UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Familias y espacios de funciones holomorfas en regiones del plano

Trabajo Fin de Grado

presentado por

Luis Agustín Bernal Torres

Tutora: María del Carmen Calderón Moreno

Sevilla, Junio de 2020

Índice general

Abstract

In this work we focus our attention on a collection of function spaces whose analysis is not deepened usually during the teaching of a Degree in Mathematics. Specifically, we are interested in properties of several spaces of analytic functions defined on an open subset of the complex plane.

In the Degree courses, basic properties of holomorphic functions are taught, their singularities are studied, integrals along paths are calculated, connection with harmonic functions of two real variables is established, conformal representation among plane regions are dealt with, convergence of series and infinite products of analytic functions are analyzed, and the space of all holomorphic functions in plane regions –endowed with the topology of uniform convergence in compacta– is introduced. The aim of this work is to go in more depth into the study of this space, as well as of several subfamilies and subespaces of it. In some cases, such subspaces can be endowed with topologies that are different from the one inherited from the whole space.

In the present dissertation, that is divided into five chapters, we shall start from the above mentioned space of holomorphic functions and introduce the so-called normal families, as an extension of the concept of relatively compact families that were characterized by Paul Montel. Next, it is presented the class of subharmonic functions as a tool to solve the Dirichlet Problem in a plane region. Later, we shall study the most emblematic holomorphic function spaces, which are mainly considered in the unit disk. These spaces are the Bergman space, the space of bounded holomorphic functions, and the Hardy spaces, each of them with its kind of convergence and structural features. Moreover, we shall dealt with an auxiliary family of functions –the so-called Nevanlinna class– that will help us to prove a number of properties in the setting of Hardy spaces.

It is fair to say that spaces of holomorphic functions continue on aweaking the interest of many mathematicians since more than a century ago. Obviously, the present work does not intend to be comprehensive, but we will try to sum up the most important aspects about this theory, so we can see the most relevant results comfortably. Nevertheless, and with the aim to be as self-contained as possible, we have incorporated a number of preliminary results into some chapters.

Resumen

En este trabajo se pretende centrar la atención sobre una serie de espacios funcionales en cuyo estudio no se suele profundizar en un Grado en Matemáticas. En concreto, estamos interesados en propiedades de diversos espacios de funciones analíticas definidas sobre un subconjunto abierto del plano complejo.

En los estudios de grado, se imparten las propiedades básicas de las funciones holomorfas, se estudian sus singularidades, se calculan integrales curvilíneas, se establece conexión con las funciones armónicas de dos variables, se trata sobre representación conforme de regiones, se analiza la convergencia de series y productos infinitos de funciones analíticas, y se introduce el espacio de las funciones holomorfas en regiones planas dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos. El objetivo de este trabajo es adentrarnos en el estudio de este espacio, así como de varias familias y de algunos subespacios vectoriales del mismo, los cuales, en algunos casos, pueden dotarse de topologías distintas de la heredada del espacio total.

En la presente memoria, que se divide en cinco capítulos, partimos del citado espacio de funciones holomorfas e introducimos las familias normales, como extensión del concepto de familias relativamente compactas caracterizadas por Paul Montel. A continuación se introduce la clase de las funciones subarmónicas, como instrumento para resolver el Problema de Dirichlet en una región plana. Los espacios de funciones holomorfas más emblemáticos, que serán considerados sobre todo en el disco unidad, son el espacio de Bergman, el espacio

de las funciones acotadas y los espacios de Hardy, todos ellos con sus tipos de convergencia y sus características estructurales particulares. Asimismo, se estudia una familia auxiliar de funciones, la llamada clase de Nevanlinna, que nos ayuda a probar diversas propiedades en el ámbito de los espacios de Hardy.

Es justo decir que los espacios de funciones holomorfas siguen despertando el interés de muchos matemáticos desde hace más de un siglo. Obviamente nuestro trabajo no pretende ser exhaustivo, pero se ha procurado condensar lo más importante al respecto para que se pueda consultar de forma cómoda lo más relevante. No obstante, y con la intención de que el trabajo sea lo más autocontenido posible, se han incorporado algunos resultados preliminares en algunos capítulos.

Introducción

El estudio de los espacios de funciones analíticas en el campo complejo se remonta a Paul Montel, que lo llevó a cabo a principios del pasado siglo, aportando así un punto de vista nuevo en la investigación de las funciones holomorfas cuando son tomadas como un conjunto con una estructura métrica. El Teorema de convergencia de Weierstrass garantiza la preservación de la propiedad de analiticidad en un abierto del plano para el límite de una sucesión de funciones analíticas que converjan uniformemente en cada subconjunto compacto del abierto. Bajo una métrica adecuada, dicha convergencia equivale a la convergencia en la métrica. Esto dio lugar a toda una teoría desde el punto de vista analítico-funcional, de la que Montel fue pionero aportando su famosa caracterización de las familias relativamente compactas de funciones holomorfas.

Surge entonces, de modo natural, la cuestión de si la convergencia anterior puede hacerse más fuerte manteniendo la pertenencia del límite al subespacio en que se considera ese reforzamiento de la convergencia. De aquí surgen espacios de funciones holomorfas dotados de normas que los hacen espacios métricos completos.

De estos espacios y de algunas familias especiales extraídas de los mismos es de lo que nos ocupamos en el presente trabajo, el cual se divide en cinco capítulos, que a continuación comentamos.

En el *Capítulo 1* consideramos el espacio vectorial $H(G)$ de las funciones holomorfas en abierto G del plano, e introducimos en él la topología de la convergencia uniforme en compactos, la cual es metrizable. Se recuerda el Teorema de convergencia de Weierstrass y la caracterización de Montel de las familias relativamente compactas en $H(G)$. Se introduce el concepto de familia normal, que es una extensión del de familia relativamente compacta cuando asumimos que el espacio de llegada es el plano complejo ampliado. Entonces caracterizamos las familias normales mediante el Criterio de Marty de la derivada esférica.

En el *Capítulo 2* se exponen las funciones subarmónicas, que son funciones con valores reales definidas sobre un abierto del plano, y se caracterizan como funciones continuas que cumplen la así llamada Propiedad del Sub-Valor Medio. Están conectadas con la noción de convexidad, y no forman un espacio vectorial, pero son un instrumento muy útil para resolver –mediante el así denominado "método del agotamiento de Perron"– el Problema de Dirichlet sobre existencia de funciones armónicas de dos variables con valores frontera dados, así como para demostrar ciertos resultados en el ámbito de los espacios de tipo Hardy que desarrollaremos en capítulos posteriores.

En el *Capítulo 3* estudiamos el espacio de Bergman $B^2(G)$, que es el espacio vectorial de todas las funciones holomorfas en una región plana G cuyo módulo posee cuadrado integrable respecto de la medida de Lebesgue bidimensional. Resulta ser un espacio de Hilbert y, al aplicarle la teoría general de estos espacios, resultan unas propiedades muy ricas, entre las que destacan la existencia de una función núcleo reproductora y una fuerte relación con el isomorfismo normalizado de Riemann en el disco unidad $\mathbb{D}$. La convergencia en este espacio va a ser más fuerte que la convergencia uniforme en compactos. Destacamos también el estudio de la densidad de la familia de los polinomios en $B^2(G)$, en la cual la estructura topológico-geométrica de la frontera de G juega un papel importante. Para exponentes más generales, trataremos sobre los espacios $B^p(\mathbb{D})$ en el disco unidad, para los cuales se probará la continuidad del operador de composición $f \mapsto f \circ \varphi$, donde φ es una autoaplicación holomorfa de $\mathbb{D}$.

El *Capítulo 4* trata sobre el espacio H^∞ de las funciones analíticas acotadas en el disco unidad, como antesala de los espacios de Hardy. Va a ser un espacio de Banach si se le dota de la norma natural del supremo del módulo de sus funciones. Aunque este espacio no es separable, veremos que sus elementos se pueden factorizar de manera sencilla como producto de una función acotada que no se anula y de un producto de Blaschke, que no es más que un producto infinito de automorfismos de $\mathbb{D}$. Introduciremos la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$, constituida por las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que $\sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < +\infty$, y probaremos que $f \in \mathcal{N}$ si y solo si f es el cociente de dos funciones de H^∞, y que $\mathcal{N}$ tiene propiedades de factorización similares a las de H^∞. Concluimos este capítulo con una breve reseña sobre el subespacio conocido como “álgebra del disco”, constituido por las funciones holomorfas en el disco unidad que son continuamente extensibles hasta la frontera $\mathbb{T}$ de $\mathbb{D}$.

Finalmente, el *Capítulo 5,* que es el más extenso, versa sobre los espacios de Hardy H^p $(0 < p < +\infty)$ del disco unidad, definidos cada uno de ellos como el espacio vectorial de aquellas funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty$. Estos también van a ser metrizables al dotárseles de una distancia natural, y son espacios de Banach si $p \ge 1$. Se probará que la convergencia en ellos es, de nuevo, más fuerte que la convergencia uniforme en compactos, y se caracterizarán los elementos de H^2 –el caso Hilbert– mediante sus coeficientes de Taylor. Usando las denominadas transformadas de Poisson-Stieltjes se probará que las funciones de H^p poseen valores frontera radiales en casi toda la frontera de $\mathbb{D}$, y que son también valores no-tangenciales. De hecho, veremos cómo la $L^p(\mathbb{T})$-integrabilidad de estas funciones de límite radial f^* determina la pertenencia a H^p de la función original f, y demostraremos que las f^* constituyen el subespacio cerrado de

$L^p(\mathbb{T})$ cuyos coeficientes de Fourier de orden negativo son nulos. También, con la ayuda de la clase de Nevanlinna, probaremos resultados de factorización para las funciones de los espacios de Hardy, relativa a sus ceros en el disco. Se establecerá la continuidad del operador de composición $f \mapsto f \circ \varphi$ y, para concluir, con la ayuda del Teorema de convergencia en media, se probará la densidad en H^p de la familia de los polinomios, lo cual conlleva la separabilidad de nuestros espacios.

La bibliografía se ha dividido en dos partes, a saber, la *Bibliografía fundamental*, en la que se han recogido los libros que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo, y el epígrafe *Otras referencias*, donde se ha incluido una colección de libros que se han usado en apartados específicos y que se pueden emplear para profundizar en la materia. Con respecto a la bibliografía fundamental, en el capítulo 1 se han utilizado preferentemente [2] y [4]; [1] en el capítulo 2; [3] en el capítulo 3, y [5] en los capítulos 4 y 5.

Capítulo 1

El espacio de las funciones holomorfas

Este capítulo está dedicado a recapitular conceptos y resultados relativos al espacio $H(G)$ de las funciones holomorfas o analíticas $G \longrightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $G \subset \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el plano complejo. Algunas de estas propiedades se estudian en algunas asignaturas del Grado en Matemáticas, pero las recordaremos por comodidad para su uso posterior. Se incluirán también propiedades no impartidas hasta ahora. Entre los conceptos nuevos que introduciremos está el de familia normal, generalización del de familia relativamente compacta. Se recordará la topología natural en $H(G)$, que es la de la convergencia uniforme en compactos, y la caracterización de Montel de la compacidad relativa. Después de esto, se estudiarán condiciones de normalidad de una familia de funciones analíticas, lo cual conducirá a los criterios de Marty y de Montel–Carathéodory.

Antes de entrar en materia, fijemos algunas notaciones y conceptos. Recordemos que, si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $z_0 \in G$ y $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, entonces se dice que f es holomorfa en z_0 cuando es $\mathbb{C}$-diferenciable en tal punto, es decir, cuando existe $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$; y se dice que f es analítica en z_0 si existe una serie de potencias centrada en z_0 convergente a $f(z)$ en un entorno de z_0. La función f se dice holomorfa (analítica, resp.) en G cuando es holomorfa (analítica, resp.) en cada punto de G. Un conocido teorema debido a Cauchy garantiza que f es holomorfa en G si y solo si es analítica en G. A veces interesa que el abierto G sea conexo, en cuyo caso se dirá que G es una *región* del plano.

Denotaremos por $\mathbb{C}_\infty$ el plano complejo extendido o ampliado, es decir, $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mediante la proyección estereográfica, si al polo norte $N = (0,0,1)$ de la superficie esférica S^2 de radio 1 centrada en el origen $(0,0,0)$ del espacio real tridimensional se le asigna el punto ∞, obtenemos una biyección, y así podemos definir una topología en $\mathbb{C}_\infty$ que es la generada por esa biyección a partir de la topología euclídea de S^2. Resulta entonces que $\mathbb{C}_\infty$ es un espacio metrizable compacto tal que la restricción de su topología a $\mathbb{C}$ es la topología euclídea del plano. De hecho, la distancia cordal χ, que recordaremos más adelante, es compatible con la topología de $\mathbb{C}_\infty$.

1.1. La topología de la convergencia compacta

Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y consideremos el espacio vectorial $C(G)$ de las funciones continuas $G \longrightarrow \mathbb{C}$. Los subconjuntos de la forma

$$V(f, K, \varepsilon) := \{g \in C(G) : |g(z) - f(z)| < \varepsilon \ \ \forall z \in K\},$$

donde $f \in C(G)$, $\varepsilon > 0$ y K es un subconjunto compacto de G, constituyen una base para una topología sobre $C(G)$, que es por definición la topología *de la convergencia uniforme en compactos de G*, llamada también topología *de la convergencia compacta* y topología *compacta-abierta*. La denotaremos por τ_{uc}. Si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C(G)$ y $f \in C(G)$, se verifica entonces que $f_n \longrightarrow f \ (n \to \infty)$ en τ_{uc} si y solo si $f_n \longrightarrow f \ (n \to \infty)$ uniformemente en cada subconjunto compacto de G; de ahí el nombre de la topología.

Recordemos que un espacio vectorial topológico (EVT) es un espacio vectorial X, real o complejo, dotado de una topología tal que las operaciones de suma $(x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$ y de producto por escalares $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda x \in X$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) son continuas. Además, un espacio localmente convexo (ELC) es un EVT tal que el origen posee una base de entornos formada por conjuntos convexos.

Se tiene que tiene $C(G)$ es un *espacio de Fréchet*, es decir, es un ELC metrizable y completo. La completitud se refiere a alguna métrica de las que defina la topología de $C(G)$. Recordemos que, para EVTs metrizables, la completitud es independiente de la elección de la métrica equivalente que induce la topología. En el caso que nos ocupa, se tiene que la aplicación $D : C(G) \times C(G) \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$D(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}$$

define una métrica sobre $C(G)$ para la cual este espacio es completo, y además D genera la topología τ_{uc}. Aquí $\{K_n\}_1^{\infty}$ es una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de G, en el sentido de que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ y $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (donde A° denota el interior de un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$), mientras que, para cada compacto $K \subset G$, se ha denotado $\|f\|_K := \max\{|f(z)| : z \in K\}$ para cada $f \in C(G)$.

Es evidente que $H(G) \subset C(G)$. La topología que vamos a considerar en $H(G)$ es la que hereda como subconjunto de $C(G)$, la cual seguiremos denotando por τ_{uc}. En este contexto, es importante recordar el siguiente *Teorema de convergencia de Weierstrass para funciones holomorfas*, el cual viene a decirnos que $H(G)$ "hereda bien" la topología de la convergencia compacta.

Teorema 1.1. *Si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(G)$ y $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en compactos de G, donde $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces $f \in H(G)$ y además $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ $(n \to \infty)$ uniformemente en compactos de G para cada $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. En particular, $H(G)$ es cerrado en $C(G)$ para la topología*

τ_{uc}, *y por tanto es también un espacio de Fréchet.*

Del Teorema de convergencia de Weierstrass se deduce la siguiente especie de "ley 0–1" que se conoce como *Teorema de Hurwitz*, el cual será utilizado en capítulos posteriores.

Teorema 1.2. *Supongamos que* $G \subset \mathbb{C}$ *es una región, que* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una función holomorfa y que* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(G)$ *es una sucesión tal que* $f_n(z) \neq 0$ *para todo* $z \in G$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$*, y es uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de* G*. Entonces o bien* f *es idénticamente nula o bien* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \in G$*.*

1.2. Familias relativamente compactas

Recordemos que, si X es un espacio topológico, un subconjunto $A \subset X$ se dice que es *relativamente compacto* cuando su clausura $\overline{A}$ es compacta. En particular, una familia $\mathcal{F} \subset C(G)$ ($\subset H(G)$, resp.) se dice que es *relativamente compacta* cuando $\overline{\mathcal{F}}$ es un subconjunto compacto de $C(G)$ (de $H(G)$, resp.). Ya que tanto $H(G)$ como $C(G)$ son espacios metrizables, lo anterior equivale a decir que de cada sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ puede extraerse alguna subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que existe $f \in C(G)$ ($f \in H(G)$, resp.) de modo que $f_{n_k} \longrightarrow f$ $(k \to \infty)$ uniformemente en compactos de G. Notemos que no se exige que $f \in \mathcal{F}$. A veces usaremos la expresión "compactamente" como sinónima de "uniformemente en compactos de G".

En cursos superiores del Grado en Matemáticas, dentro de las materias de análisis de variable compleja, se suele impartir una caracterización de la compacidad relativa de familias de funciones analíticas, debida a Montel, y que recordaremos aquí. Para ello, necesitamos previamente los conceptos de equicontinuidad y acotación puntual. Si (X, d_1) e (Y, d_2) son dos espacios métricos, una familia $\mathcal{A}$ de funciones de X en Y se dice que es *equicontinua* en un subconjunto $S \subset X$ cuando, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(S, \varepsilon) > 0$ tal que, si $x_1, x_2 \in S$, $f \in \mathcal{A}$ y $d_1(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ es una familia de funciones $X \to \mathbb{C}$, se dice que $\mathcal{A}$ es puntualmente acotada si, para cada $x \in X$, el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ es acotado. Y si, además, S es un subconjunto de X, diremos que la familia $\mathcal{A}$ es uniformemente acotada en S cuando existe $M = M(S) \in (0, +\infty)$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y toda $f \in \mathcal{A}$.

El *Teorema de Ascoli–Arzelà* proporciona una caracterización de la compacidad relativa de familias de funciones continuas. En su versión para $C(G)$, donde G es un abierto de $\mathbb{C}$, este teorema afirma lo siguiente.

Teorema 1.3. *Consideremos una familia $\mathcal{A} \subset C(G)$, donde G es un abierto de $\mathbb{C}$. Son equivalentes:*

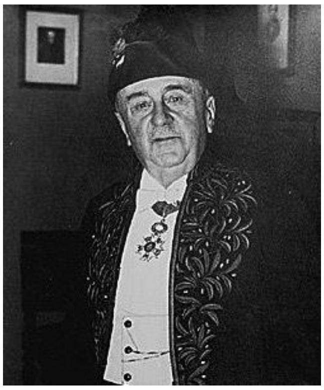
(i) *$\mathcal{A} \subset C(G)$ es relativamente compacta en $C(G)$.*

(ii) *$\mathcal{A} \subset C(G)$ es equicontinua y uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de G.*

(iii) *$\mathcal{A}$ es puntualmente acotada y equicontinua en cada subconjunto compacto de G.*

Basándose en el teorema anterior y en la fórmula de la integral de Cauchy, se puede probar el importante *Criterio de Montel*, que nos da una caracterización de la compacidad relativa de una familia de funciones holomorfas. Lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subset H(G)$ una familia de funciones analíticas en G. Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacta en $H(G)$ si y solo si $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de G.*



Paul Montel (1876–1975)

Con objeto de usarlo en un capítulo posterior, recordamos aquí el *Teorema de convergencia de Vitali–Porter*, que es una condición suficiente de convergencia uniforme en compactos. Su demostración se basa en una combinación del criterio de Montel y del Principio de Prolongación Analítica. Aquí A' denota el derivado de A, es decir, el conjunto de puntos de acumulación de A, donde $A \subset \mathbb{C}$.

Teorema 1.5. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región, y sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(G)$ una sucesión relativamente compacta. Supongamos que existe un subconjunto $S \subset G$ de modo que $S' \cap G \neq \varnothing$ y existe $\lim_{n\to\infty} f_n(z) \in \mathbb{C}$ para cada $z \in S$. Entonces existe una función $f \in H(G)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ compactamente en G.*

Finalizamos esta sección con una importante aplicación del Teorema de Montel, a saber, la topología del espacio $H(G)$ no puede venir definida por una norma.

Teorema 1.6. *El espacio de Fréchet $H(G)$ no es normable.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una norma $\|\cdot\|$ que determina la topología de la convergencia compacta en $H(G)$, y consideremos la bola unidad $\mathcal{B}$ para esa norma, es decir, $\mathcal{B} = \{f \in H(G) : \|f\| < 1\}$. Fijemos un compacto $K \subset G$. Podemos elegir $m \in \mathbb{N}$ y $r > 0$

tales que $K \subset K_m$ y $r < \frac{1}{2^{m+1}}$, donde (K_n) era la sucesión exhaustiva de compactos de G que definía la topología τ_{uc}. Si D es la distancia que definía la topología, debe existir un $\alpha > 0$ tal que $\alpha\mathcal{B} \subset \{f \in H(\Omega) : D(f, 0) < r\}$, ya que el último conjunto es un entorno del origen y $\mathcal{B}$ es un conjunto acotado en el EVT $H(G)$. Ahora bien, por la inclusión anterior y la definición de la distancia D, resulta que

$$\frac{1}{2^m} \cdot \frac{\|f\|_{K_m}}{1 + \|f\|_{K_m}} < r < \frac{1}{2^{m+1}} \text{ para toda } f \in \alpha\mathcal{B},$$

de donde $\frac{\|f\|_{K_m}}{1+\|f\|_{K_m}} < \frac{1}{2}$ y $\|f\|_{K_m} < 1$ para dichas funciones f. Como $K \subset K_m$, obtenemos finalmente que $\|f\|_K \leq \frac{1}{\alpha}$ para toda $f \in \mathcal{B}$, es decir, $|f(z)| \leq \frac{1}{\alpha}$ para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{B}$, de donde se deduce que $\mathcal{B}$ es una familia uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de G. Aplicando el Teorema de Montel, resulta que $\mathcal{B}$ es relativamente compacta en el espacio normado infinito-dimensional $(H(G), \|\cdot\|)$, y esto contradice el Teorema de Riesz que afirma que si la bola unidad de un espacio normado es relativamente compacta, entonces el espacio es de dimensión finita (ver, por ejemplo, [18, Cap. 1]). □

Daremos también una demostración alternativa del mismo resultado, que nos ha parecido interesante por emplear familias de funciones holomorfas y un resultado clásico en Teoría de Aproximación en Variable Compleja como es el *Teorema de Runge*. Recordemos que este nos asegura que, dados un compacto K en G y un conjunto A que contiene un punto de cada componente conexa del complemento de K, entonces toda función de $H(G)$ puede ser aproximada uniformemente en K mediante funciones racionales con polos exactamente en A (ver, por ejemplo, [5, Cap. 13] o [9, Chap. 3]).

Otra demostración del Teorema 1.6. Procediendo una vez más por reducción al absurdo, llamemos de nuevo $\mathcal{B}$ a la bola unidad abierta $\{f \in H(G) : \|f\| < 1\}$ para la supuesta norma $\|\cdot\|$ que define la topología de $H(G)$. Entonces $\mathcal{B}$ contiene un entorno básico del origen, es decir, existen $\varepsilon > 0$

y un compacto $K \subset G$ tales que $\mathcal{B} \supset U_1 := \{f \in H(G) : \|f\|_K < \varepsilon\}$. Fijemos un punto $z_0 \in G \setminus K$ así como el compacto $L := \{z_0\}$. Puesto que $U_2 := \{f \in H(G) : \|f\|_L < 1\}$ es un entorno del origen, existe un $\delta > 0$ que satisface $U_2 \supset \delta\mathcal{B} = \{f \in H(G) : \|f\| < \delta\}$. Por tanto

$$U_2 \supset \delta U_1 = \{f \in H(G) : \|f\|_K < \varepsilon\delta\}.$$

Ya que cada subconjunto compacto de G (como lo es K) está contenido en algún compacto $\widetilde{K}$ con la propiedad de que $\mathbb{C} \setminus \widetilde{K}$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en G (lo cual equivale a decir que cada agujero de $\widetilde{K}$ contiene algún agujero de G), podemos suponer que K tiene esta última propiedad: se sustituiría U_1 por $\{f \in H(G) : \|f\|_{\widetilde{K}} < \varepsilon\}$ $(\subset U_1)$ si fuese necesario. Tenemos pues que $[f \in H(G)$ y $\|f\|_K < \varepsilon\delta]$ implica $|f(z_0)| < 1$, lo cual es falso (y hemos conseguido la contradicción deseada). En efecto, la función

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in K \\ 1 + \varepsilon\,\delta & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es holomorfa en algún entorno del compacto $K \cup \{z_0\}$ (basta elegir abiertos disjuntos que contengan respectivamente a K y al punto z_0). Entonces, por la propiedad de K dada anteriormente y gracias al Teorema de aproximación de Runge, existe una función racional f con polos fuera de G tal que $\|f - g\|_{K \cup \{z_0\}} < \varepsilon\delta$. Se deduce que $f \in H(G)$, $\|f\|_K < \varepsilon\delta$ y, sin embargo, por la desigualdad triangular, $|f(z_0)| > 1$.

1.3. Familias normales de funciones holomorfas

Para familias de funciones analíticas, estudiaremos seguidamente un concepto más amplio que el de compacidad relativa. Si $\mathcal{F} \subset H(G)$, diremos que $\mathcal{F}$ es *normal* cuando de cada sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ puede extraerse alguna subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tal que o bien $f_{n_k} \longrightarrow f$ $(k \to \infty)$ compactamente en G para alguna $f \in H(G)$ o bien $f_{n_k} \longrightarrow \infty$ $(k \to \infty)$ compactamente en G. Queremos aclarar aquí que la expresión $g_k \longrightarrow \infty$ compactamente en G quiere decir que, dados un subconjunto compacto $K \subset G$ y un número $M > 0$, existe un $k_0 = k_0(K, M) \in \mathbb{N}$ tal que $|g_k(z)| > M$ para todo $z \in K$ y todo $k \geq k_0$.

