solución periódica está multiplicada por el factor  $e^{(s-\delta)t}$  donde  $s$  es un parámetro dependiente de la frecuencia y la amplitud del *shaker* y  $\delta$  es un parámetro dependiente de la fricción. Así, cuanto más nos acercamos a la línea que separa la zona de estabilidad de la de inestabilidad más pequeño se hace la exponencial y más lento crece, y cuanto mas se aleja más rápido pasa.

Evidentemente, y aunque no es el objetivo principal de este punto, está claro que si  $s < \delta$  estamos en la zona de estabilidad, y si  $s = \delta$  obtenemos la línea que separa las dos regiones.

Como se puede observar en las imágenes 3.18, 3.19, 3.20 y 3.21, a mismos tiempos de experimentación, la amplitud es mucho mayor para las frecuencias del centro del rango que para las de las zonas extremas, siendo las condiciones iniciales las mismas.

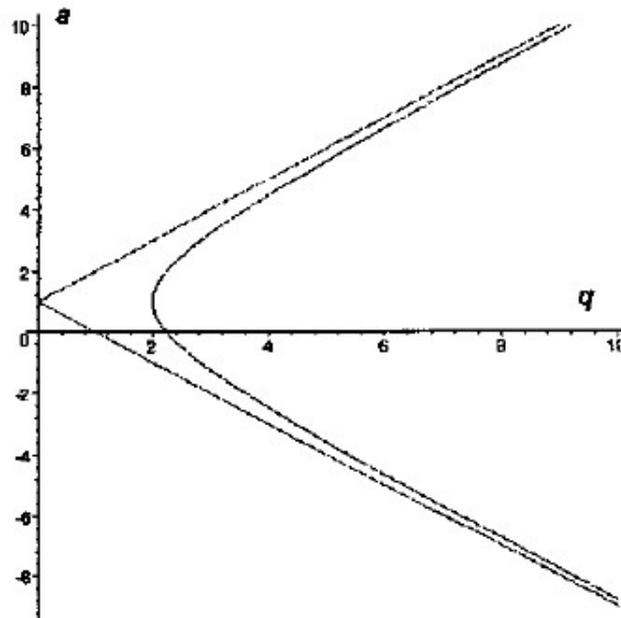


Figura 3.17 Zona estable e inestable con amortiguamiento.



Figura 3.18 Amplitud con frecuencia 2.02 Hz a los 70 s.

- Saturación por no linealidad

La saturación por no linealidad es un fenómeno que se produce cuando las amplitudes de oscilación son grandes. El modelo se basa en linealizar la ecuación del péndulo, de acuerdo con la sustitución

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin(x) = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$



**Figura 3.19** Amplitud con frecuencia 2.04 Hz a los 70 s.



**Figura 3.20** Amplitud con frecuencia 2.05 Hz a los 70 s.

Así, la solución de la segunda ecuación solo es válida cuando las oscilaciones tienen un ángulo pequeño.

La consecuencia de este hecho es que nuestra solución va a ser suficientemente aproximada para pequeñas oscilaciones, pero cuando estas aumentan se satura y la solución deja de ser válida, lo que provoca una caída de la amplitud de la misma. Además, se ha observado que cuando las amplitudes



**Figura 3.21** Amplitud con frecuencia 2.07 Hz a los 70s.

caen lo suficiente y vuelven a estar en un rango aceptable de nuestra hipótesis, vuelve a conseguir ampliar dichas oscilaciones hasta que se vuelve a saturar, convirtiéndose en un proceso cíclico. Este hecho es particular, pues no se ha dado en todas las ocasiones, ya que también se ha dado que al saturarse mantenga una amplitud aproximadamente constante. Estos hechos ponen de manifiesto que la dinámica no lineal es muy rica. De hecho, los análisis teóricos y numéricos que se pueden consultar en la literatura relativos al péndulo paramétrico ponen de manifiesto que este sistema puede mostrar un comportamiento caótico [11].