Volviendo al espacio $C(G)$ de las funciones continuas $G \longrightarrow \mathbb{C}$, recordemos que la compacidad relativa de una familia de $C(G)$ está caracterizada por el Teorema 1.3 de Ascoli–Arzelà. En la demostración de la implicación (iii) $\Rightarrow$ (i) de este teorema, la acotación puntual se usa para extraer una subsucesión convergente de una sucesión acotada, así que se puede sustituir tal condición por la siguiente: *Para cada punto $a \in G$, el subconjunto $\{f(a) : f \in \mathcal{A}\}$ es relativamente compacto* (P). Si cambiamos el conjunto final $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}_\infty$ (dotado de la distancia cordal χ) y consideramos el correspondiente espacio

$$C^*(G) := \big\{\text{funciones continuas } G \longrightarrow \mathbb{C}_\infty\big\},$$

y en la definición de τ_{uc} y de su métrica generadora sustituimos cada expresión de la forma $|f(z) - g(z)|$ por $\chi(f(z), g(z))$, resulta que $C^*(G)$ vuelve a ser un espacio metrizable completo, aunque ya no es un espacio vectorial. Ahora bien, la condición (P) comentada anteriormente es superflua en este nuevo contexto, pues $\mathbb{C}_\infty$ es compacto. Así que para este espacio se tiene la siguiente versión del Teorema de Arzelá–Ascoli: *Una familia $\mathcal{A} \subset C^*(G)$ es relativamente compacta si y solo si es χ-equicontinua sobre cada subconjunto compacto de G.* Al decir χ-equicontinua, estamos considerando en $\mathbb{C}_\infty$ la distancia cordal; en G se puede usar indistintamente la distancia cordal o la euclídea, ya que son equivalentes en el plano finito. Recordemos la expresión de la distancia cordal

$$\chi(a,b) = \begin{cases} \frac{2|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}} & \text{si } a, b \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1+|a|^2}} & \text{si } a \in \mathbb{C} \text{ y } b = \infty \\ 0 & \text{si } a = \infty = b. \end{cases}$$

Antes de enunciar y probar el criterio de Marty, necesitamos una definición y un resultado preparatorio.

Definición 1.7. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $z \in G$. Se llama* derivada esférica *de f en z al número*

$$\rho(f)(z) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Observemos que $\rho(f)(z) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{\chi(f(z+h),f(z))}{|h|}$, luego $\rho(f)(z)$ representa el coeficiente de dilatación lineal en z de f, considerada ésta como función $G \to$ Esfera de Riemann. Por ∞ representaremos indistintamente el punto del infinito y la función constante $z \in G \longmapsto \infty \in \mathbb{C}_\infty$.

Lema 1.8. *El conjunto $H(G) \cup \{\infty\}$ es cerrado en $C^*(G)$.*

Demostración. Se deduce directamente de la definición de distancia cordal que $\chi(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = \chi(a,b)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}_\infty$. Es evidente que el lema queda probado si demostramos la siguiente propiedad:

$$[\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(G) \text{ y } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\chi} f \in C^*(G) \setminus \{\infty\}] \Longrightarrow f \in H(G). \qquad (P)$$

Sean pues $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión y f una función bajo las condiciones anteriores, y sea $z_0 \in G$ tal que $f(z_0) \neq \infty$. Entonces, al ser f continua, existe un entorno $U \subset G$ relativamente compacto de z_0 tal que f es acotada en U. Esto implica que la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada en U. En efecto, si no estuviese acotada, podríamos encontrar sucesiones $\{a_k\}_{k\geq 1} \subset U$ y $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tales que $f_{n_k}(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, luego

$$\chi(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) = \frac{2|f_{n_k}(a_k) - f(a_k)|}{\sqrt{(1+|f(a_k)|^2)(1+|f_{n_k}(a_k)|^2)}} \underset{k\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

lo cual contradice el hecho de que $\overline{U}$ es un subconjunto compacto de G y entonces, por hipótesis, $\sup_{z\in\overline{U}} \chi(f_{n_k}(z), f(z)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

En consecuencia, podemos elegir constantes $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ tales que $|f(z)| \leq \alpha$ y $|f_n(z)| \leq \beta$ para todo $z \in U$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para cada compacto $K \subset U$ obtenemos que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \cdot \sup_{z\in K} \chi(f_n(z), f(z)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de donde se deduce que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en compactos de U. Por el Teorema de convergencia de Weierstrass, f es holomorfa en z_0.

Basta pues, para demostrar (P), probar que el caso $f(z_0) = \infty$ es imposible. Supongamos, por reducción al absurdo, que se tiene $f(z_0) = \infty$. Consideremos la función $1/f$ y observemos que $\dfrac{1}{f_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\chi}{\longrightarrow}} \dfrac{1}{f}$ en $C^*(G)$. Ya que $(\frac{1}{f})(z_0) = 0 \neq \infty$, cambiando en la parte anterior los papeles de f_n, f por $\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}$ (respectivamente) obtenemos análogamente que existen un entorno U de z_0 y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y todo $z \in U$. Luego $\{\frac{1}{f_n}\}_{n\geq n_0} \subset H(U)$ y, razonando como antes, obtenemos $\dfrac{1}{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{f}$ uniformemente en compactos de U, con $\dfrac{1}{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$. De nuevo por el Teorema de convergencia de Weierstrass, resulta que $1/f \in H(U)$.

Finalmente, aplicamos el Teorema de Hurwitz (Teorema 1.2), obteniéndose que, o bien $1/f \equiv 0$ en U, lo cual es imposible porque $f \not\equiv \infty$, o bien $(1/f)(z) \neq 0$ para todo $z \in G$, que tampoco es cierto porque $f(z_0) = \infty$. En cualquier caso obtenemos contradicción, lo que concluye la prueba del lema.

□

El siguiente teorema contiene el *Criterio de Marty* de normalidad de familias de funciones holomorfas.

Teorema 1.9. *Sea $\mathcal{F} \subset H(G)$ una familia de funciones, donde $G \subset \mathbb{C}$ es una región. Entonces $\mathcal{F}$ es normal si y solo si, para cada compacto $K \subset G$, existe una constante $M = M(K) \in (0, +\infty)$ tal que $\rho(f)(z) \leq M$ para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Gracias al lema anterior, los límites χ-uniformes de funciones holomorfas son funciones holomorfas o idénticamente ∞. Por tanto, la familia $\mathcal{F}$ es normal en $H(G)$ si y solo si $\mathcal{F}$ es relativamente compacta en $C^*(G)$, lo que, a su vez, equivale a que $\mathcal{F}$ sea χ-equicontinua en cada compacto de G.

Y esto es cierto si y solo $\mathcal{F}$ es χ-equicontinua en un entorno de cada punto de nuestra región G.

Supongamos en primer lugar que la familia $\{\rho(f)\}_{f\in\mathcal{F}}$ está uniformemente acotada en cada compacto de G, y fijemos un punto $a \in G$. Entonces existe una bola cerrada B de centro a tal que $B \subset G$. Por tanto, existe una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que $\rho(f)(z) \leq M$ para todo $z \in B$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Si $z, z' \in B$ entonces el segmento $[z, z']$ está contenido en B. Usando la expresión de la derivada esférica como límite de un cociente incremental, se obtiene que

$$\chi(f(z), f(z')) \leq \sup_{t\in[z,z']} \rho(f)(t) \cdot |z - z'| \leq M|z - z'|$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. En consecuencia, $\mathcal{F}$ es χ-equicontinua en el entorno B de a, y por tanto es una familia normal.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es normal y que, por reducción al absurdo, existe un compacto $K \subset G$ donde $\rho(f)$ no está uniformemente acotada. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\geq1} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\alpha_n := \sup_{z\in K} \rho(f_n)(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Por normalidad, existe una subsucesión $\{g_k := f_{n_k}\}_{k\geq1}$ de $\{f_n\}_{n\geq1}$ tal que

(1) o bien $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ uniformemente en compactos de G a cierta $g \in H(G)$,

(2) o bien $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ compactamente en G.

• En el caso (1), se tiene por el Teorema de convergencia de Weierstrass que $\rho(g_k) \underset{k\to\infty}{\to} \rho(g)$ uniformemente en K. Por tanto, dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\rho(g_k)(z) - \rho(g)(z)| < 1$ para todo $z \in K$ y todo $k > k_0$. Se deduce entonces que $\alpha_{n_k} \leq \gamma$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\gamma := \max\{1 + \sup_K \rho(g), \sup_K \rho(g_1), \ldots, \sup_K \rho(g_{k_0})\} < +\infty$. Esto contradice el hecho de que $\alpha_n \longrightarrow +\infty$.

• En el caso (2), tomemos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\overline{\Omega}$ es compacto y $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset G$. En el caso en que estamos, podemos encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_k(z)| > 1$ para todo $z \in \overline{\Omega}$ y todo $k > k_0$, de donde deducimos que $\frac{1}{g_k} \in H(\Omega)$ para todo $k > k_0$ y $\frac{1}{g_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en compactos de Ω. Finalmente, y gracias, una vez más, al Teorema de convergencia de Weierstrass, obtenemos $\rho(\frac{1}{g_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \rho(0) \equiv 0$ uniformemente en K. Pero $\rho(h) = \rho(\frac{1}{h})$, luego $\rho(g_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en K. Tomando de nuevo $\varepsilon = 1$, se llega a una contradicción similar a la del caso (1). □

1.4. El criterio de normalidad de Montel–Carathéodory

El Criterio de Marty que acabamos de ver da una condición necesaria y suficiente de normalidad. Dedicaremos esta sección –con la que cerramos este capítulo– a demostrar el *Teorema de Montel–Carathéodory*, que proporciona una condición solo suficiente, aunque útil, de normalidad de familias de funciones analíticas (Teorema 1.10).

Antes de enunciarlo, necesitamos algo de notación y recordar un resultado. Sea $\Pi_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ el semiplano superior abierto, y sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad abierto. Utilizaremos en la prueba del Teorema 1.10 la así denominada *función modular de Legendre* $\lambda : \Pi_+ \to \mathbb{C}$, que es una función holomorfa con especiales propiedades; entre ellas, esta función transforma conformemente (es decir, con derivada $\lambda'(z) \neq 0$ siempre) Π_+ en el plano doblemente agujereado $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, de modo que cada punto del último conjunto es imagen de infinitos puntos de Π_+ (ver [5, Cap. 16]).

Teorema 1.10. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $\mathcal{F} \subset H(G)$. Supongamos que existen dos valores distintos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) \neq a, b$ para todo punto $z \in G$ y toda función $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Demostración. Es fácil verificar que $\mathcal{F}$ es normal si y solo si lo es la familia $\widetilde{\mathcal{F}} := \left\{z \in G \mapsto \frac{f(z)-a}{b-a} \in \mathbb{C} : f \in \mathcal{F}\right\}$. Luego podemos suponer que $a = 0$, $b = 1$. Además, ya que cada compacto $K \subset G$ queda cubierto por una cantidad finita de discos abiertos de radio prefijado tan pequeño como queramos, podemos asumir también que G es un disco.

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ y fijemos un punto $c \in G$. Pueden ocurrir dos casos:
(1) La sucesión $\{f_n(c)\}_{n\geq 1}$ posee algún límite de oscilación $d \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.
(2) La sucesión $\{f_n(c)\}_{n\geq 1}$ no posee ningún límite de oscilación distinto de $0, 1, \infty$.

En el caso (1) tenemos, pasando si es necesario a subsucesiones, que $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = d$. Si $B \subset \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ es un disco abierto de centro d, seleccionamos una región V de Π_+ que se transforme biyectivamente mediante la función modular en B, y entonces existe $\psi : B \to V$ analítica y biyectiva, inversa de $\lambda|_V$. Si fijamos un arco $\gamma \subset G$ que comience en c, entonces, cubriendo el arco $\gamma \circ f_n$ mediante un número finito de bolas, la primera de las cuales es B y de modo que dos consecutivas tengan intersección no vacía, se demuestra que el germen determinado en c por $\psi \circ f_n$ se prolonga analíticamente a lo largo de γ. Por el Teorema de Monodromía (ver, por ejemplo, [11, pp. 20-22]), puesto que G es simplemente conexa, tal elemento define por prolongación una función uniforme $g_n \in H(G)$ tal que $g_n(G) \subset \Pi_+$, luego

$$h_n := \frac{g_n - i}{g_n + i} \in H(G) \quad \text{y} \quad h_n(\Omega) \subset \mathbb{D} \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema de Montel, $\{h_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión relativamente compacta, luego contiene una subsucesión $\{h_{n_k}\}$ uniformemente convergente en compactos de G a cierta función $h \in H(G)$. Entonces $|h| \leq 1$ en G pero, por el Principio del Módulo Máximo, es $|h| < 1$ en G, pues $|h(c)| = \left|\frac{\psi(d) - i}{\psi(d) + i}\right| < 1$. Usando el Principio de Prolongación Analítica, se tiene que $\lambda \circ g_n = f_n$ en Ω (ya que $\lambda \circ g_n = f_n$ en un entorno de c). Pero, en virtud de la definición de h_n, resulta que $g_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} i\frac{1+h}{1-h}$ uniformemente en compactos de G, luego

$f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda(i\frac{1+h}{1-h})$ uniformemente en compactos de G.

En el caso (2), supongamos que 1 es límite de oscilación de $\{f_n(c)\}_{n\geq 1}$. Pasando a subsucesiones, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = 1$. Los subcasos en los que 0 ó ∞ son límites de oscilación de tal sucesión pueden reducirse al anterior considerando respectivamente las sucesiones $\{1-f_n\}_{n\geq 1}$ y $\{1-(1/f_n)\}_{n\geq 1}$. Así pues, partimos de que $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = 1$. Puesto que G es un disco y ninguna f_n se anula en él, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $g_n \in H(G)$ la cual es una determinación continua de $\log f_n$ en G tal que $g_n(c) = \log_P f_n(c)$, donde por $\log_P$ se ha denotado el logaritmo principal. Consideremos ahora la sucesión de funciones

$$\phi_n(z) := \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} g_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Se verifica: $\phi_n \in H(G)$, $\phi_n(G) \subset \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ y $\lim_n \phi_n(c) = 1/2 \neq 0, 1, \infty$. En consecuencia, podemos aplicar el caso (1) a $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$, de lo que resulta que existen una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}$ y una función $\phi \in H(\Omega)$ tales que $\phi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ uniformemente en compactos de G. Ninguna función ϕ_{n_k} toma el valor $1/2$, luego, por el Teorema de Hurwitz (Teorema 1.2), o bien $\phi \equiv 1/2$ o bien ϕ no toma el valor $1/2$. Pero $\phi(c) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k}(c) = 1/2$, y por tanto $\phi \equiv 1/2$, de donde se deduce que $f_{n_k} \to 1$ $(k \to \infty)$ uniformemente en compactos de G. En consecuencia, $\mathcal{F}$ es normal. $\square$

Capítulo 2

Funciones subarmónicas

Introducimos en este capítulo una familia especial de funciones reales de variable compleja que, si bien no son holomorfas, están intimamente relacionadas con ellas ya que proporcionan la herramienta más sencilla para resolver el Problema de Dirichlet sobre funciones armónicas, y es bien conocido que cada función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa. También veremos alguna aplicación a la teoría de la convexidad, que será útil cuando estudiemos los espacios de Hardy. Aunque la mayoría de las definiciones y resultados pueden darse en un abierto $G \subset \mathbb{C}$, supondremos que G es una región –es decir, abierto y conexo– por el doble motivo de la simplicidad y de abarcar la mayoría de los casos prácticos.

Recordemos que el *Problema de Dirichlet* para una región $G \subset \mathbb{C}$ consiste en lo siguiente: Dada una función continua $\varphi : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ (la hipótesis de continuidad de φ se puede relajar algo), encontrar una función $u : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica en G –es decir, que obedece la ecuación de Laplace $\Delta u := u_{xx}+u_{yy} = 0$ en G– y continua en G, tal que $u|_{\partial G} \equiv \varphi$, y estudiar su unicidad. Hemos denotado, como es usual, por ∂G la frontera de G. La unicidad de u se da, por ejemplo, si G es acotada, pero ni siquiera en este caso se da necesariamente la existencia; por ejemplo, considérese la región $G := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y la función-dato en la frontera $\varphi : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } |t| = 1. \end{cases}$ Denotaremos por $Arm(G)$ el espacio vectorial de las funciones armónicas $G \to \mathbb{R}$.

Con la ayuda de la familia de funciones subarmónicas –introducidas por F. Riesz en 1925– y a través del así llamado *método de Perron del agotamiento*, resolveremos el Problema de Dirichlet en un amplio número de casos.

2.1. Convexidad y funciones subarmónicas

Notemos que, para una variable real, la ecuación de Laplace se reduce a $u'' = 0$, luego las únicas funciones armónicas de variable real son las rectas $u(x) = ax+b$. Recordemos que, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces una función $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *convexa* cuando, para todo intervalo $J = [c, d] \subset I$ y toda función lineal afín (es decir, toda recta) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $v(c) \leq u(c)$ y $v(d) \leq u(d)$ (es decir, con $v \leq u$ en ∂J), se tiene que $v(x) \leq u(x)$ para todo $x \in J$.

Pues bien, las funciones subarmónicas van a ser la generalización al plano complejo de las funciones convexas. En la siguiente proposición –cuyo contenido y prueba pueden encontrarse en manuales clásicos sobre funciones reales (ver, por ejemplo, [19, Capítulo 11])– recordamos algunas propiedades de las funciones convexas. Muchas de dichas propiedades tendrán su correspondiente generalización en el contexto de las funciones subarmónicas.

Proposición 2.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *Son equivalentes:*

(a) *v es convexa.*

(b) *Para todos* $x, y \in I$ *y todo* $\alpha \in (0,1)$, *se tiene*
$$v(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha v(x) + (1-\alpha)v(y).$$

(c) *Para todo* $N \in \mathbb{N}$, *todos* $x_1, \ldots, x_N \in I$ *y todos* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in [0,1]$ *con* $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, *se tiene* $v\big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\big) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v(x_i)$.

(2) *Si* v *es convexa, entonces es continua.*

(3) *Si* $\{v_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de funciones convexas en* I *y* $v_n \longrightarrow v$ $(n \to \infty)$ *puntualmente en* I, *entonces* v *es convexa.*

(4) *Si* v, v_1 *y* $v_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *son convexas y* $\lambda \geq 0$, *entonces* λv, $v_1 + v_2$ *y* $max\{v_1, v_2\}$ *son convexas.*

(5) *Si* v *es convexa y* $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *es creciente y convexa, donde* S *es un intervalo que contiene a* $v(I)$, *entonces* $\varphi \circ v$ *es convexa.*

(6) *Si* v *es derivable en* I *y* v' *es creciente, entonces* v *es convexa.*

(7) *Si* $v \in \mathcal{C}^2(I)$, *entonces* v *es convexa si y solo si* $v''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$.

(8) [Desigualdad de Jensen] *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de probabilidad y* $F : X \longrightarrow I$ *una función integrable. Si* v *es convexa y* $v \circ F$ *es integrable, entonces* $v\big(\int F\, d\mu\big) \leq \int v \circ F\, d\mu$.

(9) *La función* v *es convexa si y solo si es continua y cumple*
$$v\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{v(x)+v(y)}{2} \quad \textit{para todo } x, y \in I.$$

Obsérvese que en (2) es fundamental que el intervalo sea abierto. Pasamos ahora a dar la definición de subarmonicidad.

Definición 2.2. *Sea* $G \subset \mathbb{C}$ *una región. Una función* $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que es* subarmónica *cuando es continua y, para cada región* Ω *tal que* $\overline{\Omega}$ *es compacto y* $\overline{\Omega} \subset G$ *y cada función* $h \in C(\overline{\Omega}) \cap Arm(\Omega)$ *con* $v \leq h$ *en* $\partial\Omega$, *se tiene que* $v \leq h$ *en* Ω.

Denotaremos por $SA(G)$ la clase de las funciones subarmónicas en G. La última condición de la definición anterior nos dice que, para h en tales condiciones, la función $v - h$ satisface el Principio del Máximo en Ω. Apuntamos que puede darse una teoría algo más general de funciones subarmónicas permitiendo que $v(G) \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y que v sea solo superiormente semicontinua. Evidentemente, $Arm(G) \subset SA(G)$.

Recordemos que una función armónica cumple la *propiedad del valor medio*. Específicamente, si $u \in Arm(G)$ y $B(a, R) \subset G$ entonces $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\, d\theta$ para todo $r \in (0, R)$. Recíprocamente, la propiedad del valor medio caracteriza las funciones armónicas: Si $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en G y, dado $a \in G$, existe algún $R = R_a > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$ y $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$ para todo $r \in (0, R)$, entonces $u \in Arm(G)$. Análogamente, vamos a disponer de un *criterio del sub-valor medio* para funciones subarmónicas. Antes de ello, fijemos el siguiente concepto, que se inspira en la Fórmula de Poisson para funciones armónicas en un disco.

Definición 2.3. *Para cada $a \in \mathbb{C}$ y cada $R \in (0, +\infty)$ fijados, se define la* transformada de Poisson *como la aplicación $P_{a,R} : C(\partial B(a, R)) \longrightarrow Arm(B(a, R))$ dada por*

$$(P_{a,R}\, \varphi)\,(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{R\, e^{i\theta} + z - a}{R\, e^{i\theta} - z + a}\right) \cdot \varphi(a + R\, e^{i\theta})\, d\theta$$

para cada $\varphi \in C(\partial B(a, R))$ y cada $z \in B(a, R)$.

Por el Teorema de Schwarz, $P_{a,R}$ se extiende continuamente a $\overline{B}(a, R)$ haciendo $P_{a,R}\, \varphi := \varphi$ en la frontera $|z - a| = R$.

Teorema 2.4. [Criterio del sub-valor medio] *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}$ es una región y que $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Son equivalentes las siguientes propiedades:*

(a) $v \in SA(G)$.

(b) *Si* $a \in G$ *y* $R > 0$ *son tales que* $\overline{B}(a,R) \subset G$*, entonces* $v(z) \leq (P_{a,R}\, v)(z)$ *para todo* $z \in B(a,R)$.

(c) *Para toda bola* $B(a,R) \subset G$ *y todo* $r \in (0,R)$*, se tiene*
$$v(a) \leq \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+re^{i\theta})\, d\theta.$$

(d) *Para cada* $a \in G$*, existe* $R = R_a > 0$ *tal que* $B(a,R) \subset G$ *y* $v(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+re^{i\theta})\, d\theta$ *para todo* $r \in (0,R)$.

(e) *Para cada región* $\Omega \subset G$ *y cada función* $h \in Arm(\Omega)$*, se tiene que, si* $v-h$ *alcanza máximo en* Ω*, entonces* $v-h$ *es constante en* Ω.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Aplicar la subarmonicidad de v a $h := P_{a,R}\, v$ y $\Omega := B(a,R)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Es trivial pues basta hacer $z = a$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Evidente.

(e) $\Rightarrow$ (a): Sean Ω una región con $\overline{\Omega}$ compacto $\subset G$ y $h \in C(\Omega) \cap Arm(\Omega)$ con $v \leq h$ en $\partial\Omega$. Distinguiremos dos casos. Si $v-h$ es constante $= c$ en Ω, entonces, por continuidad, $v-h = c$ en $\partial\Omega$, luego $c \leq 0$. Así que $v = c+h \leq h$ en Ω. Si, por el contrario, $v-h$ no es constante en Ω, entonces $v-h$ no alcanza máximo en Ω. Ya que $\overline{\Omega}$ es compacto, lo debe alcanzar en algún punto de $\partial\Omega$, digamos en z_0. Así que $v(z) - h(z) \leq v(z_0) - h(z_0) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$, luego $v(z) \leq h(z)$ para todo $z \in \Omega$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Consideremos una región $\Omega \subset G$ y una función $h \in Arm(\Omega)$ tal que $H := v-h$ alcanza máximo en Ω, es decir, existe $a \in \Omega$ tal que $H(z) \leq H(a)$ para todo $z \in \Omega$. Hemos de probar que $H =$ constante en Ω. Para ello, fijemos un punto $b \in \Omega \setminus \{a\}$ y llamemos $\alpha := H(a)$. Por hipótesis, dado $z \in G$, existe $R_z > 0$ tal que $B(z,R_z) \subset G$ y $v(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+re^{i\theta})\, d\theta$ para todo $r \in (0,R_z)$.

Ahora bien, gracias a la conexión de Ω, podemos elegir una familia finita de bolas $\{B_j := B(z_j, R_{z_j})\}_{j=1}^{p}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{p} B_j \subset \Omega$, $z_1 = a$, $z_p = b$ y $z_{j+1} \in B_j$ $(j = 1, \dots, p)$. Por ser h armónica, cumple la propiedad del valor medio, luego $\alpha = H(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(a + re^{i\theta})\, d\theta$ para todo $(0, R_{z_1})$.