El fenómeno de saturación se da cuando  $s - \delta > 0$ , es decir, en la zona de inestabilidad. Cuanto mayor sea esa diferencia (más en el centro está de la zona de inestabilidad), mayor es la amplitud que se alcanza en la saturación.

- Estimación de  $\delta$  y  $s$

En esta última característica del péndulo se muestra el método para hallar tanto  $\delta$  como  $s$ . Una vez visto en la sección 2.3.4, en el apartado de Landau [8], se puede observar que el péndulo en vibración libre es una solución periódica con un decremento de la amplitud al estar multiplicado el factor de decaimiento exponencial  $e^{-\delta t}$ . De la misma forma, al añadirle la oscilación del soporte, la solución periódica se multiplica por  $e^{(s-\delta)t}$ . Para  $s > \delta$  el soporte provoca un movimiento inestable en el péndulo. Para comenzar se muestra cómo hallar  $\delta$ :

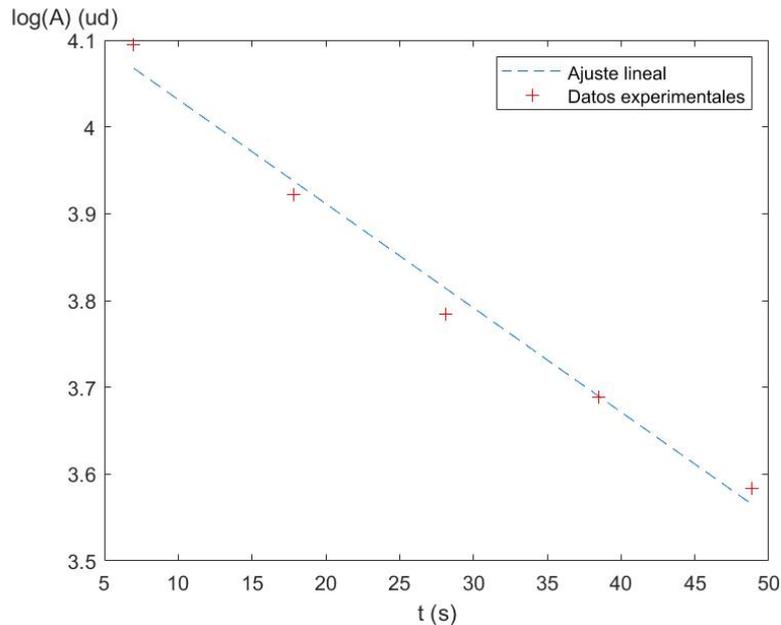
1. Se deja vibrar el péndulo libremente y se graba un vídeo de alta velocidad.
2. Se usan dos fotogramas cuando el péndulo está en su posición más alejada con  $n$  oscilaciones en medio y la variación de tiempo entre ambos  $\Delta t$ .
3. Se halla la amplitud del movimiento en los dos fotogramas  $x_1, x_2$ .
4. Se halla  $\delta$  con el siguiente cálculo

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\delta \Delta t}$$

Como se puede observar, el valor de  $\delta$  de este experimento se obtiene considerando  $x_1$  el primer valor de la tabla 3.4 y  $x_2$  el último. Así, el resto de datos experimentales aunque no coinciden

**Tabla 3.4** Valores del decremento de amplitud en vibración libre.

t (s)	Amplitud (mm)
7.466	60
17.800	50
28.133	44
38.500	40
48.833	36

**Figura 3.22** Datos experimentales de la vibración libre y su interpolación (escala logarítmica). Error  $R^2 = 0.9837$ .

si mantienen la tendencia prevista. Evidentemente con una cámara con una velocidad mayor, los datos experimentales se parecerían más aún al ajuste. Por último, aclarar que el valor obtenido del amortiguamiento para este experimento en concreto es  $\delta \approx 0.0111$ , y será el valor mínimo a partir del que  $s$  provocaría la inestabilidad en el péndulo.