Si fuese $H(w) < H(a)$ para algún $w := a + re^{i\theta_0} \in B_1$, entonces un argumento de continuidad aplicado a la función

$$\varphi(\theta) := H(a + re^{i\theta}) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

en el punto $\theta = \theta_0$ probaría que $H(a) < H(a)$, lo que es absurdo. Por tanto $H(z) = H(a) = \alpha$ para todo $z \in B_1$. En particular, $H(z_2) = \alpha$. Pero $H(z_2) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(z_2 + re^{i\theta})\, d\theta$ para todo $r \in (0, R_{z_2})$, lo que implica, como antes, que $H(z) = \alpha$ para todo $z \in B_2$. Así, en un número finito de pasos llegamos a que $H(z) = \alpha$ para todo $z \in B_p$. En particular, $H(b) = H(z_p) = \alpha$, así que $H(a) = H(b)$ para cada $b \in \Omega \setminus \{a\}$. Hemos obtenido pues que H es constante en Ω, como se quería probar. $\square$

Usando el teorema anterior se llega fácilmente al siguiente resultado, que nos dice que la subarmonicidad es, al igual que la armonicidad, una propiedad local que es estable bajo convergencia compacta.

Proposición 2.5. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene:*

(1) *$v \in SA(G)$ si y solo si para cada $a \in G$ existe una subregión $G_a \subset G$ tal que $a \in G_a$ y $v \in SA(G_a)$.*

(2) *Si $\{v_n\}_1^{\infty} \subset SA(G)$ y $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ uniformemente en compactos de G, entonces $v \in SA(G)$.*

Seguidamente, damos un criterio de subarmonicidad que es análogo al de la derivada segunda para funciones convexas de variable real.

Teorema 2.6. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $v \in \mathcal{C}^2(G)$. Son equivalentes:*

(a) $v \in SA(G)$.

(b) $\Delta v \geq 0$ *en* G.

Demostración. Es evidente que v es continua en G. Usaremos el criterio del sub-valor medio. Tomemos una bola $B(a,R) \subset G$. Podemos escribir $a = x_0 + iy_0$. Seleccionamos un $r \in (0,R)$, y definimos $K := \overline{B}(0,r)$, $P := -v_y$ y $Q := v_x$. Según la Fórmula de Green, tenemos

$$\oint_{\partial K} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_K (Q_x - P_y)\,dxdy.$$

Pasando a coordenadas polares con centro en a [es decir, $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\operatorname{sen}\theta$], resulta que

$$\int\int_{\overline{B}(a,r)} \Delta v(z)\,dxdy\,dr = \int_0^{2\pi} v_r(a + re^{i\theta})\,r\,d\theta.$$

Fijemos un $R_1 \in (0,R)$. Usando el Teorema de Fubini y la Regla de Barrow, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{R_1} \Big(\int\int_{\overline{B}(a,r)} \Delta v(z)\,dxdy\Big)\frac{1}{2\pi r}\,dr &= \int_0^{R_1} \Big(\int_0^{2\pi} v_r(a+re^{i\theta})r\,d\theta\Big)\frac{1}{2\pi r}\,dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{R_1} v_r(a+re^{i\theta})\,dr\Big)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v(a+R_1e^{i\theta}) - v(a))\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+R_1e^{i\theta})\,d\theta - v(a).
\end{aligned}$$

Resulta pues que

$$v(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+R_1e^{i\theta})\,d\theta - \int_0^{R_1}\Big(\int\int_{\overline{B}(a,r)} \Delta v(z)\,dxdy\Big)\frac{dr}{2\pi r}.$$

Si $\Delta v \geq 0$ en G, entonces $v(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+R_1e^{i\theta})\,d\theta$ para todo $R_1 \in (0,R)$, luego $v \in SA(G)$ por el criterio del sub-valor medio.

Recíprocamente, supongamos que $v \in SA(G)$ y que, por reducción al absurdo, existe $a \in G$ tal que $\Delta v(a) < 0$. Esto implica, por continuidad, que existe algún $R_1 > 0$ tal que $\overline{B}(a, R_1) \subset G$ y $\Delta v(z) < 0$ para todo punto z de la bola anterior. Como consecuencia, $v(a) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a + R_1 e^{i\theta})\, d\theta$, lo que contradice el criterio del sub-valor medio. $\square$

En el próximo teorema vamos a ver cómo obtener funciones subarmónicas a partir de otras conocidas.

Teorema 2.7. *Sean Ω y G regiones de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, y $v, v_1, v_2 \in SA(G)$ y supongamos que $\overline{B}(c, R) \subset G$. Se verifica:*

(a) $\lambda v, v_1 + v_2$ *y* $\max\{v_1, v_2\} \in SA(G)$.

(b) *Si* $\widetilde{v} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *se define por* $\widetilde{v}(z) = \begin{cases} P_{c,R}\, v(z) & \text{si } z \in B(c, R) \\ v(z) & \text{si } z \in G \setminus B(c, R), \end{cases}$

entonces $\widetilde{v} \in SA(G)$.

(c) *Si* φ *es convexa y creciente y* $v(G) \subset (a, b)$, *entonces* $\varphi \circ v \in SA(G)$.

(d) *Si* $f(\Omega) \subset G$, *entonces* $v \circ f \in SA(\Omega)$.

Demostración. (a) Que λv y $v_1 + v_2 \in SA(G)$ resulta como consecuencia del criterio de subvalor medio, mientras que de la misma definición resulta que $\max\{v_1, v_2\} \in SA(G)$.

(b) Llamemos $\Delta := B(c, R)$. Se tiene que $\widetilde{v} \in C(G)$ y que, puesto que la subarmonicidad es una propiedad local, $\widetilde{v} \in SA(\Delta) \cap SA(G \setminus \overline{\Delta})$. Por tanto, basta probar que $\widetilde{v}$ es subarmónica en un entorno de cada punto $z_0 \in \partial\Delta$. Para ello, sea $R_1 > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, R_1) \subset G$. Por el apartado (b) del criterio del sub-valor medio se tiene que $v \leq \widetilde{v}$ en G. Pero $\widetilde{v}(z_0) = v(z_0)$, luego $\widetilde{v}(z_0) = v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{v}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ para cada $r \in (0, R_1)$. Del criterio del sub-valor medio deducimos que $\widetilde{v}$ es subarmónica en un entorno de z_0.

(c) Ya que φ es convexa, es continua, luego $\varphi \circ v$ es continua. Usamos una vez más el criterio del sub-valor medio junto con la desigualdad integral de Jensen.

Fijados $a \in G$ y $R > 0$ tales que $B(a,R) \subset G$, obtenemos, utilizando que φ es creciente, lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ v)(a) &= \varphi(v(a)) \\ &\leq \varphi\Big(\int_0^{2\pi} v(a+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\Big) \\ &\leq \int_0^{2\pi} (\varphi \circ v)(a+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\end{aligned}$$

para todo $r \in (0,R)$. Por tanto, $\varphi \circ v \in SA(G)$.

(d) Supongamos primero que f es conforme, es decir, $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in \Omega$. Usamos el carácter local de la subarmonicidad: fijemos un punto $t_0 \in \Omega$. Por el Teorema de la Función Inversa, existen un $r > 0$ y un abierto $U_0 \subset G$ tales que $U_0 \ni z_0 := f(t_0)$ y queda definida una inversa $f^{-1} : U_0 \to B(t_0, r)$, de modo que $f^{-1} \in H(U_0)$. Sean $\widetilde{\Omega}$ una región contenida en $B(t_0,r)$ y $h \in Arm(\widetilde{\Omega})$ tales que $v \circ f - h$ alcanza máximo en $\widetilde{\Omega}$.

Llamemos $\widetilde{G} := f(\widetilde{\Omega}) \subset G$ y $h_1 := h \circ f^{-1} \in Arm(\widetilde{G})$. Ya que $v \circ f - h = v \circ f - h_1 \circ f = (v - h_1) \circ f$, tenemos que $v - h_1$ alcanza máximo en $\widetilde{G}$, luego $v - h_1$ es constante en $\widetilde{G}$, así que $v \circ f - h$ es constante en $\widetilde{\Omega}$. De aquí se deduce que $v \circ f \in SA(\Omega)$.

En segundo lugar, supongamos que v es subarmónica en un entorno de 0 y que $k \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que $h(z) := v(z^k)$ es también subarmónica en algún entorno de 0: Dado $z_0 \neq 0$, la función $\psi(z) := z^k$ es localmente conforme en z_0, es decir, existe U abierto con $U \ni z_0$ tal que $\psi'(z) = kz^{k-1} \neq 0$ para todo $z \in U$. Se deduce del párrafo anterior que h es subarmónica en un entorno de cada punto $z_0 \neq 0$. Si $k = 1$, es obvio que h es también subarmónica en un entorno de 0.

Por último, es suficiente demostrar que si $k > 1$, $z_0 = 0$ y $\varepsilon \in (0,1)$ es suficientemente pequeño, entonces $h(0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$, pues la subarmonicidad es una propiedad local. Tenemos, para $\varepsilon \in (0,1)$ suficientemente pequeño, que

$$
\begin{aligned}
h(0) = v(0) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varepsilon^k e^{i\varphi})\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi k}\cdot k\int_0^{2\pi} v(\varepsilon^k e^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2\pi k}\sum_{n=1}^{k}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} v(\varepsilon^k e^{i\varphi})\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} v(\varepsilon^k e^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi k} v(\varepsilon^k e^{i\varphi})\,\frac{d\varphi}{k} \\
&= [\text{hacemos } \varphi = k\theta\,] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v((\varepsilon e^{i\theta})^k)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Por último, veamos el caso general. Llamemos $V := v \circ f$. Si f es constante, entonces V es constante, luego $V \in SA(\Omega)$. Supongamos pues que f no es constante. Entonces $f' \not\equiv 0$, así que el conjunto $\mathcal{Z} := \{t \in \Omega : f'(t) = 0\}$ está formado por puntos aislados. Si $t_0 \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$, entonces existe un entorno de t_0 donde f' no se anula. Esto implica, por la primera parte, que V es subarmónica en algún entorno de t_0. Debido al carácter local de la subarmonicidad, es suficiente demostrar que V es subarmónica en un entorno de cada punto $t_0 \in \mathcal{Z}$.

Fijemos pues un punto $t_0 \in \mathcal{Z}$. Entonces existe un $r > 0$ tal que $B(t_0, r) \subset \Omega$ y t_0 es el único punto de la bola anterior donde f' se anula. En consecuencia, existen un número $k \in \mathbb{N}$ y una función $\varphi \in H(B(t_0, r))$ tales que φ no se anula en $B(t_0, r)$ y $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^k \varphi(t)$ para todo $t \in B(t_0, r)$. Puesto que $B(t_0, r)$ es una región simplemente conexa, existe una función $\psi \in H(B(t_0, r))$ tal que $\psi^k = \varphi$ en dicha bola. Por tanto, podemos escribir, en un entorno de t_0, que $V = v \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$, donde:

- $\alpha(z) := (z - t_0)\psi(z)$, la cual es conforme en un entorno de t_0,
- $\beta(z) := z^k$, y
- $\gamma(z) := z + f(t_0)$, que es conforme.

En consecuencia, aplicando sucesivamente los casos anteriores, obtenemos que V es subarmónica en algún entorno de t_0, como se quería demostrar. □

2.2. Funciones subarmónicas y Problema de Dirichlet

Nuestro próximo objetivo es aplicar las funciones subarmónicas a la solución del Problema de Dirichlet. Para ello, necesitamos un resultado sobre funciones armónicas que es interesante por sí mismo.

Lema 2.8. (a) [Desigualdad de Harnack] *Sea* $u \in Arm(B(a,R))$ *tal que* $u(z) \geq 0$ *para todo* $z \in B(a,r)$. *Entonces*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a)$$

para todo $r \in (0,R)$ *y todo* $z \in \overline{B}(a,r)$.

(b) [Principio de Harnack] *Sean* $G \subset \mathbb{C}$ *una región y* $\{u_n\}_1^\infty \subset Arm(G)$ *una sucesión tal que* $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $z \in G$. *Supongamos que existe un* $z_0 \in G$ *tal que la sucesión* $\{u_n(z_0)\}_1^\infty$ *es acotada. Entonces existe* $u \in Arm(G)$ *tal que* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ *uniformemente en compactos de* G.

Demostración. (a) Es claro que podemos suponer $a = 0$. Por la Fórmula de Poisson para un disco, se tiene, para cualquier $\rho \in (0,R)$ y todo $z \in B(0,\rho)$, que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - |z|^2}{|\rho e^{i\theta} - z|^2} \cdot u(\rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Por otra parte, se tiene que el factor izquierdo del integrando está comprendido entre $\frac{\rho-r}{\rho+r}$ y $\frac{\rho+r}{\rho-r}$. Basta ahora multiplicar la doble desigualdad obtenida por $u(\rho e^{i\theta})$ (se mantiene la desigualdad porque $u \geq 0$), integrar entre 0 y 2π, aplicar la propiedad del valor medio para funciones armónicas y hacer $\rho \to R$.

(b) Llamemos $E := \{a \in G : \text{la sucesión } \{u_n(a)\}_1^\infty \text{ es acotada}\}$. Probemos que E es abierto y cerrado en G. Tomemos un punto $a \in E$ y elijamos $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Por la segunda desigualdad del apartado (a) (aplicada a la sucesión $\{u_n - u_1\}_{n \geq 1}$) tenemos:

$$u_n(z) - u_1(z) \leq \frac{R + r}{R - r}(u_n(a) - u_1(a))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $r \in (0, R)$ y todo $z \in \overline{B}(a, r)$. Luego la sucesión $\{u_n(z)\}_{n \geq 1}$ está acotada para cada $z \in B(a, R)$, es decir, $B(a, R) \subset E$. Así que E es abierto.

Para ver que E es cerrado en G, tomemos un punto $a \in \overline{E} \cap G$. Entonces existe $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$ y existe $z_1 \in E \cap B(a, \frac{R}{2})$. Usando la primera desigualdad de (a), esto implica que

$$\frac{R - \frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}}(u_n(a) - u_1(a)) \leq u_n(z_1) - u_1(z_1),$$

de donde se deduce que $u_n(a) \leq u_1(a) + 3(u_n(z_1) - u_1(z_1))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que la sucesión $\{u_n(z_1)\}_{n \geq 1}$ está acotada, inferimos que $\{u_n(a)\}_{n \geq 1}$ también lo está, es decir, $a \in E$. Esto nos dice que E es cerrado. En resumen, hemos obtenido que E es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío (pues $z_0 \in E$) del espacio topológico conexo G. En consecuencia, $E = G$.

En otras palabras, la sucesión $\{u_n(z)\}_1^\infty$ es acotada –y monótona– para cada $z \in G$. Por tanto, existe una función $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$ puntualmente en G. Para probar que la convergencia es uniforme en compactos de G [lo que implicaría ya que $u \in Arm(G)$], basta demostrar que cada punto $a \in G$ tiene un entorno U donde se da la convergencia uniforme. Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, un punto $a \in G$ y un $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Tomemos $U := B(a, \frac{R}{2})$. Por la segunda desigualdad de (a) y por ser $\{u_n\}_{n \geq 1}$ creciente en cada punto, obtenemos

$$0 \leq u_m(z) - u_n(z) \leq 3(u_m(a) - u_n(a)) \quad \text{para todo} \quad z \in U.$$

Pero $\{u_n(a)\}_1^\infty$ converge, luego es de Cauchy. Basta ahora aplicar el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de sucesiones de funciones. $\square$

Con el así denominado *método del agotamiento,* debido a O. Perron, puede probarse un resultado bastante general, a saber: El Problema de Dirichlet puede resolverse para cualquier región $G \subset \mathbb{C}$ tal que ninguna componente conexa de $\mathbb{C} \backslash G$ se reduzca a un punto. Aquí se restringirá bastante la hipótesis, pero el método de Perron quedará suficientemente ilustrado.

Definición 2.9. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región. Diremos que una función $\omega : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* barrera para *G en el punto t_0, donde $t_0 \in \Gamma := \partial G$, cuando $\omega \in C(\overline{G}) \cap Arm(G)$, $\omega(t_0) = 0$ y $\omega(t) > 0$ para todo $t \in \Gamma \setminus \{t_0\}$.*

Teorema 2.10. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región acotada y $\Gamma := \partial G$. Tenemos:*

(a) *Si $t_0 \in \Gamma$, $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y existe una barrera para G en t_0, entonces existe $u \in Arm(G)$ tal que $\lim_{z \to t_0} u(z) = \varphi(t_0)$.*

(b) *Si cada punto de Γ admite una barrera, el Problema de Dirichlet tiene solución en G.*

(c) *Si cada punto de Γ es el extremo de algún segmento cuyos restantes puntos están fuera de $\overline{G}$, entonces el Problema de Dirichlet tiene solución en G.*

Demostración. La parte (b) es claramente consecuencia de (a). Por otra parte, (c) es consecuencia de (b): En efecto, si $t_0 \in \Gamma$ y $L = [t_0, t_1]$ es un segmento tal que $(t_0, t_1] \subset \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, basta tomar como barrera en t_0 la función $\omega(z) = \operatorname{Im}(e^{-i\alpha} \cdot \varphi(z))$, donde φ es una rama uniforme de $\sqrt{\frac{z-t_0}{z-t_1}}$ y α es una constante real adecuada que depende de la inclinación de L.

Basta pues probar (a). Tenemos que $t_0 \in \Gamma$, $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es continua en t_0, y existe $\omega : \overline{G} \to \mathbb{R}$ continua con $\omega \in Arm(G)$ tal que $\omega(t_0) = 0 < \omega(t)$ para todo $t \in \Gamma \setminus \{t_0\}$. Hemos de encontrar $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $\lim_{z \to t_0} u(z) = \varphi(t_0)$. Lo haremos en cuatro pasos:

Paso 1. Definimos el conjunto
$$\mathcal{D}(\varphi) := \{v \in SA(G) : \limsup_{z \to t_0} v(z) \leq \varphi(t_0)\ \forall t_0 \in \Gamma\}.$$
Ya que Γ es compacto y φ es continua, es acotada, es decir, existe $M \in (0, +\infty)$ tal que $|\varphi(t)| \leq M$ para todo $t \in \Gamma$. Luego $-M \in \mathcal{D}(\varphi)$, así que $\mathcal{D}(\varphi) \neq \emptyset$.

Paso 2. Se tiene que $v(z) \leq M$ para todo $z \in G$ y para todo $v \in \mathcal{D}(\varphi)$. En efecto, fijemos $v \in \mathcal{D}(\varphi)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $E := \{z \in G : v(z) \geq M + \varepsilon\}$. Ya que G es acotado, así lo es E. Pero E es también cerrado en $\mathbb{C}$, pues $\mathbb{C} \setminus E$ es abierto, ya que $\mathbb{C} \setminus E = (\mathbb{C} \setminus \overline{G}) \cup \Gamma \cup (G \setminus E)$ tiene todos sus puntos interiores (usar la continuidad de v para los puntos de $G \setminus E$, y la definición de $\mathcal{D}(\varphi)$ para los puntos de Γ). Por tanto E es compacto, luego v alcanza máximo en E, que sería un máximo en G, lo que implica, por ser $v \in SA(G)$, que v es constante en G. Pero, por definición de E, tal constante debe ser $> M$, lo que es una contradicción, salvo que $E = \varnothing$. En consecuencia, $E = \varnothing$, así que $v(z) < M + \varepsilon$ para todo $z \in G$ y para todo $\varepsilon > 0$. Basta hacer ahora $\varepsilon \to 0$.

Paso 3. Por los pasos *1* y *2*, la función $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$u(z) := \sup\{v(z) : v \in \mathcal{D}(\varphi)\}$$
está bien definida. Tenemos que $u \in Arm(G)$. En efecto, fijemos un punto $z_0 \in G$ y sea $\Delta = B(a, R)$ un disco tal que $\overline{\Delta} \subset G$ y $\Delta \ni z_0$. Por definición de u, podemos encontrar una sucesión $\{v_n\}_1^\infty \subset \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $v_n(z_0) \longrightarrow u(z_0)$ cuando $n \to \infty$. Si $V_n := \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\{V_n\}_1^\infty \subset \mathcal{D}(\varphi)$ y es creciente en cada punto de G. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\widetilde{V_n} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$\widetilde{V_n}(z) = \begin{cases} V_n(z) & \text{si} \quad z \in G \setminus \Delta \\ P_{a,R}V_n(z) & \text{si} \quad z \in \Delta. \end{cases}$$
Se deduce que la sucesión $\{\widetilde{V_n}\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}(\varphi)$, es creciente en cada punto de G, y además $\widetilde{V_n}(z_0) \longrightarrow u(z_0)$ cuando $n \to \infty$, ya que $v_n \leq V_n \leq \widetilde{V_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Principio de Harnack, existe $U \in Arm(\Delta)$ tal que

$\widetilde{V_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Δ. Necesariamente, $U(z_0) = u(z_0)$ y $U \leq u$ en Δ. Si partimos de otro punto $z_1 \in \Delta$, elegimos $\{w_n\}_1^\infty \subset \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $w_n(z_1) \to u(z_1)$ cuando $n \to \infty$. Sea $W_n := \text{máx}\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$. Considerando la correspondiente sucesión transformada $\{\widetilde{W_n}\}_1^\infty$ mediante la integral de Poisson en Δ, llegamos por el principio de Harnack a una función límite $U_1 \in Arm(\Delta)$ tal que $U \leq U_1 \leq u$ y $U_1(z_1) = u(z_1)$, lo cual implica que $U - U_1$ alcanza el máximo $(= 0)$ en z_0. De aquí deducimos que $U = U_1$ en Δ y, en particular, $u(z_1) = U(z_1)$. Ahora bien, esto es válido para todo $z_1 \in \Delta$, así que $u \equiv U$, luego $u \in Arm(\Delta)$. Pero esto es cierto para todo disco Δ con $\overline{\Delta} \subset \Omega$, lo que implica que $u \in Arm(G)$.

Paso 4. $\text{lím}_{z\longrightarrow t_0} u(z) = \varphi(t_0)$. En efecto: Fijemos $\varepsilon > 0$. Por continuidad, existe un entorno abierto Δ de t_0 tal que $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in \Delta \cap \Gamma$. Ya que $\overline{G} \setminus \Delta$ es compacto, la función barrera $\omega(z)$ tiene ahí un mínimo $\omega_0 > 0$. Sea $W : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $W(z) := \varphi(t_0) + \varepsilon + \frac{\omega(z)}{\omega_0}(M - \varphi(t_0))$. Distinguiendo los casos $t \in \Delta$ y $t \notin \Delta$ obtenemos que $\varphi(t) < W(t)$ para todo $t \in \Gamma$. Pero Γ es compacto, luego existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) < A < W(t)$ para todo $t \in \Gamma$. De forma parecida al Paso *1*, se prueba que el conjunto $\{z \in G : v(z) \geq A\}$ es vacío para toda $v \in \mathcal{D}(\varphi)$. En consecuencia, $v(z) < A$ para todo $z \in G$. Entonces $u(z) = \sup_{v\in\mathcal{D}(\varphi)} v(z) \leq A$ para todo $z \in G$. Pero, por el principio del mínimo, $W(z) > A$ para todo $z \in G$, pues W es continua en $\overline{G}$ y armónica en G. Por tanto $u(z) < W(z)$ para todo $z \in G$, de donde se deduce que

$$\limsup_{z\to t_0} u(z) \leq W(t_0) = \varphi(t_0) + \varepsilon.$$

Por último, sea $V : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$V(z) := \varphi(t_0) - \varepsilon - \frac{\omega(z)}{\omega_0}(M + \varphi(t_0)),$$

la cual es continua en $\overline{G}$ y armónica en G. Se cumple que

$$V(t) \leq \begin{cases} \varphi(t_0) - \varepsilon < \varphi(t) & \text{para todo } t \in \Delta \cap \Gamma \\ -M - \varepsilon < \varphi(t) & \text{para todo } t \in \Gamma \setminus \Delta. \end{cases}$$

Por tanto, $V \in \mathcal{D}(\varphi)$, de donde se deduce que $V \leq u$ en G, luego

$$\liminf_{z\to t_0} u(z) \geq V(t_0) = \varphi(t_0) - \varepsilon.$$

En resumen, tenemos

$$\begin{cases} \limsup_{z\to t_0} u(z) \leq \varphi(t_0) + \varepsilon & \text{para todo } \varepsilon > 0 \\ \liminf_{z\to t_0} u(z) \geq \varphi(t_0) - \varepsilon & \text{para todo } \varepsilon > 0, \end{cases}$$

así que existe $\lim_{z\to t_0} u(z) = \varphi(t_0)$, como se quería demostrar. □

2.3. Una aplicación a la convexidad

Finalizamos este capítulo con una aplicación de la subarmonicidad a la teoría de convexidad. Comenzamos con un resultado auxiliar previo.

Lema 2.11. *Si $u \in SA(B(0,R))$ es circularmente invariante –es decir, $u(z) = u(|z|)$ para todo $z \in B(0,R)$– entonces la función $r \in (0,R) \mapsto u(r) \in \mathbb{R}$ es una función convexa de $\log r$, es decir, la función $r \mapsto u(e^r)$ es convexa en el intervalo $(-\infty, \log R)$.*

Demostración. Consideremos la función $h(r) := \alpha \log r + \beta$, y sean r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2 < R$ tales que $u(r) \leq h(r)$ para $r = r_1, r_2$. La función $h(z) := \alpha \log |z| + \beta$ está en $Arm(B(0,R))$ y, si $U = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$, tenemos $u(z) \leq h(z)$ para todo $z \in \partial U$. Por tanto, ya que $u \in SA(B(0,R))$, resulta $u(z) \leq h(z)$ para todo $z \in U$. entonces $u(r) \leq h(r)$ para todo $r \in (r_1, r_2)$, como se quería demostrar. □

Teorema 2.12. *Si $u \in SA(B(a,R))$, entonces la función*

$$\varphi : r \in [0,R) \mapsto \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt \in \mathbb{R}$$

es una función creciente, y es además una función convexa de $\log r$.

Demostración. Podemos suponer que $a = 0$. Extendemos la definición de φ a valores complejos como $\varphi(z) = \int_0^{2\pi} u(ze^{it})\, dt$ si $z \in B(0,R)$. Tenemos que $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ para todo $z \in B(0,R)$.

Probemos que $\varphi \in SA(B(0,R))$. En primer lugar, es claro que φ es continua. Fijemos $z_0 \in B(0,R)$. Aplicando el criterio del subvalor medio a la función u, y usando el teorema de Fubini para $\rho \in (0, R-|z_0|)$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varphi(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0e^{it})\, dt &\leq \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} u(z_0e^{it} + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \Big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} u(z_0e^{it} + \rho e^{i(\theta+t)}) \frac{d\theta}{2\pi} \Big)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} u(e^{it}(z_0 + \rho e^{i\theta}))\, dt \Big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta.
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando de nuevo el criterio del sub-valor medio, obtenemos $\varphi \in SA(B(0,R))$. Además, debido al lema anterior, $\varphi(r)$ es una función convexa de $\log r$.

Por último, veamos que φ es creciente. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen r_1, r_2 con $0 \leq r_1 < r_2 < R$ tales que $\varphi(r_2) < \varphi(r_1)$. Entonces existiría r tal que $\varphi(r) = \sup_{|z| \leq r_2} \varphi(z)$, lo cual implicaría, por el Principio del Máximo, que φ es constante en $\overline{B}(0, r_2)$. Pero $\varphi(r_2) < \varphi(r_1)$, y esto da la contradicción deseada. $\square$

Corolario 2.13. *Si $f \in H(B(0,R))$, $p \in (0, +\infty)$ y denotamos $I_p(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta$, $J(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$, entonces $I_p(r)$ y $J(r)$ son funciones crecientes, y además son funciones convexas de $\log r$. En particular,*

$$\sup_{0 \leq r < 1} I_p(r) = \lim_{r \to 1} I_p(r) \quad y \quad \sup_{0 \leq r < 1} J(r) = \lim_{r \to 1} J(r).$$

Capítulo 3

Espacios de Bergman

Supondremos a lo largo de este capítulo que G es una región de $\mathbb{C}$. Vamos a estudiar un espacio de funciones analíticas en G que es distinto del espacio total $H(G)$, y además va a tener una topología estrictamente más fuerte. Tal topología va a venir dada por su estructura de espacio de Hilbert.

Consideremos el espacio vectorial $L^2(G)$ de las funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles-Lebesgue tales que su cuadrado es Lebesgue-integrable en G con respecto a la medida de Lebesgue bidimensional, es decir, $\int\int_G |f(z)|^2 \, dxdy < +\infty$, donde $z = x + iy$. Debido a la desigualdad de Cauchy–Schwarz

$$\left| \int\int_G f(z)\overline{g(z)} \, dxdy \right|^2 \leq \int\int_G |f(z)|^2 \, dxdy \cdot \int\int_G |g(z)|^2 \, dxdy,$$

se tiene que la aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \in L^2(G) \times L^2(G) \longmapsto \langle f, g \rangle = \int\int_G f(z) \cdot \overline{g(z)} \, dxdy \in \mathbb{C}$$

–donde estamos identificando en $L^2(G)$ dos funciones cuando son idénticas en G salvo un subconjunto de medida nula– cumple las siguientes propiedades:

- Es una forma sesquilineal, es decir, es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda. Específicamente, para todas las funciones $f, g, h \in$

$L^2(G)$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene: $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$, $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$, $\langle f, g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$, y $\langle f,\alpha g\rangle = \overline{\alpha}\langle f,g\rangle$.

- Es hermítica, es decir, $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ para todas las funciones $f,g \in L^2(G)$.
- Es definida positiva, es decir, $\langle f,f\rangle \geq 0$ para toda $f \in L^2(G)$, y además $\langle f,f\rangle = 0$ si y solo si $f=0$.

En otras palabras, la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un *producto escalar* y $L^2(G)$ es un espacio prehilbertiano. En particular, la aplicación

$$f \in L^2(G) \longmapsto \|f\|_2 := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int\int_G |f|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \in [0,+\infty)$$

es una norma en $L^2(G)$, llamada *norma cuadrática*. Esta norma genera, de manera natural, la métrica $d(f,g) := \|f-g\|_2$, llamada la *distancia cuadrática*. Esta distancia, a su vez, genera una topología, llamada *topología de la convergencia en media cuadrática*. Gracias al Teorema de Riesz–Fischer, $L^2(G)$ es un espacio métrico completo cuando está dotado de la distancia anterior. Por tanto, $(L^2(G),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio de Hilbert*.

En este capítulo vamos a tratar con las funciones de $L^2(G)$ que son analíticas en G. En tal caso no es necesaria la identificación de funciones hecha anteriormente en $L^2(G)$, ya que si f y g son continuas en G y $f=g$ en G salvo un conjunto de medida nula, entonces $f \equiv g$ en G.

Aparte de comparar las dos topologías naturales que surgen, estudiaremos los sistemas ortonormales, especialmente los formados por polinomios cuando la región G es acotada. También descubriremos que las funciones a estudiar pueden ser generadas a través del así denominado núcleo reproductor de Bergman, y se mostrará su relación con el isomorfismo de Riemann sobre el disco unidad. Finalmente, en el caso del disco, estudiaremos los espacios de Bergman de orden superior y los operadores de composición definidos sobre ellos.

3.1. Definición, convergencia y propiedades

Comenzamos con el concepto de espacio de Bergman.

Definición 3.1. *Se llama* espacio de Bergman *de* G *al espacio vectorial*

$$B^2(G) := L^2(G) \cap H(G).$$

Stefan Bergman (1895–1977)

Otra notación para el espacio de Bergman es $L^2_a(G)$. Es un subespacio vectorial tanto de $H(G)$ como de $L^2(G)$. Por tanto, $B^2(G)$ hereda de manera natural dos topologías: la de la convergencia compacta y la de la convergencia cuadrática. Por supuesto, la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anterior es también un producto escalar sobre $B^2(G)$. El resultado siguiente muestra la estructura de este espacio.

Teorema 3.2. (a) *Sean* $f, f_n \in B^2(G)$ $(n \in \mathbb{N})$ *tales que* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *en media cuadrática. Entonces* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *compactamente en* G*. En particular, la topología sobre* $B^2(G)$ *que deriva del producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es más fuerte que la topología que proviene de* $H(G)$*.*

(b) $(B^2(G), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *es un espacio de Hilbert.*

Antes de demostrar el teorema, enunciamos un resultado auxiliar, el cual es interesante por sí mismo. Para dos subconjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{C}$, denotamos $d(A, B) := \text{ínf}\{|z - w| : z \in A, w \in B\}$.

Lema 3.3. *Sean* $f \in H(G)$ *y* $K \subset G$ *un subconjunto compacto. Llamemos*

$$\delta(K) := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot d(K, \partial G) & \text{si} \quad G \neq \mathbb{C} \\ 1 & \text{si} \quad G = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Entonces $\sup_{z \in K} |f(z)| \leq \dfrac{||f||_2}{\delta(K)\sqrt{\pi}}$.

Demostración. Fijemos un punto $a \in K$. Entonces $\overline{B}(a, \delta(K)) \subset G$ y en esta bola la función f tiene un desarrollo de Taylor uniformemente convergente

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k,$$

donde $a_0 = f(a)$. Pasando a coordenadas polares, tenemos $z - a = re^{i\theta}$ $(0 \leq r \leq \delta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ en tal bola. Teniendo en cuenta que el jacobiano de las variables cartesianas x, y respecto de las polares θ, r es r, que la convergencia uniforme permite intercambiar las operaciones de sumación e integración, y que gracias al Teorema de Fubini podemos integrar iteradamente, obtenemos:

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \overline{a_l} \overline{(z-a)^l} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k \bar{a}_l r^{k+l} e^{i(k-l)\theta}, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int\int_G |f(z)|^2 \, dxdy \geq \int\int_{\overline{B}(a,\delta(K))} |f(z)|^2 \, dxdy \\ &= \int_0^{\delta(K)} \int_0^{2\pi} r \cdot \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k \overline{a_l} r^{k+l} e^{i(k-l)\theta} \, drd\theta. \end{aligned}$$

Por último, observemos que $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad m = 0 \\ 0 & \text{si} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$ de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= 2\pi \int_0^{\delta(K)} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k+1} \, dr \\ &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2 \delta(K)^{2k+2}}{k+1} \\ &\geq \pi \delta(K)^2 |a_0|^2 = \pi \delta(K)^2 |f(a)|^2. \end{aligned}$$

Luego, para cada $a \in K$, se deduce $\pi\delta(K)^2|f(a)|^2 \leq \|f\|_2^2$. Por tanto, $|f(a)| \leq \frac{\|f\|_2}{\delta(K)\sqrt{\pi}}$ para todo $a \in K$, lo cual implica lo que queríamos demostrar. $\square$

Demostración del Teorema 3.2. (a) Si f y f_n $(n \in \mathbb{N})$ son como en el enunciado, entonces $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Fijemos un compacto $K \subset G$. Debido al Lema 3.3, tenemos que

$$\sup_K |f_n - f| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\delta(K)\sqrt{\pi}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego $\sup_K |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En consecuencia, $f_n \longrightarrow f$ $(n \to \infty)$ compactamente en G.

(b) Ya que $L^2(G)$ es un espacio métrico completo, basta probar que $B^2(G)$ es cerrado en $L^2(G)$, pues todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo para la métrica inducida. Para verlo, supongamos que $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset B^2(G)$ y que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $\|\cdot\|_2$ para cierta $f \in L^2(G)$. Entonces $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $(B^2(G), \|\cdot\|_2)$; luego, por el Lema 3.3, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $H(G)$. Por tanto, existe $g \in H(G)$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ compactamente en G. Pero del hecho $f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$ se deduce –gracias a un conocido teorema de Riesz (ver, por ejemplo, [12, Capítulo 4])– que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k}(z) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(z)$ en casi todo (e.c.t.) $z \in G$ con respecto a la medida bidimensional de Lebesgue. Ahora bien, también se tiene que $f_{n_k}(z) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g(z)$ para todo $z \in G$, luego $g = f$ e.c.t. G, de donde $g \in L^2(G)$. Así que $g \in B^2(G)$ y por tanto $f \in B^2(G)$ (pues es la alteración de g en un conjunto de medida nula). Concluimos que $B^2(G)$ es cerrado en $L^2(G)$, como se requería. $\square$

Hacemos notar que la convergencia cuadrática es *estrictamente* más fuerte que la convergencia uniformemente en compactos. Por ejemplo, considerar la región $G = \mathbb{D}$, la función $f(z) = 0$ y la sucesión $f_n(z) = n\, z^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

3.2. Sistemas ortonormales en espacios de Hilbert

Seguidamente, vamos a recordar algunos conceptos y resultados sobre ortonormalidad.

Supongamos que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio prehilbertiano. Una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ se dice que forma un *sistema ortogonal* si $\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$ para todos los pares n, m con $n \neq m$. Si, además, $\|\varphi_n\|_2 = 1$ para todo $n \geq 0$ [equivalentemente, si $\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{nm}$ (delta de Kronecker) para todo n, m], diremos que $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ es un *sistema ortonormal* (S.O.N.). En este caso, si $x \in X$, los números $\langle x, \varphi_n\rangle$ $(n \geq 0)$ se denominan *coeficientes de Fourier* de x relativos al sistema $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, mientras que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n$ se llama *serie de Fourier* de x relativa a $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$. Un problema general es si la serie de Fourier de x converge, y si cada vector $x \in X$ es la suma cuadrática de su serie de Fourier, para un S.O.N. dado $\{\varphi_n\}$.

Por $\mathcal{L}(A)$ denotaremos el subespacio vectorial generado por un subconjunto A de un espacio vectorial. Todo S.O.N. es linealmente independiente y, usando el conocido método de ortonormalización de Gram-Schmidt, se obtiene que, dado un sistema linealmente independiente $\{x_n\}_{n\geq 0}$, existe un único S.O.N. $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ tal que:

(a) Para todo $n \geq 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}(\{x_j\}_{j=0}^{n})$ [en particular, (x_n) y (φ_n) generan el mismo subespacio vectorial], y

(b) Para cada $n \geq 0$, si $\varphi_n = \alpha_n x_n + \alpha_{n-1}x_{n-1} + \cdots + \alpha_0 x_0$, entonces $\alpha_n > 0$.

Otros resultados generales quedan recogidos en la siguiente proposición. Recordemos que un subconjunto $A \subset X$ es *total* cuando $\overline{\mathcal{L}(A)} = X$, y que un SON $\{\varphi_n\}$ es *completo* cuando, para cada $x \in X$, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty}\langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n = x$ cuadráticamente.

Proposición 3.4. *Sea X un espacio de Hilbert.*

(A) *Son equivalentes:*

(a) *X es separable.*

(b) *X es homeomorfo al espacio ℓ_2 de las sucesiones complejas de cuadrado sumable.*

(c) *X es isométricamente isomorfo a ℓ_2.*

(d) *Existe en X un SON completo $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$.*

(B) *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ un SON en X. Son equivalentes:*

(a) *$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es completo.*

(b) *$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es total.*

(c) *Para todo $x \in X$ se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = \|x\|_2^2$.*

(d) *Si $\langle x, \varphi_n\rangle = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces $x = 0$.*

(C) *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ un SON en X. Se tiene:*

(a) *Si $x, y \in X$ con $y \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\})$, entonces $\|y - x\|_2 \geq \| \sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n - x\|_2$.*

(b) [Desigualdad de Bessel] *Para todo $x \in X$, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 \leq \|x\|_2^2$,*

(c) [Igualdad de Parseval] *Dado $x \in X$, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n = x$ si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = \|x\|_2^2$.*

(d) *Si $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell_2$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n$ es la serie de Fourier de un vector $x \in X$, y además $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n = x$ cuadráticamente.*

En un espacio de Hilbert X, una *base ortonormal* (B.O.N.) es un S.O.N. total o completo.

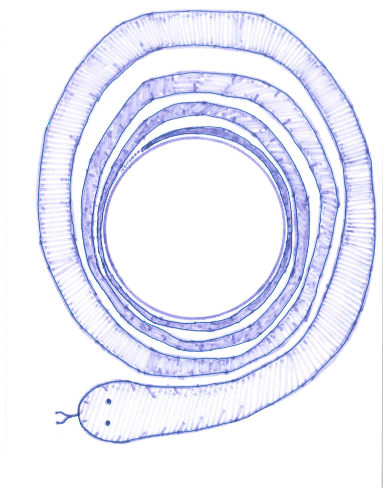
Notemos que, ya que $B^2(G) \subset L^2(G)$ y $L^2(G)$ es separable con la distancia cuadrática, también lo es $B^2(G)$. Apuntamos que $H(G)$ con la topología de la convergencia compacta es también separable, al serlo $\mathcal{C}(G)$, que es un espacio metrizable cuando se dota de la misma topología.

3.3. Aproximación por polinomios en espacios de Bergman. Dominios de Carathéodory.

Consideremos ahora el caso en que la región G es *acotada*. Evidentemente, tenemos aquí que los *polinomios* forman un subconjunto de $B^2(G)$. Aplicando el método de Gram-Schmidt al sistema linealmente independiente de potencias $\{z^n\}_{n\geq 0}$, obtenemos de manera única un SON $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios tales que $\text{grado}\,(P_n) = n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ y sus coeficientes líderes están en $(0, +\infty)$. Se tiene entonces que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una BON si y solo si el conjunto de los polinomios es denso $B^2(G)$, ya que $\mathcal{L}(\{P_n\}_{n\geq 0}) = \{\text{polinomios}\}$. Observemos que $B^2(G)$ tiene siempre una BON, pero no es seguro que posea una formada por polinomios. Daremos seguidamente una sencilla condición suficiente, de carácter topológico, para que esto ocurra.

Definición 3.5. *Un* dominio de Carathéodory *es una región $G \subset \mathbb{C}$ simplemente conexa y acotada tal que $\partial G = \partial G_\infty$, donde G_∞ denota la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$.*

Por ejemplo, $\mathbb{D}$ –y en general, cada región de Jordan– es un dominio de Carathéodory; pero $\mathbb{D} \setminus [0, 1]$ no lo es, aunque es una región acotada y simplemente conexa. Una “serpiente exterior” (ver figura en la página siguiente) es un dominio de Carathéodory, pero no es una región de Jordan porque su frontera divide el plano en tres regiones: el interior del huevo de la serpiente, la serpiente, y el espacio exterior al huevo y a la serpiente.



Una serpiente exterior

Enunciamos a continuación la mencionada condición suficiente de densidad, conocida como *Teorema de Farrell–Markushevich.*

Teorema 3.6. *Si G es un dominio de Carathéodory, entonces los polinomios forman un subconjunto denso en el espacio de Bergman $B^2(G)$.*

Demostración. Haremos uso del siguiente hecho, que puede encontrarse en el Capítulo 2 del libro [16, vol. III]: Fijemos cualquier punto $z_0 \in G$. Entonces existe una sucesión $\{G_n\}_{n\geq 1}$ de regiones de Jordan tal que $G \subset G_{n+1} \subset \overline{G_{n+1}} \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y G es la mayor región Ω tal que $z_0 \in \Omega \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $h_n : G_n \longrightarrow G$ es el único isomorfismo dado por el Teorema de Riemann tal que $h_n(z_0) = z_0$ y $h_n'(z_0) > 0$, entonces $h_n(z) \underset{n\to\infty}{\to} z$ compactamente en G. Observemos que, gracias al Teorema de convergencia de Weierstrass, se deduce que $h_n'(z) \underset{n\to\infty}{\to} 1$ compactamente en G.

Fijemos una función $f \in B^2(G)$ y un $\varepsilon > 0$. Basta hallar un polinomio P tal que $||P - f||_2 < 2\varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por f_n la función $f_n : G_n \longrightarrow G$ dada por $f_n(z) = f(h_n(z))h_n'(z)$, y por m la medida Lebesgue bidimensional.

Por la fórmula del cambio de variables, tenemos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\int\int_G |f_n|^2\,dm = \int\int_{h_n(G)} |f|^2\,dm \leq \int\int_G |f|^2\,dm.$$

Por otra parte, dado un compacto $K \subset G$, sabemos que $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ uniformemente en K. Luego, por el Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada,

$$\liminf_{n\to\infty} \int\int_G |f_n|^2\,dm \geq \liminf_{n\to\infty} \int\int_K |f_n|^2\,dm = \int\int_K |f|^2\,dm.$$

En consecuencia, puesto que lo anterior se cumple para cada compacto $K \subset G$ y $\int\int_G |f|^2 dm = \sup\big\{\int\int_K |f|^2\,dm :\ K \text{ compacto} \subset G\big\}$, obtenemos

$$\int\int_G |f|^2\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int\int_G |f_n|^2\,dm \leq \limsup_{n\to\infty} \int\int_G |f_n|^2\,dm \leq \int\int_G |f|^2 dm,$$

luego $\int\int_G |f_n|^2\,dm \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\int_G |f|^2\,dm$. Si $L \subset G$ es un compacto, el mismo razonamiento anterior se puede aplicar al abierto $G \setminus L$, obteniéndose que

$$\int\int_{G\setminus L} |f_n|^2\,dm \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\int_{G\setminus L} |f|^2\,dm.$$

Tomemos ahora un compacto $L \subset G$ tal que $\int\int_{G\setminus L} |f|^2\,dm < \frac{\varepsilon^2}{5}$, y elijamos un $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\int\int_{G\setminus L} |f_N|^2\,dm < \frac{\varepsilon^2}{5} \quad \text{y} \quad \int\int_L |f_N - f|^2\,dm < \frac{\varepsilon^2}{5}.$$

La elección anterior ha sido posible gracias a la convergencia compacta de $\{f_n\}$ a f en G. Entonces

$$\begin{aligned} ||f_N - f||_2^2 &= \int\int_L |f_N - f|^2 dm + \int\int_{G\setminus L} |f_N - f|^2 dm \\ &< \frac{\varepsilon^2}{5} + 2\Big(\int\int_{G\setminus L} |f_N|^2\,dm + \int\int_{G\setminus L} |f|^2\,dm\Big) < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

y por tanto $||f_N - f||_2^2 < \varepsilon^2$.

Finalmente, observemos que $\overline{G}$ es un compacto, que $\overline{G} \subset G_N$, que G_N es una región simplemente conexa y que $f_N \in H(G_N)$. En estas condiciones, el Teorema de aproximación de Runge garantiza la existencia de un polinomio $P(z)$ tal que

$$|P(z) - f_N(z)| < \frac{\varepsilon}{m(G)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para todo} \quad z \in \overline{G}.$$

En consecuencia, $||P - f||_2 \leq ||f_N - f||_2 + ||P - f_N||_2 < 2\varepsilon$, como se quería demostrar. □

3.4. Núcleo reproductor de Bergman

Gracias al Teorema de Riesz–Fréchet (ver, por ejemplo, [7, Cap. 5]), cada espacio de Hilbert H es isométrico a su dual topológico H^*, es decir, al espacio de las formas lineales continuas $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo base, que es $\mathbb{C}$ en nuestro caso) dotado de la norma dual

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Es usual denotar $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle$, como el producto escalar, notación que se inspira en la isometría antilineal $\Phi : x \in H \mapsto \Phi_x \in H^*$ dada por $\Phi_x(y) := \langle y, x \rangle$. Esto significa que Φ es biyectiva, $\|x\| = \|\Phi_x\|$, $\Phi_{x+y} = \Phi_x + \Phi_y$ y $\Phi_{cx} = \overline{c}\, \Phi_x$ para todo $x, y \in H$ y todo $c \in \mathbb{K}$.

En particular, si $G \subset \mathbb{C}$ es una región, $t_0 \in G$ y $f \in B^2(G)$, podemos considerar la forma o funcional φ_{t_0} dada por $\varphi_{t_0}(f) = f(t_0)$, que es la así llamada *evaluación en el punto* t_0. El hecho de que la convergencia en $\| \cdot \|_2$ sea más fuerte que la convergencia compacta (y por tanto más fuerte que la convergencia puntual) implica que cada funcional de evaluación φ_{t_0} es continua (la linealidad es trivial), luego $\varphi_{t_0} \in B^2(G)^*$. Por tanto, y gracias al Teorema de Riesz, existe una única función $\mathcal{K}_{t_0} \in B^2(G)$ tal que $f(t_0) = \langle f, \mathcal{K}_{t_0} \rangle$ para toda función $f \in B^2(G)$. Queda pues definida una función

$$\mathcal{K} : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por $\mathcal{K}(z,t) := \mathcal{K}_t(z)$ y caracterizada por

$$\langle f, \mathcal{K}_t \rangle = f(t) \quad \text{para todo} \quad t \in G \quad \text{y toda} \quad f \in B^2(G).$$

La función $\mathcal{K}$ así definida se denomina *función núcleo reproductor de Bergman* para la región G.

Ya que $B^2(G)$ es un espacio de Hilbert separable, admite una BON $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Es natural preguntarse qué representación tiene el núcleo $\mathcal{K}$ en función de $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Por otra parte, si $G \subset \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa distinta de $\mathbb{C}$ y $t \in G$, existe un único isomorfismo $F_t : G \longrightarrow \mathbb{D}$ normalizado con las condiciones $F_t(t) = 0 < F_t'(t)$. Así que otra cuestión natural es si, sabiendo cuál es la *función normalizada de Riemann*

$$F : (z,t) \in G \times G \longmapsto F(z,t) = F_t(z) \in \mathbb{D},$$

se puede conocer el núcleo $\mathcal{K}$, y viceversa. La respuesta a todas estas preguntas se da en el próximo teorema.

Teorema 3.7. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región. Con las notaciones anteriores, se verifica:*

(a) *Si $\{f_n\}_{n\geq 0}$ es una BON de $B^2(G)$, entonces*

$$\mathcal{K}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\overline{f_n(t)} \quad \textit{para todo} \quad (z,t) \in G^2,$$

donde, para cada $t \in G$, la convergencia de la serie es en norma cuadrática, y por tanto se da la convergencia compacta de la serie en G.

(b) *Si G es simplemente conexa y $G \neq \mathbb{C}$, entonces, para cada $t \in G$, el sistema $f_n(z) := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot F_t(z)^n \cdot F_t'(z)$ $(n \geq 0)$ es una BON de $B^2(G)$.*

(c) *Si G es simplemente conexa y $G \neq \mathbb{C}$, entonces*

$$\mathcal{K}(z,t) = \frac{1}{\pi} F_t'(z) F_t'(t) \quad \textit{para todo} \quad (z,t) \in G^2.$$

Además, si la integral se entiende sobre cualquier arco rectificable $\gamma \subset G$ que una t con z, se verifica

$$F(z,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{K}(t,t)}} \int_t^z \mathcal{K}(s,t)\, ds \quad \textit{para todo} \quad (z,t) \in G^2.$$

Demostración. (a) Fijemos un punto $t \in G$ y consideremos, para cada $n \geq 0$, la función $h_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z)\overline{f_k(t)} \in B^2(G)$, cuya norma es $\|h_n\|_2 = \left(\sum_{k=0}^n |f_k(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Gracias al Lema 3.3, tenemos que $|h_n(z)| \leq \frac{\|h_n\|_2}{\delta(\{z\})\sqrt{\pi}}$. Si hacemos, en particular, $z = t$, obtenemos

$$||h_n||_2^2 = \sum_{k=0}^n |f_k(t)|^2 = |h_n(t)| \leq \frac{\|h_n\|_2}{\delta(\{t\})\sqrt{\pi}}.$$

De aquí se deduce que $\sqrt{\pi}\delta(\{t\})\|h_n\|_2 \leq 1$, luego $|h_n(t)| \leq \frac{1}{\pi\delta^2(\{t\})}$ para todo $n \geq 0$, lo que implica que $\sum_{n=0}^\infty |f_n(t)|^2 < +\infty$ (pues esta suma no supera $\leq \frac{1}{\pi\delta^2(\{t\})}$). Por el apartado (C)-(d) de la Proposición 3.4, la serie $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)\overline{f_n(t)}$ converge cuadráticamente a cierta función $\Phi \in B^2(G)$.