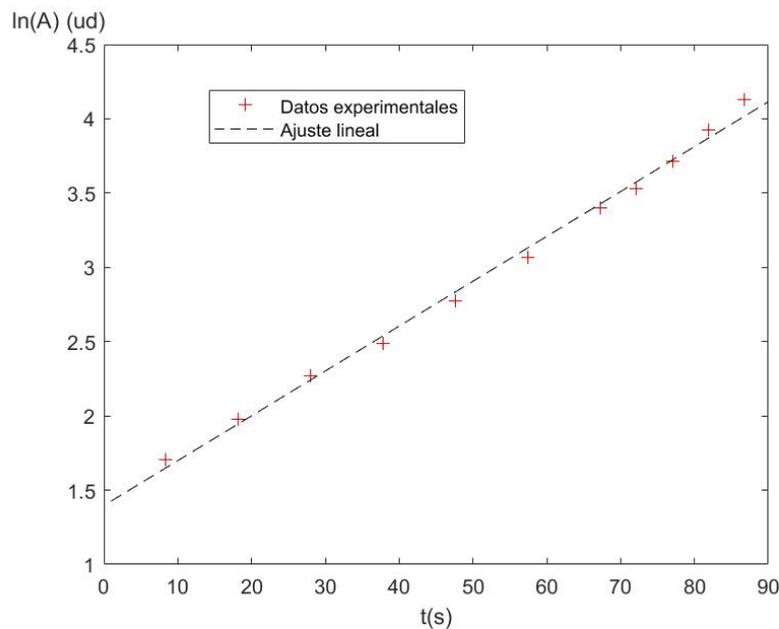
Por otro lado, con un método similar al previo se halla el valor de  $s - \delta$  para un valor de frecuencia y amplitud determinado. En este caso se utiliza el máximo voltaje en uso comentado antes (9 V) y la frecuencia aproximadamente central del rango (2.05 Hz). El método para obtener el valor es el siguiente:

1. Se deja el péndulo prácticamente parado
2. Se usan dos fotogramas cuando el péndulo está en su posición más alejada con  $n$  oscilaciones en medio y la variación de tiempo entre ambos  $\Delta t$ .
3. Se halla la amplitud del movimiento en los dos fotogramas  $x_1, x_2$ .
4. Se halla  $s - \delta$  con el siguiente cálculo

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{(s-\delta)\Delta t}$$

**Tabla 3.5** Valores del incremento de amplitud en inestabilidad paramétrica.

t (s)	Amplitud (mm)
8.400	5.5
18.166	7.2
27.933	9.7
37.766	12.0
47.566	16.0
57.433	21.5
67.233	30.0
72.133	34.0
77.033	41.0
81.966	50.5
86.766	62.0

**Figura 3.23** Datos experimentales de la inestabilidad paramétrica y su interpolación (escala logarítmica). Error  $R^2 = 0.9951$ .

En realidad para este caso haría falta varios puntos para comprobar la tendencia y la posible saturación pasado cierto tiempo que le alejaría del comportamiento exponencial, pues evidentemente no puede crecer de forma indefinida. Como se puede observar tanto en la tabla 3.5 como en la figura 3.23, en el vídeo bajo análisis se capta la zona creciente únicamente sin llegar a la saturación. Tras seguir los pasos comentados previamente se concluye que el valor buscado es  $s - \delta \approx 0.0301$ , que es el valor con el que se ha interpolado en la figura 3.23.

### Estudio del péndulo de pequeña longitud

Como se ha comentado previamente, el péndulo de pequeña longitud se ha utilizado en experimentación con el objetivo de obtener la inestabilidad en el segundo modo, por lo tanto no se van a repetir los datos y características dadas en el péndulo de gran longitud sino las diferencias. En el estudio del **primer modo** de inestabilidad cabe destacar que para los valores de la frecuencia exacta del modo

(4.02 Hz), apenas se llega a notar la saturación por no linealidad, llegando a tocar la estructura que soporta el *shaker*. No es que no exista problemas por linealización, sino que al reducir la longitud del péndulo (aproximadamente la mitad) a pesar de que la amplitud es la misma el valor de  $q$  se multiplica por 4 para el mismo rango de amplitud del shaker. Al ser mayor el valor de  $q$ , también es mayor el valor del coeficiente de la exponencial de la inestabilidad, siendo suficiente para que pueda moverse en todo el rango de movimiento posible. El resto observaciones hechas para el péndulo de gran longitud se puede obtener una analogía exacta para este péndulo.