Basta demostrar que $\Phi = \mathcal{K}_t$. Para ello, es suficiente probar que Φ cumple la "propiedad reproductiva"

$$f(t) = \langle f, \Phi \rangle \quad \text{para toda} \quad f \in B^2(G).$$

Comprobémosla. Dada una $f \in B^2(G)$, y expresándola en su representación como serie de Fourier relativa a $\{f_n\}_{n \geq 0}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n f_n(z),$$

tenemos que

$$\langle f, \Phi \rangle = \langle \sum_{n=0}^\infty c_n f_n, \sum_{n=0}^\infty \overline{f_n(t)} f_n \rangle = \sum_{n=0}^\infty c_n f_n(t) = f(t),$$

como se requería. En las igualdades anteriores hemos usado la continuidad de las aplicaciones

$$x \in H \mapsto \langle a, x \rangle \in \mathbb{K}$$

para cada $a \in H$ en cada espacio de Hilbert H junto con el hecho de que $\{f_n\}$ es un SON.

(b) En primer lugar, el sistema $\varphi_n(z) := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ $(n \geq 0)$ es una BON en $B^2(\mathbb{D})$: es fácil ver que es un SON, y es completo por el Teorema de Farrel–Markushevich junto con el apartado (B) de la Proposición 3.4. Es evidente que cada $f_n \in H(G)$. Además, ya que el jacobiano de la transformación $F_t : G \longrightarrow \mathbb{D}$ es $|F_t'|^2$, resulta que

$$\|f_n\|_2^2 = \int\int_{\mathbb{D}} \left| \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} (u+iv)^n \right|^2 dudv = 1,$$

lo que implica que $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset B^2(G)$ y $\langle f_n, f_n \rangle = 1$ para todo $n \geq 0$. Un argumento similar muestra, usando $F_t'(z)\overline{F_t'(z)} = |F_t'(z)|^2$, que, si $n \neq k$, entonces $< \langle f_n, f_k \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = 0$. Con esto ya tenemos que $(f_n)_{n \geq 0}$ es un SON. Resta ver que $(f_n)_{n \geq 0}$ es completo.

Para ello, fijemos una función $g \in B^2(G)$ tal que $\langle g, f_n \rangle = 0$ para todo $n \geq 0$. Hemos de probar que $g \equiv 0$. Sea $\Phi : \mathbb{D} \longrightarrow G$ el isomorfismo inverso de $F_t : G \to \mathbb{D}$. Se verifica que $\Phi'(w) = \frac{1}{F_t'(\Phi(w))}$ para todo $w \in \mathbb{D}$. Consideremos la función $\widetilde{g} := (g \circ \Phi)\Phi'$. Entonces, usando de nuevo un cambio de variable, se tiene que $\widetilde{g} \in B^2(\mathbb{D})$. Notemos asimismo que $\varphi_n = (f_n \circ \Phi) \cdot \Phi'$. Por tanto, gracias al mismo cambio de variable, y usando que el jacobiano de Φ es $|\Phi'|^2 = \Phi' \cdot \overline{\Phi}'$, obtenemos que $\langle \widetilde{g}, \varphi_n \rangle = \langle g, f_n \rangle = 0$ para todo $n \geq 0$ y, como (φ_n) es una BON, se deduce que $\widetilde{g} = 0$ en $\mathbb{D}$. Finalmente, puesto que $\Phi'(w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{D}$ y Φ es sobreyectiva, obtenemos que $g \equiv 0$, como se quería demostrar.

(c) Si en (a) elegimos como $\{f_n\}$ el sistema de (b), obtenemos que $F_t(t)^n =$

0 para todo $n \geq 1$, luego

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(z,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\overline{f_n(t)} = f_0(z)f_0(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot F_t'(z) \cdot \overline{F_t'(t)} = \frac{1}{\pi} F_t'(z) F_t'(t),\end{aligned}$$

porque $F_t'(t) > 0$.

Recíprocamente, si conocemos $\mathcal{K}(z,t)$, resulta de la expresión anterior que $\mathcal{K}(t,t) = \frac{(F_t'(t))^2}{\pi}$. Ya que $F_t'(t) > 0$, resulta que $F_t'(t) = (\pi\mathcal{K}(t,t))^{1/2}$, de donde se deduce que

$$F_t'(z) = \frac{\pi}{F_t'(t)}\mathcal{K}(z,t) = \big(\frac{\pi}{\mathcal{K}(t,t)}\big)^{1/2}\mathcal{K}(z,t),$$

y por tanto

$$F(z,t) = F_t(z) = F_t(z) - 0 = F_t(z) - F_t(t) = \big(\frac{\pi}{\mathcal{K}(t,t)}\big)^{1/2} \int_t^z \mathcal{K}(s,t)ds,$$

como se quería demostrar. $\square$

3.5. Espacios de Bergman de orden superior

Pueden definirse espacios de Bergman más generales, a saber,

$$B^p(G) := \big\{f \in H(G) : \|f\|_p < +\infty\big\} \quad (1 \leq p < +\infty),$$

donde $\|f\|_p := \big(\int\int_G |f(z)|^p \, dxdy\big)^{\frac{1}{p}}$. Cada uno de ellos es un espacio de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_p$. En el caso $G = \mathbb{D}$, estos espacios se estudian de forma muy cómoda, debido a la existencia de un desarrollo de Taylor válido en todo el disco. Tiene ciertas ventajas usar –y así lo haremos– para $B^p(\mathbb{D})$ la medida de Lebesgue normalizada $dA(z) = \frac{dxdy}{\pi}$. Así la norma es $\|f\|_p = \big(\int\int_{\mathbb{D}} |f| \, dA(z)\big)^{\frac{1}{p}}$ y, si $p = 2$, una BON de $B^2(\mathbb{D})$ es $\{\sqrt{n+1}z^n\}_{n\geq 0}$.

Por $L^p(\mathbb{D})$ denotaremos el espacio vectorial de las funciones medibles $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $|f|^p$ es Lebesgue-integrable en $\mathbb{D}$ con respecto a la medida de Lebesgue bidimendional. De nuevo, en $L^p(\mathbb{D})$ se supone que dos funciones son idénticas si coinciden en $\mathbb{D}$ salvo en un conjunto de medida bidimensional nula, y esta identificación no es necesaria si solo se consideran funciones continuas o, en particular, funciones analíticas. Se sabe que $L^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach bajo la misma norma $\|f\|_p$ anterior.

Vamos a demostrar, en primer lugar, que $B^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach en el cual la convergencia es más fuerte que la que se deriva de $H(\mathbb{D})$.

Teorema 3.8. *Sea $p \in [1, +\infty)$. Se tiene:*

(a) *$B^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach o, equivalentemente, es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D})$.*

(b) *Para todo $z \in \mathbb{D}$ y toda $f \in H(\mathbb{D})$, se verifica que $|f(z)| \leq \dfrac{\|f\|_p}{(1-|z|)^2}$.*

(c) *La convergencia en $B^p(\mathbb{D})$ es más fuerte que la convergencia compacta en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Del Teorema del Valor Medio para funciones analíticas sobre un disco se deduce fácilmente –tras multiplicación e integración sobre la variable "radial"– que, para todo $z \in \mathbb{D}$ y toda $f \in H(\mathbb{D})$, se verifica

$$f(z) = \frac{1}{(1-|z|)^2} \cdot \int\int_{B(z,1-|z|)} f(w)\, dA(w).$$

De aquí y de la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \int\int_{\mathbb{D}} |f(w)|\, dA(w) \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \left(\int\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p\, dA(w) \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\|f\|_p}{(1-|z|)^2},$$

que es (b). A su vez, de aquí se deriva que, si $K \subset \mathbb{D}$ es compacto, de modo que existe $r \in (0,1)$ tal que $K \subset B(0,r)$, entonces

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq (1-r)^{-2} \cdot \|f\|_p,$$

de donde se deduce (c).

Nos queda probar (a). Para ello, consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset B^p(\mathbb{D})$. Sea $K \subset \mathbb{D}$ un compacto. Gracias a (b), existe una constante $c(K) \in (0, +\infty)$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f_n(z)| \leq c(K) \cdot \|f_m - f_n\|_p.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{c(K)}$ para todo $m, n \geq n_0$, luego

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad m, n \geq n_0,$$

así que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en la métrica de $H(\mathbb{D})$. Por tanto, existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ compactamente en $\mathbb{D}$. Ya que el espacio $L^p(\mathbb{D})$ es completo, existe $g \in L^p(\mathbb{D})$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} g$. Entonces existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tal que $f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ e.c.t. $\mathbb{D}$. Ahora bien, $f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ puntualmente en $\mathbb{D}$, luego $g = f$ e.c.t. $\mathbb{D}$. Por tanto $f \in L^p(\mathbb{D})$ (luego $f \in B^p(\mathbb{D})$) y $\|f_n - f\|_p = \|f_n - g\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo cual implica $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$, que es lo que se quería probar. $\square$

En el caso $p = 2$, tenemos por el teorema anterior que $B^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D})$. Por tanto, existe un subespacio cerrado $M := B^2(\mathbb{D})^{\perp}$, llamado el complemento ortogonal de $B^2(\mathbb{D})$, tal que $L^2(\mathbb{D}) = B^2(\mathbb{D}) \oplus M$, donde $\oplus$ simboliza la suma directa de subespacios cerrados. Además, la proyección asociada a $B^2(\mathbb{D})$, llamada *proyección de Bergman* (es decir, la aplicación lineal $P : L^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ tal que, si $f = f_0 + g$ con $f_0 \in B^2(\mathbb{D})$ y $g \in M$, entonces $Pf = f_0$) es continua. Notemos que $\text{Imagen}\,(P) = B^2(\mathbb{D})$, $\text{Ker}\,(P) = M$, y P es idempotente (es decir, $P^2 = P$) y autoadjunta (es decir, $P = P^*$). Recordemos que, si $T : H \longrightarrow H$ es un operador (o sea, una aplicación lineal y continua), entonces el operador adjunto $T^* : H \longrightarrow H$ queda definido por

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \text{para todo} \quad x, y \in H.$$

Veamos que la proyección de Bergman es un operador integral. El siguiente resultado se extiende fácilmente a cada región $G \subset \mathbb{C}$.

Proposición 3.9. *Para toda función* $f \in L^2(\mathbb{D})$ *y todo punto* $z \in \mathbb{D}$*, se verifica*

$$(Pf)(z) = \int\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, dA(w).$$

Demostración. El núcleo de Bergman es $\mathcal{K}(z,t) = \dfrac{1}{(1 - z\bar{t})^2}$. Notemos que $\mathcal{K}(z,t) = \mathcal{K}_t(z) = \overline{\mathcal{K}_z(t)} = \overline{\mathcal{K}(t,z)}$. Gracias a la propiedad reproductiva de $\mathcal{K}$ y a las propiedades $P^* = P$ y $P|_{B^2} =$ la identidad, deducimos que

$$\begin{aligned}(Pf)(z) &= \langle Pf, \mathcal{K}_z \rangle = \langle f, P\mathcal{K}_z \rangle = \langle f, \mathcal{K}_z \rangle \\ &= \int\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{\mathcal{K}_z(w)}\, dA(w) = \int\int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z,w) f(w)\, dA(w),\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Anotemos que, si $1 < p < +\infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces el dual $B^p(\mathbb{D})^*$ de $B^p(\mathbb{D})$ es isomorfo a $B^q(\mathbb{D})$.

3.6. Operadores de composición en espacios de Bergman

Finalmente, vamos a estudiar una interesante aplicación lineal y continua de un espacio de funciones analíticas en sí mismo. Si $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es analítica, es fácil ver que la aplicación

$$C_\varphi : f \in H(\mathbb{D}) \longmapsto f \circ \varphi \in H(\mathbb{D})$$

está bien definida, y es un operador sobre $H(\mathbb{D})$, es decir, es lineal y continua (la continuidad resulta inmediata del hecho de que la imagen por φ de un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ es también un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$). Diremos que C_φ es el *operador de composición asociado a* φ.

Pero no es inmediato que C_φ sea un operador sobre $B^p(\mathbb{D})$. A probar este hecho nos vamos a dedicar en esta sección.

Sean $f, g \in H(\mathbb{D})$. Se dice que f *está subordinada a* g cuando existe una función $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorfa tal que $\varphi(0) = 0$ y $f = g \circ \varphi$. Usaremos el siguiente resultado, denominado *Teorema de subordinación de Littlewood*, que es importante por sí mismo.

Teorema 3.10. *Si* $f, g \in H(\mathbb{D})$ *y* f *está subordinada a* g*, entonces*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta$$

para todo $r \in [0, 1)$ *y todo* $p \in (0, +\infty)$.

Demostración. Por hipótesis, existe $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi \in H(\mathbb{D})$, $\varphi(0) = 0$ y $f = g \circ \varphi$. Fijemos $r \in (0, 1)$ y sea $h \in C(\overline{B}(0, r)) \cap Arm\,(B(0, r))$ tal que $h|_{|z|=r} = |g|^p$. Ya que $|g|^p \in SA\,(\mathbb{D})$, tenemos $|g(z)|^p \leq h(z)$ para todo $z \in \overline{B}(0, r)$. Por el Lema de Schwarz, $\varphi(B(0, r)) \subset B(0, r)$, luego $|f(z)|^p = |g(\varphi(z))|^p \leq h(\varphi(z))$ para todo $z \in \overline{B}(0, r)$. Ahora bien, $h \circ \varphi \in C(\overline{B}(0, r)) \cap Arm(B(0, r))$. Entonces, por la desigualdad anterior y el Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi(re^{i\theta})) \, d\theta = h(\varphi(0)) = h(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta,\end{aligned}$$

obteniéndose así la desigualdad deseada. □

Finalmente, podemos obtener el resultado al que hacíamos mención al principio.

Teorema 3.11. *Sean* $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *holomorfa,* $p > 0$ *y* $f \in H(\mathbb{D})$*. Entonces*

$$\int\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p \, dA(z) \leq \Big(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\Big)^2 \int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z).$$

En particular, C_φ *es un operador sobre cada espacio de Bergman* $B^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < +\infty)$*, cuya norma* $\|C_\varphi\|_p$ *satisface* $\|C_\varphi\|_p \leq \big(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\big)^{\frac{2}{p}}$*.*

Demostración. Para cada $a \in \mathbb{D}$, consideremos el automorfismo φ_a de $\mathbb{D}$ dado por $\varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Notemos que $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$ y $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$. Sea $a := \varphi(0)$ y definamos $\psi := \varphi_a \circ \varphi$. Entonces $\psi \in H(\mathbb{D})$, $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\psi(0) = 0$ y $\varphi = \varphi_a \circ \psi$. Por el Teorema de subordinación de Littlewood, tenemos

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi(re^{i\theta}))|^p \, d\theta = \int_0^{2\pi} |f \circ \varphi_a \circ \psi(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f \circ \varphi_a(re^{i\theta})|^p \, d\theta$$

para todo $r \in (0, 1)$. Multiplicando por r la desigualdad anterior, e integrando entre 0 y 1, conseguimos que

$$\int\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p \, dA(z) \leq \int\int_{\mathbb{D}} |f \circ \varphi_a(z)|^p \, dA(z).$$

Cambiemos ahora la variable en la segunda integral. Notemos que el jacobiano de φ_a $(= \varphi_a^{-1})$ es $|\varphi_a'(z)|^2 = \dfrac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p \, dA(z) &\leq \frac{(1 - |a|^2)^2}{(1 - |a|)^4} \int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) \\ &= \Big(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\Big)^2 \int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z), \end{aligned}$$

y éste es el resultado que queríamos. $\square$

Capítulo 4

Funciones analíticas acotadas

En este capítulo trataremos sobre el espacio vectorial $H^\infty(\mathbb{D})$ constituido por todas las funciones analíticas y acotadas en el disco $\mathbb{D}$. Es un tipo especial de espacio de Hardy, que tiene unas connotaciones algo distintas a los espacios de Hardy clásicos $H^p(\mathbb{D})$, a estudiar en un capítulo posterior. Estudiaremos en primer lugar el importante ejemplo de los productos de Blaschke, que son productos finitos o infinitos de automorfismos de $\mathbb{D}$. A continuación, factorizaremos una función de $H^\infty(\mathbb{D})$ como producto de un producto de Blaschke que engloba sus ceros y de otra función que no se anula pero que mantiene la norma. Después, introduciremos la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$, como extensión de $H^\infty(\mathbb{D})$. En $\mathcal{N}$ veremos algunas propiedades similares a las de $H^\infty(\mathbb{D})$, relativas a los ceros y a la factorización. Finalmente, estudiaremos brevemente el importante subespacio de $H^\infty(\mathbb{D})$ dado por el álgebra del disco.

4.1. Productos de Blaschke. Factorización

Comenzamos con una sencilla observación, y después damos algunos ejemplos. Para una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, denotemos $M(f,r) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|$ $(0 \leq r < 1)$. Entonces $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ si y sólo si $f \in H(\mathbb{D})$ y $\sup_{0\leq r<1} M(f,r) =$

$\lim_{r\to 1^-} M(f,r) < +\infty$. El supremo coincide con el límite pues la función $r \mapsto M(f,r)$ es creciente, debido al Principio del Módulo Máximo. Se tiene que $H(\mathbb{C}) = \{\text{funciones enteras}\} \subsetneq H^\infty(\mathbb{D}) \subsetneq H(\mathbb{D})$. Por ejemplo, si $f(z) = \frac{1}{z-1}$ y $g(z) = \frac{1}{z-2}$, entonces $f \in H(\mathbb{D}) \setminus H^\infty(\mathbb{D})$ y $g \in H^\infty(\mathbb{D}) \setminus H(\mathbb{C})$. A partir de ahora, denotaremos $H^\infty(\mathbb{D})$ simplemente por H^∞.

Es fácil ver, usando el Teorema de convergencia de Weierstrass, que H^∞ es un *espacio de Banach* cuando se le dota de la norma del supremo $||f||_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$. De hecho, es un subespacio cerrado de $(C_b(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$, que es el espacio de las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{D}$. Lamentablemente, aunque no es trivial de probar, H^∞ *no es separable*. La idea sería encontrar una familia no numerable $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset H^\infty$ tal que $\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \geq 1$ para todo par $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \neq \beta$.

Recordemos que los automorfismos de $\mathbb{D}$ son las transformaciones bilineales de la forma

$$e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad (|a| < 1,\, \theta \in \mathbb{R}).$$

Un *producto de Blaschke finito* es, por definición, un producto finito puntual de dichos automorfismos, es decir, una función de la forma

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{n=1}^{N} \frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z} \quad (\theta \in \mathbb{R},\, N \in \mathbb{N},\, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}).$$

Es evidente que $f \in H^\infty$; de hecho, $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Para pasar a productos de Blaschke infinitos, necesitamos condiciones sobre el crecimiento de los ceros a_n, y ajustar los coeficientes $e^{i\theta}$ en cada factor. Este problema se resuelve con el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y sea $\{a_n\}_{n\geq 1}^\infty \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ una sucesión tal que $\sum_{n=1}^\infty (1-|a_n|) < +\infty$. El producto funcional infinito*

$$B(z) := z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{a - \overline{a}_n z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

define una función $B \in H(\mathbb{D})$ *tal que* $|B(z)| < 1$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$. *En particular,* $B \in H^\infty$. *Además, sus ceros son exactamente los puntos* a_n *–con la multiplicidad dada por el número de veces que cada uno de ellos aparece en la sucesión– más el origen si* $k > 0$.

Demostración. Supongamos probado que, para cada $r \in (0,1)$, el producto $\prod_{n=1}^\infty$ del enunciado converge normalmente en $B(0,r)$. En tal caso, convergería normalmente –y, por tanto, uniformemente– en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Ya que cada factor está en $H(\mathbb{D})$ y tiene como (único) cero a a_n, resulta que $B \in H(\mathbb{D})$ y que sus ceros son los especificados en el enunciado; ello se debe al Teorema de convergencia de Weierstrass para productos infinitos, que no es más que una aplicación del Teorema de convergencia de Weierstrass a la sucesión constituida por los productos parciales. Puesto que cada factor tiene módulo < 1 en $\mathbb{D}$, lo mismo ocurrirá con B. Así que, fijado un $r \in (0,1)$, basta probar la convergencia nomal en $B(0,r)$, lo cual, a su vez, equivale a probar que $\sum_{n=1}^\infty \sup_{|z|<r} |1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}| < +\infty$.

Pues bien, si $|z| < r$, observamos que

$$\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{a_n + |a_n| z}{(1 - \overline{a}_n z) a_n}\right| (1 - |a_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1 - |a_n|).$$

Por tanto, la serie anterior tiene una suma no mayor que $\frac{1+r}{1-r} \sum_{n=1}^\infty (1 - |a_n|) < +\infty$, luego nuestra serie también converge, como se requería. □

A la función $B(z)$ descrita en el teorema anterior se la llama *producto de Blaschke* con ceros a_n $(n \in \mathbb{N})$.

El siguiente teorema –conocido como *Fórmula de Jensen*– resultará muy útil para estudiar el comportamiento de los ceros y la factorización de funciones en los espacios de Hardy.

Teorema 4.2. *Sea* $f \in H(\overline{B}(0,r)) \setminus \{0\}$ *con* $f(0) \neq 0$, *y sean* $a_1, \ldots, a_N$ *sus* *ceros en* $\overline{B}(0,r)$*, donde* $r \in (0,+\infty)$*. Entonces*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|a_n|} = \exp\Big(\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}\Big).$$

Si fuese $f(0)=0$ *con multiplicidad* $m\in\mathbb{N}$*, la fórmula es la misma salvo que hay que sustituir en el primer miembro la expresión* $|f(0)|$ *por* $|c|r^m$*, donde* $c=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^m}$*, y los* $a_1,\dots,a_N$ *serían los ceros no nulos de* f*.*

Demostración. La segunda parte se deduce de la primera aplicando ésta a la función $g(z) := \frac{f(z)}{z^m}$. Sea pues $f(0)\neq 0$. Ordenamos los ceros de modo que $\{a_1,\dots,a_m\}\subset B(0,r)$ y $|a_{m+1}|=|a_{m+2}|=\cdots=|a_N|=r$. Definimos la función

$$g(z) := f(z)\cdot\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{a}_n z}{r(a_n-z)}\cdot\prod_{n=m+1}^{N}\frac{a_n}{a_n-z}.$$

Es claro que podemos encontrar un $\varepsilon>0$ tal que $g\in H(B(0,r+\varepsilon))$ y g no tiene ceros en $B(0,r+\varepsilon)$. Por tanto $\log|g|\in Arm(B(0,r+\varepsilon))$ y, gracias al Teorema del Valor Medio, es $\log|g(0)|=\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$.

Escribamos cada miembro de la última igualdad en términos de f. En primer lugar, $|g(0)|=|f(0)|\cdot\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|a_n|}$. Por otra parte, es fácil ver que $|\frac{r^2-\overline{a}z}{r(a-z)}|=1$ para todo a y todo z con $|a|<r=|z|$. Por tanto, si $a_n=re^{i\theta_n}$ $(n=m+1,\dots,N)$, tenemos que

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N}\log|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|,$$

así que, efectuando el cambio $\theta\mapsto\theta-\theta_n$ en la integral de cada término de la última suma, obtenemos

$$\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} - (N-m)\cdot\frac{I}{2\pi},$$

donde hemos llamado $I := \int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|d\theta$. En consecuencia, si observamos que $\prod_{n=m+1}^{N}\frac{r}{|a_n|}=1$, basta probar que $I=0$. Con este fin, notemos que

$|1-e^{i\theta}| = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. Luego, haciendo el cambio $\alpha = \frac{\theta}{2}$, resulta que probar que $I = 0$ equivale a probar que $K = -\pi \cdot \log 2$, donde $K := \int_0^\pi \log \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$. Si efectuamos ahora el cambio $\alpha = 2\beta$, obtenemos que

$$K = \pi \log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} \beta \, d\beta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \beta \, d\beta.$$

Por último, haciendo en la segunda integral el cambio $\beta \mapsto \frac{\pi}{2} - \beta$ y usando la simetría en $[0, \pi]$ de la función $\beta \mapsto \operatorname{sen} \beta$ respecto del punto medio $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, resulta que

$$\begin{aligned} K &= \pi \log 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} \beta \, d\beta \\ &= \pi \cdot \log 2 + 2\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \beta \, d\beta = \pi \cdot \log 2 + 2K, \end{aligned}$$

de donde $K = -\pi \cdot \log 2$, como queríamos demostrar. $\square$

El siguiente resultado, unido al Teorema 4.1, afirma que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ es la *sucesión de ceros* de alguna función analítica y acotada en $\mathbb{D}$ si y solo si se cumple la condición de convergencia para productos de Blaschke.

Teorema 4.3. *Sea $f \in H^\infty \setminus \{0\}$ y sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de ceros de f, enumerados según su multiplicidad. Entonces $\sum_{n=1}^\infty (1 - |a_n|) < +\infty$.*

Demostración. Si hay un número finito de ceros, no hay nada que probar. Si hay un número infinito, debe ser $|a_n| \to 1$ (por el Principio de Prolongación Analítica), así que podemos suponer, con un cambio de orden y desplazamiento de índices si es preciso, que el origen es m-múltiple (con $m \in \mathbb{N}_0$) y que los ceros no nulos cumplen $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$. Llamemos $c := \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^m}$; notemos que $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. De acuerdo con la Fórmula de Jensen, para todo $r \in (0,1)$ se tiene que

$$\sum_{|a_n|\leq r} \log \frac{r}{|a_n|} = -\log(|c| r^m) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \leq -\log(|c| r^m) + C,$$

donde C es una constante absoluta finita, debido a que f es acotada.

Fijemos ahora un $N \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $r > |a_N|$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{r}{|a_n|} \leq \sum_{|a_n| \leq r} \log \frac{r}{|a_n|} \leq -\log(|c| r^m) + C.$$

Haciendo que $r \to 1$, resulta la existencia de una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que $\sum_{n=1}^{N} \log(|a_n|^{-1}) \leq M$ para todo $N \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{|a_n|} - 1\right)$ converge. Finalmente, del hecho $\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ y del criterio de comparación por paso al límite se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$ también converge. □

Resulta inmediatamente el siguiente corolario, que viene a decir que si una función f holomorfa en $\mathbb{D}$, acotada y no idénticamente nula, tiene infinitos ceros en $\mathbb{D}$, entonces éstos deben *tender rápidamente a* $\partial\mathbb{D}$.

Corolario 4.4. *Si $f \in H^\infty$ y existe una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \{\text{ceros de } f\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = +\infty$, entonces $f \equiv 0$.*

Finalizamos esta sección con el enunciado y prueba de su resultado más importante, conocido como *Teorema de factorización por productos de Blaschke.*

Teorema 4.5. *Sea $f \in H^\infty \setminus \{0\}$, y sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Entonces existe una función $g \in H^\infty$ tal que g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ y $f = g \cdot B$.*

Demostración. Podemos suponer que f tiene infinitos ceros (si tuviese un número finito de ceros, la demostración sería casi la misma, pero más sencilla), y los disponemos en sucesión, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Recordemos que el producto de Blaschke B es convergente porque f es acotada. Ya que B tiene exactamente los mismos ceros que f con las mismas multiplicidades, se tiene que la función $g := \frac{f}{B}$ está en $H(\mathbb{D})$ y no se anula en $\mathbb{D}$. Evidentemente, $f = g \cdot B$.

Llamemos B_n al producto de Blaschke finito formado por los n primeros ceros. Pongamos $g_n := \frac{f}{B_n}$. Como $|B_n| < 1$ en $\mathbb{D}$, es claro que $\|g_n\|_\infty \geq \|f\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{|z|\to 1} |B_n(z)| = 1$, debido a que cada uno de los factores que integran B_n goza de dicha propiedad (al ser automorfismos de $\mathbb{D}$). Fijemos momentáneamente $r \in (0,1)$ y $\varepsilon \in (0,1)$. Entonces existe $s \in (r,1)$ tal que $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$ si $|z| = s$.

Por tanto $M(g_n, r) \leq M(g_n, s) \leq \frac{\|f\|_\infty}{1-\varepsilon}$ de donde se deduce que $\|g_n\|_\infty = \sup_{0<r<1} M(g_n, r) \leq \frac{\|f\|_\infty}{1-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$, obtenemos $\|g_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, lo cual implica $\|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty$. Por otra parte, como $|B| < 1$ en $\mathbb{D}$, resulta $\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty$. Pero $g_n \underset{n\to\infty}{\to} g$ puntualmente en $\mathbb{D}$ y $|g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{D}$, así que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, lo que concluye la demostración. $\square$

4.2. La clase de Nevanlinna

Todos estos resultados se pueden extender a una clase de funciones más amplia, que definiremos a continuación en esta sección. Recordemos que, para una función φ real, su función parte positiva es $\varphi^+ := \max\{0, \varphi\}$.

Definición 4.6. *Se dice que una función* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* de característica acotada *o* de forma acotada *cuando* $f \in H(\mathbb{D})$ *y* $\|f\|_0 := \sup_{0\leq r<1} \mu_0(f,r) < +\infty$*, donde* $\mu_0(f,r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$ *y* $\log^+ t := \max\{0, \log t\}$ $(t \geq 0)$*. Se llama* clase de Nevanlinna*, y se denota por* $\mathcal{N}$*, al conjunto de todas las funciones de forma acotada.*

Así que $H^\infty \subset \mathcal{N} \subset H(\mathbb{D})$, donde las inclusiones son estrictas. Puede probarse (ver [16, vol. II]) que $\mathcal{N}$ es un *anillo*, es decir, si $f, g \in \mathcal{N}$ entonces $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{N}$.

Establecemos a continuación el *Teorema de los ceros de las funciones de* $\mathcal{N}$.

Rolf Nevanlinna (1895–1980)

Teorema 4.7. *Si $f \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de ceros de f, enumerados según su multiplicidad, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < +\infty$.*

Demostración. Es la misma que para H^∞, sin más que tener en cuenta que $\log|f(re^{i\theta})| \leq \log^+|f(re^{i\theta})|$, junto con la definición de la clase $\mathcal{N}$. □

Corolario 4.8. *Si $f \in \mathcal{N}$ y existe $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ tal que $f(a_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) = +\infty$, entonces $f \equiv 0$.*

Finalmente, enunciamos el *Teorema de factorización en $\mathcal{N}$ por productos de Blaschke* (Teorema 4.10), pero antes necesitamos el siguiente lema, cuya prueba se pospone hasta el capítulo siguiente.

Lema 4.9. *Si B es un producto de Blaschke, entonces e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$ existe el límite radial $\lim_{r\to 1} B(re^{i\theta}) =: B^*(e^{i\theta})$, y además $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Teorema 4.10. *Sea $f \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, y sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Entonces $f = g \cdot B$, donde $g \in \mathcal{N}$, g no se anula y $\|g\|_0 = \|f\|_0$.*

Demostración. Por el Corolario 2.13, la función $r \mapsto \mu_0(r,f)$ es creciente, y por tanto $\|f\|_0 = \text{lím}_{r\to 1}\mu_0(r,f)$.

Gracias a la fórmula de Jensen, la integral $\int_0^{2\pi} \log|B(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ es una función monótona de r, luego, debido al lema anterior y al Teorema de la convergencia monótona, resulta que $\text{lím}_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \log|B(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = 0$. De nuevo, si definimos $g := \frac{f}{B}$, entonces $g \in H(\mathbb{D})$ y no se anula. Ya que $|B| \leq 1$ (entendemos que $B \equiv 1$ si f no tiene ceros, en cuyo caso el resultado es trivial), resulta $|g(z)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, de donde (usando que la función $t \mapsto \log^+ t$ es monótona creciente) obtenemos $\|g\|_0 \geq \|f\|_0$. Si $s,t \geq 0$, se verifica la desigualdad $\log^+(st) \leq \log^+ s + \log^+ t$, puesto que el primer miembro es 0 si $st < 1$ y es $\log s + \log t$ si $st \geq 1$. Se deduce entonces que

$$\log^+|g| \leq \log^+|f| + \log\frac{1}{|B|} = \log^+|f| - \log|B|.$$

Así pues, tenemos que $\mu_0(g,r) \leq \mu_0(f,r) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\theta})|\,d\theta$. Haciendo que $r \to 1$, obtenemos $\|g\|_0 \leq \|f\|_0$, y entonces $f = g \cdot B$, $g \in \mathcal{N}$ y $\|g\|_0 = \|f\|_0$, como queríamos demostrar. □

4.3. Relación con H^∞ y la clase de Nevanlinna

Vamos a ver en esta sección la estrecha relación existente entre estas dos familias de funciones.

En primer lugar, vamos a expresar las funciones de la clase de Nevanlinna de una manera más útil, que nos dice que una función de esta clase no es más que el cociente entre dos funciones de H^∞. Tenemos así el que se conoce como *Teorema de los hermanos F. y R. Nevanlinna:*

Teorema 4.11. *Sea $f \in H(\mathbb{D})$. Entonces $f \in \mathcal{N}$ si y solo si existen φ, ψ holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$ tales que $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$.*

Demostración. Supongamos primero que $f = \frac{\varphi}{\psi}$, con φ, ψ como en el enunciado. Llamemos B_φ, B_ψ, respectivamente, a los productos de Blaschke formados con los ceros de φ, ψ. Por el Teorema de Factorización en H^∞, podemos escribir $\varphi = \varphi_1 \cdot B_\varphi$ y $\psi = \psi_1 \cdot B_\psi$ con φ_1 y ψ_1 acotadas y sin ceros. Pero los ceros de ψ (contando las multiplicidades) deben ser ceros de φ, luego $B := \frac{B_\varphi}{B_\psi} \in H(\mathbb{D})$. Es claro que $|B| \leq 1$, pues sus factores son ≤ 1 en $\mathbb{D}$ (notar que los factores de B_ψ son parte de los factores de B_φ). Por otra parte, existe $M \in (0, +\infty)$ tal que $|\psi_1(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Notemos ahora que $f = \frac{B \cdot \varphi_1}{M} \cdot \frac{M}{\psi_1}$. Ya que $\frac{B \cdot \varphi_1}{M} \in H^\infty \subset \mathcal{N}$ y $\mathcal{N}$ es un anillo, basta probar que $\frac{M}{\psi_1} \in \mathcal{N}$.

Para ello, observemos primero que $\frac{M}{\psi_1} \geq 1$ en $\mathbb{D}$, y por tanto $\log^+ |\frac{M}{\psi_1}| = \log |\frac{M}{\psi_1}|$. Ya que $\frac{M}{\psi_1} \in H(\mathbb{D})$, resta ver que $\|\frac{M}{\psi_1}\|_0$ es finito. Fijado $r \in (0,1)$, y observando que $\frac{M}{\psi_1(z)}$ carece de ceros, se deduce de la Fórmula de Jensen –o también del Teorema de la Media para funciones armónicas– que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \Big| \frac{M}{\psi_1(re^{i\theta})} \Big| \, d\theta = \log |\frac{M}{\psi_1(0)}|.$$

Y como la igualdad anterior vale para todo $r \in (0,1)$, resulta $\|\frac{M}{\psi_1}\|_0 = \log |\frac{M}{\psi_1(0)}| < +\infty$, como se requería.

Recíprocamente, supongamos que $f \in \mathcal{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f no es idénticamente nula. Sea $r \in (0,1)$ tal que f no se anula en $|z| = r$. Por la Fórmula de Poisson–Jensen (ver [1, p. 208]), existe una función $g_r \in H(r\mathbb{D})$ con $|g_r| < 1$ en $r\mathbb{D}$ tal que $f(z) = \frac{\varphi_r(z)}{\psi_r(z)}$ para todo $z \in r\mathbb{D}$, donde se han definido

$$\varphi_r(z) := g_r(z) \cdot \exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^- |f(re^{i\theta})| \cdot \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \, d\theta \Big\} \;\; \text{y}$$

$$\psi_r(z) := \exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \cdot \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \, d\theta \Big\}.$$

Elijamos ahora una sucesión $r_k \nearrow 1$ $(k \to \infty)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo z con $|z| = r_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Definamos $\Phi_k(z) := \varphi_{r_k}(r_k z)$ y $\Psi_k(z) := \psi_{r_k}(r_k z)$ ($z \in \mathbb{D}$, $k \in \mathbb{N}$). Entonces $\Phi_k, \Psi_k \in H(\mathbb{D})$, $|\Phi_k| \leq 1 \geq |\Psi_k|$ en $\mathbb{D}$ y $f(r_k z) = \frac{\Phi_k(z)}{\Psi_k(z)}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora bien, por el Teorema de Montel, las sucesiones (Φ_k) y (Ψ_k) constituyen familias relativamente compactas. Por tanto, existe una sucesión creciente $\{k_j\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\Phi_{k_j} \underset{k\to\infty}{\overset{H(\mathbb{D})}{\longrightarrow}} \varphi$, $\Psi_{k_j} \underset{k\to\infty}{\overset{H(\mathbb{D})}{\longrightarrow}} \psi$, donde $\varphi, \psi \in H(\mathbb{D})$ y, necesariamente, $|\varphi| \leq 1$, $|\psi| \leq 1$ en $\mathbb{D}$. Por otra parte, $f(r_{k_j} z) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(z)$ compactamente en $\mathbb{D}$. Para concluir que $f = \frac{\varphi}{\psi}$, basta probar que $\psi \not\equiv 0$, pues del Teorema de Hurwitz (Teorema 1.2) se deduciría que $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Para verlo, tenemos que

$$|\Psi_k(0)| = |\psi_{r_k}(0)| = \exp\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(r_k e^{i\theta})|\, d\theta\} \geq e^{-\|f\|_0} = \text{ constante } > 0.$$

Por tanto, como $\Psi_{k_j} \longrightarrow \psi$ cuando $k \to \infty$, resulta $|\psi(0)| \geq e^{-\|f\|_0}$, luego $\psi \not\equiv 0$. □

4.4. El álgebra del disco

En esta última sección, trataremos brevemente sobre un subespacio vectorial importante de H^∞, a saber, el *álgebra del disco* $A(\mathbb{D})$, que es por definición el conjunto de las funciones analíticas en el disco que pueden extenderse continuamente a la frontera, es decir

$$A(\mathbb{D}) := \{f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C} :\ f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap H(\mathbb{D})\}.$$

Como $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto, y toda función continua en un compacto es acotada, resulta que $A(\mathbb{D}) \subset H^\infty$, así que todas las propiedades estudiadas para H^∞ son trivialmente válidas para las funciones de $A(\mathbb{D})$. No obstante, $A(\mathbb{D})$ tiene en oposición a H^∞ la propiedad de separabilidad, como veremos a continuación. Se supone que dotamos a $A(\mathbb{D})$ de la misma norma que H^∞, es decir, $\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$, donde para la última igualdad se ha usado la continuidad de f. De hecho, del Principio del Módulo Máximo se deduce que $\|f\| = \max_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|$, donde $\mathbb{T}$ denota la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$.

Teorema 4.12. (a) *$A(\mathbb{D})$ es una subálgebra lineal cerrada de H^∞. En particular, es un espacio de Banach.*

(b) *$A(\mathbb{D})$ es separable.*

Demostración. (a) Que $A(\mathbb{D})$ es un álgebra lineal resulta de que tanto las funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ como las holomorfas en $\mathbb{D}$ constituyen un álgebra lineal. Y el que sea cerrada se deduce de que la norma en H^∞ es la de la convergencia uniforme en $\mathbb{D}$, que se transforma al restringirnos a $A(\mathbb{D})$ en la norma de la convergencia uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$. Ahora bien, la convergencia uniforme de una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset A(\mathbb{D})$ transmite la continuidad a la función límite f, mientras que, por el Teorema de convergencia de Weierstrass, f resulta ser también holomorfa en $\mathbb{D}$. Luego $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap H(\mathbb{D})$, es decir, $f \in A(\mathbb{D})$, así que $A(\mathbb{D})$ es cerrado en H^∞.

(b) Consideremos el conjunto $\mathcal{A}$ constituido por todos los polinomios $P(z)$ con coeficientes complejos de partes real e imaginaria racionales. Es claro que $\mathcal{A} \subset A(\mathbb{D})$. El conjunto de estos coeficientes es $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, que es numerable porque el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales lo es. De aquí obtenemos la numerabilidad de $\mathcal{A}$. Basta probar que $\mathcal{A}$ es denso en $A(\mathbb{D})$.

Para ello, fijemos $f \in A(\mathbb{D})$ y $\varepsilon > 0$. Ya que f es uniformemente continua en el compacto $\overline{\mathbb{D}}$ (Teorema de Heine), existe $\delta \in (0,1)$ tal que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon/3$ siempre que $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ y cumplan $|z_1 - z_2| < \delta$. Tomemos $r \in (1, \frac{1}{1-\delta})$ y definamos $g(z) := f(z/r)$. Entonces g es continua en $\overline{B}(0,r)$ y analítica en $B(0,r) \supset \overline{\mathbb{D}}$. Si $z \in \overline{\mathbb{D}}$ se tiene $|z - \frac{z}{r}| = (1 - \frac{1}{r})|z| \leq 1 - \frac{1}{r} < \delta$, luego $|f(z) - g(z)| = |f(z) - f(\frac{z}{r})| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por otra parte, g tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen y convergente uniformemente en compactos de $B(0,r)$, en particular en $\overline{\mathbb{D}}$. Así, existe un polinomio $P(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^k$ tal que $|P(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo

$z \in \overline{\mathbb{D}}$. Ahora bien, para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ podemos tomar $q_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tal que $|q_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{3N}$, gracias a la densidad de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$. Llamemos $Q(z) := \sum_{k=1}^N q_k z^k \in \mathcal{A}$. Entonces $|Q(z) - P(z)| \leq \sum_{k=1}^N |a_k - q_k| \cdot |z|^k \leq \sum_{k=1}^N |a_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Finalmente, por la desigualdad triangular, obtenemos

$$|f(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{para todo } z \in \overline{\mathbb{D}},$$

es decir, $\|f - Q\| < \varepsilon$. Esto prueba la densidad de $\mathcal{A}$ en $\overline{\mathbb{D}}$. □

Un hecho importante sobre el álgebra del disco es que la *Fórmula de la integral de Cauchy* es válida hasta la frontera. Específicamente, se tiene el siguiente teorema, cuya prueba es fácil usando un proceso de aproximación por integrales a lo largo de una sucesión de circunfencias cuyos radios que tienden a 1.

Teorema 4.13. *Si* $f \in A(\mathbb{D})$ *entonces* $f(z) = \oint_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.

Finalizamos este capítulo enunciando un par de propiedades importantes de $A(\mathbb{D})$, cuya prueba se puede encontrar en el libro de Hoffman [14]. El primer teorema es debido a Fatou, y el segundo a Rudin.

Teorema 4.14. *Sea* $K \subset \mathbb{T}$ *un subconjunto cerrado de medida de Lebesgue nula. Entonces existe una función* $f \in A(\mathbb{D})$ *tal que* $\{\text{ceros de } f \text{ en } \overline{\mathbb{D}}\} = K$.

Teorema 4.15. *Sea* $K \subset \mathbb{T}$ *un subconjunto cerrado de medida de Lebesgue nula, y sea* $f : K \to \mathbb{C}$ *una función continua. Entonces existe* $F \in A(\mathbb{D})$ *tal que* $F|_K = f$.

Capítulo 5

Espacios de Hardy

Continuamos en este capítulo el estudio de ciertos subespacios destacados de $H(\mathbb{D})$. Esta vez se trata de los llamados *espacios de Hardy*, y se sitúan entre el espacio de las funciones holomorfas acotadas y la clase de Nevanlinna.

Godfrey Hardy (1877–1947)

Al contrario que H^∞, los espacios de Hardy van a ser espacios *separables.* Entre las propiedades que vamos a estudiar, destacan la existencia de *valores frontera radiales* y un resultado de *factorización* sin alteración de la norma. Algunas propiedades se comparten con H^∞ y $\mathcal{N}$. Parte del estudio se enfocará a través de los coeficientes de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T}$ sigue denotando la circunferencia unidad.

Herramientas muy útiles para todo ello van a ser las funciones armónicas, el núcleo de Poisson y las funciones subarmónicas. En cuanto a la separabilidad, se tiene que, de hecho, el conjunto de los polinomios es denso en cada uno de estos nuevos espacios.

5.1. Definición y primeras propiedades

Sea $p \in (0, +\infty)$. Se define el *espacio de Hardy* $H^p(\mathbb{D}) = H^p$ como el conjunto

$$H^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < +\infty\},$$

donde $\|f\|_p := \sup_{0 \le r < 1} M_p(f, r)$ y $M_p(f, r) := \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Es claro a partir de las definiciones y de la desigualdad de Hölder que $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset \mathcal{N}$ $(0 < s < p < +\infty)$. Por el Corolario 2.13, se tiene que si $f \in H(\mathbb{D})$ y $p \in (0, +\infty)$, entonces cada función $r \mapsto M_p(f, r)$ es creciente. Por tanto $\|f\|_p := \sup_{0 \le r < 1} M_p(f, r) = \lim_{r \to 1} M_p(f, r)$. Para $p \ge 1$ resulta que H^p es, de hecho, un *espacio de Banach*, como veremos en el siguiente resultado.

Teorema 5.1. (a) *Si $p \ge 1$, la aplicación $\| \cdot \|_p$ es una norma en H^p que hace de él un espacio de Banach.*

(b) *La convergencia en H^p es más fuerte que la convergencia compacta en $\mathbb{D}$, donde $p \ge 1$.*

(c) *Si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in H(\mathbb{D})$, entonces $f \in H^2$ si y solo si $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < +\infty$. Además, $\|f\|_2 = \left(\sum_0^\infty |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ y H^2 es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^\infty a_n \overline{b_n}$, donde $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ y $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$.*

Demostración. Fijemos $p \ge 1$. Sean $f \in H^p$ y $K \subset \mathbb{D}$ un compacto. Llamemos $r := d(K, \mathbb{T}) \in (0, 1)$. Sea $s \in (1 - r, 1)$ y llamemos γ a la circunferencia

$\gamma \equiv t = se^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$). Por la Fórmula de la integral de Cauchy, se tiene que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z}$ para todo $z \in K$, de donde se deduce que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{i\theta}) sie^{i\theta}\, d\theta}{se^{i\theta} - z} \Big| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(se^{i\theta})|}{s-(1-r)} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{M_1(f,s)}{s-(1-r)} \leq \frac{M_p(f,s)}{s-(1-r)} \leq \frac{\|f\|_p}{s-(1-r)} \end{aligned}$$

para todo $z \in K$ y todo $s \in (1-r, 1)$, habiéndose usado la desigualdad de Hölder en la segunda desigualdad. Por tanto

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{\|f\|_p}{d(K, \mathbb{T})}. \tag{I}$$

De aquí se deduce (b), pues si $\{f_n\} \subset H^p \ni f$ y $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en H^p, entonces

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_p}{d(K, \mathbb{T})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{D}$.

En cuanto a (a), si $f, g \in H^p$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, de la igualdad $|\alpha f|^p = |\alpha|^p \cdot |f|^p$ y de la desigualdad

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p) \text{ para todo } a, b \geq 0$$

resulta que $\alpha f, f+g \in H^p$ y $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$. La desigualdad $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ se obtiene de la conocida desigualdad de Minkowski para integrales. Así que H^p es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre él.

Queda probar que H^p es completo para la distancia $d(f,g) := \|f-g\|_p$. Fijemos pues una sucesión de Cauchy $\{f_n\} \subset H^p$ para la métrica d. Entonces, por la desigualdad (I), aplicada a $f_m - f_n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), deducimos que $\{f_n\}$ es de Cauchy para la métrica que genera la topología de $H(\mathbb{D})$, el cual es un espacio métrico completo. En consecuencia, existe $f \in H(\mathbb{D})$ tal que

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ compactamente en } \mathbb{D}.$$

Probemos que $f \in H^p$ y que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en H^p. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. Por tanto, para todo $r \in [0,1)$ y todo par de números naturales $n, m \geq N$, se tiene que $M_p(f_n - f_m, r) < \varepsilon$. Ya que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en la circunferencia $\{|t| = r\}$, podemos intercambiar las operaciones de límite e integración, de donde resulta que $M_p(f - f_m, r) \leq \varepsilon$ para todo $r \in [0,1)$ y todo $m \geq N$. Haciendo $m = N$, obtenemos $f - f_N \in H^p$, luego $f \in H^p$ porque H^p es un espacio vectorial. Pero también obtenemos que $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$ para todo $m \geq N$, así que $f_m \overset{\|\cdot\|_p}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} f$, como queríamos demostrar.

Por último, demostremos (c). Un cálculo directo, usando que

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta}) \cdot \overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta},$$

prueba que $M_2(f, r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot r^{2n}$, luego $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$, de donde se deduce que $f \in H^2$ si y solo si la última serie es convergente. Por el apartado (a), H^2 es completo. Que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido se ve gracias a la desigualdad de Cauchy–Schwarz, y es inmediato comprobar que es un producto escalar. Así que H^2 es un espacio de Hilbert. $\square$

En el caso $p \in (0,1)$, la aplicación $\| \cdot \|_p$ ya no es una norma, pero H^p sigue siendo un espacio vectorial y, además la aplicación $d(f, g) := \|f - g\|_p^p$ es una *distancia* sobre él. Para probarlo, basta utilizar la desigualdad

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p,$$

la cual es válida para todo $p \in (0,1)$ y todo $a, b \geq 0$, Puede demostrarse que dicha distancia es completa.

De modo parecido a como ocurría con H^∞, podemos "dividir" cada función de H^p por sus ceros sin aumentar la norma. Recordemos que, ya que $H^p \subset \mathcal{N}$, los ceros a_n de una función de H^p también cumplen la condición $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < +\infty$, luego el correspondiente producto de Blaschke está bien definido. Tenemos así el siguiente *Teorema de factorización en H^p por productos de Blaschke.* Este teorema, con el que concluimos esta sección, es debido a M. Riesz.

Teorema 5.2. *Sean $p > 0$ y $f \in H^p \setminus \{0\}$, y denotemos por B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Entonces existe $g \in H^p$ tal que g no se anula, $f = g \cdot B$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$.*

Demostración. La prueba sigue las mismas líneas del correspondiente Teorema de Factorización por productos de Blaschke en H^∞, así que mantenemos las notaciones del mismo. Definiendo $g := \frac{f}{B}$, se tiene que $g \in H(\mathbb{D})$ y no se anula en $\mathbb{D}$. Ya que $|B| < 1$, resulta $|g| \geq |f|$ en $\mathbb{D}$, luego $\|g\|_p \geq \|f\|_p$.