En el **segundo modo**, que es el propósito principal de hacer un experimento con el péndulo tan corto no ha sido posible encontrar un punto para obtener la inestabilidad. Con el valor de la frecuencia natural y el voltaje al máximo no es posible conseguir que se inestabilice. Por si fuera un problema del cálculo de la frecuencia natural se hizo un barrido desde 30 mHz antes a 30mHz después con un intervalo de 5mHz entre cada uno y aun así fue imposible hallar un punto de inestabilidad. La conclusión que se puede obtener en este caso es que  $s < \delta$  para el punto en el que  $s$  es mayor.

# 4 Conclusiones

---

El proyecto ha sido un reto tanto teórico, como práctico y computacional. A lo largo del mismo se han conseguido logros que se resumen a continuación:

- Se ha obtenido a partir de una formulación lagrangiana la ecuación que gobierna el movimiento de un péndulo paramétrico, así como su versión linealizada.
- Se ha identificado dicha ecuación como la de Mathieu. De acuerdo con la teoría de Floquet para ecuaciones lineales con coeficientes periódicos, hemos propuesto una solución que es producto de una exponencial por una función con la periodicidad de los coeficientes de la ecuación. Finalmente hemos implementado un algoritmo, basado en fracciones continuadas, que permite obtener el exponente de Floquet, que permite discriminar los estados estables de los inestables.
- Se ha verificado el algoritmo comprobando que se obtienen las curvas de estabilidad marginal descritas en la literatura [7].
- Se ha realizado un montaje experimental del péndulo paramétrico para observar las inestabilidades mediante vídeos, incluyendo un estudio de las oscilaciones libres y una calibración del movimiento vertical del soporte.
- Se ha identificado el rango experimental de frecuencias que da lugar a inestabilidad con el rango teórico correspondiente a la frecuencia doble a la natural.
- Se han realizado observaciones cualitativas de distintos regímenes saturados de oscilaciones no lineales.

Tras cerrar el proyecto se dejan distintas líneas de trabajo para poder continuar avanzando en el mismo. Como se puede observar, estas líneas futuras de trabajo se han comentado a lo largo del proyecto, junto a otras, aunque ahora se da una visión pensando en un futuro proyecto y como se podrían plantear estos dos estudios.

## 4.1 Líneas de trabajo futuras

### 4.1.1 Estudio de saturación no lineal

Este estudio, en comparación con el resto, probablemente sea el menos trabajado, ya que hasta que no se produjo no había estado bajo estudio. La idea para seguir por esta línea de trabajo serían las siguientes

- Estudio teórico de la ecuación con el objetivo de resolverla. Este punto es muy complicado porque uno de los motivos para hacer la linealización era no saber como resolver esta ecuación.

- Estudio computacional de la ecuación. Probablemente el único método viable para la resolución de esta ecuación. El objetivo sería encontrar una solución periódica (si existiera) para poder insertarla en el *shaker* a través del generador de ondas con el objetivo que no se saturara.
- Comparación de resultados tanto teóricos como computacionales y experimentales de la ecuación linealizada y la no linealizada.
- En caso de seguir con la misma ecuación linealizada otro punto interesante sería hallar los ángulos de saturación para líneas con las características  $s = cte$  (estas líneas se hallarían con otro estudio como se muestra en este punto).