Sea $g_n := \frac{f}{B_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, resulta que $\lim_{|z|\to 1} |B_n(z)| = 1$, luego $|B_n(re^{i\theta})| \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 1$ uniformemente en θ. Por tanto

$$\|f\|_p = \lim_{r\to 1} M_p(g_n \cdot B_n) = \lim_{r\to 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \cdot |B_n(re^{i\theta})|^p \, \frac{d\theta}{2\pi} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora bien, para $\varepsilon \in (0,1)$ prefijado, existe un $r_0 = r_0(\varepsilon) \in (0,1)$ tal que $|B_n(re^{i\theta})| > 1 - \varepsilon$ para todo $r > r_0(\varepsilon)$ y todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto

$$\|f\|_p \geq (1-\varepsilon) \lim_{r\to 1} M_p(g_n, r) = (1-\varepsilon)\|g_n\|_p \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0,1),$$

de donde se deduce que $\|f\|_p \geq \|g_n\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, se tiene que $|g_n| \geq |f|$ en $\mathbb{D}$ porque $|B_n| < 1$ en $\mathbb{D}$. Nótese que la desigualdad opuesta es trivial. Por tanto, $\|f\|_p = \|g_n\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada $z \in \mathbb{D}$, tenemos que $|g_n(z)| \nearrow |g(z)|$ $(n \to \infty)$. Del Teorema de la convergencia monótona se deduce, para cada $r \in (0,1)$, que $\lim_{n\to\infty} M_p(g_n, r) = M_p(g, r)$. Por último, observemos que $M_p(g, r) \leq \|f\|_p$ para todo $r \in (0,1)$, así que $\|g\|_p \leq \|f\|_p$ y, como consecuencia, $g \in H^p$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$. $\square$

Para finalizar esta sección añadimos que, con una simple aplicación del Teorema de Fubini tras un cambio a coordenadas polares, se demuestra fácilmente que el espacio de Hardy H^p $(0 < p < \infty)$ está contenido en el espacio de Bergman del disco B^p. También ofrecemos dos ejemplos comparativos entre diversos espacios: puede probarse que, si $\alpha > 0$ y $f_\alpha(z) := \dfrac{1}{(1-z)^\alpha}$, entonces $f_\alpha \in H^p$ si y solo si $\alpha p < 1$; y que $f(z) := \exp \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{p>0} H^p$.

5.2. Integrales de Poisson–Stieltjes

Recordemos la función *núcleo de Poisson* del disco unidad, dado por

$$P_r(\theta) := \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \operatorname{Re} \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \quad (0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi).$$

Recordemos que $\mathbb{T}$ denota la circunferencia unidad. Si asimilamos $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ (con 0 y 2π identificados), denotaremos por $L^p(\mathbb{T})$ $(0 < p < \infty)$ el espacio vectorial de las funciones medibles $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tales que $|\varphi|^p$ es integrable respecto de la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$.

Definición 5.3. *Si* $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$*, se define su* transformada de Poisson *o* integral de Poisson *como la función* $P[\varphi] : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$P[\varphi](z) := \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(\theta - \alpha)\, \frac{d\theta}{2\pi} \quad (z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}).$$

De teoremas conocidos de analiticidad y derivabilidad de integrales dependientes de un parámetro, obtenemos que $P[\varphi] \in Arm(\mathbb{D})$ para cada $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Como caso particular, el Teorema de Schwarz, que resuelve el Problema de Dirichlet en un disco, afirma que, dada $\varphi \in C(\mathbb{T})$, se tiene que $P[\varphi]$ es la única función armónica en $\mathbb{D}$ que se prolonga continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$ definiéndola como "φ" en $\mathbb{T}$. Si $\mu(\theta) := \int_0^\theta \varphi(e^{i\widetilde{\theta}})\, d\widetilde{\theta}$, entonces $\mu \in C^1[0, 2\pi]$ (en particular, μ es de variación acotada en $[0, 2\pi]$) y $P[\mu](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \alpha)\, d\mu(\theta)$, entendida ésta como integral de Riemann-Stieltjes. Recordemos que una función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *de variación acotada* en $[a, b]$ cuando $\sup\{\sum_{j=1}^p |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b,\ p \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Estas funciones constituyen un espacio vectorial que denotaremos por $BV[a, b]$.

Generalizando esta idea, introducimos el siguiente concepto. Notemos que, como antes, las funciones resultantes son armónicas en $\mathbb{D}$.

Definición 5.4. *Dada una función* $\mu : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de variación acotada, diremos que la función asociada*

$$U(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \alpha)\, d\mu(\theta) \quad (z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D})$$

es una integral de Poisson–Stieltjes.

Conviene recordar las siguientes propiedades del núcleo de Poisson: Para cada $r \in (0, 1)$, la función P_r es > 0, par, 2π-periódica, y creciente estrictamente en $[0, \pi]$; además, su masa normalizada es la unidad, es decir, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$.

Nos preguntamos cuándo una función $u \in Arm(\mathbb{D})$ es una integral de Poisson–Stieltjes. El resultado siguiente –conocido como *Teorema de caracterización de las integrales de Poisson-Stieltjes*– nos da la respuesta diciéndonos que esto ocurre cuando las medias integrales de su módulo en circunferencias concéntricas están acotadas.

Teorema 5.5. *Sea* $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Son equivalentes:*

(a) *u es una integral de Poisson–Stieltjes.*

(b) *Existen $u_1, u_2 \in Arm(\mathbb{D})$ tales que $u_1, u_2 \geq 0$ y $u = u_1 - u_2$ en $\mathbb{D}$.*

(c) *$u \in Arm(\mathbb{D})$ y $\sup_{0 \leq r \leq 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta < +\infty$.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Por hipótesis, existe una función de variación acotada $\mu : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(z = re^{i\alpha}) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \alpha) \frac{d\mu(\theta)}{2\pi}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora bien, como μ es de variación acotada, se pueden encontrar dos funciones $\mu_1, \mu_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ crecientes tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Entonces

$u = u_1 - u_2$, donde $u_j := \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \alpha)\, d\mu_j(\theta)$ $(j = 1, 2)$ son armónicas, y además son no negativas ya que $P_r(\theta) > 0$ para todo par r, θ.

(b) $\Rightarrow$ (c): Por un lado, y de acuerdo con la hipótesis, existen u_1, $u_2 \in Arm(\mathbb{D})$ tales que $u_1, u_2 \geq 0$ y $u = u_1 - u_2$. Por tanto, $u \in Arm(\mathbb{D})$. Por otro lado, fijado $r \in [0, 1)$, se tiene que $|u(re^{i\theta})| \leq u_1(re^{i\theta}) + u_2(re^{i\theta})$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, luego, por la propiedad del Valor Medio, resulta que, para todo $r \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta &\leq \int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})\, d\theta + \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})\, d\theta \\ &= (u_1(0) + u_2(0)) \cdot 2\pi = \text{ constante } < +\infty,\end{aligned}$$

así que obtenemos (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): Sea $u \in Arm(\mathbb{D})$ tal que $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta =: C < +\infty$. Hemos de encontrar una función $\mu \in BV[0, 2\pi]$ adecuada de modo que su integral de Poisson–Stieltjes coincida con u. Para cada $r \in (0, 1)$, definimos la función $\mu_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\mu_r(t) := \int_0^t u(re^{i\theta})\, d\theta$. Para cada partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$ de $[0, 2\pi]$, resulta que $\sum_{j=1}^n |\mu_r(t_j) - \mu_r(t_{j-1})| \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq C$, así las funciones μ_r $(0 < r < 1)$ son uniformemente de variación acotada y uniformemente acotadas. Haciendo uso del Teorema de selección de Helly (ver las notas que siguen a esta demostración), obtenemos la existencia de una sucesión de números reales positivos $(r_n) \nearrow 1$ y de una función $\mu \in BV[0, 2\pi]$ tales que $\mu_{r_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y, si $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\alpha - t)\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\alpha - t)\, d\mu_{r_n}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\alpha - t) u(r_n e^{it})\, dt = \lim_{n\to\infty} u(r_n z) = u(z),$$

donde se ha usado la Fórmula de Poisson en la penúltima igualdad. Hemos probado (a). $\square$

Notas 5.6. 1. La prueba hace uso del Teorema de selección de Helly, cuyo enunciado es el siguiente: Sea (μ_n) una sucesión uniformemente acotada de funciones uniformemente de variación acotada $[a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces existe una subsucesión (μ_{n_k}) de (μ_n) así como una función $\mu \in BV[a,b]$ tales que $\mu_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ puntualmente en $[a,b]$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi(t)\, d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b \varphi(t)\, d\mu(t)$$

para toda función $\varphi \in C([a,b])$.

2. En la implicación "$(c) \Rightarrow (a)$" también podría haberse dado una prueba más analítico-funcional, basada en el así llamado *Teorema de Banach-Alaoglu*: Una sucesión acotada $(\Lambda_n) \subset X^*$ de funciones lineales y continuas sobre un espacio de Banach separable X tiene una subsucesión (Λ_{n_k}) que converge en la topología $*$-débil, es decir, $\Lambda_{n_k} x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda x$ para todo $x \in X$, donde Λ es cierto elemento de X^*. Esto se aplicaría a $X = C([0,2\pi])$ y a $\Lambda_n f := \int_0^{2\pi} u(s_n e^{i\theta}) f(\theta)\, d\theta$ $(n \in \mathbb{N},\, f \in X)$, donde (s_n) es cualquier sucesión en $(0,1)$ que tiende a 1. Después se aplicaría el Teorema de Representación de Riesz.

3. De la prueba del Teorema 5.5 se deduce la así denominada *representación de Herglotz*: Toda función $u \in Arm(\mathbb{D})$ con $u \geq 0$ es la integral de Poisson–Stieltjes de alguna función creciente.

5.3. Valores frontera radiales

Utilizando el último teorema demostrado, pretendemos probar la existencia de valores radiales finitos $f^*(e^{i\theta})$ e.c.t. $\theta \in [0,2\pi]$, para cada $f \in H^p$ $(0 < p \leq +\infty)$, e incluso para cada $f \in \mathcal{N}$. Después veremos cómo las correspondientes funciones f^* tienen adecuadas propiedades de integrabilidad y sirven para definir las normas en los H^p.

Recordemos que, si $\mu \in BV[0, 2\pi]$, entonces existe $\mu'(\theta) \in \mathbb{R}$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Por otra parte, para cualquier función $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, la *derivada simétrica* de α en un punto $t_0 \in I$ es, si existe, el límite $D_\alpha(t_0) := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t_0+t) - \alpha(t_0-t)}{2t}$. Es fácil ver que, si α es diferenciable en t_0, entonces existe $D_\alpha(t_0) = \alpha'(t_0)$. Pero de la existencia de $D_\alpha(t_0)$ no se deduce la de $\alpha'(t_0)$. Con esta herramienta de la derivada simétrica, vamos a demostrar que el límite radial de la transformada de Poisson de una función integrable φ en la circunferencia unidad coincide con dicha función φ.

Teorema 5.7. *Sean $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $\mu \in BV[0, 2\pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ y $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Se verifica:*

(a) *Si u es la integral de Poisson-Stieltjes de μ, entonces existe el límite radial* $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta_0}) = D_\mu(\theta_0)$*, si existe $D_\mu(\theta_0) \in \mathbb{R}$.*

(b) *Si $u \in Arm(\mathbb{D})$ y $\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta < +\infty$, entonces u tiene límite radial finito $=: u^*(e^{i\theta})$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$.*

(c) *Si $u = P[\varphi]$, entonces existe $u^*(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. La parte (b) se deduce de (a) y del Teorema 5.5, anterior, ya que existe $\mu'(\theta) \in \mathbb{R}$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. La parte (c) es el caso especial $\mu(\theta) := \int_0^\theta \varphi(e^{it})\, dt$, pues en tal caso se tiene que μ es de variación acotada y existe $\mu'(\theta) = \varphi(e^{i\theta})$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Resta pues probar (a).

Para ello, podemos suponer que $\theta_0 = 0$, así que se ha de probar que $\lim_{r\to 1} u(r) = A$, donde hemos llamado $A := D_\mu(0)$. Usando el hecho $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$ junto con una integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} u(r) - A &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\mu(\theta) - A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d(\mu(\theta) - A\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi}[P_r(\theta)(\mu(\theta) - A\theta)]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mu(\theta) - A\theta)P_r'(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

El minuendo de la expresión anterior converge a 0 cuando $r \to 1$.

Ahora bien, para cada $\delta \in (0, \pi)$ fijo, resulta que

$$|P_r'(\theta)| \leq \frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta + r^2)^2} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0 \quad \text{si} \quad 0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi.$$

Por tanto

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} (\mu(\theta) - A\theta) \cdot P_r'(\theta)\, d\theta = 0,$$

así que $u(r) = A + I(\delta, r) + \alpha(\delta, r)$ para cada $\delta > 0$, donde $\lim_{r\to 1} \alpha(\delta, r) = 0$ y

$$I(\delta, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (\mu(\theta) - A\theta) P_r'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (\frac{\mu(\theta) - \mu(-\theta)}{2\theta} - A) \cdot \theta \cdot (-P_r'(\theta))\, d\theta.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escojamos $\delta \in (0, \pi)$ tal que $\left|\frac{\mu(\theta)-\mu(-\theta)}{2\theta} - A\right| \leq \varepsilon$ para todo $\theta \in (0, \delta)$. Ya que $\cos\theta$ es decreciente en $[0, \pi]$, tenemos que $P_r(\theta)$ también lo es, luego $|P_r'(\theta)| = -P_r'(\theta)$ en $[0, \pi]$.

Tengamos presente ahora que $P_r'(\theta)$ es impar en $[-\pi, \pi]$, así que $|P_r'(\theta)| = P_r'(\theta)$ en $[-\pi, 0]$. Esta observación y una integración por partes nos conducen a $|I(\delta, r)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |\theta| |P_r'(\theta)|\, d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \theta(-P_r'(\theta))\, d\theta.$

En resumen, tenemos: $u(r) = A + [\text{un término con } |\cdot| < \varepsilon] + \alpha(\delta, r)$. Para el $\delta > 0$ que ya se ha fijado y para el $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $r_0 \in (0, 1)$ tal que $|\alpha(\delta, r)| < \varepsilon$ para todo $r \in (r_0, 1)$, de donde se deduce que $|u(r) - A| < 2\varepsilon$ para todo $r \in (r_0, 1)$. En consecuencia, $\lim_{r\to 1} u(r) = A$, como queríamos demostrar. □

5.4. Límites no tangenciales

En el caso de funciones holomorfas y acotadas, podemos afinar un poco más la afirmación de existencia de límites radiales. Se dice que una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene *límite no-tangencial* $L \in \mathbb{C}$ en un punto $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ cuando $\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0} \\ z\in S_\alpha(\theta_0)}} f(z) = L$ para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, donde $s_\alpha(\theta_0) := \{z \in \mathbb{D} : |\arg(e^{i\theta_0} -$

$z)| < \alpha\}$. Tenemos entonces el siguiente resultado, conocido como *Teorema de Fatou del límite no-tangencial.*

Teorema 5.8. *Si $f \in H^\infty$, el límite radial $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ existe e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Además, si θ_0 es tal que existe $f^*(e^{i\theta_0})$, entonces f tiene límite no-tangencial en $e^{i\theta_0}$ y coincide con $f^*(e^{i\theta_0})$.*

Demostración. Ya que $f = u+iv$ es acotada, lo mismo ocurre con su parte real u y su parte imaginaria v, luego ambas cumplen la condición dada en (b) del Teorema 5.7, luego $u^*(e^{i\theta})$ y $v^*(e^{i\theta})$ existen (y son finitos) e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto, existe $f^*(e^{i\theta})$ (y es finito) e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Sea ahora $t_0 = e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ un punto tal que existe $f^*(t_0) =: L(\in \mathbb{C})$. Hemos de probar que, dado $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, se tiene

$$f(z) \underset{z\to t_0,\, z\in S_\alpha(\theta_0)}{\longrightarrow} L.$$

Mediante una rotación seguida de una traslación, podemos suponer que $f \in H^\infty(B(1,1))$, de modo que existe el límte $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$. Si $\delta \in (0,1)$, resulta que $\delta \cdot B(1,1) \subset B(1,1)$, luego $\{f_n(z) := f(\frac{z}{n})\}_{n=1}^\infty \subset H^\infty(B(1,1))$ y la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ está uniformemente acotada en $B(1,1)$. Ya que, además, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ para todo $x \in (0,2)$, del Teorema de Vitali (Teorema 1.5) junto con el Principio de Prolongación Analítica se desprende que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ compactamente en $B(1,1)$. En particular, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ uniformemente en el compacto $K := \{z : |\arg z| \leq \alpha$ y $\frac{\cos\alpha}{2} \leq |z| \leq \cos\alpha\}$ $(\subset B(1,1))$. Hemos de probar que $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} f(z) = L$, donde $S := \{z \in B(1,1) : |\arg z| \leq \alpha\}$. Con este fin, fijemos $\varepsilon > 0$. Se ha de encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in S \cap B(0,\delta)$. Para tal ε, podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(\frac{z}{n}) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in K$ y todo $n \geq n_0$. Ahora bien, para que se dé la inclusión $S \cap B(0,\delta) \subset \bigcup_{n\geq n_0} \frac{1}{n} \cdot K$, basta tomar $\delta = \frac{\cos\alpha}{n_0}$. □

Gracias a este teorema, queda probado la primera parte del Lema 4.9, cuya demostración quedó pospuesta: existe $B^*(e^{i\theta})$ (finito, necesariamente), e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Queda pues probar que $|B^*| = 1$ e.c.t. θ. Veámoslo: En primer lugar, ya que $|B| \leq 1$ en $\mathbb{D}$, es claro que $|B^*| \leq 1$ en todo punto donde exista B^*.

En cuanto a la desigualdad opuesta, recordemos que, para cada $f \in H(\mathbb{D})$, la función $r \in [0,1) \mapsto M_1(f,r) \in \mathbb{R}$ es creciente. En consecuencia, si $f \in H^\infty$, del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que, para todo $r \in [0,1)$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \lim_{s\to 1} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{s\to 1} |f(se^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Aplicándo esto a $f = \frac{B}{B_n}$, donde B_n es el producto parcial n-ésimo, y teniendo en cuenta que $|B_n^*(e^{i\theta})| \equiv 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |B^*(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Pero $B_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ uniformemente en $\{|z| = r\}$. Por tanto $2\pi \leq \int_0^{2\pi} |B^*(e^{i\theta})|\, d\theta$ y, puesto que $|B^*| \leq 1$ e.c.t. θ, debe ser $|B^*| = 1$ e.c.t. θ.

El Teorema de Representación de F. y R. Nevanlinna, visto más atrás, permite deducir propiedades de las funciones de la clase $\mathcal{N}$ a partir de las correspondientes propiedades de las funciones de H^∞. Por ejemplo, el comportamiento fronterizo puede ahora analizarse para $\mathcal{N}$.

Teorema 5.9. (a) *Si $f \in \mathcal{N}$, entonces el límite no tangencial $f^*(e^{i\theta})$ existe y es finito e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Lo mismo ocurre si $f \in H^p$, donde $p > 0$.*

(b) *Si $f \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, entonces $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.*

(c) *Si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.*

(d) *Si $f, g \in \mathcal{N}$ (o bien si $f, g \in H^p$ para algún $p > 0$) son tales que $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$ en un subconjunto $A \subset [0, 2\pi]$ de medida de Lebesgue $\lambda(A) > 0$, entonces $f = g$ en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Lo relativo a H^p en (a) y (d) resulta de ser $H^p \subset \mathcal{N}$. Respecto a (d), sean $f, g \in \mathcal{N}$ tales que $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$ para todo $\theta \in A$, donde $\lambda(A) > 0$. Entonces $h := f - g \in \mathcal{N}$ y $h^* = 0$ en A. De esto se deduce que $\log |h^*| \notin L^1(\mathbb{T})$, y por tanto $h \equiv 0$, luego $f \equiv g$. Así que hay que probar (a),(b) y (c).

Si $f \equiv 0$, (a) es evidente. Supongamos pues que $f \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Tomemos dos funciones $\varphi, \psi \in H^\infty$ tales que $|\varphi| \leq 1$, $|\psi| \leq 1$ y $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Al ser acotadas, del Teorema de Fatou se deduce que φ y ψ tienen límites no tangenciales finitos, $\varphi^*(e^{i\theta})$ y $\psi^*(e^{i\theta})$ respectivamente, e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Apelando al Lema de Fatou, encontramos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\log |\varphi^*(e^{i\theta})|| \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \liminf_{r \to 1} |\log |\varphi(re^{i\theta})|| \, d\theta \\
&\leq \liminf_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |\log |\varphi(re^{i\theta})|| \, d\theta \\
&= \liminf_{r \to 1} \Big\{ - \int_0^{2\pi} \log |\varphi(re^{i\theta})| \, d\theta \Big\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, gracias al Teorema de Jensen, la función

$$r \in [0, 1) \longmapsto \int_0^{2\pi} \log |\varphi(re^{i\theta})| \, d\theta =: \Phi(r) \in \mathbb{R}$$

es creciente, luego la función opuesta $-\Phi(r)$ (≥ 0) es decreciente a un límite necesariamente finito. Por tanto $\int_0^{2\pi} |\log |\varphi^*(e^{i\theta})|| \, d\theta < +\infty$, así que $\log |\varphi^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Análogamente, $\log |\psi^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En particular, $\psi^*(e^{i\theta}) \neq 0$ e.c.t. θ. En consecuencia, el límite no-tangencial (y radial) $f^*(e^{i\theta})$ existe y es finito e.c.t. θ, y además $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ porque $\log |f^*| = \log |\varphi^*| - \log |\psi^*|$. Esto prueba (a) y (b).

Probemos (c): Sea $f \in H^p$. Aplicamos de nuevo el Lema de Fatou, pero esta vez a $|f^*(e^{i\theta})|^p$. Usando que la función $r \mapsto \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta$ es creciente por el Teorema 2.12, resulta que

$$\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \limsup_{r\to 1} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \limsup_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \sup_{0\leq r<1} (M_p(f,r))^p = \|f\|_p^p < +\infty.$$

Como consecuencia, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, y además $\|f^*\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \leq \|f\|_p$. La prueba ha terminado. □

5.5. Convergencia en media para funciones de H^p

Hemos visto que, para una función $f \in H^p$, es $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$. De hecho, el siguiente resultado muestra que $f(re^{i\theta})$ converge en media cuando $r \to 1$ a su función límite radial, y que las normas de f y f^* son, de hecho, iguales. Antes necesitamos el siguiente resultado auxiliar, que es bien conocido de Teoría de la Medida e Integración.

Lema 5.10. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito, $p \in (0, +\infty)$ y $(\varphi_n) \subset L^p_\mu(X)$. Sea $\varphi \in L^p_\mu(X)$ tal que $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ e.c.t. $x \in X$ y $\|\varphi_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\varphi\|_p$. Entonces $\|\varphi_n - \varphi\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, es decir, (φ_n) converge a φ en la norma de $L^p_\mu(X)$.*

Su prueba, que omitimos, se basa en aplicar el Lema de Fatou (ver, por ejemplo, [17, p. 201]) a la sucesión $\{2^p(|\varphi_n|^p + |\varphi|^p) - |\varphi_n - \varphi|^p\}_{n\geq 1}$.

Ya estamos preparados para demostrar el siguiente *Teorema de convergencia en media de H^p a valores frontera.*

Teorema 5.11. *Si $p \in (0, +\infty)$ y $f \in H^p$, entonces $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Demostración. La primera parte se deduce de la segunda junto con la desigualdad de Minkowski. Probemos pues esta segunda parte. Para ello, la demostramos primero para $p = 2$. Vamos a usar que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se tiene $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, y que $\int_0^{2\pi} e^{i\theta k} d\theta = 2\pi$ si $k = 0$, valiendo 0 dicha integral para todo entero k no nulo.

Fijemos pues una función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Aplicando el Lema de Fatou, obtenemos para todo $r \in (0,1)$ lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^2 d\,\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{\rho \to 1} |f(re^{i\theta}) - f^*(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\theta \\
&\leq \limsup_{\rho \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\theta \\
&= \limsup_{\rho \to 1} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^n - \rho^n) e^{i\theta n} \right|^2 \, d\theta \\
&= \limsup_{\rho \to 1} 2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\rho^n - r^n)^2 \\
&= 2\pi \cdot \sum_{1}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2.
\end{aligned}$$

Haciendo ahora que $r \to 1$, resulta que $\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = 0$. Como se ha observado antes, de aquí deducimos que $\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$, lo cual no es más que $\|f\|_2 = \|f^*\|_2$.

Sean ahora $p \in (0, +\infty)$ y $f \in H^p$. Por el Teorema de Factorización por productos de Blaschke, existe una función $g \in H^p$ sin ceros en $\mathbb{D}$ tal que $f = B \cdot g$, donde B es el producto de Blaschke generado por los ceros de f. Ya que $g^{\frac{p}{2}} \in H^2$, $|B^*| = 1$ e.c.t. θ y $|B| \leq 1$ en $\mathbb{D}$ (luego $|g| \geq |f|$), resulta que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})^p| \, d\theta \underset{r \to 1}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} |g^*(e^{i\theta})|^p \, d\theta = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \, d\theta,$$

luego $\limsup_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \, d\theta$. Pero, por el Lema de Fatou, $\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \liminf_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta$. En consecuencia, existe el límite $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta$ y su valor es $\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})|^p\,d\theta$.

Finalmente, si aplicamos el Lema 5.10 a una sucesión $\varphi_n(\theta) := f(r_n e^{i\theta})$ $(n\in\mathbb{N})$ [donde (r_n) es cualquier sucesión en $(0,1)$ con $r_n\to 1$] obtenemos $\int_0^{2\pi}|f(r_n e^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^p\,d\theta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En consecuencia, obtenemos $\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^p\,d\theta \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0$, como se requería. $\square$

Se deducen las siguientes consecuencias, siendo la primera de ellas sencilla, y por tanto no damos prueba de la misma.

Corolario 5.12. *Si $f\in H^p$ para algún $p>0$, entonces*

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|f^*(e^{i\theta})||\,d\theta = 0.$$

Corolario 5.13. *Si $p>0$ y $f\in H^p$, entonces para todo $r\in[0,1)$ y todo $\theta\in[0,2\pi]$ se tiene que $\log|f(re^{i\theta})| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\cdot\log|f^*(e^{it})|\,dt$.*

Demostración. Por el Teorema de factorización de Riesz por productos de Blaschke, podemos extraer el factor $B(z)$ de Blaschke –cuya presencia sólo reforzaría la desigualdad, pues $|B(re^{i\theta})|<1$ y $|B^*(e^{it})| = 1$ e.c.t. $t\in[0,2\pi]$– y suponer, por tanto, que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{D}$. Luego $\log|f|\in Arm(\mathbb{D})$ y, gracias a la Fórmula de Poisson, se obtiene para todo $r\in[0,1)$, todo $\theta\in[0,2\pi]$ y todo $\rho\in(r,1)$, que $\log|f(\rho\, re^{i\theta})| = \displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\log|f(\rho e^{it})|\,dt$. Por el corolario anterior, se tiene

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\cdot\log^+|f(\rho e^{it})|dt = \int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\log^+|f^*(e^{it})|dt.$$

Por otra parte, por el Lema de Fatou, resulta que

$$\limsup_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\log^-|f(\rho e^{it})|\,dt \ge \int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\log^-|f^*(e^{it})|\,dt.$$

Combinando estas desigualdades, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\log|f(re^{i\theta})| &= \lim_{\rho\to 1}|f(\rho re^{i\theta})|dt = \lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log|f(\rho e^{it})|\,dt \\
&= \lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^+|f(\rho e^{it})|\,dt - \lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^-|f(\rho e^{it})|\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^+|f^*(e^{it})|\,dt - \limsup_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^-|f(\rho e^{it})|\,dt \\
&\le \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^+|f^*(e^{it})|\,dt - \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^-|f^*(e^{it})|\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log|f^*(e^{it})|\,dt,
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. Hacemos notar que el cuarto límite que aparece en la cadena anterior existe porque existen los dos anteriores y son finitos. □

Usando el último corolario, podemos refinar el Teorema de Factorización de Riesz, para producir un resultado más sutil, relacionado con la rapidez con la que el factor que no se anula tiende a cero a lo largo de ciertos radios. Se conoce como *factorización canónica* de H^p y su prueba requiere técnicas más avanzadas. Puede consultarse en el libro de Rudin [5, Cap. 17].

5.6. Operadores de composición

Aprovechamos ahora las técnicas anteriores para establecer la continuidad del *operador de composición* sobre H^p. Recordemos que si $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es analítica, el operador de composición C_φ se define como $C_\varphi f = f \circ \varphi$, para cada $f \in H^p$.

Introduzcamos antes un concepto. Vimos en el Capítulo 2 que si $p > 0$ y $f \in H(G)$ entonces $|f|^p \in SA(G)$, donde $G \subset \mathbb{C}$ es una región. Por tanto, en cada disco cerrado $B \subset G$, la función $|f|^p$ está dominada (es decir, es $\le$) por una función $U \in Arm(B)$, a saber, la integral de Poisson de $|f|^p_{|\partial B}$. Pero puede que *no* exista ninguna función $U \in Arm(G)$ que domine $|f|^p$ en *todo* G. Por definición, diremos que una función $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *tiene una armónica mayorante* en G cuando existe $U \in Arm(G)$ tal que $U(z) \geq 0$ y $g(z) \leq U(z)$ para todo $z \in G$.

Teorema 5.14. *Sean $p \in (0, +\infty)$ y $f \in H(\mathbb{D})$. Entonces $f \in H^p$ si y solo si $|f|^p$ tiene una mayorante armónica en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Supongamos que $|f|^p$ tiene una mayorante armónica U. Por la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tenemos que $M_p(f, r) \leq M_1(U, r)^{\frac{1}{p}} = U(0)^{\frac{1}{p}}$, luego $\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} M(f, r) \leq U(0)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, de donde deducimos que $f \in H^p$.

Recíprocamente, si $f \in H^p$, se deduce del segundo corolario al Teorema de la convergencia en media a valores frontera (Corolario 5.13) y de la desigualdad integral de Jensen que, si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leq \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log(|f^*(e^{it})|^p)\,dt\Big\} \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f^*(e^{it})|^p\,dt =: U(z), \end{aligned}$$

y observamos que U es la integral de Poisson de la función valor frontera de $|f|^p$, luego $U \in Arm(\mathbb{D})$. En resumen, hemos obtenido para $|f|^p$ una mayorante armónica, como se deseaba. $\square$

Teorema 5.15. *Si $p \in (0, +\infty)$ y $\varphi \in H(\mathbb{D})$ es tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces el operador C_φ es un operador sobre H^p, es decir, está bien definido, $C_\varphi(H^p) \subset H^p$, es lineal y es continuo. De hecho, si $\|C_\varphi\|$ es su norma como elemento de $L(H^p)$ $(p \geq 1)$ entonces*

$$\|C_\varphi\| \leq \Big(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Utilizamos el teorema anterior y su prueba. Sea $f \in H^p$ y sea U la integral de Poisson de $|f^*(e^{i\theta})|^p$. Entonces $|f|^p \leq U$ en $\mathbb{D}$, luego $U \circ \varphi$

es una mayorante armónica de $|f\circ\varphi|^p$. Si ahora usamos la propiedad del valor medio –aplicada a $U\circ\varphi$– y la desigualdad $P_r(\theta)\leq\frac{1+r}{1-r}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}M_p(f\circ\varphi,r)^p &\leq M_1(U\circ\varphi,r)=U(\varphi(0))\leq\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\cdot\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\\ &=\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\cdot\|f\|_p^p=\text{constante}<+\infty\quad\text{para todo } r\in[0,1).\end{aligned}$$

Por tanto, como $\|f\circ\varphi\|_p^p=\sup_{0\leq r<1}M_p(f\circ\varphi,r)^p$, resulta

$$\|f\circ\varphi\|_p\leq\Big(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot\|f\|_p.$$

Se deduce entonces el resultado deseado, pues la linealidad es evidente. □

5.7. Representabilidad por integrales de Poisson y de Cauchy

A continuación, vamos a establecer que las funciones de H^p son representables como las *integrales de Poisson y de Cauchy* de sus valores frontera.

Teorema 5.16. *Sean $p\in[1,+\infty]$ y $f\in H(\mathbb{D})$. Entonces $f\in H^p$ si y solo si existe una función $\varphi\in L^p(\mathbb{T})$ tal que $f=P[\varphi]$. En este caso, se tiene $\varphi=f^*$ e.c.t. $\mathbb{T}$. Por tanto, para todo $z\in\mathbb{D}$, se tiene*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^*(e^{i\theta})\cdot\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta.$$

Además, se verifica

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{f^*(t)\,dt}{t-z}\quad\textit{para todo}\quad z\in\mathbb{D}.$$

Demostración. Supongamos que $f\in H^p$. Fijemos $R\in(0,1)$ y sea $g(z)=f(Rz)$. Entonces $g\in H(B(0,\frac{1}{R}))$, luego, por la Fórmula de la integral de Cauchy, podemos escribir para cada $z\in\mathbb{D}$ que

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{|t|=1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}e^{i\theta}\,d\theta,$$

lo cual implica que

$$f(Rz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta \underset{R\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f^*(t)\, dt}{t - z}.$$

En efecto, basta observar que

$$\Big| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - |z|} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|\, d\theta \underset{R\longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0,$$

donde lo último es debido al Teorema de convergencia en media en H^p (recordar que $H^p \subset H^1$). Ya que $f(Rz) \underset{R\to 1}{\longrightarrow} f(z)$, se obtiene la representación de Cauchy.

Denotemos ahora $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})\, dt$ $(z = re^{i\theta} \in \mathbb{D})$. Notemos que $f^* \in L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, luego Φ está bien definida. Ahora bien, por la Fórmula de Poisson –aplicada a $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$– obtenemos que $f(Rz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(Re^{it})\, dt$, así que

$$\Big| f(Rz) - \Phi(z) \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1 + r}{1 - r} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it}) - f^*(e^{it})|\, dt,$$

y el segundo miembro tiende a 0 cuando $R \to 1$, de nuevo por el Teorema de la convergencia en media en H^1. En consecuencia, $f(Rz) \longrightarrow \Phi(z)$ $(R \to 1)$, pero también $f(Rz) \longrightarrow f(z)$ $(R \to 1)$, de donde resulta por la unicidad del límite que $f = \Phi = P[f^*]$.

Supongamos ahora que $f = P[\varphi]$ para alguna función $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, tenemos $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(e^{it})\, dt$, luego $|f(re^{i\theta})|^p = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(e^{it})\, dt|^p$. Ahora bien, ya que $\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, dt = 2\pi$ para todo $r \in [0, 1)$ y todo $\theta \in [0, 2\pi]$, resulta que la medida $\mu_{r,\theta}$ definida por $d\mu_{r,\theta}(t) = \frac{P_r(\theta - t)}{2\pi}\, dt$ es una medida de probabilidad en $[0, 2\pi]$, luego, usando que $p \geq 1$ junto con la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini, obtenemos para todo $r \in [0, 1)$ que $|f(re^{i\theta})|^p = \Big| \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\, d\mu_{r,\theta}(t) \Big|^p \leq \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^p\, d\mu_{r,\theta}(t)$, de donde

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta &\le \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^p \, d\mu_{r,\theta}(t) \Big) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^p \frac{P_r(\theta - t)}{2\pi} \, d\theta \Big) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^p \Big(\int_0^{2\pi} \frac{P_r(\theta - t)}{2\pi} \, d\theta \Big) \, dt = \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^p \, dt.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \le \|\varphi\|_p^p =$ constante $< +\infty$, de donde se infiere que $f \in H^p$, como se requería.

Resta probar que, necesariamente, $\varphi = f^*$ e.c.t. $\mathbb{T}$. Esto sigue del Teorema de existencia del límite radial para integrales de Poisson-Stieltjes.

La segunda parte de la prueba que se acaba de ver vale para $p \in [1, +\infty)$. Queda ver el caso $p = +\infty$. Sea pues $f = P[\varphi]$ con $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Entonces $f(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{P_r(\theta - t)}{2\pi} \, dt$, lo cual implica que

$$|f(re^{i\theta})| \le \|\varphi\|_\infty \cdot \int_0^{2\pi} \frac{P_r(\theta - t)}{2\pi} \, dt = \|\varphi\|_\infty \cdot 1 = \|\varphi\|_\infty = \text{constante} < +\infty.$$

Por tanto $\|f\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$, así que $f \in H^\infty$. Que $\varphi = f^*$ se demuestra igual que antes. □

5.8. H^p como subespacio de $L^p(\mathbb{T})$. Coeficientes de Fourier

Si $p \ge 1$, el teorema que se acaba de establecer nos indica que una función $f \in H^p$ queda determinada por la función valor frontera radial f^*, y que $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Una pregunta natural es si existe algún *subespacio* de $L^p(\mathbb{T})$ de modo que la correspondencia anterior, $f \mapsto f^*$, permita identificarlo con H^p. La respuesta es afirmativa, y se deducirá del estudio de los *coeficientes de Fourier* de las funciones f^*.

Antes, aprovechando los conocimientos adquiridos sobre los espacios H^p, proporcionaremos un resultado importante, debido a los hermanos Riesz, que proporciona una condición suficiente de la continuidad absoluta de una medida compleja sobre $[0, 2\pi]$, a saber, la anulación de la mitad de los coeficientes de Fourier. Recordemos que, si $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible, μ es una medida compleja y ν es una medida positiva finita, ambas sobre $(X, \mathcal{M})$, se dice que μ es *absolutamente continua respecto de* ν cuando existe una función de densidad de la primera respecto de la segunda, es decir, una función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi \in L^1_\mu(X)$ y $\mu(A) = \int_A \varphi \, d\nu$ para todo $A \in \mathcal{M}$ (notación: $d\mu(t) = \varphi(t) d\nu(t)$); ver [12, Secs. 3.2 y 4.3]. Recordemos, asimismo, que si μ es una medida compleja de Borel sobre $[0, 2\pi]$, los *coeficientes de Fourier de* μ son los números $c_n(\mu) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, d\mu(\theta)$ $(n \in \mathbb{Z})$. En este contexto, podemos probar el siguiente *Teorema de F. y M. Riesz.*

Teorema 5.17. *Si* μ *es una medida compleja de Borel sobre* $[0, 2\pi]$ *y* $c_n(\mu) = 0$ *para todo* $n \in \{-1, -2, -3, \dots\}$, *entonces* μ *es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración. Para $z \in \mathbb{D}$, definamos $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - ze^{-it}}$. Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, entonces $\frac{1}{1-ze^{-it}} = \sum_{n=0}^\infty r^n e^{in(\theta - t)}$. Ahora bien, recordemos que $P_r(\theta - t) = \sum_{-\infty}^\infty r^{|n|} e^{in(\theta-t)}$, luego, ya que por hipótesis se tiene $\int_0^{2\pi} e^{int} \, d\mu(t) = 0$ para todo $n \geq 1$, obtenemos que $f(z) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \, d\mu(t)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En consecuencia, resulta para todo $r \in [0, 1)$ que

$$\begin{aligned} M_1(f, r) &= \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \, d\theta \Big) \, d|\mu|(t) \\ &= |\mu|([0, 2\pi]) = \text{constante} < +\infty, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $f \in H^1$. Hemos usado que la medida positiva *variación total de* μ, definida por $|\mu|(A) = \sup \big\{ \sum_{j=1}^N |\mu(A_j)| \, : \, \{A_1, ..., A_N\}$ es una partición finita medible de A y $N \in \mathbb{N} \big\}$ $(A \in \{\text{conjuntos de Borel de } [0, 2\pi]\})$ es una medida finita (ver [12, p. 53]).

Ahora bien, ya que $f \in H^1$, el Teorema 5.17 nos dice que $f(z) = P[f^*](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})\, dt$, donde $f^* \in L^1(\mathbb{T})$. Comparando, obtenemos que $d\mu(t) = f^*(e^{it})\, dt$, lo cual proporciona la conclusión deseada. $\square$

Retomando el tema que nos ocupa, consideremos el espacio vectorial $\mathcal{H}^p$ $(0 < p \leq \infty)$ de las funciones valor frontera f^* asociadas a funciones f de H^p. Como es habitual, dos funciones de $L^p(\mathbb{T})$ (recordemos que $\mathcal{H}^p \subset L^p(\mathbb{T})$) se identifican cuando son iguales e.c.t. $t \in \mathbb{T}$, así que los elementos de $\mathcal{H}^p$ son de hecho clases de equivalencia. Recordemos que:

(a) Si $1 \leq p < +\infty$, el conjunto $L^p(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma $\|\varphi\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$. Si $p = 2$, es incluso un espacio de Hilbert.

(b) Si $p = +\infty$, el conjunto $L^\infty(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma del supremo esencial: $\|g\|_\infty := \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : |g(e^{i\theta})| < \alpha \text{ e.c.t. } \theta \in [0, 2\pi]\right\}$.

(c) Si $0 < p < 1$, el espacio $L^p(\mathbb{T})$ es un espacio métrico completo con la distancia $d(f, g) = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|^p\, d\theta$.

Por el Teorema 5.16 junto con el Teorema de la convergencia en media, la aplicación

$$\Phi : \varphi \in \mathcal{H}^p \longmapsto P[\varphi] \in H^p$$

es un isomorfismo algebraico (es decir, Φ es lineal y biyectiva) e isométrico (pues $\|f\|_p = \|f^*\|_p$), siempre que $p \geq 1$. Por tanto, si identificamos $\mathcal{H}^p$ en $L^p(\mathbb{T})$ mediante los *coeficientes de Fourier,* tendremos una *caracterización de* H^p de tipo Fourier. De paso, también conseguimos otras propiedades de H^p, como son la *separabilidad* y la *densidad de la familia de los polinomios.*

Teorema 5.18. *Sea* $p \in (0, +\infty)$. *Se verifica:*

(a) $\mathcal{H}^p$ *es la clausura en* $L^p(\mathbb{T})$ *del conjunto de los polinomios en* $e^{i\theta}$, *es decir, del conjunto de funciones de la forma*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta} \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C};\ n = 0, 1, 2, \dots).$$

(b) *Los polinomios son densos en* H^p.

(c) H^p *es separable.*

(d) *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$, *y sea* $\left\{c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f^*(e^{i\theta})\, d\theta\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *la sucesión de coeficientes de Fourier de la función frontera* f^*. *Entonces* $c_n = \begin{cases} a_n & si \quad n \geq 0 \\ 0 & si \quad n < 0. \end{cases}$

(e) *Si* $p \in [1, +\infty]$, *entonces* $\mathcal{H}^p = \{\varphi \in L^p(\mathbb{T}) : c_n(\varphi) = 0$ *para todo* $n < 0\}$, *donde* $c_n(\varphi)$ $(n \in \mathbb{Z})$ *son los coeficientes de Fourier de* φ.

Demostración. (a) Supongamos que $\varphi \in \mathcal{H}^p$, con $0 < p < +\infty$. Entonces existe $f \in H^p$ tal que $\varphi = f^*$. Para $r \in (0, 1)$, denotemos $f_r(z) := f(rz)$. Por el Teorema de la convergencia en media, se tiene que $\|f_r - \varphi\|_p \underset{r \to 1}{\longrightarrow} 0$ donde la norma es en $L^p(\mathbb{T})$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $r \in (0, 1)$ tal que $\|f_r - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora $S_n(z)$ la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor de f en el origen. Ya que $S_n \longrightarrow f$ uniformemente en el compacto $\{|z| = r\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(S_{n_0})_r - f_r\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $p \geq 1$, la desigualdad de Minkowski da $\|(S_{n_0})_r - \varphi\|_p < \varepsilon$, luego φ está en la L^p-clausura del conjunto de los polinomios en $e^{i\theta}$. Para $p \in (0, 1)$, la desigualdad $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ $(a, b \geq 0)$ conduce al mismo resultado.

Para completar la prueba de (a), hemos de demostrar que $\mathcal{H}^p$ es cerrado en $L^p(\mathbb{T})$. Supongamos pues que $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}^p$ y que $\varphi_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^p(\mathbb{T})} \varphi \in L^p(\mathbb{T})$.

Usamos ahora el siguiente resultado, cuya prueba es fácil a partir de argumentos parecidos a los dados en la demostración del Teorema 5.1:
Si $0 < p < +\infty$ y $g \in H^p$, entonces $|g(z)| \leq \|g\|_p(1-|z|)^{\frac{-1}{p}}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Lo aplicamos a f_n, siendo ésta una función de H^p tal que $\varphi_n = f_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$. Ya que cada compacto $K \subset \mathbb{D}$ está contenido en alguna bola $B(0, R)$ con $R \in (0, 1)$, resulta que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada uniformemente en cada compacto $\subset \mathbb{D}$. De aquí y del Teorema de Montel, se deduce que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es relativamente compacta, y por tanto existen una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{f_n\}_{n\geq 1}$ y una función $f \in H(\mathbb{D})$ tales que $f_{n_k} \longrightarrow f$ $(k \to \infty)$ compactamente en $\mathbb{D}$.

A partir de aquí obtenemos, como en la prueba de la parte (a) del Teorema 5.1, que $f \in H^p$ y que $f_{n_k} \xrightarrow[k]{H^p} f$: usar que la sucesión (φ_n) es de $L^p(\mathbb{T})$-Cauchy y que $\|f_{n_k} - f_{n_j}\|_p = \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_j}\|_p$, con lo cual $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ es de H^p-Cauchy; allí obteníamos lo mencionado para $p \geq 1$, pero para $p < 1$ basta usar, de nuevo, la desigualdad $(a + b)^p \leq a^p + b^p$.

Tenemos que ver que $\varphi = f^*$, con lo cual $\varphi \in \mathcal{H}^p$ y $\mathcal{H}^p$ sería cerrado. Para ello, notemos que

$$\|\varphi_{n_k} - f^*\|_p = \|f_{n_k}^* - f^*\|_p = \|f_{n_k} - f\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De aquí obtenemos que $\varphi_{n_k} \to f^*$ $(k \to \infty)$ en $L^p(\mathbb{T})$, pero también $\varphi_{n_k} \to \varphi$ en $L^p(\mathbb{T})$, luego $\varphi(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ e.c.t. $\theta \in [0, 2\pi]$, como se quería demostrar.

(b) Sean $f \in H^p$ y $\varepsilon > 0$. Gracias a (a), existe un polinomio $P(z)$ tal que $\|f^* - P\|_p < \varepsilon$, donde $\|\cdot\|_p$ representa la norma en $L^p(\mathbb{T})$. Ahora bien, como $P^* = P$, tenemos $\|f - P\|_p = \|f^* - P\|_p$, luego $\|f - P\|_p < \varepsilon$. Esto prueba que los polinomios son densos en H^p.

(c) Este apartado se deduce de (b) sin más que considerar el subconjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, que es numerable y denso en el conjunto de los polinomios, luego lo es en H^p.

(d) Sea $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la sucesión de coeficientes de Fourier de f^*. Usando la Fórmula de la integral de Cauchy para derivadas, conseguimos expresar los coeficientes de Taylor como $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{-n}e^{-in\theta}f(re^{i\theta})\,d\theta$ para todo $r \in (0,1)$ y todo $n \geq 0$. Entonces

$$|r^n a_n - c_n| \leq \|f_r - f^*\|_1 \longrightarrow 0 \quad (r \to 1)$$

gracias al Teorema de la convergencia en media. Ahora bien, ya que $r^n \to 1$ cuando $r \to 1$, resulta que $|a_n - c_n| \leq 0$ para todo $n \geq 0$, así que $c_n = a_n$ para todo $n \geq 0$. Por otra parte, ya que $f \in H(\mathbb{D})$, se tiene $z^{m-1}f(z) \in H(\mathbb{D})$ para todo $m \geq 1$, luego, por el Teorema de la integral de Cauchy, $\oint_{|z|=r} z^{m-1}f(z)\,dz = 0$ para todo $r \in (0,1)$. En consecuencia, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^m e^{im\theta}f(re^{i\theta})\,d\theta = 0$. Entonces, haciendo $m := -n$ y procediendo como antes, obtenemos que $|0 - c_n| \leq 0$ para todo $n < 0$, es decir, $c_n = 0$ para todo $n < 0$.

(e) Supongamos que $p \in [1, +\infty]$. Notemos que entonces $H^p \subset H^1$, luego podemos aplicar el apartado anterior. Supongamos primero que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ y que $c_n(\varphi) = 0$ para todo $n < 0$. Sea $f := P[\varphi]$ la integral de Poisson de φ, es decir, $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\varphi(t)\,dt$ si $z = re^{i\theta}$. Recordemos que

$$P_r(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(e^{int} + e^{-int}) \quad (r \in [0,1),\, t \in [0, 2\pi]).$$

En consecuencia, tenemos para todo $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(e^{in(\theta-t)} + e^{-in(\theta-t)})\Big]\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{i\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde hemos usado que se pueden intercambiar las operaciones de sumación e integración debido a que la serie de las integrales de los módulos de las funciones en el integrando converge, lo cual a su vez es cierto porque $\sum_{n=0}^{\infty} r^n < +\infty$ y $\varphi \in L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. Tras el intercambio, también se ha tenido en cuenta que $c_n(\varphi) = 0$ cuando $n < 0$.

En resumen, tenemos que $f \in H(\mathbb{D})$ y $f = P[\varphi]$ con $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$, luego $f \in H^p$ y $\varphi = f^*$ e.c.t. $\mathbb{T}$, así que $\varphi \in \mathcal{H}^p$. Con esto hemos obtenido la parte "$\supset$" de la igualdad. La inclusión "$\subset$" resulta del apartado (d). $\square$

Como comentario final, hacemos notar que, usando que $|g(z)| \leq \|g\|_p(1 - |z|)^{\frac{-1}{p}}$ para toda $g \in H(\mathbb{D})$, se puede probar, de manera muy similar a la parte (a) del Teorema 5.1, que H^p es también *completo* para $0 < p < 1$.

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, London, 1979.

[2] J.B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer, New York, 1986.

[3] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Vol. 3, John Wiley, New York, 1986.

[4] E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vols. 1 y 2, 2nd edition revised, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2012.

[5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Otras Referencias

[6] M. Andersson, *Topics in Complex Analysis*, Springer, New York, 1996.

[7] S.K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, 2ª edición, Teide, Barcelona, 1977.

[8] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Dover, New York, 2000.

[9] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkäuser, Boston, 1987.

[10] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions*, revised 1st edition, Springer, New York, 2007.

[11] M.O. González, *Complex Analysis. Selected Topics*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[12] M. Guzmán y B. Rubio, *Integración: Teoría y Técnicas*, Alhambra, Madrid, 1979.

[13] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer, New York, 2000.

[14] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Dover Publications Inc., Mineola NY, 1990.

[15] V. Karunakaran, *Complex Analysis*, second edition, Alpha Science, Harrow, UK, 2005.

[16] A.I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[17] O. Nielsen, *An introduction to Integration and Measure Theory*, John Wiley, New York, 1997.

[18] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1991.

[19] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, 2ª edición, Reverté, Barcelona, España, 1996.

[20] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1990.