#### 4.1.2 Estudio de amortiguamiento y de líneas $s = cte$

Por último se ha dejado un punto también muy tratado a lo largo del trabajo, tanto en la parte teórica como en la experimental porque es un punto fundamental a la hora de hallar estas zonas de inestabilidad. Como se ha visto en la figura 4.1, que ya hemos utilizado para explicar otras partes del trabajo, tenemos dos líneas diferentes. La primera, que es aproximadamente recta y son las que abarcan una zona mayor es la línea de  $\delta = 0$ , es decir, sin amortiguamiento. Esta línea es totalmente imaginaria pues todo sistema tiene un mínimo amortiguamiento, y solo tiene sentido matemáticamente. La segunda, que encierra una zona un poco más pequeña es la línea  $s = \delta$ , es decir, la línea que separa las zonas de estabilidad de las de inestabilidad.

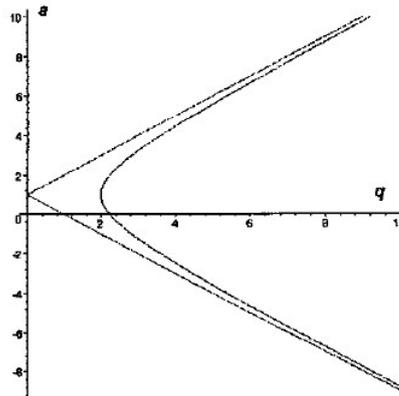


Figura 4.1 Línea de estabilidad modo 1.

De esta forma, se puede comprobar que para distintas líneas de  $s = cte$  tendremos características comunes. Interesándonos realmente las líneas de  $s = cte$  que superen el amortiguamiento.

Como hemos comentado antes, la solución periódica obtenida se multiplica por el factor  $e^{(s-\delta)t}$  lo que significa que el decremento en los casos de  $s < \delta$  o los incrementos para  $s > \delta$  de la amplitud tendrán que ser constantes si se dan la característica  $s = cte$ .

Una vez sabido esto los objetivos de esta línea de trabajo serían los siguientes:

- Estudio y obtención de  $A\delta$  para diferentes longitudes del péndulo, con el objetivo de conseguir una gráfica como la de la figura 3.7.
- Obtención de líneas  $s = cte$  como función del voltaje y la frecuencia para comprobar que la amplitud de saturación es constante para estas líneas. Estas líneas deben ser parecidas la que separan las zonas de estabilidad e inestabilidad ya que también es una línea donde  $s$  es constante.

# Bibliografía

---

- [1] THOMSON, W. T. (1983). Teoría de vibraciones: aplicaciones (No. 531 T4Y 1981).
- [2] FERNANDEZ, J. (s.f). *Fuerzas en el Movimiento Armónico Simple* [Esquema] Recuperado de <https://www.fiscalab.com/apartado/dinamica-mas>
- [3] ESPARZA, D. (2016). *¿Sabes a qué velocidad viaja el Botafumeiro de Santiago?* [Imagen] Recuperado de <https://es.aleteia.org/2016/06/28/el-botafumeiro-de-santiago-53-kilos-de-peso-y-70-kilometros-por-hora-a-20-metros-de-altura/>
- [4] GONZALEZ AISPURO, J. C. (2007). Estudios analíticos de la ecuación de Mathieu.
- [5] *El botafumeiro* (s.f) Pilgrim <https://www.pilgrim.es/planificar/el-botafumeiro/>
- [6] GUARIN-ZAPATA, N (2020) *¿Por qué se riega el café cuando caminamos?*[Imagen] <https://speakerdeck.com/nicoguaru/por-que-se-riega-el-cafe-cuando-caminamos?slide=9>
- [7] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (Eds.). (1964). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55). US Government printing office.
- [8] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (2013). Mechanics and electrodynamics. Elsevier.
- [9] *Rotores desequilibrados* (2014). Laplace.us [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Rotores\\_-\\_desequilibrados](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Rotores_-_desequilibrados)
- [10] Coddington, E. A., Levinson, N. (1984). Theory of ordinary differential equations ([Reprint]). Robert E. Krieger.
- [11] Leven, R. W., Koch, B. P. (1981). Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. Physics Letters A, 86(2), 71-74.